12.5. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – ÖSSZEFOGLALÁS

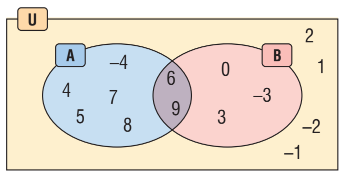
Halmazok – megoldások

5001 *a)* Igen, $|A| = 0$, $A = \varnothing$; *b)* Igen, $|B| = \infty$;
c) Igen, $|C| = 3$, $C = \{\{2; 3\}, \{1; 2; 3\}, \{2; 3; 4\}\}$; *d)* Nem.

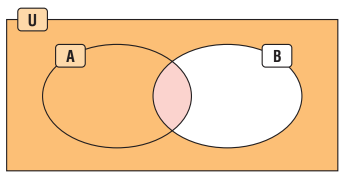
5002 *a)* $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$, $\{a; b; c\}$.
$\varnothing$ diszjunkt minden más részhalmazzal, rajta kívül $\{a\}$ és $\{b; c\}$, $\{b\}$ és $\{a; c\}$, $\{c\}$ és $\{a; b\}$ diszjunktak.
b) $|B| = 6$, $|\{B \text{ összes részhalmaza}\}| = 2^6 = 64$.

5003 $A = \{2; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 9\}$; $A \cap B = \{3; 5; 7\}$; $A \setminus B = \{2\}$; $B \setminus A = \{1; 9\}$;
b) $\overline{A} = \{1; 9\}$, $\overline{B} = \{2\}$;
c) $C = \{1; 2; 4; 6; 8; 9\}$.

5004 $U = \{-4; -3; \ldots; 8; 9\}$, $A = \{-4; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
$B = \{-3; 0; 3; 6; 9\}$.
a) A Venn-diagram az ábrán látható.
b) $\overline{A} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $\overline{B} = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 8\}$.
c) $A \cup B = \{-4; -3; 0; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $A \cap B = \{6; 9\}$,
$A \setminus B = \{-4; 4; 5; 7; 8\}$, $B \setminus A = \{-3; 0; 3\}$.

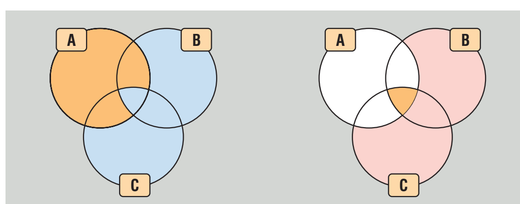


5005 $A \setminus \overline{B} = A \cap B$.



5006 *a)* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; *b)* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5007 A Venn-diagram az ábrán látható.



5008 $|U| = |A \cup B| + |\overline{A \cup B}| = |A| + |B| - |A \cap B| + |\overline{A \cup B}| = 6 + 8 - 3 + 13 = 24$.

5009 $|U| = |A| + |B| - |A \cap B| + |\overline{A \cup B}|$; $12 = 4 + 5 - x + 3$; $x = 0$.

5010 $|U| = |A| + |B \setminus A| + |\overline{A \cup B}|$; $30 = 15 + 7 + x$; $x = 8$.

5011 *a)* $\overline{I} =]2;\, 5]$; *b)* $\overline{I} =]-2;\, 0]$;

c) $\overline{I} = \{0\} \cup]2;\, 7]$; *d)* $\overline{I} =]-\infty;\, 0] \cup]2;\, \infty[$.

5012 *a)* $I = [2;\, 4[$;

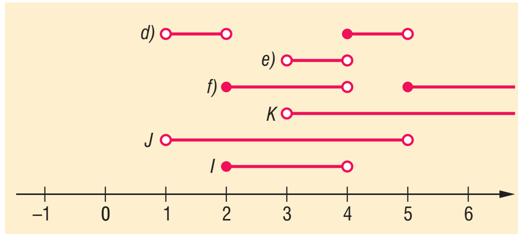
b) $J =]1;\, 5[$;

c) $K =]3;\, \infty[$;

d) $J \setminus I =]1;\, 2[\cup [4;\, 5[$;

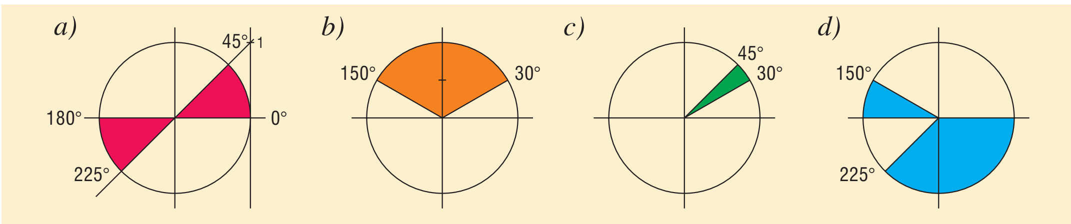
e) $I \cap K =]3;\, 4[$;

f) $(K \setminus J) \cup I = [2;\, 4[\cup [5;\, \infty[$.



5013 *a)* $I = [0°;\, 45°] \cup [180°;\, 225°]$; *b)* $J = [30°;\, 150°]$;

c) $J \cap I = [30°;\, 45°]$; *d)* $\overline{I} \setminus J =]150°;\, 180°[\cup]225°;\, 360°]$.



5014 *a)* Nullaelemű részhalmaz csak az üres halmaz lehet, tehát a válasz 1. Kilenceleműek azok a részhalmazok, melyeket úgy kapunk, hogy egy elemet elhagyunk A-ból. Mivel 10-féleképpen tehetjük ezt meg, a válasz 10.

b) Annyi k-elemű részhalmaza van, ahányféleképpen a 10 elemből ki tudunk választani ismétlés nélkül k darabot. Tehát $\binom{10}{2} = 45$, $\binom{10}{4} = 210$, $\binom{10}{5} = 252$, $\binom{10}{8} = 45$.

c) $\binom{10}{k} = 120$. Próbálkozással, vagy az előző kérdésre adott válaszok figyelembevételével $k = 3$, illetve $k = 7$.

5015 Például ilyen a következő 4 halmaz: $A = \{1;\, 2;\, 3\}$, $B = \{1;\, 2;\, 4\}$, $C = \{1;\, 3;\, 4\}$, $D = \{2;\, 3;\, 4\}$.

5016 *a)* Mindkét halmazt többféleképpen is felírhatjuk, például

$$P = (A \setminus C) \cup (B \cap C) \setminus A \quad \text{és} \quad Q = (B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C).$$

b) Azt kell biztosítanunk, hogy a két halmaz közös része üres halmaz legyen:

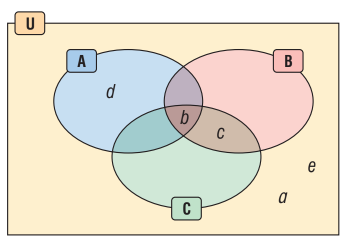
$$[B \cap (A \cup C)] \setminus (A \cap B \cap C) = \varnothing.$$

c) Azt kell biztosítanunk, hogy a P Q-n kívül eső része üres halmaz legyen:

$$A \setminus (B \cup C) = \varnothing.$$

5017 Írjuk b-t a hármas metszetbe. Ekkor c-t B és C kettős metszetbe kell helyeznünk, így d csak A metszeteken kívüli részébe kerülhet. (Közben figyelembe vettük, hogy az elemszámok egyenlők.) Ezek szerint:

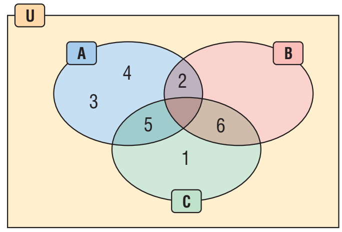
$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{a;\, e\}.$$



5018 A megoldáshoz töltsünk ki egy Venn-diagramot. A 2-t két helyre írhatjuk, de a második feltétel a hármas metszetet kizárja. A 3-at és a 4-et csak egy helyre írhatjuk ezek után. Az 5 két feltételben is szerepel, így csak egy helyre kerülhet. Végül a 6-ot sem írhatjuk középre.

A megoldás a diagramról leolvasható:

$$A = \{2; 3; 4; 5\}, \quad B = \{2; 6\}, \quad C = \{1; 5; 6\}.$$

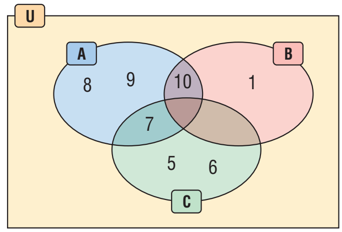


5019 *a)* $A = \{7; 8; 9; 10\}, \quad B = \{1; 10\}, \quad C = \{5; 6; 7\}.$

b) A Venn-diagram az ábrán látható.

c) Üres halmaz.

d) $|(A \cup B) \cap C| = 1$, egyelemű $\{7\}$.



5020 *a)* Ha C üres halmaz, akkor:

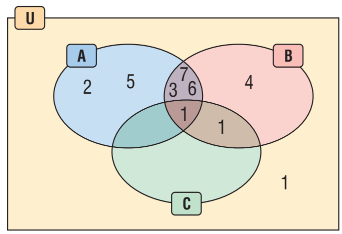
$$A = \{2; 3; 5; 6; 7\}, \quad B = \{3; 4; 6; 7\}.$$

b) C eleme csak az 1 lehet. Ezt rögtön két helyre is írhatjuk: vagy a hármas metszetbe, vagy B és C kettős metszetbe. Így:

$$C = \{1\}, \quad B = \{1; 3; 4; 6; 7\}$$

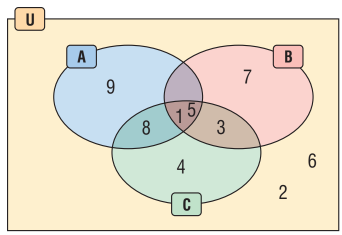
és

$$A = \{1; 2; 3; 5; 6; 7\} \quad \text{vagy} \quad A' = \{2; 3; 5; 6; 7\}.$$



5021 *a)* A Venn-diagram az ábrán látható.

b) A-ba eső elemek összege 23, B-be 16, C-be 21.

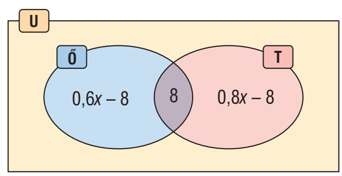


5022 *a)*

$$0{,}6x - 8 + 8 + 0{,}8x - 8 = x,$$
$$1{,}4x - 8 = x,$$
$$0{,}4x = 8,$$
$$x = 20.$$

20 fő dolgozik a Kiskunsági Nemzeti Parkban.

b) $|Ő \setminus T| = 4$ fő.

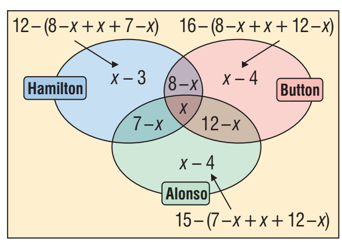


5023 *a)*

$$x - 3 + 8 - x + x + 7 - x + 12 - x + x - 4 + x - 4 = 20,$$
$$4 = x.$$

4 tanuló gyűjtött eddig mindhárom versenyzőtől dedikált emléket.

b) 0 fő. Nekik már vagy mindhárom versenyzőtől, vagy a másik két említett egyikétől van autogramja.



5024 A szöveg szerint a törpéken kívül még $5 \cdot 7 = 35$ fő jött el a mulatságra, azaz bányászok összesen 42-en voltak. A szita-formula így alakul, ha x-szel a narancssárga sapkás telepvezető vájárok számát jelöljük:

$$42 = 21 + 21 + 20 - (7 + 7 + 6) + x.$$

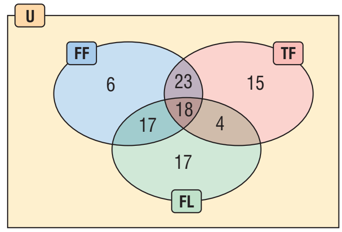
Innen $x = 0$. Tehát ilyen bányász nem vett részt a bulin.

5025 *a)* Alkalmazzuk a szita-formulát. A számba vett kutyák száma 100, hiszen egy megszökött:

$$100 = 64 + 60 + 56 - (41 + 22 + 35) + x,$$

ahol x jelöli a hármas metszet elemszámát. Innen $x = 18$.

b) Belülről kifelé haladva töltsük ki az elemszámokkal a Venn-diagramot, amelyből leolvasható a kérdezett érték: 17 ilyen kutya van. (Az elmenekült jószágról nincs információnk.)



5026 *a)* Lehetséges, hogy senki sem kért egyszerre mindkét ételfajtából (0). Maximum pedig a kisebb elemszámú halmaz elemszámával egyenlő lehet a számuk (8). Tehát 0 és 8 közötti a számuk.

b) Ha senki sem kérte együtt a levest és a főételt, akkor $8 + 10 = 18$ fő ült asztalhoz. Ha minden levest evő rendelt főételt is, akkor $8 + 10 - 8 = 10$ fő ült le ebédelni a panzióban.

5027 $|C| = 13$. A szöveg alapján ismertek a következők:

$$|A| = 14, \quad |B| = 9, \quad |A \cap C| = 7, \quad |A \cap B| = 6, \quad |B \cap C| = 4,$$
$$|A \cap B \cap C| = 2, \quad |\overline{A \cup B \cup C}| = 3.$$

Írjuk fel a logikai szita-formulát az alaphalmazra kiegészítve:

$$|U| = |A \cup B \cup C| + |\overline{A \cup B \cup C}| = |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| - |B \cap C| +$$
$$+ |A \cap B \cap C| + |\overline{A \cup B \cup C}| = 13 + 14 + 9 - 7 - 6 - 4 + 2 + 3 = 24.$$

5028 *a)* Helyettesítsünk be $x = 1$-et: $\frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} < 1$. Nem megoldás az $x = 1$.

b) Találgatás helyett oldjuk meg a feladatot. A közös nevező $2x + 8$, átrendezve a $\frac{x-6}{2x+8} \geq 0$ törtet kapjuk. Egy tört akkor nemnegatív, ha számlálójának és nevezőjének azonos az előjele (a számlálója lehet nulla is). Ez két esetben lehetséges:

$$x - 6 \geq 0 \ (x \geq 6) \text{ és } 2x + 8 > 0 \ (x > -4), \text{ ekkor a megoldás } x \geq 6;$$
$$x - 6 \leq 0 \ (x \leq 6) \text{ és } 2x + 8 < 0 \ (x < -4), \text{ ekkor a megoldás } x < -4.$$

Ebből látható, hogy a legkisebb pozitív megoldás az $x = 6$. Legnagyobb negatív megoldás nincs.

c) A páros számlálójú törtek egyszerűsíthetők, így nem valódiak. A törtek a $[4, 6[$-ból valók:

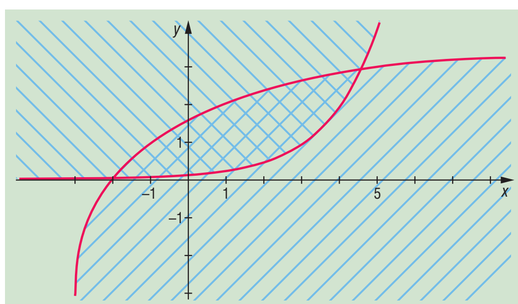
$$\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}.$$

5029 Rajzoljuk meg a transzformált függvényeket közös koordináta-rendszerben.

a) $L = ///$;

b) $M = \backslash\backslash\backslash$;

c) $L \cap M = XXX$.



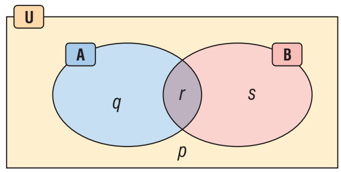
5030 Képzeljünk el egy táblázatot, melynek felső sorában felsoroljuk az U halmaz elemeit, első oszlopában pedig a feladat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazait. Az adott elem oszlopának és az adott halmaz sorának metszetében egy X-szel jelöljük, hogy az elem beletartozik a halmazba.

Úgy kell elhelyeznünk az X jeleket, hogy pl. az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ halmazok mindegyikében szerepeljen az n elem. Ugyanakkor $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}, A_n$ halmazok mindegyikének eleme legyen $(n-1)$, továbbá $A_1, A_2, \ldots, A_{n-3}, A_{n-1}, A_n$ halmazoknak eleme legyen $(n-2)$ stb. Így tulajdonképpen ismerjük az A_1 halmaz elemeit. Minden U-beli elem eleme, csak az 1 nem: $A_1 = \{2; 3; \ldots, n\}$.

Hasonlóan adódik ez így a többi halmazra is.

Halmaz\Elem	1	2	3	…	$n-2$	$n-1$	n
A_1		X	X		X	X	X
A_2	X		X		X	X	X
…							
A_{n-1}	X	X	X		X		X
A_n	X	X	X		X	X	

5031 Tekintsük a halmazábrát.



Írjuk fel a megadott feltételeket p, q, r, s segítségével.

$$\left.\begin{aligned} 2(q+r) &= p+q+r+s \\ 3r &= r+s \\ 10(q+r+s) &= 9(p+q+r+s) \end{aligned}\right\}$$

Ez négy ismeretlen, de csak három egyenlet. Nem tudjuk egyértelműen megoldani, de azért próbáljuk meg. Alakítsuk át az egyenleteket, a középsőből már ki van fejezve s.

$$\left.\begin{aligned} q+r &= p+s \\ 2r &= s \\ q+r+s &= 9\text{p} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} q &= p+r \\ q+3r &= 9\text{p} \end{aligned}\right\}$$

A q ismeretlen is ki van már fejezve az első egyenletből:

$$p + 4r = 9p,$$

ahonnan $r = 2p$. Ekkor viszont $q = 3p$, $s = 4p$. Mivel A, B, U egyike sem üres, a legkisebb pozitív szám, amit p helyére helyettesíthetünk, $p = 1$. Így $|A| = 5$, $|B| = 6$, $|U| = 10$.

5032 *a)* Gondoljuk meg, hogy bármely J_i halmaznak eleme a 0, de minden más elemről ki lehet mutatni, hogy előbb-utóbb már nem esnek az intervallumokba: $J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap \ldots = \{0\}$.

Ugyanis tételezzük fel, hogy valamely i-re $p\ (p > 0) \in J_i$. Bármely pozitív p-hez találunk olyan m pozitív egész értéket, amelyre $\frac{1}{m} \le p$. Ha $n > m$, akkor $p \notin J_n$. Hasonló a meggondolás, ha $p < 0$.

b) Az I_n sorozat összes eleméből alkotott metszetnek nincs közös eleme.

c) Először is $J_n \setminus I_n = \left]-\frac{1}{n}; 0\right]$. Ezen halmazoknak egyetlen közös eleme a 0, azonban más ilyen elem nincs. Ezért $J_1 \setminus I_1 \cap J_2 \setminus I_2 \cap J_3 \setminus I_3 \cap \ldots = \{0\}$.

Kijelentések, események – megoldások

5033 *a)* $A + B$ = Szép idő lesz vagy kirándulni megyek. $A \cdot B$ = Szép idő lesz és kirándulni megyek.

b) $\overline{A} \cdot B$.

c) Bármilyen, ugyanis szép idő esetén egyszerűen teljesült az implikáció. Rossz idő esetére pedig nem állítottam semmit, tehát bármit csinálhatok – kirándulhatok is – szószegés vétsége nélkül.

5034 *a)* $|A| = 10$, $|B| = 6$, $|C| = 4$.

b) $A \cdot B = \{6; 12; 18\}$ = hattal osztható számok;

$B + C = \{3; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20\}$ = hárommal vagy öttel osztható számok;

$\overline{A} \cdot C = \{5; 15\}$ = öttel osztható páratlan számok.

c) $D = \{5\}$ = (olyan páratlan szám, ami hárommal nem, de öttel osztható) $= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$.

5035 *a)* $A + B + C = \{2; 4; 6; 8\}$, $A \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot B \cdot C = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = \varnothing$, $B \cdot \overline{A} \cdot \overline{C} = \{6\}$.

b) $\{10\} = \overline{A + B + C}$.

5036 A helyesen kitöltött táblázat:

	A	B	C	D
Kijelentés	H	I	I	H
Megfordítása	I	H	I	H

5037 *a)* Igen. A „minden ember fenség” egy következtetés: Ha ember vagyok, akkor fenség vagyok. A második kijelentés szerint ember vagyok, így a feltétel teljesül. Amiből valóban következik, hogy fenség vagyok.

b) Nem. Példaként építsünk nádfedelet egy tízemeletes házra. Nyilván ez az épület nádfedeles, de nem tanya.

5038 *a)* Tagadás: Van olyan deltoid, amelynek átlói nem merőlegesek egymásra. Ilyen deltoid nincs, tehát az állítás igaz, a tagadás hamis.

b) Tagadás: Bármely háromszög legkisebb szöge legfeljebb 60º-os. Ez igaz, a háromszög legkisebb szöge nem lehet nagyobb, mint 60º. Ugyanis az állítás igazságát feltételezve:

$$60° < \alpha < \beta < \gamma, \quad \text{így} \quad 180° = 3 \cdot 60° < \alpha + \beta + \gamma,$$

ami (legalábbis az euklideszi geometriai rendszerben) nem igaz, hiszen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Tehát az állítás hamis, a tagadás igaz.

c) Tagadás: Van olyan hattal osztható szám, amely nem osztható kilenccel. A tagadás igaz, például maga a 6 ilyen szám. Az állítás hamis.

d) Tagadás: Bármely pozitív egész prímtényezős felbontásában szerepel a 17. Az állítás igaz, a tagadás hamis.

e) Tagadás: Volt olyan törpe, aki magasabb volt Hófehérkénél. Bár nem tudjuk pontosan a történelmi igazságot, feltételezzük, hogy minden törpe jóval alacsonyabb volt az illető hölgynél. Tehát az állítás igaz, a tagadás hamis.

f) Tagadás: Van alkalom, hogy leírom azt: soha. Aki ezt a feladatot írásban megoldja, arra a tagadás biztosan teljesül. (Nagy valószínűséggel a többiekre is.)

g) Az állítás tagadását úgy tudjuk meggondolni, ha átfogalmazzuk: A 7-nek minden hatványa osztható 3-mal. Így már világos a tagadás: Van olyan szám, amely 7-nek hatványa és nem osztható 3-mal. Utóbbi kijelentés igaz (pl. 49) és az állítás hamis.

h) Először értelmezzük az eredeti mondatot.

Adjunk meg egy pozitív α szöget (pl. $\alpha = 1^\circ$) és vizsgáljuk meg, mely szabályos sokszögek külső szögei kisebbek α-nál.

Bármely konvex n-szög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180^\circ$. A szabályos n-szög egy belső szögének nagysága: $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$. A külső szög mértéke $180^\circ - \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{n}$.

Ha most azt akarjuk, hogy ez a szám 1°-nál kisebb legyen, akkor legyen $n > 360$. Tehát pl. a 361 oldalú szabályos sokszög minden külső szöge kisebb, mint 1°. (Az $n = 360$ még éppen nem megfelelő, hiszen az állítás teljesüléséhez szigorúan kisebb kell.)

Hasonlóan általában: ha $\frac{360^\circ}{n} < \alpha$, akkor $n > \frac{360^\circ}{\alpha}$. Így biztosan tudunk bármely szöghöz olyan n egész számot mondani, amelynél több oldalú sokszögek külső szögei kisebbek, mint a megadott szög. Tehát az állítás igaz.

Tagadás: Létezik olyan α $(\alpha > 0)$ szög, amelyhez bárhogy is adunk meg pozitív egész n-t, van olyan n-nél több csúcsú szabályos sokszög, melynek külső szöge nagyobb vagy egyenlő, mint α.

Mivel az állítás igaz, a tagadás hamis.

Kombinatorika – megoldások

5039 $5! = 120.$

5040 $4! = 24.$

5041 $2\cdot 4! - 1 = 47.$

5042 $6\cdot 2\cdot 3! = 5! - 2\cdot 4! = 72.$

5043 $6! = 720.$

5044 $3\cdot 2 = 6.$

5045 $4\cdot 5^3 = 500$ közül $4\cdot 5^2 = 100$ osztható 5-tel.

5046 $6^3\cdot 9 = 1944.$

5047 $5\cdot 4\cdot 3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$

5048 $\frac{30!}{(30-5)!} = 17\,100\,720.$

5049 $\binom{7}{3} = 35.$

5050 $\binom{11}{2} = 55.$

5051 $\frac{12!}{7!\cdot 4!\cdot 1!} = 3960.$

5052 $\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10.$

5053 *a)* $5!=120;$ *b)* $5!\cdot 2^5=3840;$ *c)* $10!=3\,628\,800.$

5054 *a)* $8!=40\,320;$ *b)* $\dbinom{90}{8}\cdot 8!\approx 3{,}13\cdot 10^{15}.$

5055 $\dfrac{24!}{8!\cdot 8!\cdot 8!}=9465511770.$

5056 *a)* $\dfrac{20!}{5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 2!}=2793510720.$

b) A nevező csökken: $5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 2!>5!\cdot 5!\cdot 6!\cdot 4!$

Így az érték nő $\dfrac{5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 2!}{5!\cdot 5!\cdot 6!\cdot 4!}=\dfrac{42}{12}=3{,}5$-szeresére.

5057 $\dfrac{12!}{(12-7)!}=3991680.$

5058 *a)* $\dfrac{20!}{(20-12)!}\approx 6\cdot 10^{13};$ *b)* $3\cdot\dfrac{19!}{(19-11)!}\approx 9\cdot 10^{12}.$

5059 $\dfrac{4^{11}}{8\cdot 365\cdot 1000}\approx 1{,}44.$

5060 *a)* $10^6=1\,000\,000;$ *b)* $3^6=729;$ *c)* $3^4\cdot 4^2=1296;$

d) $\dbinom{6}{4}\cdot 3^4\cdot 4^2=19\,440.$

5061 $(2-a)^5=\dbinom{5}{0}\cdot 2^5\cdot a^0-\dbinom{5}{1}\cdot 2^4\cdot a^1+\dbinom{5}{2}\cdot 2^3\cdot a^2-\dbinom{5}{3}\cdot 2^2\cdot a^3+\dbinom{5}{4}\cdot 2^1\cdot a^4-\dbinom{5}{5}\cdot 2^0\cdot a^5=$

$=32-80\cdot a+80\cdot a^2-40\cdot a^3+10\cdot a^4-a^5.$

5062 Csoportosítsuk az utakat a hosszuk szerint.

a) Bármerre is megyünk az A-ból, minden út 3 hosszú, és összesen $4\cdot 3\cdot 3=36$ darab van belőle.

b) A közvetlen levelekbe 1 hosszú út visz, ebből 3 van. A következő legközelebbi levelek 3 hosszú úton érhetők el, ebből van $2\cdot 3=6.$ A legtávolabbi levelek 5 élre vannak, hozzájuk $3\cdot 3\cdot 3=27$-féleképpen juthatunk el.

c) Ebből a pontból 2, 4 vagy 6 „élnyire” találunk leveleket, rendre 2, $2\cdot 3=6$ és $3\cdot 3\cdot 3=27$ úton érhetjük el őket.

5063 A számokat az 1, 2, 3, 5, 7, 9 jegyekből állíthatjuk össze.

a) A jegyek csak úgy növekedhetnek, ha a fenti sorban írjuk őket, és az egyik számot elhagyjuk. Összesen 6 ilyen szám van.

b) Két nem prím szám van a felsoroltak között, az 1 és a 9. Kössük őket egybe, mostantól kezeljük az 19-et egyetlen számjegynek. Így 5 jegyből kell 4-jegyű számot kreálni, ráadásul úgy, hogy az 19 biztosan benne legyen. Ezt 4 helyre írhatjuk, a többi 3 helyre 4, 3, 2-féle jegyet tehetünk a maradékból. Végül az 1-et és 9-et megcserélhetjük. Tehát a lehetőségek száma $4\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 2=192.$

c) A fentiek közül minden 2-re végződő szám osztható 4-gyel. Azaz $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120.$

5064 *a)* Ekkor nagyon egyszerű dolgunk van, hiszen a 4 közül bármelyik helyre bármelyik karaktert írhatjuk a 15 lehetőségből: $15^4 = 50\,625$.

b) Vegyük az ellentétes esetet, amikor nincsenek betűk, csak az 5 számjegy szerepelhet: 5^4. Ezt kell kivonnunk az összes lehetőségből: $15^4 - 5^4 = 50\,000$.

c) Ebben az esetben egyszerűen az történik, hogy megduplázzuk a betűk számát. Azaz nem 15, hanem 25 lehetőségből választhatunk egy-egy karaktert. Az eredmény $25^4 = 390\,625$.

5065 Az adott függvény értékkészlete három érték: 0, 1 és (–1).

a) A három érték mindegyike szerepelhet a négy hely bármelyikén: 3^4.

b) Tételezzük fel, hogy a 0 szerepel kétszer, az 1 és a (–1) csupán egyszer-egyszer. A lehetőségek száma ekkor $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}$. Mivel a három érték mindegyike előfordulhat kétszer a négy helyen, ezért az eredményt meg kell szoroznunk 3-mal: $3\cdot\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 36$.

c) A szinuszfüggvényre hagyatkozva négy helyből kettőn szerepel 0, de egymás mellett nem lehetnek. Négy lehetőségünk van:

0, 1, 0, (–1); 0, (–1), 0, 1; 1, 0, (–1), 0; (–1), 0, 1, 0.

5066 *a)* Ha sorba mentek a tanárok képein, akkor

$$22\cdot 21\cdot \ldots \cdot 11 = \frac{22!}{(22-12)!}\text{-féleképpen}$$

választhattak közülük.

b) A 14 lány mellé 8 fiúnak kellett az osztályba járnia, és a 6 férfi tanár mellett 6 nő kolléga került a tablóra. Az előző rész alapján a keresett érték:

$$\frac{14!}{(14-6)!}\cdot\frac{8!}{(8-6)!} = 4{,}36\cdot 10^{10}.$$

c) Most csak az érdekel minket, melyik tanár melyik három diákot választotta. Képzeljük úgy, hogy a tanárok sorban egymás után a tortához mennek és kiválasztanak 3-3, illetve 2-2 szeletet. Ezt összesen

$$\binom{22}{3}\cdot\binom{19}{3}\cdot\binom{16}{3}\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2} \approx 6\cdot 10^{15}$$

különböző módon tehetik meg.

5067 Az 500-as készlet 30%-a, azaz 150 darab plüssmaci selejtes. Jó közülük $500 - 150 = 350$ darab.

a) Ha nincs köztük selejtes, akkor mind a 20-at a jó macik közül sikerült kiválasztani $\binom{350}{20}$-féleképp.

b) A két selejtest 150 darabból, a 18 jót 350 közül választhatták az ellenőrök $\binom{150}{2}\cdot\binom{350}{18}$ különböző módon.

c) Ha legalább három selejtes van, akkor lehet 3, 4, …, 20 is. Ez elég sok eset, térjünk át a komplementer halmazra: nézzük azt, amikor csak 0, 1 vagy 2 selejt van a kiválasztott mintában. Ezt kell kivonnunk az összes lehetséges választások számából, $\binom{500}{20}$-ból. Az eredmény:

$$\binom{500}{20} - \binom{150}{0}\cdot\binom{350}{20} - \binom{150}{1}\cdot\binom{350}{19} - \binom{150}{2}\cdot\binom{350}{18}.$$

5068 *a)* Miután bárki bármikor felelhet, akár az is előfordulhat, hogy ugyanaz az óráról órára készülő diák felel 10-szer: 21^{10} a lehetőségek száma.

b) A feleletek időrendben követik egymást, így először is ki kell választanunka 10-ből azt a 4 feleletet, amelyet a nem készülő diákoktól hallunk. Ezt $\binom{10}{4}$ módon tehetjük meg. A 4 rossz feleletet 9 fő produkálhatja, a 6 szépet pedig 21. Azaz az eredmény:

$$\binom{10}{4} \cdot 9^4 \cdot 21^6.$$

c) „Legfeljebb hétszer” jelentése 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 alkalommal. Ilyen sok eseményt nem szerencsés elkezdeni összeírni, térjünk át a komplementerre: 8, 9, 10 gyenge felelőnk van. Utóbbi eset 9^{10}, előbbiek pedig *b)* esethez hasonlóan adódnak: $\binom{10}{9} \cdot 9^9 \cdot 21^1$ és $\binom{10}{8} \cdot 9^8 \cdot 21^2$. Ki kell vonnunk az összes esetből, azaz ha bárki akárhányszor felelhet: 30^{10} -ből.

$$30^{10} - 9^{10} - \binom{10}{9} \cdot 9^9 \cdot 21^1 + \binom{10}{8} \cdot 9^8 \cdot 21^2.$$

5069 *a)* Két szoknyát, inget és kabátot $\binom{5}{2}$, $\binom{8}{2}$, $\binom{4}{2}$-féle módon választhat Eszti. Minden ruhafélét kétféleképpen adhat a babákra: vagy az egyikre, vagy a másikra adja:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2^3 = 13\,440.$$

b) Állítsuk sorba a babákat, legyen egy A, egy B és egy C baba. Először is Eszti kiválaszt három szoknyát, három inget és három kabátot. Ezeket $\binom{5}{3}$, $\binom{8}{3}$, $\binom{4}{3}$-féleképpen veheti ki. Sorba rakva a három szoknyát, az A, B, C babákkal $3! = 6$-féleképp párosíthatja őket. Hasonló a helyzet a többi ruhafélével is. Az eredmény:

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot (3!)^3 = 483\,840.$$

5070 *a)* Ha bármelyik jelentkező reklámfilmbe kerülhet, akkor $58 + 42 = 100$ főből választunk 12-t:

$$\binom{100}{12} \approx 10^{15}.$$

b) A lányok közül kell kiválasztanunk 7-et és a fiúk közül 5-öt:

$$\binom{58}{7} \cdot \binom{42}{5} \approx 2{,}56 \cdot 10^{14}.$$

c) Ha párban szerepel egy fiú és egy lány, akkor mindkét nemből ugyanannyi szereplő van, azaz 6. Az eredmény:

$$\binom{58}{6} \cdot \binom{42}{6} \approx 2{,}12 \cdot 10^{14}.$$

d) Ha hármasával mutatják be a jelentkezőket, akkor 4 filmet fognak készíteni. Így vagy 4 fiú és 0 lánycsapat lesz, vagy 3 és 1, vagy 2 és 2, 3 és 1, 4 és 0. Az egyes eseteket az előzőkhöz hasonlóan számítjuk, de végül össze kell őket adnunk:

$$\binom{58}{12} \cdot \binom{42}{0} + \binom{58}{9} \cdot \binom{42}{3} + \binom{58}{6} \cdot \binom{42}{6} + \binom{58}{3} \cdot \binom{42}{9} + \binom{58}{0} \cdot \binom{42}{12} \approx 3{,}49 \cdot 10^{14}.$$

5071 Téma szerint rendezni a könyveket $\dfrac{(15+n)!}{13!\cdot 2!\cdot n!} = 406\,980$-féle módon lehet. Egyszerűsítsünk, majd szorozzunk fel a maradék nevezővel:

$$14\cdot 15\cdot \ldots \cdot (15+n) = 813\,960\cdot n!$$

Egyszerűsítsünk újra $14\cdot 15$-tel:

$$16\cdot 17\cdot \ldots \cdot (15+n) = 3876\cdot n!$$

Mindkét oldalon szorzatok szerepelnek, bontsuk fel a 3876-ot prímtényezőkre: $3876 = 2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 19$.

$$16\cdot 17\cdot \ldots \cdot (15+n) = 2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 19\cdot n!$$

Hogy a $16 = 2^4$-t megkapjuk, $n > 3$ kell legyen. Ugyanakkor a bal oldalon is szerepelnie kell a 19 prímnek, ez éppen $15+4$. Ellenőrizzük le, valóban $16\cdot 17\cdot 18\cdot 19 = 3876\cdot 24$.

Tehát 4 Távol-Keletről szóló regényt kap Jani.

5072 Páratlan jegyek az 1, 3, 5, 7 és 9. Mivel hárommal osztható számokat keresünk, megkönnyíti az esetek összegyűjtését, ha nem a számokkal, hanem a 3-mal vett osztási maradékaikkal számolunk. Ezek sorban: 1, 0, 2, 1, 0.

a) Ha minden szám különböző kell legyen, akkor a négy maradék között csak egy 2-es, legfeljebb két 1-es és legfeljebb két 0 lehet. (Például 0-0-0-0 vagy 1-1-1-0 nem lehet.) A 2-es maradéknak mindenképpen szerepelnie kell, hiszen a 0-0-1-1 nem osztható 3-mal. A 2 mellé tenni kell 1-et is, a maradék kettő helyen viszont csak 0 maradék lehet. Tehát azt kell összeszámolni, hány esetet írhatunk fel a 0-0-1-2 maradékokból. A 3, 9 és 5 biztosan a számjegyek közé kerül. 1 maradékot adhat az 1 és a 7 is, itt tehát választhatunk. Vagyis ezen számok száma $2\cdot 4! = 48$.

b) Az előző gondolatot folytatva: öt lehetőségünk van a maradékokat felírni úgy, hogy a szám osztható legyen 3-mal: 0-0-0-0, 0-0-1-2, 0-1-1-1, 0-2-2-2, 1-1-2-2. Nézzük sorban az öt esetet.

0-0-0-0: Minden helyre két számjegyet, 3-at vagy 9-et írhatunk, ez $2^4 = 16$ lehetőséget jelent.

0-0-1-2: A 0 maradékok helyére a 3 vagy a 9, az 1 helyére az 1 vagy a 7 kerülhet. A 2 maradék fixen az 5 számjegyet jelenti. A maradékokat egymás között $\dfrac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 12$-féleképpen permutálhatjuk. Azon belül $2^2\cdot 2 = 8$ lehetőség van a számjegyek beírására. Összesen $12\cdot 8 = 96$.

0-1-1-1: A 0 maradék (3 vagy 9) négy helyre kerülhet (az 1 helyére továbbra is 1 vagy 7 kerül). Ezért a lehetőségek száma ebben az esetben $4\cdot 2^4 = 64$.

0-2-2-2: A 0 megint négy helyen állhat (3 vagy 9), a 2 helyére csak 5-öt írhatunk. Így $4\cdot 2 = 8$ ilyen esetünk van.

1-1-2-2: A maradékokat $\dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$-féleképpen írhatjuk fel. A lehetőségek száma $6\cdot 2^2 = 24$.

A kérdésre a válasz a fenti esetek összege: $16 + 96 + 64 + 8 + 24 = 208$.

5073 *a)* Jelölje a három szobát *A*, *B*, *C*. Mivel megkülönböztetjük őket, nem mindegy, hogy az *A*-ban vannak 6-an, *B*-ben 2-en és *C*-ben senki, vagy *A*-ban senki, *B*-ben 6-an és *C*-ben 2-en. A legegyszerűbb, ha az *A*-ban levők száma alapján írjuk össze a lehetőségeket.

A	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
B	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	6	5	4	3	2
C	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6

Ez harminchat lehetőség.

b) Most csak azt kell összeszámolnunk, a 8-at hányféleképp bonthatjuk három, hatnál nem nagyobb nemnegatív egész összegére.

$$8 = 6+2+0 = 6+1+1 = 5+3+0 = 5+2+1 = 4+4+0 =$$
$$= 4+3+1 = 4+2+2 = 3+3+2$$

Ez nyolc lehetőség.

Megjegyzés. Az *a)* és *b)* kérdést megválaszolhatjuk az alapján is, ha észrevesszük: a három különböző számot tartalmazó (pl. 6-2-0) formák $3! = 6$ helyen fordulnak elő, a két különbözőt tartalmazókat 3 helyen találjuk meg (pl. 6-1-1), míg három egyforma nem lehet. Mindkét típusból van 4 összeg, amely kiadja az összesen $24 + 12 = 36$ oszlopot.

c) Az előző kérdésben tárgyalt esetekből indulunk ki.

Például az 5-2-1 esetben a nyolc főből ki kell választanunk ötöt az egyik, a még ágy nélkül maradt három főből kettőt a másik szobába. A harmadik szobába maradt egy fő már nem változtat a lehetőségek számán. Az összes esetet tekintve a lehetőségek száma:

$$\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{0}{0}+\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}+\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{0}{0}+\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1}+$$
$$+\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{0}{0}+\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1}+\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}+\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=$$
$$= 28+56+56+168+70+280+420+560 = 1638.$$

d) Ha megkülönböztetjük a személyeket és a szobákat is, akkor az *a)* részben felírt táblázatot kell segítségül hívnunk. Azonban nem írjuk fel mind a 36 lehetőséget!

Vegyük észre, hogy bármelyik esetet tekintjük is, az egyszerűsítések miatt felírható ismétléses permutációként. Pl. a 4-3-1:

$$\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1}=\frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{1!}{1!\cdot 0!}=\frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!}.$$

Mivel nem számít a 4-3-1 sorrend, így a *c)* esetből és a megjegyzésben említett különböző sorrendekből megadhatjuk a megoldást:

$$3!\cdot\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{0}{0}+3\cdot\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}+3!\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{0}{0}+3!\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1}+$$
$$+3\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{0}{0}+3!\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1}+3\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}+3\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=$$
$$= 3!\cdot(28+56+168+280)+3\cdot(56+70+420+560) = 6510.$$

5074 *a)* Képzeljük el, ahogyan sorban sétálnak el a hat szoba mellett és véletlenszerűen kiválasztják a szobák lakóit. A megoldás ekkor:

$$\binom{23}{8}\cdot\binom{15}{4}\cdot\binom{11}{3}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}.$$

Ha úgy képzeljük el a dolgot, hogy a diákokat sorba állítjuk és minden szobának készítünk egy címkét annyi példányban, ahány fő befogadására képes, akkor a megoldás:

$$\frac{23!}{8!\cdot 4!\cdot (3!)^3\cdot 2!}$$

A két érték természetesen egyenlő. (Ezt beláthatjuk, ha kifejtjük az első formában felírtakat, majd elvégezzük az egyszerűsítéseket.)

b) Amennyiben az egyes szobákon belül megkülönböztetjük az ágyakat, akkor az első szobába betérő 8 diák $8!$, a 4 ágyasba betérők $4!$ stb. különböző módon osztozhatnak. Tehát a megoldás:

$$\frac{23!}{8!\cdot 4!\cdot (3!)^3\cdot 2!}\cdot 8!\cdot 4!\cdot (3!)^3\cdot 2! = 23!$$

c) A 10 lány mellé nem kerülhetnek fiúk, így nekik külön szobák járnak. Kétféleképpen felelhetünk meg ezen feltételnek. Vagy a 8 és a 2 ágyas szoba a lányoké, vagy két 3 és a 4 ágyas.

