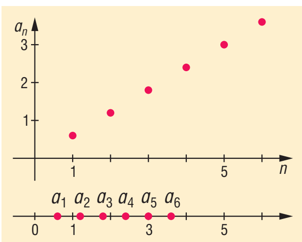
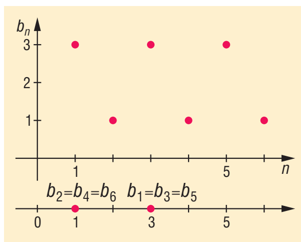
12.2. SZÁMSOROZATOK

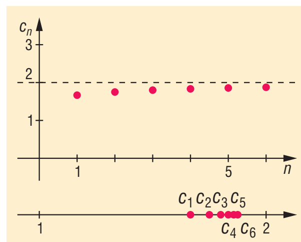
A sorozat fogalma, példák sorozatokra – megoldások

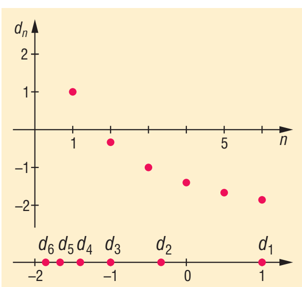
4068 *a)* $a_5 = -2, \quad a_{20} = 28;$ *b)* $b_5 = 75, \quad b_{20} = 0;$ *c)* $c_5 = -100, \quad c_{20} = 200;$
d) $d_5 = 53, \quad d_{20} = 7703;$ *e)* $e_5 = \sqrt{19}, \quad e_{20} = 8;$ *f)* $f_5 = \sqrt{21} - 5, \quad f_{20} = -11;$
g) $g_5 = 0, \quad g_{20} = \dfrac{45}{41};$ *h)* $h_5 = 11, \quad h_{20} = \dfrac{397}{17}$

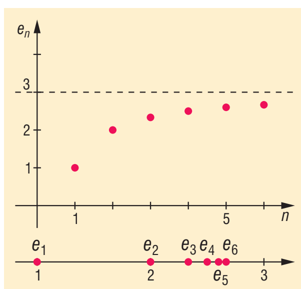
4069 *a)* $a_n = 4 + n;$ *b)* $b_n = 2n - 5;$ *c)* $c_n = -2^{n-1};$
d) $d_n = (-1)^{n+1};$ *e)* $e_n = \dfrac{1}{n};$ *f)* $f_n = \sqrt[n+1]{7};$
g) $g_n = \log_2 n;$ *h)* $h_n = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad n = 3k+1, \\ 2, & \text{ha} \quad n = 3k+2, \\ 3, & \text{ha} \quad n = 3k. \end{cases}$

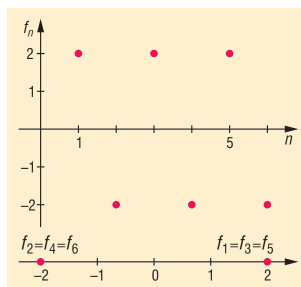
4070 *a)*


b)


c)


d)


e)


f)


4071 *a)* $16; \quad 4; \quad 1; \quad \dfrac{1}{4}; \quad \dfrac{1}{16}; \quad \dfrac{1}{64};$ *b)* 2006; 2002; 1998; 1994; 1990; 1986;
c) $\sqrt{3}; \quad \sqrt{7}; \quad \sqrt{11}; \quad \sqrt{15}; \quad \sqrt{19}; \quad \sqrt{23}.$

4072 $a_{2010} = 1, \quad S_{2010} = 6030.$

4073 *a)* $a_{50} = 12 = b_{25};$ *b)* $a_{12} = 4 = b_{99};$ *c)* $a_{60} = 1 = b_{67};$
d) $a_{43} = \dfrac{1}{2} < b_{101} = \dfrac{7}{13};$ *e)* $a_{77} = 3 > b_7 = 2.$

4074 *a)* $n = 6;$ *b)* $n = 10;$ *c)* $n = 11;$
d) $n = 12;$ *e)* $n = 2^{30};$ *f)* $n = 1; 5; 13; 17; \ldots$

Példák rekurzív sorozatokra – megoldások

4075 *a)* 5; 4; 2; –2; –10; *b)* 5; 6; 3; 12; –15;

c) 5; $\frac{7}{3}$; $\frac{5}{9}$; $-\frac{17}{27}$; $-\frac{115}{81}$; *d)* 5; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{1}{24}$.

4076 Építsük fel a sorozatot: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ és a negyedik tagtól kezdve:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},$$

tehát a további tagok:

$$a_4 = 7;\quad a_5 = 13;\quad a_6 = 24;\quad a_7 = 44;\quad a_8 = 81;\quad a_9 = 149;\quad a_{10} = 274.$$

Tehát 274-féleképpen érhetünk fel.

4077 A sorozat tagjai: 1; 1; 1; 1; 1, …, tehát $a_{2010} = 1$ és $S_{2010} = 2010$.

4078 A sorozat tagjai: 1; 1; 0; –1; –1; 0; 1; 1; …, látható, hogy egy hatos periódus után újra ugyanazok a számok lesznek a sorozat elemei.

