11.5. KOORDINÁTA-GEOMETRIA

Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal (emlékeztető) – megoldások

3555 $\vec{a} = 1 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{a}(1; 4)$; $\vec{b} = -5 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{b}(-5; 2)$; $\vec{c} = -3 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{c}(-3; -2)$;
$\vec{d} = -2 \cdot \mathbf{i} + 5 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{d}(-2; 5)$; $\vec{e} = 4 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{e}(4; 0)$; $\vec{f} = 3 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{f}(3; -2)$.

3556 *a)* $(-1; 2)$; *b)* $(3; -8)$; *c)* $(2; -6)$; *d)* $(6; -15)$;
e) $(8; -21)$; *f)* $\left(-\frac{7}{2}; 9\right)$; *g)* $(15; -40)$; *h)* $\left(\frac{23}{2}; -31\right)$.

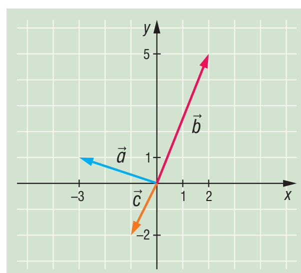
3557 *a)* $6 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$; *b)* $2 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$; *c)* $-4 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$; *d)* $0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$.

3558 *a)* $\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{13}$; *c)* 5; *d)* $\frac{\sqrt{26}}{2}$;
e) 1; *f)* $\sqrt{a^2 + b^2}$; *g)* $\sqrt{5}$; *h)* $\sqrt{6}$;
i) $\sqrt{2 \cdot (a + b)}$.

3559 *a)* $|\vec{a}| = 85$; *b)* $|\vec{b}| = 97$; *c)* $|\vec{c}| = 89$; *d)* $|\vec{d}| = 29$; *e)* $|\vec{e}| = 34$.
Mindegyik vektor koordinátáinak abszolút értéke egy-egy pitagoraszi számhármas két tagja, a harmadik tag éppen a vektor abszolút értéke.

3560 *a)* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; *b)* $\left(\frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13}; \frac{3 \cdot \sqrt{13}}{13}\right)$;
c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}\right)$; *d)* $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

3561 A helyvektorok az ábrán láthatók.
A vektorok koordinátái a +90°-os, illetve a –90°-os forgatások után:
a) $(-1; -3)$, $(1; 3)$;
b) $(-5; 2)$, $(5; -2)$;
c) $(2; -1)$, $(-2; 1)$.



3562 *a)* –5; *b)* 5; *c)* –5;
d) –10; *e)* –45; *f)* 85.

3563 *a)* Mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, ezért a vektorok derékszöget zárnak be egymással.
b) A két vektor hegyesszöget zár be, mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 > 0$.
c) A vektorok tompaszöget zárnak be egymással, mivel skaláris szorzatuk $-\frac{5}{2}$.
d) A két vektor derékszöget zár be, mivel skaláris szorzatuk 0.

3564 *a)* Mivel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ezért az AB és az AC szakaszok merőlegesek egymásra, így az ABC háromszög derékszögű. A derékszög az A csúcsnál található.

b) A derékszög a C csúcsnál van.

c) A derékszög a C csúcsnál van.

3565 *a)* A C pont helyvektorára:

$$\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a} = 3(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - 2(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = -5\mathbf{i} + 16\mathbf{j}.$$

Ezek alapján a pontok koordinátái:

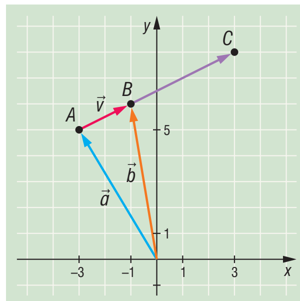
$$A(1; -2), \quad B(-1; 4), \quad C(-5; 16).$$

b) Mivel $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, valamint $\overrightarrow{AC} = -6\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$, ezért $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, ami igazolja, hogy a három pont egy egyenesre illeszkedik.

3566 *a)* Ha a mozgó pont helyvektora a megfigyelés kezdetekor $\vec{a}$, a következő másodpercben pedig $\vec{b}$, akkor a sebességvektor:

$$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j},$$

így a sebességvektor koordinátái $\vec{v}(2; 1)$.



b) A megfigyelés kezdetét követő harmadik másodpercben a test helyvektora:

$$\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{v}.$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy a test a $C(3; 8)$ pontban tartózkodik.

c) A $D(11; 12)$ pontra teljesül, hogy

$$\overrightarrow{AD} = 14\mathbf{i} + 7\mathbf{j} = 7\vec{v},$$

ami azt jelenti, hogy az adott ponton a test a megfigyelés kezdetét követő 7. másodpercben halad át.

3567 A két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. A két vektor skaláris szorzata a koordinátáik segítségével:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\left(\sqrt{2} + 2\right) + \sqrt{2} \cdot \alpha = 0,$$

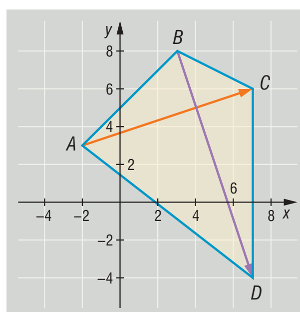
amiből α-t kifejezve:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

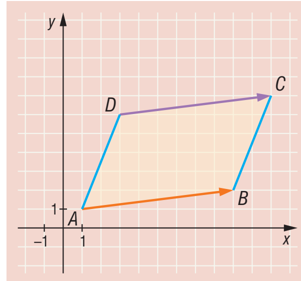
3568 Számítsuk ki a négyszög átlóvektorainak koordinátáit: $\overrightarrow{AC}(9; 3)$, illetve $\overrightarrow{BD}(4; -12)$. Mivel a két vektor skaláris szorzata:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 9 \cdot 4 + 3 \cdot (-12) = 0,$$

ezért a két átló valóban merőleges egymásra.

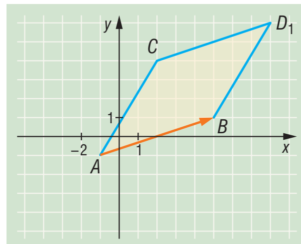


3569 A négyszög $\overrightarrow{AB}$, illetve $\overrightarrow{DC}$ oldalvektorainak koordinátáit kiszámolva láthatjuk, hogy mindkét vektor koordinátái $(8;\ 1)$. Eredményünk azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszögben két szemközti oldal ugyanolyan hosszú és párhuzamos, ezért a négyszög valóban paralelogramma.

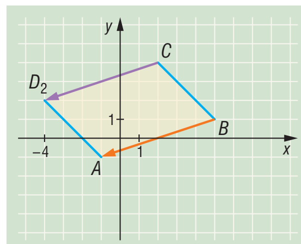


3570 A megadott pontokat jelölje rendre A, B és C. A feladatnak három megoldása van. Két olyan megoldást kapunk, amelyekben az AB szakasz a paralelogrammának egyik oldala. Ezekben a paralelogrammákban az egyik oldalvektor $\overrightarrow{AB}(6;\ 2)$.

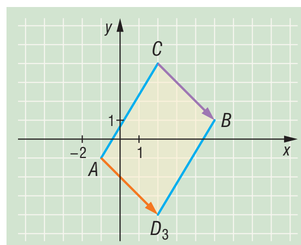
Az ábra azt az esetet mutatja, amelyben a BC szakasz átló. Ekkor $\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AB}$, amiből $D_1(8;\ 6)$.



A következő ábra azt a paralelogrammát mutatja, amelyben az AB, valamint a BC szakaszok is a paralelogramma egy-egy oldalát alkotják. Ekkor $\overrightarrow{CD_2} = \overrightarrow{BA}$, és ezért $D_2(-4;\ 2)$.



Végül még egy megoldás adódik, amelyben az AB szakasz a paralelogrammának átlója. Ekkor $\overrightarrow{AD_3} = \overrightarrow{CB}(3;\ -3)$, amiből egyszerű számolással kapjuk, hogy $D_3(2;\ -4)$.



3571 *a)* A keresett összegvektor első koordinátája:

$$\sqrt{1} + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \ldots + \left(\sqrt{2008} - \sqrt{2007}\right) + \left(\sqrt{2009} - \sqrt{2008}\right).$$

Ha alaposabban szemügyre vesszük az összeg tagjait, akkor láthatjuk, hogy az első helyen álló $\sqrt{1}$, valamint az első zárójelben szereplő második tag „kiejti egymást”, csakúgy mint az első, illetve a második zárójelekben szereplő $\sqrt{2}$, illetve $-\sqrt{2}$. Ha a többi tagot is párba állítjuk, akkor igazából csak a $\sqrt{2009}$-nek nem találunk párt, az összes többi tag „kiesik” az összegből. Ebből adódóan az összegvektor első koordinátája $\sqrt{2009}$.

A második koordinátát illetően hasonlóan járhatunk el. A megfelelő koordináta „hosszú alakja”:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2009} + \sqrt{2008}} + \frac{1}{\sqrt{2010} + \sqrt{2009}}.$$

Ha a fenti összegben minden egyes tag nevezőjét gyöktelenítjük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}=\sqrt{2}-\sqrt{1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2009}}=\frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2009}}\cdot\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}=\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}{2010-2009}=\sqrt{2010}-\sqrt{2009}.$$

Eredményeink alapján a keresett vektor második koordinátája tehát a következő alakban írható fel:

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2009}-\sqrt{2008}\right)+\left(\sqrt{2010}-\sqrt{2009}\right).$$

Az összeg feltűnő hasonlóságot mutat a vektor első koordinátájánál szereplő összeggel, csak itt most az első zárójelben szereplő $-\sqrt{1}$-nek, valamint az utolsó zárójelben található $\sqrt{2010}$-nek nincs párja, így az összegvektor második koordinátája $\sqrt{2010}-1$.

A keresett összeg koordinátái tehát:

$$\left(\sqrt{2009};\ \sqrt{2010}-1\right).$$

b) Mivel $\sqrt{2009}>\sqrt{2010}-1$, ezért a megfelelő pont az x tengelyhez van közelebb.

Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge. Területszámítási alkalmazások – megoldások

3572 *a)* 3; *b)* 5; *c)* 5; *d)* 13; *e)* $\frac{\sqrt{29}}{3}$; *f)* 2.

3573 *a)* 3; *b)* 5; *c)* 13; *d)* $2\cdot\sqrt{34}$; *e)* $\sqrt{6}$; *f)* $2\cdot\sqrt{3}$; *g)* $\frac{7\cdot\sqrt{2}}{2}$; *h)* $\frac{\sqrt{26}}{6}$.

3574 *a)* $AB=AC=\sqrt{50}$; *b)* $AB=AC=\sqrt{34}$; *c)* $AB=AC=\sqrt{20}$.

A *c)* feladatban szereplő háromszög derékszögű, mert $\overrightarrow{AB}(4;\ 2)$ és $\overrightarrow{AC}(2;\ -4)$.

3575 *a)* A pont illeszkedik a körre. *b)* A pont illeszkedik a körre.
c) A pont nem illeszkedik a körre. *d)* A pont illeszkedik a körre.

3576 *a)* $AB=2$, $BC=3{,}6$, $AC=3$, a háromszög kerülete 8,6.
b) $AB=23{,}7$, $BC=13{,}3$, $AC=16{,}1$, a háromszög kerülete 53,1.

3577 *a)* Az ilyen tulajdonságú pontok két, az x tengellyel párhuzamos egyenesen helyezkednek el, attól 3 egység távolságra. A megfelelő $(x;\ y)$ pontokra $y=3$ vagy $y=-3$ teljesül.
b) Ezúttal az y tengellyel párhuzamos egyeneseken találhatók a feltételnek megfelelő pontok. A koordinátáikra $x=3$ vagy $x=-3$ teljesül.

3578 A megfelelő $(x;\ y)$ pontokra $x=y$ vagy $x=-y$ teljesül. A pontok a két tengely szögfelező egyeneseire illeszkednek.

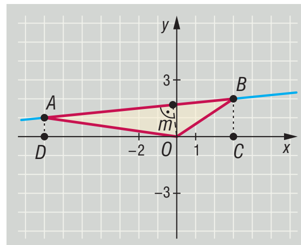
3579 *a)* $\alpha = 90{,}0°$; *b)* $\alpha = 90{,}0°$; *c)* $\alpha = 180{,}0°$;
d) $\alpha \approx 126{,}5°$; *e)* $\alpha = 45{,}0°$; *f)* $\alpha \approx 93{,}4°$.

3580 *a)* $\alpha \approx 53{,}97°$, $\beta \approx 79{,}70°$, $\gamma \approx 46{,}33°$;
a háromszög területe 11.

b) $\alpha \approx 32{,}70°$, $\beta \approx 61{,}70°$, $\gamma \approx 85{,}60°$;
a háromszög területe 26.

c) $\alpha \approx 103{,}32°$, $\beta \approx 48{,}18°$, $\gamma \approx 28{,}50°$;
a háromszög területe 38.

3581 Használjuk az ábra jelöléseit: legyen $A(-7; 1)$, $B(3; 2)$ a két pont, melyeken a test a mozgás során áthaladt, továbbá $C(3; 0)$, $D(-7; 0)$, illetve $O(0; 0)$. A feladat kérdése alapján az ABO háromszög AB oldalához tartozó m magasságát kell kiszámolnunk.



Ehhez kiszámoljuk az AB szakasz hosszát, valamint az ABO háromszög területét. A két számolt értékből már könnyen megkaphatjuk a keresett magasságot.

Az ABO háromszög területét pl. úgy kaphatjuk meg, hogy az $ABCD$ trapéz területéből kivonjuk az AOD, valamint a BOC háromszögek területét. A számolásokat elvégezve kapjuk, hogy

$$T_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CD = \frac{1+2}{2} \cdot 10 = 15;$$

$$T_{AOD} = \frac{AD \cdot OD}{2} = 3{,}5;$$

$$T_{BOC} = \frac{BC \cdot OC}{2} = 3;$$

$$T_{ABO} = T_{ABCD} - T_{AOD} - T_{BOC} = 15 - 3{,}5 - 3 = 8{,}5.$$

Az AB távolság:

$$AB = \sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101}.$$

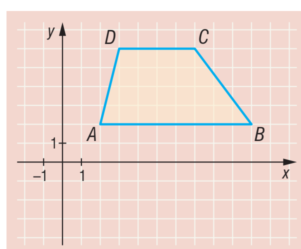
Ha most az ABO háromszög területét az AB oldal, valamint a hozzá tartozó m magasság segítségével írjuk fel, akkor

$$8{,}5 = \frac{\sqrt{101} \cdot m}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{17}{\sqrt{101}} \approx 1{,}69.$$

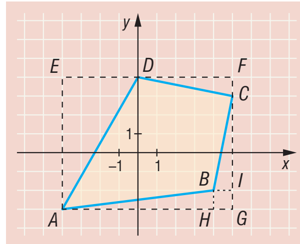
A mozgó test tehát 1,69 egység távolságra volt az origótól, amikor ahhoz legközelebb tartózkodott.

3582 *a)* A kapott négyszög trapéz, melynek alapjai párhuzamosak az x tengellyel. A négyszög területe:

$$T = \frac{8+4}{2} \cdot 4 = 24.$$



b) Az ábra jelöléseivel $AB = AD = \sqrt{65}$, illetve $CB = CD = \sqrt{26}$, ezért az $ABCD$ négyszögben két-két szomszédos oldal megegyezik, így a négyszög deltoid.



Az $ABCD$ deltoid területének kiszámolásához érdemes a négyszöget egy olyan téglalapba foglalni, amelynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. A szóban forgó téglalap csúcsait az ábrán A, E, F, illetve G jelöli. A területszámítást megkönnyíti, ha az $AEFG$ téglalap területéből kivonjuk a deltoid körül „kimaradó” AED, DFC, CIB és AHB derékszögű háromszögek, valamint az $IGHB$ négyzet területét. Az egyes síkidomok területe:

$$T_{AEFG} = 7 \cdot 9 = 63; \qquad T_{AED} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14;$$

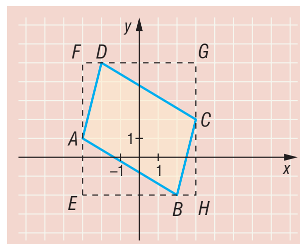
$$T_{DFC} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2{,}5; \qquad T_{CIB} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2{,}5;$$

$$T_{AHB} = \frac{8 \cdot 1}{2} = 4; \qquad T_{IGHB} = 1.$$

Az elmondottakból azonnal következik, hogy

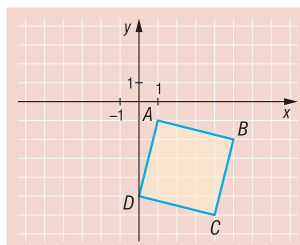
$$T_{ABCD} = 63 - 14 - 2{,}5 - 2{,}5 - 4 - 1 = 39.$$

c) A kapott négyszög paralelogramma, hiszen (az ábra jelöléseit használva) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}(1; 4)$, ami mutatja, hogy a négyszög BC és AD oldala párhuzamos egymással, valamint hosszuk is megegyezik.



Az $ABCD$ paralelogramma területe a *b)* feladatban látott módszerrel számolható. A paralelogrammát ezúttal az $EFGH$ téglalapba „foglalhatjuk bele”, és a téglalap kimaradó részei háromszögek. A számításokat elvégezve az $ABCD$ paralelogramma területére 23 egység adódik.

d) A kapott négyszög ezúttal négyzet. Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}(4; -1)$, amiből látható, hogy a négyszög paralelogramma (van két párhuzamos és egyenlő hosszúságú oldala). Mivel $\overrightarrow{AD}(-1; -4)$, ezért



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-4) = 0,$$

ezért a négyszög A csúcsánál (és ebből kifolyólag a többi csúcsnál is) derékszög található, így az $ABCD$ négyszög valóban négyzet.

Mivel $AB = \sqrt{17}$, ezért az $ABCD$ négyzet területe 17 egység.

3583 Ha $PA = PB$, akkor

$$\sqrt{(3 - x)^2 + (1 - y)^2} = \sqrt{(-2 - x)^2 + (5 - y)^2}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kijelölt műveleteket, végül a lehetséges összevonásokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$10x - 8y + 19 = 0.$$

Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a fenti összefüggést csak a feltételeknek megfelelő P pont elégítheti ki.

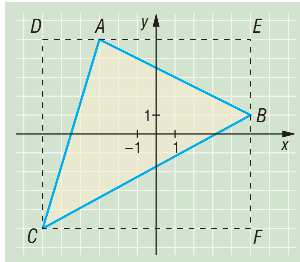
3584 Mivel a feltételek alapján $PO = 5$, ezért

$$\sqrt{(2-x)^2 + (-1-y)^2} = 5.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kijelölt műveleteket elvégezve kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0.$$

3585 *a)* Foglaljuk az ABC háromszöget az ábrán látható módon a tengelyekkel párhuzamos oldalakkal rendelkező $CDEF$ téglalapba. Mivel a téglalap oldalai 10 és 11 cm hosszúak, ezért



$$T_{CDEF} = 110 \text{ cm}^2.$$

Könnyen kiszámolható az ACD, ABE, BCF derékszögű háromszögek területe is:

$$T_{ACD} = 15 \text{ cm}^2, \quad T_{ABE} = 16 \text{ cm}^2 \quad \text{és} \quad T_{BCF} = 33 \text{ cm}^2.$$

Az ABC háromszög területe:

$$T_{ABC} = T_{CDEF} - T_{ACD} - T_{ABE} - T_{BCF} = 110 - 15 - 16 - 33 = 46 \text{ cm}^2.$$

b) A háromszög a legrövidebb oldalára állítva a legmagasabb. Mivel

$$\overrightarrow{AB}(8;-4), \quad \overrightarrow{BC}(-11;-6) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CA}(3;10),$$

ezért az AB oldal a legrövidebb és

$$AB = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} \approx 8{,}94 \text{ cm}.$$

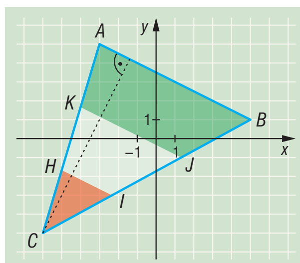
c) A leghosszabb magasságot az ABC háromszög területéből számolhatjuk ki. Mivel

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot m_c}{2},$$

ezért

$$46 = \frac{\sqrt{80} \cdot m_c}{2}, \quad \text{amiből} \quad m_c = \frac{92}{\sqrt{80}} \approx 10{,}29 \text{ cm}.$$

d) Tegyük fel, hogy az AB-vel párhuzamos szakaszok az ábrának megfelelően az I, H, valamint a J és K pontokat metszik ki az ABC háromszög oldalaiból. Ekkor a CIH háromszög hasonló a CBA háromszöghöz, továbbá a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{1}{3}$. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért a CIH háromszög, vagyis a piros sáv területe $\lambda^2 = \frac{1}{9}$-szerese a CBA háromszög területének, ezért:



$$T_{CIH} = \frac{1}{9} \cdot 46 \approx 5{,}11 \text{ cm}^2.$$

A fentihez hasonló gondolatmenettel számíthatjuk ki a zöld sáv területét: a CJK háromszög hasonló a CBA háromszöghöz, a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, amiből következik, hogy

$$T_{CJK} = \frac{4}{9} \cdot 46 \approx 20{,}44 \text{ cm}^2.$$

Így a zöld sáv területe:

$$46 - 20{,}44 = 25{,}56 \text{ cm}^2.$$

3586 *a)* A térképen kialakuló távolságokat a távolságképlettel számolhatjuk ki.
Az eredmények:

Veszprém–Győr: $\sqrt{37}$, Veszprém–Szeged: 17, Veszprém–Debrecen: $\sqrt{641}$,
Győr–Szeged: $2 \cdot \sqrt{113}$, Győr–Debrecen: $2 \cdot \sqrt{170}$, Szeged–Debrecen: $2 \cdot \sqrt{61}$.

A városok közti, kilométerben megadott távolságokat megkapjuk, ha a térképen mért távolságokat megszorozzuk 11-gyel.
Ezek alapján a távolságok egészre kerekített értékei:

Veszprém–Győr: 67 km, Veszprém–Szeged: 187 km, Veszprém–Debrecen: 278 km,
Győr–Szeged: 234 km, Győr–Debrecen: 287 km, Szeged–Debrecen: 172 km.

b) A koordinátákból észrevehető, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontja a Győr–Szeged szakasz felezőpontjában van. Ez azt jelenti, hogy az origó körülbelül Dunaújvárosban lehet.

3587 *a)* Ha a P pont illeszkedik az x tengelyre, akkor koordinátáira $P(x; 0)$ teljesül. Ekkor

$$PA^2 + PB^2 = (x+3)^2 + (0-2)^2 + (x-5)^2 + (0-3)^2.$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy

$$PA^2 + PB^2 = 2x^2 - 4x + 47,$$

majd teljes négyzetté alakítás után

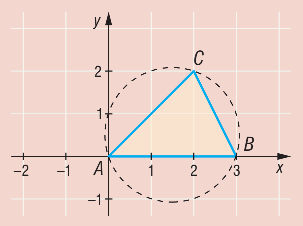
$$PA^2 + PB^2 = 2(x-1)^2 + 45.$$

Mivel a négyzetes tag nemnegatív, ezért a kifejezés akkor lesz a lehető legkisebb, ha $x = 1$.

b) A $PA^2 + PB^2$ összeg legkisebb értéke 45.

3588 *a)* Az asztal kicsinyített képének csúcspontjait az ábrának megfelelően A-val, B-vel és C-vel jelöltük:

$$A(0; 0), \quad B(3; 0) \quad \text{és} \quad C(2; 2).$$



Az ABC háromszög oldalai:

$$AB = 3, \quad BC = \sqrt{5} \quad \text{és} \quad AC = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Mivel 1 egység a valóságban 50 cm, ezért:

$$AB = 150 \text{ cm}, \quad BC = 50 \cdot \sqrt{5} \approx 111{,}8 \text{ cm} \quad \text{és} \quad AC = 100 \cdot \sqrt{2} \approx 141{,}4 \text{ cm}.$$

b) A feladat arra kérdez rá, hogy mekkora az asztallap köré írt kör sugara. Az ABC háromszög köré írt kör sugarát könnyen kiszámolhatjuk az $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot T}$ képlet segítségével, ahol T a háromszög területét, a, b és c a háromszög oldalainak hosszát jelöli. A háromszög AB oldalát választva alapnak, a területre adódik:

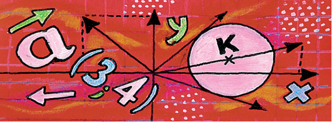
$$T = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ egység.}$$

Az *a)* feladat eredményeit felhasználva az ABC háromszög köré írható kör sugara:

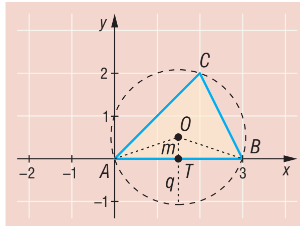
$$R = \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Figyelembe véve a kicsinyítés arányát, a kerek asztal sugara:

$$25 \cdot \sqrt{10} \approx 79{,}1 \text{ cm.}$$



c) Az ABC háromszög leghosszabb oldala AB, ezért az AB oldalhoz illesztett körszelet (az ábrán q-val jelölt) magasságára kíváncsi a feladat. A keresett magasságot megkaphatjuk, ha az ABC háromszög köré írt kör sugarából kivonjuk az ABO egyenlő szárú háromszög AB oldalához tartozó m magasságát, ahol O a háromszög köré írt kör középpontját jelöli. Ha az ABO háromszög szóban forgó magasságának talppontját T jelöli, akkor az ATO derékszögű háromszögben $AO = R$, továbbá $AT = 1{,}5$, így Pitagorasz tételének alkalmazásával:



$$m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

amiből

$$q = R - m = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10}-1}{2}.$$

A megfelelő toldalék magassága ezek alapján:

$$50 \cdot \frac{\sqrt{10}-1}{2} \approx 54{,}1 \text{ cm}.$$

d) Az asztallapon elhelyezhető legnagyobb kör alakú abrosz egybeesik az asztallapba írható körrel, így a feladat gyakorlatilag a beírt kör sugarát kérdezi. Az ABC háromszög beírható körének sugarát az $r = \dfrac{T}{s}$ képlettel számolhatjuk, ahol s a háromszög kerületének a felét jelöli.

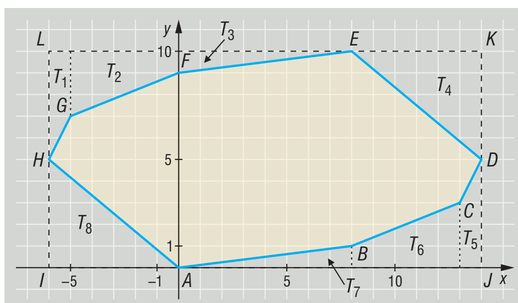
Az eredményeket behelyettesítve:

$$r = \frac{3 \cdot 2}{3 + \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{6}{3 + \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{2}}.$$

Az abrosz sugara így:

$$50 \cdot \frac{6}{3 + \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{2}} \approx 37{,}2 \text{ cm}.$$

3589 *a)* Az erdő csúcspontjait jelöljük a megadás sorrendjében az A, B, C, D, E, F, G, H betűkkel. Foglaljuk bele a nyolcszöget abba a minimális területű téglalapba, amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel: az ábrán ennek a téglalapnak a csúcsait I, J, K és L jelöli. Látható, hogy a téglalap területe $20 \cdot 10 = 200$. A nyolcszög területét megkapjuk, ha az $IJKL$ téglalap területéből levonjuk azoknak a derékszögű háromszögeknek, illetve trapézoknak a területét, amelyek a nyolcszög egy-egy oldala mentén találhatók, és a nyolcszöggel együtt kitöltik az $IJKL$ téglalapot. Ezeknek a síkidomoknak a területét az ábrán T_1, …, T_8 jelöli. Egy-egy ilyen háromszög, illetve trapéz területe könnyedén kiszámolható.



Az eredmények:

$$T_1 = 4, \quad T_2 = 10, \quad T_3 = 4, \quad T_4 = 15, \quad T_5 = 4, \quad T_6 = 10, \quad T_7 = 4, \quad T_8 = 15.$$

Végül a nyolcszög területe:

$$T = 200 - 2 \cdot (4 + 10 + 4 + 15) = 134.$$

Az erdő és az ábrázolt nyolcszög hasonló egymáshoz, a hasonlóság aránya 5000. Mivel a hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért az erdő területe:

$$134 \cdot 5000^2 \text{ cm}^2.$$

Mivel $1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2 = 10^8 \text{ cm}^2$, ezért az erdő területe:

$$\frac{134 \cdot 5000^2}{10^8} = 33{,}5 \text{ ha}.$$

b) A számítások során felfigyelhettünk arra, hogy a nyolcszög szemközti oldalaihoz illeszkedő háromszögek, illetve trapézok egybevágók egymással. Ebből arra következtethetünk, hogy a nyolcszög középpontosan szimmetrikus. A szimmetria középpontja például az AE szakasz felezőpontja, vagyis a $(4; 5)$ pont. Egyszerű számolások mutatják, hogy ez a pont valóban megfelezi a szemközti csúcsokat összekötő szakaszokat.

3590 *a)* $A(R; 0)$, $B(-R; 0)$, esetleg fordítva.

b) $\overrightarrow{CA}(R - c_1; -c_2)$, $\overrightarrow{CB}(-R - c_1; -c_2)$.

c) A $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok skaláris szorzatára:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (R - c_1) \cdot (-R - c_1) + (-c_2) \cdot (-c_2).$$

A kijelölt műveletek elvégzése után adódik:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -R^2 + c_1^2 + c_2^2.$$

Mivel a feltételek szerint a C pont az AB átmérőjű kör egy pontja, továbbá a kör középpontja az origó, ezért a C pont az origótól éppen R távolságra van, amit a C koordinátái segítségével úgy is megfogalmazhatunk, hogy

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = R, \qquad \text{azaz} \qquad c_1^2 + c_2^2 = R^2.$$

Eredményünket összehasonlítva a skaláris szorzat értékével láthatjuk, hogy

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -R^2 + c_1^2 + c_2^2 = -R^2 + R^2 = 0.$$

d) A *c)* feladat eredményéből következik, hogy a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok merőlegesek egymásra, ami egyben azt is jelenti, hogy az ABC háromszög derékszögű. Ezzel beláttuk, hogy ha az AB átmérőjű kör egy (A-tól és B-től különböző) C pontját összekötjük az átmérő két végpontjával, akkor derékszögű háromszög keletkezik, amelyben a derékszög a C csúcsnál található. Megadtuk tehát Thalész tételének egy koordináta-geometriai bizonyítását.

Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái – megoldások

3591 *a)* $(1; 3)$; *b)* $(-1; -1)$; *c)* $\left(-\frac{5}{6}; \frac{8}{15}\right)$; *d)* $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; *e)* $\left(a^2 + b^2; \frac{a}{a^2 - b^2}\right)$.

3592 *a)* $A(4; 8)$; *b)* $A\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right)$; *c)* $A(2e - 1; 2f - 4)$.

3593 *a)* $(5; 5)$, $\left(\frac{13}{2}; \frac{13}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$; *b)* $(3; 1)$, $\left(6; \frac{11}{2}\right)$, $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$.

3594 *a)* $(4; -7)$; *b)* $(14; -11)$.

3595 *a)* (2013; 2005); *b)* (2027; 1997).

3596 *a)* $\left(6; \frac{8}{3}\right)$ és $\left(9; \frac{10}{3}\right)$; *b)* $\left(\frac{8}{3}; -7\right)$ és $\left(\frac{1}{3}; -6\right)$;

c) $\left(\frac{31}{135}; -\frac{22}{9}\right)$ és $\left(\frac{2}{135}; -\frac{8}{9}\right)$.

3597 *a)* $B(14; 9)$; *b)* $B(5; -17)$.

3598 *a)* (1; 2); *b)* (9; 4); *c)* (13; 5); *d)* (37; 11).

3599 A paralelogramma két hiányzó csúcsának koordinátái: (8; 3) és (–1; 2).

3600 A két hiányzó csúcs koordinátái: $B(4; 2)$ és $D(-5; 4)$.

3601 *a)* A feltételeknek két négyzet tesz eleget. A hiányzó csúcsok koordinátái az egyes esetekben:

$$(7; 9) \text{ és } (-1; 11), \quad \text{illetve} \quad (3; -7) \text{ és } (-5; -5).$$

Az első négyzet középpontja (2; 6), a másodiké pedig (0; –2).

b) A feladatnak egyetlen megoldása van. A hiányzó csúcsok (0; –2) és (2; 6). A négyzet középpontja (1; 2).

3602 *a)* Az oldalfelező pontok:

$$E(0; 1), \quad F\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad \text{és} \quad G\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

b) A háromszög oldalvektorai:

$$\overrightarrow{AB}(2; 4), \quad \overrightarrow{BC}(1; -5) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CA}(-3; 1).$$

A középvonalvektorok:

$$\overrightarrow{FE}\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{GF}(1; 2) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{EG}\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right).$$

c) Látható, hogy

$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

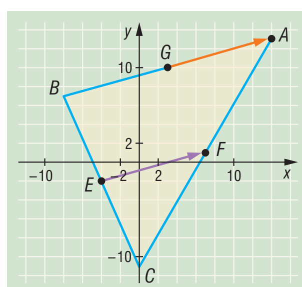
ami mutatja, hogy a megfelelő középvonal és oldalvektor egymással valóban párhuzamos.

3603 *a)* (2; 3); *b)* (0; 0); *c)* $\left(\frac{19}{45}; \frac{5}{36}\right)$.

3604 *a)* $A(0; 2)$; *b)* $A(0; 6)$;

3605 *a)* Az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög súlypontja: (2; 3).

b) Ha az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$, valamint oldalfelező pontjai $E(-4; -2)$, $F(7; 1)$ és $G(3; 10)$, akkor az első koordinátákra a következő egyenletek írhatók fel:



$$\frac{a_1 + b_1}{2} = 3, \quad \frac{b_1 + c_1}{2} = -4, \quad \frac{a_1 + c_1}{2} = 7.$$

Az egyenletek megfelelő oldalait összeadva:

$$a_1 + b_1 + c_1 = 6, \quad \text{amiből} \quad a_1 + b_1 = 6 - c_1.$$

Az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{6-c_1}{2}=3, \quad \text{azaz} \quad c_1=0.$$

Hasonló módszerrel kaphatjuk meg, hogy

$$a_1 = 14 \quad \text{és} \quad b_1 = -8.$$

A második koordinátákra felírható egyenletek:

$$\frac{a_2+b_2}{2}=10, \quad \frac{b_2+c_2}{2}=-2, \quad \frac{a_2+c_2}{2}=1.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a_2 = 13, \quad b_2 = 7 \quad \text{és} \quad c_2 = -11.$$

Az Alex által berajzolt háromszög csúcspontjai tehát:

$$A(14;\ 13), \quad B(-8;\ 7) \quad \text{és} \quad C(0;\ -11).$$

Az ABC háromszög súlypontjának koordinátái: $S(2;\ 3)$.