Ha az első verzió valósul meg, akkor a lányok $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$ módon költözhetnek be. Ha a második, akkor $\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}$. A fiúk az első lehetőség esetén $\frac{13!}{4!\cdot (3!)^3}$, a második esetben $\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}$ különböző úton foglalhatják el a szobákat. Az összesített eredmény:

$$\frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot\frac{13!}{4!\cdot (3!)^3}+\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}\cdot\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}.$$

Arra nem tértünk ki, hogy a szobákat megkülönböztetjük-e egymástól. Az ágyak számát tekintve biztos. Ha ugyanis különbséget teszünk köztük, akkor a második esetben a lányok háromféleképpen kaphatnak meg három háromágyas szoba közül kettőt (1.-2., 1.-3., 2.-3.).

Az eredmény eképpen módosul:

$$\frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot\frac{13!}{4!\cdot (3!)^3}+3\cdot\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}\cdot\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}.$$

d) A *b)* pont alapján $10!\cdot 13! + 3\cdot 10!\cdot 13! = 4\cdot 10!\cdot 13!$ eredményt kapunk az egyszerűsítéseket elvégezve.

Valószínűség-számítás – megoldások

5075 Biztos esemény: az összeg nemnegatív.

Lehetetlen esemény: a szorzat 11-gyel osztható.

5076 *a)* A komplementere 10 elemi eseményből tevődik össze. Pl.: FFFI vagy IIII.

b) $AB = \{IFFI; IIFF\}$,

$\overline{A+B} = \{FFFF; FFFI; FFIF; FIFF; IIIF; IFII; FIII; IIII\}$.

c) Az eseménytér $2^4 = 16$ elemi eseményből áll.

$P(A) = 0{,}375$; $P(AB) = 0{,}125$; $P\left(\overline{A+B}\right) = 0{,}5$.

5077 *a)* Hétfőn $\frac{8}{10}=0{,}8$; kedden $\frac{9}{12}=0{,}75$; szerdán $\frac{4}{7}\approx 0{,}571$; csütörtökön $\frac{15}{18}\approx 0{,}833$; pénteken pedig ismét $\frac{20}{24}\approx 0{,}833$.

b) A valószínűséget nem tudjuk pontosan megadni, úgy 0,7–0,8 körül lehet. (A relatív gyakoriságok számtani átlaga 0,75, mediánjuk 0,8.)

5078 *a)* $P = 0{,}15$; *b)* $P = 0{,}15^5 \approx 0{,}000076$.

5079 $\frac{1}{10}=0{,}1$.

5080 $\frac{3}{10}=0,3.$

5081 $\frac{1}{6}.$

5082 $\frac{2}{5!}=\frac{1}{60}.$

5083 0,35.

5084 $\frac{7}{12}.$

5085 $\frac{25}{30}=\frac{5}{6}.$

5086 $\frac{2}{17}.$

5087 $\frac{120^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{3}.$

5088 $\frac{1}{7!}.$

5089 $\frac{1}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{15}.$

5090 $\frac{1}{2^5}.$

5091 $1-\frac{2}{\pi}\approx 0,36.$

5092 $1-\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=0,4.$

5093 $\frac{14}{x}=1-0,3=0,7;\quad x=20.$

5094 $\frac{10}{10+x}=0,4;\quad x=15.$

5095 $\frac{x}{12+x}=0,25;\quad x=4.$

5096 9.

5097 A kedvező esetek száma $6!$, ennyiféleképpen következhet egymás után a kockával dobható hat darab szám.

Az összes esetek száma 6^6, hiszen bármelyik dobásra bármilyen értéket kaphatunk.

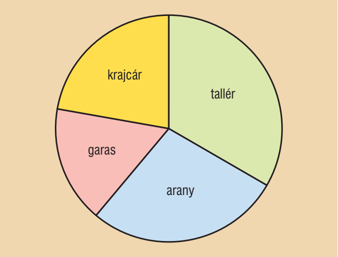
$$P=\frac{6!}{6^6}\approx 0,015.$$

5098 Az első helyre 9, a másodikra 8 és így tovább, a hetedikre 3 lehetőségünk van számjegyet írni. A kedvező esetek száma $\frac{9!}{(9-2)!}$. Az összes eseteket megkapjuk, ha bármelyik helyre bármelyik számjegyet írhatjuk: 9^7. Az eredmény:

$$P = \frac{\frac{9!}{(9-2)!}}{9^7} \approx 0{,}000015.$$

5099 *a)* $\frac{x}{5+3+4+x} = \frac{1}{3}$, ebből $x = 6$. Az üres cellába 6-ot kell írni.

b) Az összes érmék száma 18, így egy érmére 20°-os középponti szög jut. Azaz az aranyakra 100°, a garasokra 60°, a krajcárokra 80° és a tallérokra 120°.



c) Az azonos érméket egymás között permutálva nem kapunk más elrendezést, így ismétléses permutációt kell számolnunk:

$$\frac{18!}{5!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 6!} = 514\,594\,080.$$

d) $\frac{6}{18+x} < 0{,}3$; innen $2 < x$. Ernőnek legalább három Lajos-aranyra kell még szert tennie.

5100 *a)* 4 € veszteség úgy keletkezhet, ha a játékban nem nyernek semmit. Ez pedig akkor következik be, ha egy fejet és egy írást dobnak. Négy lehetőség van (piros, kék) érme sorrendben: (F; F), (F; I), (F; I), (I; I). Közülük kettő nem fizet semmit, tehát 0,5 valószínűséggel bukják el a játék 4 €-s árát.

b) 4 €-t akkor keresnek, ha a játékban 8 €-t nyernek. Ezt kétféleképpen érhetik el: ha Petra a két érmével (F; F)-et dob és Karola 4-est a kockával; illetve ha Petra két írást dob az érmékkel és Karola 5-öst. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

c)

Piros	Kék	1	2	3	4	5	6
fej	fej	2	4	6	8	10	12
fej	írás	0	0	0	0	0	0
írás	fej	0	0	0	0	0	0
írás	írás	4	5	6	7	8	9

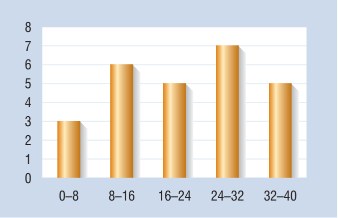
d) A táblázatot átnézve a felső sorban a 6, 8, 10, 12; illetve az alsó sorban az 5, 6, 7, 8, 9 esetek azok, melyekben a lányok többet nyernek, mint a játék 4 €-s ára. Ez kilenc lehetőség, az összes esetek száma pedig 24. Azaz $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

5101 *a)* Az oszlopdiagram az ábrán látható.

b) A tanulók által átlagosan gyűjtött pontok száma:

$$\frac{3\cdot 4 + 6\cdot 12{,}5 + 5\cdot 20{,}5 + 7\cdot 28{,}5 + 5\cdot 36{,}5}{26} \approx 21{,}9807,$$

tehát kerekítve 22.



c) Tizenketten írtak jó vagy jeles dolgozatot a 26 főből. A keresett valószínűség $\frac{12}{26}$.

d) Az osztály tanulói közül $\binom{26}{5}$-féleképpen lehet kiválasztani öt főt. $\binom{5}{2}$ lehetőségünk van két jeles és $\binom{7}{3}$ jó dolgozatot író tanuló kiválasztására. Az eredmény:

$$P = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{26}{5}} = 0{,}00532.$$

5102 *a)* Az azonos jegyből álló számok $q = 1$ kvóciensű sorozatok: 111, 222, …, 999. Ha az első két jegy különböző, akkor a harmadik is. Ilyen szám hat darab van:

$$124,\quad 139,\quad 248,\quad 421,\quad 842,\quad 931.$$

A mértani sorozatot alkotó jegyekből álló számok száma tehát 15.

b) Az előbbiekhez vegyük hozzá a következőket, illetve a fordítottjukat

$$123,\ 135,\ 147,\ 159,\ 234,\ 246,\ 258,\ 345,\ 357,\ 369,\ 456,\ 468,\ 567,\ 579,\ 678,\ 789.$$

A fentieken kívül lehetnek még 0-ra végződő számok is: 210, 420, 630, 840. Így a számtani vagy mértani sorozatot alkotó jegyekből álló háromjegyű számok száma $15 + 2 \cdot 16 + 4 = 51$. Számtani sorozatot pedig $9 + 2 \cdot 16 + 4 = 45$ szám számjegyei alkotnak.

$$P = \frac{45}{51} \approx 0{,}882.$$

c) Csupa különböző jegyből álló háromjegyű számok száma $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ (az első helyre nem írhatunk 0-t, utána azt azonban már igen, de az első helyre írt számot már nem). A különböző, de számtani vagy mértani sorozatot adó jegyekből álló háromjegyű számok száma $51 - 9 = 42$.

$$P = 1 - \frac{42}{648} \approx 0{,}935.$$

5103 *a)* Ha mindkét fordulóban háromszorozunk 4-es dobással, akkor $10\ € \cdot 3^2 = 90\ €$.

b) Legkevesebb pénzünk akkor lesz, ha minden alkalommal elveszítjük a pénzünk háromnegyedét. Egy-egy fordulóban ennek valószínűsége $\frac{1}{4}$, így három forduló alatt $\left(\frac{1}{4}\right)^3$.

c) 10 €-ból 15 € csak úgy keletkezhet, ha egyszer háromszorozunk, egyszer felezünk és egyszer nem történik a pénzzel semmi. Azonban mindegy, hogy melyik történés melyik körben esik meg. A három különböző lehetőséget $3! = 6$-féleképpen permutálhatjuk. Mivel mindegyik valószínűsége $\frac{1}{4}$, ezért a kérdezett valószínűség: $P = 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}09375$.

5104 A „legalább ötször dobunk” végtelen sok esetből áll, foglalkozzunk a komplementerével: ha vagy elsőre, vagy másodikra, harmadikra vagy negyedikre hatost dobunk. Nézzük sorban.

Elsőre dobtunk hatost:

$$P(\text{elsőre hatos}) = \frac{1}{6}.$$

Másodikra úgy dobhatunk hatost, ha elsőre mást dobtunk:

$$P(\text{másodikra hatos}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Harmadikra úgy, ha az első kettő nem hatos volt:

$$P(\text{harmadikra hatos}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}.$$

Végül negyedikre úgy, ha előtte háromszor nem találtuk el a hatost:

$$P(\text{negyedikre hatos}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}.$$

A keresett valószínűség ezek összege:

$$P = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}5177.$$

Tehát annak nagyobb a valószínűsége, hogy az első négy dobásra sikerül a hatos.

5105 *a)* $P = \dfrac{\binom{10}{5}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}0047;$ *b)* $P = \dfrac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}056;$

c) Figyeljük meg, hogy a csupa epres, csupa meggyes és a vegyes esetek kiadnak minden lehetséges esetet, ráadásul kizárják egymást. Így a vegyes valószínűségét megkapjuk a másik kettő összegének komplementereként:

$$P(\text{vegyesen van epres és meggyes}) = 1 - [P(\text{csak epres}) + P(\text{csak meggyes})] \approx 0{,}9393.$$

Megjegyzés: Más módon is számolhatunk, összegezve az 1 eper – 4 meggy, 2 eper – 3 meggy, 3 eper – 2 meggy, 4 eper – 1 meggy eseteket.

5106 Alkalmazzuk a valószínűség-számítás szita-formuláját a K: Kati nyer, J: Jani nyer eseményekre. A szöveg alapján $P(K) = 0{,}6;$ $P(J) = 0{,}5$ és $P(KJ) = 0{,}25.$ Így:

$$P(K + J) = P(K) + P(J) - P(KJ) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}85.$$

5107 A dobozban volt 50 zöld és 30 kék gyöngy. Ha legalább kettő kék, akkor lehet $2, 3, 4, 5, 6, 7$ vagy 8 kék. Ez elég sok eset, lássuk a komplementerét. Ez csak két eset: 0 vagy 1 kék (és 8 vagy 7 zöld). Az összes esetek száma mindkét esetben $\binom{6}{4}$. Így a keresett valószínűség:

$$1 - \left(\frac{\binom{30}{0} \cdot \binom{50}{8}}{\binom{80}{8}} + \frac{\binom{30}{1} \cdot \binom{50}{7}}{\binom{80}{8}}\right) \approx 0{,}88.$$

5108 *a)* $P = 0{,}25.$ *b)* $P = 0{,}25^3 = 0{,}015625.$

c) $P = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25 = (0{,}25 \cdot 0{,}75)^3 \approx 0{,}0066.$

d) Sajnos nem tudjuk, melyik négy kérdésre ismeri a helyes választ Károly, így elsőnek ki kell választanunk a hat kérdésből ezt a négyet $\binom{6}{4}$-féleképp (vagy éppen a kettő rosszat). Tudjuk, hogy minden jó válasznak 0,25 a valószínűsége és minden rossz válasznak 0,75. A négy helyes és kettő helytelen valószínűsége így $0{,}25^4 \cdot 0{,}75^2$. Összesen:

$$P(\text{négy jó, kettő rossz}) = \binom{6}{4} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^2 \approx 0{,}033.$$

Megjegyzés: A feladatban visszatevéses mintavételt alkalmazunk. A „visszatevés” itt azt jelenti, hogy többször adhat jó és rossz választ is Károly.

5109 A szabályos háromszög azonos oldalhoz tartozó nevezetes vonalai (súlyvonal, magasság, szögfelező) egybeesnek. Így beírt körének sugara megegyezik a magasság harmadával, amit Pitagorasz tételéből ki tudunk számítani: $m=\sqrt{300},\ r=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. A valószínűségek meghatározásához a területeket kell kiszámítanunk: $T_{\triangle}=\dfrac{20\sqrt{300}}{2}=100\sqrt{3},\quad T_{\bigcirc}=\dfrac{100\pi}{3}$.

a) $p=\dfrac{T_{\bigcirc}}{T_{\triangle}}=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}\approx 0{,}6046.$

b) Annak a valószínűsége, hogy nem találják el a számlapot, komplementere az előbb kapott értéknek:

$$p=\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(1-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)\approx 0{,}1445.$$

c) Már mindent tudunk, csak azt nem, hányféleképpen rakhatjuk sorba a kettő lecsúszó és a három ott ragadó dobást:

$$p=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^3\cdot\left(1-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2\approx 0{,}3455.$$

5110 *a)* Minden pakliban minden típusú lapból (ász, király, hetes stb.) négy darab van. Így egy kihúzott figurás lap valószínűsége $\dfrac{16}{32}=0{,}5$ és egy hetes valószínűsége $\dfrac{4}{32}=0{,}125$. Mivel nem tudjuk, mely lapokon szerepelnek figurák, ezért a kihúzott 7-ből válasszunk ki erre a célra négyet $\dbinom{7}{4}$-féleképpen.

A keresett valószínűség: $P=\dbinom{7}{4}\cdot 0{,}5^4\cdot 0{,}125^3\approx 0{,}0043.$

b) Legfeljebb öt figura jelenthet 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 lapot. Térjünk át a komplementer „mind a hét figurás vagy egy nem az" esemény valószínűségére:

$$P(\text{legfeljebb öt})=1-[P\ (\text{hét})+P(\text{egy nem})]=$$

$$=1-\binom{7}{0}\cdot 0{,}5^7\cdot 0{,}125^0-\binom{7}{1}\cdot 0{,}5^6\cdot 0{,}125^1\approx 0{,}9785.$$

5111 A szöveg szerint A-ba 12 fiú és 12 lány jár, a B-be 16 fiú és 8 lány.

a) $\dfrac{8}{20}=0{,}4;$ *b)* $\dfrac{\binom{12}{2}}{\binom{20}{2}}\approx 0{,}35;$ *c)* $\dfrac{\binom{8}{2}\cdot\binom{12}{1}}{\binom{20}{3}}\approx 0{,}29;$

d) $\dfrac{\binom{12}{3}\cdot\binom{16}{1}}{\binom{28}{4}}+\dfrac{\binom{12}{1}\cdot\binom{16}{3}}{\binom{28}{4}}\approx 0{,}5;$

e) A következő esetek lehetségesek: 4 fő az A-ból, 3 a B-ből; 5 fő az A-ból, 2 fő a B-ből; 6 fő az A-ból, 1 fő a B-ből. (A komplementerre nem érdemes áttérni.)

$$P=\frac{\binom{24}{4}\cdot\binom{24}{3}}{\binom{48}{7}}+\frac{\binom{24}{5}\cdot\binom{24}{2}}{\binom{48}{7}}+\frac{\binom{24}{6}\cdot\binom{24}{1}}{\binom{48}{7}}+\frac{\binom{24}{7}\cdot\binom{24}{0}}{\binom{48}{7}}=0{,}5.$$

5112 *a)* Ha minden kérdést passzol valaki és még szerencséje sincs, akkor négy alkalommal osztják el hattal az éppen aktuális pontjainak számát. $1296:6^4 = 1$, azaz egyetlen pont a megszerezhető legkevesebb. A maximális pontszámot akkor éri el a játékos, ha minden esetben meg tudja háromszorozni pontjainak számát: $1296 \cdot 3^4 = 104\,976$. Ehhez szerencsésen kell dobnia, és a választ is tudnia kell mind a négy kérdésre.

b) A maximális ponthoz ismerni kell a helyes válaszokat, és négy alkalommal kell dobni 5-öst vagy 6-ost. Ennek valószínűsége $\left(\frac{2}{6}\right)^4 \approx 0{,}0123$. A minimális pontszámhoz $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}482$ valószínűséggel jutunk, ha mindig passzolunk, és nem dobunk 6-ost.

c) 5832 pontot akkor ér el egy játékos, amennyiben kiinduló pontszámát 4,5-del szorozza meg, $5832:1296 = 4{,}5$. Gondoljuk át, milyen együtthatók módosíthatják a pontszámokat!

Ha tudja a választ, akkor az *A* vagy *B* lehetőséget választhatja. A dobástól függően 3, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{1}{2}$ a szorzótényező. Amennyiben kihagyja a kérdést, akkor vagy nem változik a pont, vagy hatoda lesz: 1, $\frac{1}{6}$ a szorzó.

A 4,5 szorzótényezőt ezekből kétféleképpen kaphatjuk meg: $4{,}5 = 3^3 \cdot \frac{1}{6} = 3^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$. (A feltétel szerint ha megpróbál válaszolni a kérdésre a játékos, tudja a választ.) Azaz vagy

– három *A* lehetőséget választ, dobása 5 vagy 6 és egy kérdést passzol, de nem dob 6-ost, vagy

– kétszer választ *A*-t (dobása 5 vagy 6), egyszer *B*-t (dobása 1, 2 vagy 3), és egy kérdést nem tud, de 6-ost dob.

Az első változat négyféleképp történhet meg attól függően, melyik kérdést passzolja. Ennek valószínűsége a feltételek mellett:

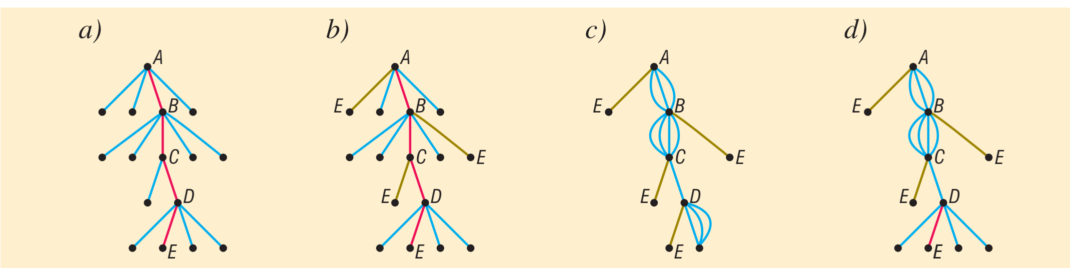
$$4 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \approx 0{,}123.$$

A második eset $\frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$-féleképp valósulhat meg:

$$12 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \approx 0{,}111.$$

Az eredmény a kettő összege, $p = 0{,}234$.

5113 A legjobb, ha gráfok segítségével tekintjük át Kornélia barangolását az egyes esetekben.



a) Az első esetben az *A* oldal négy hiperhivatkozásából egy mutat *B*-re, *B* öt linkjéből egy mutat *C*-re és így tovább egészen *E*-ig. A Nelli által bejárt utat a piros vonal mutatja. A keresett valószínűség az egyes lapok választási valószínűségeinek szorzata, vagyis

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}00625.$$

b) Ebben az esetben A-ról közvetlenül is elérheti E-t $\frac{1}{4}$ valószínűséggel, illetve ugyanekkora valószínűséggel továbbléphet B-re. B-ről $\frac{1}{5}$ valószínűséggel jut E-re vagy ugyanennyi eséllyel megy tovább C-re és így tovább. A keresett valószínűség pedig

$$P=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=0,33125.$$

c) Az előző esethez képest annyi változást tapasztalunk, hogy az A oldalról ugyan most is $\frac{1}{4}$ valószínűséggel jut Kornélia E-re, ám minden más utat választva B-re jut $\frac{3}{4}$ valószínűséggel. Hasonló a helyzet a B lapon: $\frac{1}{5}$ valószínűséggel kattint E-re és $\frac{4}{5}$ valószínűséggel C-re. A valószínűség:

$$P=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=0,775.$$

d) A kérdés ebben az esetben az, hogy mekkora valószínűséggel nem talál Kornélia a női magazin E oldalára. Az A oldalon három, B-n négy, C-n egy és D-n három hiperhivatkozásra is kattinthatunk, hogy elkerüljük E-t. Tehát

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=0,225.$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a *c)* és *d)* eset gráfjában látható különbség a kérdések megválaszolásában nem jelent eltérést. Mindegy, hogy a D oldalról mennyi „nem E” helyre juthat. Így világos, hogy a *c)* és *d)* részben kapott valószínűségek összege miért 1 (komplementer események).

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET – ÖSSZEFOGLALÁS

Számok és műveletek – megoldások

5114 Egy lehetséges megoldás:

a) $20 + 7 - 3 - 4 - 11 = 9;$ *b)* $13 + 9 + 6 - 5 - 13 = 10;$
c) $1 + 2 \cdot 3 + 4 - 5 = 6;$ *d)* $5 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 15;$
e) $5 \cdot 6 - 7 \cdot 8 - 9 = -35;$ *f)* $10 \cdot 3 : 6 + 4 \cdot 5 = 25.$

5115 *a)* $[1; 2];$ *b)* $]-2; 3[;$ *c)* $[-4; 2];$ *d)* $]2; 4];$
e) $\{\};$ *f)* $[1; 8[;$ *g)* $]-2; 3[;$ *h)* $]-3; 7];$
i) $[-3; 5];$ *j)* $\{\};$ *k)* $[2; 4] \cup]7; 12];$ *l)* $[-4; 2[.$

5116 Például: $\frac{1}{33} = \frac{4}{132} < \frac{5}{132} < \frac{6}{132} < \frac{7}{132} < \frac{8}{132} = \frac{2}{33}.$

5117 Mivel $\frac{1}{33} = 0{,}03030303\ldots$ és $\frac{1}{32} = 0{,}03125,$ megfelel például:

$$a = 0{,}0304050607\ldots, \quad b = 0{,}03040040004\ldots, \quad c = 0{,}0306789101112\ldots$$

5118 A gondolt számok legyenek x és y, ahol $x > y$. Felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 8 \\ x &= 2y + 2 \end{aligned}\right\}, \quad \text{amiből} \quad y = 6 \quad \text{és} \quad x = 14.$$

A két szám összege: 20.

5119 *a)* Számtani közép: $\frac{2+8}{2} = 5,$ mértani közép: $\sqrt{2 \cdot 8} = 4.$

b) Számtani közép: $\frac{17}{2},$ mértani közép: 4.

c) Számtani közép: 10, mértani közép: 8.

d) Számtani közép: 2, mértani közép: 2.

5120 *a)* $\frac{4+b}{2} = 6, \quad b = 8;$ *b)* $b = 6;$ *c)* $b = 20;$ *d)* $b = 9;$
e) $b = \frac{25}{4};$ *f)* $b = 36.$

5121 *a)* $\frac{21}{5} = 4{,}2,$ a keresett jegy 0; *b)* $\frac{35}{6} = 5{,}8\dot{3},$ a keresett jegy 3;

c) $\frac{13}{7} = 1{,}\dot{8}5714\dot{2},$ és $2010 = 6 \cdot 335,$ a keresett jegy 2;

d) $\frac{7}{17} = 0{,}\dot{4}11764705883352\dot{9},$ és $2010 = 16 \cdot 125 + 10,$ a keresett jegy 8.

5122 *a)* 12 csomag.

b) 6 napra elegendő.

5123 $4 + 90 \cdot 2 + 288 \cdot 3 = 1048$ számjegyet írtak le.

Első jegyként 10 db, második jegyként $9 + 10 + 10 = 29$ db, harmadik jegyként $10 + 9 = 19$, tehát összesen 58-szor írták le az 5-öst.

5124 *a)* Hamis, például $15 : 5 = 3$.

b) Hamis, a 0-nak nem létezik reciproka.

c) Igaz, például $(-5) \cdot (-7) = 35$.

d) Hamis, gondoljunk a tizedes tört alakra.

e) Igaz, például π.

f) Hamis, például $\sqrt{64} = 8$ és $\sqrt[3]{64} = 4$.

5125 Mivel minden második szám páros, a nullák számát a számok prímtényezős felbontásában szereplő ötösök száma határozza meg:

$$5,\quad 10 = 5 \cdot 2,\quad 15 = 5 \cdot 3,\quad 20 = 5 \cdot 2^2,\quad 25 = 5^2,\quad 30 = 5 \cdot 3 \cdot 2,$$
$$35 = 5 \cdot 7,\quad 40 = 5 \cdot 2^3,\quad 45 = 5 \cdot 3^2,\quad 50 = 5^2 \cdot 2,\quad 55 = 5 \cdot 11.$$

Mivel a szorzat prímtényezőként 13 darab ötöst tartalmaz, ezért 13 nullára végződik.

5126 Akkor tartalmazza a legkevesebb jegyet, ha a lehető legtöbb 9-es szerepel benne. A keresett szám $39999\ldots99$, tehát összesen 223 darab 9-est tartalmaz.

5127 Ha a lehető legkevesebb jegyet akarjuk felhasználni:

$$2000 = 2^4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5,$$

a másodikból adódik a kisebb szám: 25 558.

5128 *a)* $\dfrac{100}{73} = 1{,}3698$, tehát 37%-kal kell felemelni az árat.

b) $0{,}73 \cdot 0{,}7 = 0{,}511$, tehát 51,1% lesz.

c) $0{,}73 \cdot 1{,}45 = 1{,}0585$, tehát 105,85%-a lesz az ár az akció előtti árnak.

5129 Mindkét alkalommal a $75 + 60 - 100 = 35\%$ volt jelen.

Csak az első színházlátogatáson 40%, csak a másodikon 25% vett részt.

5130 36% az 54 ember, a teljes létszám 150 fő.

5131 *a)* 198 400 Ft; *b)* 61,29%; *c)* 163,16%.

5132 *a)* $\dfrac{11}{9}$; *b)* 2; *c)* $\dfrac{215}{99}$; *d)* $\dfrac{593}{1110}$.

5133 *a)* $1623 \cdot 623 - 623^2 = 623 \cdot (1623 - 623) = 623\,000$;

b) $1956^2 - 956^2 = (1956 - 956) \cdot (1956 + 956) = 2\,912\,000$;

c) $\dfrac{314^2 - 196}{328} = \dfrac{(314 + 14) \cdot (314 - 14)}{328} = 300.$

Számelmélet, oszthatóság – megoldások

5134 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Igaz.

5135 *a)* 15-tel való oszthatóság:

(1) szükséges, de nem elegendő feltétel például:

– a számjegyek összege osztható legyen 3-mal;

– 0-ra vagy 5-re végződjön az adott szám.

(2) elegendő, de nem szükséges feltétel: az adott szám osztható legyen 30-cal.

(3) szükséges és elegendő feltétel: osztható legyen 3-mal és 5-tel is.

b) 45-tel való oszthatóság:

(1) szükséges, de nem elegendő feltétel: az adott szám 0-ra vagy 5-re végződjön.

(2) elegendő, de nem szükséges feltétel: az adott szám osztható legyen 90-nel.

(3) szükséges és elegendő feltétel: a számjegyek összege osztható legyen 9-cel, és 0-ra vagy 5-re végződjön az adott szám.

c) 12-vel való oszthatóság:

(1) szükséges, de nem elegendő feltétel: az utolsó 2 számjegyből álló kétjegyű szám osztható legyen 4-gyel.

(2) elegendő, de nem szükséges feltétel: az adott szám osztható legyen 36-tal.

(3) szükséges és elegendő feltétel: a számjegyek összege osztható legyen 3-mal, és az utolsó 2 számjegyből álló kétjegyű szám osztható legyen 4-gyel.

5136 *a)* Minden olyan pozitív egész, mely a 15-höz relatív prím: $a \neq 3k$, $a \neq 5l$, $k, l \in \mathbb{Z}^+$.

b) $a = 24$; 72; 120; … 24 páratlan számú pozitív többszöröse.

c) $a = 20$ vagy $a = 60$.

d) $a = 3$; 6; 12; 24; 48.

5137 Határozzuk meg a számláló és a nevező legnagyobb közös osztóját.

a) $(126; 294) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $\quad \dfrac{126}{294} = \dfrac{(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 3}{(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 7} = \dfrac{3}{7}$;

b) $\dfrac{30}{49}$; *c)* $\dfrac{19}{23}$; *d)* $\dfrac{9}{64}$; *e)* $\dfrac{5}{6}$; *f)* $\dfrac{128}{3}$.

5138 *a)* Keressük [60; 72] legkisebb közös többszörösét, ezért prímtényezős bontásukat alkalmazzuk:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 72 = 3^2 \cdot 2^3, \quad [60; 72] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

Így az eredeti kifejezés átalakítható:

$$\frac{7}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{5}{3^2 \cdot 2^3} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} - \frac{5 \cdot 5}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{42}{360} - \frac{25}{360} = \frac{17}{360}.$$

b) Az *a)* feladathoz hasonló eljárással: $[14; 5; 21] = 210$.

Az eredeti kifejezés átalakítása:

$$\frac{3}{2 \cdot 7} - \frac{2}{5} + \frac{8}{3 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{8 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{41}{210}.$$

5139 *a)* A esetén: □ bármilyen természetes szám.

B esetén: Az egyik jel helyére pl. □ 2 többszörösei kell, hogy kerüljenek, így a másik jel helyére bármely természetes szám kerülhet.

C esetén: Az egyik jel (pl. △) helyére 3 többszörösei kerülnek, a másik jel helyére bármilyen természetes szám kerülhet.

b) A esetén: □ helyére 5 többszörösei kell, hogy kerüljenek.

B esetén: Az egyik jel helyére 2 többszörösei, a másik jel helyére bármely természetes szám kerülhet.

C esetén: Mindkét jel helyére bármely természetes szám írható.

5140 *a)* $11 \cdot 2 \cdot 5$-szöröse; *b)* $2 \cdot 13 \cdot 5$-szöröse; *c)* $11 \cdot 2$-szerese; *d)* $2 \cdot 5$-szöröse;
e) 11-szerese; *f)* 1-szerese; *g)* $11 \cdot 5$-szöröse; *h)* $13 \cdot 5$-szöröse.

5141 Prímtényezős bontásból eredve: $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, a kitevők eggyel növelt szorzata adja a pozitív osztók számát: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ pozitív osztója van a 60-nak.

Ellenőrzés felsorolással: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60.

5142 *a)* 39; *b)* 46; *c)* 322.

5143 *a)* 10111101100_2; *b)* 113230_4; *c)* 22031_5.

5144 *a)* $a = 0$ vagy $a = 8$;

b) Ha $x = 0$, akkor y lehetséges értékei: $y = 1;\ 4;\ 7$.
Ha $x = 5$, akkor y lehetséges értékei: $y = 2;\ 5;\ 8$.

c) Ha $a = 0$, akkor b lehetséges értékei: $b = 0;\ 3;\ 6;\ 9$.
Ha $a = 4$, akkor b lehetséges értékei: $b = 2;\ 5;\ 8$.
Ha $a = 8$, akkor b lehetséges értékei: $b = 1;\ 4;\ 7$.

5145 Mivel a legkisebb ötjegyű szám: $10\,000 = 19 \cdot 526 + 6$, ezért a megfelelő szám a $10\,005$.

5146 Relatív prímek: 297 és 800, illetve 297 és 560.

Van három olyan szám, például: $(210; 297; 560) = 1$; $(210; 297; 800) = 1$; $(297; 560; 800) = 1$.

5147 Minden más prím ötszöröse páratlan, ahhoz egyet adva páros, összetett számot kapunk, tehát nincs más a feltételnek megfelelő prímszám.

5148 A 28-nak a 28-adik hatványával osztható.

5149 *a)* A kitevők párosak, tehát négyzetszám.

b) Van páratlan kitevő, tehát nem négyzetszám.

c) $8^{42} \cdot 9^7 \cdot 25^9 = 2^{126} \cdot 3^{14} \cdot 5^{18}$, tehát négyzetszám.

5150 *a)* A szám osztható 3-mal.

b) A szám osztható 3-mal.

c) A szám osztható 5-tel.

5151 *a)* A szám páros és osztható 5-tel, tehát 0-ra végződik.

b) A szorzat páratlan és osztható 5-tel, tehát 5-re végződik.

c) Az első hét prímszám között a 2 és az 5 is szerepel, tehát 0-ra végződik.

5152 Ha $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 51$, akkor $a_1 + d = 17$. Mivel mindhárom tag prímszám, a következő megoldások lehetségesek:

$$a_1 = 11,\ \text{ekkor}\ d = 6, \quad \text{vagy} \quad a_1 = 5,\ \text{ekkor}\ d = 12, \quad \text{vagy} \quad a_1 = 3,\ \text{ekkor}\ d = 14.$$

5153 *a)* $10^{53} + 8 = 1\underbrace{0000\ldots0}_{53\text{ db}} + 8 = 1\underbrace{000\ldots0}_{53\text{ db}}8$. A számjegyek összege 9, tehát osztható 9-cel.

b) $10^{10} - 4 = 1\underbrace{000\ldots0}_{10\text{ db}}$

$$\begin{array}{r} 1\underbrace{000\ldots0}_{10\text{ db}} \\ -\qquad 4 \\ \hline \underbrace{99\ldots99}_{9\text{ db}}6 \end{array}$$

$\underbrace{99\ldots99}_{9\text{ db}}6$. A számjegyek összege osztható 3-mal, tehát $10^{10} - 4$ osztható 3-mal.

c) lásd a *b)* feladatot: $10^{10} - 4$ osztható 3-mal és $10^{10} - 4$ páros, ezért osztható 2-vel is. Ebből következik, hogy a szám osztható 6-tal.

5154 *a)* Az utolsó jegy 0, a szám osztható 5-tel és 2-vel.

b) A szám csak 9-es és 3-as jegyeket tartalmaz, összegük osztható 3-mal, a szám is osztható 3-mal.

c) A szám utolsó három jegye 872, ezért osztható 8-cal.

5155 Anna 20 percenként, Bea 25 percenként ér fel. Mivel $[20; 25] = 100$, ezért legközelebb 10 óra 10 perckor fognak találkozni.

5156 Mivel $15 = 3 \cdot 5$ és $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, a következő számpárok felelnek meg:

a	$3 \cdot 5 = 15$	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	$3^3 \cdot 5 = 135$	$2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$
b	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 1350$	$3^3 \cdot 5^2 = 675$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$	$3 \cdot 5^2 = 75$

5157 Jövőre Félix $3p$ éves lesz, és tudjuk, hogy $21 \le 3p \le 71$, ezért $7 \le p \le 23$. A szóba jöhető prímek háromszorosait vizsgálva Félix életkora idén 38 év lehet.

5158 Az első szám az adott időszakban 10, a második pedig 01-től 59-ig bármi lehet. A 10-hez relatív prím minden olyan szám, amely nem osztható sem 2-vel sem 5-tel, ezek második jegye 1; 3; 7 vagy 9. 1-től 59-ig 24 ilyen szám van. Tehát a valószínűség: $\frac{24}{59} \approx 0,4$.

5159 Ha a szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel és 5-tel. Ha 10 darab osztója van, a prímtényezős felbontása lehet p_1^9 vagy $p_1 \cdot p_2^4$. Az első típus nem jöhet szóba, mert 2 és 5 is osztója.
A második típusból a legkisebb: $5 \cdot 2^4 = 80$.

5160 $302 = 6 + 5a + 4a^2$ egyenlet pozitív egész megoldása: $a = 8$.

5161 $a = 4, \quad b = 2, \quad c = 3$.

5162 Az átalakítást a következő módon végezzük:

$$A = \frac{n-2}{n+3} = \frac{n+3-5}{n+3} = 1 - \frac{5}{n+3}.$$

5 osztói: ±1 és ±5, így

$$\begin{array}{llll} n+3=1 & \text{esetén:} & n=-2 & \text{és}\ A=-4; \\ n+3=5 & \text{esetén:} & n=2 & \text{és}\ A=0; \\ n+3=-1 & \text{esetén:} & n=-4 & \text{és}\ A=6; \\ n+3=-5 & \text{esetén:} & n=-8 & \text{és}\ A=2. \end{array}$$

5163 *a)* $\dfrac{2n+10}{n+1} = \dfrac{2\cdot(n+1)+8}{n+1} = 2 + \dfrac{8}{n+1}$, n lehetséges értékei: $n = 0;\ 1;\ 3;\ 7.$

b) $\dfrac{3n+5}{n-5} = \dfrac{3\cdot(n-5)+20}{n-5} = 3 + \dfrac{20}{n-5}$, n lehetséges értékei: $n = 6;\ 7;\ 9;\ 10;\ 15;\ 25.$

5164 $11a - 12b = 4(2a - 5b) + 3a + 8b$, ezért osztható 29-cel.

5165 Mivel $(x; y) = 5$, ezért $x = 5m$ és $y = 5n$, ahol $(m; n) = 1$. Így $x + y = 5m + 5n = 200$, amiből $m + n = 40$.

Mivel $(m; n) = 1$, ezért a megfelelő számpárok:

(1; 39), (3; 37), (7; 33), (9; 31), (11; 29), (13; 27), (17; 23), (19; 21), (21; 19),
(23; 17), (27; 13), (29; 11), (31; 9), (33; 7), (37; 3) és (39; 1).

Tehát 16 megfelelő számpár van.

5166 Ha $x = 0$, nem lehet, mert $2^5 = 32$ nem felel meg.

Ha $x \ge 1$, a bal oldal osztható 9-cel, tehát $\overline{259x}$ is osztható 9-cel, ez csak $x = 2$ esetén teljesül. Ez valóban megoldás, mert $2^5 \cdot 9^2 = 2592$.

5167 Legyen a 2^{2010} számjegyeinek száma x, az 5^{2010} számjegyeinek száma y, ami azt jelenti, hogy:

$$10^{x-1} < 2^{2010} < 10^x - 1, \quad \text{illetve} \quad 10^{y-1} < 5^{2010} < 10^y - 1.$$

Összeszorozva a két egyenlőtlenséget:

$$10^{x+y-2} < 2^{2010} \cdot 5^{2010} < (10^x - 1)(10^y - 1).$$

A jobb oldal:

$$(10^x - 1)(10^y - 1) = 10^{x+y} - 10^x - 10^y + 1 < 10^{x+y} - 1.$$

Tehát:

$$10^{x+y-2} < 10^{2010} < 10^{x+y} - 1,$$

az első tag $x + y - 1$ jegyű, a harmadik tag $x + y$ jegyű, amiből következik, hogy $x + y - 1 = 2010$, tehát $x + y = 2011$.

A számjegyek számának összege 2011.

5168 Akkor kapunk prímszámot, ha az egyik tényező 1, a másik pedig prím.

I. eset:

$|n^3 - 63| = 1$, ha $n^3 - 63 = -1$, akkor n nem egész,
ha $n^3 - 63 = 1$, akkor $n = 4$, de $|n^2 - 65| = 49$ nem prím.

II. eset:

$|n^2 - 65| = 1$, ha $n^2 - 65 = 1$, akkor n nem egész,
ha $n^2 - 65 = -1$, akkor $n = 8$, ekkor $|n^3 - 63| = 449$ prím,
$n = -8$, ekkor $|n^3 - 63| = 575$ nem prím.

Tehát $n = 8$ esetén lesz a szorzat értéke prímszám.

5169 Használjuk fel, hogy

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)\left(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 + \ldots + b^{2k}\right).$$

Állítsuk párokba az összeg tagjait:

$$1^{2011} + 2010^{2011}, \quad 2^{2011} + 2009^{2011}, \quad \ldots \quad \text{és így tovább.}$$

Mivel az alapok összegével, 2011-gyel minden összeg, valamint a kimaradó, utolsó tag is osztható, ezért az állítás igaz.

Hatvány, gyök, logaritmus – megoldások

5170 *a)* $16^{-2}\cdot 128^{3}=2^{-8}\cdot 2^{21}=2^{13}$; *b)* $\sqrt{1024}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}=2^{5}\cdot 2^{-2}=2^{3}$;

c) $\dfrac{32^{3}}{\sqrt[3]{512^{5}}}=\dfrac{2^{15}}{2^{15}}=1=2^{0}$; *d)* $\dfrac{\sqrt[4]{256^{-3}}\cdot 4^{-1}}{\sqrt[3]{8^{-7}}\cdot 2^{-5}}=\dfrac{2^{-6}\cdot 2^{-2}}{2^{-7}\cdot 2^{-5}}=2^{4}$.

5171 *a)* $2^{27}\cdot 5^{5}\cdot 7^{4}$; *b)* $2^{7}\cdot 7^{-2}\cdot 5^{-7}$; *c)* 3; *d)* $5^{3}\cdot 3^{8}\cdot 2^{-2}$.

5172 *a)* 2; *b)* 7^{6}; *c)* 1; *d)* $\dfrac{5}{2}$.

5173 *a)* $\dfrac{4+6}{2^{4}}\cdot\dfrac{2^{6}}{5}=2^{3}=8$; *b)* 54; *c)* 3; *d)* 2;

e) 35.

5174 *a)* $\sqrt[24]{a^{29}}$; *b)* $\sqrt[30]{\dfrac{a^{9}}{b^{8}}}$; *c)* $\sqrt[30]{\dfrac{2}{5}}$; *d)* 3.