Mivel $2009 = 6 \cdot 334 + 5$, a 2009-edik tag –1 lesz.

Egy periódusban a számok összege 0, mivel a hatodik elem is 0, az első 2009 tag összege is 0.

4079 Vizsgáljuk meg a sorozat tagjait:

$$a_3 = \frac{q+1}{p};\qquad a_4 = \frac{\frac{q+1}{p}+1}{q} = \frac{p+q+1}{p\cdot q};\qquad a_5 = \frac{\frac{p+q+1}{p\cdot q}+1}{\frac{q+1}{p}} = \frac{(p+1)\cdot(q+1)}{p\cdot q}\cdot\frac{p}{q+1} = \frac{p+1}{q};$$

$$a_6 = \frac{\frac{p+1}{q}+1}{\frac{p+q+1}{p\cdot q}} = p;\qquad a_7 = \frac{p+1}{\frac{p+1}{q}} = q.$$

A tagok ismétlődnek, a periódus öt. Tehát:

$$a_{2014} = a_4 = \frac{p+q+1}{p\cdot q}.$$

4080 *a)* Lehet, például: 1; 2009; 2010; …

b) Ha a második tag x, a sorozat tagjai:

$$1;\quad x;\quad 1+x;\quad 2\cdot(1+x);\quad 4\cdot(1+x);\quad 8\cdot(1+x);\quad \dots;\quad a_n = 2^{n-3}\cdot(1+x).$$

A $2^{n-3}\cdot(1+x) = 1000$ egyenlet legnagyobb megoldása $n = 6$, ekkor $x = 124$.

Számtani sorozatok – megoldások

4081 *a)* $a_{11} = 23$; *b)* $a_{56} = 158$; *c)* $a_{237} = 701$; *d)* $a_{2010} = 6020$.

4082 *a)* 46; *b)* 91; *c)* 9721.

4083 *a)* 2773-adik; *b)* 3016-odik; *c)* nem tagja a sorozatnak.

4084 $d = -1$.

4085 *a)* 116; *b)* 798.

4086 *a)* $a_6 = 23 + 5 \cdot 5 = 48$ km. *b)* $S_7 = 266$ km.

4087 A világcsúcs 158 kg.

4088 *a)* $a_1 = 7$ és $d = 3$. *b)* $S_{40} = 2620$.

4089 *a)* $a_1 = 50$ és $d = -4$. *b)* $S_{50} = -2400$.

4090 Igen, mivel

$$\frac{11\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{3\sqrt{5} + 1 + 8\sqrt{5} - 2}{2}.$$

A sorozat különbsége:

$$d = \frac{5\sqrt{5} - 3}{2}.$$

4091 *a)* A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + 2d + a_1 + 7d &= 34 \\ a_1 + d + a_1 + 10d &= 46 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $a_1 = -10$ és $d = 6$.

b) $2012 = a_{338}$.

4092 Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + (a_1 + 3d) &= 38 \\ (a_1 + 6d) - (a_1 + 2d) &= 16 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = 4$ és $a_1 = 13$.

a) 92; *b)* 101; *c)* 7860.

4093 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 9d) &= -25 \\ 2a_1 + 8d &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $a_1 = 13$ és $d = -2$.

4094 Az egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{aligned} 3a_1 + 3d &= -9 \\ 3a_1 + 9d &= 39 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = 8$ és $a_1 = -11$.

4095 Az egyenletrendszerünk a következő:

$$\left.\begin{aligned} 8a_1 + 28d &= 14 \\ 4a_1 + 26d &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = -\frac{1}{2}$ és $a_1 = \frac{7}{2}$.

4096 A feltétel szerint:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} = \frac{4a_1 + 6d}{4a_1 + 22d} = \frac{1}{3}, \quad \text{amiből} \quad d = 2a_1.$$

A keresett arány:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}}{a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{20}} = \frac{10a_1 + 45d}{10a_1 + 145d} = \frac{1}{3}.$$

4097 A feltétel alapján:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}}=\frac{(a_5-4d)+(a_5-3d)+(a_5-2d)+(a_5-d)+a_5}{(a_5+d)+(a_5+2d)+(a_5+3d)+(a_5+4d)+(a_5+5d)}=$$

$$=\frac{50-10d}{50+15d}=\frac{1}{5},$$

ebből pedig a sorozat differenciája: $d=\frac{40}{13}$.

4098 *a)* Mivel $a_1=3$ és $d=8$, ezért: $a_n=2011=251\cdot 8+3$, amiből leolvasható, hogy $n=252$.

A $2011=3+(n-1)\cdot 8$ egyenlet megoldásából szintén $n=252$ adódik.

Tehát 252 házhoz kézbesített levelet a postás.

b) Mivel $a_1=6$ és $d=10$, továbbá az utolsó 6-ra végződő házszám a 2006, ezért felírható: $a_n=2006=200\cdot 10+6$, amiből leolvasható, hogy $n=201$.

A $2006=6+(n-1)\cdot 10$ egyenlet megoldásából szintén $n=201$ adódik.