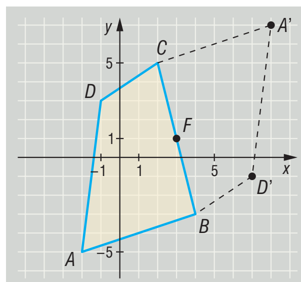
Megjegyzés: Az ABC háromszög csúcspontjait a következő észrevétel alapján is meghatározhatjuk. Az EF szakasz középvonal az ABC háromszögben, ezért EF párhuzamos AB-vel, továbbá hossza az AB hosszának fele. Ebből az is következik, hogy $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{EF}$. Mivel az $\overrightarrow{EF}$ koordinátáira $\overrightarrow{EF}(11;\ 3)$, ezért az A pont helyvektora: $\vec{a}=\vec{g}+\overrightarrow{EF}$, ahol $\vec{g}$ a G pont helyvektorát jelöli. A számítások elvégzése után $A(14;\ 13)$ adódik. A többi csúcs koordinátái hasonlóan számíthatók.

c) A két háromszög súlypontja egybeesik. Indoklásként említhetjük, hogy az ABC háromszög S súlypontjára vonatkozó, $\lambda=-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság az ABC háromszöget az EFG háromszögbe viszi át. Mivel az S pont a transzformáció fixpontja, ezért a két háromszög súlypontja valóban egybeesik.

3606 *a)* Az $ABCD$ négyszög BC oldalának felezőpontja $F(3;\ 1)$. A tükrözés után a B pont képe C és a C pont képe B. Ha az A pont A' tükörképének koordinátái $A'(x;\ y)$, akkor felhasználva, hogy az AA' szakasznak F a felezőpontja, azt kapjuk, hogy

$$\frac{x+(-2)}{2}=3, \quad \frac{y+(-5)}{2}=1.$$

Az egyenletrendszer megoldásaként $A'(8;\ 7)$. Hasonló számolásokkal a D pont tükörképeként $D'(7;\ -1)$ adódik.



b) Az $ABD'A'CD$ hatszög származtatásából adódóan középpontosan szimmetrikus, amiből azonnal következik, hogy a szemközti oldalai párhuzamosak. Utóbbi állítás természetesen koordinátageometriai eszközökkel is igazolható. Példaként: $\overrightarrow{AB}(6;\ 2)$ és $\overrightarrow{CA'}(6;\ 2)$, ami azt jelenti, hogy a két vektor megegyezik, így természetesen párhuzamosak is egymással.

3607 *a)* Az A, B és C pontok képe az OA, OB, OC szakaszt $1:1$ arányban osztó pontok lesznek. A képpontok koordinátái:

$$A'(1;1), \quad B'\left(-\frac{3}{2};-4\right), \quad C'\left(-3;\frac{1}{2}\right).$$

Az $A'B'C'$ háromszög O pontra vonatkozó tükörképe is megoldása a feladatnak. E pontok koordinátái:

$$A''(-9;-9), \quad B''\left(-\frac{13}{2};-4\right), \quad C''\left(-5;-\frac{17}{2}\right).$$

b) Ebben az esetben a képpontok az OA, OB, OC szakaszt $1:2$ arányban osztják. A képpontok koordinátái:

$$A'\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right),\quad B'\left(-\frac{7}{3};-4\right),\quad C'\left(-\frac{10}{3};-1\right).$$

Az $A'B'C'$ háromszög O pontra vonatkozó tükörképe is megoldása a feladatnak. E pontok koordinátái:

$$A''(-\frac{22}{3};-\frac{22}{3}),\quad B''\left(-\frac{17}{3};-4\right),\quad C''\left(-\frac{14}{3};-7\right).$$

3608 *a)* Ha az A pont képe $A'(x;\,y)$, akkor az OA' szakasznak a felezőpontja A, azaz

$$\frac{x+(-4)}{2}=6,\quad \frac{y+(-4)}{2}=6,$$

amiből $A'(16;\,16)$. Hasonló módszerrel: $B'(6;\,-4)$, illetve $C'(0;\,14)$.

b) Ebben az esetben az A pont $1:2$ arányban osztja az OA' szakaszt, azaz

$$\frac{2\cdot(-4)+x}{3}=6,\quad \frac{2\cdot(-4)+y}{3}=6,$$

és így $A'(26;\,26)$. A másik két pontra $B'(11;\,-4)$, illetve $C'(2;\,23)$ adódik.

3609 *a)* Az AB oldal felezőpontja: $E\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

A BC oldal felezőpontja: $F\left(\frac{b_1+c_1}{2};\frac{b_2+c_2}{2}\right)$.

Az AC oldal felezőpontja: $G\left(\frac{a_1+c_1}{2};\frac{a_2+c_2}{2}\right)$.

b) Példaként bemutatjuk, hogy EF párhuzamos az AC oldallal. Ehhez kiszámoljuk az $\overrightarrow{EF}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok koordinátáit. Látható, hogy

$$\overrightarrow{EF}\left(\frac{c_1-a_1}{2};\frac{c_2-a_2}{2}\right),\quad \text{míg}\quad \overrightarrow{AC}(c_1-a_1;\,c_2-a_2).$$

A koordináták összehasonlítása után vegyük észre, hogy

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

ami egyben mutatja, hogy a két vektor, és így persze a nekik megfelelő szakaszok is párhuzamosak egymással.

c) Az állítás az $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ összefüggésből azonnal következik.

3610 *a)* A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az AC szakasz és a BD szakasz felezőpontja egybeesik. Az AC szakasz felezőpontjának koordinátái:

$$\left(\frac{a_1+c_1}{2};\frac{a_2+c_2}{2}\right),$$

míg ha a D pont koordinátái x, illetve y, akkor a BD szakasz felezőpontja

$$\left(\frac{b_1+x}{2};\frac{b_2+y}{2}\right).$$

A két felezőpont megfelelő koordinátái egyenlők, ezért

$$\frac{a_1+c_1}{2}=\frac{b_1+x}{2}, \qquad \frac{a_2+c_2}{2}=\frac{b_2+y}{2}.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik:

$$D(a_1+c_1-b_1;\, a_2+c_2-b_2).$$

b) Paralelogramma középvonala alatt két szemközti oldal felezőpontját összekötő szakaszt értjük. Példaként megmutatjuk, hogy az AD és BC oldalak felezőpontját összekötő középvonal párhuzamos az AB oldallal. Az AD oldal felezőpontja:

$$E\left(\frac{2a_1+c_1-b_1}{2};\, \frac{2a_2+c_2-b_2}{2}\right),$$

míg a BC oldalé:

$$F\left(\frac{b_1+c_1}{2};\, \frac{b_2+c_2}{2}\right).$$

Az $\overrightarrow{EF}$ koordinátáira $\overrightarrow{EF}(b_1-a_1;\, b_2-a_2)$ teljesül, amiről azonnal kiderül, hogy megegyezik az $\overrightarrow{AB}$ koordinátáival. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az EF és AB szakaszok párhuzamosak egymással.

c) A *b)* feladatban beláttuk, hogy $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$, amiből a feladat állítása nyilvánvaló módon következik.

3611 *a)* Példaként néhány szükséges és elegendő feltétel: egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha

I. szemközti oldalai egyenlő hosszúak;
II. van két szemközti oldala, amelyek párhuzamosak és hosszuk egyenlő;
III. átlói felezik egymást;
IV. középpontosan szimmetrikus;
V. szemközti szögei megegyeznek.

b) Az I. feltétel alapján:

$$AB=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}, \qquad BC=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20},$$

$$CD=\sqrt{(-7)^2+(-3)^2}=\sqrt{58}, \qquad DA=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}.$$

A szemközti oldalak valóban egyenlők.

A II. feltétel alapján:

$\overrightarrow{AB}(7;\,3)$, továbbá $\overrightarrow{DC}(7;\,3)$. Mivel a két oldalvektor koordinátái megegyeznek, ezért AB és CD párhuzamos és egyenlő hosszúságúak.

A III. feltétel alapján:

Az AC átló felezőpontja: $\left(\frac{4009}{2};\, \frac{4021}{2}\right)$. Látható, hogy ez egyben a BD átló felezőpontja is, ezért az átlók valóban felezik egymást.

A IV. feltétel alapján:

A négyszög középpontosan szimmetrikus a $\left(\frac{4009}{2};\, \frac{4021}{2}\right)$ pontra vonatkozóan.

Az V. feltétel alapján:

$\overrightarrow{AB}(7;\,3)$, $\overrightarrow{AD}(2;\,4)$. A két vektor skaláris szorzatára:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 7\cdot 2 + 3\cdot 4 = 26.$$

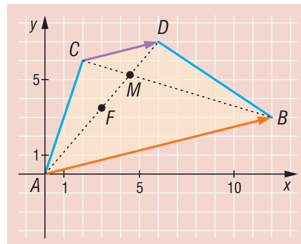
A skaláris szorzat definíciója alapján (α a két vektor hajlásszögét jelöli):

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\alpha = 26, \quad \text{amiből} \quad \cos\alpha = \frac{26}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{20}}.$$

Hasonló számolással ugyanezt az értéket kapjuk a $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok hajlásszögének koszinuszára is, ami igazolja, hogy a négyszög két szemközti szöge megegyezik. Ugyanilyen számolással ellenőrizhető, hogy a másik két szemközti szög is egyenlő.

3612 *a)* Az ábra alapján valószínűsíthető, hogy az AB és CD oldalak párhuzamosak. A megfelelő vektorok koordinátáira: $\overrightarrow{AB}(12;\,3)$ és $\overrightarrow{CD}(4;\,1)$, ami mutatja, hogy $\overrightarrow{AB} = 3\cdot\overrightarrow{CD}$.

Eredményünkből következik, hogy AB és CD valóban párhuzamos, ezért az $ABDC$ négyszög trapéz, amelyben a hosszabb alap háromszor akkora, mint a rövidebb.



b) Az átlók hossza a koordináta-rendszerben:

$$AD = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}, \quad \text{illetve} \quad BC = \sqrt{(-10)^2 + 3^2} = \sqrt{109}.$$

A két út hossza a valóságban:

$$1000\cdot\left(\sqrt{85} + \sqrt{109}\right) \approx 19\,660 \text{ méter, vagyis } 19{,}66 \text{ km.}$$

c) Ismert elemi geometriai összefüggés alapján a trapéz átlói az alapok hosszának arányában osztják egymást. Az *a)* feladat eredménye alapján ez az arány 1 : 3, ezért az átlók M metszéspontja egybeesik az AD átló D-hez legközelebbi negyedelőpontjával. Az AD szakasz felezőpontja:

$$F\left(3;\,\frac{7}{2}\right),$$

így az FD szakasz M felezőpontja:

$$M\left(\frac{3+6}{2};\,\frac{3{,}5+7}{2}\right), \quad \text{vagyis} \quad M(4{,}5;\,5{,}25).$$

3613 Alkalmazzuk az adott szakaszt adott arányban osztó pont koordinátáira vonatkozó összefüggéseket! Az eredmények az egyes esetekben:

a) $P\left(\frac{1}{3};\,-\frac{2}{3}\right)$; *b)* $P\left(\frac{4}{5};\,\frac{1}{5}\right)$; *c)* $P\left(\frac{10}{9};\,\frac{7}{9}\right)$.

3614 Ha a B pont koordinátáira $B(x;\,y)$ teljesül, akkor a feltételek szerint a P pont koordinátái:

$$P\left(\frac{3\cdot(-3)+2x}{5};\,\frac{3\cdot 0+2y}{5}\right).$$

Mivel a P pont adott, így

$$\frac{3\cdot(-3)+2x}{5} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{3\cdot 0+2y}{5} = -2.$$

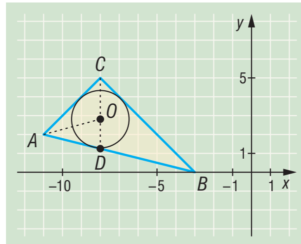
Az egyenletrendszer megoldása után azt kapjuk, hogy a B pont koordinátái: $B(7;\,-5)$.

3615 *a)* Az ABC háromszög oldalainak hossza:

$$AC = 3\cdot\sqrt{2},\ \ BC = 5\cdot\sqrt{2}\quad \text{és}\quad AB = \sqrt{68} = 2\cdot\sqrt{17}.$$

Vegyük észre, hogy $AC^2 + BC^2 = AB^2$ teljesül, ezért Pitagorasz tételének megfordítása alapján az ABC háromszög derékszögű, mégpedig a derékszög a C csúcsnál található.

b) A Pista bácsi által tervezett ösvény éppen a C csúcsból induló szögfelező mentén húzódik. Eszerint az átfogóhoz tartozó szögfelező és az átfogó D metszéspontjának koordinátáit kell kiszámolnunk. A szögfelezőtétel alapján:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{5\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{5},$$

vagyis a D pont az AB átfogót $3:5$ arányban osztja. Az osztópont koordinátái alapján a D pont koordinátái:

$$D\left(-8;\ \frac{5}{4}\right).$$

c) A mindhárom úttól ugyanolyan távolságra található pont egybeesik az ABC háromszög beírt körének középpontjával, ezért a feladat gyakorlatilag a beírt kör sugarára kérdez rá. A kör sugarát az $r = \frac{T}{s}$ összefüggésből számíthatjuk ki, ahol T az ABC háromszög területe, s pedig a háromszög kerületének fele. Mivel

$$T = \frac{AC\cdot BC}{2} = \frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot 5\cdot\sqrt{2}}{2} = 15,$$

továbbá

$$s = \frac{3\cdot\sqrt{2} + 5\cdot\sqrt{2} + \sqrt{68}}{2} = 4\cdot\sqrt{2} + \sqrt{17},$$

ezért a beírt kör sugara

$$r = \frac{15}{4\cdot\sqrt{2} + \sqrt{17}} = 4\cdot\sqrt{2} - \sqrt{17} \approx 1{,}53 \text{ egység}.$$

d) A beírt kör O középpontját az ABC háromszög szögfelezőinek metszéspontjaként kapjuk. Az A csúcsból induló szögfelező az ADC háromszögnek is szögfelezője, ezért az O pont koordinátáit a *b)* feladatban már megismert módszerrel számolhatjuk ki. Mivel az *a)* feladat alapján $AC = 3\cdot\sqrt{2}$, továbbá

$$AD = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{17},$$

ezért az O pont $\left(3\cdot\sqrt{2}\right):\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{17}\right)$ arányban osztja a CD szakaszt. Az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggések alapján:

$$O\left(\frac{-8\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{17} + (-8)\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2} + \frac{3}{4}\cdot\sqrt{17}};\ \frac{5\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{17} + \frac{5}{4}\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2} + \frac{3}{4}\cdot\sqrt{17}}\right),$$

amit kicsit „barátságosabb” alakban is felírhatunk:

$$O\left(-8;\ \frac{\left(\sqrt{17} + \sqrt{2}\right)\cdot\left(4\cdot\sqrt{2} - \sqrt{17}\right)}{3}\right).$$

3616 *a)* Az $ABCD$ négyszög csúcspontjai legyenek $A(a_1;\, a_2)$, $B(b_1;\, b_2)$, $C(c_1;\, c_2)$ és $D(d_1;\, d_2)$. Ha az AB oldal felezőpontja a $(-3;\, 1)$ pont, akkor

$$\frac{a_1+b_1}{2}=-3 \quad \text{és} \quad \frac{a_2+b_2}{2}=1,$$

amiből $b_1=-6-a_1$ és $b_2=2-a_2$, tehát $B(-6-a_1;\, 2-a_2)$. Mivel a BC oldal felezőpontja is ismert, ezért

$$\frac{-6-a_1+c_1}{2}=2 \quad \text{és} \quad \frac{2-a_2+c_2}{2}=-2,$$

amiből a C pont koordinátái: $C(10+a_1;\, -6+a_2)$. Végül a CD oldal felezőpontjának koordinátáira

$$\frac{10+a_1+d_1}{2}=3 \quad \text{és} \quad \frac{-6+a_2+d_2}{2}=2,$$

és így $D(-4-a_1;\, 10-a_2)$. Eredményeink alapján az AD oldal H felezőpontjának koordinátáira:

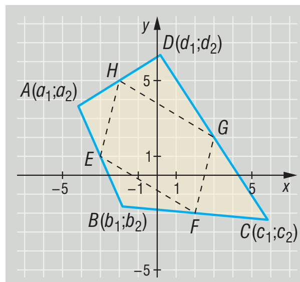
$$H\left(\frac{a_1+(-4-a_1)}{2};\, \frac{a_2+(10-a_2)}{2}\right)=(-2;\, 5).$$

Megjegyzés: a számításokból az is kiderül, hogy végtelen sok olyan négyszög van, amelynek oldalfelező pontjai a megadott pontok; a négyszög csúcsait az A pont már egyértelműen meghatározza.

b) Az $EFGH$ négyszög EG átlója felezőpontjának koordinátái:

$$\left(\frac{-3+3}{2};\, \frac{1+2}{2}\right)=\left(0;\, \frac{3}{2}\right).$$

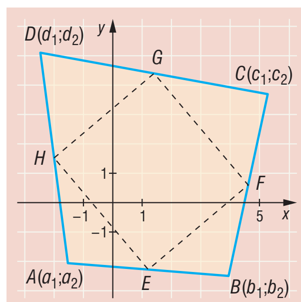
Egyszerű számolás mutatja, hogy az FH átló felezőpontja szintén ugyanez a pont. Ez azt jelenti, hogy az $EFGH$ négyszög átlói felezik egymást, így a négyszög paralelogramma.



3617 *a)* Az $ABCD$ négyszög csúcspontjai legyenek $A(a_1;\, a_2)$, $B(b_1;\, b_2)$, $C(c_1;\, c_2)$ és $D(d_1;\, d_2)$. Ekkor az oldalfelező pontok:

$$E\left(\frac{a_1+b_1}{2};\, \frac{a_2+b_2}{2}\right), \quad F\left(\frac{b_1+c_1}{2};\, \frac{b_2+c_2}{2}\right),$$

$$G\left(\frac{c_1+d_1}{2};\, \frac{c_2+d_2}{2}\right), \quad H\left(\frac{a_1+d_1}{2};\, \frac{a_2+d_2}{2}\right).$$



Többféleképpen igazolható, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma. Például megmutathatjuk, hogy az EF és HG oldalak párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

A megfelelő vektorok koordinátái:

$$\overrightarrow{EF}\left(\frac{c_1-a_1}{2};\, \frac{c_2-a_2}{2}\right) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{HG}\left(\frac{c_1-a_1}{2};\, \frac{c_2-a_2}{2}\right).$$

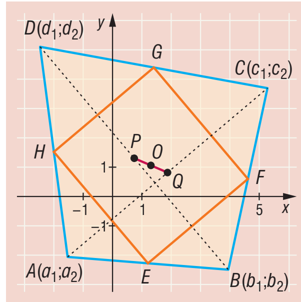
A két vektor koordinátái megegyeznek, ami igazolja, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma.

b) Az *a)* feladat jelöléseit fogjuk használni.

Az oldalfelező pontok által közrefogott paralelogramma középpontja egybeesik az EG szakasz O felezőpontjával.

Ezek alapján a paralelogramma középpontjának koordinátái felírhatók:

$$O\left(\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4};\frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}\right).$$



A BD, illetve az AC átló felezőpontja:

$$P\left(\frac{b_1+d_1}{2};\frac{b_2+d_2}{2}\right) \quad \text{illetve} \quad Q\left(\frac{a_1+c_1}{2};\frac{a_2+c_2}{2}\right).$$

A két átló felezőpontját összekötő PQ szakasz felezőpontja pedig:

$$\left(\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4};\frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}\right).$$

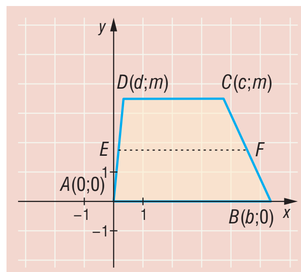
Mivel a kapott pont koordinátái szemlátomást megegyeznek az $EFGH$ paralelogramma O középpontjának koordinátáival, ezért a feladatban szereplő két pont valóban egybeesik.

c) Vegyük fel a koordináta-rendszerben a trapézt úgy, hogy az $ABCD$ trapéz AB alapja illeszkedjen az x tengelyre, A csúcsa pedig az origóba essen.

Ekkor a trapéz csúcsainak koordinátái a következő alakúak:

$$A(0;\,0),\quad B(b;\,0),\quad C(c;\,m)\quad \text{és}\quad D(d;\,m),$$

ahol m a trapéz magasságát jelöli.



A szárak felezőpontja:

$$E\left(\frac{d}{2};\frac{m}{2}\right) \quad \text{és} \quad F\left(\frac{b+c}{2};\frac{m}{2}\right).$$

A koordináta-rendszerben az adatok (pontok) választásából adódóan a trapéz alapjai párhuzamosak az x tengellyel. Tudjuk továbbá, hogy E és F második koordinátája megegyezik, ezért EF is párhuzamos az x tengellyel. Ezzel beláttuk, hogy a trapéz szárait összekötő középvonala párhuzamos az alapokkal.

Az alapok, valamint az EF középvonal hossza könnyen kiszámítható:

$$AB=|b|,\quad DC=|c-d|,$$

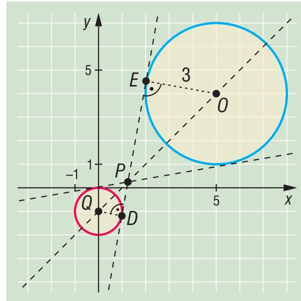
illetve

$$EF=\sqrt{\left(\frac{b+c-d}{2}\right)^2}=\left|\frac{b+c-d}{2}\right|.$$

Vegyük észre, hogy ha $b>0$, akkor $c>d$, és ha $b<0$, akkor $c<d$ (máskülönben az $ABCD$ négyszög hurkolt lenne), ezért b és $c-d$ előjele mindenképpen megegyezik, és így valóban teljesül, hogy

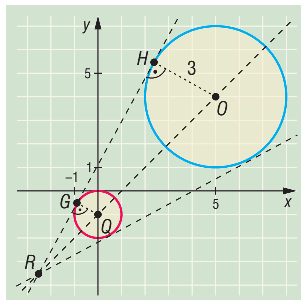
$$EF=\frac{AB+DC}{2}.$$

3618 *a)* A két közös belső érintő természetesen az OQ szakaszon metszi egymást. Tegyük fel, hogy az ábrának megfelelően az egyik közös belső érintő a köröket az E, illetve D pontokban érinti, míg a belső érintők metszéspontja P. Ekkor az OEP háromszög hasonló a QDP háromszöghöz, hiszen mindkettő derékszögű (az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra), illetve a P csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek, így szintén egyenlők egymással. A hasonlóság aránya megegyezik a körök sugarainak arányával, azaz $\lambda = \dfrac{OE}{QD} = 3$. Természetesen a két háromszög átfogóinak arányára is érvényes, hogy $\dfrac{OP}{QP} = \lambda = 3$. Eredményünket másként is megfogalmazhatjuk; a P pont az OQ szakasz Q-hoz legközelebbi negyedelőpontja. Így a P pont koordinátái:



$$P\left(\frac{3\cdot 0+1\cdot 5}{4}; \frac{3\cdot(-1)+1\cdot 4}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

b) Az *a)* feladathoz hasonló módszerrel járhatunk el. Jelöljük R-rel a két közös külső érintő metszéspontját, az egyik érintő érintési pontjait pedig G-vel, illetve H-val. Az RHO háromszög hasonló az RGQ háromszöghöz, a hasonlóság aránya 3. Az elmondottak alapján $\dfrac{RO}{RQ} = 3$, ami azt is jelenti, hogy a Q pont $1:2$ arányban osztja az RO szakaszt. Ha az ismeretlen R pont koordinátái x és y, akkor



$$\frac{2\cdot x+1\cdot 5}{3} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{2\cdot y+1\cdot 4}{3} = -1.$$

Az egyenleteket megoldva kapjuk, hogy $R\left(-\dfrac{5}{2}; -\dfrac{7}{2}\right)$.

Az egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben – megoldások

3619 *a)* Például: (1; 0), (2; 0), (–3; 0). *b)* Például: (0; 1), (0; 2), (0; 3).

c) Például: (4; 5); $\left(2; \dfrac{5}{2}\right)$; (40; 50). *d)* Például: (–5; –7), (5; 7), (0,5; 0,7).

e) Például: (9; –4), (–9; 4), (18; –8). *f)* Például: (1; 0), (–1; 0), (2010; 0).

3620 *a)* (5; –9); *b)* (–6; 5); *c)* (5; –3).

3621 *a)* (1; 0); *b)* (0; 1); *c)* (8; 3); *d)* (17; 50); *e)* (1; 3).

3622 *a)* $\alpha = 90°$, meredekség nem létezik; *b)* $\alpha = 0°$, $m = 0$;

c) $\alpha = 45°$, $m = 1$; *d)* $\alpha \approx 51{,}34°$, $m = \dfrac{5}{4}$;

e) $\alpha = -45°$, $m = -1$.

3623 *a)* $\vec{v}(5; -3)$, $\vec{n}(3; 5)$, $\alpha \approx -30{,}96°$, $m = -\dfrac{3}{5}$; *b)* $\vec{v}(2; 1)$, $\vec{n}(1; -2)$, $\alpha \approx 26{,}57°$, $m = \dfrac{1}{2}$;

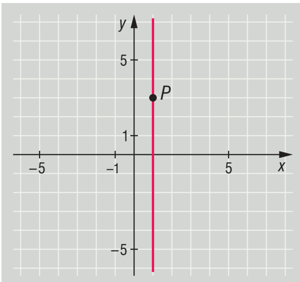
c) $\vec{v}(1; 0)$, $\vec{n}(0; 1)$, $\alpha = 0°$, $m = 0$;

d) $\vec{v}(0;\ 1)$, $\vec{n}(1;\ 0)$, $\alpha = 90°$, meredekség nem létezik;

e) $\vec{v}(3;\ -1)$, $\vec{n}(1;\ 3)$, $\alpha \approx -18{,}43°$, $m = -\dfrac{1}{3}$;

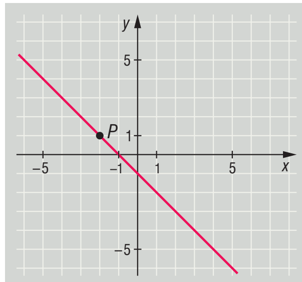
f) $\vec{v}(1;\ 5)$, $\vec{n}(5;\ -1)$, $\alpha \approx 78{,}69°$, $m = 5$.

3624 *a)*



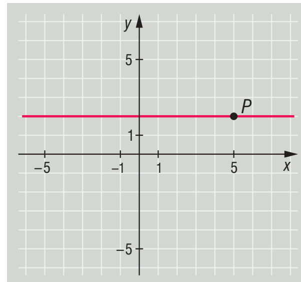
$\vec{n}(1;\ 0)$, $\alpha = 90°$, m nincs;

b)



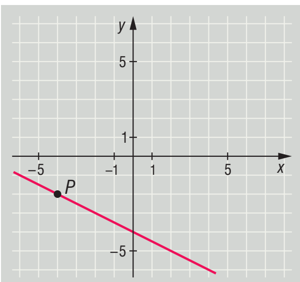
$\vec{n}(1;\ 1)$, $\alpha = -45°$, $m = -1$;

c)



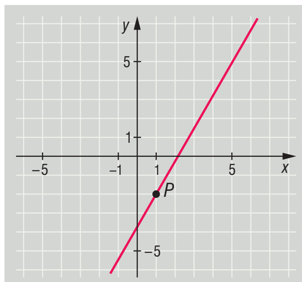
$\vec{n}(0;\ 1)$, $\alpha = 0°$, $m = 0$;

d)



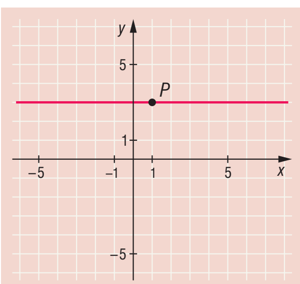
$\vec{n}(1;\ 2)$, $\alpha \approx -26{,}57°$, $m = -\dfrac{1}{2}$;

e)



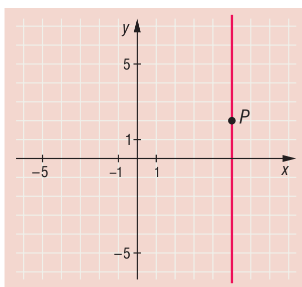
$\vec{n}\left(\sqrt{3};-1\right)$, $\alpha = 60°$, $m = \sqrt{3}$.

3625 *a)*



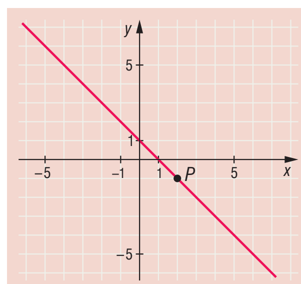
$\vec{v}(1;\ 0)$, $\alpha = 0°$, $m = 0$;

b)



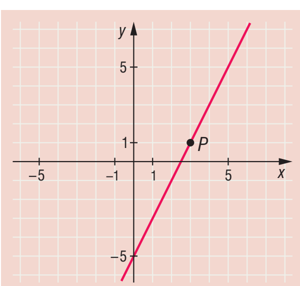
$\vec{v}(0;\ 1)$, $\alpha = 90°$, m nincs;

c)

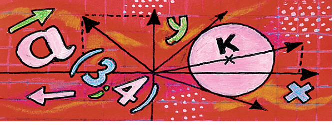


$\vec{v}(1;-1)$, $\alpha = -45°$, $m = -1$;

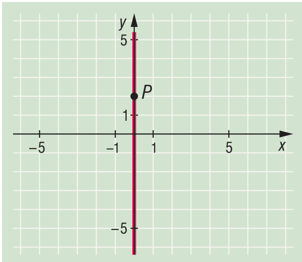
d)



$\vec{v}(1;\ 2)$, $\alpha \approx 63{,}43°$, $m = 2$.

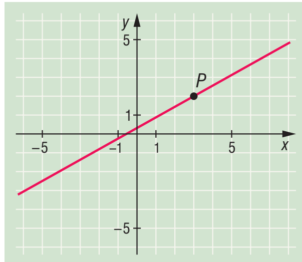


3626 *a)*



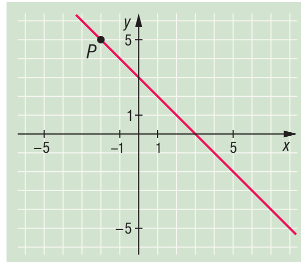
$\vec{v}(0;\,1)$, $\vec{n}(1;\,0)$, m nincs;

b)



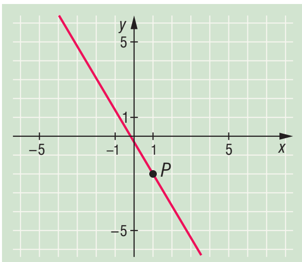
$\vec{v}\left(3;\,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}\left(\sqrt{3};-3\right)$, $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

c)



$\vec{v}(1;\,-1)$, $\vec{n}(1;\,1)$, $m=-1$;

d)



$\vec{v}\left(-1;\,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}\left(\sqrt{3};1\right)$, $m=-\sqrt{3}$.

3627 *a)* 0°; *b)* –45°; *c)* 18,43°; *d)* –30°; *e)* 89,97°.

3628 *a)* $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\vec{v}\left(3;\,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}\left(\sqrt{3};-3\right)$; *b)* $m=-1$, $\vec{v}(1;\,-1)$, $\vec{n}(1;\,1)$;

c) $m=0$, $\vec{v}(1;\,0)$, $\vec{n}(0;\,1)$; *d)* $m\approx 3{,}73$, $\vec{v}(1;\,3{,}73)$, $\vec{n}(3{,}73;\,-1)$;

e) $m=-\sqrt{3}$; $\vec{v}\left(-1;\,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}\left(\sqrt{3};1\right)$.

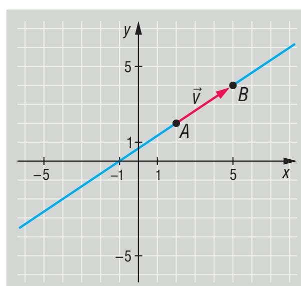
3629 *a)* $m_e=\dfrac{1}{2}$, $m_f=-2$; *b)* $m_e=\dfrac{1}{5}$, $m_f=-5$; *c)* $m_e=1$, $m_f=-1$; *d)* $m_e=\dfrac{2}{3}$, $m_f=-\dfrac{3}{2}$.

A két egyenes meredekségének szorzata minden esetben –1, ami mutatja, hogy az egyenesek merőlegesek egymásra.

3630 *a)* $m_e=m_f=3$; *b)* $m_e=m_f=-\dfrac{3}{10}$; *c)* $m_e=m_f=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; *d)* $m_e=m_f=\dfrac{a+b}{a-b}$.

Mivel a két egyenes meredeksége minden esetben megegyezik, ezért az egyenesek valóban párhuzamosak egymással.

3631 Az ábra alapján az egyenes egy irányvektora a $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ vektor, melynek koordinátái $\vec{v}(3;\,2)$. Ha a C pont koordinátái $C(2007;\,y)$, akkor az $\overrightarrow{AC}(2005;\,y-2)$ vektor szintén irányvektora az egyenesnek, ezért valamely α valós számra $\overrightarrow{AC}=\alpha\cdot\vec{v}$. Ezek alapján a vektorok első koordinátáira $2005=\alpha\cdot 3$, amiből $\alpha=\dfrac{2005}{3}$, és így



$$y-2=\frac{2005}{3}\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{4016}{3}.$$

A C pont koordinátái tehát $C\left(2007;\,\dfrac{4016}{3}\right)$.

a) Mivel $\overrightarrow{AP}(33; 22)$, ezért $\overrightarrow{AP} = 11\vec{v}$, ami azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{AP}$ szintén irányvektora az egyenesnek, tehát a P pont illeszkedik az egyenesre.

b) Mivel $\overrightarrow{AQ}(-15; -10)$, ezért $\overrightarrow{AQ} = -5\vec{v}$, ezért a Q pont szintén illeszkedik az egyenesre.

c) Az $\overrightarrow{AR}$ koordinátái $\overrightarrow{AR}(-18; -11)$. Mivel az $\overrightarrow{AR}$ nem írható fel a $\vec{v}$ valahányszorosaként, ezért a két vektor nem párhuzamos, így az R pont nem illeszkedik az egyenesre.

3632 *a)* Ha az autópálya két ismert pontját A és B jelöli (megadásuk sorrendjében), akkor a pálya egy irányvektorának koordinátái $\overrightarrow{AB}(5; 3)$. Az A pontot a koordináta-rendszer O kezdőpontjával összekötő vektor koordinátáira: $\overrightarrow{AO}(2; 1)$. Mivel a két vektor nem párhuzamos egymással, ezért az autópálya nem halad keresztül az origón.

b) Ha a keresett C pont koordinátáit $C(1; y)$ jelöli, akkor $\overrightarrow{AC}(3; y+1)$. A C pont pontosan akkor illeszkedik az autópálya nyomvonalára, ha valamely α valós számra teljesül, hogy $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$.