5175 *a)* $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; *b)* $21+9\sqrt{7}$; *c)* 10.

d) Egyszerűsítés, a nevezők gyöktelenítése, összevonás és a nevezetes azonosságok alkalmazása után:

$$\left[7\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)+6\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\right]\cdot\left(13\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)=1177.$$

e) A *d)* feladathoz hasonlóan:

$$\left(\frac{13}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}-\frac{6}{2\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)}\right)\cdot\left(5\sqrt{8}-8\sqrt{7}\right)=2\left(5\sqrt{8}+8\sqrt{7}\right)\cdot\left(5\sqrt{8}-8\sqrt{7}\right)=-496.$$

5176 *a)* $x>\dfrac{3}{4}$; *b)* $-\dfrac{1}{5}<x<\dfrac{2}{3}$; *c)* $x<-3$ vagy $\dfrac{5}{2}<x$;

d) $x>\dfrac{3}{7},\quad x\neq 1$; *e)* $3<x<7,\quad x\neq 4$; *f)* $\{\}$.

5177 *a)* $\log_{25}\left(\dfrac{1}{5}\right)=-\dfrac{1}{2}\ <\ 3^{-\log_3 7}=\dfrac{1}{7}\ <\ \log_6\sqrt[3]{6}=\dfrac{1}{3}\ <\ 4^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$;

b) $\sqrt[5]{-32}=-2\ <\ 5^{1-\log_5 8}=\dfrac{5}{8}\ <\ 9^{\sin\frac{\pi}{6}}=3\ <\ \log_3 81=4$;

c) $\log_{11}\left(\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt[4]{11}}\right)=\dfrac{1}{4}\ <\ \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)^{-2}=\dfrac{1}{3}\ <\ 13^{\log_8 1}=1\ <\ 100^{\lg 2}=4$.

5178 *a)* $-\dfrac{4}{3}$; *b)* -12; *c)* $-\dfrac{24}{5}$; *d)* -2; *e)* -2; *f)* $-\dfrac{1}{2}$;

g) -6; *h)* $\dfrac{5}{2}$; *i)* $\dfrac{4}{3}$; *j)* -3; *k)* -10; *l)* 9;

m) 0; *n)* $-\dfrac{1}{42}$; *o)* -3; *p)* $-\dfrac{2}{7}$; *q)* $-\dfrac{3}{40}$; *r)* $-\dfrac{1}{4}$;

s) $-\dfrac{7}{6}$; *t)* $\dfrac{5}{12}$; *u)* 0.

5179 *a)* $x=\sqrt{8}$; *b)* $x=64$; *c)* $x=\dfrac{1}{3}$; *d)* $x=3^{-5}$;

e) $x=3^{-5}$; *f)* 2^{-36}; *g)* 5; *h)* $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}$;

i) $2^{-5}=\dfrac{1}{32}$; *j)* 3; *k)* $2^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$; *l)* 3.

5180 *a)* $2^{-11}\cdot 5^{-5}\cdot a^{28}\cdot b^{-9}$; *b)* $a^{\frac{83}{24}}$.

5181 *a)* 3; *b)* $\sqrt{\left(\sqrt{57}+\sqrt{48}\right)\cdot\left(\sqrt{57}-\sqrt{48}\right)}=\sqrt{9}=3$;

c) 2; *d)* $10\sqrt{2}+14$;

e) $\sqrt{27}-\sqrt{2}+\sqrt{27}+\sqrt{2}+2\sqrt{\left(\sqrt{27}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{27}+\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{27}+2\sqrt{25}=6\sqrt{3}+10$;

f) 7;

g) $\left(9\sqrt{3}-15\sqrt{2}+10\sqrt{2}+16\sqrt{3}\right)\cdot\left(15\sqrt{3}+14\sqrt{2}+12\sqrt{3}-9\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=$
$=\left(25\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)\cdot\left(25\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)=625\cdot 3-25\cdot 2=1825$;

h) $8\sqrt{3x}+20\sqrt{3x}-10\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}=14\sqrt{3x}$;

i) $\left(7\sqrt{5}+7\sqrt{5}+7\sqrt{7}-5\sqrt{5}\right)\cdot\left(9\sqrt{5}-7\sqrt{7}\right)=\left(9\sqrt{5}+7\sqrt{7}\right)\cdot\left(9\sqrt{5}-7\sqrt{7}\right)=81\cdot 5-49\cdot 7=62$;

j) $\left(4\sqrt[4]{5}-3\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{2}+3\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(5\sqrt[4]{5}-4\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=$
$=\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt[4]{25}-\sqrt[4]{4}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)=3$;

k) $\left(3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right)=\left(7\sqrt[3]{3}-7\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right)=$
$=7\cdot\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}\right)$;
a^3-b^3 azonossággal: $7(3-5)=7(-2)=-14$.

5182 *a)* $\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}=|1+\sqrt{5}|+|1-\sqrt{5}|=2\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=|1+\sqrt{3}|-|1-\sqrt{3}|=2$.

5183 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis.

5184 *a)* $\log_{64}(\log_2 16\cdot\log_5 25)=\log_{64}(4\cdot 2)=\dfrac{1}{2}$; *b)* $\lg\left(25^{\log_5 2}\cdot 4^{\log_2 5}\right)=\lg(4\cdot 25)=2$;

c) $\log_9\left(4^{\log_{16}25}-7^{\log_{49}16}\right)=\log_9(5-4)=0$;

d) $(\log_{20}4+\log_{20}5)^{\log_4 27}=(\log_{20}20)^{\log_4 27}=1^{\log_4 27}=1$.

5185 *a)* 135; *b)* 30; *c)* 20; *d)* $\frac{9}{4}$;

e) $16^{\log_4 2} = \left(4^{\log_4 2}\right)^2 = 2^2 = 4$; *f)* $2^{3-\log_2 3} = \frac{2^3}{2^{\log_2 3}} = \frac{8}{3}$;

g) $5^{3-\log_5 4} = \frac{5^3}{5^{\log_5 4}} = \frac{125}{4}$; *h)* $10^{1-\lg 3} = \frac{10}{10^{\lg 3}} = \frac{10}{3}$;

i) $16^{\log_4 5} = \left(4^2\right)^{\log_4 5} = \left(4^{\log_4 5}\right)^2 = 5^2 = 25$; *j)* $\sqrt{7}^{\,\log_{49} 2} = \sqrt[4]{\left[\left(\sqrt{7}\right)^4\right]^{\log_{49} 2}} = \sqrt[4]{49^{\log_{49} 2}} = \sqrt[4]{2}$;

k) $16^{\log_2 3} = \left(2^4\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^4 = 3^4 = 81$;

l) $64^{\log_{\sqrt{2}} 2} = \left(\sqrt{2}^{12}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 2} = \left(\sqrt{2}^{\,\log_{\sqrt{2}} 2}\right)^{12} = 2^{12} = 4096$;

m) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5} = \left(2^{-3}\right)^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{-3} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$;

n) $\frac{1}{10^{\lg 2}} + 2^2 \cdot 2^{\log_4 9} = \frac{1}{2} + 4\sqrt{4^{\log_4 9}} = \frac{1}{2} + 4\sqrt{9} = \frac{1}{2} + 12 = \frac{25}{2}$;

o) $\frac{\left(2^3\right)^{\log_4 3}}{\left(2^3\right)^{\log_2 3}} = \frac{\left(2^{\log_4 3}\right)^3}{\left(2^{\log_2 3}\right)^3} = \frac{\left(\sqrt{4^{\log_4 3}}\right)^3}{3^3} = \frac{\sqrt{3}^3}{27} = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9}$;

p) $\frac{8^{\log_{64} 9}}{8^{\log_{\sqrt{8}} 5}} = \frac{\sqrt{64^{\log_{64} 9}}}{\left(\sqrt{8}^{\,\log_{\sqrt{8}} 5}\right)^2} = \frac{\sqrt{9}}{5^2} = \frac{3}{25}$;

q) $\sqrt{10^{6+\lg 36}} = \sqrt{10^6} \cdot \sqrt{10^{\lg 36}} = 10^3 \cdot \sqrt{36} = 6000$;

r) $19 \cdot 19^{\frac{1}{2}\log_{19} 36} = 19 \cdot \left(19^{\log_{19} 36}\right)^{\frac{1}{2}} = 19 \cdot 36^{\frac{1}{2}} = 19\sqrt{36} = 114$;

s) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10^3} = 20$;

t) $\left(5^2\right)^{\log_5 2} \cdot 25 = \left(5^{\log_5 2}\right)^2 \cdot 25 = 4 \cdot 25 = 100$;

u) Az értelmezési tartományon: $\frac{\sqrt[3]{p^9}}{\sqrt[3]{p^{\log_p 8}}} = \frac{p^3}{2}$;

v) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{\log_2 5}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(2^{\log_2 5}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$;

w) $\frac{1}{10^{\lg 2}} + \sqrt{9}^{\log_9 16} - \left(3^{\log_3 2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(9^{\log_9 16}\right)^{\frac{1}{2}} - 2^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{16} - 4 = \frac{1}{2}$.

5186 *a)* $\left(16^{\log_2 3}\right)^{15} = 81^{15} = 3^{60} = \underline{9^{30}}$ $\boxed{<}$ $4^{15} \cdot 5^{30} = \underline{10^{30}}$;

b) $(\log_8 2)^{60} = \left(\frac{1}{3}\right)^{60} = \underline{3^{-60}}$ $\boxed{=}$ $32^{-12 \cdot \log_2 3} = 2^{-60 \cdot \log_2 3} = \underline{3^{-60}}$;

c) $7 \cdot (\lg 2 - \lg 5) = 7 \cdot \lg\left(\frac{2}{5}\right) = \underline{\lg\left(\frac{2^7}{5^7}\right)}$ $\boxed{<}$ $\lg 128 + \lg 5^{-5} = \lg\left(2^7 \cdot 5^{-5}\right) = \underline{\lg\left(\frac{2^7}{5^5}\right)}$;

d) $\sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \underline{\sqrt{12} + 2\sqrt{3}}$ $\boxed{<}$ $-\dfrac{5}{\sqrt{12} - \sqrt{17}} = \sqrt{17} + \sqrt{12} = \underline{\sqrt{17} + 2\sqrt{3}}$;

e) a bal oldal: $\dfrac{60}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \dfrac{60 \cdot \left(3\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}{18 - 3} = 12\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = \underline{7\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}$,

a jobb oldal: $\dfrac{50}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \dfrac{50 \cdot \left(2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{12 - 2} = 10\sqrt{3} + 5\sqrt{2} = \underline{6\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}$, ez a nagyobb;

f) $\dfrac{1}{2^{10}} + \dfrac{1}{3^5 \cdot 2^9} = \dfrac{245}{2^{10} \cdot 3^5} = \underline{\dfrac{490}{2^{11} \cdot 3^5}}$ $\boxed{<}$ $\dfrac{1}{3^4 \cdot 2^3} - \dfrac{1}{2^{11} \cdot 3^4} = \dfrac{255}{2^{11} \cdot 3^4} = \underline{\dfrac{765}{2^{11} \cdot 3^5}}$;

g) $\dfrac{10^{-6} : 10^{10}}{10^3 : 10^4} = \dfrac{10^{-16}}{10^{-1}} = \underline{10^{-15}}$ $\boxed{>}$ $\dfrac{1}{\dfrac{1}{10^{-3} \cdot 10^{-20}}} = \underline{10^{-23}}$.

5187 *a)* $3{,}5 \cdot 10^{-1}$; *b)* $2{,}79 \cdot 10^3$.

5188 *a)* $\dfrac{\sqrt{a}\left(2\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)}{\left(2\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(2\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)} \cdot \dfrac{3\left(2\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)}{2\sqrt{a}} = \dfrac{3}{2}$; *b)* $\dfrac{5}{5\left(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right)}{10\left(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right)} = \dfrac{1}{10}$;

c) $\dfrac{\left(\sqrt{x} - 5\right)\left(\sqrt{x} + 6\right)}{\left(\sqrt{x} + 5\right)\left(\sqrt{x} - 5\right)} : \dfrac{2\sqrt{x} + 12}{\sqrt{x} + 5} = \dfrac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 5} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + 5}{2\left(\sqrt{x} + 6\right)} = \dfrac{1}{2}$.

5189 *a)* A teljes lakosság éves energiaszükséglete $8{,}5 \cdot 10^{15}$ J, ennek 1%-a: $8{,}5 \cdot 10^{13}$ J. Egy turbina 365 nap alatt $40000 \cdot 9 \cdot 3600 \cdot 365 = 4{,}73 \cdot 10^{11}$ J energiát ad. A két érték hányadosa: 179,7, tehát 180 szélturbina megépítésére van szükség.

b) A teljes lakosság éves energiaszükséglete $8{,}5 \cdot 10^{15}$ J, ennek 82%-a: $6{,}97 \cdot 10^{15}$ J.

Mivel egy 1 m^2 területű napkollektor $1800 \cdot 0{,}70 = 1260$ W teljesítményt nyújt, ezért 365 nap alatt $1260 \cdot 11 \cdot 3600 \cdot 365 = 1{,}82 \cdot 10^{10}$ J energiát ad. A két érték hányadosa: $3{,}83 \cdot 10^5$ m^2, tehát ekkora területű napkollektorokra van szükség. ($3{,}83 \cdot 10^5$ m^2 = 0,383 km^2.)

5190 Az $1\,000\,000 = 100\,000 \cdot 1{,}06^x$ egyenlet megoldása: $x = \dfrac{1}{\lg 1{,}06} \approx 39{,}5$. A gyermek 40 éves korára éri el a betét az 1 000 000 forintot.

5191 Átírva 10-es alapú logaritmusra:

$$\frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 4} \cdot \ldots \cdot \frac{\lg (n+1)}{\lg n} = 7,$$

egyszerűsítések után: $\dfrac{\lg(n+1)}{\lg 2} = 7$, amiből $\lg(n+1) = \lg 2^7$, tehát $n = 127$.

5192 Írjuk át a gyököket törtkitevős hatványra, majd alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt[5^n]{\sqrt[5^{n-1}]{\ldots \sqrt[25]{\sqrt[5]{5}}}} = \log_{\frac{1}{5}} \log_5 \left[\left(\left(\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{25}} \ldots\right)\right)^{\frac{1}{5^{n-1}}}\right]^{\frac{1}{5^n}} = \log_{\frac{1}{5}} \log_5 5^{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{5^n}} =$$

$$= \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{5^n}\right) = \log_{\frac{1}{5}} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Műveletek racionális kifejezésekkel – megoldások

5193 *a)* $f(x) = -30x - 34$, behelyettesítve: $f\left(-\frac{7}{3}\right) = 36$;

b) $f(x) = -24x + 120$, behelyettesítve: $f\left(-\frac{7}{3}\right) = 176$;

c) $f(x) = 102x + 5$, behelyettesítve: $f\left(-\frac{7}{3}\right) = -233$.

5194 *a)* Igaz, mert $16a^2 - 24ab + 9b^2 = (4a - 3b)^2$.

b) Nem, mert $4a - 3b = -5$ is lehet.

5195 *a)* $(7 - 5a)(7 + 5a)$;
b) $b(10b + 9)(10b - 9)$;
c) $(c - 12)^2$;
d) $(20 - d)^2$;
e) $5(e - 6)^2$;
f) $f(7 - 4f)^2$.

5196 *a)* $\left(6p^2 + q^2\right)^2$;
b) $(p - q)^2$ vagy $(q - p)^2$;
c) $-(p + 1)^2$;
d) $-(a + 3)^2$;
e) $3a(b + 1)^2$;
f) $(a - 2b)^3$;
g) $(9m + z)(-m - 9z)$;
h) $(m + z - p)(m + z + p)$;
i) $-2m^3z^3(z + 2m)$;
j) $(b - m)(a + k)$;
k) $(m - k)(5a + 1)$.

5197 *a)* $(a - 3)(a + 7)$;
b) $(2b + 5)(b + 3)$;
c) $(4c - 1)(5c - 2)$;
d) $d(6d + 7)(7d + 6)$.

5198 Használjuk a gyöktényezős összefüggést: $a(x - x_1)(x - x_2)$.

a) $\dfrac{2\left(a + \frac{3}{2}\right) \cdot (a + 2)}{-2\left(a + \frac{3}{2}\right) \cdot (a - 4)} = \dfrac{a + 2}{4 - a}$;

b) $\dfrac{(b - 7) \cdot (b - 2)}{6(b + 1) \cdot (b - 2)} = \dfrac{b - 7}{6(b + 1)}$.

5199 *a)* Értelmezés: $a \neq 0$, egyszerűsítés után: $a - 4$;
b) Értelmezés: $b \neq 2$, egyszerűsítés után: $2b$;
c) Értelmezés: $c \neq 4$, egyszerűsítés után: c^3;
d) Értelmezés: $d \neq -7$, egyszerűsítés után: $d - 7$;
e) Értelmezés: $e \neq 12$ és $e \neq -12$, egyszerűsítés után: $\dfrac{1}{e + 12}$;
f) Értelmezés: $f \neq 10$, egyszerűsítés után: $\dfrac{f}{f - 10}$;
g) Értelmezés: $g \neq -6$, egyszerűsítés után: $\dfrac{g - 6}{g + 6}$.

5200 $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \dfrac{1}{x} = 47.$

5201

	Értelmezési tartomány	A művelet eredménye
a)	$a \in \mathbb{R},\quad a \neq -\frac{1}{3},\quad a \neq \frac{1}{3}$	$\frac{a}{3a-1}$
b)	$b \in \mathbb{R},\quad b \neq -\frac{3}{2},\quad b \neq 0,\quad b \neq \frac{3}{2}$	$\frac{2b+3}{5b}$
c)	$c \in \mathbb{R},\quad c \neq -5,\quad c \neq 0,\quad c \neq 5$	1
d)	$d \in \mathbb{R},\quad d \neq -2,\quad d \neq 0$	$d-2$
e)	$e \in \mathbb{R},\quad e \neq -3,\quad e \neq -2,\quad e \neq -\frac{3}{2},\quad e \neq 0,\quad e \neq \frac{4}{3}$	$\frac{(e-1)\cdot(e+2)}{e^2\cdot(e+3)}$
f)	$f \in \mathbb{R},\quad f \neq -\frac{1}{2},\quad f \neq 4$	$3\cdot\left(\frac{2f+1}{f-4}\right)^2$
g)	$g \in \mathbb{R},\quad g \neq 3,\quad g \neq -3,\quad g \neq 0,\quad g \neq 5,\quad g \neq -5$	$\frac{g^2}{(g+3)(g-5)}$
h)	$g, h \in \mathbb{R},\quad g, h \neq 0,\quad h \neq -g$	$\frac{g-h}{2}$
i)	$i \in \mathbb{R},\quad i \neq -3,\quad i \neq -\frac{3}{4}$	$\frac{2(i+3)}{3(i^2-3i+9)}$
j)	$i, j \in \mathbb{R},\quad i \neq -j$	$\frac{5(i-j)}{4(i+j)}$

5202

	Értelmezési tartomány	A művelet eredménye
a)	$x \in \mathbb{R},\quad x \neq -\frac{3}{2},\quad x \neq \frac{3}{2}$	$\frac{6}{9-4x^2}$
b)	$x \in \mathbb{R},\quad x \neq -2,\quad x \neq 2$	$\frac{8x}{4-x^2}$
c)	$a \in \mathbb{R},\quad a \neq \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
d)	$b \in \mathbb{R},\quad b \neq -\frac{5}{2}$	$\frac{b}{10b+25}$
e)	$c \in \mathbb{R},\quad c \neq -6,\quad c \neq 6$	$\frac{2}{c-6}$

	Értelmezési tartomány	A művelet eredménye
f)	$d \in \mathbb{R},\quad d \neq -10,\quad d \neq 10$	-1
g)	$e \in \mathbb{R},\quad e \neq -3,\quad e \neq 3$	$\dfrac{5\left(e+\frac{16}{5}\right)(e-3)}{2(e+3)(e-3)} = \dfrac{5e+16}{2e+6}$
h)	$f \in \mathbb{R},\quad f \neq -3$	$\dfrac{-5}{(f+3)^2}$
i)	$g \in \mathbb{R},\quad g \neq -5,\quad g \neq 2$	$\dfrac{1}{2-g}$
j)	$j \in \mathbb{R},\quad j \neq -2,\quad j \neq 2$	$\dfrac{j^2-20j+8}{(2-j)^2 \cdot (2+j)}$

5203 *a)* $\dfrac{9a^2-4b^2}{30a+20b} = \dfrac{(3a+2b)(3a-2b)}{10(3a+2b)} = \dfrac{1}{2}$;

b) $\dfrac{15a^3}{9a^5-12a^4b+4a^3b^2} = \dfrac{15a^3}{a^3 \cdot \left(9a^2-12 \cdot ab+4b^2\right)} = \dfrac{15a^3}{a^3 \cdot (3a-2b)^2} = \dfrac{3}{5}$.

5204 *a)* $\dfrac{16-2x}{(2-x)(2+x)} = -\dfrac{6}{21} = -\dfrac{2}{7}$; *b)* $\dfrac{6x-2}{5x-2} = \dfrac{28}{23}$.

5205 Ha $a+b+c=0$, akkor $c=-a-b$. Írjuk ezt be a kifejezésbe:

$$a^3 + a^2 \cdot (-a-b) - ab(-a-b) + b^2 \cdot (-a-b) + b^3 =$$
$$= a^3 - a^3 - a^2b + a^2b + ab^2 - ab^2 - b^3 + b^3 = 0.$$

5206 A feltételből: $x^2z + y^2z = y^2x + z^2x$, átrendezve: $xz(x-z) = y^2 \cdot (x-z)$, mivel $x \neq z$, ezért $xz = y^2$, ami annyit jelent, hogy $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z}$.

5207 Alakítsuk át a kifejezést:

$$\left(\frac{k}{3} - \frac{9}{k^2}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k}\right) = \frac{k^3-27}{3k^2} : \frac{k^2+9+3k}{3k^2} = \frac{k^3-27}{k^2+3k+9} = \frac{(k-3)(k^2+3k+9)}{k^2+3k+9} = k-3,$$

ezért ha $k \in \mathbb{Z}^+ \;\Rightarrow\; (k-3) \in \mathbb{Z}$.

Egyenletek, egyenlőtlenségek – megoldások

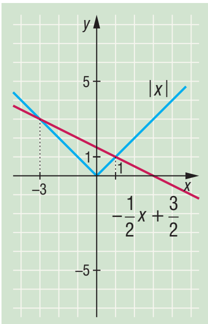
5208 *a)* $x = 26$; *b)* $x = 65$; *c)* $x = \dfrac{27}{11}$; *d)* nincs megoldás;

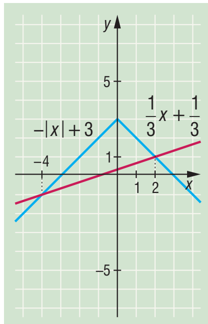
e) $x = \dfrac{6}{25}$; *f)* $x = \dfrac{3}{8}$; *g)* -22; *h)* $\dfrac{25}{12}$;

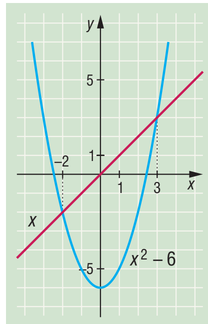
i) $x_1 = 0$ vagy $x_2 = -1$ vagy $x_3 = \dfrac{2}{3}$ vagy $x_4 = 4$; *j)* $x = \dfrac{16}{25}$;

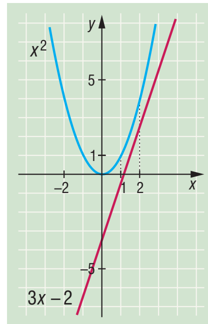
k) $x_1 = -4$ vagy $x_2 = -2$; *l)* $x \neq 15$; $x_1 = 0$ vagy $x_2 = -7$ vagy $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

5209 *a)* $x_1 = -3$, $x_2 = 1$; *b)* $x_1 = -4$, $x_2 = 2$; *c)* $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; *d)* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.









5210 *a)* $x_1 = -3$, $x_2 = 4$; *b)* $x_1 = 4$, $x_2 = \dfrac{6}{5}$; *c)* $x_1 = \dfrac{68}{21}$, $x_2 = \dfrac{46}{21}$.

5211 *a)* $x_1 = \dfrac{5}{2}$, $x_2 = -\dfrac{5}{7}$;

b) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $x_1 = \dfrac{4}{3}$, $x_2 = -1$;

c) $x_1 = \dfrac{11}{10}$, $x_2 = -\dfrac{3}{2}$;

d) $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = -\dfrac{7}{5}$;

e) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$; $x_1 = 7$, $x_2 = 3$;

f) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$; $x_1 = 0$, $x_2 = -4$;

g) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; $x_1 = 2$, $x_2 = -6$;

h) $x_1 = 0$, $x_2 = 9$;

i) $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$;

j) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$;

k) $x_1 = 0$, $x_2 = -10$;

l) $x_1 = 2$, $x_2 = -4$;

m) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$; azonosság;

n) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$; $x = 5$;

o) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

5212 *a)* Például: $x^2 - 2x - 15 = 0$;

b) például: $15x^2 + 7x - 2 = 0$;

c) a két gyök 2 és 8, tehát például: $x^2 - 10x + 16 = 0$;

d) a másik gyök: $x_2 = 3 + \sqrt{7}$, tehát például: $x^2 - 6x + 2 = 0$.

5213

	Az egyenlet			Az egyenlet	
	alaphalmaza	**megoldása**		**alaphalmaza**	**megoldása**
a)	$x \geq \frac{3}{5}$	$x = \frac{7}{5}$	**b)**	$x \leq \frac{8}{3}$	$x = -\frac{8}{3}$
c)	$x < 0$ vagy $x \geq \frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{7}$	**d)**	$\varnothing$	nincs
e)	$x \geq \frac{5}{7}$	$x = 4$	**f)**	$x \geq \frac{1}{2}$	nincs
g)	$x \in \mathbb{R}$	$x_1 = 6, \quad x_2 = -6$	**h)**	$x \geq \frac{3}{8}$	$x = \frac{5}{8}$
i)	$x \in \mathbb{R}$	$x = -4$	**j)**	$\varnothing$	nincs
k)	$x \leq 20$	$x = 20$	**l)**	$x \in \mathbb{R}$	$x = -2$ és $y = -\frac{2}{3}$
m)	$y \geq 1$	$x = \frac{5}{3}$	**n)**	$-5 \leq x \leq 5$	$x = 4$

5214 *a)* $x = 5$; *b)* $x = \frac{11}{4}$; *c)* $x = \frac{18}{13}$; *d)* 26; *e)* $x = \frac{2}{5}$; *f)* $x = 3$;

g) $x = 1$; *h)* $x = \frac{9}{2}$; *i)* $x = \frac{16}{5}$; *j)* $x = -3$; *k)* $x = -\frac{1}{6}$; *l)* $x = 4$;

m) $x = \frac{7}{2}$.

5215

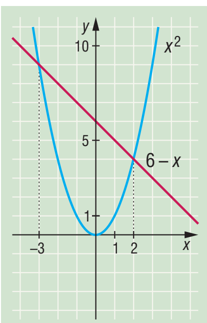
	Az egyenlet		
	alaphalmaza	**kapott gyök(ök)**	**megoldása**
a)	$x > -\frac{1}{2}$	$x = 40$	$x = 40$
b)	$x > -\frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{5}$	$x = -\frac{1}{5}$
c)	$\varnothing$	nincs	nincs
d)	$x > 4$	$x > 4$	$x > 4$
e)	$x > \frac{1}{2}, \quad x \neq 1$	$x = 3$	$x = 3$

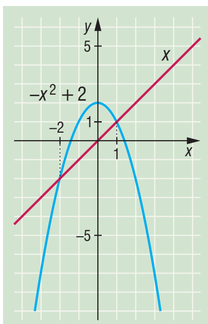
	Az egyenlet		
	alaphalmaza	**kapott gyök(ök)**	**megoldása**
f)	$x > 2, \quad x \neq 3$	$x_1 = 0, \quad x_2 = 5$	$x = 5$
g)	$x > \frac{2}{3}$	$x_1 = 2, \quad x_2 = 1$	$x_1 = 2, \quad x_2 = 1$
h)	$x > 4$	$x_1 = 7, \quad x_2 = -1$	$x = 7$
i)	$x > \frac{2}{7}$	$x = 6$	$x = 6$

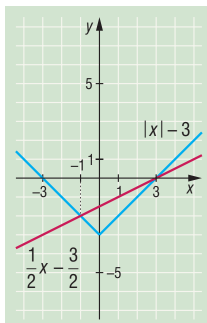
5216 *a)* $x_1 = \frac{4\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}$; *b)* $x_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{4\pi}{3}$; *c)* $x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}$;

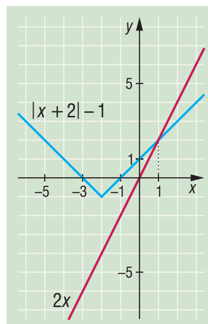
d) $x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{7\pi}{6}$; *e)* $x_1 = \frac{\pi}{32}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{32}$; *f)* $x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{7\pi}{30}$.

5217 *a)* $x \leq -3$ vagy $2 \leq x$; *b)* $-2 \leq x \leq 1$; *c)* $-1 < x < 3$; *d)* $x \leq 1$.









5218 *a)* $[-2; \infty[$; *b)* $\left]-\infty; -\frac{11}{9}\right]$; *c)* $\left]\frac{19}{4}; \infty\right[$;

d) $\left]-\infty; -\frac{13}{8}\right[$; *e)* $\left]-\infty; \frac{1}{6}\right[$; *f)* $\left]-\frac{7}{13}; \infty\right[$;

g) $]-1; 4[$; *h)* $\left]-\infty; -\frac{8}{7}\right] \cup \left[\frac{10}{7}; \infty\right[$.

5219 *a)* $x \geq \frac{11}{3}$; *b)* $x > -\frac{2}{5}$; *c)* $x \leq \frac{17}{8}$;

d) $x < -\frac{3}{2}$; *e)* $x \leq \frac{5}{2}$; *f)* $x > \frac{2}{3}$;

g) $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$; *h)* $x \geq -2$; *i)* $x < 1$.

5220

	Az egyenlőtlenség			Az egyenlőtlenség	
	alaphalmaza	**megoldása**		**alaphalmaza**	**megoldása**
a)	$x > 0$	$x \geq 10\,000$	*b)*	$x > 0$	$x > \frac{1}{5}$
c)	$x > 0$	$0 < x \leq \sqrt{7}$	*d)*	$x < 10$	$x < 9{,}5$
e)	$x < -5$ vagy $x > 5$	$x \geq \sqrt{26}$ vagy $x \leq -\sqrt{26}$	*f)*	$x > \frac{3}{5}$	$x \geq 6$
g)	$x > \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} < x < \frac{6}{5}$	*h)*	$x > \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} < x \leq \frac{6}{5}$
i)	$x < -3$ vagy $x > 3$	$-2 < x < -\sqrt{3}$ vagy $\sqrt{3} < x < 2$			

5221 *a)* Eredetileg 36 darabot vitt ki a piacra.
b) 5 darabot adott Mari néninek.

5222 A gondolt szám legyen x. Ekkor a kapott számok: $8 + x$, $5 + x$, $3 + x$. A gondolt szám az 1.

5223 A $3x + 5x = 200$ egyenlet alapján a számok: 75 és 125.

5224 A $7(x - 6) = 4x - 6$ egyenlet alapján a fiú 12 éves, az apa pedig 48.

5225 A táblázat segítségével a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} x - 4 &= 6(y - 4) \\ x + 5 &= 3(y + 5) \end{aligned}\right\},$$

amiből kapjuk, hogy $x = 40$ és $y = 10$.
Tehát Szonja most 10 éves, az anyukája pedig 40.

Időpont	Anya	Szonja
4 éve	$x - 4$	$y - 4$
most	x	y
5 év múlva	$x + 5$	$y + 5$

5226 *a)* 4 évvel ezelőtt volt Móricka anyukája 4-szer annyi idős, mint ő (mert ekkor ő 8, anyukája pedig 32 éves volt).
b) 12 év múlva lesz Móricka anyukája 2-szer annyi idős, mint a fia. Ekkor életkoruk 24 és 48 év lesz.

5227 Ha a számjegyek x és $10 - x$, a $10x + (10 - x) - 72 = 10(10 - x) + x$ egyenlet alapján a keresett szám 91.

5228 A gondolt szám a 63.

5229 A $31x + 12 = 32(x - 1) - 4$ egyenlet megoldásából: 48 sort jelölt ki, és 1500 facsemetét fog elültetni.

5230 Ha a számok $x + 100$ és x, akkor a $4 = \dfrac{x + 100 - 4}{x}$ egyenlet alapján a két szám 132 és 32.

5231 48 nap alatt végez 5 munkás napi 3 óra munkával.

5232 Még 5 órát kell Andrásnak egyedül dolgoznia.

5233 2 g szükséges a 92%-os kénsavból.

5234 *a)* 17 órakor találkoznak.

b) Bálint 8 km-t, Gábor 4 km-t tett meg a találkozásukig.

5235 *a)* Mivel a tehervonat 5 órakor indult, és 4 óra 48 percet töltött úton, 9 óra 48 perckor érte utol az IC, mert az 8 órakor indult, de csak 1 óra 48 percet töltött úton.

b) 144 km-t tettek meg találkozásukig.

5236 Ha tegnap x km-t futott: $x - 7 = \frac{x+3}{3}$, amiből adódik, hogy tegnap 12 km-t, ma 15 km-t futott.

5237 *a)* Az $\frac{x}{5} + \frac{x}{8} = 1$ egyenlet megoldása: $x = \frac{40}{13}$. Körülbelül 9 óra 5 perckor végeznek.

b) Az $\frac{1,5}{8} + \frac{x}{5} = 1$ egyenlet megoldása: $x = \frac{32,5}{8}$. Körülbelül 10 óra 4 perckor végez az újabb gép a takarítással.

c) Az $\frac{2}{5} + \frac{x}{8} = 1$ egyenlet megoldása: $x = 4,8$. Pontosan 10 óra 48 perckor végeznek.

5238 *a)* 40 km.

b) A kerékpárosoknak elég délután fél háromkor elindulni.

5239 *a)* Az $52x = 28(x+3)$ egyenlet megoldásából: 3,5 liter alkoholra van szükség. (➡)

b) Az $52 \cdot 3 = (x+3) \cdot 30$ egyenlet megoldásából: 2,2 liter tiszta víz kell.

c) Az $52x = 3 \cdot 28$ egyenlet megoldásából: 1,62 liter alkohol és 1,38 liter víz összekeverése lesz megfelelő.

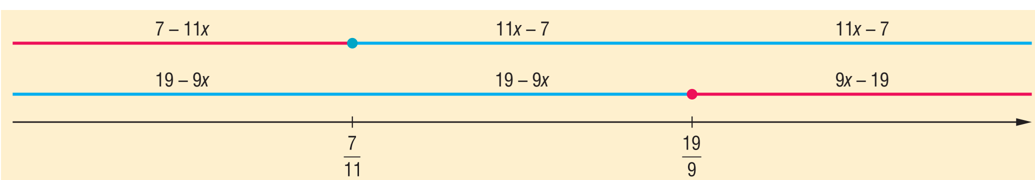
	%	Liter	Σ
Alkohol	52	x	$52x$
Víz	0	3	0
Keverék	28	$x + 3$	$28(x + 3)$

5240 Csak az lehet, hogy az alap $3x$, a szár $7x$, ekkor a kerület $17x = 221$. Innen a háromszög alapja 39 cm, a szára 91 cm.

5241 *a)* Az abszolút érték értelmezése alapján:

$$|11x - 7| = \begin{cases} 11x - 7, & \text{ha} \quad 11x - 7 \ge 0, \quad \text{azaz} \quad x \ge \frac{7}{11}, \\ 7 - 11x, & \text{ha} \quad 11x - 7 < 0, \quad \text{azaz} \quad x < \frac{7}{11}; \end{cases}$$

$$|19 - 9x| = \begin{cases} 19 - 9x, & \text{ha} \quad 19 - 9x \ge 0, \quad \text{azaz} \quad \frac{19}{9} > x, \\ 9x - 19, & \text{ha} \quad 19 - 9x < 0, \quad \text{azaz} \quad \frac{19}{9} \le x. \end{cases}$$



Ha $x < \frac{7}{11}$, akkor $7 - 11x = 19 - 9x \Rightarrow x = -6$;

Ha $\frac{7}{11} \le x < \frac{19}{9}$, akkor $11x - 7 = 19 - 9x \Rightarrow x = 1{,}3$;

Ha $x \ge \frac{19}{9}$, akkor $11x - 7 = 9x - 19 \Rightarrow x = -6$, ami nem felel meg a feltételnek.

Az egyenlet megoldása: $x_1 = -6$, $x_2 = 1{,}3$.

	A vizsgált tartomány	Az egyenlet	
		alakja, gyöke	megoldása
b)	$x < -\frac{26}{3}$	$14 - 3x = -3x - 26$, nincs gyök	nincs
	$-\frac{26}{3} \le x < \frac{14}{3}$	$14 - 3x = 3x + 26 \Rightarrow x = -2$	$x = -2$
	$x \ge \frac{14}{3}$	$3x - 14 = 3x + 26$, nincs gyök	nincs
c)	$x \ge -\frac{13}{5}$	$5x + 13 = \frac{x + 65}{5} \Rightarrow x = 0$	$x_1 = 0$
	$x < -\frac{13}{5}$	$-5x - 13 = \frac{x + 65}{5} \Rightarrow x = -5$	$x_2 = -5$
d)	$x \ge \frac{3}{2}$	$2x - 3 = -9 - 8x \Rightarrow x = -0{,}6$	nincs
	$x < \frac{3}{2}$	$-2x + 3 = -9 - 8x \Rightarrow x = -2$	$x = -2$
e)	$x \ge \frac{11}{4}$	$4x - 11 = 2x - 7 \Rightarrow x = 2$	nincs
	$x < \frac{11}{4}$	$-4x + 11 = 2x - 7 \Rightarrow x = 3$	nincs
f)	$x < -\frac{1}{3}$	$-x + 2 - 3x - 1 = 5 \Rightarrow x = -1$	$x_1 = -1$
	$-\frac{1}{3} \le x < 2$	$-x + 2 + 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = 1$	$x_2 = 1$
	$2 \le x$	$x - 2 + 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = 1{,}5$	nincs

	A vizsgált tartomány	Az egyenlet	
		alakja, gyöke	megoldása
g)	$x < -2$	$-x - 2 + 5 - x = 10 \;\Rightarrow\; x = -3{,}5$	$x_1 = -3{,}5$
	$-2 \le x < 5$	$x + 2 + 5 - x = 10$, nincs gyök	nincs
	$x \ge 5$	$x + 2 + x - 5 = 10 \;\Rightarrow\; x = 6{,}5$	$x_2 = 6{,}5$
h)	$x < 3$	$3 - x - (4 - x) = 2x + 1 \;\Rightarrow\; x = -1$	$x = -1$
	$3 \le x < 4$	$x - 3 - (4 - x) = 2x + 1$, nincs gyök	nincs
	$x \ge 4$	$x - 3 - (x - 4) = 2x + 1 \;\Rightarrow\; x = 0$	nincs
i)	$x \ge 0$	$5x + 13 = \frac{x + 65}{5} \;\Rightarrow\; x = 0$	$x = 0$
	$x < 0$	$5x + 13 = \frac{-x + 65}{5} \;\Rightarrow\; x = 0$	nincs
j)	$x \ge 0$	$5x + 13 = \frac{x + 89}{5} \;\Rightarrow\; x = 1$	$x = 1$
	$x < 0$	$5x + 13 = \frac{-x + 89}{5} \;\Rightarrow\; x = \frac{12}{13}$	nincs
k)	$x < 0$	$3(5 - x) + (-x) = 25 \;\Rightarrow\; x = -2{,}5$	$x_1 = -2{,}5$
	$0 \le x < 5$	$3(5 - x) + x = 25 \;\Rightarrow\; x = -5$	nincs
	$x \ge 5$	$3(x - 5) + x = 25 \;\Rightarrow\; x = 10$	$x_2 = 10$
l)	$\lvert x - 1\rvert - 6 = 5$	$\lvert x - 1\rvert = 11 \;\Rightarrow\; x = 12$ vagy $x = -10$	$x_1 = 12,\; x_2 = -10$
	$\lvert x - 1\rvert - 6 = -5$	$\lvert x - 1\rvert = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$ vagy $x = 0$	$x_3 = 2,\; x_4 = 0$

5242 *a)* Behelyettesítve x értékét, a $2a^2 - 16a + 24 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai: $a_1 = 2$, $a_2 = 6$.

b) Az egyenlet diszkriminánsa: $D = 9a^2 - 4(2a^2 - a - 1) = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2 \geq 0$. Tehát minden valós paraméter érték esetén lesz valós megoldása az egyenletnek.

5243 *a)* Egy oldalra rendezve és kiemelve: $(x+1)[2(2x+1)(2x+3) - (x+2)(x+3)] = 0$.

Ebből $(x+1)(7x^2 + 11x) = 0$, megoldásai: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -\frac{11}{7}$.

b) Az egyenlet alaphalmaza: $x \leq -8$ vagy $x \geq 4$.

Megoldások: $x_1 = -8$, $x_2 = 4$, illetve az $x^2 - 3x - 10 = 0$ egyenletből: $x_3 = 5$ (az $x_4 = -2$ nem felel meg a feltételeknek).

c) Az $x - 2 = a$ jelölést bevezetve az $a^2 - 5a + 6 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei: $a_1 = 3$, $a_2 = 2$. Ebből: $x_1 = 5$, $x_2 = 4$.

d) A *c)* feladathoz hasonlóan az $x^2 + x = a$ jelölést bevezetve: $a^2 - 2a - 24 = 0$. Ennek gyökei: $a_1 = 6$, $a_2 = -4$. Ebből:

$$\text{vagy } x^2 + x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2,\ x_2 = -3,$$
$$\text{vagy } x^2 + x + 4 = 0, \text{ nincs megoldás.}$$

e) Az $x^2 + x + 1 = a$ jelölést bevezetve: $a(a+1) - 30 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 30 = 0$. Az egyenlet gyökei: $a_1 = 5$, $a_2 = -6$, amiből:

$$\text{vagy } x^2 + x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2},$$
$$\text{vagy } x^2 + x + 7 = 0, \text{ nincs megoldás.}$$

5244 *a)* Az $\frac{n(n-3)}{2} = 252$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 24$, $n_2 = -21$. A sokszögnek 24 oldala van.

b) Az $\frac{n(n-3)}{2} = n + 250$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 25$, $n_2 = -20$. A sokszögnek 25 oldala van.

c) Az $\frac{n(n-1)}{2} = 465$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 31$, $n_2 = -30$. A sokszögnek 31 oldala van.