Tehát 201 házhoz kézbesített levelet a postás.

4099 A számtani sorozat első k elemének összege $S_k=\frac{a_1+a_k}{2}\cdot k$, ez alapján: $k=28$.

4100 A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\frac{2\cdot 17+(n-1)\cdot 10}{2}\cdot n=1472.$$

Rendezett alakja: $5n^2+12n-1472=0$, megoldásai $n_1=16$ és $n_2=-18{,}4$. Természetesen csak a pozitív egész szám lehet megoldás. Tehát 16 számot adtunk össze.

4101 Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned}5010&=\frac{2a_1+3\cdot(n-1)}{2}\cdot n\\ 6895&=\frac{2a_1+3\cdot(n+9)}{2}\cdot(n+10)\end{aligned}\right\}.$$

Az a_1 kiejtése után a $3n^2-347n+10\,020=0$ egyenletet kapjuk, amelynek pozitív egész megoldása: $n=60$, ebből $a_1=-5$.

4102 *a)* A következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{44+(n-1)\cdot 5}{2}\cdot n=385,\qquad \text{ahonnan}\qquad 5n^2+39n-770=0.$$

Ennek pozitív megoldása: $n\approx 9{,}12$, tehát 10 nap alatt ki tudja olvasni a könyvet.

b) $S_9=378$, tehát a tizedik napra csak 7 oldal olvasnivaló marad.

4103 Egy vágásnál 9-cel nő a lapok száma, ha összesen k darab lapot vágtunk el:

$$2010=30+9k\quad\Rightarrow\quad k=220.$$

Tehát 220 lap szétvágásával létrejöhetett 2010 darab, valószínűleg jól számolt az illető.

4104 Az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$10\,000\le 13+17\cdot(n-1)\le 99\,999.$$

Azt kapjuk, hogy $588{,}47\le n\le 5882{,}53$. Az első ötjegyű tag: $a_{589}=10\,009$, az utolsó ötjegyű tag: $a_{5882}=99\,990$. Tehát a sorozatnak 5294 ötjegyű tagja van.

4105 Ha a középső oldal b és a sorozat különbsége d, akkor az oldalak:

$$b-d;\quad b;\quad b+d.$$

Ha az utóbbi az átfogó, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$(b-d)^2+b^2=(b+d)^2,$$

amiből $b^2=4bd$. Mivel $b\neq 0$, ezért $b=4d$.

Tehát a háromszög oldalai: $3d$; $4d$; $5d$.

Az egyik hegyesszög:

$$\sin\alpha=\frac{3d}{5d}=\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\alpha=36{,}87^\circ.$$

A másik hegyesszög: $\beta=53{,}13^\circ$.

4106 Ha az oldalak hossza:

$$b-d;\quad b;\quad b+d;$$

a kerületből: $b=40$. A másik feltételből:

$$(40-d)\cdot(40+d)=1431,\quad\text{azaz}\quad 1600-d^2=1413,$$

amiből $d=13$ vagy $d=-13$.

Így az oldalak hossza: 27 cm, 40 cm és 53 cm.

A területet Héron-képlettel érdemes számolni: $T\approx 526{,}5\ \text{cm}^2$.

4107 Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $(n-2)\cdot 180^\circ$. A számtani sorozat miatt:

$$(n-2)\cdot 180^\circ=\frac{142{,}5+172{,}5}{2}\cdot n,$$

melynek megoldása: $n=16$.

4108 Az első 201 természetes szám összege:

$$1+2+3+\ldots+201=201\cdot 101=20\,301.$$

Ha az összegbe k helyett $-k$ kerül, akkor $2k$-val csökken. Mivel kezdetben páratlan volt az összeg, nem kaphatunk 2010-et.

4109 Például nincs 3-ra végződő négyzetszám, ezért az $a_n=10n+3$ megfelel, de megoldás lehet a $b_n=16n+7$ is.

4110 Ha az első szám $\overline{ab}$, akkor a számok:

$$10a+b;\quad 10b+a;\quad 100a+b.$$

Mivel számtani sorozatot alkotnak:

$$10b+a=\frac{10a+b+100a+b}{2},\qquad\text{amiből}\qquad b=6a.$$

Csak a 16; 61; 106 számhármas felel meg.

4111 A feltételek alapján:

$$\left.\begin{aligned} m&=a_1+(k-1)\cdot d\\ k&=a_1+(m-1)\cdot d\end{aligned}\right\}.$$

Kivonva egymásból:

$$m-k=d\cdot[(k-1)-(m-1)]=d\cdot(k-m),$$

ahonnan, mivel $k\neq m$, adódik, hogy:

$$d=-1\quad\text{és}\quad a_1=k+m-1,\quad\text{tehát}\quad a_n=k+m-1-(n-1)=k+m-n.$$

4112 Jelöljük az $\{a_n\}$ sorozat első elemét a_1-gyel, különbségét pedig d-vel. Írjuk fel a $\{b_n\}$ sorozat általános tagját:

$$b_n = \frac{a_{5n-4} + a_{5n}}{2} \cdot 5 = \frac{2a_1 + (10n-6) \cdot d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 25n \cdot d - 15d =$$

$$= (5a_1 - 15d) + 25d \cdot n = (5a_1 - 15d) + (n-1) \cdot 25d + 25d = (5a_1 + 10d) + (n-1) \cdot 25d.$$

Az általános tag azt mutatja, hogy egy olyan számtani sorozatot kapunk, melynek első eleme: $b_1 = 5a_1 + 10d$, differenciája pedig $D = 25d$.