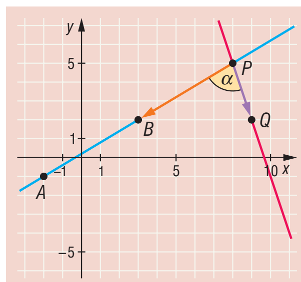
A vektorok első koordinátáinak összehasonlításából $\alpha = \frac{3}{5}$, így a második koordinátákra:

$$y + 1 = \frac{3}{5} \cdot 3, \quad \text{amiből} \quad y = \frac{4}{5}.$$

A C pont koordinátái: $C\left(1; \frac{4}{5}\right)$.

c) Elegendő megmutatni, hogy a P pont illeszkedik az autópálya nyomvonalára. Mivel $\overrightarrow{AP}(10; 6)$, ezért $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$, ami mutatja, hogy a két vektor párhuzamos egymással. Ebből adódik, hogy a P pont valóban az autópályán található.

d) A két útszakasz által bezárt szöget az ábrának megfelelően jelöljük α-val. Ekkor α megegyezik a $\overrightarrow{PB}$ és $\overrightarrow{PQ}$ vektorok hajlásszögével. A vektorok koordinátái: $\overrightarrow{PB}(-5; -3)$, $\overrightarrow{PQ}(1; -3)$. A két vektor skaláris szorzatára:



$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} = (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) = 4,$$

hosszukra pedig

$$\left|\overrightarrow{PB}\right| = \sqrt{34} \quad \text{és} \quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{10}$$

teljesül. A skaláris szorzat definíciója alapján:

$$\sqrt{34} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha = 4,$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{10}},$$

$$\alpha \approx 77{,}47°.$$

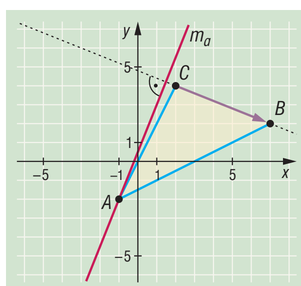
A két útszakasz 77,47°-os szögben metszi majd egymást.

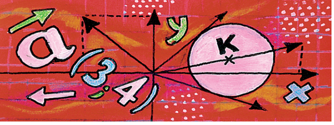
3633 Az A csúcsból induló m_a magasságvonalnak a $\overrightarrow{CB}(5; -2)$ vektor egy normálvektora, ezért a magasságvonal egy irányvektora: $\vec{v}(2; 5)$.

A magasságvonal meredeksége $m = \frac{5}{2}$, irányszöge pedig 68,20°.

Hasonló számításokkal kaphatjuk a B csúcsból induló magasságvonal adatait: irányvektorának koordinátái $(2; -1)$, meredeksége $-\frac{1}{2}$, irányszöge $-26{,}57°$.

A C csúcsból induló magasságvonal adatai: irányvektorának koordinátái $(1; -2)$, meredeksége -2, irányszöge $-63{,}43°$.





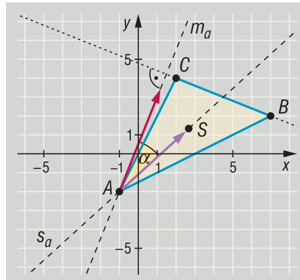
3634 A háromszög súlypontja $S\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Az AS súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{AS}\left(\frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$, egy normálvektora pedig a $\left(\frac{10}{3}; -\frac{11}{3}\right)$ koordinátájú vektor.

A BS súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{BS}\left(-\frac{13}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, egy normálvektorának koordinátái $\left(\frac{2}{3}; -\frac{13}{3}\right)$.

Végül a CS súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{CS}\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$, egy normálvektorának koordinátái $\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

3635 *a)* A 3633. feladat eredménye alapján az A csúcsból induló magasságvonal egy irányvektora $\vec{v}(2; 5)$, míg a 3634. feladat alapján az A csúcsból induló súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{AS}\left(\frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$. A két vektor skaláris szorzata 24, a vektorok hossza:

$$|\vec{v}| = \sqrt{29} \quad \text{és} \quad |\overrightarrow{AS}| = \frac{\sqrt{221}}{3}.$$



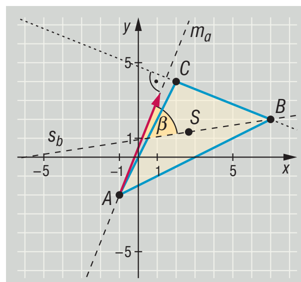
Ha a két vektor által bezárt szöget α jelöli, akkor a skaláris szorzatból:

$$24 = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{221}}{3} \cdot \cos\alpha, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 25{,}92°.$$

b) A keresett β szög megegyezik az A csúcsból induló magasságvonal $\vec{v}(2; 5)$ irányvektora, és az s_b súlyvonal $\overrightarrow{SB}$ irányvektora által bezárt szöggel. A 3634. feladat eredménye alapján $\overrightarrow{SB}\left(\frac{13}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Az *a)* feladathoz hasonló számítással:

$$12 = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{173}}{3} \cdot \cos\beta, \quad \text{amiből} \quad \beta \approx 59{,}45°.$$



3636 *a)* Két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha irányvektoraik merőlegesek egymásra, ez pedig pontosan akkor következik be, ha az irányvektorok skaláris szorzata 0. Ezek alapján

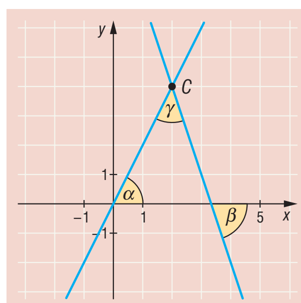
$$\vec{v}_e \cdot \vec{v}_f = 2 \cdot 5 + 1 \cdot p = 0, \quad \text{amiből} \quad p = -10.$$

b) $p = 0$.

c) $p = 2 \cdot \sqrt{2}$ vagy $p = -2 \cdot \sqrt{2}$.

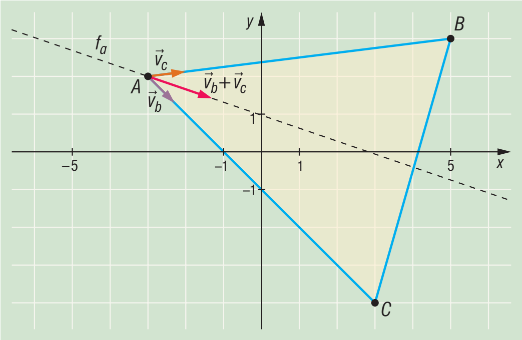
3637 Tegyük fel, hogy a 2 meredekséggel rendelkező egyenes irányszöge α, ekkor $\alpha \approx 63{,}43°$, a -3 meredekséggel rendelkezőé pedig β, ekkor $\beta \approx -71{,}57°$. A két egyenes által bezárt γ szög az ábrán a C metszéspontnál alakul ki. Az egyenesek, valamint az x tengely által közrefogott háromszögből:

$$\gamma = 180° - \alpha + \beta = 180° - 63{,}43° - 71{,}57° = 45{,}00°.$$



3638 *a)* Az AB oldalegyenes egy irányvektora: $\overrightarrow{AB}(8;\,1)$, az AC egyenesé $\overrightarrow{AC}(6;\,-6)$, vagy $\vec{v}_{AC}(1;\,-1)$, és a BC oldalegyenesé $\overrightarrow{BC}(-2;\,-7)$.

b) Az ábrán $\vec{v}_c$, illetve $\vec{v}_b$ az AB, illetve AC oldalegyenesek egy-egy egységnyi hosszúságú irányvektorát jelöli. A $\vec{v}_b+\vec{v}_c$ vektor a két vektor által kifeszített paralelogramma megfelelő átlóvektora. Mivel a két vektor rombuszt feszít ki, ezért átlója illeszkedik a két oldal által közrefogott szögfelezőre, így a $\vec{v}_b+\vec{v}_c$ vektor az A csúcsnál lévő f_a szögfelező egy irányvektora. Feladatunk tehát a $\vec{v}_c$, illetve $\vec{v}_b$ vektorok koordinátáinak meghatározása.



Mivel $\overrightarrow{AB}(8;\,1)$, ezért $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{65}$, így az $\overrightarrow{AB}$-ral egyállású egységvektor koordinátái:

$$\vec{v}_c\left(\frac{8}{\sqrt{65}};\,\frac{1}{\sqrt{65}}\right).$$

Hasonlóan $\vec{v}_{AC}(1;\,-1)$ és $\left|\vec{v}_{AC}\right|=\sqrt{2}$, ezért az AC egyenes egységhosszú irányvektora:

$$\vec{v}_b\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Az f_a szögfelező egy irányvektorának koordinátái:

$$\vec{v}_b+\vec{v}_c\left(\frac{8}{\sqrt{65}}+\frac{1}{\sqrt{2}};\,\frac{1}{\sqrt{65}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

c) Az f_a egyenes irányvektorából a meredeksége már könnyen számolható:

$$m=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{65}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{8}{\sqrt{65}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$m=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{65}}{8\cdot\sqrt{2}+\sqrt{65}}.$$

Az egyenes irányszöge ≈ –18,94°.

3639 Ha a két egyenest e és f jelöli, továbbá m_1 az e, m_2 az f egyenes iránytangense, akkor az egyenesek egy-egy irányvektora $\vec{v}_e(1;\,m_1)$, $\vec{v}_f(1;\,m_2)$. A két irányvektor skaláris szorzatára teljesül, hogy:

$$\vec{v}_e\cdot\vec{v}_f=1+m_1\cdot m_2.$$

A két vektor által közrefogott szög éppen a két egyenes által bezárt φ szöggel egyenlő, ezért a skaláris szorzat más alakban is felírható:

$$\vec{v}_e\cdot\vec{v}_f=\left|\vec{v}_e\right|\cdot\left|\vec{v}_f\right|\cdot\cos\varphi.$$

Mivel

$$\left|\vec{v}_e\right|=\sqrt{1+m_1^2}\quad\text{és}\quad\left|\vec{v}_f\right|=\sqrt{1+m_2^2},$$

ezért

$$\vec{v}_e\cdot\vec{v}_f=\sqrt{1+m_1^2}\cdot\sqrt{1+m_2^2}\cdot\cos\varphi.$$

A skaláris szorzatra kapott két eredmény összevetéséből:

$$1 + m_1 \cdot m_2 = \sqrt{1 + m_1^2} \cdot \sqrt{1 + m_2^2} \cdot \cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{1 + m_1^2} \cdot \sqrt{1 + m_2^2}}. \qquad (1)$$

Jól ismert, de amúgy nem túlságosan bonyolultan igazolható, addíciós összefüggés alapján:

$$1 + \mathrm{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi},$$

ezért ha az (1) egyenlőség mindkét oldalának reciprokát vesszük, majd négyzetre emeljük, akkor adódik, hogy:

$$1 + \mathrm{tg}^2\varphi = \frac{(1 + m_1^2) \cdot (1 + m_2^2)}{(1 + m_1 \cdot m_2)^2},$$

$$\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{(1 + m_1^2) \cdot (1 + m_2^2)}{(1 + m_1 \cdot m_2)^2} - 1,$$

$$\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{(1 + m_1^2) \cdot (1 + m_2^2) - (1 + m_1 \cdot m_2)^2}{(1 + m_1 \cdot m_2)^2}.$$

A kijelölt műveletek és összevonások elvégzése után:

$$\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{m_1^2 - 2 \cdot m_1 \cdot m_2 + m_2^2}{(1 + m_1 \cdot m_2)^2},$$

$$\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(1 + m_1 \cdot m_2)^2}.$$

Mindkét oldalból négyzetgyököt vonva kapjuk, hogy:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|,$$

amit éppen bizonyítani kellett.

Az egyenes egyenletei – megoldások

3640 *a)* $y = 3$; *b)* $x = 3$; *c)* $x + y = 5$; *d)* $-2x + y = 0$;
e) $x - 3y = -14$; *f)* $x + 2y = -4$; *g)* $x - 2y = 5$; *h)* $x + 2y = 8$.

3641 *a)* $x = 1005$; *b)* $y = \frac{3}{2}$; *c)* $x + 3y = 0$; *d)* $-6x + 20y = 37$.

3642 $8x - 3y = 6{,}5$.

3643 *a)* $x = 2$; *b)* $y = -5$; *c)* $x - y = 2$; *d)* $x + 2y = -4$;
e) $x + 2y = 7$; *f)* $x - 3y = 0$; *g)* $x - y = -6$; *h)* $3x + 2y = 16$.

3644 *a)* $y = 0$; *b)* $x = -2$; *c)* $y = 3x$; *d)* $10x + 3y = 11$;
e) $x + y = \frac{1}{15}$; *f)* $2x - y = 5 \cdot \sqrt{3}$.

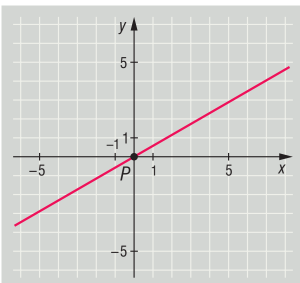
3645 *a)* A pontok mindegyike illeszkedik az $y = -2x + 1$ egyenletű egyenesre.
b) Mindhárom pont illeszkedik a $3x - 2y = 2005$ egyenletű egyenesre.
c) Mindhárom pont illeszkedik a $3x - 2y = 15$ egyenletű egyenesre.
d) A három pont nem illeszkedik egy egyenesre.

3646 *a)* $y = 4x$, illetve $y = -\frac{1}{4}x$; *b)* $3x + 4y = 10$, illetve $4x - 3y = -20$;
c) $y = 4x + 10$, illetve $x + 4y = -11$; *d)* $6x - 7y = 41$, illetve $7x + 6y = -23$.

3647 *a)* $3x + 2y = 5$; *b)* $y = 2x + 8$; *c)* $y = x$;
d) $2x + 3y = -19$.

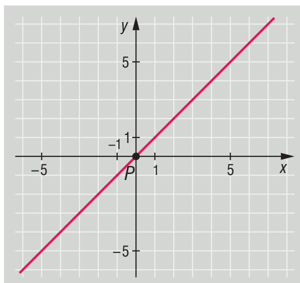
3648 *a)* $y = -x$; *b)* $x + 2y = 2$; *c)* $x + 3y = 10$;
d) $y = x + 1$.

3649 *a)*



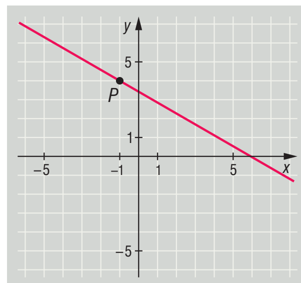
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

b)



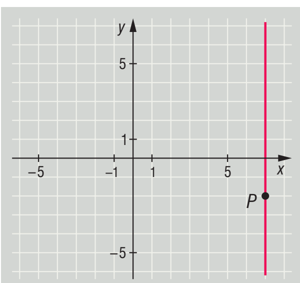
$y = x$;

c)



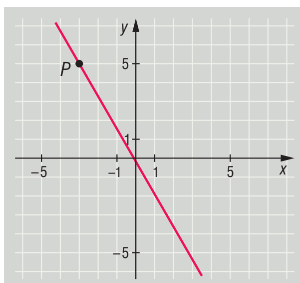
$y - 4 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x + 1)$;

d)



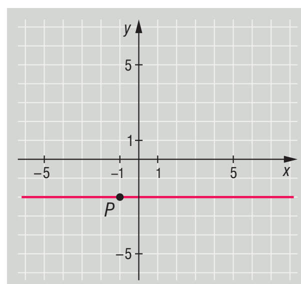
$x = 7$;

e)



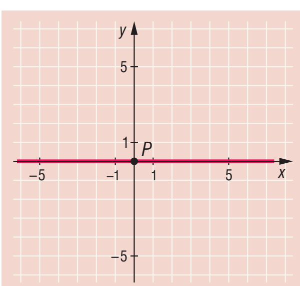
$y - 5 = -\sqrt{3} \cdot (x + 3)$;

f)



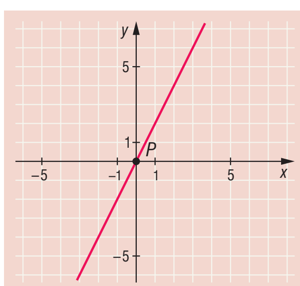
$y = -2$.

3650 *a)*



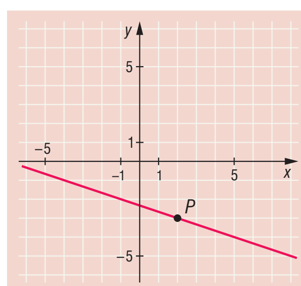
$y = 0$;

b)

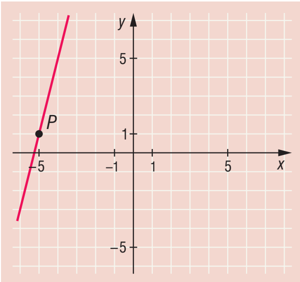


$y = 2x$;

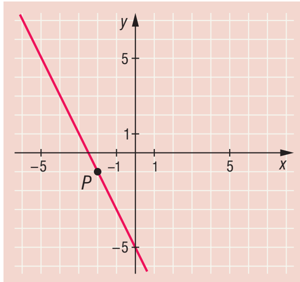
c)



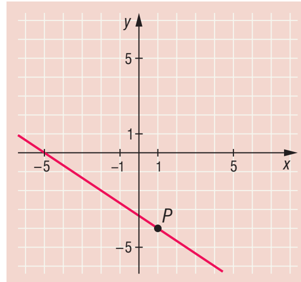
$x + 3y = -7$;

d)


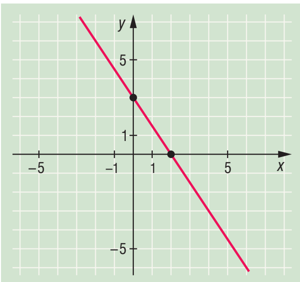
$4x - y = -21;$

e)


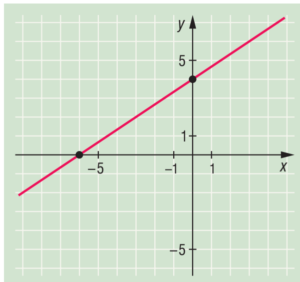
$2x + y = -5;$

f)


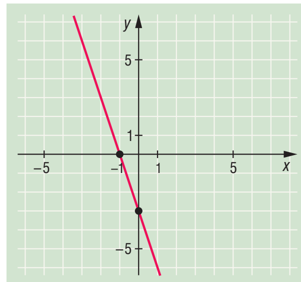
$2x + 3y = -10.$

3651 *a)*


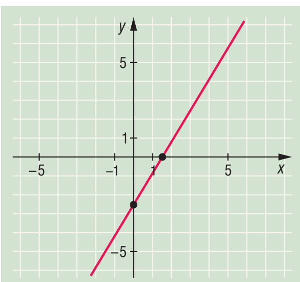
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1;$

b)


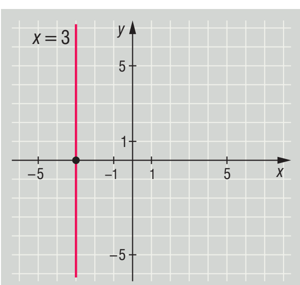
$-\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1;$

c)


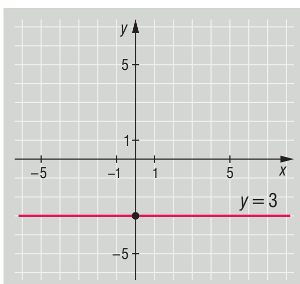
$-x - \frac{y}{3} = 1;$

d)


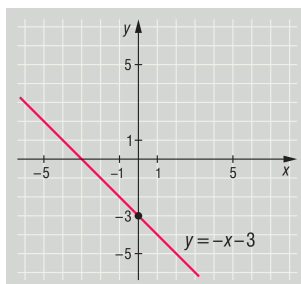
$\frac{2x}{3} - \frac{2y}{5} = 1.$

3652 *a)*


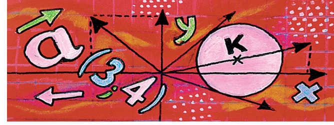
$\vec{v}(0; 1)$, $\vec{n}(1; 0)$,
m nem létezik, $\alpha = 90°$;

b)


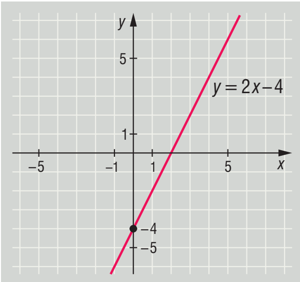
$\vec{v}(1; 0)$, $\vec{n}(0; 1)$,
$m = 0$, $\alpha = 0°$;

c)


$\vec{v}(1; -1)$, $\vec{n}(1; 1)$,
$m = -1$, $\alpha = -45°$;



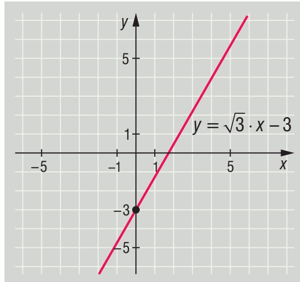
d)



$\vec{v}(1;\,2)$, $\vec{n}(2;\,-1)$,

$m = 2$, $\alpha \approx 63{,}43°$;

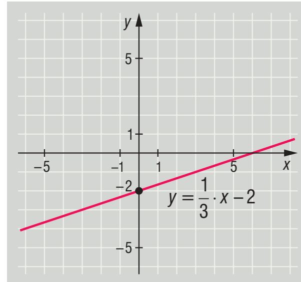
e)



$\vec{v}\left(1;\,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}\left(\sqrt{3};\,-1\right)$,

$m = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$;

f)



$\vec{v}(3;\,1)$, $\vec{n}(-1;\,3)$,

$m = \dfrac{1}{3}$, $\alpha \approx 18{,}43°$.

3653 *a)* $x + y = 3$, $\vec{n}(1;\,1)$, $\vec{v}(1;\,-1)$, $m = -1$, $\alpha = -45°$;

b) $-2x + y = 4$, $\vec{n}(-2;\,1)$, $\vec{v}(1;\,2)$, $m = 2$, $\alpha \approx 63{,}43°$;

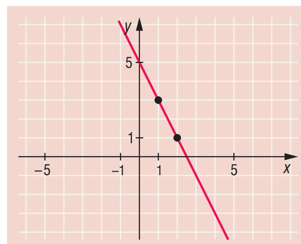
c) $x + 2y = -2$, $\vec{n}(1;\,2)$, $\vec{v}(2;\,-1)$, $m = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha \approx -26{,}57°$;

d) $x - 6y = 6$, $\vec{n}(1;\,-6)$, $\vec{v}(6;\,1)$, $m = \dfrac{1}{6}$, $\alpha \approx 9{,}46°$.

3654 *a)* A P pont illeszkedik az egyenesre, ezért az egyenes és tükörképe egybeesik. Így a tükörkép egyenlete: $2x + y = 5$.

b) $2x + y = -3$.

c) $2x + y = -5$.



3655 *a)* Az egyenes a háromszög BC oldalegyenese.

b) Nem oldalegyenes.

c) Nem oldalegyenes.

d) Nem oldalegyenes.

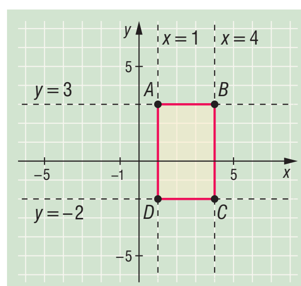
e) Az egyenes a háromszög AC oldalegyenese.

f) Az egyenes a háromszög AB oldalegyenese.

g) Az egyenes a háromszög BC oldalegyenese.

3656 *a)* $A(1;\,3)$, $B(4;\,3)$, $C(4;\,-2)$, $D(1;\,-2)$.

b) Az egyenesek téglalapot fognak közre.

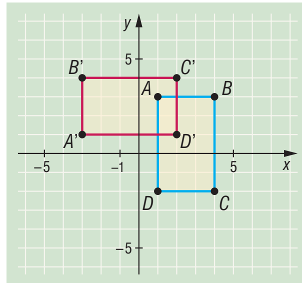


c) $A'(-3; 1)$, $B'(-3; 4)$, $C'(2; 4)$, $D(2; 1)$.

d) Az oldalegyenesek egyenlete:

$$x = -3, \quad y = 4, \quad x = 2, \quad y = 1.$$

e) A két négyszög közös részének kerülete 6, területe 2; egyesítésük kerülete 26, területe pedig 28.



3657 *a)* Az AB egyenes egy irányvektora az $\overrightarrow{AB}(5; -5)$ vektor, így egy normálvektora az $\vec{n}_{AB}(1; 1)$ vektor. Az egyenes egyenlete: $x + y = 0$. A BC egyenes egy irányvektora: $\overrightarrow{BC}(2; 6)$, normálvektora $\vec{n}_{BC}(-3; 1)$, egyenlete: $3x - y = 12$. Végül az AC egyenes egyenlete: $x - 7y = -16$.

b) Az A csúcsból induló m_a magasságvonal merőleges a BC egyenesre, ezért egy normálvektora az $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}(1; 3)$ vektor. Az A pont illeszkedik a magasságvonalra, ezért m_a egyenlete: $x + 3y = 4$. Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk a másik két magasságvonal egyenletét is: m_b egyenlete $7x + y = 18$ és m_c egyenlete $x - y = 2$.

c) Mivel $2{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 = 4$, ezért az M pont illeszkedik az m_a egyenesre. Hasonlóan: $7 \cdot 2{,}5 + 0{,}5 = 18$, illetve $2{,}5 - 0{,}5 = 2$, ezért az M pont a másik két magasságvonalnak is pontja. Az M pont épp az ABC háromszög magasságpontja.

3658 *a)* Az AB oldal felezőpontja az $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ koordinátájú pont. Mivel az AB oldalfelező merőlegesének az $\overrightarrow{AB}(5; -5)$ vektor normálvektora, ezért az egyenes egyenlete:

$$5x - 5y = 5 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), \quad \text{vagyis} \quad x - y = 1.$$

A BC oldal felezőpontja $(4; 0)$, az oldalfelező merőleges normálvektora $(1; 3)$, ezért annak egyenlete $x + 3y = 4$. Végül az AC oldalfelező merőlegesének egyenlete: $7x + y = 13$.

b) Mivel

$$\frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1, \quad \frac{7}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} = 4, \quad 7 \cdot \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = 13,$$

ezért az O pont valóban illeszkedik mindhárom oldalfelező merőlegesre.

c) Az O pont és az ABC háromszög csúcsainak távolsága:

$$OA = \sqrt{\left(-2 - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{16}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{4},$$

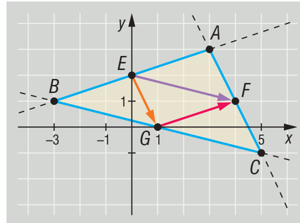
$$OB = \sqrt{\left(3 - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(-3 - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{225}{16}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{4},$$

$$OC = \sqrt{\left(5 - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{16} + \frac{81}{16}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{4}.$$

Eredményeink igazolják, hogy az O pont a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra található.

d) Az O pont az ABC háromszög köré írható kör középpontja.

3659 Az adott pontokat a megadás sorrendjében E, F és G, a háromszög csúcspontjait A, B és C jelöli az ábrán. Az EF szakasz középvonal az ABC háromszögben, ezért párhuzamos a háromszög BC oldalával. Ezt a tényt a koordináta-geometriában úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $\overrightarrow{EF}(4; -1)$ vektor a BC egyenes egy irányvektora. A BC egyenes átmegy a G ponton, ezért az egyenes irányvektoros egyenletének alkalmazása után a BC egyenes egyenlete:



$$-x - 4y = -1 \cdot 1 - 4 \cdot 0, \quad \text{azaz} \quad x + 4y = 1.$$

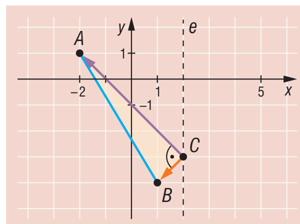
Hasonló megfontolások után az AB egyenes egyenlete:

$$x - 3y = -6,$$

az AC egyenesé:

$$2x + y = 9.$$

3660 *a)* Jelöljük C-vel az e egyenes egy olyan pontját, amellyel az ABC háromszög derékszögű, a derékszög pedig a C csúcsnál van. Mivel C illeszkedik az e egyenesre, ezért koordinátáit $C(2; y)$ alakban kereshetjük. A feltételek szerint $ACB\sphericalangle = 90°$, ezért a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok skaláris szorzata 0. Mivel $\overrightarrow{CA}(-4; 1-y)$ és $\overrightarrow{CB}(-1; -4-y)$, ezért



$$-4 \cdot (-1) + (1-y) \cdot (-4-y) = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $y = 0$ és $y = -3$. Az e egyenesen tehát valóban két olyan C pont található, amely az AB átfogóval derékszögű háromszöget alkot, ezek koordinátái $C(2; -3)$ és $C(2; 0)$.

b) Az *a)* feladat eredményei alapján $C(2; -3)$. Az AC befogó egy irányvektora a $\overrightarrow{CA}(-4; 4)$ vektor, és egy pontja a C pont. Ezek alapján az AC egyenes egyenlete:

$$x + y = -1.$$

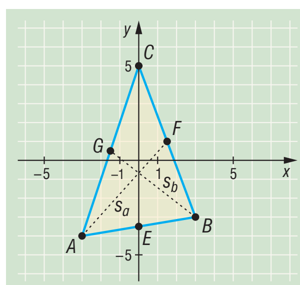
A BC egyenes egyenlete:

$$x - y = 5.$$

c) Az AC egyenes meredeksége -1, a BC egyenesé 1.

d) Az ABC háromszög derékszögű, ezért körülírt körének középpontja egybeesik az AB átfogó felezőpontjával, a kör sugara pedig az átfogó hosszának fele. Az AB átfogó hossza $\sqrt{34}$, így a körülírt kör sugara $\dfrac{\sqrt{34}}{2} \approx 2{,}92$.

3661 A háromszöglap egyensúlyban marad, ha a súlyvonalai mentén támasztjuk alá. A háromszög AB oldalának felezőpontja $E\left(0; -\dfrac{7}{2}\right)$. Mivel e pont illeszkedik az y tengelyre, csakúgy mint a C csúcs, ezért az s_c súlyvonal egyenlete: $x = 0$.



A BC oldal felezőpontja $F\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)$, ezért az AB súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{AF}\left(\dfrac{9}{2}; 5\right)$, így egyenlete: $10x - 9y = 6$.

Az AC oldal felezőpontja $G\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, az s_b súlyvonal egyenlete: $7x + 9y = -6$.

3662 *a)* Az egyenes x tengellyel való metszete:

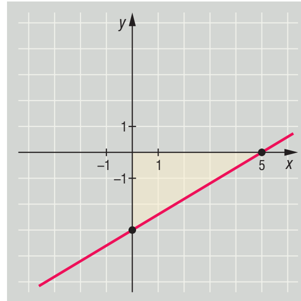
$$a = 5,$$

y tengellyel való metszete:

$$b = -3.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = 7{,}5.$$



b) Az egyenes x tengellyel való metszete:

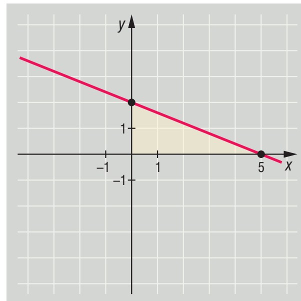
$$a = 5,$$

y tengellyel való metszete:

$$b = 2.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = 5.$$



c) Az egyenes x tengellyel való metszete:

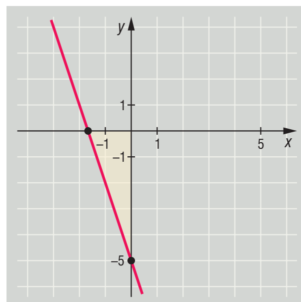
$$a = -\frac{5}{3},$$

y tengellyel való metszete:

$$b = -5.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = \frac{25}{6}.$$



d) Az egyenes x tengellyel való metszete:

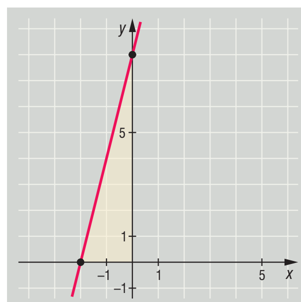
$$a = -2,$$

y tengellyel való metszete:

$$b = 8.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = 8.$$



3663 *a)* Az e egyenes meredeksége $\frac{2}{3}$, az f egyenesé $-\frac{a}{2}$. A két egyenes merőlegességének szükséges és elegendő feltétele, hogy a meredekségek szorzata -1 legyen. Ezek alapján:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) = -1, \quad \text{amiből} \quad a = 3.$$

b) $a = \frac{5}{4}.$

c) Az e egyenes párhuzamos az y tengellyel, ezért az f egyenesnek az x tengellyel kell párhuzamosnak lennie. Ekkor az f egyenes egyenletében x-et tartalmazó tag nem szerepelhet, ezért a feltételeknek megfelelő a nem létezik.

d) $a = 5$ vagy $a = -5$.

3664 *a)* $b = \frac{1}{2}$ és a tetszőleges valós szám. *b)* $b = -8$ és a tetszőleges valós szám.

c) $b = \frac{1}{2}$ és $a = -2$.

3665 A P és Q pontok koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét, ezért:

$$\left.\begin{aligned} 4a + 6b &= 4 \\ -6a + 21b &= 4 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = \frac{1}{2}$ és $b = \frac{1}{3}$.

3666 *a)* Az $\overrightarrow{AC}$ vektor koordinátái: $\overrightarrow{AC}(3; 6)$, ezért az AC egyenes egy irányvektora:

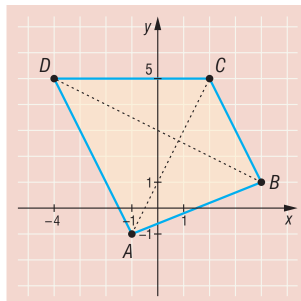
$$\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}(1; 2).$$

Mivel az AC egyenes átmegy az A ponton, ezért az irányvektoros egyenlet alkalmazásával kapjuk, hogy egyenlete:

$$2x - y = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1), \quad \text{azaz} \quad 2x - y = -1.$$

Hasonló számításokkal a BD átló egyenesének egyenlete:

$$x + 2y = 6.$$



b) Az átlóegyenesek egyenletéből az AC egyenes meredeksége 2, a BD egyenesé $-\frac{1}{2}$. Mivel a két egyenes meredekségének szorzata -1, ezért a két egyenes valóban merőleges egymásra.

c) Mivel az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, ezért területe $T = \frac{AC \cdot BD}{2}$. Egyszerű számolásokkal: $AC = \sqrt{45}$, illetve $BD = \sqrt{80}$, így az $ABCD$ négyszög területe:

$$T = \frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{80}}{2} = \frac{\left(3 \cdot \sqrt{5}\right) \cdot \left(4 \cdot \sqrt{5}\right)}{2} = 30.$$

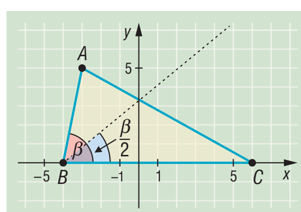
Mivel 1 egység 50 méternek felel meg a valóságban, ezért a birtok tényleges területe:

$$30 \cdot 50 \cdot 50 = 75\,000 \text{ m}^2, \quad \text{ami} \quad 7{,}5 \text{ hektár.}$$

3667 *a)* Az AB egyenes egy irányvektorának koordinátái: $\overrightarrow{BA}(1; 5)$, ezért meredeksége 5, azaz $\operatorname{tg}\beta = 5$.