5245

	A vizsgált tartomány	Az egyenlet	
		átrendezésének módja, gyöke	megoldása
a)	$x \geq -\frac{3}{2}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$	$x = 3$
b)	$x \leq \frac{4}{5}$	négyzetre emelés után: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{9}$	$x = \frac{4}{9}$
c)	$x \geq \frac{4}{13}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 8$, $x_2 = 1$	$x_1 = 8$, $x_2 = 1$
d)	$x \geq -\frac{9}{7}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 0$, $x_2 = 4{,}75$	$x = 4{,}75$
e)	$x \geq \frac{7}{4}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$	nincs

	A vizsgált tartomány	Az egyenlet	
		átrendezésének módja, gyöke	**megoldása**
f)	$x \geq -\frac{1}{8}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$	$x = 0$
g)	$x > 3$	beszorzás és négyzetre emelés után: $x_1 = 4$, $x_2 = 12$	$x = 12$
h)	$x \leq -3$ vagy $x \geq \frac{1}{2}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 1$, $x_2 = -4$	$x = 1$
i)	$x \in \mathbb{R}$	a gyökvonások elvégzése után: $\lvert x-3 \rvert + \lvert x+4 \rvert = 11$, amiből $x_1 = -6$, $x_2 = 5$	$x_1 = -6$, $x_2 = 5$
j)	$x \geq 4$	két négyzetre emelés után: $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{13}{3}$	$x = 5$
k)	$x \geq 0$	átszorozva és rendezve: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -1$	nincs
l)	$x > 3$	beszorzás és rendezés után: $x_1 = 7$, $x_2 = -1$	$x = 7$
m)	$x \geq 0$	a $\sqrt{x} = a$ új változó bevezetésével: $x = 16$	$x = 16$
n)	$-5 < x \leq 4$	átszorzás és négyzetre emelés után: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$	$x_1 = 3$, $x_2 = -4$

5246 *a)* $x = 0$;

b) $x = 4$;

c) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -4$;

d) $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 3$;

e) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$;

f) $x_1 = 2$; $x_2 = -4$;

g) $x = \frac{1}{2}$;

h) $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{3}{2}$;

i) $x = \frac{1}{6}$;

j) $x = \frac{1}{3}$;

k) $x = 1$;

l) alaphalmaz: $x \geq 0$; $x_1 = 0$, $x_2 \approx 0{,}4$;

m) alaphalmaz: $x \geq 0$; $x_1 = \frac{1}{16}$, $x_2 = 0$;

n) $x = \frac{7}{2}$;

o) alaphalmaz: $x \geq -1$; $x = -\frac{8}{9}$;

p) $x = 2$.

5247 *a)* Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{7}{5}$. Az $\frac{5x-7}{3x+9} = 9$ egyenlet gyöke: $x = -4$, ez nem megoldás.

b) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{1}{2}$. A $\frac{3x^2+8}{2x-1} = 5x+6$ egyenlet gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Csak az $x = 1$ megoldása az eredeti egyenletnek.

c) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{3}{2}$. A $(2x+3)^2 = (4x+1)(2x-3)$ egyenlet gyökei: $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Csak az $x = 6$ megoldása az eredeti egyenletnek.

d) Az egyenlet alaphalmaza: $\frac{11}{3} < x < 14$. A $14 - x = \frac{(2x-4)^2}{3x-11}$ egyenlet gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{34}{7}$. Mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek.

e) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{14}{9}$. A $(9x-14)(3x+10) = 100$ egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{20}{9}$, $x_2 = -4$. Csak az $x = \frac{20}{9}$ megoldása az eredeti egyenletnek.

f) Az egyenlet alaphalmaza: $x > -\frac{8}{23}$. A $\frac{23x+8}{(4x+4)^2} = \frac{1}{4}$ egyenlet gyökei: $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{4}$. Mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek.

g) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 0$. A $\lg x$-re másodfokú egyenletből $\lg x_1 = 3$, $\lg x_2 = -1$, a megoldások: $x_1 = 1000$, $x_2 = 0{,}1$.

h) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 0$, $x \neq 0{,}1$, $x \neq 10^5$. A $\lg x$-re másodfokú egyenletből $\lg x_1 = 3$, $\lg x_2 = 2$, a megoldások: $x_1 = 1000$, $x_2 = 100$.

i) Az egyenlet alaphalmaza: $x > -1$; $x \neq 0$. A logaritmus definíciója alapján $2x^2 + 1 = (x+1)^2$, aminek gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$. Csak az $x = 2$ megoldás.

j) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$. A logaritmus azonosságait felhasználva kapjuk a $6x^2 - 23x - 35 = 0$ egyenletet, amelynek gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{7}{6}$. Csak az $x = 5$ megoldás.

k) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 2$. A megoldás $x = 4$.

l) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 0$, $x \neq 1$. A megoldás $x = 2$.

m) Az egyenlet alaphalmaza: $x > -2$. A megoldás $x = 1$.

n) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 4$. A megoldás $x = 8$.

5248 *a)* Az első egyenlet gyökei: $x_1 = 8$, $x_2 = 2$; a második egyenleté: $x_1 = 8$, $x_2 = -3$. Mindkét egyenletnek megoldása: $x = 8$.

b) Az első egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$, gyökei: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, de csak az első felel meg. A második egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Mindkét egyenlet megoldása: $x = \frac{3}{2}$.

5249 *a)* $x_1 = \pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$;

b) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$;

c) $x_1 = \frac{5\pi}{12}$, $x_2 = -\frac{7\pi}{12}$;

d) $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$, $x_4 = -\frac{5\pi}{6}$;

e) $x_1 = \frac{\pi}{12}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{4};$

f) $x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{18};$

g) $x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{12};$

h) $x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{\pi}{9}.$

5250 *a)* $x_1 = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{9} + l \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad k, l \in \mathbb{Z};$

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad x_2 = \frac{7\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k, l \in \mathbb{Z};$

c) $x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z};$

d) $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

e) $x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z};$

f) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad x_2 = -\frac{2\pi}{3} + l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z};$

g) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z};$

h) $x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

5251 *a)* A másodfokú egyenletből $\sin x = 1$, azaz $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

vagy $\sin x = -\frac{1}{2}$, amiből $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$

b) A másodfokú egyenletből $\cos x = \sqrt{3}$, aminek nincs megoldása;

vagy $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$

c) Mivel $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, a másodfokú egyenletből $\cos x = 1$, azaz $x_1 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

vagy $\cos x = \frac{1}{2}$, amiből $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$

d) Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, a másodfokú egyenletből $\sin x = 4$, aminek nincs megoldása;

vagy $\sin x = \frac{1}{2}$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$

e) Az egyenlet alaphalmaza: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Beszorzás és szorzattá alakítás után $\sin x = 0$, amiből $x_1 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

vagy $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, amiből $x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$

f) Az egyenlet alaphalmaza: $x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Beszorzás és szorzattá alakítás után $\sin x = 0$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

vagy $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$

g) Az egyenlet alaphalmaza: $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Átszorzás és az $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ helyettesítés után $\cos^2 x - \cos x = 0$, amiből $\cos x \cdot (\cos x - 1) = 0$. Ez két esetben teljesül: ha $\cos x = 0$ vagy $\cos x = 1$.

Ha $\cos x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, de az értelmezési tartomány miatt $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Ha $\cos x = 1 \;\Rightarrow\; x_2 = 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$

h) A $\cos^3 x - \cos^2 x = 0$ egyenletből kiemeléssel kapjuk: $\cos^2 x \cdot (\cos x - 1) = 0$, ami teljesül, ha $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ vagy $\cos x = 1 \Rightarrow x_2 = 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

i) Ha $\cos x \neq 0$, leoszthatunk vele, így:

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{3} = \mathrm{tg}^2 x \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = |\mathrm{tg}\, x|,$$

ami csak akkor teljesül, ha $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ vagy $x_2 = \frac{5\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

Megjegyzés: Ha $\cos x = 0$, akkor $\sin x = 0$-nak is teljesülni kellene, ez pedig nem lehetséges.

j) Kéttényezős szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ekkor $\cos x = 0$ vagy $\mathrm{tg}\, x = 0$. A $\mathrm{tg}\, x$ miatt az alaphalmaz: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Ha $\cos x = 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, nem teljesülhet, ha $\mathrm{tg}\, x = 0$, akkor $x = l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$, ez jó megoldás.

k) Mivel $\cos x \neq 0$, mert ekkor $\sin x = 0$ kellene, hogy legyen, de ez nem lehetséges, ezért: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Osszuk el az egyenletet $\cos^2 x$-szel: $\mathrm{tg}^2 x + 3 \cdot \mathrm{tg}\, x - 4 = 0$ egyenletet kapjuk, amiből $\mathrm{tg}\, x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, vagy $\mathrm{tg}\, x = -4 \Rightarrow x_2 \approx -1{,}33 + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

l) Az egyenlet alaphalmaza: $\mathrm{ctg}\, x$ miatt $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
A bal oldalon a $\mathrm{ctg}^2 x$, a jobb oldalon pedig a 3 kiemelése után: $\mathrm{ctg}^2 x(1 + \mathrm{ctg}\, x) = 3(1 + \mathrm{ctg}\, x)$.
Szorzattá alakítás után: $(\mathrm{ctg}^2 x - 3)(1 + \mathrm{ctg}\, x) = 0$. Ha a szorzat első tagja 0, akkor:

$$\mathrm{ctg}\, x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ és } x_2 = \frac{5\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z};$$

ha a második tagja 0, akkor:

$$\mathrm{ctg}\, x = -1 \Rightarrow x_3 = -\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

5252 *a)* $x \in \left]3; +\infty\right]$;

b) $x \in \left]-\frac{1}{2}; \infty\right[$;

c) $x \in \left]-\frac{7}{2}; \frac{3}{5}\right[$;

d) $x \in \left]-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup \left]\frac{3}{8}; \infty\right[$;

e) $x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup \left]3; \infty\right[$;

f) $x \in \left[-10; \frac{3}{2}\right[$;

g) $x \in \left]-\infty; -9\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; \infty\right[$;

h) $x \in \left]-1; \frac{1}{3}\right[$.

5253 *a)* $x \in \left]-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right[$;

b) $x \in \left[\frac{6}{11}; \frac{4}{5}\right]$;

c) $x \in \left]-\infty; \frac{16}{7}\right]$;

d) $x \in \mathbb{R}$.

5254 *a)* $x \in \left]-\infty; -3\right[\cup \left]2; \infty\right[$;

b) $x \in \left]-\frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right[$;

c) $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{4}; \infty\right[$;

d) $x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 3\right[$;

e) $x \in \left]-4; 1\right[$;

f) $x \in \left]-2; -\frac{2}{3}\right] \cup \left]\frac{5}{2}; \infty\right[$;

g) $x \in \left[-\frac{5}{3}; -1\right[\cup \left]7; \infty\right[$;

h) $x \in \left[-2; 0\right[\cup \left[6; \infty\right[$;

i) $x \in \left]-\infty; -4\right[\cup \left]-4; 4\right[$;

j) $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[2; 3\right[\cup \left]5; \infty\right[$;

k) $x \in \left[-5; -3\right[\cup \left]4; 6\right]$;

l) $x \in \left]-\infty; -3\right] \cup \left]-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \cup \left]5; \infty\right[$;

m) $x \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left[\frac{7}{3}; 3\right[$;

n) $x \in \left]-\infty; -4\right[\cup \left[-1; 1\right[\cup \left[2; \infty\right]$;

o) $x \in \left]1; \frac{5}{3}\right[\cup \left]2; 3\right[$;

5255 *a)* Az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{1}{4} < x < \frac{11}{3}$, a keresett halmaz: $\{0; 1; 2; 3\}$.

b) Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{3}{4} \le x \le 8$, a keresett halmaz: $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

5256 A $100 < \frac{n(n-3)}{2} < 200$ egyenlőtlenség-rendszer első része: $0 < n^2 - 3n - 200$, ennek megoldása: $n < -12{,}72$ vagy $n > 15{,}72$.

A második egyenlőtlenség: $n^2 - 3n - 400 < 0$, ennek megoldása: $-18{,}56 < n < 21{,}56$.

A pozitív számok halmazán az egyenlőtlenségek közös megoldása: $15{,}72 < n < 21{,}56$.

A lehetséges sokszögek és a keresett szögek nagysága:

Oldalszám	16	17	18	19	20	21
Szögek nagysága	157,5°	≈ 158,82°	160°	≈ 161,05°	162°	≈ 162,86°

5257 *a)* $x \in \left[\frac{9}{5}; \infty\right[$;

b) $x \in \left[-19; \infty\right[$;

c) $x \in \left]-\infty; -2\right] \cup \left[\frac{5}{2}; \infty\right[$;

d) $x \in \left]\frac{3 + \lg 5}{7}; \infty\right[$.

e) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > \frac{3}{7}$. A megoldás: $\frac{3}{7} < x < \frac{8}{3}$.

f) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 1$. A megoldás: $x > 1$.

g) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > \frac{4}{3}$. A megoldás: $\frac{4}{3} < x \le 2$.

h) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 2$. A megoldás: $x \ge 3$.

i) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 4\frac{1}{4}$. A megoldás: $x > 6$.

j) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 4$, $x \neq 5$. A megoldás: $x > 5$.

k) Megoldás: $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$.

l) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $\frac{1}{3} < x < 3$. A megoldás: $\frac{1}{3} < x \leq 1$.

m) Megoldás: $x > -1$.

n) Megoldás: $0 < x < 1$.

5258 *a)* Az egyenlőtlenség megoldása $-\frac{1}{3} \leq x \leq 4$, az adott intervallumon: $2 \leq x \leq 4$.

b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x > \frac{7}{5}$. A logaritmus azonosságait felhasználva a $2x^2 - 17x + 21 < 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, ennek megoldása: $\frac{3}{2} < x < 7$, ami benne van az értelmezési tartományban. Az adott intervallumon a megoldás: $2 \leq x \leq 5$.

5259 *a)* $x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$;

b) $x \in \left[0; \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$;

c) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$;

d) $x \in \left[0; \frac{19\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{24}; \frac{43\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{47\pi}{24}; 2\pi\right]$;

5260 Minden feladatnál használjuk a Viète-formulákat.

a) Kérdés $x_1^2 + x_2^2$ értéke. Használjuk fel, hogy $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Ekkor a Viète-formulákkal nyert $x_1 + x_2 = 11$ és $x_1x_2 = 3$ helyettesítése után $121 - 2 \cdot 3 = 115$-öt kapunk eredményül.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$ és $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$. Az $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ szorzattá alakítása után helyettesítéssel kapjuk az eredményt:

$$x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{15}{4}.$$

c) Kérdés $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ értéke. Ezt átalakítva kapjuk (lásd *b)* feladat):

$$\frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{5}{2} : \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{5}{7}.$$

d) Alkalmasan válasszuk másik gyökként az első konjugáltját: $x_2 = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$. Ekkor:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{6}{2} \qquad \text{és} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

amiből leolvashatjuk, hogy $a = 2$, $b = -6$, $c = 1$.

Helyettesítés után a keresett másodfokú egyenlet: $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

5261 *a)* Legyen $a = x^2 - 3x - 15$, az $a + 2 - \frac{15}{a} = 0$ egyenlet megoldásai: $a_1 = -5$, $a_2 = 3$.

Visszahelyettesítve az $x^2 - 3x - 10 = 0$ és $x^2 - 3x - 18 = 0$ egyenleteket kapjuk. Ezek megoldásai: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ és $x_3 = 6$, $x_4 = -3$.

b) Csoportosítsuk a tagokat:

$$\left(x - 2 \cdot \sqrt{x-1}\right) + \left(2y - 2 \cdot \sqrt{2y-1}\right) + \left(3z - 2 \cdot \sqrt{3z-1}\right) = 0.$$

Mindegyik zárójelben egy-egy teljes négyzet áll:

$$\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{2y-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3z-1} - 1\right)^2 = 0.$$

A bal oldal értékkészlete miatt a megoldás: $x = 2$, $y = 1$, $z = \frac{2}{3}$.

c) Értelmezés: $-1 \le x \le 1$, $x \ne 0$. A jobb oldal ilyen x-ek esetén: $13 \le 14 - \sqrt{1 - x^2} \le 14$.

A bal oldal $7\left(x + \frac{1}{x}\right)$, csak akkor van megoldás, ha $x > 0$. Ekkor viszont $7\left(x + \frac{1}{x}\right) \ge 14$.

Csak akkor van megoldás, ha mindkét oldal 14-gyel egyenlő, tehát $x = 1$.

d) Értelmezés: $x < 3$ vagy $x > 5$. Vezessünk be új változót, legyen $y = \log_3(x^2 - 8x + 15)$. Ekkor az egyenlet: $y^2 - (\log_3 35 + 1)y + \log_3 35 = 0$, megoldásai: $y_1 = 1$, $y_2 = \log_3 35$. Ezekből $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ és $x_3 = -2$, $x_4 = 10$. Mindegyik megoldása az egyenletnek.

5262 Ha $x = 1$, akkor $y = 1$. Ha $x = 2$, nincs megoldás. Ha $x = 3$, akkor $y = 3$. Ha $x = 4$, nincs megoldás. Ha $x \ge 5$, akkor $x!$ nullára végződik, tehát az $1! + 2! + 3! + \ldots + x!$ összeg 3-ra végződik, ami nem lehet egy négyzetszám utolsó jegye.

Tehát a megoldás: $x = 1$, $y = 1$ és $x = 3$, $y = 3$.

Egyenletrendszerek – megoldások

5263 A keresett számok: 33; 8; 14. Segítségül:

5264 *a)* $x = -2$, $y = -7$;

b) $x = 5$, $y = \frac{1}{3}$;

c) $x = \frac{2}{5}$, $y = -3$;

d) $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{7}{3}$;

e) $x = -\frac{1}{5}$, $y = -\frac{9}{5}$;

f) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$;

g) $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{2}$;

h) $x = 0$, $y = \frac{5}{3}$;

i) $x_1 = 4$, $y_1 = 8$, $x_2 = 8$, $y_2 = 4$;

j) $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $x_2 = \frac{11}{5}$, $y_2 = -\frac{2}{5}$;

k) $x = 1$, $y = 2$;

l) $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = 4$;

m) $x = 4$, $y = \frac{1}{2}$;

n) $x = 10$, $y = 100$;

o) $x = 4$, $y = 8$.

5265 Ha a meggy ára x, a cseresznye ára y, akkor a $\left.\begin{array}{r}3x+5y=1980\\5x+3y=1860\end{array}\right\}$ egyenletrendszert kell megoldanunk: $x=210$, $y=270$.

Tehát a meggy ára 210 Ft/kg, a cseresznye ára 270 Ft/kg.

5266 A következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{array}{r}x=y+40\\\dfrac{1}{5}\cdot(x+y)=40\end{array}\right\}.$$

Ennek megoldásából a személyautó sebessége $120\ \dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, a kamioné $80\ \dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

5267 Az $\left.\begin{array}{r}y=19x+5\\y+30=21x+9\end{array}\right\}$ egyenletrendszert megoldva: $x=13$, $y=252$.

Tehát a 252-t és a 282-t osztottuk, és a hányados mindkét esetben 13.

5268 *a)* Az első egyenletet szorzattá alakítjuk:

$$(x+y)(x-y)+(x-y)=20 \quad\Rightarrow\quad (x-y)(x+y+1)=20 \quad\Rightarrow\quad x-y=4.$$

Ezt megoldva az $x+y=4$ egyenlettel, adódik a megoldás: $x=4$ és $y=0$.

b) $x_1=\dfrac{1}{2}$, $y_1=-3$ és $x_2=-1$, $y_2=\dfrac{3}{2}$.

c) $x_1=17$, $y_1=2$ és $x_2=-39{,}4$, $y_2=-35{,}6$.

d) A második egyenletet 2-vel szorozva, majd hozzáadva az első egyenlethez:

$$(x+y)^2=9, \quad \text{amiből} \quad |x+y|=3.$$

Ebből a következő egyenletrendszerekhez jutunk:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=3\\xy=2\end{array}\right\} \quad \text{és} \quad \left.\begin{array}{r}x+y=-3\\xy=2\end{array}\right\}.$$

Az első egyenletrendszerből: $x_1=1$, $y_1=2$ és $x_2=2$, $y_2=1$; a második egyenletrendszerből: $x_3=-2$, $y_3=-1$ és $x_4=-1$, $y_4=-2$.

e) $x_1=3$, $y_1=12$, $x_2=-3$, $y_2=-12$, $x_3=6\sqrt{2}$, $y_3=3\sqrt{2}$, $x_4=-6\sqrt{2}$, $y_4=-3\sqrt{2}$.

f) Helyettesítsük az $y-4=a$ és $x+1=b$ változókat. Az így kapott

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{a}{b}=3\\ab=12\end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $a_1=6$, $b_1=2$ és $a_2=-6$, $b_2=-2$. Ebből a megoldásokra adódik: $x_1=1$, $y_1=10$ és $x_2=-3$, $y_2=-2$.

g) $x_1=7$, $y_1=-5$, $x_2=\dfrac{4}{3}$, $y_2=-\dfrac{11}{9}$.

h) Átalakítva az egyenleteket, azt kapjuk, hogy:

$$\left.\begin{array}{r}xy(x-y)=-12\\xy+(x-y)=4\end{array}\right\}.$$

Vezessük be az $xy = a$ és $x - y = b$ változókat. Ekkor:

$$\left.\begin{aligned} ab &= -12 \\ a + b &= 4 \end{aligned}\right\},$$

ennek a megoldásai: $a_1 = 6,\ b_1 = -2$ és $a_2 = -2,\ b_2 = 6.$ Ebből a megoldásokra adódik:

$$x_1 = \sqrt{7} - 1,\quad y_1 = \sqrt{7} + 1;\qquad x_2 = -1 - \sqrt{7},\quad y_2 = 1 - \sqrt{7};$$
$$x_3 = \sqrt{7} + 3,\quad y_3 = \sqrt{7} - 3;\qquad x_4 = 3 - \sqrt{7},\quad y_4 = -3 - \sqrt{7}.$$

5269 *a)* $x = 5,\quad y = -1.$

b) $x = 3,\quad y = 5.$

c) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > -1,\ y > 3.$ Gyökei: $x_1 = 2,\ y_1 = 7;\ x_2 = -3{,}4,\ y_2 = -2,$ de csak az első számpár a megoldás.

d) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > 0,\ y > 0.$ Megoldás: $x = 27,\ y = 512.$

e) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > 0,\ y > 0,\ x + y > 1.$ Megoldás: $x_1 = 1,\ y_1 = 2;\ x_2 = 2,$ $y_2 = 1.$

f) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > y$ és $x > -y$ és $x^2 + y^2 > 13.$ Megoldás: $x = 8,\ y = 7.$

g) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $3x > y.$ Megoldás: $x_1 = \dfrac{2}{3},\ y_1 = -8;\ x_2 = -3,\ y_2 = -19.$

h) Megoldás: $x = -2,\ y_1 = \dfrac{1}{400}.$

5270 Legyenek a befogók a és b. A következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 39^2 \\ \frac{ab}{2} &= 270 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek pozitív megoldásai a befogók: 15 cm és 36 cm.

5271 Ha a négyzetek oldala x és y, akkor az $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 724 \\ 3x + 3y + x - y &= 116 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer írható fel.

A megoldások: $x_1 = 26{,}4,\ y_1 = 5{,}2$ és $x_2 = 20,\ y_2 = 18,$ az első esetben nem érdemes földterületekről beszélni.

5272 *a)* Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 7,\ y_1 = 1$ és $x_2 = 3,\ y_2 = 4.$

A két pont: $A(7;\ 1),\ B(3;\ 4),$ távolságuk 5 egység.

b) Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 4,\ y_1 = 1$ és $x_2 = 6,\ y_2 = -3.$

A két pont: $P(4;\ 1),\ Q(6;\ -3),$ távolságuk $PQ = \sqrt{20}$ egység.

5273 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2010 \\ x &= 9y + 9 \\ z &= 9y + 82 \end{aligned}\right\}.$$

A keresett számok: $x = 918,\ y = 101$ és $z = 991.$

5274 Összeadva a két egyenletet: $(x+y)^2 = 16$. Ha $x + y = 4$, akkor az $x(x + 6y) = 27$ egyenletbe helyettesítve az $5x^2 - 24x + 27 = 0$ egyenletet kapjuk, hogy $x_1 = 3$, $y_1 = 1$ és $x_2 = \frac{9}{5}$, $y_2 = \frac{11}{5}$.

Ha $x + y = -4$, akkor az $5x^2 + 24x + 27 = 0$ egyenlethez jutunk, amiből $x_1 = -3$, $y_1 = -1$ és $x_2 = -\frac{9}{5}$, $y_2 = -\frac{11}{5}$.

5275 Ha a fiúk száma x és a lábméretük átlaga y, akkor $xy + (x + 8)(y - 4) = 39{,}5(2x + 8)$, átrendezve és szorzattá alakítva:

$$2xy + 8y - 83x - 348 = 0,$$
$$2y(x + 4) - 83(x + 4) = 16,$$
$$(2y - 83)(x + 4) = 16.$$

Mivel az első tényező páratlan, csak a $2y - 83 = 1$, $x + 4 = 16$ ad megoldást: $x = 12$ és $y = 42$. Tehát 20 lány és 12 fiú jár az osztályba.

5276 Értelmezés: $y, z \neq 0$. Kivonva egymásból a két egyenletet: $-\frac{2}{y} + \frac{2x}{z} = 0$, amiből $z = xy$ $(x \neq 0)$. Visszahelyettesítve: $\frac{x-1}{y} + \frac{x+1}{xy} = 1$. Átalakítás és rendezés után $x^2 + 1 = xy$, amiből $y = x + \frac{1}{x}$.

Mivel az egész számok halmazán keressük, a megoldás: $x_1 = 1$ vagy $x_2 = -1$.

A megoldások: $(1; 2; 2)$ és $(-1; -2; 2)$.

5277 Értelmezés: $x, y, z \neq 0$. A harmadik egyenlet a közös nevezőre hozás után:

$$\frac{x^2 + xy + xz + yz}{xyz} = 0,$$
$$\frac{(x+y)\cdot(x+z)}{xyz} = 0.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha a számláló 0, amiből két eset adódik.

I. eset: $x = -y$.

A második egyenletbe helyettesítve: $z^{2011} = 2^{2011}$, tehát $z = 2$. Az első egyenletbe mindkét eredményt beírva: $2y^4 + 2^4 = 178$, amiből $y_1 = 3$, $y_2 = -3$ és $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

II. eset: $x = -z$.

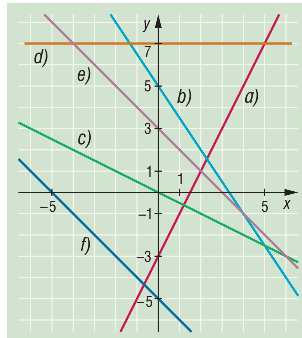
A fenti módszert alkalmazva ezúttal azt kapjuk, hogy $y = 2$. Ekkor a megoldások: $z_1 = 3$, $z_2 = -3$ és $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Tehát az egyenletrendszer megoldásai a $(-3; 3; 2)$, $(3; -3; 2)$, $(-3; 2; 3)$, $(3; 2; -3)$ számhármasok.

FÜGGVÉNYEK – ÖSSZEFOGLALÁS

A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai – megoldások

5278 A függvények grafikonjai az ábrán láthatóak. (➡)



Megjegyzés: Az *e)* feladatban előbb átalakítást végzünk:

$$x \mapsto \frac{6}{2} - \frac{2x}{2} \quad \Rightarrow \quad x \mapsto 3 - x \quad \Rightarrow \quad x \mapsto -x + 3.$$

5279 *a)* c;
b) d;
c) $e \parallel f$;
d) d.

5280 *a)* A lineáris egyenletek általános hozzárendelési szabálya: $x \mapsto mx + b$, vagy másként: $y = mx + b$. Behelyettesítve az $A(3; 1)$, $B(-1; 3)$ koordinátákat x, y helyére:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 3m + b \\ 3 &= -m + b \end{aligned}\right\}, \quad \text{amiből} \quad b = \frac{5}{2} \quad \text{és} \quad m = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{a hozzárendelési szabály: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

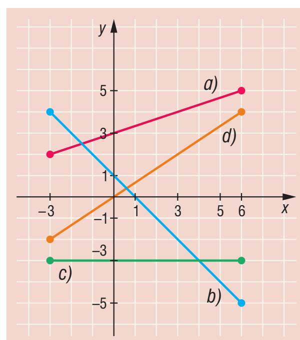
b) Az *a)* feladathoz hasonlóan:

$$b = -2 \quad \text{és} \quad m = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x - 2.$$

c) $y = 3$; *d)* $y = -3x$; *e)* c; *f)* d; *g)* b; *h)* a, d.

5281 *a)* $x \mapsto 5x + 2$; *b)* $x = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$; *c)* $x = -\frac{1}{4}x + 4$; *d)* $x \mapsto 5$.

5282 *a)* Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$, $y \in [2; 5]$.
Zérushely: nincs.
Monotonitás: $m > 0$, $m = \frac{1}{3}$, szigorúan monoton növekvő.



b) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$, $y \in [-5; 4]$.
Zérushely: $x = 1$.
Monotonitás: $m < 0$, $m = -1$ szigorúan monoton csökkenő.

c) Értékkészlet: $y = -3$.
Zérushely: nincs.
Monotonitás: $m = 0$, konstans.

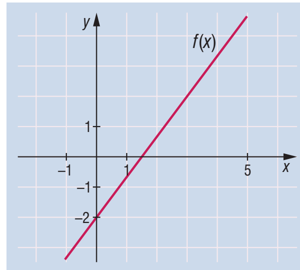
d) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$, $y \in [-2; 4]$.
Zérushely: $x = 0$, egyenes arányosság függvény.
Monotonitás: $m > 0$ $\left(m = \frac{2}{3}\right)$, szigorúan monoton növekvő.

5283 *a)* $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4;$ *b)* $\frac{8+12}{-4} = -5;$ *c)* $x = 3,$ mert: $-\frac{4}{3} \cdot 3 + 4 = 0.$

5284 $f(x) = \frac{4}{3}x - 2.$

Az y tengelyt a $\frac{4}{3} \cdot 0 - 2 = -2$-ből eredő $(0; -2)$ pontban;

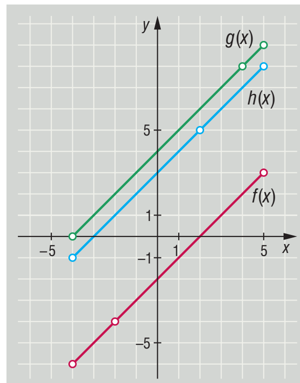
az x tengelyt pedig a $\frac{4}{3}x - 2 = 0$-ból eredő $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ pontban metszi a függvény. (➡)



5285 A, D és E illeszkedik $f(x)$-re;
B, C, D és F illeszkedik $g(x)$-re.

5286 $f(x) = x - 2,$ ha $x \neq -2;$
$g(x) = x + 4,$ ha $x \neq 4;$
$h(x) = x + 3,$ ha $x \neq 2.$

$f(x) > 0,$ ha $x \in \left]2; 5\right[;$
$g(x) > 0,$ ha $x \in \left]-4; 4\right[\cup \left]4; 5\right[;$
$h(x) > 0,$ ha $x \in \left]-3; 2\right[\cup \left]2; 5\right[.$



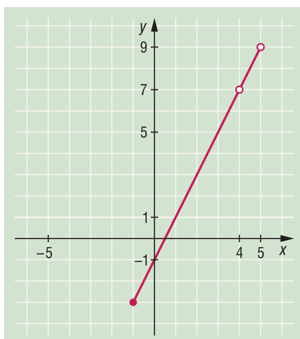
5287 *a)* $x \neq 4.$
Értelmezési tartomány:
$x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}.$

b) Értelmezési tartomány:
$x \in \mathbb{R}.$

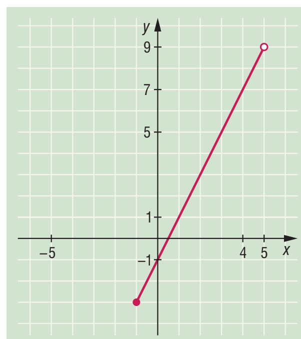
c) Értékkészlet $(y \in \mathbb{R})$:
$y \in \left[-3; 7\right[\cup \left]7; 9\right[.$

d) Értékkészlet $(y \in \mathbb{R})$:
$y \in \left[-3; 9\right[.$

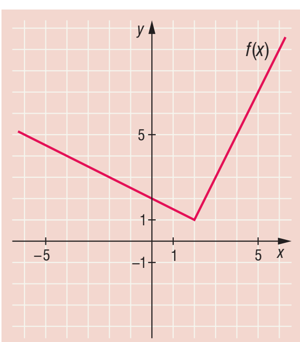
c)



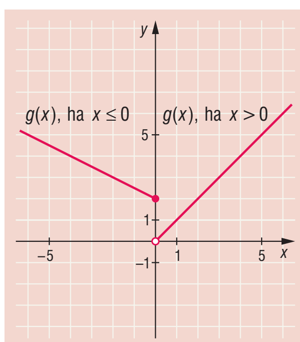
d)



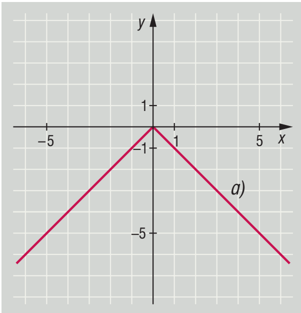
5288 *a)*



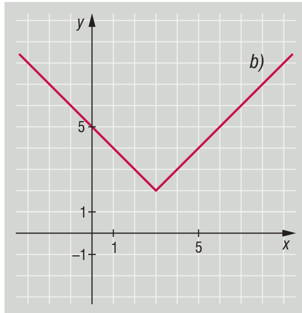
b)



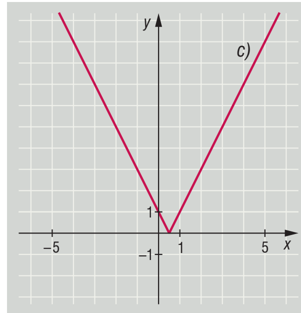
5289 *a)*



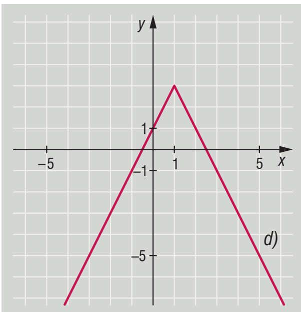
b)



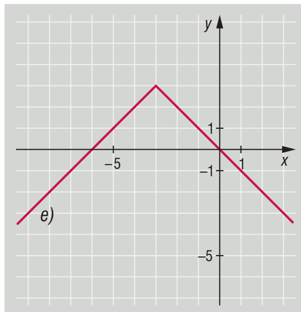
c)



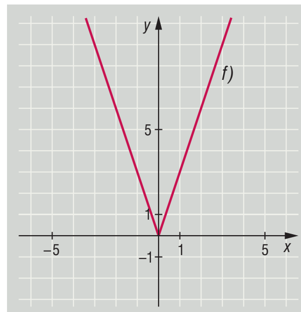
d)



e)



f)



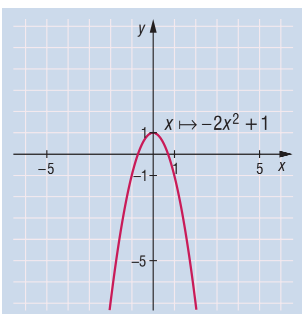
5290 *a)* $f\colon [-3; 5[\to \mathbb{R} \quad f\colon x \mapsto -|x-2|+2;$

b) $y \in [-3; 0[\cup]4; 5[;$

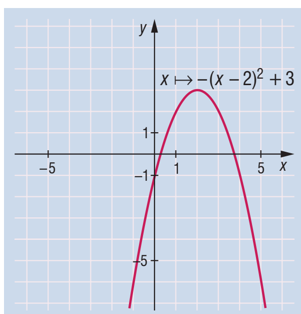
c) $x \in [-3; 2];$

d) 2 zérushelye van $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$ helyeken.

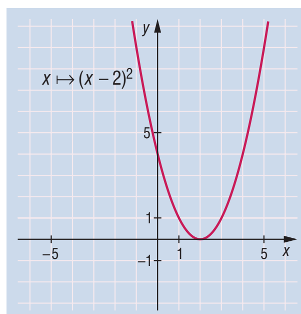
5291 *a)*



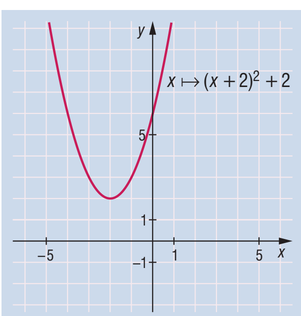
b)



c)



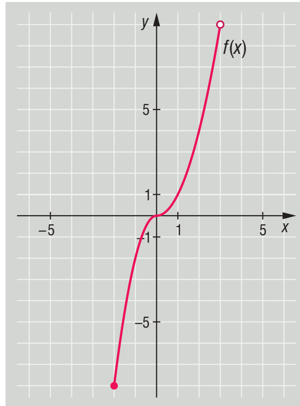
d)



5292 Értékkészlet: $y \in [-8; 9[$.

Zérushely: $x = 0$.

Az értelmezési tartományon szigorúan monoton növekvő.



5293 *a)* $f(x) = -1$ akkor, ha

$$-1 = (x-4)^2 - 2 \quad\Rightarrow\quad 1 = (x-4)^2,$$

amiből $x_1 = 5,\ x_2 = 3$.

Tehát $f(5) = -1$ és $f(3) = -1$.

$g(x) = -1$ akkor, ha

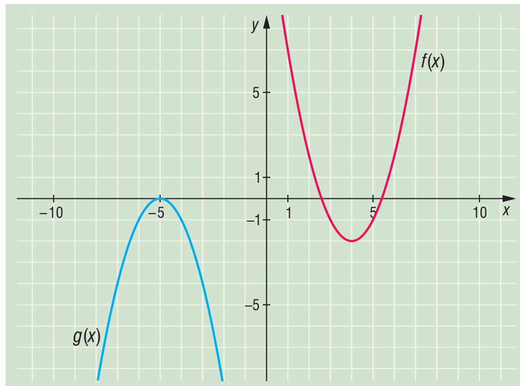
$$-1 = -(x+5)^2 \quad\Rightarrow\quad x_1 = -4,\ x_2 = -6.$$

Tehát $g(-4) = -1$ és $g(-6) = -1$.

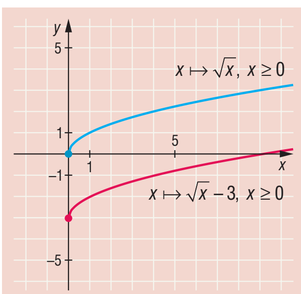
b) A, C és D illeszkedik $f(x)$-re;

B és E illeszkedik $g(x)$-re;

F egyik említett függvényre sem illeszkedik.

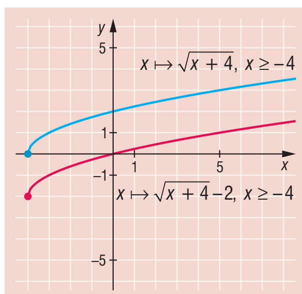


5294 *a)*



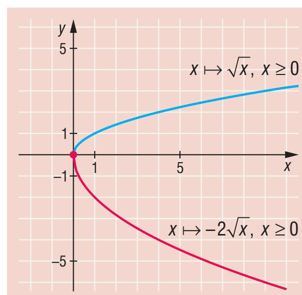
Ért. tartomány: $x \ge 0$.

b)



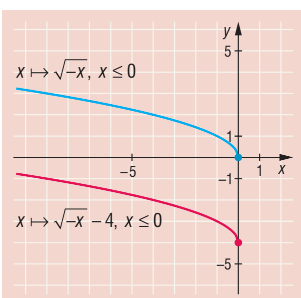
Ért. tartomány: $x \ge -4$.

c)



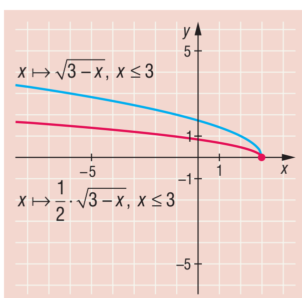
Ért. tartomány: $x \ge 0$.

d)



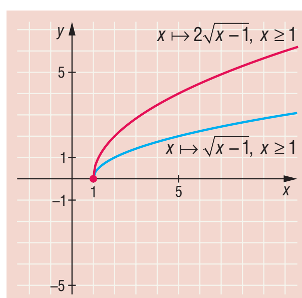
Ért. tartomány: $x \le 0$.

e)



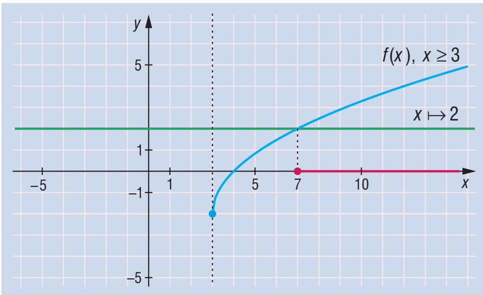
Ért. tartomány: $x \le 3$.

f)



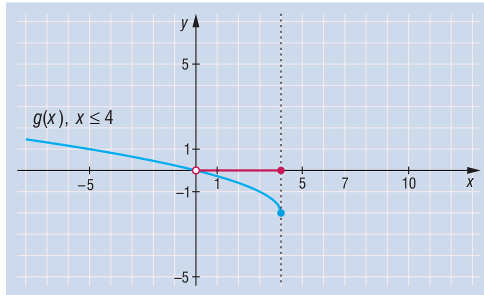
Ért. tartomány: $x \ge 1$.