Mértani sorozatok – megoldások

4113 A sorozat első hat tagja:

$$a_1 = -2; \quad a_2 = \frac{3}{4}; \quad a_3 = -\frac{9}{32}; \quad a_4 = \frac{27}{256}; \quad a_5 = -\frac{81}{2048}; \quad a_6 = \frac{243}{16384}.$$

4114 A keresett tagok:

$$a_1 = \frac{a_4}{q^3} = -\frac{5}{27}; \quad a_6 = a_4 \cdot q^2 = 45; \quad a_9 = -1215.$$

4115 Mivel:

$$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = -\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Így a tizedik elem, illetve az első tíz tag összege:

$$a_{10} = 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{5}{128}, \quad \text{illetve} \quad S_{10} = 20 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{1705}{128}.$$

4116 Mivel

$$q^4 = \frac{a_5}{a_1} = 16 \quad \Rightarrow \quad q = 2 \quad \text{vagy} \quad q = -2.$$

Az első esetben: $a_8 = -384$ és $S_8 = -765$. A második esetben: $a_8 = 384$ és $S_8 = 255$.

4117 Mivel

$$q^2 = \frac{a_8}{a_6} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Az első esetben:

$$a_1 = \frac{a_6}{q^5} = 896 \quad \text{és} \quad S_6 = 1764.$$

A második esetben:

$$a_1 = \frac{a_6}{q^5} = -896 \quad \text{és} \quad S_6 = -588.$$

4118 Mivel $q = 1$, ezért minden tag 23, így $S_9 = 207$.

4119 Mivel $q = -1$, ezért $S_{100} = 0$.

4120 Ha a mértani sorozat elemei:

$$1 + x;\quad 8 + x;\quad 22 + x;$$

akkor

$$(8 + x)^2 = (1 + x) \cdot (22 + x).$$

Megoldva az egyenletet: $x = 6$, tehát a sorozatunk:

$$7;\quad 14;\quad 28.$$

A sorozat hányadosa: $q = 2$.

4121 A hosszak olyan mértani sorozatot alkotnak, ahol $q = 1{,}25$ és $a_1 = 1$.
A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$15 = 1 \cdot 1{,}25^{n-1}.$$

Tízes alapú logaritmussal számolva:

$$n = 1 + \frac{\lg 15}{\lg 1{,}25} \approx 13{,}14.$$

Tehát a 14. napon éri el a 15 méteres hosszúságot.

4122 Keressük az alábbi egyenlőtlenség megoldásait:

$$10\,000 \le 3 \cdot 5^{n-1} \le 99\,999.$$

Tízes alapú logaritmussal számolva:

$$\lg 3333{,}33 \le \lg 5^{n-1} \le \lg 33333,$$

azaz

$$\frac{\lg 3333{,}33}{\lg 5} \le n - 1 \le \frac{\lg 33333}{\lg 5},$$

ahonnan

$$6{,}04 \le n \le 7{,}47.$$

Tehát a sorozatnak csak a hetedik tagja ötjegyű. Valóban: $a_7 = 46\,875$.

4123 A következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 &= 80 \\ a_1 \cdot q^4 - a_1 \cdot q^2 &= 240 \end{aligned}\right\},$$

kiemelés után:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot q^2 \cdot (1 + q) &= 80 \\ a_1 \cdot q^2 \cdot (q^2 - 1) &= 240 \end{aligned}\right\}.$$

Mivel $q \ne -1$, a második és első egyenlet hányadosából adódik, hogy:

$$\frac{q^2 - 1}{q + 1} = 3,$$

tehát $q = 4$, a sorozat első eleme $a_1 = 1$.

4124 *a)* Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot (1 + q) &= 15 \\ a_1 \cdot q^2 \cdot (1 + q) &= 60 \end{aligned}\right\}.$$

Megoldásai:

$$a_1 = 5 \text{ és } q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -15 \text{ és } q = -2.$$

b) A megoldást a

$$\frac{16}{q}+16+16q=56, \quad \text{azaz} \quad 2q^2-5q+2=0$$

egyenletből kapjuk:

$$q=2 \text{ és } a_1=8 \quad \text{vagy} \quad q=\frac{1}{2} \text{ és } a_1=32.$$

c) A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot\left(1+q+q^2\right)&=57\\ a_1\cdot\left(1-q^2\right)&=15\end{aligned}\right\}.$$

Elosztva a két egyenletet, adódik hogy:

$$24q^2+5q-14=0.$$

Megoldásai:

$$q=\frac{2}{3} \text{ és } a_1=27 \quad \text{vagy} \quad q=-\frac{7}{8} \text{ és } a_1=64.$$

d) Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot(1+q)&=160\\ a_1\cdot q^5\cdot(1+q)&=1215\end{aligned}\right\}.$$