A B csúcshoz tartozó belső szögfelező irányszöge $\frac{\beta}{2}$, ezért meredeksége:

$$m = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$



Ismert addíciós összefüggés alapján:

$$5 = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\beta}{2}\right) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} = \frac{2m}{1 - m^2},$$

amiből kapjuk, hogy

$$5m^2 + 2m - 5 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$m_1 = \frac{-2 + 2 \cdot \sqrt{26}}{10} = \frac{-1 + \sqrt{26}}{5}, \quad \text{illetve} \quad m_2 = \frac{-1 - \sqrt{26}}{5}.$$

Az ábra alapján látható, hogy a B csúcshoz tartozó belső szögfelező meredeksége pozitív, így csak m_1 jöhet szóba. A B csúcsnál lévő szögfelező meredekségének pontos értéke:

$$m = \frac{-1 + \sqrt{26}}{5}.$$

A külső szögfelező merőleges a belső szögfelezőre, ezért ha meredekségét m' jelöli, akkor $m' \cdot m = -1$, azaz

$$m' \cdot \frac{-1 + \sqrt{26}}{5} = -1, \quad \text{amiből} \quad m' = \frac{-5}{-1 + \sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{26} + 1}{5}.$$

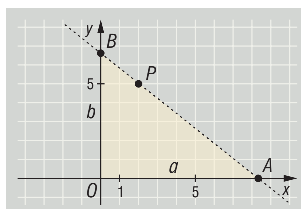
A külső szögfelező meredekségének pontos értéke:

$$m' = -\frac{\sqrt{26} + 1}{5}.$$

b) Az egyenes iránytényezős egyenlete alapján a B csúcshoz tartozó belső szögfelező egyenlete:

$$y = \frac{\sqrt{26} - 1}{5} \cdot (x + 4).$$

3668 Ha a P ponton átmenő egyenes tengelymetszetei az ábrának megfelelően a és b, akkor egyenlete $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ alakban írható (a és b pozitív számok). Mivel a P pont illeszkedik az egyenesre, ezért koordinátái kielégítik az egyenletet, azaz:



$$\frac{2}{a} + \frac{5}{b} = 1. \quad (1)$$

Az egyenes a koordináta-rendszer tengelyeivel az AOB derékszögű háromszöget fogja közre, amelynek befogói a és b, ezért területe $T = \frac{a \cdot b}{2}$. Feladatunk a terület minimumának megállapítása az (1) feltétel teljesülése mellett. Az (1) összeg tagjai kis ügyeskedéssel megjeleníthetők a területet leíró képletben:

$$\sqrt{2 \cdot T} = \sqrt{a \cdot b},$$

majd 10-zel bővítve az $a \cdot b$ szorzatot, kapjuk hogy:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{5}}.$$

Mivel a terület nyilván pozitív értékű, ezért helyette a kapott kifejezés minimumát is kereshetjük.

Használjuk fel, hogy két pozitív szám – esetünkben az $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{5}$ számok – mértani közepe nem kisebb a két szám harmonikus közepénél:

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{5}}\geq\sqrt{10}\cdot\frac{2}{\frac{1}{\frac{a}{2}}+\frac{1}{\frac{b}{5}}}=\sqrt{10}\cdot\frac{2}{\frac{2}{a}+\frac{5}{b}}=\sqrt{10}\cdot\frac{2}{1}=2\cdot\sqrt{10}.$$

A harmadik egyenlőségnél felhasználtuk az (1) összefüggést. Eredményeink alapján:

$$\sqrt{2\cdot T}=\sqrt{a\cdot b}\geq 2\cdot\sqrt{10},$$

amiből következik, hogy

$$T\geq 20.$$

Ez azt jelenti, hogy a P ponton átmenő egyenesek a koordináta-rendszer tengelyeivel legalább 20 egység területű háromszöget fognak közre. A terület a minimumát akkor éri el, amikor a mértani és harmonikus közepek között egyenlőség teljesül, ami pontosan akkor következik be, amikor a két tag megegyezik egymással, azaz

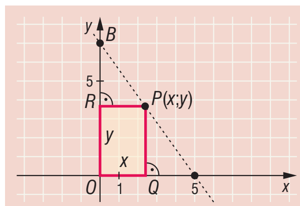
$$\frac{a}{2}=\frac{b}{5}.\qquad(2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása $a=4$ és $b=10$, ezért a keresett egyenes egyenlete:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{10}=1.$$

Megjegyzés: A P pont éppen felezi a kapott egyenesnek a koordináta-rendszer tengelyei közé eső szakaszát.

3669 A P pont koordinátáit az ábrán $P(x;\,y)$, a befogókra eső merőleges vetületeit pedig Q, illetve R jelöli. Ekkor Béla bácsi az $OQPR$ téglalapba tervez epret ültetni, melynek oldalai x, illetve y, területe ebből kifolyólag pedig $T=x\cdot y$ (x és y pozitív számok). Feladatunk a maximális területű téglalap megtalálása.



Mivel a P pont a telek átfogójára illeszkedik, ezért koordinátái kielégítik az átfogó egyenesének egyenletét, azaz:

$$7x+5y=35.\qquad(1)$$

A fenti összeg tagjai kis ügyeskedés után megjeleníthetők az $OQPR$ téglalap területét leíró képletben:

$$T=x\cdot y=\frac{1}{35}\cdot(7x)\cdot(5y).$$

Használjuk fel, hogy két pozitív szám mértani közepe nem lehet nagyobb, mint számtani közepük, ezért

$$T=\frac{1}{35}\cdot\left(\sqrt{(7x)\cdot(5y)}\right)^2\leq\frac{1}{35}\cdot\left(\frac{7x+5y}{2}\right)^2=\frac{1}{35}\cdot\left(\frac{35}{2}\right)^2=\frac{35}{4}.$$

A második egyenlőségnél felhasználtuk az (1) összefüggést. Azt kaptuk tehát, hogy az $OQPR$ téglalap területére $T\leq\frac{35}{4}$. A terület a maximumát akkor veszi fel, amikor a mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenségben egyenlőség teljesül, azaz amikor a két szám megegyezik egymással. Ez akkor következik be, ha

$$7x=5y.\qquad(2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása:

$$x=\frac{5}{2} \quad \text{és} \quad y=\frac{7}{2}.$$

A maximális területű téglalap tehát a $P\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ ponthoz tartozik.

3670 *a)* Jelöljük a P pont koordinátáit $P(x; y)$-nal. Ekkor

$$PA^2=(x+3)^2+(y-5)^2, \quad \text{illetve} \quad PB^2=(x-1)^2+(y+4)^2,$$

így a kijelölt műveleteket elvégezve kapjuk, hogy

$$PA^2-PB^2=8x-18y+17.$$

Az adott feltételnek pontosan azok a P pontok tesznek eleget, amelyek koordinátái kielégítik a

$$8x-18y+17=\lambda \quad (1)$$

egyenletet. Mivel a fenti egyenlet a λ értékétől függetlenül egy egyenes egyenlete, ezért a feltételt kielégítő P pontok valóban egy egyenesre illeszkednek.

b) Az (1) egyenletű egyenes meredeksége λ-tól függetlenül $m=\frac{4}{9}$, ezért a λ különböző értékeihez tartozó egyenesek valóban párhuzamosak egymással.

c) Ha az origó illeszkedik az egyenesre, akkor koordinátái kielégítik az (1) egyenletet, azaz

$$8\cdot 0-18\cdot 0+17=\lambda, \quad \text{azaz} \quad \lambda=17.$$

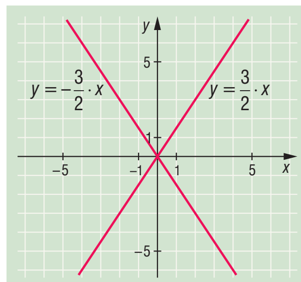
3671 *a)* Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$(3x-2y)\cdot(3x+2y)=0.$$

Mivel egy szorzat akkor és csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért:

$$y=\frac{3}{2}x \quad \text{vagy} \quad y=-\frac{3}{2}x.$$

A feltételt kielégítő pontok tehát két, az origón áthaladó egyenes valamelyikére illeszkednek.



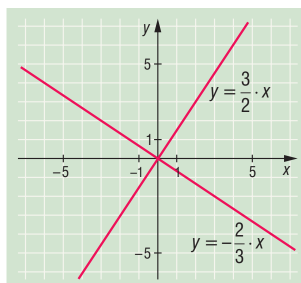
b) Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést ezúttal is szorzattá alakíthatjuk:

$$6x^2-6y^2+5xy=6x^2-4xy+9xy-6y^2=$$
$$=2x\cdot(3x-2y)+3y\cdot(3x-2y)=(3x-2y)\cdot(2x+3y)=0.$$

A feltételnek az

$$y=\frac{3}{2}x \quad \text{vagy} \quad y=-\frac{2}{3}x$$

egyenletű, egymásra merőleges egyenesek pontjai tesznek eleget.



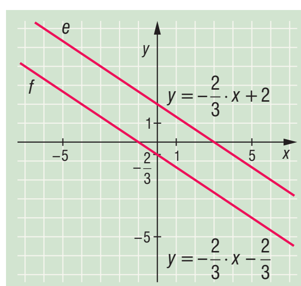
c) Az abszolút érték értelmezése alapján:

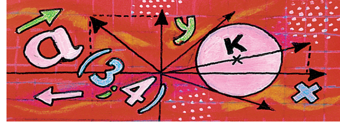
$$2x+3y-2=4 \quad \text{vagy} \quad 2x+3y-2=-4.$$

A feltételnek az

$$e\colon\ 2x+3y=6, \quad \text{illetve} \quad f\colon\ 2x+3y=-2$$

egyenletű, egymással párhuzamos egyenesek pontjai tesznek eleget.





Két egyenes metszéspontja, távolsága, hajlásszöge – megoldások

3672 *a)* (1; 1); *b)* (3; –3); *c)* (5; 2); *d)* $\left(\frac{745}{168}; \frac{35}{24}\right)$.

3673 *a)* (–2; 5), (5; 3), (–1; –2); *b)* (0; 0), (3; 5), (1; –4);
c) (–4; 2), (8; 3), (–1; –5); *d)* (–3; 6), (5; 0), (–2; –1).

3674 *a)* Az átlók metszéspontjának koordinátái (2; 1).
b) Az átlókat tartalmazó egyenesek egyenlete: $y = x - 1$, illetve $y = -x + 3$. A két egyenes meredekségének szorzata –1, ami igazolja, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra.
c) Az *ABCD* négyszög deltoid.

3675 *a)* $O(3; -2)$, $r = 5$; *b)* $O(0; 0)$, $r = \sqrt{20}$;
c) $O(-5; -3)$, $r = \sqrt{20}$; *d)* $O(-7; 0)$, $r = \sqrt{17}$.

3676 *a)* $\left(\frac{38}{61}; \frac{20}{61}\right)$; *b)* (1; 1); *c)* $\left(\frac{1}{3}; \frac{19}{3}\right)$.

3677 (1; 0).

3678 *a)* $\sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2}$ $[M(2; 0)]$; *b)* $\sqrt{5}$ $[M(1; -2)]$;
c) $2 \cdot \sqrt{5}$ $[M(1; 3)]$; *d)* $2 \cdot \sqrt{5}$ $[M(3; 1)]$.

3679 *a)* (6; –4); *b)* (2; –4); *c)* (3; 7); *d)* (5; 5).

3680 *a)* Ha az $x - y = 4$ egyenletű egyenesen adott a $P(4; 0)$ pont, akkor az $x - y = -1$ egyenletű egyenesnek a P ponton áthaladó, rá merőleges egyenessel való metszéspontja $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Ekkor $d_{PM} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$.

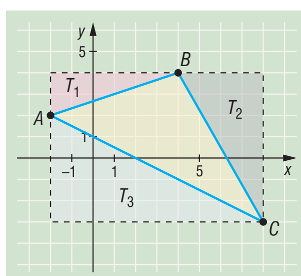
b) Ha a $-2x + y = 5$ egyenletű egyenesen adott a $P(0; 5)$ pont, akkor a $-2x + y = -5$ egyenletű egyenesnek a P ponton áthaladó, rá merőleges egyenessel való metszéspontja $M(4; 3)$. Ekkor $d_{PM} = 2 \cdot \sqrt{5}$.

c) Ha az $x + y = 1$ egyenletű egyenesen adott a $P(0; 1)$ pont, akkor az $y = 2 - x$ egyenletű egyenesnek a P ponton áthaladó, rá merőleges egyenessel való metszéspontja $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Ekkor $d_{PM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3681 A háromszög területét könnyen kiszámolhatjuk, ha egy, a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos oldalú téglalapba foglaljuk. A téglalap területe $T = 10 \cdot 7 = 70$. A téglalap csúcsainál lévő háromszögek területe:

$$T_1 = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6, \quad T_2 = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14, \quad T_3 = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25.$$

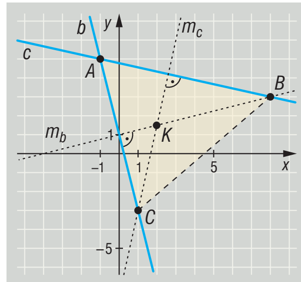
A háromszög területe ezért $T_{\triangle} = 70 - (6 + 14 + 25) = 25$.



A magasságok hosszát a $T = \dfrac{c \cdot m_c}{2}$ képlettel számolhatjuk ki. Mivel $c = d_{AB} = \sqrt{40} = 2 \cdot \sqrt{10}$, és $T = 25$, ezért $m_c = \dfrac{5 \cdot \sqrt{10}}{2}$.

A háromszög másik két magassága $2 \cdot \sqrt{5}$, és $\dfrac{10 \cdot \sqrt{65}}{13}$.

3682 Az A-val jelölt templom koordinátáit az adott egyenesek metszéspontjaként kaphatjuk. A két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása $x = -1$ és $y = 5$, azaz az A pont koordinátái: $A(-1; 5)$.

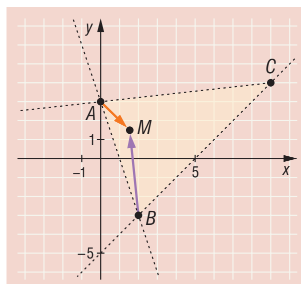


A tervek szerint a K pont a három templom által meghatározott ABC háromszög magasságpontja, ezért a b-re merőleges, K-t tartalmazó egyenes éppen az ABC háromszög m_b magasságvonala. A magasságvonal egy normálvektora megegyezik a b egyenes egy irányvektorával. A b egyenes egyenletéből leolvasható annak egy irányvektora: $\vec{v}_b = \vec{n}_{m_b}(-1; 4)$, ezért az m_b egyenes egyenlete: $-x + 4y = 4$. A B pont koordinátáit az m_b, valamint a c egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{aligned} -x + 4y &= 4 \\ 2x + 9y &= 43 \end{aligned}\right\},$$

amiből $B(8; 3)$. Hasonló megfontolással juthatunk el a C pont koordinátáihoz. Az m_c egyenes egyenlete: $9x - 2y = 15$, a C pont koordinátái: $C(1; -3)$.

3683 A rajzlapon megmaradt két csúcspontot az ábrán A és B, a magasságpontot M, a hiányzó csúcspontot C jelöli. Mivel az $\overrightarrow{AM}\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$ vektor a BC egyenesnek egy normálvektora, továbbá a $B(2; -3)$ pont illeszkedik az egyenesre, ezért a BC egyenes egyenlete:

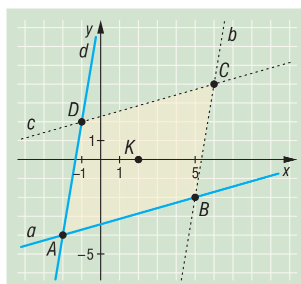


$$\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \cdot 2 - \frac{3}{2} \cdot (-3), \qquad \text{azaz} \qquad x - y = 5.$$

Hasonló számolással az AC egyenes egyenlete: $x - 9y = -27$.

A C csúcs koordinátáit a BC és az AC egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása után $C(9; 4)$ adódik.

3684 A két adott egyenest megadásuk sorrendjében a és d, a paralelogramma középpontját K, csúcsait A, B, C és D jelöli az ábrán. Mivel az a és d egyenesek nem párhuzamosak egymással, ezért az egyenleteikből álló egyenletrendszer megoldása adja a paralelogramma A csúcsának koordinátáit: $A(-2; -4)$. A paralelogramma középpontja egybeesik az átlók felezőpontjával, ezért a K pont az AC szakasz felezőpontja is egyben. Ha a C pont koordinátáit $C(x; y)$ jelöli, akkor

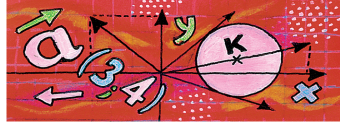


$$\frac{x + (-2)}{2} = 2, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{y + (-4)}{2} = 0,$$

amiből $C(6; 4)$.

A BC egyenes egyenletét a C pont koordinátáinak ismeretében már könnyen felírhatjuk. Mivel BC párhuzamos az ismert d egyenessel, ezért a BC egyenes egy normálvektora $\vec{n}_{BC} = \vec{n}_d(-6; 1)$, így egyenlete:

$$-6x + y = -32.$$



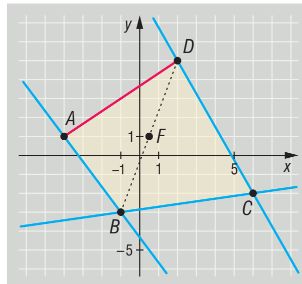
Hasonló megfontolások után a CD egyenes egyenletére adódik:

$$-2x + 7y = 16.$$

A B pont koordinátáit a BC, valamint az a egyenesek egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk: $B(5; -2)$.

Végül a CD és a d egyenesek D metszéspontja: $D(-1; 2)$.

3685 *a)* A B csúcs koordinátáit az AB és BC egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk: $B(-1; -3)$.



A BC és CD egyenesek metszéspontja: $C(6; -2)$.

Ha a D pont koordinátái $D(x; y)$, és a BD átló felezőpontja F, akkor a felezőpontra vonatkozó összefüggések alapján:

$$\frac{(-1) + x}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{(-3) + y}{2} = 1,$$

amiből $x = 2$ és $y = 5$, így $D(2; 5)$.

Végül az A pont első koordinátája -4, továbbá illeszkedik az AB egyenesre, ezért ha második koordinátáját a_2 jelöli, akkor

$$4 \cdot (-4) + 3a_2 = -13, \quad \text{amiből} \quad a_2 = 1,$$

végül $A(-4; 1)$.

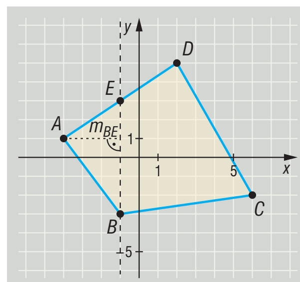
b) Az $\overrightarrow{AD}(6; 4)$ vektor az AD egyenesnek egy irányvektora, ezért annak egyenlete:

$$4x - 6y = 4 \cdot 2 - 6 \cdot 5,$$

aminek egyszerűbb alakja:

$$2x - 3y = -11.$$

c) Az e: $x = -1$ egyenletű egyenes párhuzamos az y tengellyel, továbbá tartalmazza az $ABCD$ négyszög B csúcsát. Az AD egyenessel való E metszéspontjának koordinátáit az



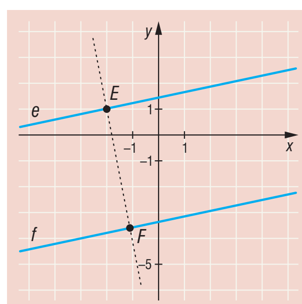
$$\left.\begin{aligned} x &= -1 \\ 2x - 3y &= -11 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja: $E(-1; 3)$.

Eredményeink alapján az e egyenes az $ABCD$ négyszögből az ABE háromszöget vágja le. Az ABE háromszög területe:

$$T_{ABE} = \frac{BE \cdot m_{BE}}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9.$$

3686 *a)* Jelöljük a két adott oldalegyenest megadásuk sorrendjében e-vel és f-fel. Az egyenletekből leolvasható, hogy a két egyenes párhuzamos egymással, ezért csakis a rombusz két szemközti oldalegyenesei lehetnek. Az elmondottak alapján a rombusz magassága az e és az f egyenes távolságával egyenlő. Ezt a távolságot megkaphatjuk például úgy, hogy az e egyenes egy tetszőleges E pontjának az f egyenestől való távolságát kiszámítjuk. Az e egyenes egy pontja az $E(-2; 1)$ pont.



Az f-re merőleges egyenesek egy normálvektora az $\vec{n}(5; 1)$ vektor, ezért az E-re illeszkedő, f-re merőleges egyenes egyenlete:

$$5x + y = 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 1, \quad \text{azaz} \quad 5x + y = -9.$$

Ennek az egyenesnek az f egyenessel való F metszéspontjának koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned} 5x + y &= -9 \\ x - 5y &= 17 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása:

$$F\left(-\frac{14}{13}; -\frac{47}{13}\right).$$

Az e és f egyenesek távolságát – így a rombusz magasságát is – az EF távolság adja meg:

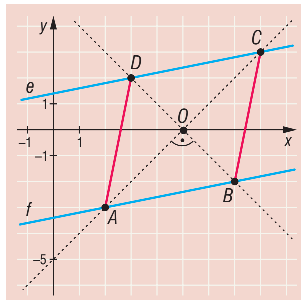
$$EF = \sqrt{\left(-\frac{14}{13} + 2\right)^2 + \left(-\frac{47}{13} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{3600}{169}} = \frac{12 \cdot \sqrt{26}}{13}.$$

A rombusz területe ezek után már könnyen kiszámolható:

$$T = a \cdot m = \sqrt{26} \cdot \frac{12 \cdot \sqrt{26}}{13} = 24.$$

b) Egyszerű számolás mutatja, hogy az $A(2; -3)$ pont illeszkedik az f egyenesre. Ismert, hogy a rombusz átlói felezik egymást, ezért ha az A-val szemközti C csúcs koordinátái $C(x; y)$, akkor az AC szakasz felezőpontja az $O(5; 0)$ pont, és így

$$\frac{2 + x}{2} = 5 \quad \text{és} \quad \frac{-3 + y}{2} = 0.$$



Az egyenletrendszer megoldásaként a C pont koordinátái: $C(8; 3)$.

A rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért az $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}(1; 1)$ vektor normálvektora a másik átlót tartalmazó egyenesnek. Mivel az O pont ennek az egyenesnek is pontja, ezért a BD átlót tartalmazó egyenes egyenlete: $x + y = 5$. A rombusz B csúcsát az

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 5y &= 17 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása után kapjuk: $B(7; -2)$. Hasonló számolások eredményeként: $D(3; 2)$.
A $\overrightarrow{BC}(1; 5)$ vektor irányvektora a BC és az AD egyenesnek is. Ezek alapján a BC egyenes egyenlete:

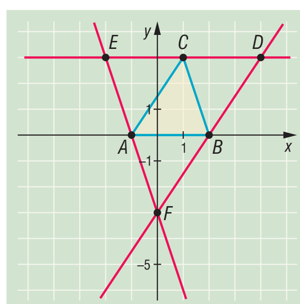
$$5x - y = 5 \cdot 7 - 1 \cdot (-2), \quad \text{azaz} \quad 5x - y = 37.$$

Az AD egyenes egyenlete:

$$5x - y = 5 \cdot 2 - 1 \cdot (-3), \quad \text{azaz} \quad 5x - y = 13.$$

3687 *a)* Az ábra jelöléseit használva az ED egyenes egyenlete:

$$y = 3.$$



Az EF egyenesnek a $\overrightarrow{BC}(-1; 3)$ vektor irányvektora, az A csúcs pedig egy pontja, ezért EF egyenlete:

$$3x + y = -3.$$

Az FD egyenesnek az $\overrightarrow{AC}(2; 3)$ vektor irányvektora, B pedig egy pontja, így FD egyenlete:

$$3x - 2y = 6.$$

b) A megfelelő egyenletrendszerek megoldása után kapjuk a DEF háromszög csúcspontjainak koordinátáit:

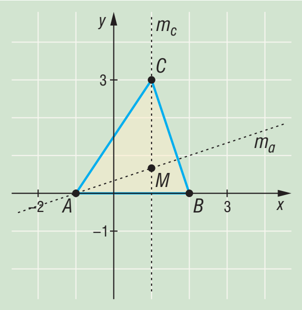
$$D(4; 3), \quad E(-2; 3) \quad \text{és} \quad F(0; -3).$$

c) Az ABC háromszög C csúcsán átmenő m_c magasságvonalának egyenlete: $x = 1$.

Az A csúcshoz tartozó m_a magasságvonalnak a $\overrightarrow{BC}(-1; 3)$ vektor normálvektora, ezért m_a egyenlete: $-x + 3y = 1$.

Az M magasságpont koordinátáit az m_a és m_c egyenleteiből álló egyenletrendszerből számíthatjuk:

$$M\left(1; \frac{2}{3}\right).$$



d) A háromszög köré írható kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Vegyük észre, hogy az m_c egyenes egyben a DEF háromszög ED oldalának, míg az m_a egyenes az EF oldalnak a felezőmerőlegese, ezért az M pont egybeesik a DEF háromszög köré írható kör középpontjával. A DEF háromszög köré írható kör középpontja így:

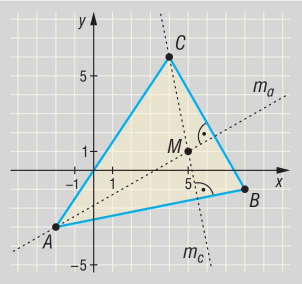
$$M\left(1; \frac{2}{3}\right).$$

3688 *a)* Az A csúcshoz tartozó m_a magasságvonalnak a $\overrightarrow{BC}(-4; 7)$ vektor normálvektora, ezért m_a egyenlete: $-4x + 7y = -13$.

Hasonló megfontolások után a C csúcshoz tartozó m_c magasságvonal egyenlete: $5x + y = 26$.

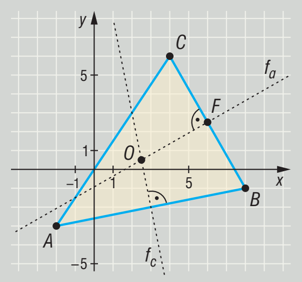
A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása szolgáltatja az ABC háromszög M magasságpontjának koordinátáit:

$$M(5; 1).$$



b) Az ABC háromszög köré írt kör O középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontjával esik egybe. A BC oldal f_a oldalfelező merőlegese egyrészt tartalmazza a BC oldal $F\left(6; \frac{5}{2}\right)$ felezőpontját, másrészt egy normálvektora a $\overrightarrow{BC}(-4; 7)$ vektor. Ezek alapján az f_a egyenes egyenlete:

$$-4x + 7y = -\frac{13}{2}.$$



Hasonló módszerrel kapjuk, hogy az AB oldal f_c oldalfelező merőlegesének egyenlete:

$$5x + y = 13.$$

Az egyenletrendszer megoldása után adódik:

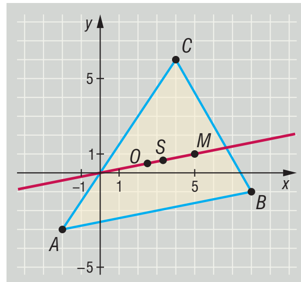
$$O\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

c) Az OM egyenes egy irányvektora az $2\overrightarrow{OM}(5; 1)$ vektor, egy pontja az $M(5; 1)$ pont. Ezek alapján az Euler-egyenes egyenlete:

$$x - 5y = 0.$$

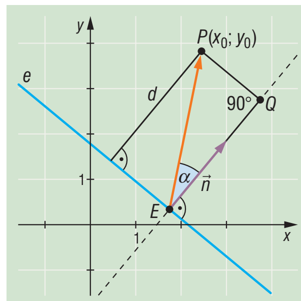
d) Az ABC háromszög súlypontja: $S\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Mivel $\frac{10}{3} - 5 \cdot \frac{2}{3} = 0$, ezért az S pont koordinátái kielégítik az Euler-egyenes egyenletét, amiből következik, hogy S illeszkedik az OM Euler-egyenesre.

e) Mivel $\overrightarrow{OS}\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$, továbbá $\overrightarrow{SM}\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$, ezért $\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{OS}$. Ezek alapján láthatjuk, hogy az S súlypont $1:2$ arányban osztja fel az OM szakaszt.



3689 Az egyenes egyenletéből könnyen leolvasható, hogy az e egyenes egy egységnyi hosszúságú normálvektora:

$$\vec{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right).$$



Vegyünk fel egy tetszőleges E pontot az e egyenesen, koordinátáit jelöljük $E(x; y)$-nal. Ekkor:

$$\overrightarrow{EP}(x_0 - x; y_0 - y).$$

Mivel az E pont koordinátái biztosan kielégítik az e egyenes egyenletét, ezért teljesül:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Ezután indítsuk az $\vec{n}$ normálvektor kezdőpontját az E pontból, és jelöljük az $\overrightarrow{EP}$ és az $\vec{n}$ vektorok által bezárt szöget α-val. Jelölje továbbá Q a P pontnak az E ponton átmenő, e-re merőleges egyenesre eső vetületét. Ekkor az EQ szakasz hossza éppen megegyezik a P pont és az e egyenes d távolságával.

Ha az $\overrightarrow{EP}$ és az $\vec{n}$ vektorok az e egyenesnek ugyanabba a félsíkjába mutatnak, akkor $\alpha \le 90°$. Kiszámoljuk a két vektor skaláris szorzatát:

$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = \left|\overrightarrow{EP}\right| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\alpha = \left|\overrightarrow{EP}\right| \cdot 1 \cdot \cos\alpha = EQ = d. \qquad (2)$$

A fenti eredmények alapján a két vektor skaláris szorzata éppen az e egyenes és a P pont távolságával egyenlő. A skaláris szorzatot a koordináták segítségével felírva azt kapjuk, hogy

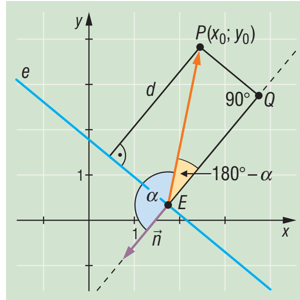
$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = (x_0 - x) \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + (y_0 - y) \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C - (Ax + By + C)}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Az utolsó zárójelben található összeg (1) miatt 0-val egyenlő, azaz:

$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3)$$

A (2) és (3) egyenlőségek összevetése után azt kapjuk, hogy:

$$d(P, e) = d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (4)$$



Amennyiben az $\overrightarrow{EP}$ és az $\vec{n}$ vektorok az e egyenesnek különböző félsíkjaiba mutatnak (ld. a jobb oldalon lévő ábrát), akkor $\alpha > 90°$, így a (2) egyenlőség a következőképpen módosul:

$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = \left|\overrightarrow{EP}\right| \cdot 1 \cdot \cos\alpha = -EP \cdot \cos(180° - \alpha) = -EQ = -d. \qquad (2')$$

A bizonyítás további lépései nem változnak, így (2') és (3) összevetéséből azt kapjuk, hogy:

$$d(P, e) = d = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4')$$

A (4) és (4') összefüggéseket egyetlen egyenlőségben is felírhatjuk:

$$d(P, e) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

3690 *a)* Két egyenes hajlásszögét többféle módszerrel is kiszámolhatjuk. Egyik lehetőség, hogy irányvektoraik skaláris szorzatából számoljuk ki a keresett szöget. Az egyenesek egyenletéből leolvasható egy-egy irányvektoruk:

$$\vec{v}_1(0; 1) \quad \text{és} \quad \vec{v}_2(1; -2).$$

A két vektor skaláris szorzata:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -2.$$

A skaláris szorzat definíciója alapján:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\alpha,$$

ahol α a két vektor hajlásszöge. A skaláris szorzatra kapott értékek összehasonlításából:

$$-2 = \sqrt{5} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

amiből $\alpha \approx 153{,}43°$. A két egyenes hajlásszöge így $180° - 153{,}43° = 26{,}57°$.

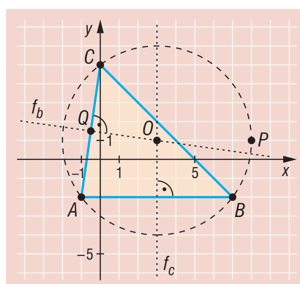
b) Amennyiben a két egyenes nem merőleges egymásra és iránytangenssel rendelkeznek, akkor a 3639. feladat eredménye alapján a két egyenes α hajlásszögére

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|.$$

Az egyenletekből $m_1 = 2$ és $m_2 = 3$, ezért $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, amiből $\alpha \approx 8{,}13°$.

c) Ebben az esetben $m_1 = -2$ és $m_2 = 3$, ezért $\operatorname{tg}\alpha = 1$, amiből $\alpha = 45°$.

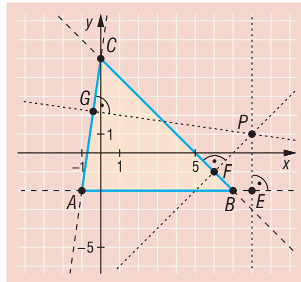
3691 *a)* Az ABC háromszög köré írható körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontjával esik egybe. Az AB oldal f_c felezőmerőlegesének egyenlete: $x = 3$. Az AC oldal f_b felezőmerőlegese tartalmazza az AC szakasz $Q\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ felezőpontját, továbbá a normálvektora az $\overrightarrow{AC}(1; 7)$ vektor, ezért f_b egyenlete: $x + 7y = 10$.



A körülírt kör O középpontja mindkét egyenletet kielégíti, ezért az egyenletrendszer megoldása után $O(3; 1)$ adódik.

Az ABC háromszög köré írható kör sugara: $r = \left|\overrightarrow{OA}\right| = 5$. Mivel $\left|\overrightarrow{OP}\right| = 5$ szintén teljesül, ezért a P pont valóban illeszkedik az ABC háromszög köré írható körre.

b) Az E pont koordinátái akár az ábráról is leolvashatók: $E(8; -2)$.

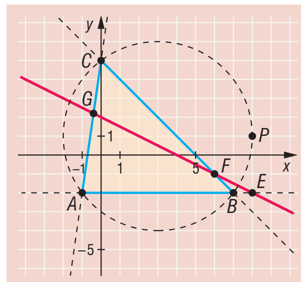


Az F pontot a BC egyenes, valamint a P-re illeszkedő, BC-re merőleges egyenes metszéspontjaként kapjuk. A BC egyenes két pontja ismert, ezért egyenlete könnyen felírható: $x + y = 5$. A BC-re merőleges, P-t tartalmazó egyenesnek a $\vec{v}(1; 1)$ vektor irányvektora, ezért egyenlete: $x - y = 7$. A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként $F(6; -1)$ adódik.