5295 *a)*



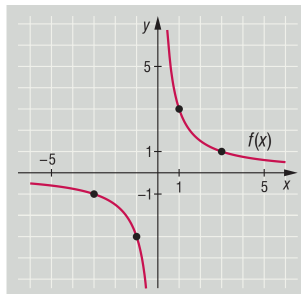
$f(x) \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x \in [7; \infty[.$

b)



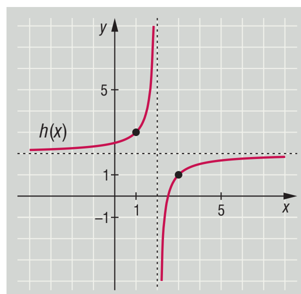
$g(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in]0; 4].$

5296 *a)* $f(x) = 3 \cdot \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$; igen, fordított arányosság.



b) $g(x) = \dfrac{5}{2} - x$; lineáris függvény.

c) $h(x) = -\dfrac{1}{x-2} + 2$ $(x \neq 2)$; igen, fordított arányosság.



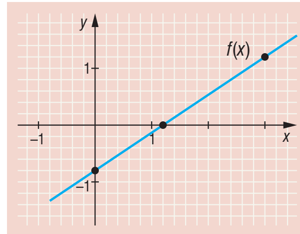
d) $i(x) = \dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}$; ha $x \neq -3 \quad \Rightarrow \quad i(x) = x - 3$; lineáris függvény $(x \neq -3)$.

e) $j(x) = \dfrac{2(x-2)}{3(x-2)}$; ha $x \neq 2 \quad \Rightarrow \quad j(x) = \dfrac{2}{3}$; lineáris függvény, konstans $(x \neq 2)$.

5297 *a)* (4); maximum helye: $x = 2$; maximum értéke: $y = 3$;
b) (4); minimum helye: $x = -1$; minimum értéke: $y = -1$;
c) (3); minimum helye: $x = 2$; minimum értéke: $y = 0$.

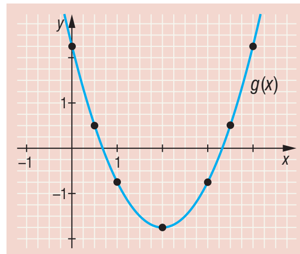
5298 *a)* $(-3; 2)$, $(-6; 4)$, $(0; 0)$;
b) $(2; 6)$, $(0; 0)$, $(4; 4)$;
c) $(7; 6)$, $(0; 1)$, $(21; 16)$;
d) $(12; 3)$, $(4; 1)$, $(39; 6)$.

5299 a) $A\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}\right)$, $C\left(\frac{6}{5}; 0\right)$;



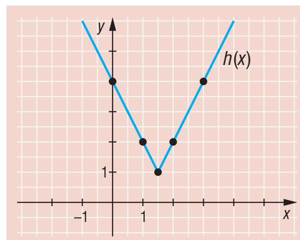
b) $A_1\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B_1\left(4; \frac{9}{4}\right)$, $C\left(-1; \frac{29}{4}\right)$,

$A_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B_2\left(0; \frac{9}{4}\right)$;

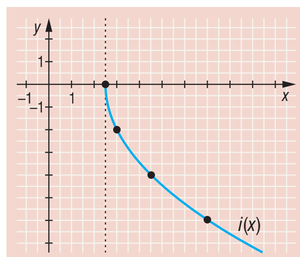


c) $A\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$, $B_1\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$, $C\left(\frac{3}{2}; 1\right)$,

$B_2\left(\frac{7}{2}; 5\right)$;



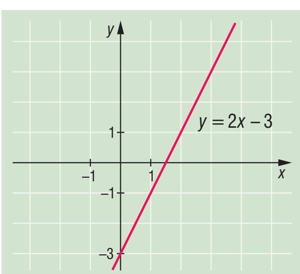
d) $A\left(\frac{1}{2}; \text{nincs megoldás}\right)$, $B(7; -6)$, $C\left(\frac{9}{2}; -4\right)$.



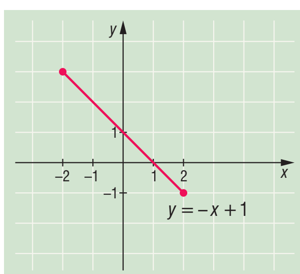
5300 a) g; b) i; c) h; d) f.

5301 a) g; b) f; c) h; d) i.

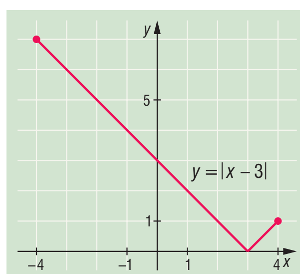
5302 a)



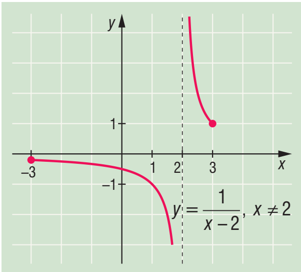
b)



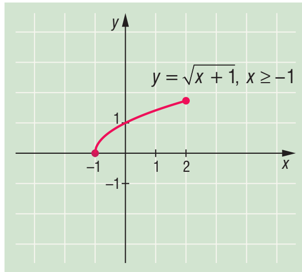
c)



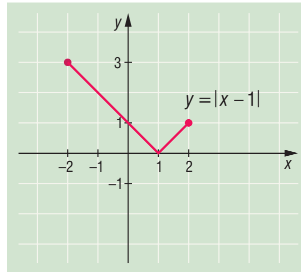
d)



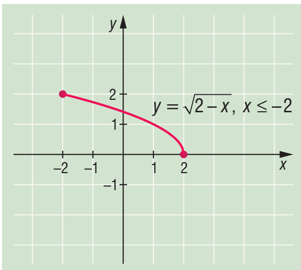
e)



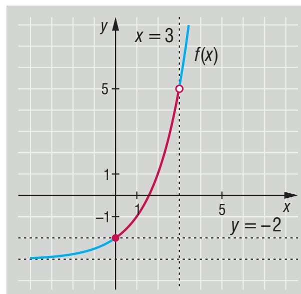
f)



g)



5303 Megoldás: $0 \leq x < 3$; $\quad -2 \leq y < 5$.



5304 *a)* Mivel:

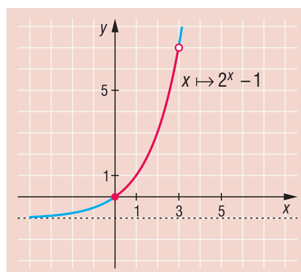
$$x = 3,\ y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = a^x - 1 \quad \Rightarrow \quad 7 = a^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2,$$

a függvény hozzárendelési szabálya:

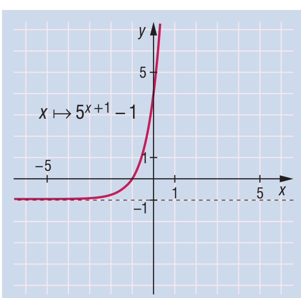
$$x \mapsto 2^x - 1.$$

b) Értékkészlet: $y \in [0; 7[$.

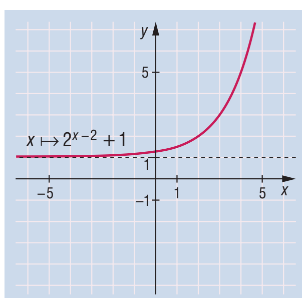
c) Értékkészlet: $y \in [1; 7]$.



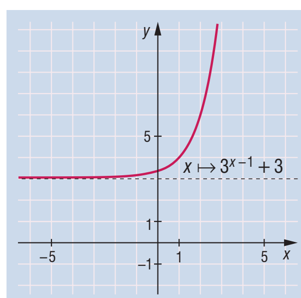
5305 *a)*



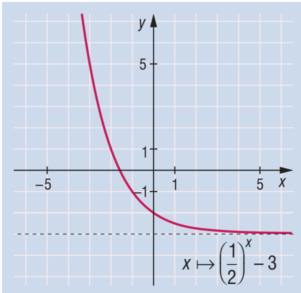
b)



c)



d)



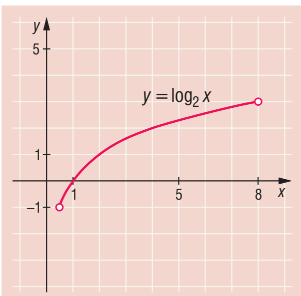
5306 *a)* Behelyettesítve a (9; 2) pontpárt az $y = \log_a x$ hozzárendelésbe, mivel $a > 0$, ezért $a = 3$ adódik. A keresett hozzárendelési szabály: $x \mapsto \log_3 x$.

b) $f(3) = 1$;

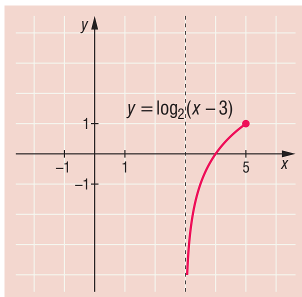
$f(-1)$ nincs értelmezve;

$f(1) = 0$.

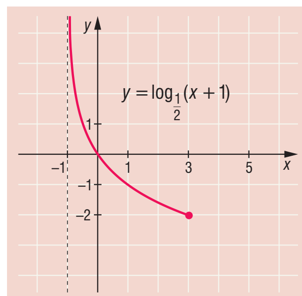
5307 *a)*



b)

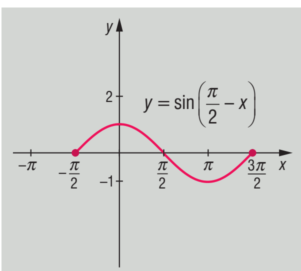


c)

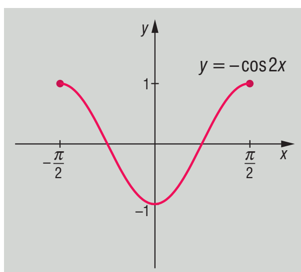


5308 *a)* *i*; *b)* *h*; *c)* *g*; *d)* *f*.

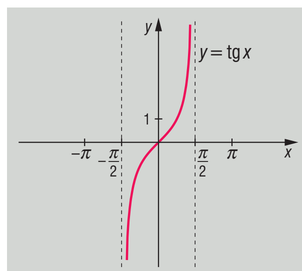
5309 *a)*



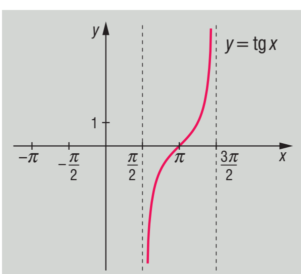
b)



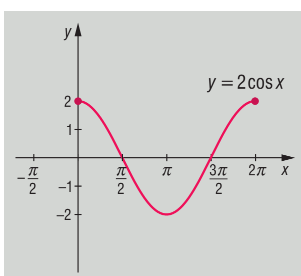
c)



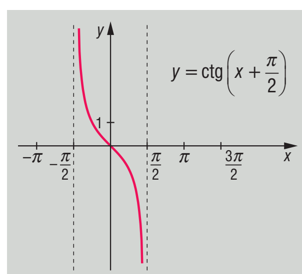
d)



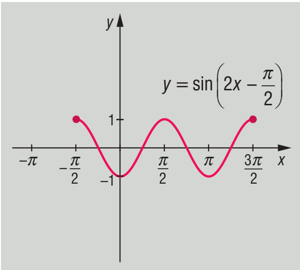
e)



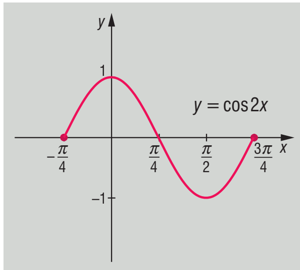
f)



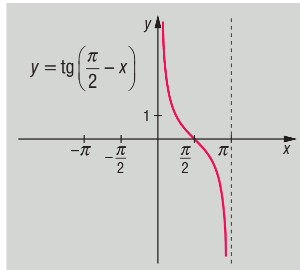
g)



h)



i)



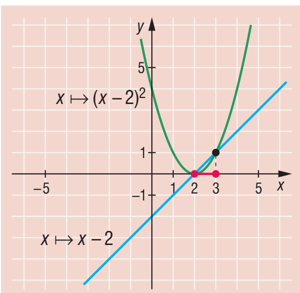
5310 $f\colon x \mapsto -\cos x, \quad x \in [-\pi;\ \pi]$;

$g\colon x \mapsto -\sin x, \quad x \in [-\pi;\ \pi]$;

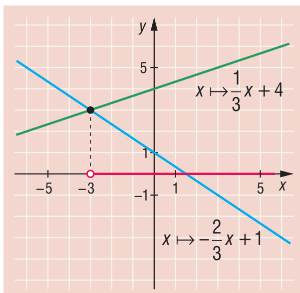
$h\colon x \mapsto |2\sin x|, \quad x \in [-\pi;\ \pi]$.

5311 Az *a)* feladat egyenlőtlenségének bal oldalát átalakíthatjuk: $3x - 6 - 2x + 4 = x - 2$.

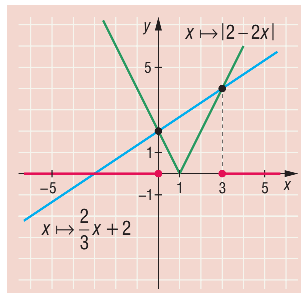
a)



b)



c)

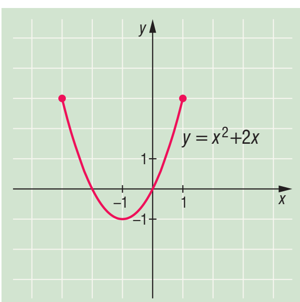


$x \in [2;\ 3]$;

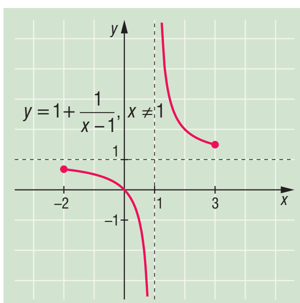
$x \in\ ]-3;\ \infty[$;

c) $x \in\ ]-\infty;\ 0] \cup [3.\ \infty[$.

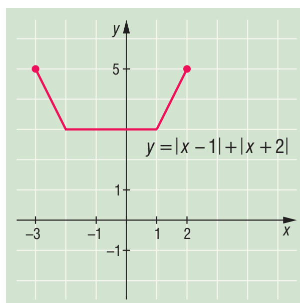
5312 *a)*



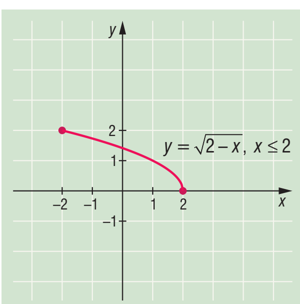
b)



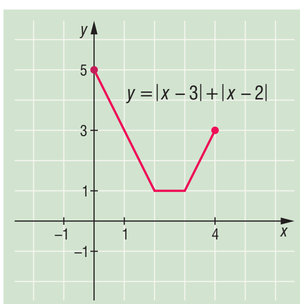
c)



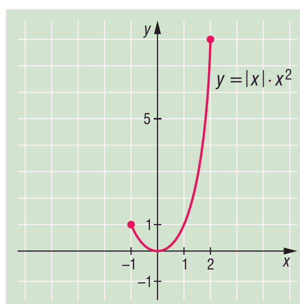
d)



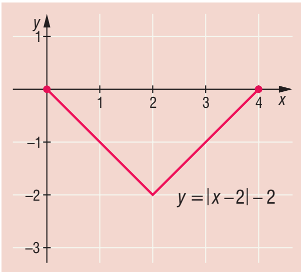
e)



f)

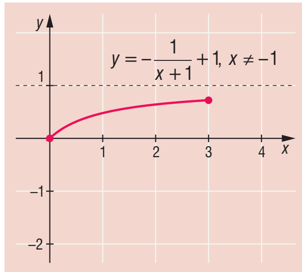


5313 *a)*



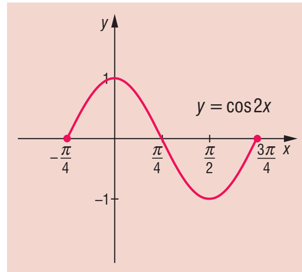
$x_1 = 0, \quad x_2 = 4;$

b)



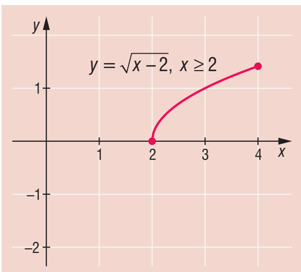
$x = 0;$

c)



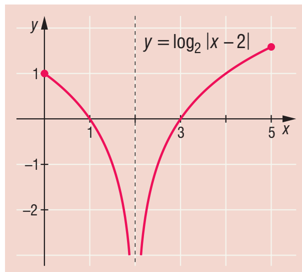
$x_1 = -\frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{4},\ x_3 = \frac{3\pi}{4};$

d)



$x = 2;$

e)



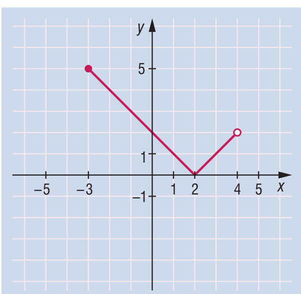
$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$

5314 *a)* f; *b)* h; *c)* g; *d)* i.

5315 *a)* h; *b)* f; *c)* i; *d)* g.

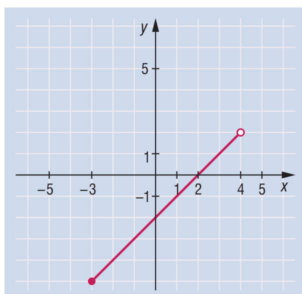
5316 Az *a)* feladat kifejezését átalakíthatjuk: $\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = |x-2|$.

a) Ért. tartomány: $x \in \mathbb{R}$.



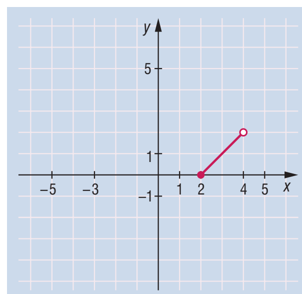
Értékkészlet: $y \in [0; 5]$.

b) Ért. tartomány: $x \in \mathbb{R}$.



Értékkészlet: $y \in [-5; 2[$.

c) Ért. tartomány: $x \geq 2,\ x \in \mathbb{R}$.

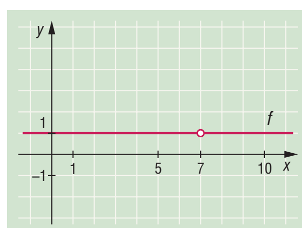


Értékkészlet: $y \in [0; 2[$.

5317 *a)* $x \neq 7$.

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Értékkészlet: $y = 1$.

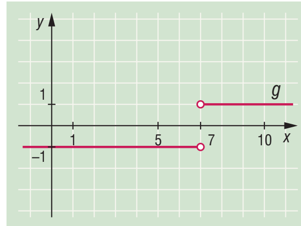


b) $x \neq 7.$

$$|x-7| = \begin{cases} x-7, & \text{ha} \quad x \geq 7, \\ 7-x, & \text{ha} \quad x < 7, \end{cases}$$

ezért

$$g\colon \frac{|x-7|}{x-7} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x > 7, \\ -1, & \text{ha} \quad x < 7. \end{cases}$$



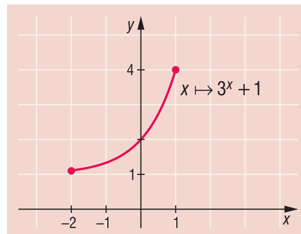
Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.
Értékkészlet: $y = 1$ és $y = -1$.

5318 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) Mivel $3^x - 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 0$. Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Értékkészlet:

$$y \in \left[\frac{10}{9}; 4\right].$$

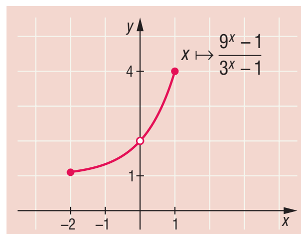


d) Értékkészlet:

$$y \in \left[\frac{10}{9}; 2\right[\cup \left]2; 4\right].$$

Ez felírható a következő alakban is:

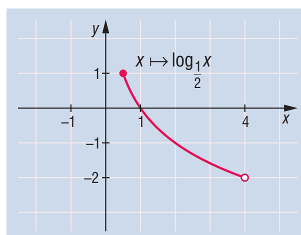
$$y \in \left[\frac{10}{9}; 4\right] \setminus \{2\}.$$



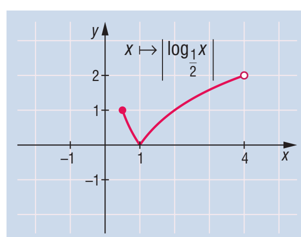
5319 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.

b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.

c) Értékkészlet: $y \in \left]-2; 1\right]$.



d) Értékkészlet: $y \in \left[0; 2\right[$.

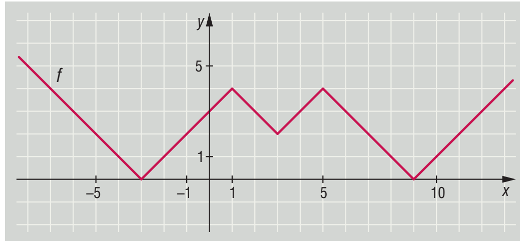


5320 *a)* Zérushelyek: $x_1 = -3$ és $x_2 = 9$.

b) $x = -4,\ x = -2,\ x = 8,\ x = 10$.

Másként jelölve:

$f(-4) = 1,\ f(-2) = 1,\ f(8) = 1,\ f(10) = 1.$



5321 *a)* $f\colon x \mapsto \sin x,\quad g\colon x \mapsto \cos x;$

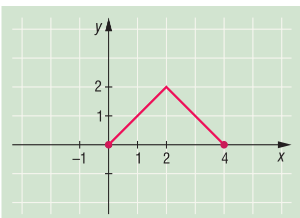
b) $$\frac{\frac{1}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2};$$

c) $$\frac{1+1}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4;$$

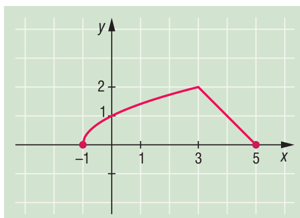
d) $$\frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

e) $$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

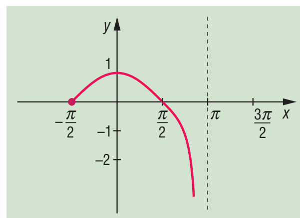
5322 *a)*



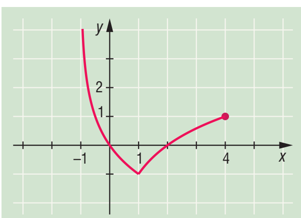
b)



c)



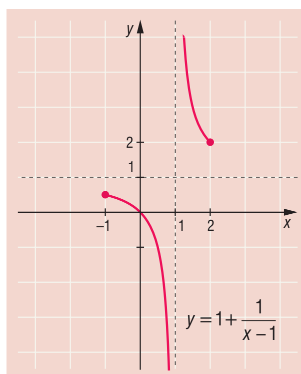
d)



5323 *a)* Az f függvény hozzárendelését írjuk így:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1},$$

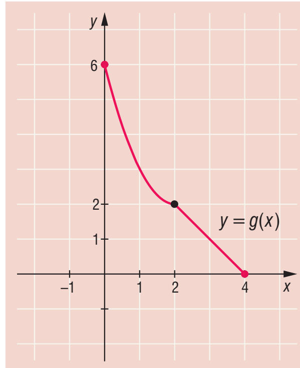
így már könnyű ábrázolni a grafikonját.



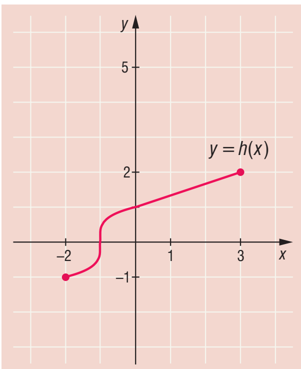
b) A függvény grafikonját egy paraboladarab és egy egyenes szakasz egymáshoz fűzése adja.

A g függvény hozzárendelési szabályát így írhatjuk át:

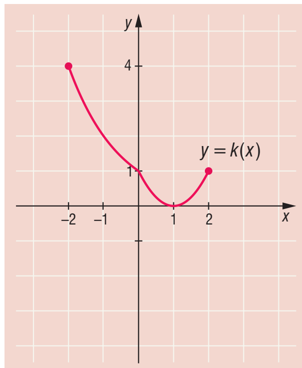
$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^2+2, & \text{ha} \quad 0\le x\le 2,\\ -x+4, & \text{ha} \quad 2<x\le 4.\end{cases}$$



c)



d)



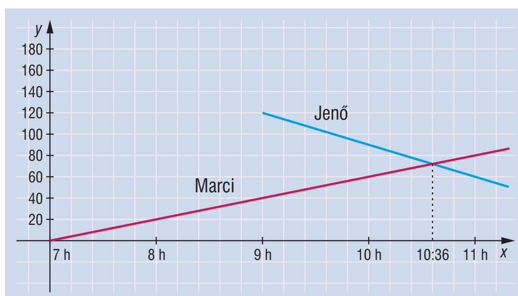
5324 *a)* A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f\colon\ ]-3;9]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{ha} \quad -3<x\le 0,\\ x^2-1, & \text{ha} \quad 0<x\le 3,\\ \dfrac{1}{3}x+7, & \text{ha} \quad 3<x\le 9;\end{cases}$$

b) Értékkészlet: $y\in[-1;\,10]$;

c) $-3<x\le 2$, másként $x\in\,]-3;\,2]$.

5325 *a)* Az út–idő grafikon az ábrán látható.



b) Marci útja reggel 7 órától az $y=20x$ függvénnyel írható le. Jenő útja reggel 7 órától (ha ekkor indult volna) az $y=-30x+180$ függvénnyel jellemezhető. Ebből:

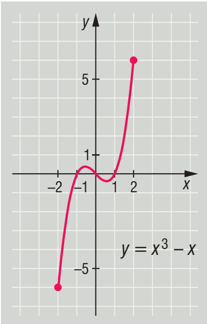
$$20x=-30x+180 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}.$$

Reggel 7 órától számítva 3 óra 36 perc múlva találkoznak, azaz 10 óra 36 perckor.

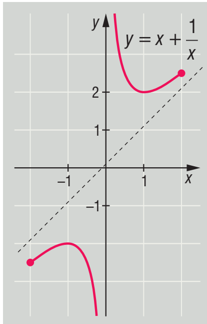
c) Marci 1 óra alatt 20 kilométert tesz meg, így mivel ő 3 óra 36 percet biciklizett 7 órától, egyenes arányossággal számolva 72 kilométert tett meg.

Jenő 9 órakor indult, ő 10 óra 36 percig csak 1 óra 36 percet töltött úton. Mivel 1 óra alatt 30 kilométert tesz meg, ezért 1 óra 36 perc alatt 48 kilométert tett meg.

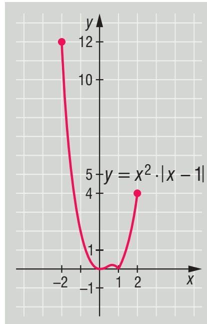
5326 *a)*



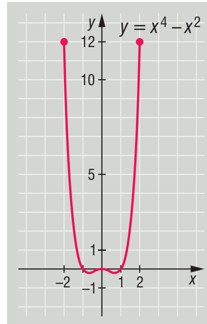
b)



c)



d)



5327 *a)* A közös értelmezési tartomány: $x > 1$. Az egyenlet bal oldalát alakítsuk át:

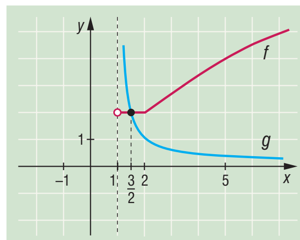
$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}=$$

$$=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\begin{cases}2\sqrt{x-1}, & \text{ha} \quad x \ge 2,\\ 2, & \text{ha} \quad 1 \le x \le 2.\end{cases}$$

Ezután ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$$f\colon\ x \mapsto \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|, \quad 1 < x,$$

$$g\colon\ x \mapsto \frac{1}{x-1}, \quad 1 < x.$$

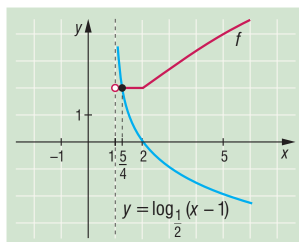


Az f és g függvény értéke csak az $x = \frac{3}{2}$ helyen egyenlő, itt mindkét függvény értéke 2.

b) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az *a)* feladatban szereplő f függvényt és a

$$h\colon\ x \mapsto \log_{0,5}(x-1), \quad x > 1$$

függvényt.



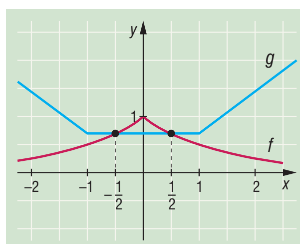
A h függvény $x > 1$ esetén csökken, az f függvény először konstans, majd 2-től nő, így legfeljebb egy közös pontja van a két grafikonnak.

Ez az $x = \frac{5}{4}$-nél van, itt mindkét függvény értéke 2.

c) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket:

$$f\colon\ x \mapsto 2^{-|x|},$$

$$g\colon\ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(|x+1|+|x-1|\right).$$



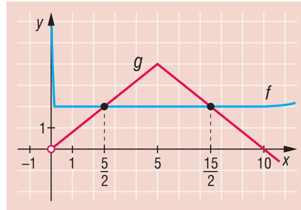
Mivel mindkét függvény páros, az ábra szimmetrikus az y tengelyre. $0 \le x \le 2$-re f csökken, így itt legfeljebb egy közös pontja van a nem csökkenő g függvény grafikonjával.

Ez $x = \frac{1}{2}$ esetén teljesül. Az egyenlet gyökei tehát $-\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}$.

5328 Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$$f(x) = |1 - \lg x| + |1 + \lg x|, \quad 0 < x,$$

$$g(x) = 4 \cdot \left(1 - \frac{|x-5|}{5}\right), \quad 0 < x.$$



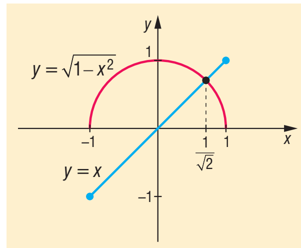
A függvények tulajdonságaiból következik, hogy a két grafikonnak két metszéspontja van: $x = \frac{5}{2}$ és $x = \frac{15}{2}$ értéknél.

Mindkét helyen mindkét függvény értéke 2.

5329 Ábrázoljuk az alábbi függvényeket egy koordináta-rendszerben:

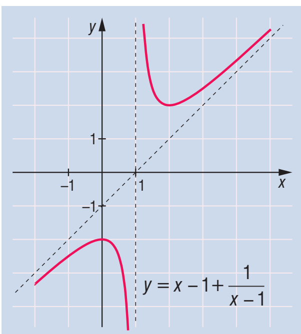
$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1,$$

$$g(x) = x, \quad -1 \le x \le 1.$$

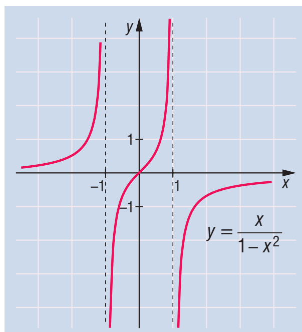


A két grafikon az $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ helyen metszi egymást, tehát az egyenlőtlenség $-1 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén teljesül.

5330 *a)*

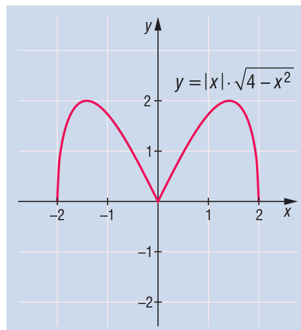


b)



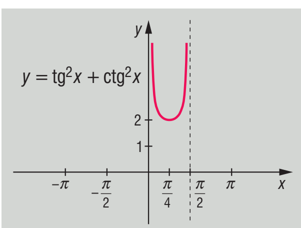
Megj.: A függvény páratlan.

c)

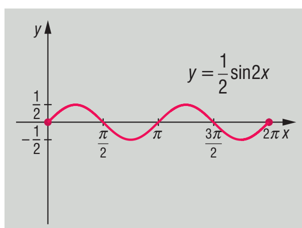


Megj.: A függvény páros.

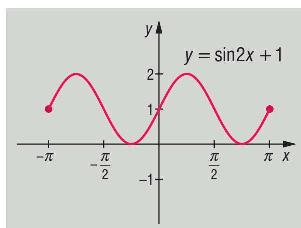
5331 *a)*



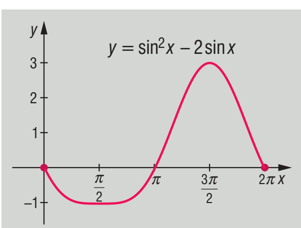
b)



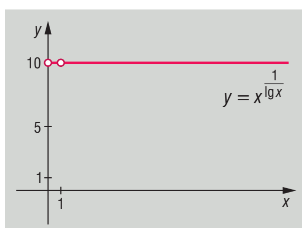
c)



d)



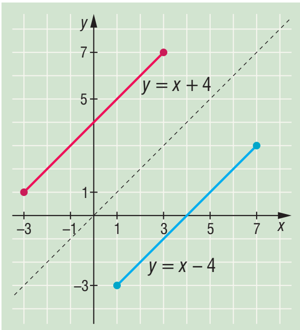
e)



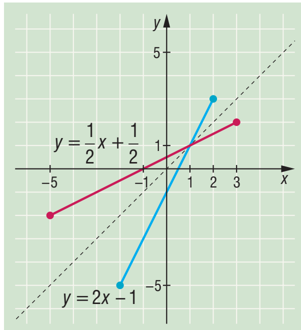
Műveletek függvényekkel (kiegészítő anyag) – megoldások

5332 A függvény és inverzének grafikonja az $y = x$ egyenletű egyenesre nézve egymás tükörképei. A dolog természetéből következik, hogy a függvény és inverze esetén az értékkészlet és az értelmezési tartomány helyet cserél: a függvény értelmezési tartománya az inverz függvény értékkészlete, és a függvény értékkészlete az inverz függvény értelmezési tartománya.

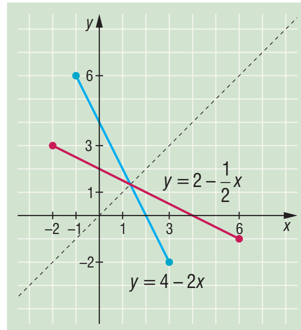
a)



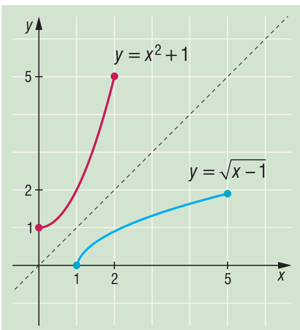
b)



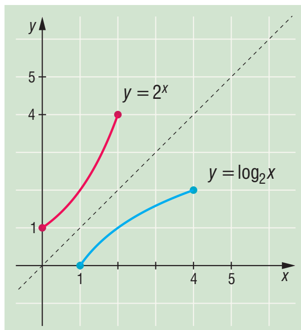
c)



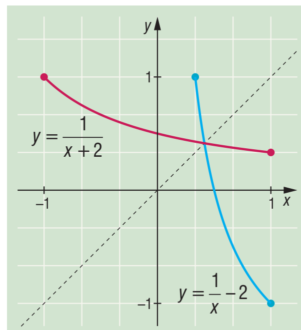
d)



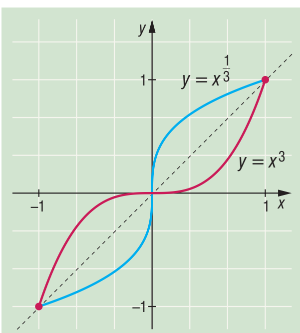
e)



f)

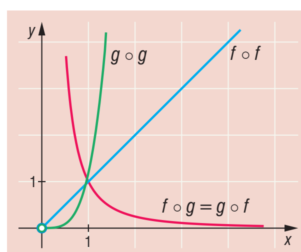


g)



5333 $f \circ g\colon\ f\big(g(x)\big) = \dfrac{1}{x^2},\ x > 0;$ $\qquad g \circ f\colon\ g\big(f(x)\big) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2},\ x > 0,$

$f \circ f\colon\ f\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = x,\ x > 0;$ $\qquad g \circ g\colon\ g\big(g(x)\big) = \left(x^2\right)^2 = x^4,\ x > 0.$



5334 Az első három függvény a következő:

$$f_2(x) = f\left(f(x)\right) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x}, \quad x \ge 0;$$

$$f_3(x) = f_2\left(f(x)\right) = \frac{1+\dfrac{1}{1+x}}{2+\dfrac{1}{1+x}} = \frac{2+x}{3+2x}, \quad x \ge 0;$$

$$f_4(x) = f_3\left(f(x)\right) = \frac{2+\dfrac{1}{1+x}}{3+\dfrac{2}{1+x}} = \frac{3+2x}{5+3x}, \quad x \ge 0.$$

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy ha $n \ge 2$, akkor $f_n(x) = \dfrac{f_n + f_{n-1}\cdot x}{f_{n+1} + f_n \cdot x}$, ahol f_n a Fibonacci-sorozat n-edik tagja.

Az állítás $n = 2$-re igaz, tegyük fel, hogy n-re is igaz. Lássuk be, hogy ebből következik, hogy $n+1$-re is igaz:

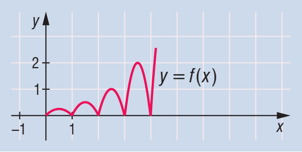
$$f_{n+1}(x) = f_n\left(f(x)\right) = \frac{f_n + f_{n-1}\cdot\dfrac{1}{1+x}}{f_{n+1} + f_n\cdot\dfrac{1}{1+x}} = \frac{f_n + f_{n-1} + f_n\cdot x}{f_{n+1} + f_n + f_{n+1}\cdot x} = \frac{f_{n+1} + f_n\cdot x}{f_{n+2} + f_{n+1}\cdot x},$$

azaz az állítás $n+1$-re is igaz.

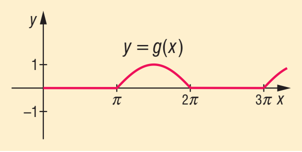
Megjegyzés: Közben felhasználtuk a Fibonacci-sorozat definícióját:

$$f_1 = f_2 = 1 \quad \text{és} \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

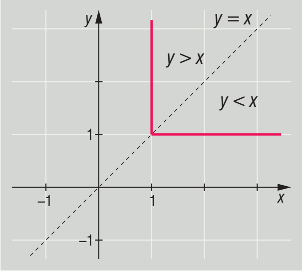
5335 A függvény definíciója alapján a vázlatos grafikon:



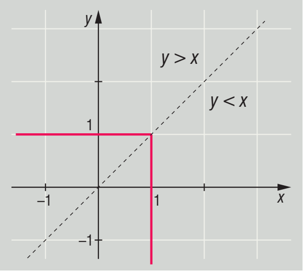
5336 A g függvényt a definíció alapján így rajzolhatjuk meg:



5337 *a)*



b)



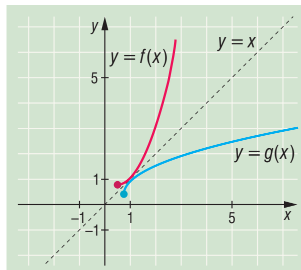
5338 Oldjuk meg x-re a következő egyenletet:

$$y = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$
$$2^y = x + \sqrt{x^2+1},$$
$$2^y - x = \sqrt{x^2+1},$$
$$2^{2y} - 2\cdot 2^y\cdot x + x^2 = x^2 + 1,$$
$$x = \frac{2^{2y}-1}{2\cdot 2^y} = \frac{2^y - 2^{-y}}{2}.$$

Az inverz függvény tehát:

$$f^{-1}(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5339 Vázoljuk először egy koordináta-rendszerben az f és g függvények grafikonját.



Az 5338. feladat megoldásában követett módszert célszerű alkalmazni annak igazolására, hogy a két függvény egymás inverze. Oldjuk meg x-re az $y = x^2 - x + 1$ másodfokú egyenletet.

Mivel $x \geq \frac{1}{2}$, $y \geq \frac{3}{4}$, ezért:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 + 4y}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y - \frac{3}{4}},$$

és itt csak a + előjel jó, tehát $x = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$.

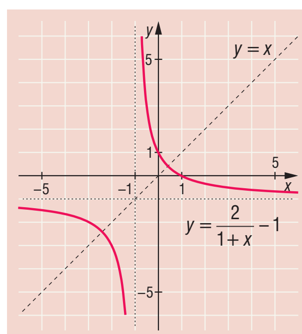
Az f inverze tehát a

$$g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}, \quad x \geq \frac{3}{4}$$

függvény. A lépések megfordíthatók, így g inverze f.

5340 Mivel a függvény és inverzének grafikonja az $y = x$ egyenletű egyenesre szimmetrikus, elég az $x^2 - x + 1 = x$ egyenletet megoldani, ebből $x = 1$. Ez jó gyök, mert $f(1) = g(1) = 1$.

5341 Oldjuk meg x-re az $y = \frac{1-x}{1+x}$ egyenletet:



$$y + xy = 1 - x,$$
$$x(1+y) = 1 - y,$$
$$x = \frac{1-y}{1+y}, \quad y \neq -1.$$

Az f inverze tehát az

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

függvény.

Az f grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenletű egyenesre.

Függvénytulajdonságok – megoldások

5342 Legnagyobb érték: $y = 8$ az $x = 0$ helyen.

5343 $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$, másként $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -4$, $x \neq 4$.

5344 Bármilyen helyes megoldás jó, például: $[-4; 0]$, $[3; 9]$, $[5; 7]$ stb.

5345 *a)* Maximuma van az $x = 2$ helyen, értéke: $y = 3$.
b) Minimuma van az $x = 0$ helyen, értéke: $y = -5$.
c) Maximuma van az $x = -2$ helyen, értéke: $y = 0$.
d) Maximuma van az $x = 5$ helyen, értéke: $y = 0$.
e) Minimuma van az $x = 0$ helyen, értéke: $y = 4$.
f) Minimuma van az $x = 0$ helyen, értéke: $y = -3$.

5346 $3 = \sqrt{2 - x} \quad \Rightarrow \quad x = -7$.