A két egyenlet hányadosából:

$$q^5=\frac{243}{32},$$

ebből adódik, hogy:

$$q=\frac{3}{2} \quad \text{és} \quad a_1=64.$$

4125 A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot\left(1+q+q^2+q^3\right)&=468\\ a_1\cdot q^4\cdot\left(1+q+q^2+q^3\right)&=292\,500\end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletek osztásával kapjuk, hogy $q^4=625$, amiből $q=5$ vagy $q=-5$.
A megoldás:

$$a_1=3 \text{ és } q=5 \quad \text{vagy} \quad a_1=-\frac{9}{2} \text{ és } q=-5.$$

4126 Mivel:

$$\frac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot\left(5+3\sqrt{3}\right)=97+56\sqrt{3},$$

a négyzetre emelés és a nevező gyöktelenítése után:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2-\sqrt{3}}\right)^2=\left(7+4\sqrt{3}\right)^2=97+56\sqrt{3},$$

ezért az állítás igaz. A mértani sorozat hányadosa:

$$q=\sqrt{3}-1.$$

4127 Ha a számtani sorozat differenciája d, a feltétel szerint:

$$(10-d)^2=(10-2d)\cdot(10+2d).$$

Az egyenlet két megoldása:

$$d_1=0 \quad \text{és} \quad d_2=4.$$

A számtani sorozat első tagjai és a mértani sorozat hányadosai:

$$d=0 \quad \text{esetén} \quad a_1=10 \quad \text{és} \quad q=1, \quad \text{illetve} \quad d=4 \quad \text{esetén} \quad a_1=-2 \quad \text{és} \quad q=3.$$

4128 Az $\{a_n\}$ számtani sorozatra vonatkozó feltételből: $a_2=2$, így a számok:

$$2-d; \quad 2; \quad 2+d.$$

A $\{b_n\}$ mértani sorozat első három eleme:

$$7-d; \quad 4; \quad 3+d.$$

Ebből:

$$4^2=(7-d)\cdot(3+d),$$

ennek megoldásai:

$$d_1=5 \quad \text{és} \quad d_2=-1.$$

Az első esetben: $q_1=2$ és $b_1=2$, a második esetben: $q_2=\frac{1}{2}$ és $b_1=8$.

4129 A mértani sorozat elemei:

$$\frac{12}{q}; \quad 12; \quad 12q.$$

A számtani sorozat elemei:

$$\frac{12}{q}+4; \quad 15; \quad 12q+1.$$

A számtani sorozat tulajdonságából:

$$15=\frac{\frac{12}{q}+4+12q+1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad 12q^2-25q+12=0,$$

ezt megoldva:

$$q_1=\frac{4}{3} \quad \text{és} \quad q_2=\frac{3}{4}.$$

4130 Ha a legkisebb oldal a, és a sorozat hányadosa q, $q>1$, akkor az oldalak:

$$a; \quad aq; \quad aq^2.$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$a^2+(aq)^2=\left(aq^2\right)^2.$$

Mivel $a\neq 0$, eloszthatjuk az egyenletet, és a $q^4-q^2-1=0$ negyedfokú egyenlethez jutunk. Megoldva:

$$\left(q^2\right)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

mivel $q^2>0$, ezért adódik, hogy:

$$q^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

A háromszög hegyesszögei:

$$\cos\alpha=\frac{a}{aq^2}=\frac{1}{q^2},$$

ebből $\alpha=51{,}83°$, a másik szög $\beta=38{,}17°$.

4131 Az oldalak hossza:

$$9;\quad 9q;\quad 9q^2.$$

A kerület:

$$19 = 9 + 9q + 9q^2,$$

ebből:

$$q_1 = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad q_2 = -\frac{5}{3}.$$

Természetesen csak a $q = \frac{2}{3}$ megoldás.

A háromszög oldalai: 9 cm, 6 cm, 4 cm.

A legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemben van, koszinusztétellel számolva:

$$\cos\alpha = \frac{6^2 + 4^2 - 9^2}{48} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 127{,}17°.$$

A háromszög legnagyobb szöge $\alpha = 127{,}17°$.

4132 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 63 \\ a_2 \cdot (a_1 + a_3) &= 810 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldáshoz vezessünk be új változót, legyen $x = a_1 + a_3$, a kapott

$$\left.\begin{aligned} a_2 + x &= 63 \\ a_2 \cdot x &= 810 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $a_2 = 45$ és $x = 18$, vagy $a_2 = 18$ és $x = 45$.