A G pont koordinátái hasonló módszerrel számolhatók ki. Az AC egyenes egyenlete: $-7x + y = 5$, a rá merőleges, P-t tartalmazó egyenesé: $x + 7y = 15$. Az egyenletrendszer megoldása után:

$$G\left(-\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right).$$

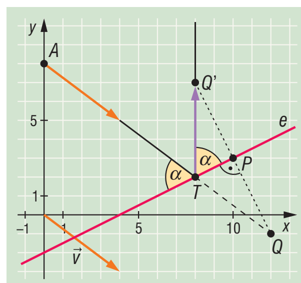
c) Megmutatjuk, hogy a G pont illeszkedik az EF egyenesre. Ehhez felírjuk az EF egyenes egyenletét. Mivel az egyenesnek az $\overrightarrow{FE}(2; -1)$ vektor irányvektora, E pedig egy pontja, ezért az egyenlet: $x + 2y = 4$. Az egyenletbe a G pont koordinátáit behelyettesítve teljesül, hogy:



$$-\frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{11}{5} = 4,$$

ami igazolja, hogy a G pont illeszkedik az EF egyenesre. Ezzel beláttuk, hogy a P pont oldalegyenesekre vonatkozó merőleges vetületei egy egyenesre illeszkednek (Simson-egyenes).

3692 A golyó kezdeti helyét jelöljük A-val, az egyenest, amelyről visszapattan e-vel. A megoldás során feltételezzük, hogy a visszapattanás előtt a golyó útja ugyanakkora szöget zár be az e egyenessel, mint a visszapattanás utáni útja, azaz az ábrán α-val megjelölt szögek egyenlő nagyságúak. Ezt persze a következőképp is megfogalmazhatjuk: ha a golyó visszapattanás előtti útját meghosszabbítanánk (az ábrán ezt a TQ szakasz szemlélteti), akkor a visszapattanás utáni útja (az ábrán TQ' félegyenes) egybeesne a TQ félegyenes e egyenesre vonatkozó tükörképével. Ezek után a feladat megoldásához a következő lépések vezetnek.



1. Kiszámoljuk, hogy a golyó mely T pontban éri el az e egyenest. A golyó a $3x + 4y = 32$ egyenletű egyenesen halad. A T pont koordinátáit a

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 32 \\ x - 2y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Megoldva a felírt egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy a T pont koordinátái: $T(8; 2)$.

2. Keresünk egy Q pontot az AT félegyenes T ponton túli meghosszabbításán. Könnyen látható, hogy a $Q(12; -1)$ pont kielégíti az AT egyenes egyenletét, és így a feltételeknek megfelel.

3. A Q pontból merőlegest állítunk az e egyenesre. Az e egyenes $\vec{n}(1; -2)$ normálvektora a keresett egyenesnek irányvektora, ezért az e-re merőleges, Q-t tartalmazó egyenes egyenlete: $2x + y = 23$.

4. Megkeressük az iménti merőleges és az e egyenes P metszéspontját. A megfelelő egyenletrendszer megoldása után: $P(10; 3)$.

5. A Q pontot tükrözzük a P pontra, így kapjuk a Q' pontot. Ha a Q' pont koordinátái $Q'(x; y)$, akkor felhasználva, hogy a QQ' szakasznak éppen P a felezőpontja, azt kapjuk, hogy
$$\frac{12+x}{2}=10 \quad \text{és} \quad \frac{-1+y}{2}=3.$$
Az egyenleteket megoldva: $Q'(8; 7)$.
6. A golyó a visszapattanás után a TQ' egyenesen halad, ezért felírjuk annak egyenletét. Mivel a T és a Q' pontnak is 8 az első koordinátája, ezért a biliárdgolyó a visszapattanás után az $x = 8$ egyenletű egyenesen halad tovább.

A kör egyenlete – megoldások

3693 *a)* $x^2+y^2-\frac{1}{4}=0$; *b)* $x^2+y^2-5-2\cdot\sqrt{6}=0$;
c) $x^2+y^2+2x-4y+\frac{24}{5}=0$; *d)* $x^2+y^2+2\cdot\sqrt{3}x+2\cdot\sqrt{6}y+5=0$;
e) $x^2+y^2+10x+10y+25=0$; *f)* $x^2+y^2+4x-10y+4=0$.

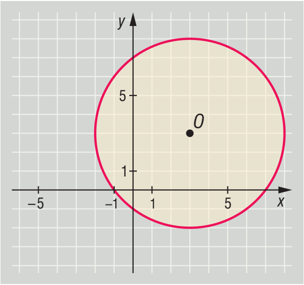
3694 *a)* $x^2+y^2-4y+2=0$; *b)* $x^2+y^2+4x+6y+3=0$;
c) $x^2+y^2-2x+8y-65=0$; *d)* $x^2+y^2-4x-4y=0$.

3695 *a)* $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$; *b)* $(x-1)^2+(y+1)^2=25$;
c) $(x-2)^2+(y-2)^2=\frac{29}{2}$; *d)* $(x-1)^2+y^2=29$.

3696 *a)* $(5; 3)$, illetve $(5; -5)$; *b)* $(-2; 2)$, illetve $(6; 2)$.

3697 *a)* $O(0; 0)$, $r=\sqrt{30}$; *b)* $O(0; 3)$, $r=2\cdot\sqrt{3}$;
c) $O(2; -4)$, $r=6$; *d)* $O\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $r=\sqrt{\frac{67}{2}}$;
e) $O\left(\frac{7}{2}; -1\right)$, $r=\frac{\sqrt{373}}{2}$; *f)* $O\left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$, $r=\sqrt{5}$;
g) $O\left(1; -\frac{3}{2}\right)$, $r=\frac{\sqrt{53}}{2}$.

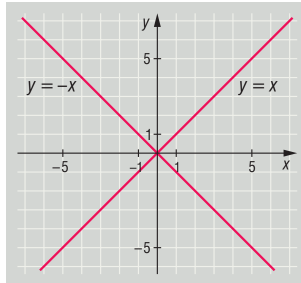
3698 *a)* $O(3; 3)$, $r=5$.



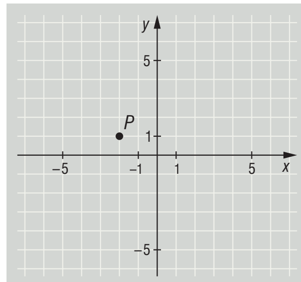
b) Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$(x+y)\cdot(x-y)=0.$$

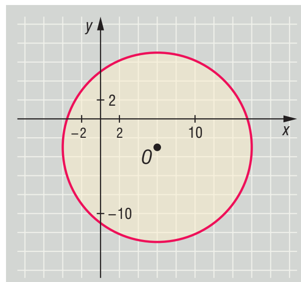
Az egyenlet két egyenest határoz meg.



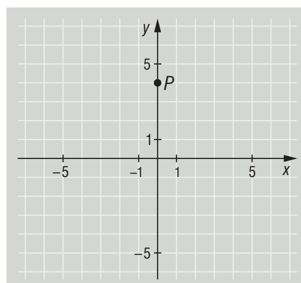
c) Az egyenletet csak a $P(-2;\,1)$ pont koordinátái elégítik ki.



d) $O(6;\,-3)$, $r=10$.



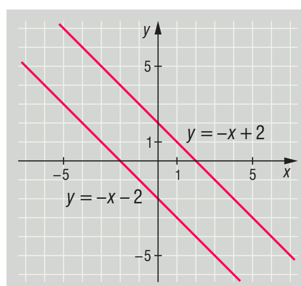
e) Az egyenletet csak a $P(0;\,4)$ pont koordinátái elégítik ki.



f) Az egyenlet átalakítása után az

$$(x+y+2)\cdot(x+y-2)=0$$

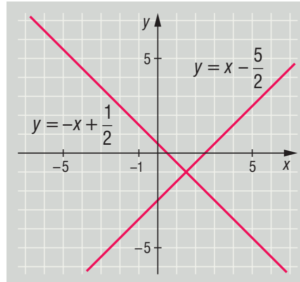
alakhoz juthatunk. Az egyenlet két egyenest határoz meg.



g) Az egyenlet átalakítása után az

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=(y+1)^2$$

alakhoz juthatunk. Az egyenlet két egyenest határoz meg.



3699 *a)* $(x-2)^2+(y+2)^2=13$; *b)* $(x-3)^2+y^2=34$.

3700 *a)* A kör egyenlete: $(x-3)^2+(y+1)^2=20$.
b) A kör egyenlete: $(x-1)^2+(y-2)^2=29$.

3701 *a)* $(x-1)^2+(y+2)^2=1$; *b)* $(x+3)^2+(y-5)^2=49$;
c) $(x-1)^2+(y-4)^2=12{,}5$; *d)* $(x+1)^2+(y+2)^2=5$.

3702 *a)* $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$; *b)* $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$;
c) $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$; *d)* $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$.

3703 Tegyük fel, hogy az ismeretlen csúcsok koordinátái $C(c_1;\, c_2)$ és $B(0;\, b_2)$. Mivel ismert a BC szakasz felezőpontja, ezért

$$\frac{0+c_1}{2}=2 \quad \text{és} \quad \frac{b_2+c_2}{2}=4.$$

Az első egyenletből $c_1=4$.
A feltételek alapján a C pont illeszkedik az $y=\frac{3}{2}x-4$ egyenletű egyenesre, ezért

$$c_2=\frac{3}{2}\cdot 4-4=2,$$

így $C(4;\, 2)$. A BC szakasz felezőpontjára felírt második egyenletből $B(0;\, 6)$.

Az AB oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $y=3$.

A BC oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $x-y=-2$.

A két egyenes metszéspontja az $O(1;\, 3)$ pont, ami egyben az ABC háromszög köré írható körének középpontja is.

A kör sugara: $OA=\sqrt{10}$, ezért a keresett kör egyenlete:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=10.$$

3704 *a)* A háromszög köré írható kör középpontja az AB átfogó $O\left(2;\, \frac{1}{2}\right)$ pontja. A kör sugara:

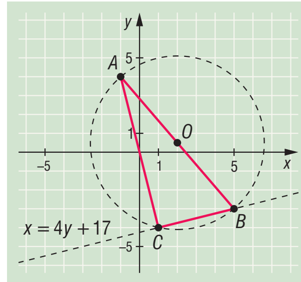
$$r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{85}}{2},$$

egyenlete:

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{4}.$$

b) A BC befogó meredeksége ismert, ezért a BC egyenes iránytényezős egyenlete felírható:

$$y+3=\frac{1}{4}(x-5),\qquad \text{amiből}\qquad x=4y+17.$$



Ha ezt a kör egyenletébe helyettesítjük, akkor:

$$(4y+15)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{4},$$
$$17y^2+119y+204=0,$$
$$y^2+7y+12=0.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $y=-3$, illetve $y=-4$.
Ebből a kör és a BC egyenes két metszéspontja: $B(5;-3)$, illetve $C(1;-4)$.

3705 A kör egyenlete felírható a következő alakban is:

$$(x-7)^2+(y-3)^2=4,$$

így a kör középpontja $O(7;3)$, sugara pedig 2. A kör legkisebb ordinátájú pontja ebből adódóan a $Q(7;1)$ pont. A Q középpontú, origót tartalmazó kör sugara $\sqrt{50}$, ezért a keresett kör egyenlete:

$$(x-7)^2+(y-1)^2=50.$$

A kapott kör y tengellyel való metszéspontjait megkapjuk, ha x helyére nullát írunk, ekkor

$$(y-1)^2=1,$$

amiből $y=0$, vagy $y=2$.
Ez azt jelenti, hogy a kör az ordinátatengelyt az origón kívül még a $(0;2)$ pontban metszi.

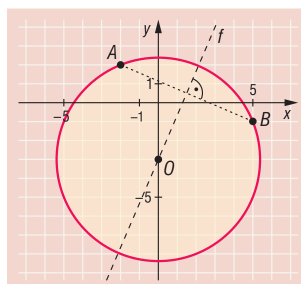
3706 Az adott pontokat jelöljük A-val és B-vel. Mivel az AB szakasz a keresett körnek egy húrja, ezért a kör O középpontja illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére. Az AB szakasz f felezőmerőlegesének egyenlete: $7x-3y=9$.

a) Mivel az O pont illeszkedik az y tengelyre, ezért koordinátáira $O(0;-3)$ teljesül. A kör sugara ebben az esetben az

$$r=OA=\sqrt{29},$$

egyenlete:

$$x^2+(y+3)^2=29.$$



b) A kör középpontja az adott h, és az f egyenesek metszéspontja, ezért koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

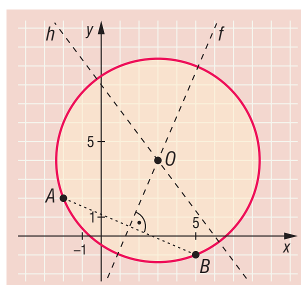
$$\left.\begin{aligned}7x-3y&=9\\4x+3y&=24\end{aligned}\right\}.$$

Az O középpont koordinátái: $O(3;4)$, a kör sugara:

$$r=OA=\sqrt{29},$$

végül egyenlete:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=29.$$

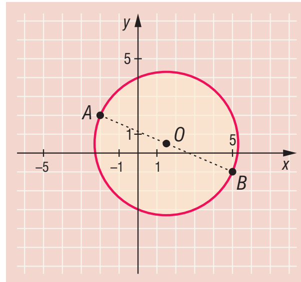


c) A kör középpontja az AB szakasz $O\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ felezőpontja, sugara:

$$r = OA = \sqrt{\frac{29}{2}},$$

egyenlete:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{2}.$$



3707 *a)* A tervezett kijáratot K-val, az autópálya nyomvonalát a-val jelöltük az ábrán. A feltételek szerint $AK = BK$, ezért a K pont illeszkedik az AB szakasz f felezőmerőlegesére. Az f egyenes egyenlete: $y = 2x + 11$. A tervezett kijárat helyére a megfelelő egyenletrendszer megoldása után $K(-3; 5)$ adódik.

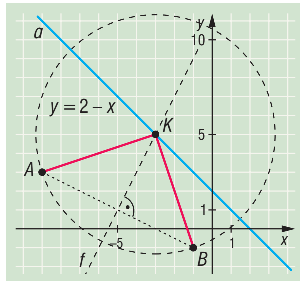
b) A kör sugara:

$$r = AK = \sqrt{40},$$

egyenlete:

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 40.$$

c) A tervezett útszakaszok hossza egy tized pontossággal 6,3 km.



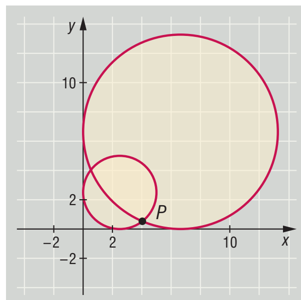
3708 *a)* A keresett kör az első síknegyedben található, és ha sugarát r jelöli, akkor középpontjának koordinátái $O(r; r)$, így egyenlete:

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

alakú. Mivel a $P\left(4; \frac{1}{2}\right)$ pont kielégíti a kör egyenletét, ezért:

$$(4 - r)^2 + \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 = r^2,$$

$$r^2 - 9r + \frac{65}{4} = 0.$$



Az egyenlet megoldásai: $r = \frac{5}{2}$, illetve $r = \frac{13}{2}$. A feltételeknek két kör tesz eleget, egyenletük:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}, \quad \text{illetve} \quad \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}.$$

b) A kör a második síknegyedben található, így középpontja ezúttal $O(-r; r)$, egyenlete:

$$(x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

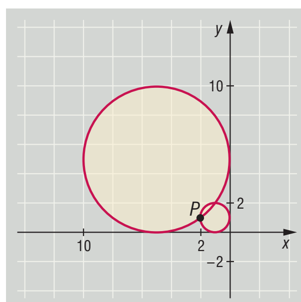
A $(-2; 1)$ pont koordinátáit az egyenletbe helyettesítve:

$$(-2 + r)^2 + (1 - r)^2 = r^2,$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $r = 5$ és $r = 1$. A feltételeknek a következő egyenletű körök felelnek meg:

$$(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25 \quad \text{és} \quad (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$



c) A kör egyenletét az alábbi alakban kereshetjük:

$$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2.$$

Az adott pont koordinátáit behelyettesítve:

$$(-1+r)^2+(-8+r)^2=r^2,$$
$$r^2-18r+65=0.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$r=13 \quad \text{és} \quad r=5.$$

A kapott két kör egyenlete:

$$(x+13)^2+(y+13)^2=169, \quad \text{illetve} \quad (x+5)^2+(y+5)^2=25.$$

d) A kör egyenletének alakja ezúttal:

$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2.$$

Az adott pont koordinátáit a kör egyenletébe helyettesítve a következő egyenlethez jutunk:

$$r^2-22r+85=0,$$

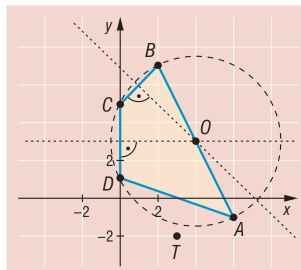
amelynek megoldásai:

$$r=17 \quad \text{és} \quad r=5.$$

A feltételeket kielégítő körök egyenlete:

$$(x-17)^2+(y+17)^2=289, \quad \text{illetve} \quad (x-5)^2+(y+5)^2=25.$$

3709 *a)* A fákat megadásuk sorrendjében A, B, C és D jelöli az ábrán. Célunk annak igazolása, hogy az $ABCD$ négyszög csúcsai egy körön találhatók, vagyis hogy $ABCD$ húrnégyszög.



A húrnégyszög körülírt körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, ezért eljárhatunk úgy is, hogy kiszámítjuk valamely két oldal felezőmerőlegesének O metszéspontját, majd megmutatjuk, hogy az a csúcsoktól ugyanakkora távolságra van.

A CD oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $y=3$.

A BC oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $x+y=7$.

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása után $O(4;\,3)$ adódik. Az O pont származtatása alapján $OB=OC=OD$ nyilvánvalóan teljesül, és ez a közös távolság: $\sqrt{20}$.

Elegendő kimutatni, hogy az OA távolság szintén ugyanekkora. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=d_{AO}=\sqrt{(4-6)^2+\left(3-(-1)\right)^2}=\sqrt{20}$$

valóban teljesül. Eredményeink alapján az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, azaz valóban található olyan pont, amelybe a locsoló berendezést elhelyezve, az képes meglocsolni mind a négy díszfát. Ez a pont a koordináta-rendszer $O(4;\,3)$ pontja. Látható, hogy az O pont egybeesik az AB szakasz felezőpontjával.

b) A locsoló berendezést $\sqrt{20}\approx 4{,}47$ egység távolságra kell beállítani.

c) A tuja (T) az O ponttól

$$\sqrt{(4-3)^2+\left(3-(-2)\right)^2}=\sqrt{26}$$

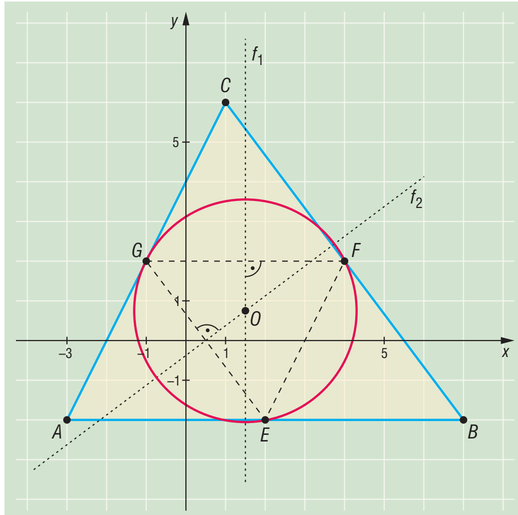
egység távolságra van, ezért a locsoló berendezés a tuját nem éri el.

3710 *a)* Az oldalfelező pontok: $E(2; -2)$, $F(4; 2)$ és $G(-1; 2)$. Az EFG háromszög köré írt körének O középpontjának koordinátái például az FG és a GE oldalak felezőmerőlegesének metszéspontjaként számíthatók. Az FG felezőmerőlegesének (az ábrán f_1 jelöli) egyenlete:

$$x = \frac{3}{2}.$$

A GE szakaszfelező merőlegesének (f_2) egyenlete:

$$3x - 4y = \frac{3}{2}.$$



Az egyenletrendszer megoldása után adódik:

$$O\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right).$$

Az EFG háromszög körülírt körének sugara:

$$r = \left|\overrightarrow{OG}\right| = \sqrt{\frac{125}{16}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{4}.$$

Az ABC háromszög Feuerbach-körének egyenlete:

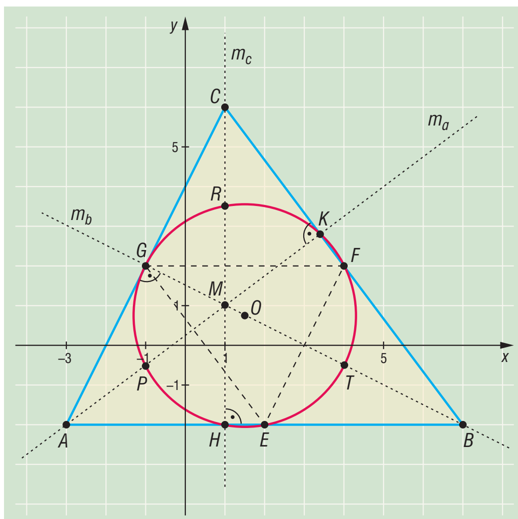
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}.$$

b) Vegyük észre, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú, hiszen $AB = BC = 10$. Ebből következően az AC alap G felezőpontja egybeesik az m_b magasságvonal talppontjával, ezért az állítás az m_b magasságvonalra teljesül.

Az ABC háromszög m_c magasságvonala párhuzamos az y tengellyel és egyenlete: $x = 1$, így m_c talppontja a $H(1; -2)$ pont. Mivel teljesül, hogy

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-2 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{125}{16},$$

ezért H koordinátái kielégítik a Feuerbach-kör egyenletét, amiből már következik, hogy illeszkedik a körre.



Az m_a magasságvonal egyenlete:

$$-3x + 4y = 1,$$

a BC egyenesé:

$$4x + 3y = 22.$$

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása adja az m_a magasságvonal K talppontjának koordinátáit:

$$K\left(\frac{17}{5}; \frac{14}{5}\right).$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\left(\frac{17}{5}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{14}{5}-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{125}{16},$$

így K is illeszkedik az ABC háromszög Feuerbach-körére.

c) Az ABC háromszög M magasságpontja az m_a és m_c magasságvonalak metszéspontja. Ebből következően koordinátáit a

$$\left.\begin{aligned}-3x+4y&=1\\ x&=1\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldásaként $M(1;\,1)$ adódik. Ezek után könnyen kiszámolhatjuk a magasságpont és az ABC háromszög csúcsai közötti szakaszok felezőpontjainak koordinátáit (ld. ábra):

$$P\left(-1;-\frac{1}{2}\right),\quad T\left(4;-\frac{1}{2}\right)\quad \text{és}\quad R\left(1;\frac{7}{2}\right).$$

Nem kis fáradságot igénylő, de nem is túlságosan bonyolult számításokkal meggyőződhetünk arról, hogy mindhárom kapott pont valóban kielégíti az ABC háromszög Feuerbach-körének egyenletét.

d) Az ABC háromszög körülírt körének sugarát az $R=\frac{abc}{4T}$ összefüggés alapján számolhatjuk, ahol a, b, c a háromszög oldalainak hosszát, T a területét jelöli. Mivel

$$b=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{80}=4\cdot\sqrt{5}$$

és a *b)* feladatban már utaltunk rá, hogy $a=c=10$, továbbá $T=\frac{c\cdot m_c}{2}=40$, ezért a háromszög köré írt kör sugara:

$$R=\frac{4\cdot\sqrt{5}\cdot10\cdot10}{4\cdot40}=\frac{5\cdot\sqrt{5}}{2}.$$

Eredményünket az *a)* feladatban kapottakkal összevetve kapjuk, hogy

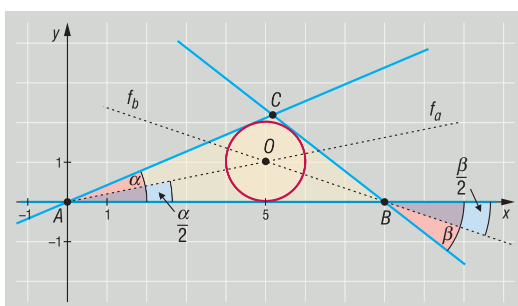
$$\frac{r}{R}=\frac{\frac{5\cdot\sqrt{5}}{4}}{\frac{5\cdot\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2},$$

és így a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés: A körülírt kör sugarát úgy is kiszámíthatjuk, hogy meghatározzuk annak középpontját két oldalfelező merőleges metszéspontjaként, majd a két pont távolságára vonatkozó összefüggéssel megadjuk a sugarát. Ezzel a módszerrel a körülírt kör középpontjaként a $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ pontot kapjuk.

3711 *a)* Az oldalegyenesek egyenleteiből a háromszög csúcspontjai: $A(0;\,0)$, $B(8;\,0)$ és $C\left(\frac{36}{7};\frac{15}{7}\right)$.

A háromszögbe írható kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. Vegyük észre, hogy az AB oldal illeszkedik az x tengelyre, ezért „célszerű" az A, valamint a B csúcsokhoz tartozó szögfelezők egyenletét felírni. Ekkor ugyanis a háromszög α szöge megegyezik az AC egyenes irányszögével.



Az AC egyenes egyenletéből látható, hogy az egyenes meredeksége $\frac{5}{12}$, ezért $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$.
Az f_a szögfelező irányszöge $\frac{\alpha}{2}$, így meredeksége $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Ismert addíciós összefüggés alapján:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

ezért

$$\frac{5}{12}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$0=-5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-24\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+5.$$

A kapott egyenlet $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-re nézve másodfokú, megoldásai: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-5$, illetve $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5}$.

Az ábrából is látható, hogy az f_a szögfelező meredeksége pozitív, ezért $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5}$. Végül az f_a szögfelező átmegy az origón, ezért egyenlete:

$$f_a\colon\ y=\frac{1}{5}x.$$

Hasonló számítások vezetnek el az f_b szögfelező egyenletéhez. Mivel a BC egyenes meredeksége $-\frac{3}{4}$, azaz $\operatorname{tg}\beta=-\frac{3}{4}$, így

$$-\frac{3}{4}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}},$$

$$0=3\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}-8\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-3.$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai: $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=3$, illetve $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-\frac{1}{3}$.

Mivel az f_b szögfelező meredeksége negatív, ezért $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-\frac{1}{3}$. A szögfelező átmegy a B ponton, ezért egyenlete:

$$f_b\colon\ y=-\frac{1}{3}(x-8).$$

Az O pont koordinátáit az f_a és f_b egyenesek egyenletéből álló

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{1}{3}(x-8)\\ y&=\frac{1}{5}x \end{aligned}\right\}$$

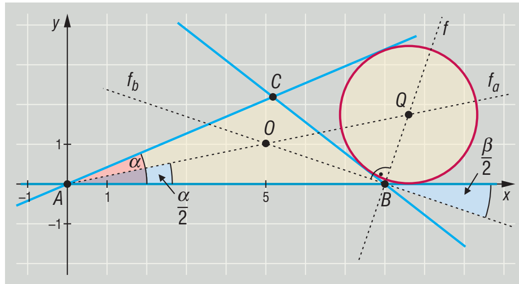
egyenletrendszer megoldása adja:

$$\frac{1}{5}x=-\frac{1}{3}(x-8).$$

Az egyenlet megoldása: $x=5$. Ekkor viszont $y=1$, így a beírt kör középpontjának koordinátái:

$$O(5;\,1).$$

A BC oldalhoz írt kör középpontja az f_a szögfelezőn, valamint a háromszög B csúcsánál lévő külső szög szögfelezőjén található. Ez utóbbi szögfelezőt az ábrán f-fel jelöltük. Elemi geometriai megfontolások alapján az f egyenes merőleges az f_b belső szögfelezőre, ezért e két egyenes meredekségének szorzata -1. Ha az f egyenes meredekségét m jelöli, akkor:



$$m = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3.$$

Az f szögfelező egyenlete: $y = 3(x-8)$. A BC oldalhoz írt kör Q középpontjának koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned} y &= 3(x-8) \\ y &= \frac{1}{5}x \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldásaként a Q pont koordinátái:

$$Q\left(\frac{60}{7}; \frac{12}{7}\right).$$

b) Az *a)* feladatban szereplő körök érintik az x tengelyt, ezért sugaruk hossza megegyezik középpontjuk második koordinátájával. Ennek megfelelően a beírt kör egyenlete:

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 1,$$

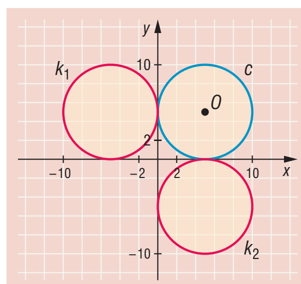
illetve a BC oldalhoz írt kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{60}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{7}\right)^2 = \frac{144}{49}.$$

3712 Egy-egy ilyen kört találhatunk a második, illetve a negyedik síknegyedben. Ezek egyenlete:

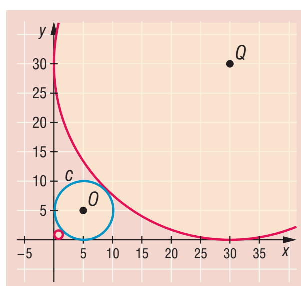
$$k_1:\ (x+5)^2 + (y-5)^2 = 25,$$
$$k_2:\ (x-5)^2 + (y+5)^2 = 25.$$

A fenti köröket, valamint a feladatban szereplő, c-vel jelölt kört az ábra mutatja.



A feltételeknek eleget tevő további köröket az első síknegyedben kereshetünk; ha egy ilyen kör sugarát r jelöli, akkor középpontjának koordinátái $Q(r; r)$ alakúak. Mivel az $O(5; 5)$ középpontú, 5 egység sugarú c kört érinti, ezért az OQ távolság éppen a két kör sugarának összege, azaz $OQ = r + 5$. Az OQ távolságot a Q pont koordinátáival felírva kapjuk, hogy

$$\sqrt{(r-5)^2 + (r-5)^2} = r + 5.$$



Mindkét oldalt négyzetre emelve és a lehetséges összevonásokat elvégezve:

$$r^2 - 30r + 25 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$r_1 = 15 + 10 \cdot \sqrt{2}, \quad \text{illetve} \quad r_2 = 15 - 10 \cdot \sqrt{2}.$$

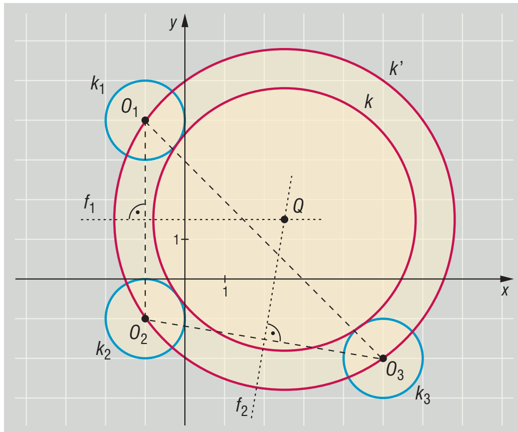
A feltételeknek mindkét kör eleget tesz (ezeket az ábrán pirossal jelöltük). A körök egyenletei:

$$\left(x - \left(15 + 10 \cdot \sqrt{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(15 + 10 \cdot \sqrt{2}\right)\right)^2 = \left(15 + 10 \cdot \sqrt{2}\right)^2,$$

$$\left(x - \left(15 - 10 \cdot \sqrt{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(15 - 10 \cdot \sqrt{2}\right)\right)^2 = \left(15 - 10 \cdot \sqrt{2}\right)^2.$$

3713 Átalakítva a megadott egyenleteket:

$$k_1: \ (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 1,$$
$$k_2: \ (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1,$$
$$k_3: \ (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1.$$



Az egyenletekből látható, hogy mindhárom kör sugara 1 egység, továbbá a középpontjaik:

$$O_1(-1; 4), \quad O_2(-1; -1) \quad \text{és} \quad O_3(5; -2).$$

A feladat szerint olyan k kört keresünk, amely a k_1, k_2 és k_3 köröket kívülről érinti. Ha a megfelelő k kör középpontját nem változtatjuk, de a sugarát 1 egységgel megnöveljük, akkor olyan k' kört kapunk eredményül, amely átmegy az O_1, O_2, O_3 pontok mindegyikén. A megnövelt sugarú kör éppen az $O_1O_2O_3$ háromszög köré írható kör. A továbbiakban ennek a körnek a középpontját keressük. Ez a pont az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

Az O_1O_2 oldal f_1 felezőmerőlegesének egyenlete:

$$y = \frac{3}{2}.$$

Az O_2O_3 oldal f_2 felezőmerőlegesének egyenlete:

$$6x - y = \frac{27}{2}.$$

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként a Q pont koordinátái:

$$Q\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Az $O_1O_2O_3$ háromszög köré írt körének sugara:

$$\left|\overrightarrow{QO_1}\right| = \sqrt{\left(-1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{2}}.$$

Korábbi észrevételeink alapján a k_1, k_2 és k_3 köröket érintő kör középpontja Q, sugara:

$$r = \left|\overrightarrow{QO_1}\right| - 1 = \sqrt{\frac{37}{2}} - 1,$$

ezért egyenlete

$$k: \ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{37}{2}} - 1\right)^2.$$

3714 *a)* A Q pont koordinátáit jelölje $Q(x; y)$. Ekkor

$$QA^2 + QB^2 = x^2 + (3 - y)^2 + (6 - x)^2 + (1 - y)^2.$$

A műveletek elvégzése után:

$$QA^2 + QB^2 = 2x^2 - 12x + 2y^2 - 8y + 46.$$

Az x-et, valamint az y-t tartalmazó tagokból külön-külön teljes négyzeteket alakíthatunk ki:

$$QA^2 + QB^2 = 2(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 4y + 4) + 20 = 2(x - 3)^2 + 2(y - 2)^2 + 20.$$

Látható, hogy az első két tag mindig nemnegatív, továbbá a $QA^2 + QB^2$ összeg akkor a legkisebb, ha $x = 3$ és $y = 2$, ekkor értéke 20. A legkisebb összeg a $Q(3; 2)$ ponthoz tartozik.

b) Ha $QA^2 + QB^2 = \lambda$ teljesül, akkor az *a)* feladat eredményei alapján:

$$2(x - 3)^2 + 2(y - 2)^2 + 20 = \lambda,$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{\lambda - 20}{2}.$$

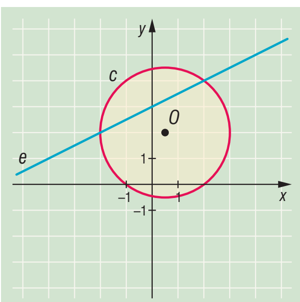
Ha $\lambda > 20$, akkor a feltételt kielégítő Q pontok a $(3; 2)$ középpontú, $r = \sqrt{\frac{\lambda - 20}{2}}$ sugarú körvonalon helyezkednek el.