5347 A pozitív osztók számát foglaljuk táblázatba:

Szám	1	2	3	4	5	6
Pozitív osztók száma	1	2	2	3	2	4

a) Értékkészlet: $\{1; 2; 3; 4\}$.
b) Minimuma van az $x = 1$ helyen, értéke: $y = 1$; maximuma van az $x = 6$ helyen, értéke: $y = 4$.
c) Nincs zérushelye a függvénynek.

5348 *a)* Értékkészlete: $y \in [0; 2]$.
b) Értékkészlete: $y \in [-4; 0]$.
c) Értékkészlete: $y \in [0; 1]$.
d) Értékkészlete: $[1; 3]$.

5349 Például:
a) $x \mapsto x^2 + 4$, $\quad x \mapsto |x - 3| + 7$, $\quad x \mapsto \sqrt{3 - x} + 5$;
b) $x \mapsto -x^2 - 3$, $\quad x \mapsto -|x - 2| - 5$, $\quad x \mapsto -|x| - 1$;
c) $x \mapsto \sqrt{x - 5}$, $\quad x \mapsto (x - 3)^2$, $\quad x \mapsto |x + 7|$;
d) $x \mapsto (x - 2)^2 - 5$, $\quad x \mapsto |x + 7| - 5$;
e) $x \mapsto -x^2 + 6$, $\quad x \mapsto -|x - 1| + 6$.

5350 *a)* $\dfrac{x - 3}{x + 1} \geq 0$ és $x \neq -1$.
A hányados akkor 0, ha $x = 3$, akkor pozitív, ha $x - 3 > 0$ és $x + 1 > 0 \Rightarrow x > 3$ vagy $x - 3 < 0$ és $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$.
Értelmezési tartomány: $x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left[3; \infty\right[$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

b) $\sqrt{x}$ miatt: $x \geq 0$, valamint $4 - \sqrt{x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 16$.
Értelmezési tartomány: $x \in \left[0; \infty\right[\setminus \{16\}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.
Zérushely: $\sqrt{x} - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 9$.

c) $x-2>0 \Rightarrow x>2$. Értelmezési tartomány: $x \in]2; \infty[, \quad x \in \mathbb{R}$.
Zérushely: $x=-2$.

d) $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Értelmezési tartomány: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Zérushely: $x=-3$.

e) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{7}{2}$.

Zérushely: nincs, mert $\frac{2x-7}{4x-14} = \frac{2x-7}{2(2x-7)} = \frac{1}{2}$ konstans függvény.

f) $x>0$ és $\lg x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Tehát az értelmezési tartomány: $x \in]0; \infty[\setminus \{1\}$.
Zérushely: $x=9$.

g) Értelmezési tartomány: $x>0$ és $x>-1$ miatt $x \in]0; \infty[$.
Zérushely: $x=1$.

h) $x>0,\ x \neq 1,\ 4x-1>0 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$. Értelmezési tartomány: $x \in \left]\frac{1}{4}; \infty\right[\setminus \{1\}$.

Zérushely: $x = \frac{1}{2}$.

5351 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in]-4; 4]$; $(x \in \mathbb{R})$.
Értékkészlet: $y \in [-2; 4]$.

b) Zérushely: $x_1 = -2$ és $x_2 = 1$.

c) Minimuma van a függvénynek az $x=0$ helyen, értéke $y=-2$.
Maximuma van az $x=3$ helyen, értéke $y=4$.

d) $f>0 \Rightarrow x \in]-4; -2[\cup]1; 4]$.

e) $f<0 \Rightarrow x \in]-2; 1[$.

f) Szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-4; 0] \cup [3; 4]$.

5352 Egy adott függvény x tengelymetszetét az $y=0$-val, az y tengelymetszetét az $x=0$ behelyettesítésével kapjuk.

a) Az x tengelyt $\frac{5}{3}$-nál, az y tengelyt -5-nél metszi.

b) Az x tengelyt 3-nál metszi, az y tengelyt nem metszi.

c) A függvény az origón halad át.

d) Az x tengelyt 1-nél, az y tengelyt -1-nél metszi.

e) Az x tengelyt az 1 helyen metszi, az y tengelyt nem metszi.

f) Az x tengelyt a -2 helyen, az y tengelyt -3-nál metszi.

5353 Mivel a tört nevezője nem lehet 0, ezért a

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}.$$

A periódus 180°, mert a szinuszfüggvény a 0 értékét 180°-ként veszi fel; a $k \cdot 180°$-kal $(k \in \mathbb{Z})$ minden forgásszöget megadtunk (fokokban).

5354 *a)* $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)=1$ $\boxed{=}$ $g(2)=1$; *b)* $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ $\boxed{>}$ $g\left(\frac{1}{8}\right)=-3$;

c) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{>}$ $g\left(\frac{1}{4}\right)=-2$; *d)* $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ $\boxed{<}$ $g(4)=2$.

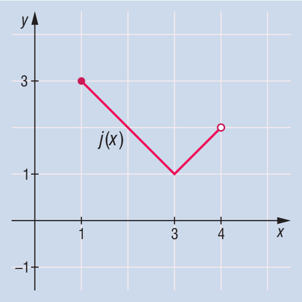
5355 *a)* $x \mapsto x^2-2x$ zérushelyei $x_1=0$, $x_2=2$, mert $x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0$.
$f(1,3)=1{,}3^2-2\cdot 1{,}3=1{,}69-2{,}6=-0{,}91$.

b) $g(x)=-|x|+7$ maximum értéke: $y=7$, amit az $x=0$ helyen vesz fel. Jelölése: $g(0)=7$.

c) Mivel a szinuszfüggvény korlátos, a $\sin x$ értékkészlete $y\in[-1;1]$.
A -2 transzformáció az y tengely mentén 2 egységgel lefelé tolja el a $\sin x$ függvényt, ezért $\sin x-2$ értékkészlete: $[-3;-1]$.

d) $\log_2(2x-20)-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 11$ esetén. (Értelmezési tartomány: $x>10$.)

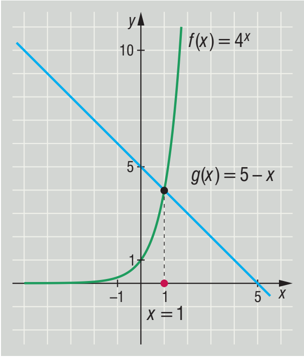
e) Átalakítás után:
$$j(x)=|x-3|+1.$$
A keresett függvényérték:
$$\frac{j(1)-j(3)}{j(2)}=\frac{3-1}{2}=1.$$



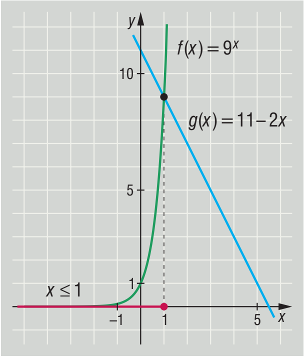
5356 $-x^2+18x-17>0 \Rightarrow x^2-18x+17<0 \Rightarrow 1<x<17$.
1 és 17 között 6 db prímszám van: 2; 3; 5; 7; 11; 13.

5357 A *c)* a helyes válasz, mert:
$$\log_{15}^2 3-\log_{15}^2 5=(\log_{15}3+\log_{15}5)(\log_{15}3-\log_{15}5)=\log_{15}15\cdot\log_{15}\frac{3}{5}=1\cdot\log_{15}\frac{3}{5}.$$

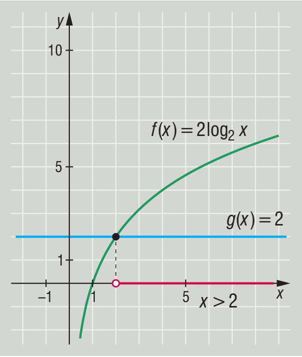
5358 *a)*



b)



c)

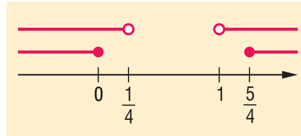


5359 *a)* $f(2)=9+2\cdot 3^4=9+162=171$, $g(32)=32\cdot\log_2 32=32\cdot 5=160$.
$f(2)>g(32)$.

b) A diszkrimináns 0 $\Rightarrow$ érinti x tengelyt a parabola (1 zérushely van).
$f(2010)=2010$ miatt felfelé nyíló a parabola, s mert van pozitív értéke a parabolának, kizárólag a (4) lehet a megoldás.

5360 *a)* A logaritmus miatt:

$$4x^2 - 5x + 1 > 0 \;\Rightarrow\; x < \frac{1}{4} \text{ vagy } x > 1.$$



A négyzetgyök miatt:

$$\lg(4x^2 - 5x + 1) \ge 0 \;\Rightarrow\; 4x^2 - 5x + 1 \ge 1.$$

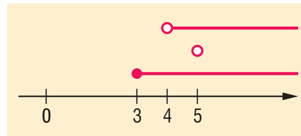
Ebből:

$$4x^2 - 5x \ge 0 \;\Rightarrow\; x(4x-5) \ge 0 \;\Rightarrow\; x \le 0 \text{ vagy } x \ge \frac{5}{4}.$$

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\; x \in \left]-\infty; 0\right] \cup \left[\frac{5}{4}; \infty\right[$.

b) A logaritmus miatt:

$$x - 4 > 0 \;\Rightarrow\; x > 4.$$



A tört miatt:

$$\lg(x-4) \ne 0 \;\Rightarrow\; x \ne 5.$$

A négyzetgyök miatt:

$$x - 3 \ge 0 \;\Rightarrow\; x \ge 3.$$

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\; x \in \left]4; 5\right[\cup \left]5; \infty\right[$.

5361 *a)* $x^3 - x = 0 \;\Rightarrow\; x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) = 0$, tehát a zérushelyek: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ és $x_3 = 1$.

b) $(x-2)\cdot\log_2 x = 0$, ha $x - 2 = 0$, azaz $x_1 = 2$, vagy $\log_2 x = 0$, azaz $x_2 = 1$.

c) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3} = 0$, ha $x = 2$.

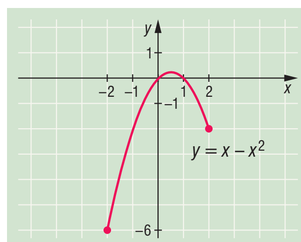
d) $x^2 - 5\cdot|x| + 6 = 0$, zérushelyek: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -3$.

e) $\sqrt{4x - x^2} = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

f) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 0$, $0 < x < \pi$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

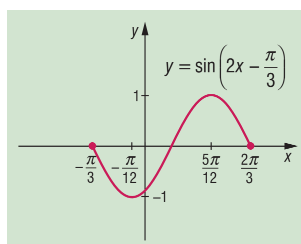
g) $\dfrac{x^3 - x}{x - 1} = x(x+1)$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

5362 *a)* Ábrázoljuk az $f(x) = x - x^2$, $-2 \le x \le 2$ függvényt:



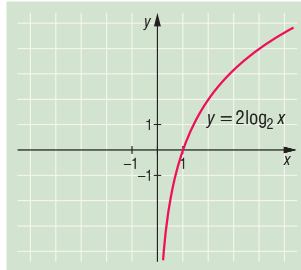
A függvény képe egy parabola darabja, tengelypontja $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$-ban van, lefelé „nyílik”. Így a függvény $[-2; 0{,}5]$-ban nő, $[0{,}5; 2]$-ban csökken. A $0{,}5$ helyen maximuma van, a maximum értéke $0{,}25$, a -2 helyen minimuma van, a minimum értéke -6.

b) Ábrázoljuk a $g(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $-\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{3}$ függvényt:

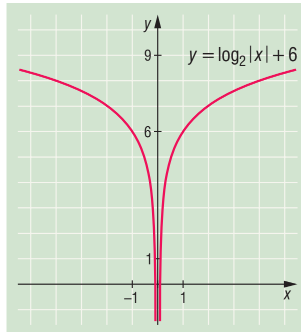


A függvény $\left[-\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{12}\right]$-ban, valamint $\left[\dfrac{5\pi}{12}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$-ban csökken, $\left[-\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{5\pi}{12}\right]$-ban nő. Maximuma van az $\dfrac{5\pi}{12}$ helyen, itt értéke 1, minimuma van a $-\dfrac{\pi}{12}$ helyen, itt értéke -1.

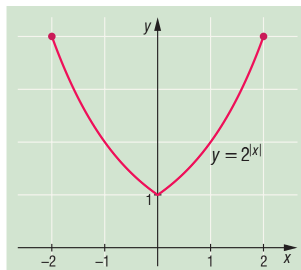
c) A függvény a teljes értelmezési tartományában szigorúan nő, szélsőértéke nincs.



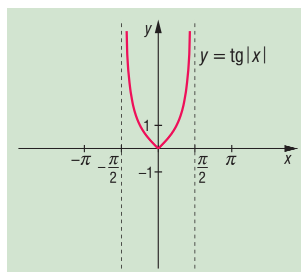
d) A függvény $]-\infty; 0[$-ban csökken, $]0; +\infty[$-ban nő. Szélsőértéke nincs.



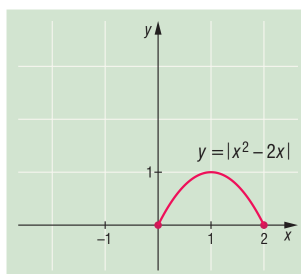
e) A függvény $[-2; 0]$-ban csökken, $[0; 2]$-ban nő, az $x = 0$ helyen minimuma van, itt az értéke $y = 1$, az $x = -2$ és $x = 2$ helyen maximuma van, itt az értéke $y = 4$.



f) A függvény $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ban csökken, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$-ban nő. Az $x = 0$ helyen minimuma van, itt az értéke $y = 0$. Maximuma nincs a függvénynek.

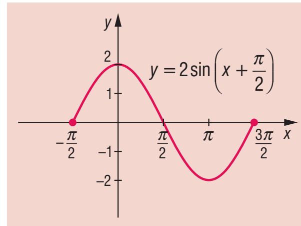


g) A függvény $[0; 1]$-ban nő, $[1; 2]$-ban csökken, az $x = 1$ helyen maximuma van, itt az értéke $y = 1$, az $x = 0$ és $x = 2$ helyen minimuma van, értéke ezeken a helyeken $y = 0$.

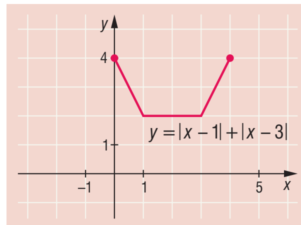


5363 *a)* páratlan függvény; *b)* páratlan függvény;
c) se nem páros, se nem páratlan; *d)* páratlan függvény;
e) páros függvény; *f)* páros függvény;
g) páratlan fügvény; *h)* a függvény se nem páros, se nem páratlan.

5364 *a)* A függvény legnagyobb értéke $f(0) = 2$,
legkisebb értéke $f(\pi) = -2$.



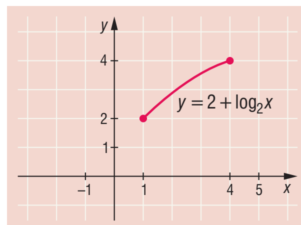
b) A függvény legnagyobb értéke $f(0) = f(4) = 4$,
legkisebb értéke $f(x) = 2$, ha $1 \le x \le 3$.



c) A logaritmus azonosságát felhasználva $h(x)$ így írható:

$$h(x) = 2 + \log_2 x, \quad 1 \le x \le 4.$$

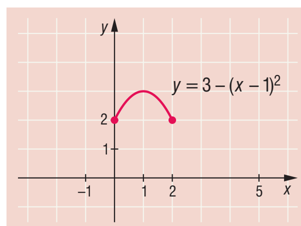
A függvény legnagyobb értéke $h(4) = 4$,
legkisebb értéke $h(1) = 2$.



d) A $k(x)$ így írható:

$$k(x) = 3 - (x - 1)^2, \quad 0 \le x \le 2.$$

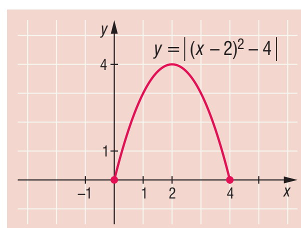
A függvény legnagyobb értéke $k(1) = 3$,
legkisebb értéke $k(0) = k(2) = 2$.



e) A $j(x)$ így írható:

$$j(x) = \left|(x - 2)^2 - 4\right|.$$

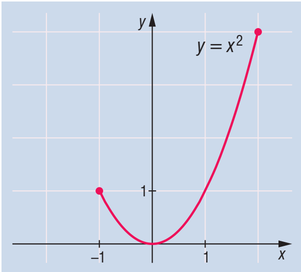
A függvény legnagyobb értéke $j(2) = 4$,
legkisebb értéke $j(0) = j(4) = 0$.

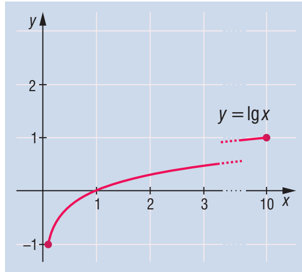


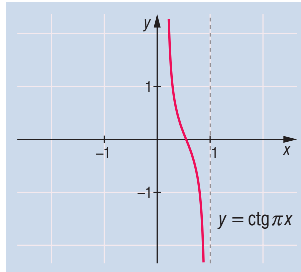
f) A függvény szigorúan csökken az értelmezési tartományban, így legnagyobb értéke 0, legkisebb értéke -2.

g) A függvény $[0; 2]$-ban csökken, legnagyobb értéke 0, legkisebb értéke -4.

h) A függvény legnagyobb értéke 1, legkisebb értéke 0.

5365 *a)* 

b) 

c) 

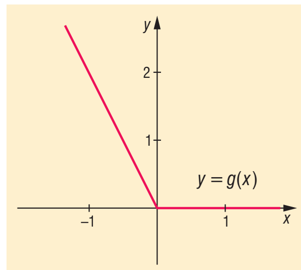
$y \in [0; 4]$; $y \in [-1; 1]$; $y \in \mathbb{R}$.

5366 *a)* Az f definícióját így érdemes átalakítani: $f(x) = (x+1)^2 + 4$. A függvény képe egy parabola, amelynek tengelypontja a (–1; 4) pontban van, és „felfelé nyílik”, tehát $]-\infty; -1]$-ban csökken, $[-1; +\infty[$-ban nő.

b) A függvény definíciója így írható:

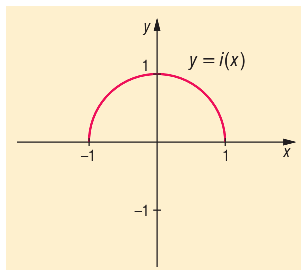
$$g(x) = |x| - x = \begin{cases} -2x, & \text{ha} \quad x < 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

A függvény $]-\infty; 0]$-ban csökken, $[0; +\infty[$-ban konstans, tágabb értelemben nevezhetjük növekvőnek és csökkenőnek is.



c) Az 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvény a teljes értelmezési tartományában nő.

d) A függvény $[-1; 0]$-ban nő, $[0; 1]$-ban csökken.



5367 *a)* Az f függvény páratlan, mert a logaritmus azonosságait használva kapjuk, hogy:

$$f(-x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x} = -\log_2 \frac{1-x}{1+x} = -f(x).$$

b) A g függvény páros, mert

$$g(-x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = g(x).$$

c) Azonos átalakításokat is végzünk:

$$h(-x) = \log_2\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \log_2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = -\log_2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = -h(x),$$

tehát a h függvény páratlan.

d) A függvény se nem páratlan, se nem páros, mert

$$i(-x) = x^3 - 2x + 1 \neq -i(x) \quad \text{és} \quad i(-x) \neq i(x).$$

5368 *a)* 4.; *b)* 1.; *c)* 1.; *d)* 4.;
e) 2.; *f)* 4.; *g)* 2.; *h)* 3.

5369 *a)* π; *b)* 4π; *c)* 2π; *d)* $\frac{2\pi}{3}$;
e) $\frac{\pi}{2}$; *f)* $\frac{\pi}{3}$.

5370 *a)* Páros, periodikus 2π szerint. *b)* Páratlan, periodikus 2π szerint.
c) Páros, periodikus bármely pozitív valós szám szerint.
d) Páratlan, periodikus $\frac{\pi}{3}$ szerint. *e)* Nem páros, nem páratlan, nem periodikus.
f) Páratlan, nem periodikus. *g)* Páratlan, periodikus $\frac{2\pi}{3}$ szerint.
h) Páros, periodikus 4π szerint. *i)* Páros, nem periodikus.

5371 *a)* $f(x) = 10(x^2 - 2x + 1) = 10(x-1)^2$.
Zérushely: $x = 1$ helyen.
Minimum helye: $x = 1$, értéke: $y = 0$.

b) $g(x) = (x-7)^2$.
Zérushely: $x = 7$ helyen.
Minimum helye: $x = 7$, értéke: $y = 0$.

c) $h(x) = -(x^2 + 5x - 6) = -\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{24}{4}\right] = -\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right] = -\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$.

Zérushely: $x_1 = 1$ és $x_2 = -6$.

Maximum helye: $x = -\frac{5}{2}$, értéke: $\frac{49}{4}$.

d) $i(x) = 3\left[x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}\right] = 3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{12}{36}\right] = 3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{36}\right] = 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12}$.

Zérushely: $x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$.

Minimum helye: $x = \frac{5}{6}$, értéke: $-\frac{13}{12}$.

e) $j(x) = 4\left[x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right] = 4\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{24}{16}\right] = 4\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] = 4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{4}$.

Zérushely: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

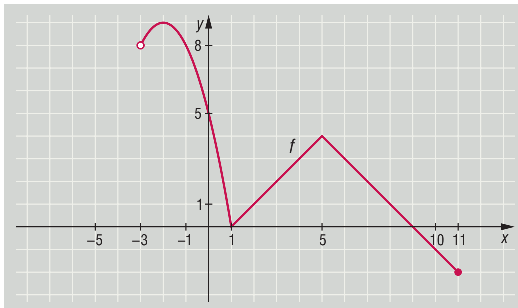
Minimum helye: $x = \frac{1}{4}$ értéke: $-\frac{25}{4}$.

$f)$ $k(x) = -5\left[x^2 - \dfrac{16}{5}x + \dfrac{3}{5}\right] = -5\left[\left(x - \dfrac{8}{5}\right)^2 - \dfrac{64}{25} + \dfrac{15}{25}\right] = -5\left[\left(x - \dfrac{8}{5}\right)^2 - \dfrac{49}{25}\right] = -5\left(x - \dfrac{8}{5}\right)^2 + \dfrac{49}{5}.$

Zérushely: $x_1 = \dfrac{1}{5}$, $x_2 = 3$.

Maximum helye: $x = \dfrac{8}{5}$, értéke: $\dfrac{49}{5}$.

5372 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \left]-3; 11\right]$.
Értékkészlet: $y \in [-2; 9]$.
Zérushely: $x_1 = 1$ és $x_2 = 9$.
Minimum helye: $x = 11$, értéke: $y = -2$.
Maximum helye: $x = -2$, értéke: $y = 9$.
A függvény szigorúan monoton növekvő a $\left]-3; -2\right]$ és $[1; 5]$-on, szigorúan monoton csökkenő a $[-2; 1]$ és $[5; 11]$-on.



b) $f(-1) = 8$; $f(1) = 0$; $f(3) = 2$; $f(-4)$-nek nincs értelme, mert $x = -4$, ami nem esik az értelmezési tartományba; $f(10) = -1$.

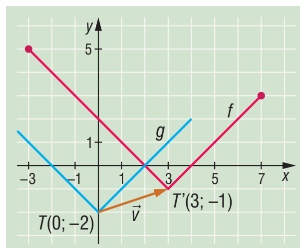
c) $f(x) < 0 \;\Rightarrow\; x \in \left]9; 11\right]$.

5373 *a)* $f\colon x \mapsto |x - 3| - 1$.

b) Zérushelyek: f-nél: $x_1 = 2$ és $x_2 = 4$,
g-nél: $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$.

c) $y \in [-1; 5]$. Lásd ábra.

d) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$.



5374 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz. *e)* Igaz. *f)* Igaz.

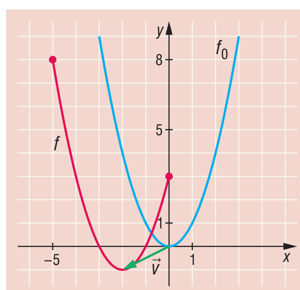
5375 Az f_0-ból az f függvény grafikonját egy $\vec{v}(-2; -1)$ vektorral való eltolással kaptuk. Az eredeti függvény tengelypontja $T(0; 0)$, az f függvényé $T'(-2; -1)$.

a) $y \in [-1; 8]$.

b) Pozitív az adott függvény, ha $x \in \left[-5; -3\right[\cup \left]-1; 0\right]$.

c) $f(-1) = 0$, $f(-2) = -1$, $f(-4) = 3$.

d) $f(-4) = 3$ és $f(0) = 3$, vagyis a függvény az $x = -4$ és az $x = 0$ helyen veszi fel a 3 értéket.



5376 *a)* Értelmezési tartomány: $x > 0$.
Kéttényezős szorzat akkor 0, ha (legalább) az egyik tényezője 0. Tehát:

$$\log_2 x = 1 \;\Rightarrow\; x = 2 \quad \text{vagy} \quad \log_2 x^2 = -6 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{64} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{1}{8}.$$

Megoldás: $x_1 = 2$ és $x_2 = \dfrac{1}{8}$.

b) $\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\frac{1}{2}$ esetén teljesül, vagyis:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \qquad x_2=\frac{11\pi}{6}+2l\pi,\ l\in\mathbb{Z},$$

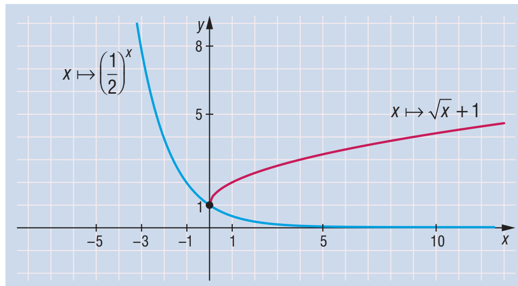
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x_3=\frac{5\pi}{6}+2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}, \qquad x_4=\frac{3\pi}{2}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Eredmény: x_1 és x_4 egybeírva: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; x_2 és x_3 egybeírva: $x=\frac{5\pi}{6}+l\pi,\ l\in\mathbb{Z}$.

5377 *a)* Értelmezési tartomány: $x\geq 0$.

Átalakítva az egyenletet:

$$2^{-x}=\sqrt{x}+1 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x=\sqrt{x}+1.$$



Ábrázoljuk a két oldalt függvényként, majd olvassuk le az eredményt.

Megoldás: $x=0$.

b) Értelmezési tartomány: $x>0$.

Átalakítva az egyenletet, valamint felhasználva, hogy $a^{\log_a b}=b$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-\log_2 x}=5,$$

$$2^{\log_2 x-2}=5,$$

$$\frac{2^{\log_2 x}}{4}=5,$$

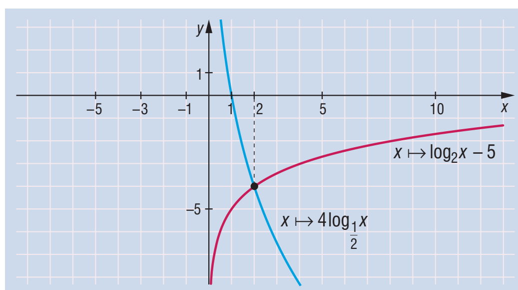
$$2^{\log_2 x}=20,$$

$$x=20.$$

c) Értelmezési tartomány: $x>0$.

Átalakítva az egyenletet:

$$4\cdot\log_{\frac{1}{2}} x=\log_2 x-5.$$



Ábrázoljuk a két oldalt függvényként.

Megoldás: $x=2$.

5378 Értelmezési tartomány: $x+y>0$. Átalakítva az első egyenletet:

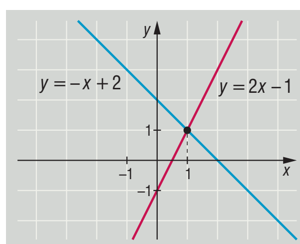
$$\lg[5(x+y)]=\lg 10 \quad\Rightarrow\quad 5x+5y=10 \quad\Rightarrow\quad x+y=2.$$

Az első egyenletből: $y=-x+2$.

A második egyenletből: $y=2x-1$.

Ábrázoljuk a két függvényt, és olvassuk le az eredményt:

$$x=1,\quad y=1,\quad (1;\,1)\ \text{számpár}.$$



5379 A négyzetgyök miatt:

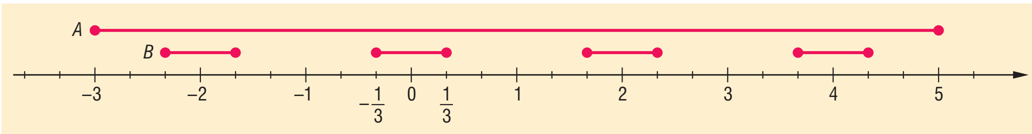
$$-x^2+2x+15\ge 0 \;\Rightarrow\; x^2-2x-15\le 0 \;\Rightarrow\; \text{ha } -3\le x\le 5.$$

Szintén a négyzetgyök miatt:

$$2\cos\pi x-1\ge 0 \Rightarrow \cos\pi x\ge\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{1}{3}+2k\le x\le\frac{1}{3}+2k.$$

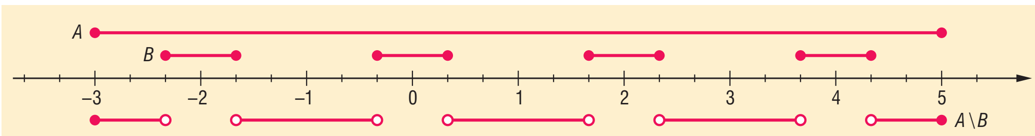
a) A halmaz elemei: $-3\le x\le 5$, B halmaz elemei: $-\frac{1}{3}+2k\le x\le\frac{1}{3}+2k,\ k\in\mathbb{Z}$.

b)



$A\cap B$ elemei: $-\frac{7}{3}\le x\le-\frac{5}{3}\ \cup\ -\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{3}\ \cup\ \frac{5}{3}\le x\le\frac{7}{3}\ \cup\ \frac{11}{3}\le x\le\frac{13}{3}$.

c)



$A\setminus B$ elemei: $-3\le x<-\frac{7}{3}\ \cup\ -\frac{5}{3}<x<-\frac{1}{3}\ \cup\ \frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}\ \cup\ \frac{7}{3}<x<\frac{11}{3}\ \cup\ \frac{13}{3}<x\le 5$.

5380 *a)* $g(x)=\left|\sqrt{(x-4)^2}-2\right|=\big||x-4|-2\big|$.

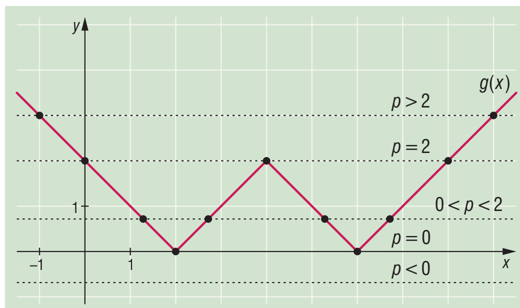
b) Ha $p<0$, akkor a $g(x)=p$ egyenletnek nincs megoldása.

Ha $p=0$, akkor 2 megoldás van.

Ha $0<p<2$, akkor 4 megoldás van.

Ha $p=2$, akkor 3 megoldás létezik.

Ha $p>2$, akkor 2 megoldás van.



5381 Az x^2+bx+c teljes négyzetté alakítását elvégezve:

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c.$$

Mivel a szélsőérték az $a=1$ $(a>0)$ miatt kizárólag minimum lehet, ezért csak ezt kell vizsgálnunk. Így a felfelé nyíló parabola tengelypontja $C(-2;4)$. Tehát az eredeti $x\mapsto x^2$ parabolát az x tengely mentén balra 2 egységgel és az y tengely mentén fel 4 egységgel toltuk el, ezért a teljes négyzet $y=(x+2)^2+4$ alakú:

$$\frac{b}{2}=2 \;\Rightarrow\; b=4,\qquad \text{valamint}\qquad -\frac{b^2}{4}+c=4 \;\Rightarrow\; c=8.$$

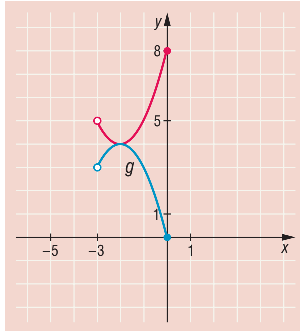
Tehát az adott f függvény hozzárendelési szabálya:

$$x\mapsto x^2+4x+8,\quad \text{vagyis}\quad x\mapsto(x+2)^2+4.$$

a) Értékkészlet: $y \in [4; 8]$.

b) g: $]-3; 0] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -(x+2)^2 + 4.$

Ekkor az értékkészlet: $y \in [0; 4],\ y \in \mathbb{R}$ (ld. ábra: g).



5382 *a)* $f(x) = (x^4 + x^2) + (3x^3 - 4x),\ x \in \mathbb{R};$

$f_1(x) = x^4 + x^2,\ x \in \mathbb{R},$ páros függvény;

$f_2(x) = 3x^3 - 4x,\ x \in \mathbb{R},$ páratlan függvény;

$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$

b) $g(x) = x^2 + \sin x + x,\ x \in \mathbb{R};$

$g_1(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R},$ páros függvény;

$g_2(x) = \sin x + x,\ x \in \mathbb{R},$ páratlan függvény;

$g(x) = g_1(x) + g_2(x).$

c) $h(x) = 2^x + 2^{-x} + x^3,\ x \in \mathbb{R};$

$h_1(x) = 2^x + 2^{-x},\ x \in \mathbb{R},$ páros függvény;

$h_2(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R},$ páratlan függvény;

$h(x) = h_1(x) + h_2(x).$

5383 Az f definícióját írjuk át így:

$$f(x) = \frac{x^2+1+1}{\sqrt{(x^2+1)\cdot 1}},\quad x \in \mathbb{R}.$$

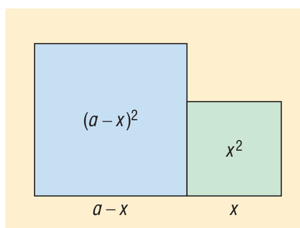
Mivel $x^2 + 1 \geq 1$ bármely $x \in \mathbb{R}$-re, a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján:

$$0 < \sqrt{(x^2+1)\cdot 1} \leq \frac{x^2+1+1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \leq \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Az egyenlőség csak akkor lehet igaz, ha $x^2 + 1 = 1$, azaz $x = 0$. Az f függvény legkisebb értéke tehát 2, és ezt az $x = 0$ helyen veszi fel.

5384 Az ábra jelöléseit használjuk:

$$\frac{(a-x)^2 + x^2}{2} \geq \left(\frac{a-x+x}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$



a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség alapján. Itt egyenlőség csak akkor van, ha a két szám egyenlő, azaz $a - x = x$, tehát $x = \frac{a}{2}$. Azt kaptuk, hogy a két részre rajzolt négyzetek területének összege akkor a legkisebb, ha a részek egyenlők, tehát mindegyik $\frac{a}{2}$ hosszúságú. Ekkor a két terület összege $\frac{a^2}{2}$.

5385 Tegyük fel, hogy $x_1 < x_2$. Mutassuk meg, hogy ekkor $f(x_1) < f(x_2)$. Ez teljesül, mert

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2^3 - x_1^3\right) + 3(x_2 - x_1) > 0,$$

hiszen az összeg mindkét tagja pozitív.

5386 Legyen $1 \le x_1 < x_2$, ekkor $0 < x_2 - x_1$. Mutassuk meg, hogy $g(x_1) > g(x_2)$. Tehát igazolni kell, hogy $g(x_1) - g(x_2) > 0$:

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{1 + x_1^2} - \frac{x_2}{1 + x_2^2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{\left(1 + x_1^2\right)\left(1 + x_2^2\right)}.$$

A nevező pozitív, a számlálóban mindkét tényező pozitív, tehát a tört értéke pozitív. Ezzel az állítást igazoltuk.

5387 Azonos átalakítással az f definícióját így írhatjuk:

$$f(x) = x^2 \cdot (x^4 - 6x^2 + 12) = x^2 \cdot ((x^2 - 3)^2 + 3) \ge 0.$$

Ez nyilván igaz, hiszen $x^2 \ge 0$, $(x^2 - 3)^2 \ge 0$, $(x^2 - 3)^2 + 3 > 0$. Az is látható, hogy $f(x) = 0$ csak akkor teljesül, ha $x = 0$. A függvény legkisebb értéke tehát 0, és ezt a 0 helyen veszi fel a függvény.

5388 A függvényt definiáló kifejezést alakítsuk át:

$$f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Mivel a számláló állandó, a nevező pedig $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$-ban nő, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$-ban csökken, ezért $f(x)$ a a $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$-ban csökken, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$-ban nő.

5389 Itt is alakítsuk át a függvényt megadó kifejezést:

$$f(x) = 3x^2 - 2(a + b + c) \cdot x + a^2 + b^2 + c^2 =$$
$$= 3\left(x - \frac{a + b + c}{3}\right)^2 + a^2 + b^2 + c^2 - \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2.$$

A kapott alakból világos, hogy a függvény a legkisebb értékét az $x = \dfrac{a + b + c}{3}$ helyen veszi fel.

5390 *a)* Mivel $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$, ha $x \in \mathbb{R}$, az f függvény $\frac{\pi}{2}$ szerint periodikus.

b) Jól ismert azonosság, hogy $\cos(x + \pi) = -\cos x$, ezért $g(x + \pi) = g(x)$, ha $x \in \mathbb{R}$. A g függvény tehát π szerint periodikus.

5391 Tegyük fel, hogy p $(p > 0)$ a periódusa az $f(x) = \cos x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvénynek. Azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$\cos(x + p)^2 = \cos x^2.$$

Ekkor viszont

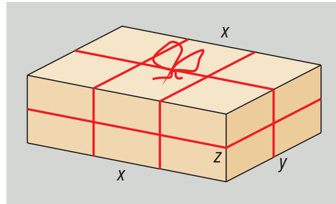
$$(x + p)^2 - x^2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

azaz

$$p(2x + p) = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k\pi}{p} - \frac{1}{2}p \quad \text{minden } x\text{-re},$$

ami ellentmondás. A feltevés tehát ellentmondásra vezetett, az f függvény nem periodikus.

5392 A dobozt az ábrán látható módon akarjuk átkötni.



A szalag hossza (a csomózás nélkül): $4x + 6z + 6y$, a doboz térfogata $xyz = 12$.

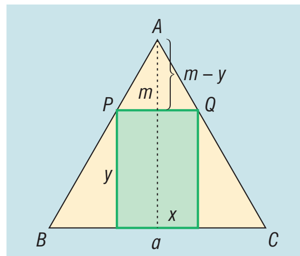
Ebből $x = \frac{12}{zy}$, nyilván $z, y > 0$. A szalag hossza tehát:

$$\frac{48}{zy} + 6z + 6y \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{48}{zy} \cdot 6z \cdot 6y} = 36$$

a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint. Mivel az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\frac{48}{zy} = 6z = 6y$, azaz $z = y$, és így $8 = z^3$, $z = 2$.

A doboz méreteit tehát úgy célszerű választani, hogy $x = 3$ dm, $y = z = 2$ dm legyen. Ekkor lesz szükség a legkevesebb szalagra, a csomózás nélkül 36 dm-re.

5393 A beírt téglalap oldalai legyenek x és y. Az ábra jelölései szerint az $ABC_\triangle$ és az $APQ_\triangle$ hasonló. Ennek alapján:



$$\frac{m-y}{x} = \frac{m}{a}, \qquad \text{azaz} \qquad y = m - \frac{m}{a}x = \frac{m}{a}(a-x).$$

A téglalap területe:

$$xy = \frac{m}{a}x \cdot (a-x), \quad \text{ahol} \quad 0 < x < a.$$

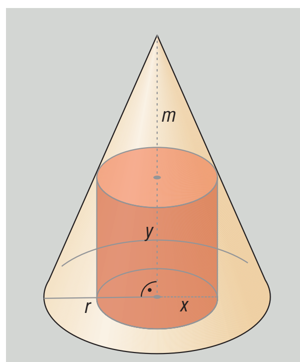
A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{m}{a}x \cdot (a-x) \leq \frac{m}{a}\left(\frac{x+a-x}{2}\right)^2 = \frac{ma}{4},$$

és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x = a - x$, azaz $x = \frac{a}{2}$, és ekkor $y = \frac{m}{2}$.

5394 Legyen a beírt henger alapkörének sugara x, magassága y.

A megfelelő háromszögek hasonlósága miatt:



$$\frac{m-y}{x} = \frac{m}{r}, \qquad \text{amiből} \qquad y = m - \frac{m}{r}x = \frac{m}{r}(r-x).$$

A henger térfogata:

$$x^2 \cdot \pi \cdot y = \frac{m}{r}\pi \cdot x^2 \cdot (r-x), \quad \text{ahol} \quad 0 < x < r.$$

A térfogatot kissé más alakban írva alkalmazhatjuk a három számra vonatkozó számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{m\pi}{2r} \cdot x^2 \cdot (2r-2x) \leq \frac{m\pi}{2r} \cdot \left(\frac{x+x+2r-2x}{3}\right)^3 = \frac{m\pi \cdot 4r^2}{27},$$

és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x = 2r - 2x$, azaz $x = \frac{2r}{3}$, $y = \frac{m}{3}$.

A maximális térfogatú hengert tehát akkor kapjuk, ha a magasságát a kúp magassága egyharmadának, az alapkör sugarát a kúp alapköre sugara kétharmadának választjuk. Ekkor a henger térfogata a kúp térfogatának négykilenced része.

5395 Mivel $0 \le \sin^2 x \le 1$, $\sin^4 x \le \sin^2 x$, hasonlóan kapjuk, hogy $\cos^6 x \le \cos^2 x$, tehát

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^6 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Az 1 értéket az f függvény akkor veheti fel, ha

I. eset: $\sin^4 x = 1$, azaz $\sin^2 x = 1$, tehát $|\sin x| = 1$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, ekkor $\cos x = 0$;

II. eset: $\cos^6 x = 1$, ekkor $|\cos x| = 1$, amiből $x_3 = 0$, $x_4 = \pi$, $x_5 = 2\pi$.

5396 Írjuk át $f(x)$-et a következő alakba:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-3} = x - 3 + \frac{1}{x-3} + 2.$$

Mivel $x > 3$, $x - 3 > 0$, és ismert egyenlőtlenség, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, csak akkor 2, ha a szám 1. Ezért $f(x) \ge 4$, és $x - 3 = 1$, $x = 4$ esetén lesz az értéke 4.