I. Ha $a_2 = 45$ és $x = 18$, akkor a $18 = \frac{45}{q} + 45q$ egyenletnek nincs megoldása.

II. Ha $a_2 = 18$ és $x = 45$, akkor a $45 = \frac{18}{q} + 18q$ egyenlet megoldásai és a keresett sorozat:

$$q_1 = 2,\quad a_1 = 9 \quad \text{vagy} \quad q_2 = \frac{1}{2},\quad a_1 = 36.$$

4133 Legyenek a számtani sorozat tagjai:

$$a_1 = x - d;\quad a_2 = x;\quad a_3 = x + d;\quad d \neq 0.$$

A mértani sorozat elemei:

$$b_{n-1} = a_1 \cdot a_2 = (x - d) \cdot x;\quad b_n = a_2 \cdot a_3 = x \cdot (x + d);\quad b_{n+1} = a_3 \cdot a_1 = x^2 - d^2.$$

A mértani sorozat tulajdonsága alapján: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, vagyis:

$$[x \cdot (x + d)]^2 = (x - d) \cdot x \cdot (x^2 - d^2).$$

A műveletek elvégzése után, mivel $d \neq 0$, $x \neq 0$, $x + d \neq 0$, adódik, hogy: $d = 3x$.

A számtani sorozat tagjai:

$$a_1 = -2x;\quad a_2 = x;\quad a_3 = 4x.$$

A mértani sorozat elemei:

$$b_{n-1} = -2x^2;\quad b_n = 4x^2;\quad b_{n+1} = -8x^2.$$

A keresett hányados: $q = -2$.

4134 Jelöljük x-szel a sorozat ötödik tagját:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{q}+xq&=-40\\ \frac{x}{q^2}+xq^2&=68\end{aligned}\right\},\quad \text{ebből mivel } x\neq 0:\quad \left.\begin{aligned}\frac{1}{q}+q&=\frac{-40}{x}\\ \frac{1}{q^2}+q^2&=\frac{68}{x}\end{aligned}\right\}.$$

Felhasználva, hogy

$$\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=q^2+\frac{1}{q^2}+2,$$

a kapott egyenlet:

$$\left(\frac{-40}{x}\right)^2=\frac{68}{x}+2.$$

Ennek megoldásai: $x_1=16$ és $x_2=-50$.

Az elsőt visszahelyettesítve:

$$q+\frac{1}{q}=-\frac{5}{2},\quad \text{ebből:}\quad q_1=-2 \quad \text{és} \quad q_2=-\frac{1}{2},$$

a sorozat első tagjai pedig:

$$\{a_1\}_1=1 \quad \text{és} \quad \{a_1\}_2=256.$$

A második esetben $q+\frac{1}{q}=\frac{4}{5}$. Ennek nincs megoldása.

Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása – megoldások

4135 $180\,000\cdot 1{,}07^{10}=354\,087$ Ft.

4136 $9800\cdot 0{,}97^{10}\approx 7227$ fő.

4137 $500\,000\cdot 1{,}06^{8}-500\,000=796\,924-500\,000=296\,924$ Ft lesz a haszon.

4138 $1\,000\,000\cdot 1{,}08^{5}\cdot 1{,}06^{15}=3\,521\,330$ Ft.

4139 A $118\,000\cdot x^{30}=170\,000$ egyenlet megoldása: $x\approx 1{,}0122$, ami 1,22%-os éves növekedést jelent.

4140 A $0{,}87^{x}=0{,}5$ egyenlet megoldása:

$$x=\frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}87}\approx 4{,}98.$$

Ha nem lesz változás, körülbelül 5 év múlva már felére csökken a fecskék száma.

4141 A $6\,506\,300=4\,800\,000\cdot x^{6}$ egyenlet megoldása: $x\approx 1{,}052$, tehát a bank 5,2%-os kamatot adott.

4142 Az $1{,}047^{x}=3$ egyenlet megoldása:

$$x=\frac{\lg 3}{\lg 1{,}047}\approx 23{,}92,$$

tehát 24 év alatt növekszik háromszorosára a betétünk.

4143 A keresett összeg kiszámítása:

$$(200000\cdot 1{,}045^{14}+200000\cdot 1{,}045^{13}+200000\cdot 1{,}045^{12}+\ldots+200000)\cdot 1{,}045^{6}=$$
$$=200000\cdot\left(1+1{,}045+1{,}045^{2}+\ldots+1{,}045^{14}\right)\cdot 1{,}045^{6}=$$
$$=200000\cdot\frac{1{,}045^{15}-1}{1{,}045-1}\cdot 1{,}045^{6}=5413249.$$

Tehát 5 413 249 Ft lesz a számlán a gyermek 20 éves korában.

4144 A $250000\cdot 1{,}05^{x}=400000$ egyenletből: $1{,}05^{x}=1{,}6$, ahonnan: $x=\dfrac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}05}\approx 9{,}6$.

Tehát 10 év múlva, azaz 2010 januárjában éri el a betét a 400 000 Ft-ot.

4145 Az első bank öt év múlva

$$1000000\cdot 1{,}04^{5}+700000\cdot 1{,}063^{5}\approx 2166742 \text{ Ft-ot fizet.}$$

A második bank öt év múlva

$$1700000\cdot 1{,}019^{20}\approx 2477038 \text{ Ft-ot fizet.}$$

Tehát a Peták Bankot érdemes választani.