Ha $\lambda = 20$, akkor a fenti egyenlet jobb oldalán 0 áll, így egyedül a $Q(3; 2)$ pont tesz eleget a feltételnek.

Ha $\lambda < 20$, akkor nincs a feltételnek megfelelő pont a síkon.

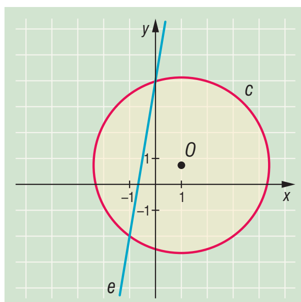
A kör és az egyenes kölcsönös helyzete; két kör közös pontjai – megoldások

3715 *a)*



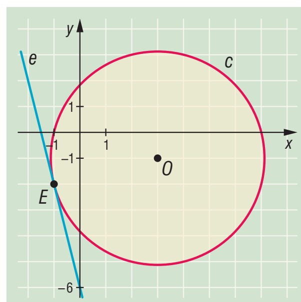
metszéspontok:
$(-2; 2)$ és $(2; 4)$;

b)



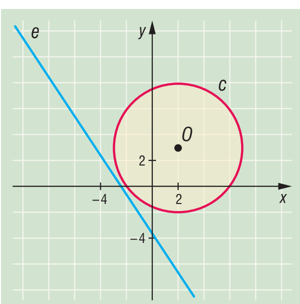
metszéspontok:
$(-1; -2)$ és $(0; 4)$;

c)



érintési pont:
$(-1; -2)$;

d)



nincs közös pont.

3716 *a)* A két alakzat metsző helyzetű.

b) Az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja ($D < 0$).

c) Az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja ($D < 0$).

d) Az egyenes érinti a kört.

3717 A kör középpontja $O(4; 2)$, sugara $\sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$. Mivel az O pont illeszkedik az adott egyenesre, ezért a kimetszett húr a körnek átmérője, amelynek hossza $4 \cdot \sqrt{5} \approx 8{,}94$.

3718 Két ilyen pont van: $(-1; 2)$, illetve $(4; -3)$.

3719 Két ilyen háromszög van. Az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó felezőmerőlegesének és az adott körnek az egyenletrendszeréből adódnak a megoldások.

Az ismeretlen csúcs koordinátái: $(7; 4)$, illetve $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

3720 A leghosszabb húr egyben átmérő is, ezért a leghosszabb húrt tartalmazó egyenes az OP egyenes, amelynek egyenlete: $y = 2x + 1$. A legrövidebb húrt tartalmazó egyenes merőleges az OP egyenesre, így egyenlete:

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

3721 A téglalap csúcsai: $(1; 2)$, $(2; -2)$, $(10; 0)$ és $(9; 4)$.

3722 Az egyenes és kör érintésének feltétele, hogy az egyenleteikből álló egyenletrendszerből kapott másodfokú paraméteres egyenlet diszkriminánsa 0 legyen.

a) A kapott egyenlet:
$$5x^2 + (2 - 4p) \cdot x + p^2 - 2p - 3 = 0,$$
diszkriminánsa:
$$p^2 - 6p - 16 = 0,$$
így a megoldások:
$$p_1 = 8 \quad \text{és} \quad p_2 = -2.$$

b) A kapott egyenlet:
$$(p^2 + 1) \cdot x^2 + (4 - 4p) \cdot x = 0,$$
diszkriminánsa:
$$4 - 4p = 0,$$
így a megoldás:
$$p = 1.$$

c) A kapott egyenlet:
$$2x^2 + (2p - 2) \cdot x + p^2 + 4p + 9 = 0,$$
diszkriminánsa:
$$p^2 + 10p + 17 = 0,$$
így a megoldások:
$$p_1 = -5 + 2 \cdot \sqrt{2} \quad \text{és} \quad p_2 = -5 - 2 \cdot \sqrt{2}.$$

3723 Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, így a P ponton áthaladó érintő egyenletéhez minden esetben felhasználhatjuk, hogy az $\overrightarrow{OP}$ a keresett érintőnek egy normálvektora, ahol O az adott kör középpontja.

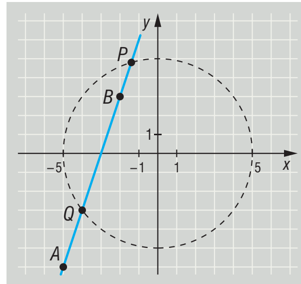
a) $\overrightarrow{OP}(3; 3)$, amiből $\vec{n}_e(1; 1)$, így az egyenlet: $x + y = 6$.

b) $\overrightarrow{OP}(1; -3)$, így az egyenlet: $x - 3y = -5$.

c) $\overrightarrow{OP}(0; 4)$, így az egyenlet: $y = 1$.

d) $\overrightarrow{OP}\left(-\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$, így az egyenlet: $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = -5$.

3724 *a)* Jelöljük a fa helyét A-val, a sziklááét B-vel. Az AB egyenes egyenlete $-3x + y = 9$. Az origó középpontú 5 egység sugarú kör egyenlete: $x^2 + y^2 = 25$. A kincs helyét a két egyenletből álló



$$\left.\begin{aligned} -3x + y &= 9 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az első egyenletből y-t kifejezve, majd a második egyenletbe beírva kapjuk, hogy:

$$x^2 + (3x+9)^2 = 25,$$
$$10x^2 + 54x + 56 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai: $x_1 = -\dfrac{7}{5}$, valamint $x_2 = -4$, ebből adódóan a kör és az egyenes metszéspontjai:

$$P\left(-\frac{7}{5}; \frac{24}{5}\right) \quad \text{és} \quad Q(-4; -3).$$

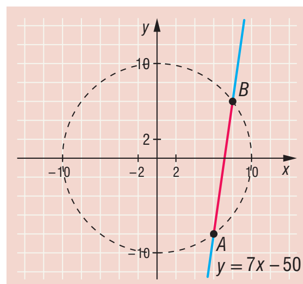
Az ábráról leolvasható, hogy a P pont nem illeszkedik az AB szakaszra, ezért a kincset a $Q(-4; -3)$ pontban rejtették el.

b) Mivel

$$AQ = \sqrt{10} \quad \text{és} \quad QB = \sqrt{40} = 2 \cdot \sqrt{10},$$

ezért a kincs az AB szakaszt $1:2$ arányban osztja.

3725 A radar az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű kört, és annak belső pontjait felügyeli. Ha az utasszállító az A, illetve a B pontokban metszi a radar által vizsgált légteret, akkor a metszéspontok koordinátáit az



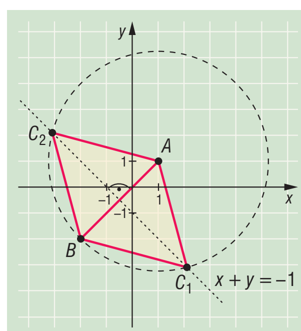
$$\left.\begin{aligned} y &= 7x - 50 \\ x^2 + y^2 &= 100 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják. Az y értékét a második egyenletbe helyettesítve:

$$x^2 + (7x-50)^2 = 100,$$
$$50x^2 - 700x + 2400 = 0,$$
$$x^2 - 14x + 48 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 6$ és $x_2 = 8$. A kör és az egyenes metszéspontjai: $A(6; -8)$, $B(8; 6)$. Az AB szakasz hossza $AB = 10 \cdot \sqrt{2}$. Az utasszállító körülbelül 141,4 km utat tesz meg a radar által felügyelt légtérben.

3726 *a)* Az ABC szabályos háromszög C csúcsa illeszkedik az AB oldal felezőmerőlegesére, és az A középpontú, $AB = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$ egység sugarú körre. Az AB szakaszfelező merőlegesének egyenlete:



$$x + y = -1,$$

az A középpontú, AB sugarú kör egyenlete:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18.$$

A C pont koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 &= 18 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből $x = -1 - y$, amit a második egyenletbe helyettesítve:

$$(-2 - y)^2 + (y - 1)^2 = 18,$$
$$4 + 4y + y^2 + y^2 - 2y + 1 = 18,$$
$$2y^2 + 2y - 13 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{27}}{2}, \quad \text{illetve} \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{27}}{2}.$$

Eredményünk (valamint az ábra is) mutatja, hogy a feltételeknek két pont is eleget tesz, ezek koordinátái:

$$C_1\left(\frac{-1 + \sqrt{27}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{27}}{2}\right) \quad \text{és} \quad C_2\left(\frac{-1 - \sqrt{27}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{27}}{2}\right).$$

b) Az ABC_1 és az ABC_2 szabályos háromszögek AB oldala közös, ezért a két háromszög köré írható kör sugara is megegyezik. Ismert, hogy a szabályos háromszög magassága az oldalának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szöröse, és mivel mindkét háromszög oldala $AB = 3 \cdot \sqrt{2}$, ezért magasságuk:

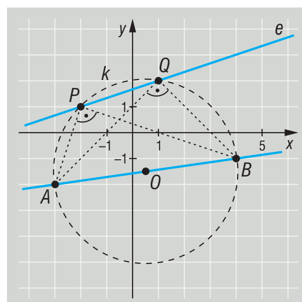
$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(3 \cdot \sqrt{2}\right) = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2}.$$

A szabályos háromszögben a magasságpont, a súlypont és a körülírt kör középpontja egybeesnek, továbbá a súlypont $2:1$ arányban osztja a súlyvonalakat, ezért a körülírt kör sugara a súlyvonalnak (egyben magasságvonalnak) a $\frac{2}{3}$-szorosa.

Ebből adódóan a háromszögek körülírt köreinek sugara:

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}.$$

3727 *a)* Thalész tételének megfordítása alapján, ha a P pontból az AB szakasz derékszög alatt látszik, akkor a P pont az AB szakasz mint átmérő fölé emelt körvonal egy pontja. Ennek megfelelően a keresett pontok illeszkednek az AB szakasz Thalész-körére (az ábrán k jelöli). E kör középpontja az AB szakasz $O\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$ felezőpontja, sugara pedig:



$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Az AB szakasz Thalész-körének egyenlete:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Az adott egyenletű (e-vel jelölt) egyenes feltételnek megfelelő pontjainak koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= -5 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{25}{2} \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből $x = 3y - 5$, amit a második egyenletbe helyettesítve:

$$\left(3y - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2},$$

$$9y^2 - 33y + \frac{121}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = \frac{25}{2},$$

$$10y^2 - 30y + 20 = 0,$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $y_1 = 2$ és $y_2 = 1$. Eredményünk mutatja, hogy az AB szakasz az e egyenes két pontjából is 90°-os szög alatt látszik; ezek koordinátái:

$$Q(1;\ 2) \quad \text{és} \quad P(-2;\ 1).$$

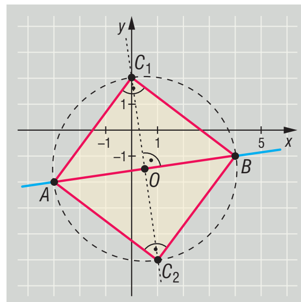
b) A C pont illeszkedik AB Thalész-körére, továbbá az AB szakasz felezőmerőlegesére. A felezőmerőleges egyenlete: $7x + y = 2$.

A C pont koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldásaiból kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} 7x + y &= 2 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{25}{2} \end{aligned}\right\}.$$

A metszéspontok:

$$C_1(0;\ 2) \quad \text{és} \quad C_2(1;\ -5).$$



3728 Az adott kör egyenlete:

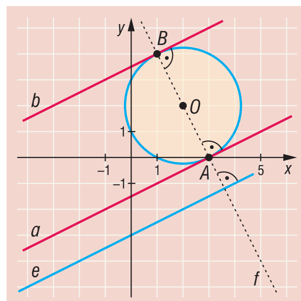
$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

A szintén adott (ábránkon e-vel jelölt) egyenessel párhuzamos érintők merőlegesek az érintési ponthoz húzott sugárra, ezért az érintési pontokat a kör középpontján átmenő, e-re merőleges (f-fel jelölt) egyenes metszi ki a körből. Az f egyenes egyenlete:

$$y = -2x + 6.$$

Az f egyenes és a kör metszéspontjainak meghatározásához a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} y &= -2x + 6 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= 5 \end{aligned}\right\}.$$



Az egyenletrendszer megoldása után a metszéspontokra $A(3;\ 0)$ és $B(1;\ 4)$ adódik. Mivel az érintők párhuzamosak az e egyenessel, ezért meredekségük $\frac{1}{2}$, egyenletük pedig:

$$a\colon\ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad b\colon\ y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2},$$

$$a\colon\ x - 2y = 3 \quad \text{és} \quad b\colon\ x - 2y = 7.$$

3729 **I. megoldás.** A kör egyenletét átalakítva:

$$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 25,$$

így középpontja $O(-2;\ -4)$, sugara 5 egység. Az érintési ponthoz húzott sugár merőleges az érintőre, amelynek meredeksége ezúttal $-\frac{4}{3}$, ezért az O pontot, valamint az érintési pontot is tartalmazó egyenes meredeksége $\frac{3}{4}$. Ez egyszerűen következik abból a tényből, hogy ha két egyenes merőleges egymásra, akkor meredekségeik szorzata -1. Eszerint az érintők érintési pontját az O ponton átmenő, $\frac{3}{4}$ meredekségű egyenes metszi ki az adott körből. A szóban forgó egyenes egyenlete:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}.$$

Az érintési pontokat meghatározó

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{3}{4}x - \frac{5}{2} \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása után az érintési pontokra $A(2; -1)$, valamint $B(-6; -7)$ adódik. A keresett érintők egyenlete:

$$a\colon\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \qquad \text{és} \qquad b\colon\ y = -\frac{4}{3}x - 15,$$

$$a\colon\ 4x + 3y = 5 \qquad \text{és} \qquad b\colon\ 4x + 3y = -45.$$

II. megoldás. A feladatra mutatunk egy másik, inkább algebrai megfontolásokat használó, első nekifutásra kissé talán rémisztő megoldást is. A keresett érintők meredeksége $-\frac{4}{3}$, ezért egyenletük $y = -\frac{4}{3}x + c$ alakban írható, ahol a c paraméter értékét úgy kell meghatároznunk, hogy az egyenes érintse a kört. Ekkor viszont az

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{4}{3}x + c \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van. Az első egyenlet felhasználásával a második a következő alakban írható:

$$(x+2)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + c + 4\right)^2 = 25,$$

$$\frac{25}{9}x^2 - \left(\frac{20}{3} + \frac{8}{3}c\right) \cdot x + c^2 + 8c - 5 = 0.$$

Mivel a fenti egyenletnek is csak egy megoldása lehet, ezért az egyenlet diszkriminánsa biztosan 0, azaz

$$\left(\frac{20}{3} + \frac{8}{3}c\right)^2 - 4 \cdot \frac{25}{9} \cdot (c^2 + 8c - 5) = 0.$$

A műveletek elvégzése után:

$$-4c^2 - \frac{160}{3}c + 100 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $c_1 = -15$ és $c_2 = \frac{5}{3}$. A keresett érintők egyenlete ennek megfelelően:

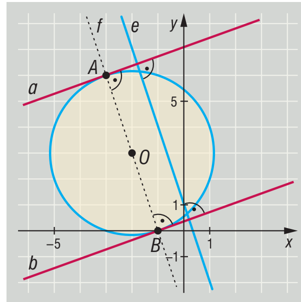
$$a\colon\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \qquad \text{és} \qquad b\colon\ y = -\frac{4}{3}x - 15.$$

Bízunk benne, hogy nem vettük el érdeklődő Olvasóink kedvét a paraméteres kifejezésekkel való számolásoktól.

3730 **I. megoldás.** A kör egyenlete

$$(x+2)^2+(y-3)^2=10$$

alakban írható, ahonnan leolvasható, hogy középpontja $O(-2;\,3)$. Az adott (az ábrán e-vel jelölt) egyenesre merőleges érintők érintési pontjait az O ponton átmenő, e-vel párhuzamos egyenes (f) metszi ki a körből.



Az f egyenes egyenlete:

$$y=-3x-3.$$

Az érintési pontok koordinátáit adó egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} y&=-3x-3\\ (x+2)^2+(y-3)^2&=10 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldásaiból az érintési pontok: $A(-3;\,6)$ és $B(-1;\,0)$. A megfelelő érintők egyenlete:

$$a\colon\ y=\frac{1}{3}x+7 \qquad \text{és} \qquad b\colon\ y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}.$$

II. megoldás. A 3729. feladat második megoldásához hasonló módszerrel is célt érhetünk. Az érintők egyenletét $y=\frac{1}{3}x+c$ alakban keressük, ahol a c paraméter értékét úgy kell meghatároznunk, hogy az egyenes érintse a kört. Az

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{3}x+c\\ (x+2)^2+(y-3)^2&=10 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek ennek megfelelően csak egyetlen megoldása van. Az x változót kiküszöbölve:

$$(x+2)^2+\left(\frac{1}{3}x+c-3\right)^2=10,$$

$$\frac{10}{9}x^2-\left(2+\frac{2}{3}c\right)\cdot x+c^2-6c+3=0.$$

A fenti egyenlet diszkriminánsa 0, azaz

$$\left(2+\frac{2}{3}c\right)^2-4\cdot\frac{10}{9}\cdot(c^2-6c+3)=0,$$

$$-4c^2+\frac{88}{3}c-\frac{28}{3}=0.$$

A kapott egyenlet megoldásai:

$$c_1=7 \quad \text{és} \quad c_2=\frac{1}{3}.$$

Ugyanazokat az egyeneseket kaptuk, mint az első megoldásban.

3731 *a)* Az első egyenletből a második egyenletet kivonva:

$$10x-10y+20=0,$$

$$x-y+2=0,$$

$$x=y-2.$$

A kapott összefüggést a második egyenletbe helyettesítve:

$$(y-2)^2+y^2-4\cdot(y-2)-6=0,$$
$$2y^2-8y+6=0,$$
$$y^2-4y+3=0.$$

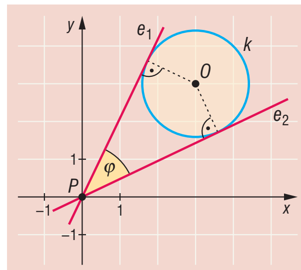
A fenti egyenlet megoldásai: $y_1=3$ és $y_2=1$. A két körnek két metszéspontja van, ezek koordinátái: (1; 3) és (–1; 1).

b) A két egyenlet különbsége: $6x-12y-30=0$, amiből $x=2y+5$. Az első egyenletbe visszahelyettesítve: $5y^2+10y+5=0$. A kapott egyenlet diszkriminánsa 0, ezért a két kör érinti egymást. A közös pont: (3; –1).

c) Az adott köröknek két metszéspontja van. Ezek koordinátái: (3; 3) és (1; 5).

d) Az adott köröknek nincs közös pontja.

3732 *a)* Mivel a keresett érintők az origón áthaladnak, ezért egyenletüket $Ax+By=0$ alakban kereshetjük. Az ábra alapján is meggyőződhetünk arról, hogy egyik érintő sem párhuzamos az x tengellyel, ezért $A\neq 0$, sőt feltehetjük, hogy $A=1$, azaz az érintők egyenletének alakja:



$$e:\quad x+By=0.$$

Az adott kör középpontjának koordinátái $O(3;3)$, sugara $r=\sqrt{2}$. Mivel az érintő az O ponttól éppen r távolságra halad, azaz $d(O,e)=\sqrt{2}$, így a 3689. feladat eredményeit felhasználva:

$$\left|\frac{3+3B}{\sqrt{1+B^2}}\right|=\sqrt{2}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$\frac{9+18B+9B^2}{1+B^2}=2,$$
$$7B^2+18B+7=0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei:

$$B_1=\frac{-9+4\cdot\sqrt{2}}{7},\quad \text{illetve}\quad B_2=\frac{-9-4\cdot\sqrt{2}}{7}.$$

Könnyen végiggondolhatjuk, hogy mindkét érték kielégíti a felírt egyenletet. A P pontot tartalmazó érintők egyenlete:

$$e_1:\ x+\frac{-9+4\cdot\sqrt{2}}{7}\cdot y=0\quad \text{és}\quad e_2:\ x+\frac{-9-4\cdot\sqrt{2}}{7}\cdot y=0.$$

A két érintő φ hajlásszögének kiszámítása a 3639. alapján a

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}\right|$$

összefüggés alapján történhet, ahol m_1 és m_2 a két érintő meredekségét jelöli. Az egyenes egyenletéből a meredekségek:

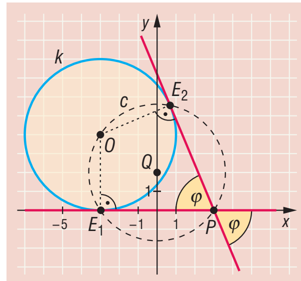
$$m_1=-\frac{7}{-9+4\cdot\sqrt{2}}=-\frac{7\cdot\left(4\cdot\sqrt{2}+9\right)}{-49}=\frac{4\cdot\sqrt{2}+9}{7},\quad \text{illetve}\quad m_2=\frac{7}{9+4\cdot\sqrt{2}}=\frac{9-4\cdot\sqrt{2}}{7}.$$

A két érintő hajlásszögére:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{\dfrac{4\cdot\sqrt{2}+9}{7} - \dfrac{9-4\cdot\sqrt{2}}{7}}{1+\dfrac{4\cdot\sqrt{2}+9}{7}\cdot\dfrac{9-4\cdot\sqrt{2}}{7}} \right| = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{7}.$$

A két érintő hajlásszöge: $\varphi \approx 38{,}94°$.

b) Eljárhatunk az *a)* feladatban ismertetett módszerrel is, de ezúttal inkább egy elemi geometriai ismereteket alkalmazó megoldást mutatunk be.



Az adott k kör középpontja $O(-3;\,4)$, sugara 4 egység.

Az érintők érintési pontját az OP szakasz fölé emelt Thalész-kör metszi ki a k körből. Az OP szakasz felezőpontja $Q(0;\,2)$, a c-vel jelölt Thalész-kör sugara $QP = \sqrt{13}$, így egyenlete:

$$x^2 + (y-2)^2 = 13.$$

Az érintési pontok koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldásai adják:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 &= 0 \\ x^2 + (y-2)^2 - 13 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

A két egyenlet megfelelő oldalainak különbségéből:

$$3x - 2y + 9 = 0,$$

amiből y-t kifejezve, majd a második egyenletbe visszaírva kapjuk az alábbi egyenletet:

$$13x^2 + 30x - 27 = 0.$$

A kapott egyenlet megoldásai: $x_1 = -3$ és $x_2 = \dfrac{9}{13}$.

Ennek megfelelően a keresett érintési pontok: $E_1(-3;\,0)$, illetve $E_2\left(\dfrac{9}{13};\,\dfrac{72}{13}\right)$.

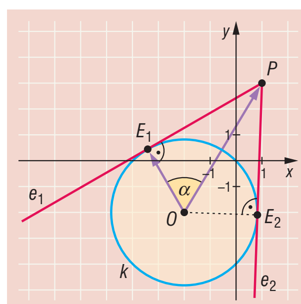
A PE_1 érintő egyenlete: $y = 0$ (éppen az x tengely). A PE_2 érintő egyenlete:

$$y = -\frac{12}{5}x + \frac{36}{5}.$$

Mivel az egyik érintő éppen az x tengely, ezért a két érintő hajlásszöge:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{12}{5}, \quad \text{amiből} \quad \varphi \approx 67{,}38°.$$

c) Egy harmadik megoldási módszert is bemutatunk az érintő egyenletének felírására.



Az adott kör középpontja $O(-2;\,-2)$, sugara $r = \sqrt{8}$ egység.

Tegyük fel, hogy a P pontból húzott egyik érintő az E_1 pontban érinti a kört, továbbá az $\overrightarrow{OE_1}$ vektor koordinátái $\overrightarrow{OE_1}(a;\,b)$. Mivel e vektor hossza éppen a kör sugarával egyenlő, ezért:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8},$$

$$a^2 + b^2 = 8. \qquad (1)$$

A továbbiakban kiszámítjuk az $\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OP}$ skaláris szorzatot. Mivel $\overrightarrow{OP}(3;\,5)$, ezért

$$\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OP} = 3a + 5b.$$

Másrészt a skaláris szorzat definíciója, valamint az OE_1P derékszögű háromszög alapján:

$$\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OP} = \left|\overrightarrow{OE_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP}\right| \cdot \cos\alpha = \sqrt{8} \cdot \left|\overrightarrow{OP}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{OE_1}\right|}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \sqrt{8} \cdot \left|\overrightarrow{OE_1}\right| = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 8,$$

ahol $POE_1\sphericalangle = \alpha$.

A skaláris szorzatra kapott két eredmény összevetéséből:

$$3a + 5b = 8. \qquad (2)$$

A (2) egyenletből $a = \dfrac{8-5b}{3}$, amit az (1) egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\left(\frac{8-5b}{3}\right)^2 + b^2 = 8.$$

A kijelölt műveletek elvégzése után az alábbi egyenlethez jutunk:

$$34b^2 - 80b - 8 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$b_1 = \frac{20 + 6\cdot\sqrt{13}}{17} \qquad \text{és} \qquad b_2 = \frac{20 - 6\cdot\sqrt{13}}{17}.$$

Az egyenletrendszer megoldásaiként a következő két vektort kapjuk:

$$\overrightarrow{OE_1}\left(\frac{12 - 10\cdot\sqrt{13}}{17};\, \frac{20 + 6\cdot\sqrt{13}}{17}\right) \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{OE_2}\left(\frac{12 + 10\cdot\sqrt{13}}{17};\, \frac{20 - 6\cdot\sqrt{13}}{17}\right).$$

Mivel a két kapott vektor egyben a megfelelő érintő egy-egy normálvektora, ezért az érintők egyenlete:

$$e_1\colon\ \left(12 - 10\cdot\sqrt{13}\right)\cdot x + \left(20 + 6\cdot\sqrt{13}\right)\cdot y = 72 + 8\cdot\sqrt{13},$$

$$e_2\colon\ \left(12 + 10\cdot\sqrt{13}\right)\cdot x + \left(20 - 6\cdot\sqrt{13}\right)\cdot y = 72 - 8\cdot\sqrt{13}.$$

A két érintő hajlásszöge: $\varphi \approx 58{,}03°$.

3733 *a)* A c kör egyenlete:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10,$$

a k köré:

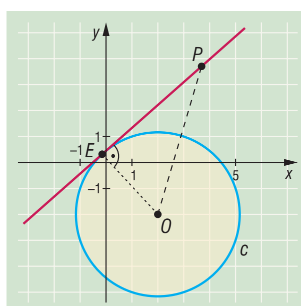
$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

A két egyenlet megfelelő oldalainak különbségéből: $-x + y = 0$, azaz $y = x$. A kapott összefüggést a c kör egyenletébe visszahelyettesítve:

$$(x-2)^2 + (x+2)^2 = 10,$$

amiből $x^2 = 1$, így $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$. A két kör közös pontjai: $A(1;\,1)$, $B(-1;\,-1)$.

b) Ha a $P(x;\,y)$ pontból a c körhöz húzott érintő az E pontban érinti a kört, akkor az OEP derékszögű háromszögben:



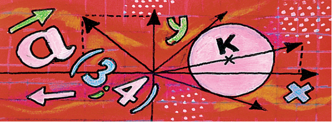
$$PE^2 = OP^2 - OE^2.$$

Mivel a c kör középpontja $O(2;\,-2)$, továbbá $OE = \sqrt{10}$, ezért:

$$PE^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 - 10.$$

Hasonló gondolatmenet mutatja, hogy a k körhöz a P pontból húzott érintőszakasz négyzete:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 - 4.$$



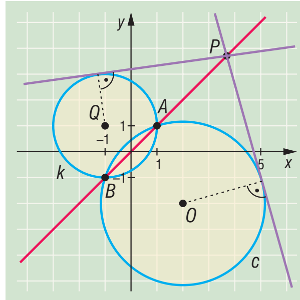
A feltételek alapján a két érintőszakasz hossza, így persze azok négyzete is megegyezik, azaz

$$(x-2)^2+(y+2)^2-10=(x+1)^2+(y-1)^2-4.$$

A műveletek elvégzése után:

$$y=x.$$

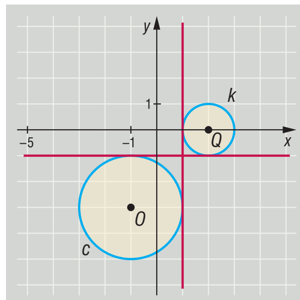
Eredményünk mutatja, hogy ha a P pontból a két körhöz ugyanakkora érintőszakasz húzható, akkor a pont koordinátái kielégítik a fenti egyenletet. Mivel a kapott egyenlet egyenes egyenlete, ezért a feladat állítását igazoltuk.



c) Az A és B pontok koordinátái kielégítik a kapott egyenes egyenletét, így mindkét pont illeszkedik az egyenesre.

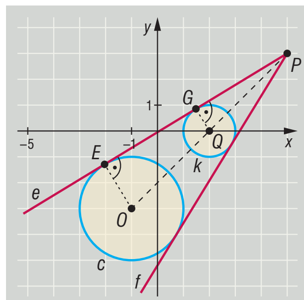
3734 A c kör középpontja $O(-1; -3)$, sugara 2 egység, a k köré $Q(2; 0)$, sugara 1 egység. Az ábra is mutatja, hogy a közös belső érintők egyike az x tengellyel, a másik az y tengellyel párhuzamos. A közös belső érintők egyenlete:

$$y=-1, \quad \text{illetve} \quad x=1.$$



A közös külső érintők egyenletének meghatározása nehezebb feladatnak bizonyul. Ha ezek az érintők a P pontban metszik egymást, akkor P nyilván az OQ egyenes egy pontja. Tegyük fel, hogy az egyik közös érintő (az ábrán az e-vel jelölt) a c kört az E, a k kört a G pontban érinti. Ekkor az OEP és a QGP derékszögű háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{OP}{QP}=\frac{OE}{QG}=\frac{2}{1}, \qquad \text{azaz} \qquad OP=2QP.$$



Ez egyben azt is jelenti, hogy a Q pont egybeesik az OP szakasz felezőpontjával.

Ha a P pont koordinátáit $P(x; y)$ jelöli, akkor:

$$\frac{-1+x}{2}=2 \quad \text{és} \quad \frac{-3+y}{2}=0,$$

amiből $x=5$ és $y=3$, végül $P(5; 3)$.

Ezután a feladatot visszavezettük a következő problémára:

Adott a $P(5; 3)$ pont, valamint a k: $x^2+y^2-4x+3=0$ kör. Írjuk fel a P ponton átmenő, a k kört pedig érintő egyenesek egyenletét.

A 3732. feladat *a)* pontjának módszerét követve – az egyenes normálvektoros egyenletét felhasználva, ahol $\vec{n}_e(1; B)$ és P_0: $P(5; 3)$ – az érintő egyenletét $x+By=5+3B$ alakban kereshetjük.

Az érintő és a Q középpont távolsága:

$$\left|\frac{2-5-3B}{\sqrt{1+B^2}}\right|=1.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve:

$$\frac{9+18B+9B^2}{1+B^2}=1,$$

$$4B^2+9B+4=0.$$

Az egyenlet megoldásai:

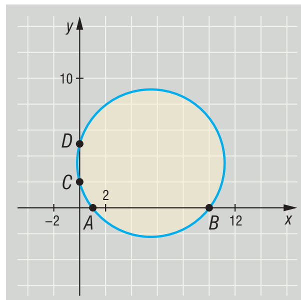
$$B_1=\frac{-9-\sqrt{17}}{8} \quad \text{és} \quad B_2=\frac{-9+\sqrt{17}}{8}.$$

A két kör közös külső érintőinek egyenlete:

$$e:\ x-\frac{9+\sqrt{17}}{8}\cdot y=\frac{13-3\cdot\sqrt{17}}{8},$$

$$f:\ x+\frac{-9+\sqrt{17}}{8}\cdot y=\frac{13+3\cdot\sqrt{17}}{8}.$$

3735 Ha a kör egyenletébe az $y=0$ értéket helyettesítjük, akkor megkaphatjuk az x tengelyből kimetszett szakasz végpontjainak koordinátáit. Ekkor



$$x^2-11x+c=0,$$

amiből:

$$x_1=\frac{11-\sqrt{121-4c}}{2} \quad \text{és} \quad x_2=\frac{11+\sqrt{121-4c}}{2},$$

és az ábra jelöléseinek megfelelően:

$$A\left(\frac{11-\sqrt{121-4c}}{2};0\right) \quad \text{és} \quad B\left(\frac{11+\sqrt{121-4c}}{2};0\right).$$

Az AB szakasz hossza:

$$AB=\sqrt{121-4c}.$$

A kör y tengelyből kimetszett húrjának végpontjait az

$$y^2-7y+c=0$$

egyenlet megoldásai adják.
A megfelelő pontok:

$$C\left(\frac{7-\sqrt{49-4c}}{2};0\right) \quad \text{és} \quad D\left(\frac{7+\sqrt{49-4c}}{2};0\right).$$

A CD szakasz hossza:

$$CD=\sqrt{49-4c}.$$

A feltételek szerint $AB=3CD$, azaz:

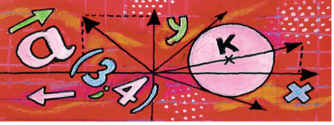
$$\sqrt{121-4c}=3\cdot\sqrt{49-4c}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kapott egyenletet megoldva:

$$121-4c=9\cdot(49-4c),$$

$$c=10.$$

Ellenőrzéssel is meggyőződhetünk arról, hogy a kapott érték megfelel a feltételeknek.