5397 Az $f(x; y)$ definícióját írjuk át így:

$$f(x; y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2 \cdot y^2} = \left(x^2 - y^2\right)^2 + 2x^2 \cdot y^2 + \frac{2}{x^2 \cdot y^2} = \left(x^2 - y^2\right)^2 + 2\left(x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2}\right).$$

Az összeg első tagja nemnegatív, így értéke akkor a legkisebb, ha 0, azaz $x^2 = y^2$.

A második tag a kétszerese $\left(x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{x^2 \cdot y^2}\right)$-nek, ahol $x^2 \cdot y^2 > 0$, ez legalább 2, és csak akkor 2, ha $x^2 \cdot y^2 = 1$. Így azt kaptuk, hogy $f(x; y) \ge 4$, és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x^2 = y^2$ és $x^2 \cdot y^2 = 1$. Ebből az egyenletrendszerből következik, hogy $x = y = 1$, mivel $x, y > 0$.

5398 Írjuk f definícióját a következő alakba:

$$f(x) = \frac{16x^4 + 3}{16x} = x^3 + \frac{3}{16x} = x^3 + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16x}.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget most négy számra alkalmazzuk ($x > 0$), ezért:

$$f(x) \ge 4 \cdot \sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{1}{16^3 \cdot x^3}} = \frac{1}{2},$$

és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x^3 = \frac{1}{16x}$, azaz $x = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2} \le f(x)\right)$.

Az f legkisebb értéke tehát $\frac{1}{2}$, és ezt az $\frac{1}{2}$ helyen veszi fel.

5399 Az f-et definiáló kifejezést most így célszerű átírni:

$$f(x) = \frac{729}{16} \cdot x^4 \cdot (1 - x)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot x^4 \cdot (2 - 2x) \cdot (2 - 2x) \le \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{x + x + x + x + 2 - 2x + 2 - 2x}{6}\right)^6.$$

Mivel $0 \le x \le 1$, $2 - 2x \ge 0$, most hat nemnegatív számra alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget. Ennek alapján:

$$f(x) \le \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^6 = 1.$$

Az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x = 2 - 2x$, azaz $x = \frac{2}{3}$. Az f legnagyobb értéke tehát 1, és ezt az $x = \frac{2}{3}$ helyen veszi fel.

5400 Mivel $\cos x, \sin x > 0$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, használjuk fel, hogy két pozitív szám harmonikus közepe nem nagyobb, mint a négyzetes közepük:

$$\frac{2}{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}} \le \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ebből következik, hogy:

$$2\sqrt{2} \le \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x},$$

$$8 \le \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}\right)^2.$$

Itt az egyenlőség akkor igaz, ha $\cos x = \sin x$, ami $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $x = \frac{\pi}{4}$-re teljesül.

A függvény tehát csak 8-nál nagyobb egyenlő értéket vehet fel. Ugyanakkor tetszőlegesen nagy értéket is felvehet, mert ha $0 < x$, de közel van 0-hoz, akkor $\sin x > 0$, de kicsi, így a reciproka nagy lesz. A függvény értékkészlete a $[8; +\infty[$ intervallum.

5401 Először írjuk fel az f definícióját így:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12} - \sqrt{-x^2 + 2x + 3} =$$
$$= \sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)}.$$

Ebből látható, hogy az f függvény $-1 \le x \le 3$ esetén értelmezve van, és itt pozitív, mert

$$\sqrt{-x^2 + 4x + 12} > \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \ge 0,$$
$$-x^2 + 4x + 12 > -x^2 + 2x + 3 \ge 0,$$
$$x \ge -4,5.$$

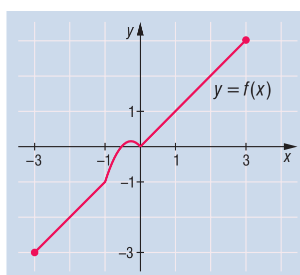
A lépések megfordíthatók. Az f^2 értéke így is előállítható:

$$f^2(x) = \left(\sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)}\right)^2 + 3.$$

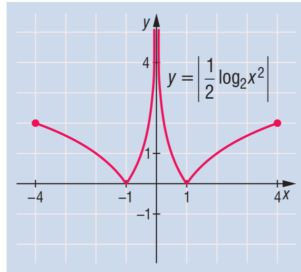
Ebből látható, hogy $f^2(x) \ge 3$. Egyenlőség csak $x = 0$ esetén igaz. Tehát $f(x) \ge \sqrt{3}$, azaz f legkisebb értéke $\sqrt{3}$, és ezt $x = 0$-nál veszi fel.

5402 *a)* Az f függvény definíciója így is írható:

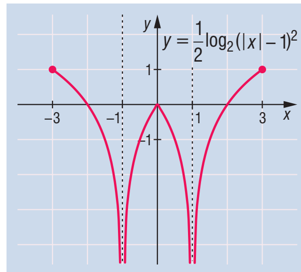
$$f(x) = |x^2 + x| - x^2 = \begin{cases} x, & \text{ha } -3 \le x \le -1,\ 0 \le x \le 3, \\ -2x^2 - x, & \text{ha } -1 \le x \le 0. \end{cases}$$



b) A függvény páros, ábrája szimmetrikus az y tengelyre.



c) Ez is páros függvény, grafikonja szimmetrikus az y tengelyre.

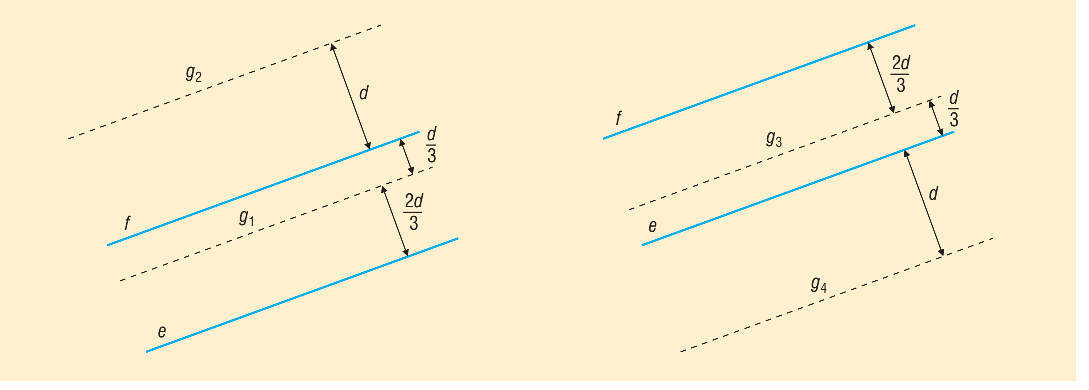


GEOMETRIA – ÖSSZEFOGLALÁS

Alapvető fogalmak – megoldások

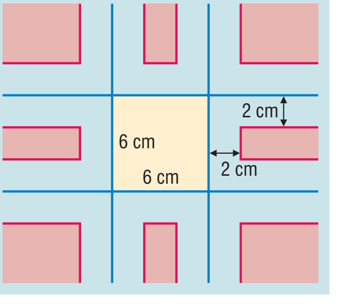
5403 Legyen a két út az e és az f egyenes. Azon pontok, amelyek e-től kétszer akkora távolságra vannak, mint f-től, lehetnek a két egyenes között, és lehetnek f által meghatározott azon félsíkban, amelyik nem tartalmazza e-t.

Ezek a pontok az ábrán látható e-vel és f-fel párhuzamos g_1 és g_2 egyenesek pontjai.

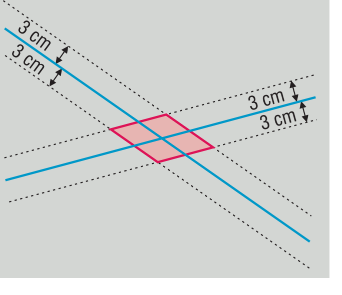


Hasonlóan azon pontok, amelyek f-től kétszer akkora távolságra vannak, mint e-től, az e-vel és f-fel párhuzamos g_3 és g_4 egyenesek pontjai.

5404 Az adott tulajdonságú pontok az ábrán pirossal jelölt pontok.



5405 Az adott tulajdonságú pontok az ábrán pirossal jelölt pontok.



5406 A 2010 pontot úgy kell megadni, hogy egy gömb felületén helyezkedjenek el.

5407 A térben ezek a pontok egy hengerpaláston, vagy az azt lezáró két félgömbön helyezkedhetnek el.

5408 *a)* A 10 pont a térben $\binom{10}{2}$ egyenest határoz meg.

b) A 10 pont a térben $\binom{10}{3}$ háromszöget határoz meg.

5409 Egy tetraéder lapjainak síkjai 15 részre osztják a teret.

5410 *a)* A szög nagysága: 100°.
b) A szög nagysága: 130°.

5411 *a)* A keresett szögek: 36° és 54°.
b) A keresett szögek: 60° és 30°.

5412 A 48°-os szögnek a szögfelezője a másik párhuzamos egyenest 24°-os szögben metszi.

5413 A szögek nagysága: 75° és 105°.

5414 A négy szögfelező egyenes téglalapot határoz meg.

5415 A visszavert fénysugár 40°-os szögben fordul el.

5416 Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja éppen a 10 cm-es oldal felezőpontja, tehát a távolság 0.

5417 A BC oldal a metszéspontból 125°-os szögben látszik.

5418 A háromszög oldalainak hossza:

$$a = \frac{6}{\operatorname{tg} 35^\circ} + \frac{6}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx 15{,}72 \text{ cm},$$
$$b = \frac{6}{\operatorname{tg} 15^\circ} + \frac{6}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx 29{,}54 \text{ cm},$$
$$c = \frac{6}{\operatorname{tg} 15^\circ} + \frac{6}{\operatorname{tg} 35^\circ} \approx 30{,}96 \text{ cm}.$$

5419 A telek negyedik oldala 30 m.

5420 A négyzetes oszlop alaplapja a testátlójával 54,74°-os szöget zár be.

5421 A szabályos négyoldalú gúla
a) alaplapja az oldaléllel 79,98°; *b)* alaplapja az oldallappal 82,87°;
c) két szemben levő oldallapja 14,26° szöget zár be.

5422 A szabályos oktaéder csúcsainak száma hat, ezért a csúcsokon áthaladó egyenesek száma: $\binom{6}{2}$.
Az összes eset száma:

$$\binom{\binom{6}{2}}{2} = \binom{15}{2} = 105.$$

Az A csúcson áthaladó 5 egyenes közül kettőt $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen választhatunk. A kedvező esetek száma 10.
Így annak a valószínűsége, hogy mind a két kiválasztott egyenes áthalad az oktaéder A csúcsán:

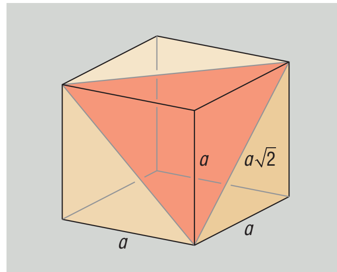
$$\frac{10}{105} = \frac{2}{21} \approx 0{,}096.$$

5423 Egy a élű kocka nyolc csúcsa közül hármat $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen választhatunk ki.

Egy kocka csúcsai 56 háromszöget határoznak meg.

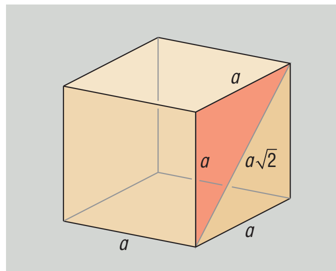
Ezek között a háromszögek között azok száma, amelyeknek minden oldala $a\sqrt{2}$ hosszúságú, a kocka csúcsainak számával egyezik meg, azaz 8 darab ilyen háromszög van. Területük összege:

$$8 \cdot \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4a^2 \cdot \sqrt{3}.$$



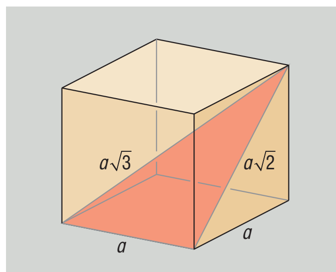
Azon háromszögek száma, amelyeknek két oldala a, egy pedig $a\sqrt{2}$ hosszúságú, a lapok számának a négyszeresese, azaz 24. Területük összege:

$$24 \cdot \frac{a^2}{2} = 12a^2.$$



Azon háromszögek száma, amelyeknek oldalai a, $a\sqrt{2}$ és $a\sqrt{3}$ hosszúságúak, az élek számának a kétszerese, azaz 24. Területük összege:

$$24 \cdot \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = 12a^2 \cdot \sqrt{2}.$$



A háromszögek területeinek az összege:

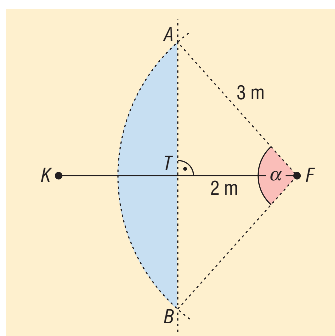
$$4a^2 \cdot \sqrt{3} + 12a^2 + 12a^2 \cdot \sqrt{2} = 4a^2 \cdot \left(\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2}\right) =$$
$$= 400 \cdot \left(\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2}\right) \approx 3589{,}88 \text{ cm}^2.$$

5424 Jelölje a mellékelt ábrán a kút helyét K, a fa helyét F.

A virágágyás pontjai az F középpontú 3 méter sugarú körön belül azok a pontok, amelyek a KF szakasz felezőmerőlegesének K pontot tartalmazó félsíkjában vannak.

A virágágyás egy $r = 3$ m sugarú körszelet területe. A körszelet α középponti szögét a TFA derékszögű háromszögből számíthatjuk:

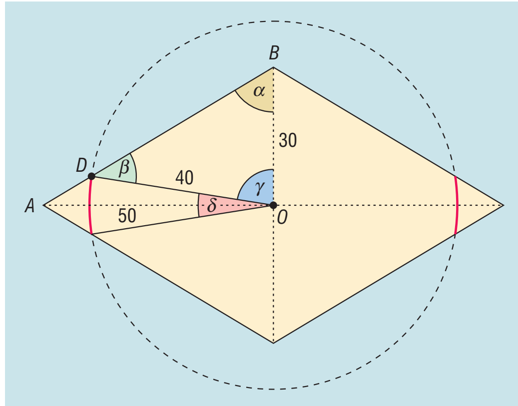
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 96{,}38°.$$



A virágágyás területe úgy számolható, hogy az α középponti szögű körcikk területéből kivonjuk az ABF háromszög területét:

$$T = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} = 3^2 \cdot \pi \cdot \frac{96{,}38°}{360°} - \frac{3^2 \cdot \sin 96{,}38°}{2} \approx 3{,}10 \text{ m}^2.$$

5425 A park középpontja legyen O, egy oldala AB. Az ABO derékszögű háromszög befogóinak hossza 30 m, illetve 50 m.



Mivel O ponttól a sétány 40 méterre halad, az O középpontú, 40 m sugarú kör az AB oldalt egy belső D pontban metszi, így a sétány két körív.

A körív hosszának kiszámításához szükség van az ív δ középponti szögére.

Az ábra jelölései alapján az α szöget az AOB derékszögű háromszögből számolhatjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{50}{30} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 59{,}04°.$$

A BOD háromszögben ismert két oldal és a hosszabbikkal szemben levő szög. A szinusztétel alapján a β szög számolható:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 59{,}04°} = \frac{30}{40} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{30}{40}\cdot\sin 59{,}04° \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 40{,}03°.$$

(A β tompaszög nem lehet, mert nem a leghosszabb oldallal szemközti szög.)

A BOD háromszög γ szöge:

$$180° - 59{,}04° - 40{,}03° = 80{,}93°.$$

Mivel a rombusz átlói merőlegesen metszik egymást:

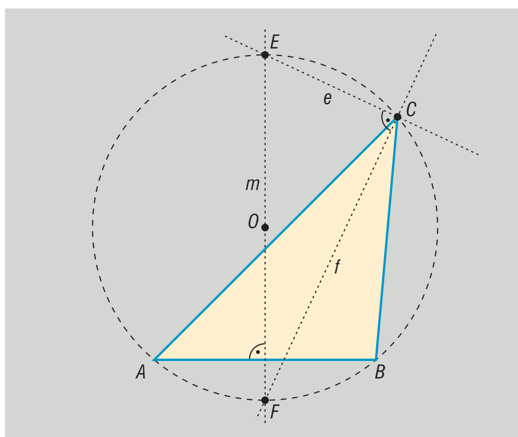
$$\frac{\delta}{2} = 90° - 80{,}93° = 9{,}07° \quad \Rightarrow \quad \delta = 18{,}14°.$$

Az egyik sétány hossza:

$$l = 2\cdot r\cdot\pi\cdot\frac{\delta}{360°} = 2\cdot 40\cdot\pi\cdot\frac{18{,}14°}{360°} \approx 12{,}66 \text{ m}.$$

A tengelyes szimmetria miatt a másik sétány hossza is 12,66 m.

5426 Az AC és BC oldalegyenesektől egyenlő távol lévő pontok halmaza a háromszög C csúcsánál lévő külső és belső szögfelezők. A külső szögfelező egyenese legyen e, a belső szögfelező egyenese f.



Az A és B csúcsoktól egyenlő távol lévő pontok halmaza az AB oldal m oldalfelező merőlegese.

a) Mivel $AC \neq BC$, a belső szögfelező nem eshet egybe az oldalfelező merőlegessel. Ez azt jelenti, hogy a két szögfelezőnek az oldalfelező merőlegessel egy-egy metszéspontja van, tehát két olyan pont van, amely a háromszög AC és BC oldalegyeneseitől, valamint az A és a B csúcstól is egyenlő távol van.

Az m-nek f-fel vett metszéspontja legyen F, e-vel vett metszéspontja E.

b) Ismert, hogy egy háromszög belső szögfelezője és a szemben lévő oldal felezőmerőlegese a háromszög köré írható körön metszik egymást, vagyis az F pont rajta van a háromszög köré írható körön.

A kör AB húrjának m felezőmerőlegesére illeszkedik a kör egyik átmérője.

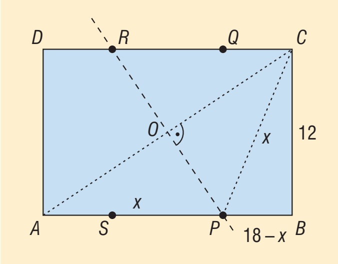
Egy szögnek és mellékszögének felezője merőleges egymásra, tehát e merőleges f-re.

Ezek alapján az m, f és e egyenesek derékszögű háromszöget határoznak meg. Ennek a derékszögű háromszögnek a C-nél van derékszöge, amely az átfogó F csúcsával együtt rajta van az ABC háromszög köré írható körén.

A Thalész-tétel megfordítása értelmében a háromszög E csúcsa is pontja ennek a körnek, és az FE távolság az ABC háromszög köré írható körének átmérője.

A két metszéspont távolsága 20 cm.

5427 Az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = 18$ m és $BC = 12$ m, és az átlók metszéspontja O.



A téglalap síkjában a szemben levő A és C csúcsoktól egyenlő távol lévő pontok halmaza az AC átló felezőmerőlegese. Ez az egyenes az AB oldalt egy P pontban metszi. Legyen $AP = PC = x$.

A PBC derékszögű háromszög átfogója x, egyik befogója $18 - x$, másik befogója 12. A háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

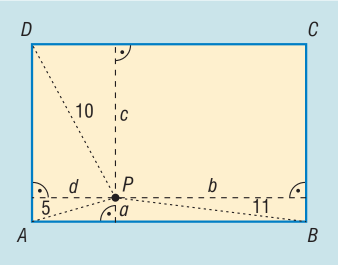
$$x^2 = (18 - x)^2 + 12^2 \quad \Rightarrow \quad x = 13.$$

Az AB oldalon a B csúcstól $18 - 13 = 5$ méter távolságra található egy, a feladat feltételeit kielégítő pont.

A tengelyes és középpontos szimmetria miatt a telek határán négy pont van (P, Q, R és S), amelyek a telek valamely két szemközti sarkától egyenlő távol vannak.

A négy pont közül kettő-kettő a telek hosszabbik oldalán helyezkedik el, a sarkoktól 5 m távolságra.

5428 A P pontnak a téglalap AB, BC, CD és AD oldalától vett távolsága rendre legyen a, b, c és d.



A téglalap csúcsainak P ponttól vett távolságai a Pitagorasz-tétellel a, b, c és d segítségével megadhatók:

$$10^2 = c^2 + d^2,$$
$$5^2 = a^2 + d^2,$$
$$11^2 = a^2 + b^2.$$

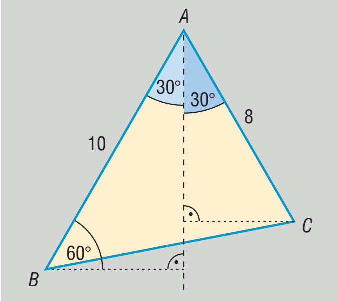
A $PC = \sqrt{b^2 + c^2}$ távolságot kell meghatároznunk.

Az előbbi egyenletek közül az elsőt és harmadikat adjuk össze, majd az összegből vonjuk ki a másodikat.

A $196 = b^2 + c^2$ összefüggéshez jutunk, ahonnan $PC = 14$ adódik.

A téglalap C csúcsa a P ponttól 14 cm távolságra van.

5429 *a)* A háromszög AB oldala, a háromszög A csúcsából kiinduló belső szögfelezője és a B csúcsból a belső szögfelezőre bocsátott merőleges egy fél szabályos háromszöget határoz meg. A fél szabályos háromszög rövidebbik befogója az AB átfogó fele, ami a B csúcsnak a szögfelezőtől vett távolsága, vagyis 5 cm.



Hasonlóan adódik, hogy C csúcsnak a szögfelezőtől vett távolsága 4 cm.

b) Az ABC háromszög harmadik oldala koszinusztétellel számolható:

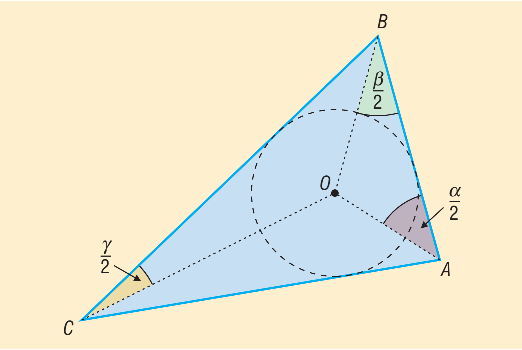
$$BC^2 = 10^2 + 8^2 - 2\cdot 10\cdot 8\cdot \cos 60^\circ \quad\Rightarrow\quad BC = 2\sqrt{21}\ \ (\approx 9{,}17).$$

Egy háromszög belső szögfelezője a szemben levő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. Tehát az A csúcsból kiinduló belső szögfelező a BC oldalt

$$2\sqrt{21}\cdot\frac{10}{10+8} = \frac{10\sqrt{21}}{9} \approx 5{,}09 \text{ cm-es} \quad \text{és} \quad 2\sqrt{21}\cdot\frac{8}{10+8} = \frac{8\sqrt{21}}{9} \approx 4{,}07 \text{ cm-es}$$

részekre osztja.

5430 Az ABC háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja a háromszög beírt körének O középpontja. A háromszög szögei α, β és γ, továbbá legyen $\alpha \ge \beta \ge \gamma$.



Egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

A BOC háromszögben:

$$\frac{\beta}{2} \ge \frac{\gamma}{2} \quad\Rightarrow\quad OC \ge OB.$$

Az AOB háromszögben:

$$\frac{\alpha}{2} \ge \frac{\beta}{2} \quad\Rightarrow\quad OB \ge OA.$$

Tehát az O középponttól mért távolságokra fennáll:

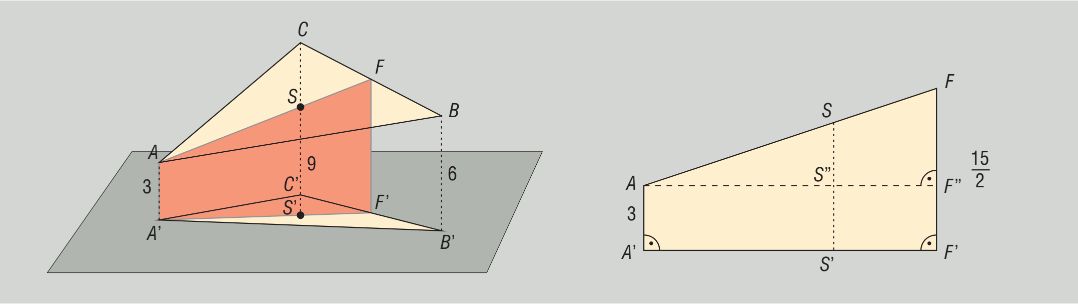
$$OC \ge OB \ge OA.$$

Egy háromszög beírt körének középpontja attól a csúcstól van a legtávolabb, amelyik csúcsnál a legkisebb szög van.

5431 A háromszög A, B és C csúcsainak a síkra eső merőleges vetülete legyen rendre A', B' és C'. A háromszög BC oldalának felezőpontja F, a háromszög súlypontja S, és ezek merőleges vetületei F' és S'.

A $BB'C'C$ négyszög trapéz, amelynek középvonala FF', így hossza az alapok számtani közepe:

$$FF' = \frac{6+9}{2} = \frac{15}{2}.$$



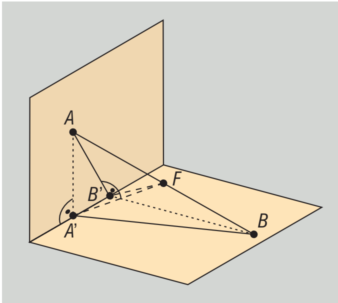
Az $AA'F'F$ négyszög szintén egy trapéz, az alapjainak hossza 3 cm és $\frac{15}{2}$ cm.

Egy háromszög súlypontja a súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadolópontja. Tehát az $AA'F'F$ trapéz szárainak a hosszabbik alaphoz közelebbi harmadolópontjait összekötő szakasz hosszát keressük. A trapézban húzzunk párhuzamost az A csúcson keresztül az $A'F'$ szárral. Ez a párhuzamos az SS' szakaszt S'', az FF' szakaszt F'' pontokban metszi. Az $AS''S$ és $AF''F$ háromszögek hasonlóak, mivel szögeik páronként egyenlők. A megfelelő oldalak hosszának arányát felírva:

$$\frac{SS''}{FF''}=\frac{AS}{AF} \quad \Rightarrow \quad SS''=\frac{AS}{AF}\cdot FF''=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{15}{2}-3\right)=3 \quad \Rightarrow \quad SS'=SS''+S''S'=3+3=6.$$

A háromszög súlypontjának a síktól vett távolsága 6 cm.

5432 Az A, illetve B pontoknak a két sík metszésvonalára eső merőleges vetülete legyen A', illetve B'.



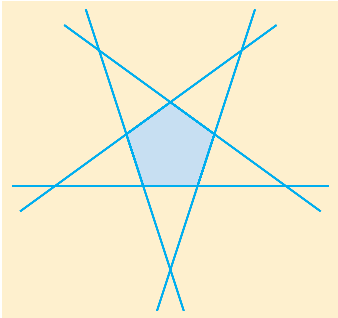
Mivel az AA' egyenes merőleges a B-t tartalmazó síkra, tehát merőleges a sík összes egyenesére, így $A'B$-re is. Ez alapján az $AA'B$ háromszögnek az A'-nél lévő szöge derékszög. Thalész tételének megfordítása alapján a derékszögű csúcs rajta van AB Thalész-körén. Tehát az A' pontnak az AB szakasz F felezőpontjától vett távolsága:

$$\frac{AB}{2}=10 \text{ cm}.$$

Hasonlóan a BB' merőleges az A-t tartalmazó síkra, tehát merőleges a sík összes egyenesére, így AB'-re is. Tehát a $BB'A$ derékszögű háromszögben a B' csúcsnak az AB szakasz F felezőpontjától vett távolsága szintén

$$\frac{AB}{2}=10 \text{ cm}.$$

5433 Egy szabályos ötszög oldalegyenesei a síkot $1+3\cdot 5=16$ részre osztják.



Az ötszög alapú egyenes hasáb alap- és fedőlapjának síkjai párhuzamosak egymással, így a térben ez a két sík az oldallapok síkjaival $3\cdot 16=48$ térrészt hoz létre.

5434 Az a oldalú szabályos tetraéder magasságának hossza $m=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

A szabályos tetraéder magasságai egyben a súlyvonalai is, amelyek negyedelve, a súlypontban metszik egymást. A szabályos tetraéder súlypontja a tetraéder minden csúcsától

$$\frac{3}{4}\cdot m=\frac{3}{4}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}=a\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}$$

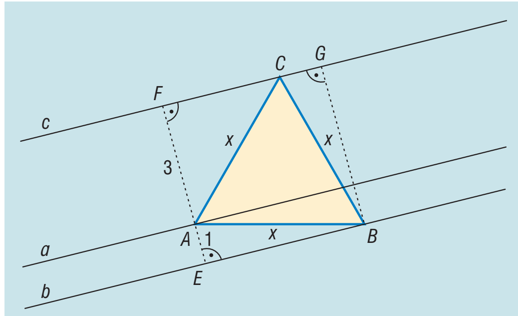
távolságra van.

Mivel $a=12$, ez a távolság: $3\sqrt{6}$ (cm).

Egy 12 cm élű szabályos tetraéder súlypontja a tetraéder minden csúcsától $3\sqrt{6}$ cm távolságra van.

5435 Egy időpillanatban a labda középpontjának a távolsága a pad élétől a labda aktuális sugarának hossza. A középpontnak a faltól vett távolsága ekkor szintén sugárnyi. Ezért a középpont egy olyan parabolaíven mozgott, amelynek vezéregyenese a fal egyenese, fókuszpontja a pad élének pontja.

5436 Az x oldalú ABC szabályos háromszög A, B és C csúcsán áthaladó egyenesek legyenek rendre a, b és c úgy, hogy az a egyenes b és c között halad. Az A csúcsnak b és c egyenesre vonatkozó merőleges vetületei legyenek E és F, a B csúcsnak c egyenesre vonatkozó merőleges vetülete G.



Az AFC derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján:

$$FC = \sqrt{x^2 - 3^2}.$$

Ugyanígy az AEB, illetve a BGC háromszögből:

$$EB = \sqrt{x^2 - 1^2} \quad \text{és} \quad CG = \sqrt{x^2 - 4^2}.$$

Mivel $EB = FC + CG$, x-re a következő összefüggést kapjuk:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 16}.$$

Négyzetre emelések és rendezések után:

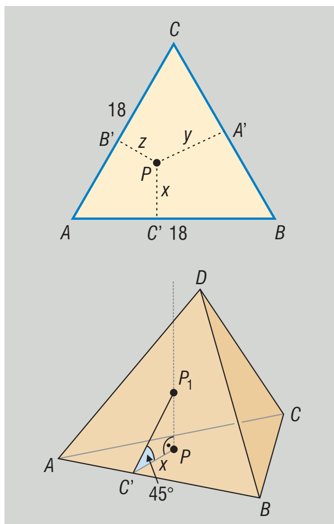
$$0 = x^2 \cdot (3x^2 - 52).$$

Mivel x háromszög oldala, így csak pozitív érték lehet:

$$x = \sqrt{\frac{52}{3}} = \frac{\sqrt{156}}{3}.$$

A háromszög oldala $\dfrac{\sqrt{156}}{3} \approx 4{,}16$ cm.

5437 Egy a oldalú szabályos ABC háromszög P belső pontjának az oldalaktól vett távolsága legyen x, y és z.



A háromszög területe felírható az ABP, BCP, illetve ACP háromszögek területének összegeként és az $\dfrac{a \cdot a \cdot \sin 60°}{2}$ összefüggéssel:

$$\frac{a \cdot x}{2} + \frac{a \cdot y}{2} + \frac{a \cdot z}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4},$$

$$x + y + z = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ \text{(cm)}.$$

Az $ABCD$ szabályos háromoldalú gúla ABC alaplapjának egy belső P pontjában az alaplapra állított merőlegesnek az ABD síkkal vett P_1 metszéspontjából állítsunk merőlegest az AB alapélre. A merőleges talppontja legyen C'. A három merőleges egyenes tétele alapján $C'P$ egyenes is merőleges AB-re, tehát a $P_1C'P$ szög a gúla alaplapjának és oldallapjának bezárt szöge, vagyis 45°. A $P_1C'P$ derékszögű háromszögben:

$$\frac{PP_1}{PC'} = \operatorname{tg} 45° \quad \Rightarrow \quad PP_1 = PC' \cdot \operatorname{tg} 45° = PC' = x.$$

Hasonlóan: $PP_2 = y$ és $PP_3 = z$. A PP_1, PP_2 és PP_3 szakaszok hosszának összege:

$$PP_1 + PP_2 + PP_3 = x + y + z = 9\sqrt{3}.$$

A PP_1, PP_2 és PP_3 szakaszok hosszának összege $9\sqrt{3}$ cm.

Geometriai transzformációk – megoldások

5438 A kitöltött táblázat:

	Identikus transzformáció	Tengelyes tükrözés	Forgatás (mely nem identitás)	Eltolás (mely nem identitás)
Fixpontok	minden pont	a tengely pontjai	a forgatás középpontja	nincsen
Fixegyenesek	minden egyenes	a tengely	nincsen	nincsen
Invariáns egyenesek	minden egyenes	a tengely és a rá merőleges egyenesek	$\alpha = k \cdot 180^\circ$ (k egész szám) esetén a centrumot tartalmazó egyenesek, különben nincsen	az eltolás vektorával párhuzamos egyenesek
Példa invariáns körre	minden kör	kör, melynek középpontja a tengelyre illeszkedik	a centrum középpontú körök	nincsen
Szögtartó	igen	igen	igen	igen
Távolságtartó	igen	igen	igen	igen
Egyenes és képe párhuzamos?	igen	nem feltétlenül	nem feltétlenül	igen
Körüljárási irányt megtartja?	igen	nem	igen	igen

5439 Megfelelő egybevágósági transzformációk például:
1. A két kör középpontját összekötő szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tengelyes tükrözés.
2. A két kör középpontját összekötő szakasz F felezőpontjára vonatkozó középpontos tükrözés.
3. Az egyik kör középpontjából a másik kör középpontjába mutató vektorral történő eltolás.

5440 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis.
e) Igaz. *f)* Hamis. *g)* Igaz. *h)* Igaz.

5441 *a)* A szabályos 13 oldalú sokszögnek 13 szimmetriatengelye van. Ezek között egyetlen olyan sincsen, amely tartalmazza a sokszög valamelyik átlóját.

b) A szabályos 14 oldalú sokszögnek 14 szimmetriatengelye van. Ezek között 7 olyan van, amelyik a sokszög valamelyik átlóját tartalmazza.

5442 A paralelogrammák közül a téglalapok és a rombuszok tengelyesen szimmetrikusak.

5443 A deltoidok közül a rombuszok középpontosan szimmetrikusak.

5444 *a)* Igen. Ha a trapéz téglalap, akkor bármelyik oldalegyenesére is tükrözzük, szintén téglalapot, így persze paralelogrammát kapunk.

b) Igen. A trapézt a rövidebb alap egyenesére tükrözve konkáv hatszöget kapunk.

c) Igen.

d) Igen.

e) Nem. Egy ilyen rombusznak csak két szimmetriatengelye van, a két átlót tartalmazó egyenes. Ezek viszont a rombuszt nem trapézokra, hanem háromszögekre bontják.

5445 *a)* Igen. Ha az egyik szár felezőpontjára tükrözünk, akkor paralelogrammát kapunk.

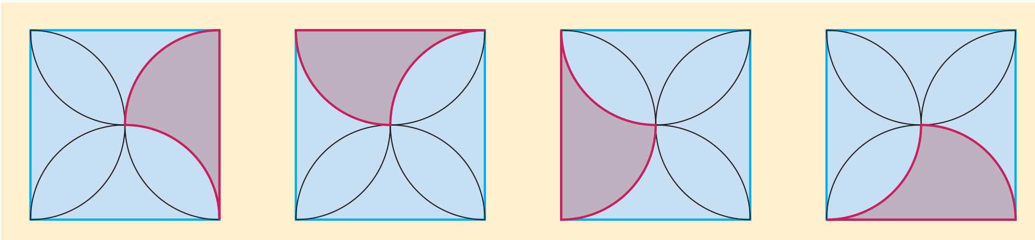
b) Igen. Konkáv hatszöget kapunk, ha a rövidebb alap felezőpontjára tükrözünk.

c) Igen. *d)* Igen. *e)* Igen.

5446 A kialakuló nyolcszögnek két, egymásra merőleges szimmetriatengelye van, ezek a téglalapnak is szimmetriatengelyei.

A nyolcszög középpontosan is szimmetrikus (ezért persze forgásszimmetriát is mutat), középpontja a téglalap középpontjával egybeesik.

5447 *a)* Az egyes forgatások a kiindulási alakzatot a következő helyzetbe viszik.



b) Az ábrákról leolvasható, hogy a lila síkidom a négyzet területének 25%-a.

5448 *a)* Az x tengely mentén 2 egységgel történő eltolás, majd az x tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés, végül az y tengely mentén 1 egységgel történő eltolás.

b) A hozzárendelési szabály: $x \mapsto |x+2| - 1$.

c) A hozzárendelési szabály: $x \mapsto -|x+1| - 1$.

5449 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Hamis.

e) Igaz. *f)* Igaz. *g)* Hamis.

5450 Az átfogó hossza 17 cm, a befogók hossza 2,6 cm és 16,8 cm ($\lambda = 0{,}2$).

5451 *a)* Belső hasonlósági középpontú kicsinyítés. (A pontot és a képét a hasonlósági középpont elválasztja, $|\lambda| < 1$.)

b) Külső hasonlósági középpontú nagyítás. (A pontot és a képét a hasonlósági középpont nem választja el, $\lambda > 1$.)

c) Belső hasonlósági középpontú nagyítás.

5452 Az eredeti ötszög legkisebb oldala 14 cm, ezért $\lambda = \frac{1}{2}$.

A kérdezett ötszög többi oldala: 15 cm, 14 cm, 10 cm, 21 cm.

5453 *a)* Igen, $\lambda = \frac{1}{3}$. *b)* Nem.

5454 $K_\triangle = 12$ cm, ezért $\lambda = 2$. A keresett háromszög oldalai: $a' = 8$ cm, $b' = 10$ cm, $c' = 6$ cm.

5455 A négyzetek oldalait jelölje a és a'.

a) $a = 9$ cm, $a' = 18$ cm; *b)* $a = 12$ cm, $a' = 15$ cm.

5456 A hasonlósági arány és a felszínek aránya:

$$\frac{V'}{V} = \frac{27}{8} = \lambda^3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{2}, \quad \text{így} \quad \frac{A'}{A} = \lambda^2 = \frac{9}{4}.$$

5457 A kitöltött táblázat:

a	b	c	d	x	y
3 cm	5 cm	4 cm	$\frac{20}{3} \approx 6{,}67$ cm	$\frac{45}{8} = 5{,}625$ cm	15 cm
$\frac{20}{9} \approx 2{,}22$ cm	4 cm	3,5 cm	6,3 cm	2,5 cm	7 cm
2 cm	4 cm	2,15 cm	4,3 cm	3 cm	9 cm
3,2 cm	5,6 cm	4 cm	7 cm	4 cm	11 cm

5458 Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét:

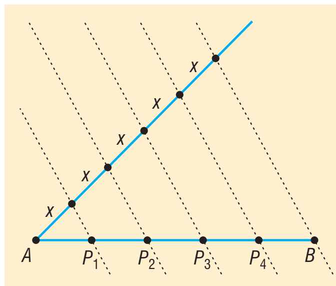
$$\frac{BP}{BE} = \frac{AD}{AE} \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{BE} = \frac{7x}{1{,}2 + BE}.$$

A keresett szakasz hossza: $BE = 0{,}9$ dm $= 9$ cm.

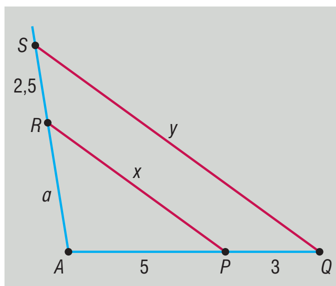
5459 Alkalmazzuk a szögfelezőtételt:

$a_1 \approx 3{,}33$ cm, $a_2 \approx 2{,}67$ cm; $b_1 \approx 3$ cm, $b_2 \approx 5$ cm; $c_1 \approx 4{,}29$ cm, $c_2 \approx 5{,}71$ cm.

5460 Az AB szakaszt öt egyenlő részre kell osztani. A szerkesztés menete az ábrán nyomon követhető. A szabályos ötszög oldala az AP_1 szakasz hosszával egyezik meg.



5461 *a)* A feladathoz készített ábra:



b) A 13-as úton az első útkereszteződés távolsága a település központjától:

$$\frac{a}{5} = \frac{2{,}5}{3}, \quad \text{ebből} \quad a \approx 4{,}17 \text{ km}.$$

c) A feltételek szerint $x = 7$ km. Ebből következik, hogy $\frac{y}{7} = \frac{8}{5}$, amiből $y = 11{,}2$ km. A két út között tehát 11,2 km a távolság a hosszabb összekötő úton.

5462 *a)* A kiegészítő háromszög egyenlő szárú, alapja 6 cm, szárainak hossza $\frac{14}{3} \approx 4{,}67$ cm.

b) A trapéz átlói $2:5$ arányban osztják egymást.

5463 *a)* A tó területe a valóságban $0{,}14$ km^2.

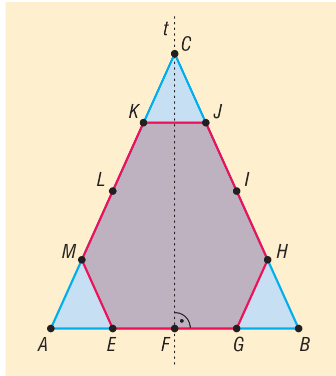
b) A tó területe a térképen $0{,}875$ cm^2.

5464 A tejföl ára körülbelül 0,69 €.

5465 *a)* A négyzetek oldala 6 m, 10 m, illetve 14 m.

b) A kockák élének hossza 3 m, 9 m és 24 m.