4146 Ha az évenként felvett összeg x, akkor az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$\{[(10^{8}\cdot 1{,}05-x)\cdot 1{,}05-x]\cdot\ldots\cdot 1{,}05-x\}=0.$$

Átrendezve:

$$10^{8}\cdot 1{,}05^{20}=x\cdot(1{,}05^{19}+1{,}05^{18}+\ldots+1),$$

vagyis

$$x=\frac{10^{8}\cdot 1{,}05^{20}}{\dfrac{1{,}05^{20}-1}{1{,}05-1}}=8024258{,}72\approx 8024259 \text{ Ft.}$$

Tehát évente 8 024 259 Ft-ot vehet fel a bankból.

4147 *a)* Ha x a havi törlesztőrészlet, akkor a következő egyenletet kell megoldani:

$$15\cdot 10^{6}\cdot\left(1+\frac{8}{12\cdot 100}\right)^{180}-x\cdot\left(1+\frac{8}{12\cdot 100}\right)^{179}-x\cdot\left(1+\frac{8}{12\cdot 100}\right)^{178}-\ldots-x=0.$$

A megoldás:

$$x=\frac{15\cdot 10^{6}\cdot 1{,}006667^{180}}{\dfrac{1{,}006667^{180}-1}{1{,}006667-1}}=143372 \text{ Ft.}$$

Tehát a havi díj: 143 372 Ft.

b) Az évente fizetendő összeg legyen y. Ekkor az egyenletünk:

$$15\cdot 10^{6}\cdot 1{,}08^{15}-y\cdot(1{,}08^{14}+1{,}08^{13}+\ldots+1)=0.$$

A megoldás:

$$y=\frac{15\cdot 10^{6}\cdot 1{,}08^{15}}{\dfrac{1{,}08^{15}-1}{1{,}08-1}}=1752443,$$

ebből a havi díj: 146 037 Ft.

c) Az első esetben a $\dfrac{180\cdot 143372}{15000000}=1{,}72$, a második esetben a $\dfrac{15\cdot 1752443}{15000000}=1{,}752$-szeresét kell visszafizetni.

Vegyes feladatok – megoldások

4148 A megadott számtani sorozat adatai:

$$a_1 = -2, \quad d = 5, \quad S_{30} = 2115.$$

4149 A megadott mértani sorozat adatai:

$$a_1 = 7, \quad q = 2, \quad S_{20} = 7\,340\,025.$$

4150 Célszerű a sorozatok első néhány tagját kiszámítani, majd a kialakult sejtést a definíciók segítségével $\left(a_{n+1} - a_n = d, \text{ illetve } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q\right)$ igazolni.

Számtani sorozatok: *a), b), d), j), k).*
Mértani sorozatok: *c), g), h), i).*

4151 $S_{30} = 630\sqrt{3} - 195.$

4152 A következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$500 < 7 + \frac{3}{7} \cdot (n-1) < 1000,$$

ennek megoldása:

$$1151{,}33 < n < 2318.$$

Tehát 1166 tag felel meg.

4153 A három tag szorzatából $a_2 = 105$.
A három tag összegéből:

$$\frac{105}{q} + 105 + 105q = 1687.$$

Az egyenlet megoldásai: $q_1 = 15$ és $q_2 = \frac{1}{15}$.
A feltételnek megfelelő sorozatok: $a_1 = 7$, $q = 15$ és $a_1 = 1575$, $q = \frac{1}{15}$.

4154 Mivel

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 7n - \left[2 \cdot (n-1)^2 - 7 \cdot (n-1)\right] = 4n - 9,$$

a sorozat számtani, $a_1 = -5$ és $d = 4$.

4155 Számtani sorozat, ahol: $d = 11$, $a_1 = 1008$, $a_{818} = 9995$, és az összeg: $S_{818} = 4\,500\,227$.

4156 A feltételekből adódik: $q^{17} = \frac{120}{18} = \frac{20}{3}$, azaz $q = \sqrt[17]{\frac{20}{3}}$.

a) Mivel az $a_3 \cdot q^x = 108$, azaz a $q^x = \frac{108}{18} = 6$ egyenlet megoldása

$$x = \frac{\lg 6}{\lg q} = \frac{\lg 6}{\lg \sqrt[17]{\frac{20}{3}}} \approx 16{,}056$$

nem egész szám, ezért a 108 nem tagja a sorozatnak.

b) Mivel $a_3 \cdot q^x = 800$, ezért $q^x = \frac{800}{18} = \frac{400}{9}$, az egyenlet megoldása: $x = 34$, tehát a sorozat 37. tagja 800.

4157 Az egyenletek hányadosait véve: $q^2 = 4$, azaz $q_1 = 2$ vagy $q_2 = -2$.
Visszahelyettesítés után a következő négy sorozat adódik:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{1}{2},\ q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = \frac{1}{2},\ q = -2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{1}{2},\ q = -2.$$

4158 A feltételekből az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 &= \frac{21}{4} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot q} + \frac{1}{a_1 \cdot q^2} &= \frac{7}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletek hányadosát véve: $(a_1 \cdot q)^2 = \frac{9}{4}$. Ebből $a_1 \cdot q = \frac{3}{2}$ vagy $a_1 \cdot q = -\frac{3}{2}$.