A parabola – megoldások

3736 *a)* A parabola paramétere:

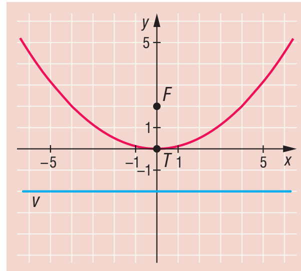
$$p = 4.$$

A parabola tengelypontja:

$$T(0;\,0).$$

A parabola egyenlete:

$$x^2 = 8y.$$



b) A parabola paramétere:

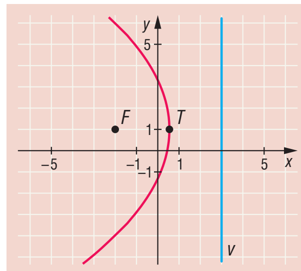
$$p = 5.$$

A parabola tengelypontja:

$$T\left(\frac{1}{2};\,1\right).$$

A parabola egyenlete:

$$x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}(y-1)^2.$$



c) A parabola paramétere:

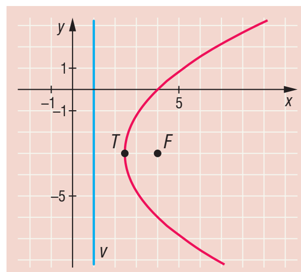
$$p = 3.$$

A parabola tengelypontja:

$$T\left(\frac{5}{2};\,-3\right).$$

A parabola egyenlete:

$$x - \frac{5}{2} = \frac{1}{6}(y+3)^2.$$



d) A parabola paramétere:

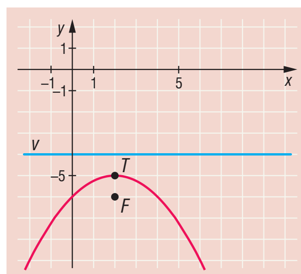
$$p = 2.$$

A parabola fókuszpontja:

$$F(2;\,-6).$$

A parabola egyenlete:

$$y + 5 = -\frac{1}{4}(x-2)^2.$$



e) A parabola paramétere:

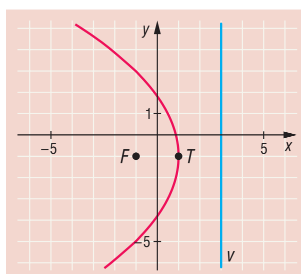
$$p = 4.$$

A parabola fókuszpontja:

$$F(-1;\,-1).$$

A parabola egyenlete:

$$x - 1 = -\frac{1}{8}(y+1)^2.$$



f) A parabola paramétere:

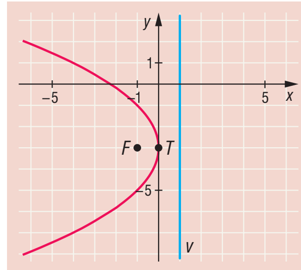
$$p = 2.$$

A parabola vezéregyenesének egyenlete:

$$v\colon\ x = 1.$$

A parabola egyenlete:

$$x = -\frac{1}{4}(y+3)^2.$$



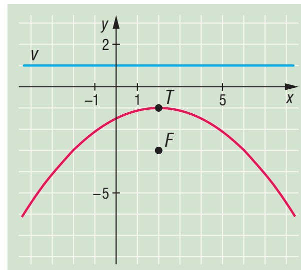
3737 A paramétert p, a fókuszpontot F, a tengelypontot T, a vezéregyenest v jelöli.

a) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$-\frac{1}{8}(x-2)^2 = y+1.$$

A parabola adatai:

$$p = 4,\quad T(2;-1),\quad F(2;-3),\quad v\colon\ y = 1.$$

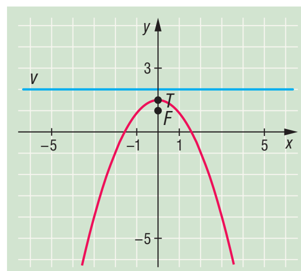


b) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$-\frac{1}{2}x^2 = y - \frac{3}{2}.$$

A parabola adatai:

$$p = 1,\quad T\left(0;\frac{3}{2}\right),\quad F(0;1),\quad v\colon\ y = 2.$$

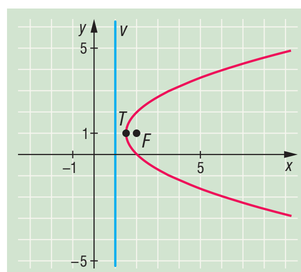


c) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$\frac{1}{2}(y-1)^2 = x - \frac{3}{2}.$$

A parabola adatai:

$$p = 1,\quad T\left(\frac{3}{2};1\right),\quad F(2;1),\quad v\colon\ x = 1.$$

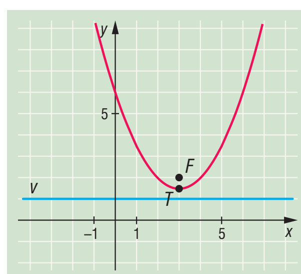


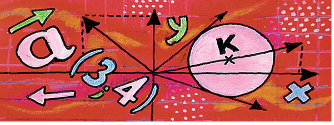
d) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x-3)^2.$$

A parabola adatai:

$$p = 1,\quad T\left(3;\frac{3}{2}\right),\quad F(3;2),\quad v\colon\ y = 1.$$



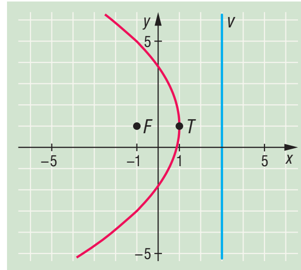


e) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$x-1=-\frac{1}{8}(y-1)^2.$$

A parabola adatai:

$$p=4,\quad T(1;\,1),\quad F(-1;\,1),\quad v\colon\ x=3.$$

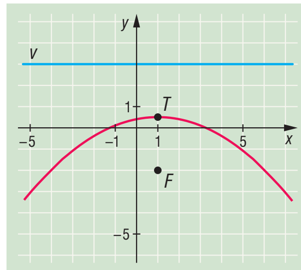


f) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$-\frac{1}{10}(x-1)^2=y-\frac{1}{2}.$$

A parabola adatai:

$$p=5,\quad T\left(1;\,\frac{1}{2}\right),\quad F(1;\,-2),\quad v\colon\ y=3.$$

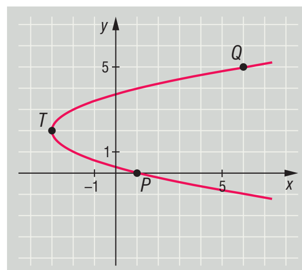


3738 A parabola tengelypontját jelölje $T(u;\,v)$. Mivel a parabola paramétere 0,5, továbbá tengelye az x tengellyel párhuzamos, ezért egyenletét a következő alakban kereshetjük:

$$x-u=(y-v)^2\quad\text{vagy}\quad x-u=-(y-v)^2.$$

Az első esetben az adott pontok koordinátáit az egyenletbe beírva az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned}1-u&=v^2\\6-u&=(5-v)^2\end{aligned}\right\}.$$



Az első egyenletből a második egyenletet kivonva:

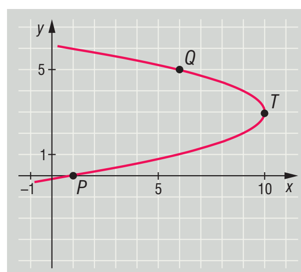
$$\begin{aligned}-5&=v^2-(5-v)^2,\\-5&=-25+10v,\\v&=2.\end{aligned}$$

Ekkor $u=-3$, a parabola tengelypontja $T(-3;\,2)$, egyenlete pedig:

$$x+3=(y-2)^2.$$

Amennyiben a parabola egyenlete $x-u=-(y-v)^2$ alakú, akkor az adott pontok koordinátáit az egyenletbe helyettesítve az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned}1-u&=-v^2\\6-u&=-(5-v)^2\end{aligned}\right\}.$$



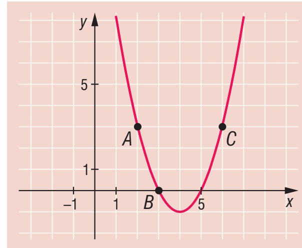
A megfelelő oldalak különbsége:

$$\begin{aligned}-5&=-v^2+(5-v)^2,\\-5&=25-10v,\\v&=3.\end{aligned}$$

Ekkor $u=10$, a tengelypont $T(10;\,3)$, a parabola egyenlete:

$$x-10=-(y-3)^2.$$

3739 *a)* Mivel a parabola tengelye az y tengellyel párhuzamos, ezért egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban kereshetjük.



Az adott pontok koordinátáit az egyenletbe beírva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 4a + 2b + c \\ 0 &= 9a + 3b + c \\ 3 &= 36a + 6b + c \end{aligned}\right\}.$$

Ha a második, illetve a harmadik egyenletből kivonjuk az első egyenlet megfelelő oldalát, akkor a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} -3 &= 5a + b \\ 0 &= 32a + 4b \end{aligned}\right\}.$$

A kapott kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása: $a = 1$ és $b = -8$. A kapott értékeket az első egyenletrendszer első egyenletébe visszaírva kapjuk, hogy $c = 15$. A feltételeknek megfelelő parabola egyenlete:

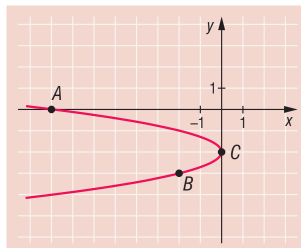
$$y = x^2 - 8x + 15.$$

Megjegyzés: Ha az egyenletet átírjuk $y = (x-4)^2 - 1$ alakba, akkor a parabolát könnyen ábrázolhatjuk is.

b) Az x tengellyel párhuzamos tengelyű parabolák egyenletét felírhatjuk

$$x = ay^2 + by + c$$

alakban. Az ismert pontok koordinátáit behelyettesítve adódik a következő egyenletrendszer:



$$\left.\begin{aligned} -8 &= c \\ -2 &= 9a - 3b + c \\ 0 &= 4a - 2b + c \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = -2$, $b = -8$ és $c = -8$. A kapott parabola egyenlete:

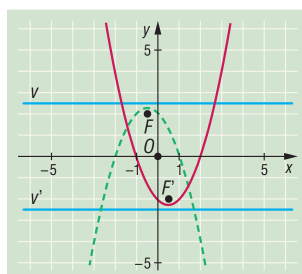
$$x = -2y^2 - 8y - 8.$$

3740 A parabola egyenletét átalakítva:

$$y - \frac{9}{4} = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

így a parabola tengelypontja $T\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$, paramétere $p = \frac{1}{2}$, fókuszpontja $F\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$, vezéregyenesének egyenlete v: $y = \frac{5}{2}$. Az ábrákon ezt a parabolát zöld szaggatott vonallal jelöltük.

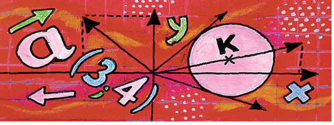
a) A tengelypont origóra vonatkozó tükörképe $T'\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, a fókuszponté $F'\left(\frac{1}{2}; -2\right)$, a vezéregyenes v' tükörképe: $y = -\frac{5}{2}$.



A parabola tükörképének egyenlete:

$$y + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

A tükörképet az ábrán pirossal jelöltük.

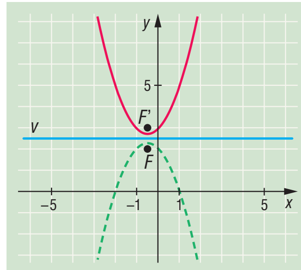


b) Ha a parabolát a vezéregyenesére tükrözzük, akkor a tükörkép fókuszpontja $F'\left(-\frac{1}{2};3\right)$, tengelypontja $T'\left(-\frac{1}{2};\frac{11}{4}\right)$.

A tükörkép egyenlete:

$$y-\frac{11}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2.$$

A tükörképet az ábrán pirossal jelöltük.

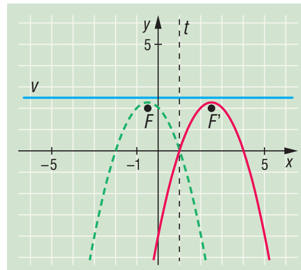


c) A tükörkép tengelypontja $T'\left(\frac{5}{2};\frac{9}{4}\right)$, fókuszpontja pedig $F'\left(\frac{5}{2};2\right)$, vezéregyenese v.

A tükörkép egyenlete:

$$y-\frac{9}{4}=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2.$$

A tükörképet az ábrán pirossal jelöltük.

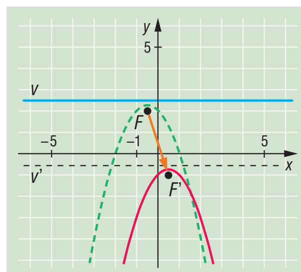


d) A $\vec{v}$ vektorral eltolt parabola tengelypontja $T'\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$, fókuszpontja $F'\left(\frac{1}{2};-1\right)$, v' vezéregyenese $y=-\frac{1}{2}$.

A kapott parabola egyenlete:

$$y+\frac{3}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

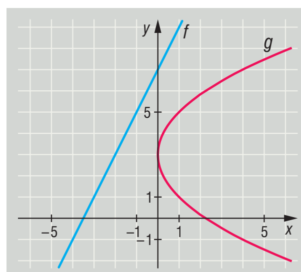
Az eltolt parabolát az ábrán pirossal jelöltük.



3741 *a)* Az első egyenletből kifejezett y értékét a második egyenletbe helyettesítve:

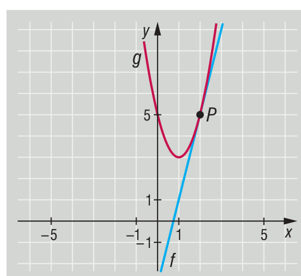
$$(2x+7)^2-6(2x+7)+9=4x,$$
$$4x^2+12x+16=0,$$
$$x^2+3x+4=0.$$

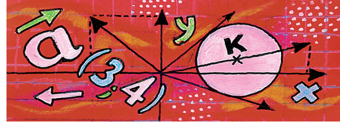
A kapott egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért a két alakzatnak nincsen közös pontja.



b) Az egyenes érinti a parabolát. A két alakzat közös pontja:

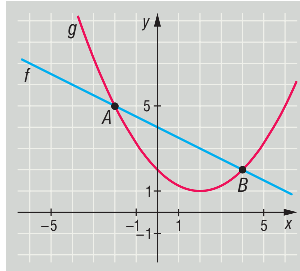
$$P(2;\,5).$$





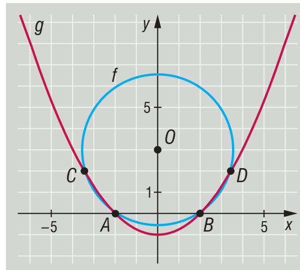
c) A metszéspontok:

$$A(-2;\,5) \quad \text{és} \quad B(4;\,2).$$



d) Az f kör egyenletét átalakítva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} x^2+(y-3)^2&=13 \\ x^2-4y&=4 \end{aligned}\right\}.$$



A két egyenlet megfelelő oldalainak különbsége:

$$(y-3)^2+4y=9,$$
$$y^2-2y=0,$$
$$y\cdot(y-2)=0.$$

A fenti egyenlet megoldásai: $y_1=0$ és $y_2=2$. Ha y_1 értékét a g egyenletébe helyettesítjük, akkor $x^2=4$ adódik, amiből a két alakzat alábbi metszéspontjait kapjuk:

$$A(-2;\,0) \quad \text{és} \quad B(2;\,0).$$

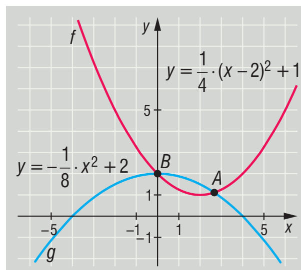
Ha $y_2=2$ értékével számolunk, akkor $x^2=12$, amiből a további metszéspontok:

$$C\left(-2\cdot\sqrt{3};\,2\right), \quad \text{illetve} \quad D\left(2\cdot\sqrt{3};\,2\right).$$

Megjegyzés: Ha a parabola egyenletét $y=\frac{1}{4}x^2-1$ alakban írjuk, akkor könnyen ábrázolható.

e) Az f és g egyenletének különbsége:

$$-4x-12y+24=0, \qquad \text{amiből} \qquad y=\frac{-x+6}{3}.$$



A kapott összefüggést a g egyenletébe visszahelyettesítve:

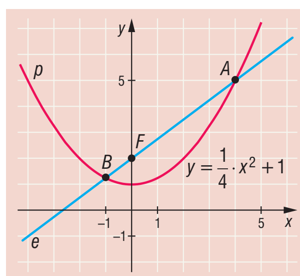
$$x^2+8\cdot\frac{-x+6}{3}-16=0,$$
$$3x^2-8x=0,$$
$$x\cdot(3x-8)=0.$$

A fenti egyenlet megoldásai: $x_1=0$ és $x_2=\frac{8}{3}$. A két alakzat metszéspontjai:

$$A\left(\frac{8}{3};\,\frac{10}{9}\right) \quad \text{és} \quad B(0;\,2).$$

3742 Az adott parabola fókuszpontja $F(0;\,2)$. Az F ponton áthaladó, $\vec{v}(4;\,3)$ irányvektorú e egyenes egyenlete: $3x-4y=-8$. A parabola és az egyenes metszéspontjait az alábbi egyenletrendszer megoldásaiból kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}x^2+1 \\ 3x-4y&=-8 \end{aligned}\right\}.$$



Az y értékét a második egyenletbe helyettesítve:

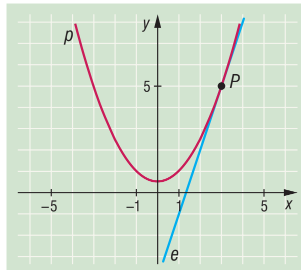
$$3x - 4\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) = -8,$$
$$-x^2 + 3x + 4 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai: $x_1 = 4$ és $x_2 = -1$.
Az egyenes a parabolát a következő pontokban metszi:

$$A(4;5) \quad \text{és} \quad B\left(-1;\frac{5}{4}\right).$$

3743 *a)* Az érintő egyenletének iránytényezős egyenlete:

$$y - 5 = m(x - 3).$$



Mivel a feltétel szerint az egyenes érinti a parabolát, ezért az

$$\left.\begin{aligned} y - 5 &= m(x-3) \\ y &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - 5 = m(x-3),$$
$$\frac{1}{2}x^2 - mx + 3m - \frac{9}{2} = 0.$$

Mivel a fenti egyenletnek is csak egy megoldása van, ezért diszkriminánsa 0, így:

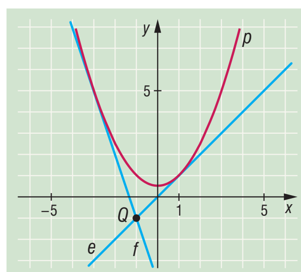
$$m^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(3m - \frac{9}{2}\right) = 0,$$
$$m^2 - 6m + 9 = 0,$$
$$(m-3)^2 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldása $m = 3$, ezért a keresett érintő egyenlete:

$$y - 5 = 3(x - 3), \quad \text{azaz} \quad y = 3x - 4.$$

b) Az érintő egyenletét ezúttal a következő alakban keressük:

$$y + 1 = m(x + 1).$$



Mivel a feltétel szerint az egyenes érinti a parabolát, ezért az

$$\left.\begin{aligned} y + 1 &= m(x+1) \\ y &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}.$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} = m(x+1),$$
$$\frac{1}{2}x^2 - mx - m + \frac{3}{2} = 0.$$

A kapott egyenletnek csak egy megoldása van, így diszkriminánsa 0, azaz:

$$m^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-m + \frac{3}{2}\right) = 0,$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0.$$

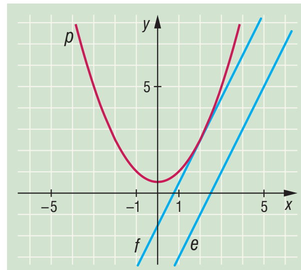
Az egyenlet megoldásai: $m_1 = 1$ és $m_2 = -3$. Az adott ponton át két érintő is húzható a parabolához, ezek egyenlete:

$$e\colon\ \ y = x,$$

illetve

$$f\colon\ \ y + 1 = -3 \cdot (x + 1), \quad \text{azaz} \quad y = -3x - 4.$$

c) Az adott (az ábrán e-vel jelölt) egyenessel párhuzamos érintő egyenletének alakja:



$$f\colon\ y = 2x + c.$$

Mivel az

$$\left.\begin{aligned} f&\colon\ y = 2x + c \\ p&\colon\ y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek egy megoldása van, ezért az

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 2x + c$$

egyenlet diszkriminánsa 0. Az egyenlet 0-ra redukált alakja:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - c = 0,$$

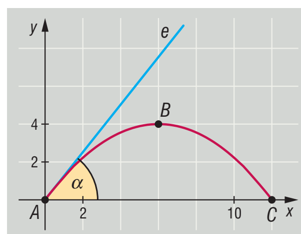
amelynek diszkriminánsa:

$$4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - c\right) = 0, \quad \text{amiből} \quad c = -\frac{3}{2}.$$

A keresett f érintő egyenlete:

$$y = 2x - \frac{3}{2}.$$

3744 Az eldobott kavics parabolapályán mozog. A parabola síkjában helyezzünk el egy koordináta-rendszert, amelynek kezdőpontjában Barnabás található (A), a vízbe érkezés helye pedig az x tengely pozitív felére illeszkedik.



Ekkor a kavics mozgása során áthalad a következő pontokon:

$$A(0;\,0), \quad B(6;\,4) \quad \text{és} \quad C(12;\,0).$$

Mivel a feltételek szerint B a parabola tengelypontja, ezért egyenletét a következő alakban kereshetjük:

$$y = -a(x - 6)^2 + 4.$$

Az A pont koordinátáit az egyenletbe helyettesítve:

$$0 = -36a + 4, \quad \text{amiből} \quad a = \frac{1}{9},$$

a parabola egyenlete pedig:

$$y = -\frac{1}{9}(x - 6)^2 + 4.$$

Barnabás a kavicsot a parabola e érintője mentén indította útnak. Az A ponton átmenő érintő egyenlete $y = mx$ alakú, továbbá az

$$\left.\begin{aligned} y &= mx \\ y &= -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

Az y változó kiküszöbölése után:

$$mx = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4,$$

$$\frac{1}{9}x^2 + \left(m - \frac{4}{3}\right) \cdot x = 0,$$

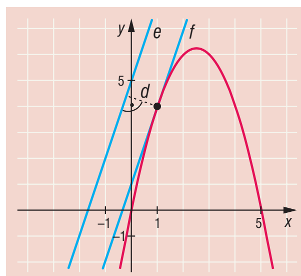
$$x\left(\frac{1}{9}x + m - \frac{4}{3}\right) = 0.$$

A kapott egyenletnek csak egy megoldása lehet, amiből következik, hogy $m = \frac{4}{3}$, az érintő egyenlete pedig $y = \frac{4}{3}x$.

Ha Barnabás a kavicsot a vízszinteshez képest α szögben hajította el, akkor:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha \approx 53{,}1°.$$

3745 A parabola adott (e-vel jelölt) egyeneshez legközelebb eső pontja éppen az egyenessel párhuzamos érintő érintési pontjával esik egybe. Az érintő egyenlete a következő alakú:



$$y = 3x + c,$$

továbbá az

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x + c \\ y &= -x^2 + 5x \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

Ebből következik, hogy a

$$-x^2 + 5x = 3x + c,$$

$$-x^2 + 2x - c = 0,$$

egyenlet diszkriminánsa 0, azaz

$$4 - 4c = 0, \qquad \text{így} \qquad c = 1.$$

A keresett érintő (amit az ábrán f-fel jelöltünk) egyenlete:

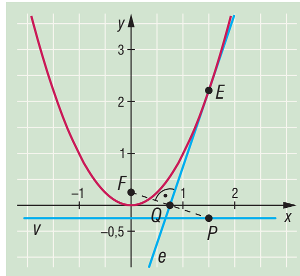
$$y = 3x + 1,$$

az érintési pont, egyben az e-hez legközelebbi parabolapont koordinátái: $E(1; 4)$.

A parabola és az e egyenes távolsága megegyezik az E pont e egyenestől mért távolságával. A 3689. feladat eredménye alapján a távolság:

$$d = \left|\frac{3 \cdot 1 - 4 + 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{5} \approx 1{,}26.$$

3746 A parabola egyenlete alapján a fókuszpontja $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, v-vel jelölt vezéregyenesének egyenlete $y = -\frac{1}{4}$. A vezéregyenesen felvett P pont koordinátáit jelölje $P\left(p; -\frac{1}{4}\right)$, ahol p valós szám. A továbbiakban felírjuk a PF szakasz felezőmerőlegesének (e) egyenletét. A szakasz felezőpontja $Q\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, a felezőmerőleges egy normálvektora pedig $\overrightarrow{FP}\left(p; -\frac{1}{2}\right)$. Az e egyenes egyenlete:



$$px - \frac{1}{2}y = \frac{p^2}{2}. \qquad (1)$$

Megmutatjuk, hogy az (1) egyenletű egyenes valóban érinti az $y = x^2$ egyenletű parabolát. Az y értékét az (1) egyenletbe helyettesítve:

$$px - \frac{1}{2}x^2 = \frac{p^2}{2},$$

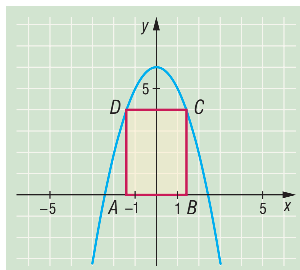
$$x^2 - 2px + p^2 = 0,$$

$$(x-p)^2 = 0.$$

A kapott egyenlet megoldása $x = p$, amiből következik, hogy az (1) egyenletű egyenesnek a parabolával egy közös pontja van, amelynek koordinátái $E(p; p^2)$. Mivel az e egyenes nyilvánvaló módon nem lehet párhuzamos a parabola tengelyével, ezért csakis a parabola érintője lehet.

3747 Az y tengely a parabolának, és így a beírt téglalapnak is szimmetriatengelye, ezért a téglalap csúcsainak koordinátái $A(-b; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; -b^2+6)$, illetve $D(-b; -b^2+6)$, ahol $0 < b < \sqrt{6}$.

Az $ABCD$ téglalap területe:



$$T = AB \cdot BC = 2b \cdot (-b^2 + 6).$$

Feladatunk a $T(b) = 2b \cdot (-b^2+6)$ függvény maximumának megtalálása a $0 < b < \sqrt{6}$ feltétel mellett. Mivel a szóban forgó függvény pozitív értékű, ezért pontosan akkor lesz maximális, amikor négyzete, vagyis elegendő a $T^2(b) = 4b^2 \cdot (-b^2+6)^2$ függvény maximumhelyét keresnünk. A kapott függvényt tovább alakítva:

$$T^2(b) = 2 \cdot (2b^2) \cdot (-b^2+6) \cdot (-b^2+6).$$

A zárójelben álló számok szorzatáról eszünkbe juthat azok mértani közepe, amely közismerten nem lehet nagyobb a számtani közepüknél, azaz:

$$\sqrt[3]{(2b^2)\cdot(-b^2+6)\cdot(-b^2+6)} \le \frac{2b^2 + (-b^2+6) + (-b^2+6)}{3} = 4,$$

majd mindkét oldal harmadik hatványát véve:

$$(2b^2)\cdot(-b^2+6)\cdot(-b^2+6) \le 64.$$

A kapott egyenlőtlenségből közvetlenül következik, hogy

$$T^2(b) \le 128,$$

amiből a $0 < b < \sqrt{6}$ feltétel figyelembevételével kapjuk, hogy

$$T(b) \le 8 \cdot \sqrt{2}.$$

Eredményünk mutatja, hogy a beírt $ABCD$ téglalap területe nem lehet nagyobb, mint $8\cdot\sqrt{2}$. A terület a maximumát akkor éri el, amikor a mértani és számtani közép közötti összefüggésben egyenlőség teljesül, azaz amikor a három szám, amelyre az egyenlőtlenséget alkalmaztuk, egymással megegyezik. Ez pontosan akkor fordul elő, amikor:

$$2b^2 = -b^2 + 6,$$
$$b = \sqrt{2}.$$

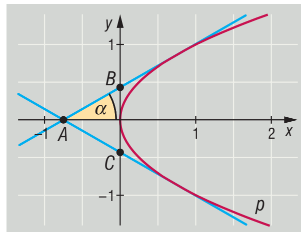
Összefoglalva: a maximális területű beírt téglalap csúcsai:

$$A\left(-\sqrt{2};0\right),\quad B\left(\sqrt{2};0\right),\quad C\left(\sqrt{2};4\right)\quad \text{és}\quad D\left(-\sqrt{2};4\right).$$

A maximális terület:

$$8\cdot\sqrt{2}.$$

3748 A keresett pontot jelölje $A(a; 0)$, a szabályos háromszög további, az y tengelyre illeszkedő csúcsait B, illetve C.



Mivel az x tengely a parabolának és az ABC háromszögnek is szimmetriatengelye, ezért az AB egyenes irányszöge $\alpha = 30^\circ$, iránytangense pedig:

$$m = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ebből adódóan az AB egyenes iránytényezős egyenlete:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(x-a).$$

Mivel az egyenes a parabolát érinti, ezért az

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(x-a)\\ x &= y^2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Az x változó kiküszöbölése után azt kapjuk, hogy

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(y^2-a),$$
$$\sqrt{3}\cdot y^2 - 3y - a\cdot\sqrt{3} = 0.$$

Természetesen a fenti egyenletnek is csak egy megoldása van, tehát az egyenlet diszkriminánsa 0:

$$9-4\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-a\cdot\sqrt{3}\right)=0,\quad \text{amiből}\quad a=-\frac{3}{4},\quad \text{így}\quad A\left(-\frac{3}{4};0\right).$$

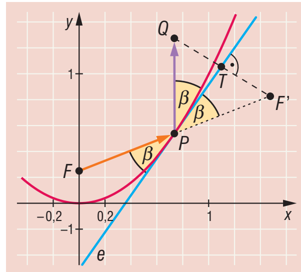
Ha a B csúcs koordinátái $B(0; b)$, és $C(0; -b)$, akkor az ABC háromszög oldala $2b$, és magassága az A pont első koordinátájának ismeretében $\frac{3}{4}$, ezért:

$$\frac{3}{4} = 2b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$b = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

A háromszög további csúcsai:

$$B\left(0;\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\quad \text{és}\quad C\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

3749 A parabola fókuszpontja $F\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$. Tegyük fel, hogy az F pontból kiinduló fénysugár a $P\left(p;\ p^2\right)$ pontban éri el a parabolát. Ekkor a fénysugár visszaverődés előtti FP „útja” ugyanakkora szöget zár be a parabola P pontbeli érintőjével, mint a visszaverődés utáni „útja”. Ezt a közös szöget az ábrán β jelöli.



A β szög azonban még egy helyen megjelenik az ábrában; ha a fénysugár nem verődne vissza a tükörről, hanem útja egyenesen folytatódna tovább, akkor a kapott (ábrán PF’-vel jelölt) szakasz szintén ezt a szöget zárja be a P pontbeli érintővel. Ezt könnyen beláthatjuk, ha arra gondolunk, hogy így a P pontnál csúcsszögek alakulnak ki.

Megállapításaink lehetővé teszik, hogy felírjuk annak az egyenesnek az egyenletét, amelyen a fénysugár a visszaverődés után halad. Ehhez például a következő lépések vezethetnek el:

1. Az F pont P-re vonatkozó F’ tükörképének meghatározása. A fénysugár az FF’ egyenesen haladna, ha nem verődne vissza a parabolatükörről. Az F’ pont koordinátái:
$$F'\left(2p;\ 2p^2-\frac{1}{4}\right).$$

2. A P pontbeli érintő egyenletének felírása. Az érintő egyenletét $y-p^2=m(x-p)$ alakban kereshetjük. Az
$$\left.\begin{aligned} y-p^2&=m(x-p)\\ y&=x^2 \end{aligned}\right\}$$
egyenletrendszernek egy megoldása van csakúgy, mint a belőle kapott
$$x^2-mx+mp-p^2=0$$
egyenletnek. Ebből adódóan az egyenlet diszkriminánsa 0, azaz
$$m^2-4(mp-p^2)=0,$$
amiből
$$(m-2p)^2=0, \qquad \text{végül} \qquad m=2p.$$
A P ponton átmenő e érintő egyenlete:
$$e:\ \ y-p^2=2p\cdot(x-p).$$

3. Az F’-ben az érintőre emelt merőleges egyenes egyenletének meghatározása. A kapott érintő egyenletéből leolvasható annak egy normálvektora: $\vec{n}(2p;\ -1)$. Mivel ez a vektor a keresett merőlegesnek egyben irányvektora, ezért az egyenes egyenlete:
$$x+2py=2p+2p\cdot\left(2p^2-\frac{1}{4}\right), \qquad \text{azaz} \qquad x+2py=4p^3+\frac{3}{2}p.$$

4. A 3. pontban felírt egyenes, valamint a P pontbeli érintő T metszéspontjának meghatározása. A T metszéspont koordinátáit az
$$\left.\begin{aligned} x+2py&=4p^3+\frac{3}{2}p\\ y-p^2&=2p\cdot(x-p) \end{aligned}\right\}$$
egyenletrendszer megoldása után kapjuk. A második egyenlet $2p$-szeresét kivonva az első egyenletből:
$$x+2p^3=4p^3+\frac{3}{2}p-4p^2x+4p^3.$$

Az egyenlet megoldása:

$$x=\frac{6p^3+\frac{3}{2}p}{1+4p^2}=\frac{\frac{3}{2}p\cdot(4p^2+1)}{1+4p^2}=\frac{3}{2}p.$$

A kapott értéket a második egyenletbe visszahelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve kapjuk: $y=2p^2$, így

$$T\left(\frac{3}{2}p;\,2p^2\right).$$

5. Az F' pont tükrözése a T pontra vonatkozóan. Ha az eredményt Q jelöli, akkor a parabolatükörről visszaverődött fénysugár áthalad a Q ponton. Mivel T a QF' szakasz felezőpontja, ezért ha $Q(q_1;\,q_2)$, akkor:

$$\frac{q_1+2p}{2}=\frac{3}{2}p \quad \text{és} \quad \frac{q_2+2p^2-\frac{1}{4}}{2}=2p^2.$$

Az egyenletrendszer megoldása után:

$$Q\left(p;\,2p^2+\frac{1}{4}\right).$$

6. A fénysugár útját a PQ egyenes mentén folytatja. A P és Q pontok első koordinátája egyaránt p, ezért a PQ egyenes párhuzamos az y tengellyel, ami a parabola tengelye. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Vegyes feladatok – megoldások

3750 *a)* (9; 5); *b)* (–9; –5); *c)* (0; 0); *d)* (45; 25).

3751 $B(10;\,3)$.

3752 *a)* –11; *b)* –44; *c)* $-11\lambda^2$.
A skaláris szorzat az eredeti vektorok skaláris szorzatának λ^2-szeresére változik.

3753 Megmutathatjuk például, hogy $\overrightarrow{AP}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$, ahol $0\le\lambda\le 1$.

a) $\overrightarrow{AP}(4;-3)$, $\overrightarrow{AB}(16;-12)$, így $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{3}$.

b) $\overrightarrow{AP}(2;-4)$, $\overrightarrow{AB}(5;-10)$, így $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{3}$.

c) $\overrightarrow{AP}(-8;2)$, $\overrightarrow{AB}(-12;3)$, így $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB}=2$.

d) $\overrightarrow{AP}(5;-6)$, $\overrightarrow{AB}(10;-12)$, így $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB}=1$.

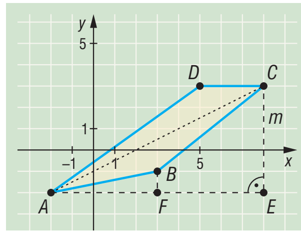
3754 $y=4x+5$ $[M(-1;\,1)]$.

3755 $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$ $[M(1;\,-3)]$.

3756 $p = 4$, $q = 2$, a kör sugara 5.

3757 *a)* $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$; *b)* $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$;
c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$; *d)* $(x - 9)^2 + (y + 8)^2 = 5$;
e) $(x + 4)^2 + y^2 = 5$; *f)* $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$;
g) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$, illetve $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$;
h) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$, illetve $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

3758 Az ACD háromszög területére:



$$T_{ACD} = \frac{CD \cdot m}{2},$$

ahol m a háromszög CD oldalához tartozó magasságát jelöli.
Mivel $CD = 3$, továbbá $m = 5$, ezért

$$T_{ACD} = 7{,}5.$$

Az ABC háromszög területe az ábra alapján könnyen kiszámolható:

$$T_{ABC} = T_{AEC} - T_{AFB} - T_{BFEC}.$$

Az AEC, illetve AFB háromszögek területére:

$$T_{AEC} = 25, \quad T_{AFB} = 2{,}5.$$

A $BFEC$ trapéz alapjai 1, illetve 5, magassága szintén 5, ezért területe:

$$T_{BFEC} = \frac{1 + 5}{2} \cdot 5 = 15.$$

Végül az ABC háromszög területére:

$$T_{ABC} = 25 - 2{,}5 - 15 = 7{,}5$$

adódik, ami mutatja, hogy az AC átló valóban megfelezi az $ABCD$ négyszög területét.

3759 $C(-5; -1)$.

3760 *a)* Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. A két vektor skaláris szorzata a koordinátáik segítségével:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot (x - 1) + (x + 2) \cdot (x + 3) = 0,$$
$$2x^2 + 4x + 6 = 0.$$

Mivel a fenti egyenletnek nincsen valós megoldása, ezért a két vektor nem lehet merőleges egymásra.

b) A két vektor skaláris szorzata:

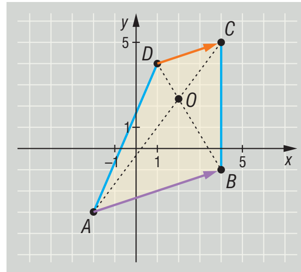
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot (x + 3) + (x + 2) \cdot (x + 3) = (x + 3) \cdot (2x + 2) = 0.$$

Mivel egy szorzat csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért

$$x = -3 \quad \text{vagy} \quad x = -1.$$

Megjegyzés: Az előbbi esetben $\vec{b} = \mathbf{0}$, amely minden vektorra merőleges. Ha $x = -1$, akkor $\vec{a}(-1; 1)$, $\vec{b}(2; 2)$.

3761 *a)* Mivel $\overrightarrow{AB}(6;\,2)$ és $\overrightarrow{DC}(3;\,1)$, ezért látható, hogy $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$, amiből már azonnal következik, hogy az AB oldal párhuzamos a DC oldallal, így az $ABCD$ négyszög valóban trapéz. Noéminek igaza volt.

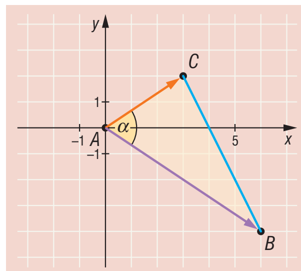


b) Az AB és DC alapok hosszának aránya az *a)* feladat eredményei alapján $\frac{AB}{DC}=2$. Ha az átlók metszéspontja O, akkor az ABO és COD háromszögek hasonlók egymáshoz, és a hasonlóság aránya 2. Ebből azonnal következik, hogy az átlók $2:1$ arányban osztják egymást, a hosszabb részek a hosszabb (AB) alaphoz vannak közelebb.

c) Az O pont koordinátái:

$$O\left(\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 4}{3};\ \frac{1\cdot(-3)+2\cdot 5}{3}\right),\qquad \text{azaz}\qquad O\left(2;\ \frac{7}{3}\right).$$

3762 *a)* Mivel $\overrightarrow{AC}(3;\,2)$ és $\overrightarrow{AB}(6;\,-4)$, ezért:



$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{13}\qquad \text{és}\qquad \left|\overrightarrow{AB}\right|=2\cdot\sqrt{13}.$$

A két vektor skaláris szorzatára:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot 6+2\cdot(-4)=10,$$

másrészt

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{13}\cdot 2\cdot\sqrt{13}\cdot\cos\alpha=26\cdot\cos\alpha.$$

A két eredmény összevetéséből:

$$26\cdot\cos\alpha=10,$$

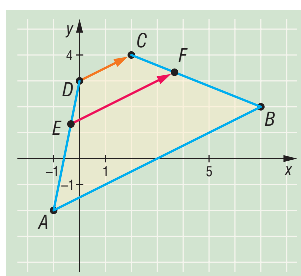
$$\cos\alpha=\frac{5}{13},$$

$$\alpha\approx 67{,}38^\circ.$$

b) Az α szögfelezője illeszkedik az x tengelyre. Az *a)* feladatban meghatározott két vektor az AC, illetve az AB egyenesnek egy-egy irányvektora, ezért AC egyenes iránytangense $\frac{2}{3}$, AB iránytangense $-\frac{2}{3}$.

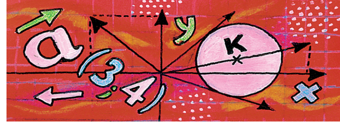
A tangensfüggvény tulajdonságai alapján ezért AC és AB ugyanakkora nagyságú szöget zár be az x tengely pozitív felével, amit másként úgy is megfogalmazhatunk, hogy az x tengely szögfelezője a két egyenes által bezárt α szögnek.

3763 *a)* Az E pont a DA szakaszt $1:2$ arányban osztja, ezért $E\left(-\frac{1}{3};\ \frac{4}{3}\right)$.



Hasonló módon az F pont $1:2$ arányban osztja a CB szakaszt, így $F\left(\frac{11}{3};\ \frac{10}{3}\right)$. Ennek megfelelően az $\overrightarrow{EF}$ koordinátái: $\overrightarrow{EF}(4;\,2)$.

b) Mivel $\overrightarrow{DC}(2;\,1)$, ezért $\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{DC}$, amiből következik, hogy az EF szakasz párhuzamos az $ABCD$ trapéz DC, és így természetesen az AB alapjával is.



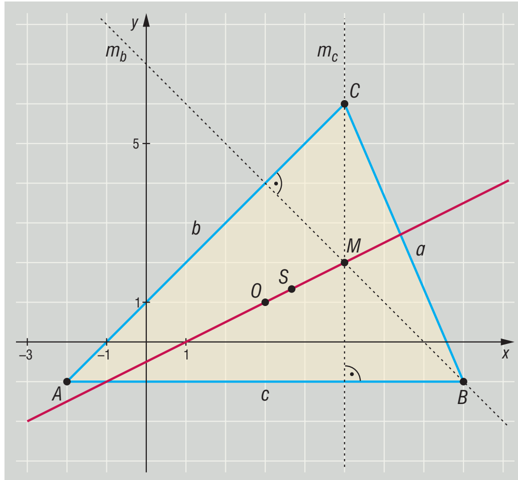
3764 A háromszög Euler-egyenese tartalmazza a háromszög M magasságpontját, valamint S súlypontját. Az S pont koordinátái:

$$S\left(\frac{11}{3};\frac{4}{3}\right).$$

Az M pont meghatározásához felírjuk az m_c, valamint az m_b magasságvonalak egyenletét. Mivel m_c párhuzamos az y tengellyel, továbbá átmegy a C ponton, így m_c egyenlete: $x = 5$.

Az m_b egyenesnek az $\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}(1;1)$ normálvektora, B pedig egy pontja, ezért m_b egyenlete: $x + y = 7$. A két egyenes metszéspontja:

$$M(5;\,2).$$

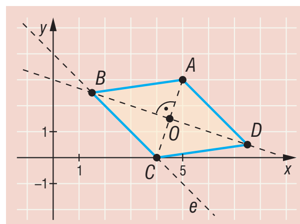


Az Euler-egyenesnek a $\frac{3}{2}\overrightarrow{SM}(2;1)$ vektor irányvektora, ezért az SM Euler-egyenes egyenlete:

$$x - 2y = 1.$$

Megjegyzés: Az Euler-egyenes átmegy az ABC háromszög köré írt kör O középpontján is. Az O pont koordinátái: $O(3;\,1)$.

3765 A rombusz adott csúcsát A-val, átlóinak metszéspontját O-val, az adott oldalegyenest e-vel jelöltük. Az $ABCD$ rombusz az O pontra vonatkozóan középpontosan szimmetrikus, így az A pont O-ra vonatkozó tükörképe egybeesik a C ponttal. A megfelelő tükörkép koordinátái: $C(4;\,0)$.



A rombusz átlói merőlegesek egymásra, így a BD egyenesnek a $\overrightarrow{CA}(1;\,3)$ normálvektora, O pedig egy pontja, ezért egyenlete: $x + 3y = 9$.

A B csúcsot a BD egyenes metszi ki az e egyenesből. A megfelelő egyenletrendszer megoldása után $B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

A BD szakasznak O a felezőpontja, amiből $D\left(\frac{15}{2};\frac{1}{2}\right)$.

A rombusz hiányzó csúcsai:

$$B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right),\qquad C(4;0),\qquad D\left(\frac{15}{2};\frac{1}{2}\right).$$

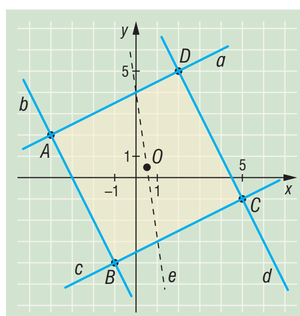
3766 *a)* Az adott egyenesek egy-egy irányvektora:

$$\vec{v}_a(2;1),\;\; \vec{v}_b(1;-2),\;\; \vec{v}_c(2;1)\;\; \text{és}\;\; \vec{v}_d(1;-2).$$

Mivel $\vec{v}_a = \vec{v}_c$ és $\vec{v}_b = \vec{v}_d$, ezért az egyenesek által közrefogott négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, így a négyszög paralelogramma. Vegyük észre továbbá, hogy például:

$$\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b = 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 0,$$

ezért az a és b egyenesek merőlegesek egymásra. Hasonló igaz a négyszög további szomszédos oldalegyeneseire, ezért a megadott egyenesek téglalapot fognak közre.



A megfelelő egyenletrendszerek megoldása után kiszámíthatjuk a szóban forgó négyszög csúcsainak koordinátáit is. Az a és b egyenesek metszéspontja: $A(-4; 2)$, a b és c egyeneseké $B(-1; -4)$, a c és d egyeneseké $C(5; -1)$, végül a d és az a egyeneseké $D(2; 5)$.

Mivel $AB = BC = \sqrt{45}$, ezért az $ABCD$ téglalap szomszédos oldalai megegyeznek, ami igazolja, hogy $ABCD$ négyzet.

b) A négyzet köré írt kör középpontja az AC szakasz O felezőpontja. Az O pont koordinátái: $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. A kör sugara: $r = OA = \sqrt{\frac{45}{2}}$. Az $ABCD$ négyzet köré írt kör egyenlete:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{2}.$$

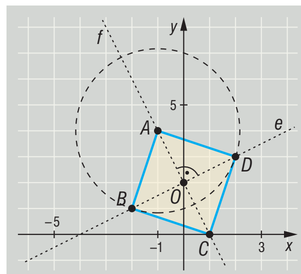
c) A négyzet köré írt kör területe: $T = \frac{45}{2}\pi$, a négyzet területe pedig $t = 45$. Mivel

$$\frac{T}{t}=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}571,$$

ezért a kör területe a négyzet területének körülbelül 157%-a.

d) Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a négyzet köré írt kör O középpontja illeszkedik az e egyenesre. Ebből adódóan az e egyenes a négyzetet két egybevágó trapézra bontja, így területük aránya $1:1$.

3767 Behelyettesítés mutatja, hogy az A pont nem illeszkedik az e egyenesre, ezért az A pontot is tartalmazó átló egyenese (melyet az ábrán f jelöl) merőleges e-re. Ebből adódóan az e egyenes irányvektora az f egyenesnek normálvektora. Az e egyenletéből leolvasható egy irányvektora: $\vec{v}(2; 1)$. Az f egyenes egyenlete ennek megfelelően $2x + y = 2$. A rombusz átlóinak metszéspontját a két átlóegyenes egyenletéből álló



$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x+2 \\ y &= -2x+2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az O metszéspont: $O(0; 2)$. Az $ABCD$ rombusz átlói felezik egymást, így O az AC szakasz felezőpontja, amiből $C(1; 0)$. A feltételek alapján a rombusz oldala $\sqrt{10}$, ezért a hiányzó B és D csúcsokat az A középpontú, $\sqrt{10}$ sugarú kör metszi ki az e egyenesből. A szóban forgó kör egyenlete:

$$(x+1)^2+(y-4)^2=10.$$

A kör és az e egyenes egyenletéből álló

$$\left.\begin{aligned} (x+1)^2+(y-4)^2 &= 10 \\ y &= \frac{1}{2}x+2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből y értékét kiküszöbölve:

$$(x+1)^2+\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2=10,$$

$$\frac{5}{4}x^2=5,$$

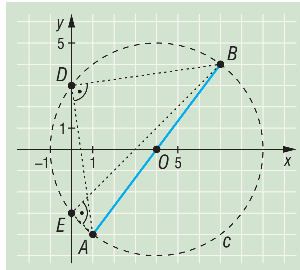
$$x^2=4.$$

A kapott egyenlet megoldásai: $x_1 = -2$, illetve $x_2 = 2$. Ennek megfelelően $B(-2;\ 1)$ és $D(2;\ 3)$. A rombusz hiányzó csúcsai:

$$C(1;\ 0), \quad B(-2;\ 1) \quad \text{és} \quad D(2;\ 3).$$

3768 *a)* A két templom távolsága:

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ km}.$$



b) Azok a pontok, amelyekből az AB szakasz 90º-os szög alatt látszik, illeszkednek a szakasz fölé emelt Thalész-körre, amit az ábrán c jelöl. A kör középpontja $O(4;\ 0)$, sugara 5, ezért egyenlete:

$$(x-4)^2 + y^2 = 25.$$

Mivel az útszakasz egyenlete $x = 0$, ezért a metszéspontok második koordinátájára:

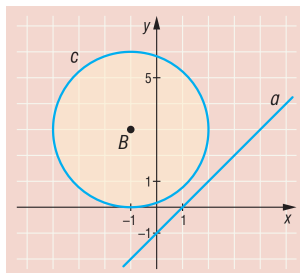
$$(0-4)^2 + y^2 = 25, \quad \text{amiből} \quad y_1 = 3 \text{ és } y_2 = -3.$$

Két olyan pont is van, amelyből a templomok 90º-os szög alatt látszanak, ezek koordinátái:

$$D(0;\ 3) \quad \text{és} \quad E(0;\ -3).$$

c) A két templom a c kör belső pontjaiból látszik tompaszög alatt. Ez az útszakasznak összesen 6 km hosszú része (D és E pont között).

3769 Bodri a c: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ egyenletű körvonalat, illetve annak belső pontjait éri el. A kör, valamint az a-val jelölt sétaút metszéspontjait az alábbi egyenletrendszer megoldásai adják:



$$\left.\begin{aligned} (x+1)^2 + (y-3)^2 &= 9 \\ y &= x-1 \end{aligned}\right\}.$$

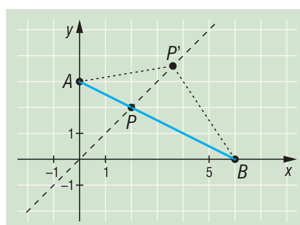
Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$(x+1)^2 + (x-4)^2 = 9,$$
$$x^2 - 3x + 4 = 0.$$

A fenti egyenlet diszkriminánsa negatív, így a sétaút nem metszi a Bodri által elérhető körvonalat. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

3770 *a)* A hozzárendelési utasítást átalakítva:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (x-3)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + x^2}.$$



Vegyük észre, hogy a jobb oldalon éppen a $P(x;\ x)$ pontnak az $A(0;\ 3)$ és $B(6;\ 0)$ pontoktól mért távolságösszege áll.

A feladatot így az alábbiak szerint fogalmazhatjuk át: keressük az $y = x$ egyenletű egyenesnek azt a P pontját, amelyre a $PA + PB$ összeg a lehető legkisebb.

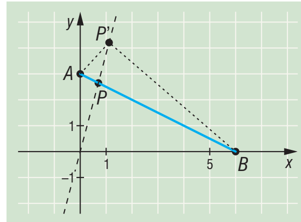
Könnyen végiggondolható, hogy a P pontnak illeszkednie kell az AB szakaszra. Ha ugyanis P' az $y = x$ egyenletű egyenes egy P-től különböző pontja, akkor az ABP' háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség mutatja, hogy:

$$AP + PB = AB < AP' + P'B.$$

Az AB szakasz az adott egyenest a $P(2;\ 2)$ pontban metszi, ezért az f függvény a minimumát az $x = 2$ helyen veszi fel. A minimum értéke:

$$f(2) = AB = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}.$$

b) Az *a)* feladathoz hasonlóan járhatunk el. A hozzárendelési szabályt átalakítva:



$$g(x) = \sqrt{x^2 + (4x-3)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (4x)^2}.$$

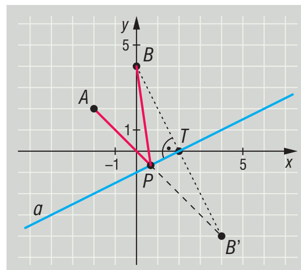
A jobb oldalon a $P(x; 4x)$ pontnak az $A(0; 3)$ és $B(6; 0)$ pontoktól mért távolságösszege áll. Feladatunk tehát ezúttal az $y = 4x$ egyenletű egyenes, valamint az AB szakasz metszéspontjának meghatározása. Az AB egyenes tengelymetszeti egyenlete $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$, ezért a megfelelő P pont koordinátáira:

$$\frac{x}{6} + \frac{4x}{3} = 1, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{2}{3}.$$

A minimumot szolgáltató P pont koordinátái $P\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$. A g függvény a minimumát az $x = \frac{2}{3}$ helyen veszi fel. A minimum értéke:

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = AB = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}.$$

3771 *a)* Az a-val jelölt autópályán olyan P pontot keresünk, amelyre az $AP + PB$ összeg a lehető legkisebb. Tükrözzük ennek érdekében a B pontot az a egyenesre, a tükörképet jelölje B'. Mivel a tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért:



$$PB = PB', \quad \text{így} \quad AP + PB = AP + PB',$$

amiből következik, hogy a keresett összeg pontosan akkor minimális, amikor az $AP + PB'$ összeg is minimális. A fenti összeg akkor lesz a lehető legkisebb, amikor a P pont illeszkedik az AB' szakaszra.

Első lépésben a B' pont koordinátáit számoljuk ki. A tükrözés miatt B' illeszkedik a B pontban az a egyenesre emelt merőlegesre. Ebből kifolyólag a BB' egyenes egy irányvektora megegyezik az a egyenes egy normálvektorával. Az adott egyenletből a BB' egyenes egy irányvektora: $\vec{v}(1; -2)$, így egyenlete: $2x + y = 4$. A BB' egyenes és az a egyenes T metszéspontját a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja. A T pont koordinátái: $T(2; 0)$. Mivel a T pont egyben a BB' szakasz felezőpontja is, ezért $B'(4; -4)$.

A következő lépésben felírjuk az AB' egyenes egyenletét. Az egyenesnek az $\overrightarrow{AB'}(6; -6)$ egy irányvektora, ezért az $\vec{n}(1; 1)$ egy normálvektora. Az egyenes normálvektoros egyenlete: $x + y = 0$.

Végül a lehajtó helyét (amit az ábrán P jelöl) az AB' egyenes metszi ki az a egyenesből. A megfelelő egyenletrendszer megoldása után $P\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ adódik. A lehajtót a $P\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ pontban kell kialakítani.

b) Korábbi megjegyzésünk alapján a megépítendő útszakasz hossza megegyezik az AB' szakasz hosszával. Mivel $AB' = 6 \cdot \sqrt{2} \approx 8{,}49$, ezért körülbelül 8,49 km hosszú utat kell építeni. Ez hozzávetőlegesen 1 273 500 000 Ft-ba kerül.

3772 *a)* Ha a kör középpontja $O(u; v)$, sugara r, továbbá $u, v, r \in \mathbb{Z}$, akkor a következő pontok koordinátái egészek, és illeszkednek a körre:

$$A(u-r; v), \quad B(u+r; v), \quad C(u; v-r) \quad \text{és} \quad D(u; v+r).$$

Az $O(0; 0)$ középpontú, $r = 1$ sugarú kör pontosan négy rácspontot tartalmaz, ezek:

$$A(-1; 0), \quad B(1; 0), \quad C(0; -1) \quad \text{és} \quad D(0; 1).$$

b) Az $O\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{4}\right)$ középpontú r sugarú kör egyenlete:

$$\left(x+\sqrt{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=r^2.$$

Indirekt módon bizonyítunk, ezért tegyük fel, hogy az állítással ellentétben két olyan rácspont is létezik, amelyek illeszkednek a körvonalra. Legyenek ezek $A(a_1; a_2)$, illetve $B(b_1; b_2)$, továbbá $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, valamint az $a_1 = b_1$ és $a_2 = b_2$ egyenlőségek egyidejűleg nem teljesülnek. Mivel mindkét pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét, ezért:

$$\left(a_1+\sqrt{3}\right)^2+\left(a_2-\frac{1}{4}\right)^2=r^2,$$

$$\left(b_1+\sqrt{3}\right)^2+\left(b_2-\frac{1}{4}\right)^2=r^2.$$

A két egyenlet jobb oldala megegyezik, ezért a bal oldalak is egyenlők, így:

$$\left(a_1+\sqrt{3}\right)^2+\left(a_2-\frac{1}{4}\right)^2=\left(b_1+\sqrt{3}\right)^2+\left(b_2-\frac{1}{4}\right)^2.$$

A műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$a_1^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot a_1+a_2^2-\frac{1}{2}a_2=b_1^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot b_1+b_2^2-\frac{1}{2}b_2,$$

majd rendezés után:

$$a_1^2-b_1^2+a_2^2-b_2^2+\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}a_2=2\cdot\sqrt{3}\cdot(b_1-a_1).$$

A fenti egyenlőség bal oldalán racionális szám áll, ezért értelemszerűen a jobb oldalán is racionális szám szerepel. Mivel $2\cdot\sqrt{3}$ irracionális szám, ezért a jobb oldal egyetlen esetben lehet racionális, mégpedig ha értéke 0, azaz ha $a_1 = b_1$. Ekkor persze a bal oldal is 0, ezért:

$$a_1^2-b_1^2+a_2^2-b_2^2+\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}a_2=0,$$

majd szem előtt tartva, hogy $a_1 = b_1$:

$$a_2^2-b_2^2+\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}a_2=0,$$

$$a_2^2-b_2^2=\frac{1}{2}(a_2-b_2),$$

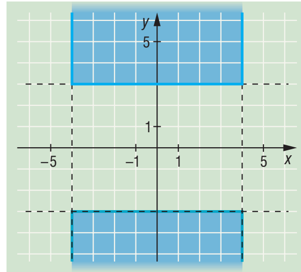
$$(a_2-b_2)\cdot(a_2+b_2)=\frac{1}{2}(a_2-b_2).$$

Korábbi megjegyzésünk alapján az $a_1 = b_1$ és $a_2 = b_2$ egyenlőségek egyidejűleg nem teljesülhetnek, ezért $a_2 \neq b_2$, így mindkét oldal osztható $(a_2 - b_2)$-vel, amiből következik, hogy:

$$a_2+b_2=\frac{1}{2}.$$

Mivel a bal oldal két egész szám összege, ezért nem lehet egyenlő a jobb oldallal, azaz ellentmondásra jutottunk. Ebből adódik, hogy az $O\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{4}\right)$ középpontú, r sugarú kör valóban legfeljebb egy rácsponton mehet át.

3773 *a)* A határoló vonalak pontjai hozzátartoznak az A halmazhoz.



b) Az egyenlőtlenséget 0-ra redukálva, majd közös nevezőt kialakítva kapjuk, hogy:

$$\frac{-x-2y+3}{2x+y-1} \le 0.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$-x-2y+3 \le 0 \quad \text{és} \quad 2x+y-1>0,$$

vagy ha

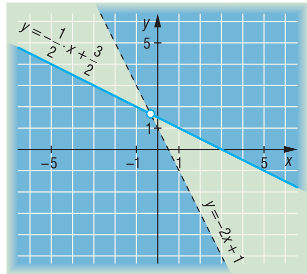
$$-x-2y+3 \ge 0 \quad \text{és} \quad 2x+y-1<0.$$

A két feltételből y értékét kifejezve

$$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \le y \qquad \text{és} \qquad y>1-2x,$$

vagy

$$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \ge y \qquad \text{és} \qquad y<1-2x.$$

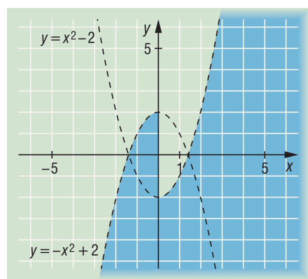


A folytonos vonallal rajzolt egyenes pontjai hozzátartoznak, míg a szaggatott egyenes pontjai nem tartoznak hozzá a B halmazhoz.

c) Az $x=0$ feltételt kielégítő pontok, vagyis az y tengely pontjai, nem tesznek eleget a feltételnek.

Ha $x>0$, vagyis az első és a negyedik síknegyed pontjait tekintjük, akkor:

$$x^3-2x-xy>0,$$
$$x(x^2-2-y)>0.$$



Mivel az első tényező pozitív, ezért

$$x^2-2>y.$$

Ha pedig $x<0$, akkor:

$$x^3-2x+xy>0,$$
$$x(x^2-2+y)>0.$$

Mivel az első tényező negatív, ezért

$$y<2-x^2.$$

Az ábrán szaggatottan jelölt parabolák, valamint az y tengely pontjai nem tartoznak a C halmazhoz.

d) Az egyenlőség bal oldalán a lehetséges kiemeléseket elvégezve:

$$xy \cdot (x^2 + y^2) = 16xy,$$

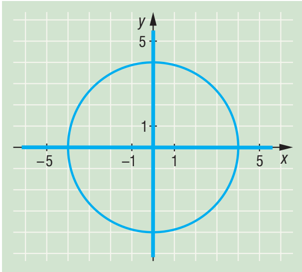
majd 0-ra redukálva, és ismét elvégezve a kiemeléseket:

$$xy \cdot (x^2 + y^2 - 16) = 0.$$

A bal oldalon álló szorzat csak úgy lehet 0, ha:

$$x = 0, \quad \text{vagy} \quad y = 0, \quad \text{vagy} \quad x^2 + y^2 = 16.$$

Az első egyenlőségnek az y tengely, a másodiknak az x tengely, míg a harmadiknak az origó középpontú, 4 egység sugarú kör pontjai tesznek eleget.



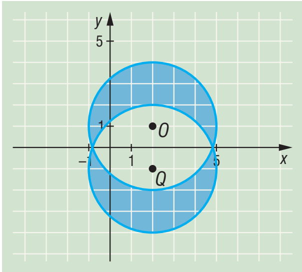
e) Az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív kifejezés áll, ezért mindkét oldalt négyzetre emelhetjük, így:

$$(x^2 + y^2 - 4x - 4)^2 \le 4y^2,$$

majd 0-ra redukálva és szorzattá alakítva:

$$(x^2 + y^2 - 4x - 4)^2 - 4y^2 \le 0,$$

$$(x^2 + y^2 - 4x - 4 - 2y) \cdot (x^2 + y^2 - 4x - 4 + 2y) \le 0.$$



A zárójeleken belül teljes négyzetek kialakítása után azt kapjuk, hogy:

$$\left((x-2)^2 + (y-1)^2 - 9\right) \cdot \left((x-2)^2 + (y+1)^2 - 9\right) \le 0.$$

Ha a P pont illeszkedik az $O(2;\,1)$ vagy a $Q(2;\,-1)$ középpontú, 3 egység sugarú körre, akkor P az E halmazhoz is hozzátartozik. Ezenkívül a fenti egyenlőtlenség bal oldalán pontosan akkor áll negatív szám, ha a tényezők közül az egyik pozitív, a másik negatív. A feltételnek ezért azok a pontok felelnek meg, amelyek az említett körök közül egyiknek belső, míg a másiknak külső pontjai.

f) A feltételnek megfelelő P pontok koordinátáira:

$$(x^2 - y) \cdot (x^2 + y) \le 0.$$

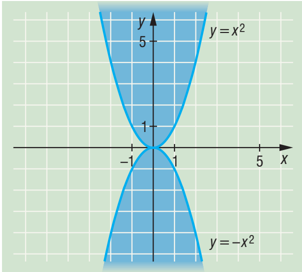
Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$x^2 \le y \quad \text{és} \quad -x^2 \le y,$$

vagy ha

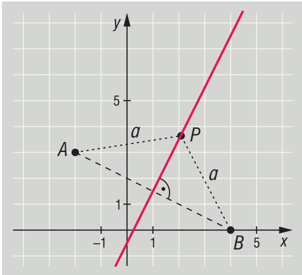
$$x^2 \ge y \quad \text{és} \quad y \le -x^2.$$

Az első feltétel szerint $x^2 \le y$, a második alapján $y \le -x^2$.

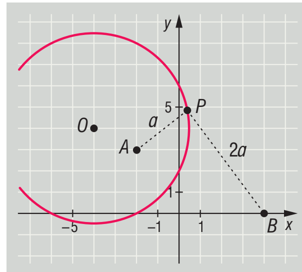


3774 *a)* A feltételnek eleget tevő pontok halmaza az AB szakasz felezőmerőlegese. Ennek egyenlete:

$$2x - y = \frac{1}{2}.$$



b) Ha a $P(x;\, y)$ pont eleget tesz a feltételnek, akkor:



$$\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}=\frac{1}{2}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$\frac{(x+2)^2+(y-3)^2}{(x-4)^2+y^2}=\frac{1}{4}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt a törtek nevezőjével:

$$4(x+2)^2+4(y-3)^2=(x-4)^2+y^2,$$

végül végezzük el a kijelölt műveleteket, és így adódik, hogy

$$3x^2+3y^2+24x-24y+36=0,$$
$$x^2+y^2+8x-8y+12=0.$$

A kapott egyenletben teljes négyzeteket kialakítva:

$$(x+4)^2+(y-4)^2=20.$$

A fenti egyenlet az $O(-4;\, 4)$ középpontú, $r=2\cdot\sqrt{5}$ sugarú kör egyenlete.
Átalakításaink végig ekvivalensek voltak, ami mutatja, hogy a $P(x;\, y)$ pont akkor és csak akkor tesz eleget az $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$ feltételnek, ha illeszkedik a fent meghatározott körre.

3775 *a)* A parabola egyenlete a következő alakban is felírható:

$$y=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a-1,\quad \text{amiből}\quad y-\left(-\frac{a^2}{4}+a-1\right)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2.$$

A fenti egyenlet mutatja, hogy a parabola tengelypontjának koordinátái:

$$T\left(\frac{a}{2};\, -\frac{a^2}{4}+a-1\right).$$

b) Vegyük észre, hogy az *a)* feladatban meghatározott T pontok koordinátái kielégítik az

$$y=-x^2+2x-1,\quad \text{azaz}\quad y=-(x-1)^2$$

egyenletet. A felírt egyenlet parabola egyenlete, így a T tengelypontok parabolára illeszkednek. Könnyen belátható az is, hogy a most kapott parabola minden pontja az *a)* feladatban felírt parabolák valamelyikének tengelypontja. Eredményünk alapján a T pontok halmaza parabola.

c) Ismét átalakítva a felírt parabola egyenletét:

$$y=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+a-1,\quad \text{amiből}\quad y-(a-1)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2.$$

A parabola tengelypontjának koordinátái ezúttal:

$$T\left(\frac{a}{2};\, a-1\right)$$

A T pont koordinátái ezúttal az $y=2x-1$ egyenletnek tesznek eleget. Mivel egyenes egyenletét kaptuk, ezért ebben az esetben a tengelypontok halmaza az $y=2x-1$ egyenletű egyenes. Ezúttal is szükséges megjegyeznünk, hogy az egyenes bármely pontja egy alkalmasan választott parabola tengelypontjával esik egybe.

3776 *a)* Jelölje x az A sütemények, y pedig a B sütemények számát.

Ekkor a feltételek szerint a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \text{továbbá} \quad x, y \in \mathbb{Z};$$

$$x + 2y \leq 45 \text{ (a liszt mennyiségére)};$$

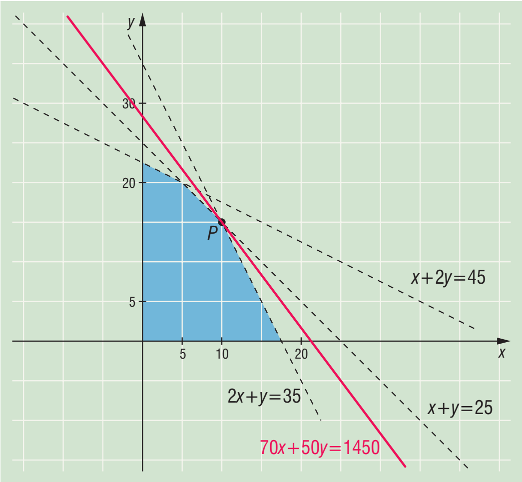
$$2x + y \leq 35 \text{ (a cukor mennyiségére)};$$

$$x + y \leq 25 \text{ (a margarin mennyiségére)}.$$

A nyereséget az alábbi kétváltozós függvény írja le:

$$f(x, y) = 70x + 50y.$$

Feladatunk tehát a fenti öt egyenlőtlenség teljesülése mellett az f függvény maximumának meghatározása.



Az első két egyenlőtlenség együtt a koordináta-rendszer első síknegyedét írja le. Ha a többi egyenlőtlenségben a relációjelet egyenlőségre cseréljük, akkor mindegyik feltétel egy-egy egyenes egyenletét adja. Ha közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk a megfelelő egyeneseket, akkor láthatjuk, hogy az öt egyenlőtlenséget egyidejűleg egy konvex ötszög belső, illetve határpontjainak koordinátái elégítik ki (ld. ábra). Ebben a tartományban keressük azt a $P(x; y)$ pontot, amelynek koordinátáira az $f(x, y)$ érték a lehető legnagyobb.

Vegyük észre, hogy bármely rögzített c valós számra az $f(x, y) = c$, vagyis a $70x + 50y = c$ egyenlet egy $\vec{n}(7; 5)$ normálvektorú egyenes egyenlete. Ha egy-egy ilyen egyenes belemetsz az ötszögbe, akkor a kapott pontokra az f függvény értéke állandó.

Észrevételünk alapján az $\vec{n}(7; 5)$ normálvektorú párhuzamos egyenes-sereg tagjai közül keressük azt, amely belemetsz az ötszögbe, továbbá (például) x tengellyel való metszete a lehető legnagyobb. Az ábra alapján is meggyőződhetünk arról, hogy a keresett egyenes áthalad az ötszög $P(10; 15)$ koordinátájú csúcsán. Ekkor:

$$70x + 50y = 1450.$$

A maximális nyereség elérése érdekében az A süteményből 10, a B süteményből 15 darabot kell készíteni.

b) A maximális nyereség 1450 Ft.