Mivel $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = (a_2)^3$, a keresett szorzat: $\frac{27}{8}$ vagy $-\frac{27}{8}$.

4159 *a)* Mivel a különbség: $d = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$, ezért a számok:

$$3; \quad 14\frac{1}{4}; \quad 25\frac{1}{2}; \quad 36\frac{3}{4}; \quad 48.$$

b) Mivel $q^4 = 16$, ebből $q_1 = 2$ vagy $q_2 = -2$.
A lehetséges számok:

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48 \quad \text{vagy} \quad 3;\ -6;\ 12;\ -24;\ 48.$$

4160 Mivel az első három tag összege 18, ezért a számtani sorozatban $a_2 = 6$.
A számtani sorozat elemei:

$$6 - d; \quad 6; \quad 6 + d;$$

a mértani sorozat elemei:

$$7 - d; \quad 6; \quad 6 + d.$$

A mértani sorozat tulajdonsága alapján:

$$6^2 = (7 - d) \cdot (6 + d).$$

Az egyenlet megoldásai: $d_1 = 3$ és $d_2 = -2$.

Az első esetben a számtani sorozatban $a_1 = 3$ és a mértani sorozatban $q = \frac{3}{2}$.

A második esetben a számtani sorozatban $a_1 = 8$ és a mértani sorozatban $q = \frac{2}{3}$.

4161 Az első feltétel alapján a számokra:

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 114.$$

A számtani sorozat miatt:

$$a_1 \cdot q = a_1 + 3d \quad (1) \qquad \text{és} \qquad a_1 \cdot q^2 = a_1 + 24d \quad (2).$$

(1)-ből (2)-be helyettesítve:

$$a_1 \cdot q^2 = a_1 + 8 \cdot (a_1 \cdot q - a_1).$$

Mivel $a_1 \neq 0$, adódik, hogy:

$$q^2 - 8q + 7 = 0, \quad \text{ebből} \quad q_1 = 7 \text{ és } q_2 = 1.$$

Ha $q = 7$, az első feltételbe visszahelyettesítve: $a_1 = 2$, a számok: 2; 14; 98.

Ha $q = 1$, akkor $a_1 = 38$, a számok: 38; 38; 38.

4162 *a)* A feltételek miatt:

$$x=\frac{y+4x-5}{2} \quad \text{és} \quad (4x-5)^2 = x\cdot(7x+10).$$

A második egyenlet megoldásai: $x_1=5$ és $x_2=\frac{5}{9}$. Az elsőbe helyettesítve: $y_1=-5$ és $y_2=\frac{35}{9}$. Tehát a négy szám:

$$-5;\quad 5;\quad 15;\quad 45 \qquad \text{vagy} \qquad \frac{35}{9};\ \frac{5}{9};\ -\frac{25}{9};\ \frac{125}{9}.$$

b) Az első esetben a különbség 10, a hányados 3, a második esetben a különbség $-\frac{30}{9}=-\frac{10}{3}$, a hányados pedig -5.

4163 *a)* $41{,}9\cdot 10^6\cdot 1{,}054^4 \approx 51\,710\,230$.

b) $\dfrac{41{,}9\cdot 10^6}{1{,}011^6}\approx 39\,238\,020$.

c) Ha az évenkénti csökkenésnek megfelelő szorzószám p, akkor $48{,}8\cdot p^5=38$, ahonnan:

$$p=\sqrt[5]{\frac{38}{48{,}8}}\approx 0{,}9512.$$

Tehát évente $4{,}88\%$-kal csökken a termelés.

d) Jelölje x a 2013 után eltelt évek számát. A $0{,}97^x=0{,}74$ egyenletből:

$$x=\frac{\lg 0{,}74}{\lg 0{,}97}\approx 9{,}89.$$

10 év múlva, azaz 2023-ban éri el a termelés a 2013-as év 74%-át.

4164 Ha $\{\log_5 a_n\}$ számtani sorozat, akkor:

$$\log_5 a_n=\frac{\log_5 a_{n-1}+\log_5 a_{n+1}}{2}.$$

Ebből a logaritmusfüggvény monotonitását felhasználva kapjuk, hogy:

$$a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1},$$

ami azt jelenti, hogy az $\{a_n\}$ mértani sorozat.
A keresett elem kiszámítása:

$$a_1=1 \quad \text{és} \quad a_4=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad q=\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad a_{10}=\frac{1}{512}.$$

4165 *a)* A különbség: $d=\dfrac{b-a}{5}$, így a számok:

$$a;\quad \frac{b+4a}{5};\quad \frac{2b+3a}{5};\quad \frac{3b+2a}{5};\quad \frac{4b+a}{5};\quad b.$$

b) A hányados: $q=\sqrt[5]{\dfrac{b}{a}}$, így a számok:

$$a;\quad \sqrt[5]{a^4\cdot b};\quad \sqrt[5]{a^3\cdot b^2};\quad \sqrt[5]{a^2\cdot b^3};\quad \sqrt[5]{a\cdot b^4};\quad b.$$