5466 *a)* Az $EGHJKM$ hatszög tengelyesen szimmetrikus, tengelye az ABC háromszög t tengelyével esik egybe.



b) A CKJ háromszög hasonló a CAB háromszöghöz (szögeik megegyeznek), a hasonlóság aránya $\frac{1}{4}$, ezért:

$$KJ = \frac{1}{4} \cdot AB.$$

A szögek egyenlősége okán az MAE és HGB háromszögek is hasonlók a CAB háromszöghöz, amiből:

$$ME = \frac{1}{4} \cdot BC \quad \text{és} \quad HG = \frac{1}{4} \cdot AC.$$

Az $EGHJKM$ hatszög kerülete:

$$K_{EGHJKM} = MK + KJ + JH + HG + GE + EM =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot AB + \frac{3}{4} \cdot AC + \frac{3}{4} \cdot BC = \frac{3}{4} \cdot (AB + AC + BC).$$

Ez utóbbi mutatja, hogy a hatszög kerülete az ABC háromszög kerületének $\frac{3}{4}$-szerese.

c) Mivel a hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért:

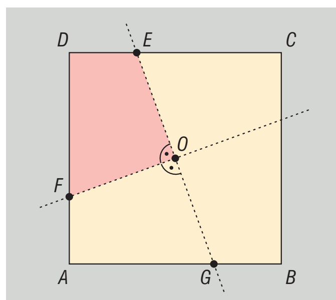
$$T_{CKJ} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC}, \quad T_{MAE} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC} \quad \text{és} \quad T_{HGB} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC}.$$

A kiszámolt területek összegét az ABC háromszög területéből kivonva azt kapjuk, hogy:

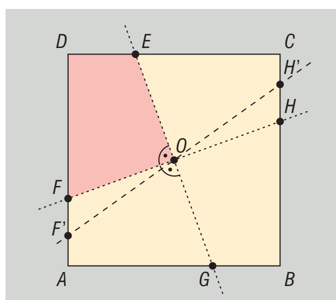
$$T_{EGHJKM} = \frac{13}{16} \cdot T_{ABC}.$$

A hatszög területe az ABC háromszög területének $\frac{13}{16}$-szorosa.

5467 *a)* Ha a két vágás merőleges egymásra és mindkettő átmegy a négyzet O középpontján, akkor az ábra az O középpontú $k \cdot 90°$-os (k egész szám) forgatásokra nézve invariáns, így például a $DFOE$ négyszöget az O pont körüli $90°$-os forgatás az $AGOF$ négyszögbe viszi át, ezért a két négyszög területe megegyezik. Nyilvánvalóan a többi keletkező négyszög területe is ugyanakkora, mint a $DFOE$ négyszögé.



b) Tegyük fel, hogy az EG és FH egyenesek (melyeket az ábrán szaggatott vonalak jelölnek) egyenlő területű részekre bontják az $ABCD$ négyzetet. Ebből következik, hogy az $EDAG$ és $GBCE$ trapézok területe megegyezik (épp az $ABCD$ négyzet területének fele). Ha a négyzet oldala a, akkor a területek egyenlőségéből:



$$\frac{ED + AG}{2} \cdot a = \frac{GB + CE}{2} \cdot a,$$

$$ED + AG = GB + CE.$$

Mivel az utolsó egyenlőségben szereplő négy szakasz hosszának összege $2a$, ezért:

$$ED + AG = GB + CE = a.$$

Azonban az is teljesül, hogy:

$$ED + EC = GB + AG = a,$$

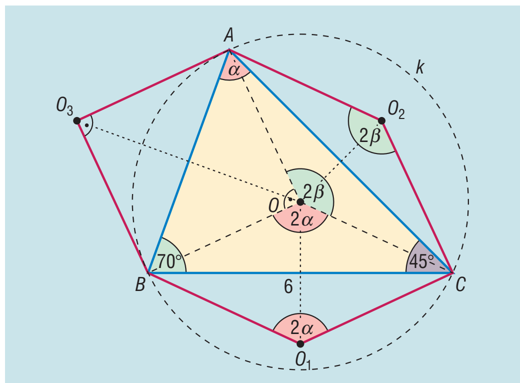
így:

$$AG = EC \quad \text{és} \quad ED = GB.$$

Ebből azonnal következik, hogy GB az ED (továbbá AG az EC) szakasz O pontra vonatkozó tükörképe, ezért EG szükségképpen áthalad a négyzet O középpontján. Hasonlóan bizonyítható az FH egyenesre is.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy az EG egyenes merőleges az FH egyenesre. Ha ez nem teljesülne, akkor az O pontban az EG egyenesre emelt merőleges az F-től különböző F', illetve a H-tól különböző H' pontokban metszené az $ABCD$ négyzet oldalait. Az *a)* feladat eredménye alapján az $EDF'O$ négyszög területe az $ABCD$ négyzet területének negyedrészével lenne egyenlő. Ekkor azonban az $EDFO$ négyszög területe szemlátomást nagyobb lenne (vagy ha F a DF' szakasz belső pontja, akkor kisebb), mint az $EDF'O$ négyszög területe, de azzal semmiképpen nem lehetne egyenlő, ezért az EG és FH egyenesek nem oszthatják egyenlő területű részekre az $ABCD$ négyzetet. Ez mutatja, hogy EG és FH valóban merőlegesek egymásra.

5468 *a)* A tükörképek az ábra jelöléseinek megfelelően O_1, O_2 és O_3. A tükrözés távolságtartó, ezért a $BO_1CO_2AO_3$ hatszög minden oldala a BO, CO vagy az AO szakaszok valamelyikével egyenlő hosszúságú. Mivel a felsorolt szakaszok mindegyike az ABC háromszög köré írható kör egy-egy sugara, ezért a kapott hatszög minden oldala egyenlő hosszú.



b) Az *a)* feladat eredményei alapján a BO_1CO, CO_2AO és AO_3BO négyszögek oldalai megegyeznek, ezért mindegyik rombusz.

c) Az $AOC\sphericalangle$ az ABC háromszög köré írható körben a B-t nem tartalmazó köríven nyugvó középponti szög, ezért a kerületi és középponti szögek tétele alapján:

$$AOC\sphericalangle = 2\beta = 140°.$$

Ugyanilyen megfontolások alapján:

$$BOC\sphericalangle = 2\alpha = 130° \quad \text{és} \quad AOB\sphericalangle = 2\gamma = 90°.$$

A tükrözés szögtartó tulajdonsága alapján:

$$BO_1C\sphericalangle = BOC\sphericalangle = 130°, \quad AO_2C\sphericalangle = AOC\sphericalangle = 140° \quad \text{és} \quad AO_3B\sphericalangle = AOB\sphericalangle = 90°.$$

Az $OBC\sphericalangle$ tükörképe a BC egyenesre vonatkozóan az $O_1BC\sphericalangle$, továbbá az $OBA\sphericalangle$ tükörképe az AB egyenesre vonatkozóan az $O_3BA\sphericalangle$, ezért:

$$O_3BO_1\sphericalangle = O_3BA\sphericalangle + \beta + O_1BC\sphericalangle \quad \text{miatt} \quad O_3BO_1\sphericalangle = OBA\sphericalangle + \beta + OBC\sphericalangle = 2\beta = 140°.$$

Ugyanígy:

$$O_1CO_2\sphericalangle = 2\gamma = 90° \quad \text{és} \quad O_2AO_3\sphericalangle = 2\alpha = 130°.$$

A kialakuló hatszög szemközti szögei megegyeznek, a különböző szögek nagysága 90°, 130°, illetve 140°.

d) A kialakuló hatszög területe kétszerese az ABC háromszög területének. Az ABC háromszögben a szinusztétel alapján: $AC \approx 6{,}22$ cm.

Az ABC háromszög területe:

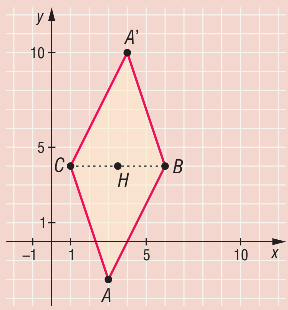
$$T_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin 45^\circ}{2} \approx 13{,}19 \text{ cm}^2.$$

A kialakuló hatszög területe körülbelül $26{,}38 \text{ cm}^2$.

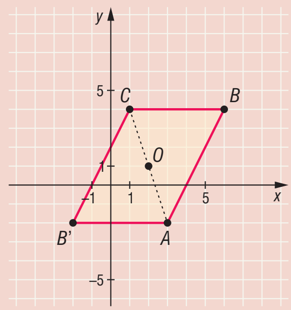
5469 *a)* A megadott pontokat paralelogrammává kell kiegészíteni. Ezt 3 különböző módon tehetjük meg attól függően, hogy az ABC háromszög melyik oldala lesz a paralelogramma átlója.

Ha a paralelogrammának BC az egyik átlója, akkor a BC szakasz $H(3{,}5; 4)$ felezőpontja a paralelogramma középpontja, ezért negyedik csúcsa az A pont H-ra vonatkozó tükörképe (1. ábra). Ebből következik, hogy a paralelogramma hiányzó csúcsa $A'(4; 10)$.

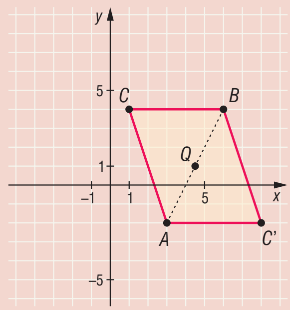
A 2. és a 3. ábra a másik két paralelogrammát mutatja. Ezek negyedik csúcsa $B'(-2; -2)$, illetve $C'(8; -2)$.



1. ábra



2. ábra

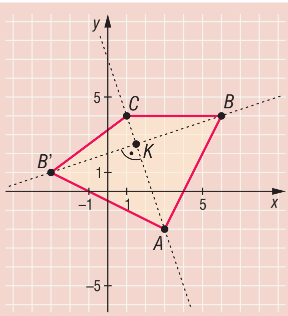


3. ábra

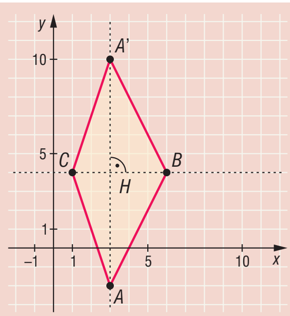
b) A megadott pontokat összesen 6 különböző módon egészíthetjük ki tengelyesen szimmetrikus négyszöggé.

Deltoidot háromféleképpen kaphatunk attól függően, hogy az ABC háromszög melyik oldalegyenese tartalmazza a deltoid szimmetriaátlóját. Ha az AC szakasz a deltoid szimmetriaátlója, akkor a hiányzó csúcs éppen a B pont AC egyenesre vonatkozó tükörképe (4. ábra). Az AC egyenes egyenlete $3x + y = 7$, a B ponton átmenő, AC-re merőleges egyenes egyenlete pedig $x - 3y = -6$. A két egyenes metszéspontja $K(1{,}5; 2{,}5)$. A deltoid negyedik csúcsa a B pont K-ra vonatkozó tükörképe, azaz $B'(-3; 1)$.

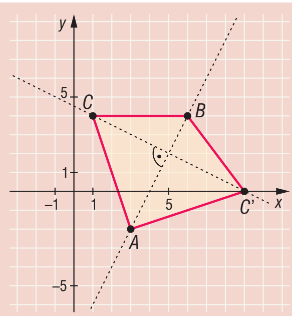
A másik két deltoidot az 5. és a 6. ábrák mutatják. A hiányzó csúcsok koordinátái $A'(3; 10)$ és $C'(9; 0)$.



4. ábra

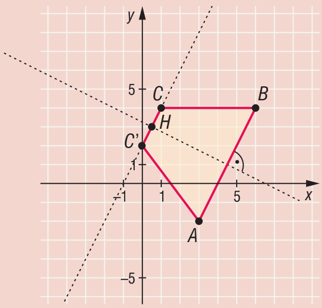


5. ábra

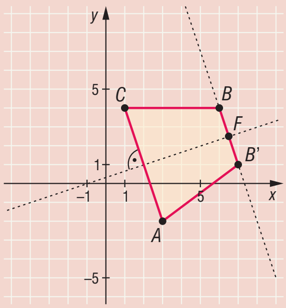


6. ábra

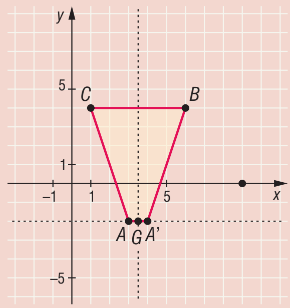
Húrtrapézokból szintén 3 található attól függően, hogy az ABC háromszög melyik oldala az egyik alapja. Ha az AB szakasz, akkor a trapéz szimmetriatengelye az AB szakasz felezőmerőlegese: $x + 2y = 6{,}5$. A másik alapot tartalmazó egyenes átmegy a C ponton és párhuzamos az AB szakasszal, ezért egyenlete $y = 2x + 2$. A kapott két egyenes metszéspontja, azaz a $H(0{,}5; 3)$ pont, a rövidebb alap felezőpontja (7. ábra). A húrtrapéz hiányzó csúcsa $C'(0; 2)$. A további húrtrapézokat a 8. és a 9. ábrák mutatják. Ezek hiányzó csúcsa $B'(7; 1)$ és $A'(4; -2)$.



7. ábra



8. ábra



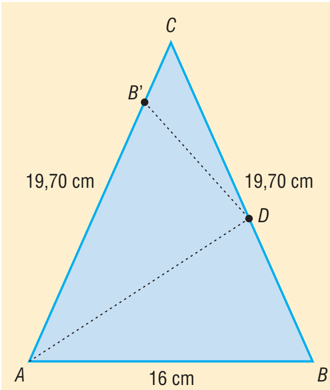
9. ábra

5470 *a)* Az $ABDB'$ négyszög tengelyesen szimmetrikus, szimmetriatengelye az AD átlót tartalmazó egyenes.

b) Mivel a szimmetriatengely tartalmazza a négyszög egyik átlóját, ezért az $ABDB'$ négyszög deltoid.

c) Az első hajtogatás az ABC háromszög AD szögfelezője mentén történt.

d) A feladathoz tartozó 1. ábra alapján:



$$AC = \sqrt{18^2 + 8^2} = 2 \cdot \sqrt{97} \approx 19{,}70 \text{ cm},$$

valamint

$$\operatorname{tg} ABC\sphericalangle = \frac{18}{8} = 2{,}25 \quad \Rightarrow \quad ABC\sphericalangle \approx 66{,}04°.$$

Az ABC háromszögben a szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{16}{19{,}70} \quad \Rightarrow \quad BD \approx 8{,}83 \text{ cm}.$$

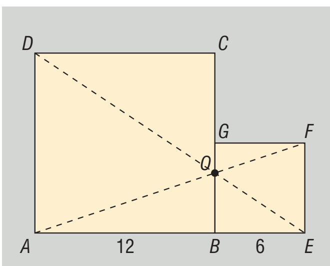
Az $ABDB'$ deltoid területe kétszer akkora, mint az ABD háromszög területe, ezért:

$$T_{ABDB'} = 2 \cdot \frac{AB \cdot BD \cdot \sin ABD\sphericalangle}{2} \approx 16 \cdot 8{,}83 \cdot \sin 66{,}04° \approx 129{,}11 \text{ cm}^2.$$

A madártörzs területe körülbelül $129{,}11 \text{ cm}^2$.

5471 *a)* Az ABO és FGO háromszögek hasonlóak, mert mindkettő derékszögű, és az O csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek.

b) Mivel az $ABCD$ négyzet területe négyszer akkora, mint a $BEFG$ négyzet területe, továbbá hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért az $ABCD$ négyzet oldala 12 cm. Ekkor az ABO és FGO háromszögek hasonlóságának aránya $2:1$, ezért az O pont a BG szakasz G-hez közelebbi harmadolópontja. Ebből következik, hogy $OB = 4$ cm, $OG = 2$ cm és $OC = 8$ cm.



Az O pontnak a négyzetek további csúcsaitól mért távolságát Pitagorasz tételével számolhatjuk:

$$OA = 4\sqrt{10} \approx 12,65 \text{ cm}, \quad OE = 2\sqrt{13} \approx 7,21 \text{ cm},$$
$$OF = 2\sqrt{10} \approx 6,32 \text{ cm}, \quad OD = 4\sqrt{13} \approx 14,42 \text{ cm}.$$

c) A kis négyzetet az O pontra vonatkozó $\lambda = -2$ arányú középpontos hasonlósággal lehet a nagy négyzetbe átvinni.

5472 *a)* Mivel ismert, hogy

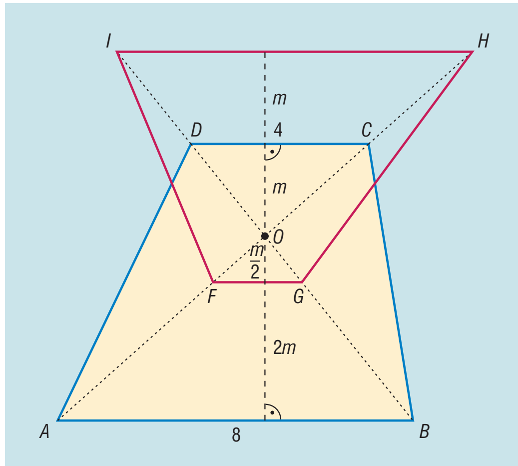
$$\frac{OF}{OA} = \frac{OG}{OB} = \frac{1}{4},$$

ezért a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján $FG \| AB$-vel. Hasonlóan:

$$\frac{OC}{OH} = \frac{OD}{OI} = \frac{1}{2},$$

ebből következik, hogy $HI \| CD$.

Az $ABCD$ trapézban $AB \| CD$, ezért FG és HI egymással párhuzamos szakaszokkal párhuzamos, amiből persze azonnal következik, hogy $FG \| HI$, így az $FGHI$ négyszög valóban trapéz.



Megjegyzés: A párhuzamos szelők tételének megfordítása helyett hivatkozhatunk az OFG és OAB, illetve az OCD és OHI háromszögek hasonlóságára is (egy szög közös, és a szöget közrefogó oldalak aránya egyenlő).

b) Az OCD és OAB háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként egyenlők), továbbá $AB = 2 \cdot CD$, ezért ha az OCD háromszög CD oldalához tartozó magasság m, akkor az OAB háromszög AB oldalához tartozó magasság $2m$ (ld. ábra).

Ebből adódóan az $ABCD$ trapéz területe:

$$T_{ABCD} = \frac{8+4}{2} \cdot (m + 2m) = 18m.$$

A párhuzamos szelőszakaszok tételéből (vagy az OFG és OAB háromszögek hasonlóságából) adódik, hogy:

$$FG = \frac{1}{4} \cdot AB = 2 \text{ cm},$$

ezért az OFG háromszög FG oldalához tartozó magasság az OAB háromszög megfelelő magasságának (azaz $2m$-nek) a negyede, vagyis $\frac{m}{2}$.

Hasonlóan igazolható, hogy $HI = 8$ cm, és az OHI háromszögben a HI oldalhoz $2m$ hosszú magasság tartozik.

Az $FGHI$ trapéz magassága:

$$\frac{m}{2} + 2m = \frac{5}{2}m,$$

területe pedig:

$$T_{FGHI} = \frac{8+2}{2} \cdot \frac{5}{2}m = \frac{25}{2}m.$$

Az $FGHI$ és $ABCD$ trapézok területének aránya:

$$\frac{T_{FGHI}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{25}{2}m}{18m} = \frac{25}{36}.$$

c) Ha az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = a$ és $CD = c$, akkor $FG = \frac{a}{4}$ és $HI = 2c$. Ha az OCD háromszög CD oldalához tartozó magassága ezúttal is m, akkor az OAB háromszög AB oldalához $\frac{a}{c} \cdot m$ hosszú magasság tartozik, ezért az $ABCD$ trapéz magassága $\left(1 + \frac{a}{c}\right) \cdot m$. Az $FGHI$ trapéz magassága:

$$2m + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{c} \cdot m\right) = \frac{8c + a}{4c} \cdot m.$$

A két trapéz területének egyenlőségéből:

$$\frac{a + c}{2} \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right) \cdot m = \frac{\frac{a}{4} + 2c}{2} \cdot \frac{8c + a}{4c} \cdot m.$$

Az egyszerűsítések elvégzése, valamint mindkét oldal 4-gyel való szorzása után:

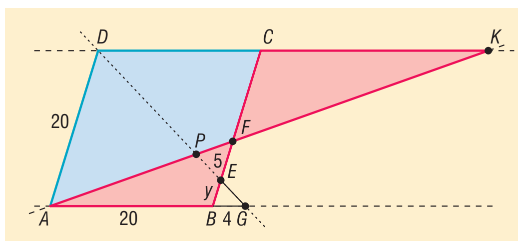
$$16(a + c)^2 = (a + 8c)^2.$$

Az alapok pozitívak, mindkét oldalból gyököt vonhatunk az abszolút érték megjelenése nélkül, így:

$$4(a + c) = a + 8c.$$

A zárójel felbontása után végül pedig $\frac{a}{c} = \frac{4}{3}$ adódik. Ahhoz, hogy a két trapéz területe megegyezzen, szükséges, hogy az $ABCD$ trapéz alapjainak aránya $\frac{4}{3}$ legyen. Beláthatjuk, hogy feltételünk elegendő is egyben.

5473 Ha a DP egyenes az AB egyenest a G pontban metszi és $BE = y$, akkor a párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva az $AGD\sphericalangle$-re azt kapjuk, hogy:



$$\frac{y}{20} = \frac{4}{24},$$

$$y = \frac{10}{3} \approx 3{,}33 \text{ cm}.$$

Ekkor:

$$BF = BE + EF = \frac{10}{3} + 5 = \frac{25}{3} \ (\approx 8{,}33 \text{ cm}),$$

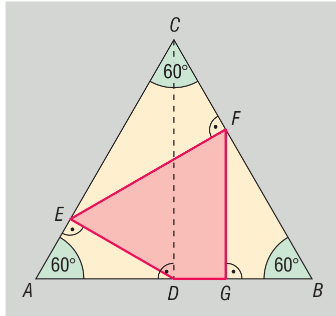
$$FC = 20 - BF = \frac{35}{3} \ (\approx 11{,}67 \text{ cm}).$$

Az ABF és KCF háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként megegyeznek), ezért:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{KC}{CF}, \quad \text{azaz} \quad \frac{20}{\frac{25}{3}} = \frac{KC}{\frac{35}{3}},$$

amiből $KC = 28$ cm.

5474 *a)* Az ADE, CEF és FBG háromszögek mindegyike derékszögű és rendelkezik 60°-os szöggel csakúgy, mint az ACD háromszög. Ebből következik, hogy a felsorolt háromszögek mindegyike hasonló a többihez.



b) Az ADE derékszögű háromszög átfogója feleakkora, mint a hozzá hasonló ACD háromszögé, ezért hasonlóságuk aránya $\frac{1}{2}$, amiből:

$$T_{ADE} = \frac{1}{4} \cdot T_{ACD} = \frac{1}{8} \cdot T_{ABC}.$$

A két háromszög hasonlóságából az is következik, hogy:

$$AE = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{4} \cdot AC,$$

tehát:

$$CE = \frac{3}{4} \cdot AC.$$

Ez azt is jelenti, hogy a CEF háromszög átfogója $\frac{3}{4}$-szerese az ACD háromszög átfogójának.

Mivel a két háromszög hasonló egymáshoz, ezért:

$$T_{CEF} = \frac{9}{16} \cdot T_{ACD} = \frac{9}{32} \cdot T_{ABC}.$$

A két háromszög hasonlóságából továbbá:

$$CF = \frac{3}{4} \cdot AD = \frac{3}{8} \cdot CB,$$

ezért:

$$FB = \frac{5}{8} \cdot CB = \frac{5}{8} \cdot AC.$$

Ekkor viszont az ACD és FBG háromszögek hasonlóságának aránya $\frac{5}{8}$, amiből következik, hogy:

$$T_{FBG} = \frac{25}{64} \cdot T_{ACD} = \frac{25}{128} \cdot T_{ABC}.$$

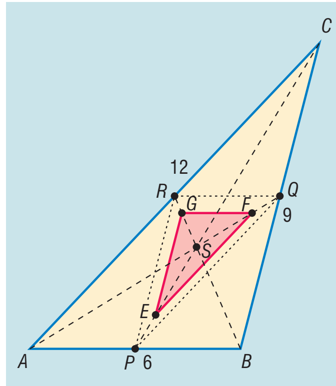
Az ABC háromszög csúcsainál „kimaradó” részek területösszege:

$$T_{ADE} + T_{CEF} + T_{FBG} = \left(\frac{1}{8} + \frac{9}{32} + \frac{25}{128}\right) \cdot T_{ABC} = \frac{77}{128} \cdot T_{ABC}.$$

A tervek szerint a tulipánnal teleültetett rész területe:

$$T_{DEFG} = \frac{51}{128} \cdot T_{ABC},$$

azaz a teljes virágágyásnak körülbelül 39,84%-a borul tulipánba.



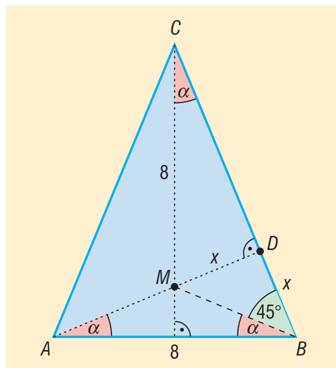
5475 *a)* Ha az ABC háromszög oldalfelező pontjait P, Q és R jelöli, akkor az ABS háromszög E súlypontja $2:1$ arányban osztja az SP szakaszt. Ugyanígy $2:1$ arányban osztja az F pont az SQ, illetve a G pont az SR szakaszokat. Mivel ekkor

$$\frac{SE}{SP} = \frac{SF}{SQ} = \frac{2}{3},$$

így a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján EF és PQ párhuzamos, és ugyanígy GF párhuzamos RQ-val, illetve GE párhuzamos RP-vel. Ebből azonnal következik, hogy az EFG háromszög szögei páronként megegyeznek a PQR háromszög szögeivel, így a két háromszög hasonló egymáshoz. Mivel a PQR háromszög oldalai a CAB háromszög középvonalai, így e két háromszög megfelelő oldalai páronként párhuzamosak, ezért hasonlók egymáshoz. Ebből adódóan az EFG háromszög is hasonló a CAB háromszöghöz.

b) Az EFG háromszög oldalai: $GF = 2$ cm, $GE = 3$ cm és $EF = 4$ cm.

c) Az EFG háromszöget az S középpontú $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal lehet a PQR háromszögbe átvinni. A PQR háromszöget szintén S középpontú, $\lambda_2 = -2$ arányú középpontos hasonlóság viszi át a CAB háromszögbe. Ebből adódóan az EFG háromszöget az S középpontú, $\lambda = -3$ arányú középpontos hasonlósággal lehet a CAB háromszögbe vinni.

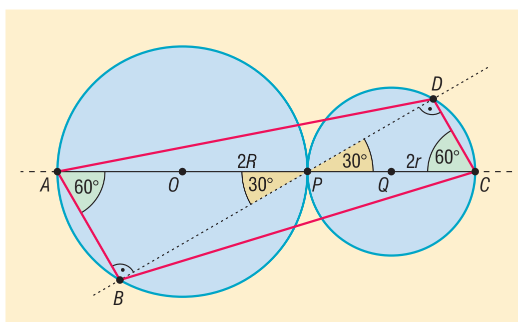


5476 *a)* Mivel a $DAB\sphericalangle$ és a $DCM\sphericalangle$ szárai páronként merőlegesek egymásra, ezért merőleges szárú szögpárt alkotnak, így egyenlő nagyságúak (az ábrán α jelöli). Ebből következik, hogy az ABD és a CMD háromszögekben két-két szög megegyezik, így a két háromszög hasonló. Mivel mindkét háromszög átfogója 8 cm, ezért a két háromszög egybevágó egymással.

b) Az ABD és a CMD háromszögek egybevágóságából következik, hogy az α szöggel szemközti befogóik is megegyeznek, azaz $BD = MD = x$. Ez azt is jelenti, hogy az MBD derékszögű háromszög egyenlő szárú, azaz $MBD\sphericalangle = 45°$. Vegyük még észre, hogy az ABM háromszög AB oldalához tartozó magasságvonala megfelezi az AB oldalt, ezért az ABM háromszög is egyenlő szárú, amiből adódik, hogy $ABM\sphericalangle = \alpha$. Az ABD derékszögű háromszög hegyesszögeinek összegére:

$$\alpha + \alpha + 45° = 90°,$$

ahonnan $\alpha = 22{,}5°$. Az ABC háromszög szögei ezért $67{,}5°$, $67{,}5°$ és $45°$.



5477 *a)* Az $ABCD$ négyszög trapéz, melynek alapjai AB és CD. A forgatás miatt ugyanis:

$$APB\sphericalangle = CPD\sphericalangle = 30°.$$

Thalész tétele alapján az APB és CPD háromszögek derékszögűek, ebből következik, hogy

$$PAB\sphericalangle = PCD\sphericalangle = 60°,$$

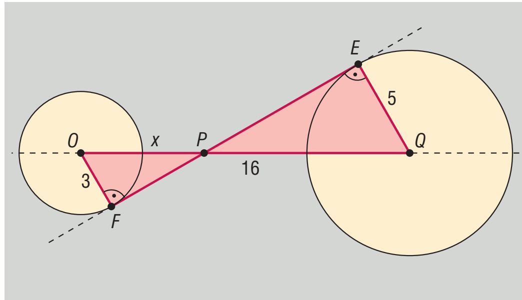
amit úgy is értelmezhetünk, hogy AB és CD $60°$-os szöget zárnak be ugyanazzal az egyenessel, ezért párhuzamosak. Az $ABCD$ négyszög tehát trapéz.

b) Az APB és CPD derékszögű háromszögek egyik hegyesszöge 30º, ezért „félszabályos” háromszögek. Az ilyen háromszögeket a hosszabb befogót tartalmazó egyenesre vonatkozó tükrözéssel szabályos háromszöggé egészíthetjük ki. Ennek megfelelően:

$$AB = R, \qquad DC = r, \qquad m = BD = \sqrt{3}\cdot(R+r),$$

$$T_{ABCD} = \frac{AB+DC}{2}\cdot m = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(R+r)^2.$$

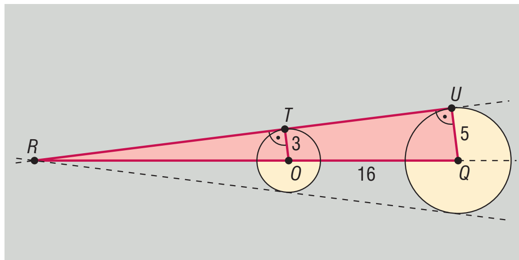
5478 *a)* A középpontokat összekötő OQ egyenesen két olyan pont van, amelyekből közös érintő húzható a körökhöz. Ha az ábra jelöléseit követve a belső érintők metszéspontja P, akkor az OPF háromszög hasonló QPE háromszöghöz, hiszen mindkét háromszög derékszögű, továbbá a P csúcsnál csúcsszögek alakulnak ki. A megfelelő oldalaik arányára:



$$\frac{PO}{PQ} = \frac{OF}{QE}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{PO}{16-PO} = \frac{3}{5},$$

amiből $PO = 6$ cm. A belső hasonlósági pont a kisebb kör középpontjától 6 cm távolságra található.

A közös külső érintőket az alábbi ábra mutatja. Az ROT és RQU háromszögek hasonlósága alapján:



$$\frac{RO}{RQ} = \frac{OT}{QU}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{RO}{16+RO} = \frac{3}{5}.$$

A kapott egyenletből $RO = 24$ cm. A két kör külső hasonlósági pontja a kisebb kör középpontjától 24 cm távolságra található.

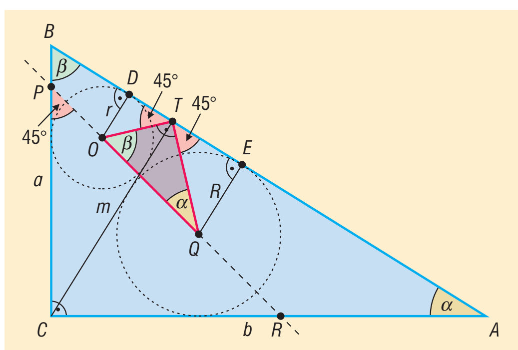
b) A közös belső érintőket tartalmazó ábra EF szakaszának hosszát kérdezi a feladat. Pitagorasz tételét alkalmazva a POF és PQE háromszögekben kapjuk, hogy:

$$PF = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \ (\approx 5{,}20 \text{ cm}),$$

$$PE = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \ (\approx 8{,}66 \text{ cm}).$$

Az EF szakasz hossza $8\sqrt{3} \approx 13{,}86$ cm.

5479 *a)* A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a háromszöget két hasonló háromszögre bontja, amelyek az eredeti háromszöghöz is hasonlók. Ha $BC = a$ és $AC = b$, továbbá a BCT háromszögbe írt kör sugara r, az ACT háromszögbe írté pedig R, akkor a részháromszögek hasonlósága alapján:



$$\frac{r}{R} = \frac{a}{b}. \qquad (1)$$

A Q pont illeszkedik a derékszögű $CTA\sphericalangle$ szögfelezőjére, ezért $CTQ\sphericalangle = 45°$. Ehhez hasonlóan persze $CTO\sphericalangle = 45°$ is teljesül, ezért $QTO\sphericalangle = 45° + 45° = 90°$, így a QOT háromszög derékszögű.

Az OTD és QTE egyenlő szárú derékszögű háromszögek hasonlók, ezért megfelelő oldalaik arányára:

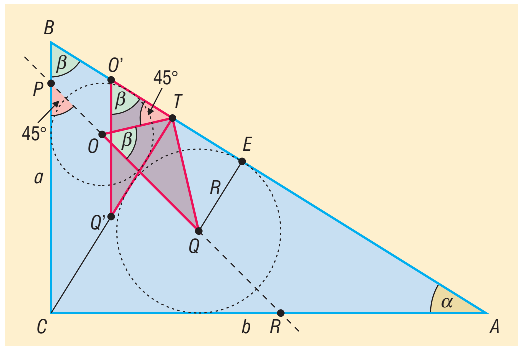
$$\frac{r}{R} = \frac{OT}{QT}. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőségek bal oldala megegyezik, ezért jobb oldalaik is egyenlők, így:

$$\frac{OT}{QT} = \frac{a}{b}.$$

Ez azt jelenti, hogy a QOT és ABC háromszögekben egy-egy szög, valamint a szöget közrefogó oldalak aránya megegyezik, és így a háromszögek valóban hasonlók.

b) Forgassuk el a QOT háromszöget a T pont körül $-45°$-kal. Ekkor a T pont helyben marad, $OTB\sphericalangle = 45°$ miatt pedig az O pont képe illeszkedik a BC szakaszra.



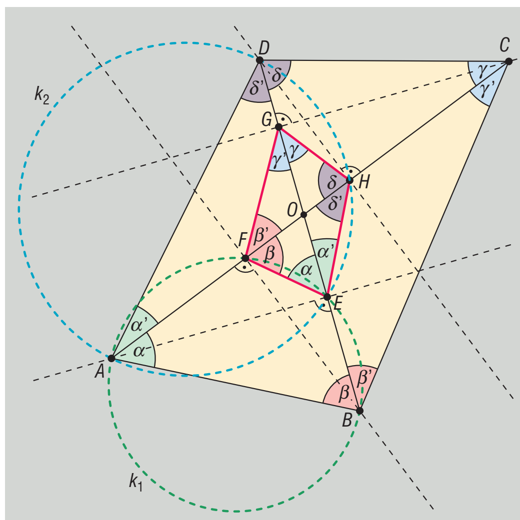
Mivel

$$TOQ\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta,$$

ezért az OQ szakasz elforgatott képe párhuzamos a BC szakasszal. Ekkor viszont az OQ egyenes az OQ szakasz elforgatott képével és a BC szakasszal ugyanazt a szöget, éppen a forgatás 45°-os szögét zárja be.

Összefoglalva, ha az OQ egyenes a BC szakaszt P-ben, az AC szakaszt pedig R-ben metszi, akkor $CPR\sphericalangle = 45°$, ezért a PRC háromszög valóban egyenlő szárú derékszögű háromszög.

5480 Vizsgáljuk meg először az $ABEF$ négyszöget. Mivel $AEB\sphericalangle = AFB\sphericalangle = 90°$, ezért az E és F pontok illeszkednek az AB átmérőjű Thalész-körre (k_1), vagyis az $ABEF$ négyszög húrnégyszög. Mivel a húrnégyszög belső szöge megegyezik a vele szemközti szög külső szögével, ezért az ábra jelöléseit követve:



$$BAF\sphericalangle = OEF\sphericalangle = \alpha, \qquad ABE\sphericalangle = OFE\sphericalangle = \beta.$$

Ha most megnézzük az ABO és EFO háromszögeket, akkor láthatjuk, hogy bennük a szögek páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlók egymáshoz. Pontosan ugyanígy igazolható, hogy a $CDGH$ húrnégyszögben:

$$CDG\sphericalangle = GHO\sphericalangle = \delta, \qquad DCH\sphericalangle = OGH\sphericalangle = \gamma,$$

így $GHO_\triangle \sim CDO_\triangle$.

Az ábra további húrnégyszögeket rejt. Ilyen például az $ADHE$ négyszög. Az ADE és ADH derékszögű háromszögek derékszögű csúcsai illeszkednek az AD szakasz Thalész-körére (k_2). Ekkor a $DAH\sphericalangle$ és a $DEH\sphericalangle$ egyaránt a Thalész-kör DH körívén nyugszanak, így a kerületi szögek tétele alapján $DAH\sphericalangle = DEH\sphericalangle = \alpha'$. Pontosan ugyanígy igazolható, hogy az ábrán azonos módon megjelölt további szögpárok is megegyeznek.

Az $ABCD$ és $EFGH$ négyszögeket páronként hasonló háromszögekre bonthatjuk: $EFO_\triangle \sim ABO_\triangle$; $FGO_\triangle \sim BCO_\triangle$; $GHO_\triangle \sim CDO_\triangle$; $HEO_\triangle \sim DAO_\triangle$.

Ezek alapján az $EFGH$ és $ABCD$ négyszögek valóban hasonlók egymáshoz.

Vektorok. Szögfüggvények – megoldások

5481 *a)* $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$; *b)* $\overrightarrow{IF} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$;

c) $\overrightarrow{ED} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; *d)* $\overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$.

5482 *a)* $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 10\sqrt{2}$ cm;

b) Az A csúcsból a CD oldal felezőpontjába mutató vektor hossza $5\sqrt{5}$ cm.

5483 Igaz állítás: C, D. Hamis állítás: A és B.

5484 Egy szabályos tízszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege nullvektor.

5485 Az E csúcsból a gúla magasságának talppontjába mutató vektor $\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$.

5486 Az $\vec{a} - \vec{b}$ és az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor derékszöget zár be.

5487 A $\vec{v} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ vektor a végpontja a paralelogramma DC oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja.

5488 A csónak $\sqrt{241} \approx 15{,}52 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel mozog.

5489 Az erők eredője $4\sqrt{19} \approx 17{,}44$ N.

5490 A két egységvektor által bezárt szög

a) 30°; *b)* 120°; *c)* 90°.

5491 A kifejezések pontos értéke:

a) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$; *b)* 0; *c)* $\frac{1}{16}$.

5492 Az α konkáv szög többi szögfüggvényének értéke:

a) $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{3}$;

b) $\sin\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$;

c) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$;

d) $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

5493 A kifejezések növekvő sorrendje:

$$\sqrt{3}\cos 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \lg(\cos 8\pi) = 0 < \operatorname{tg} 2010^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} < \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{\operatorname{ctg} 390^\circ - 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

5494 A kifejezések értelmezési tartománya:

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$; *b)* $x \in \mathbb{R}$;

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$; *d)* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A kifejezések egyszerűbb alakja:

a) $\frac{1}{\sin x}$; *b)* $\cos x$; *c)* 0; *d)* 0.

5495 $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5496 *a)* $S_{100} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $S_{2010} = 0$.

5497 A Nap sugarai a Földre $55{,}56°$ szögben esnek.

5498 A 828 m magas épületet $83{,}11°$ szögben látjuk.

5499 *a)* Az emelkedő 4,37%-os. *b)* A hegy 349 m magas.

5500 A két épület egymástól 34,87 m-re van.

5501 A létrával a maximális szerelési magasság 3,84 m, tehát fel tudja szerelni a mester a csillárt.

5502 A hordó 1,75-szor fordul meg a tengelye körül.

5503 A szögek szárai a szabályos háromszög szemközti oldalát két $9\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 15° \approx 4{,}18$ cm, továbbá két $9 - 9\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 15° \approx 4{,}82$ cm hosszú részekre osztják.

5504 A rombusz

a) tompaszöge $126{,}87°$; *b)* átlóinak hossza 8,95 cm és 17,88 cm.

5505 *a)* kerülete 79,22 cm; *b)* területe 334,42 cm^2;

c) beírható körének sugara 8,44 cm.

5506 *a)* kerülete 122,46 cm; *b)* területe 1131,38 cm^2.

5507 Ha egyenes mentén gyalogolunk, 0,66%-kal rövidebb utat tettünk volna meg.

5508 A háromszög 10 cm-es oldalával szemben levő szög $14{,}48°$.

5509 Az asztronauták a Földet $2{,}28°$-os szögben látták.

5510 A hegy legalább 3149 m magas.

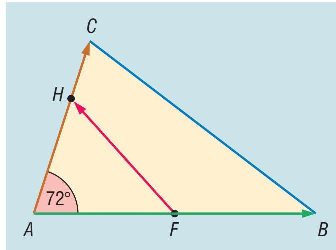
5511 A két kör közös

a) külső érintői $15{,}32°$; *b)* belső érintői $83{,}62°$ szöget zárnak be.

5512 Mivel az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ vektor $\vec{a}$ vektorral megegyező irányú egységvektor, és $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektor $\vec{b}$ vektorral megegyező irányú egységvektor, a két vektor rombuszt feszít ki. Mivel a rombusz átlója felezi a rombusz szögét, az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektor $15°$-os szöget zár be $\vec{a}$ vektorral.

5513 Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F, AC oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja H.

$$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}.$$



Az $\overrightarrow{FH}$ vektor hossza koszinusztétellel az AFH háromszögben számolható:

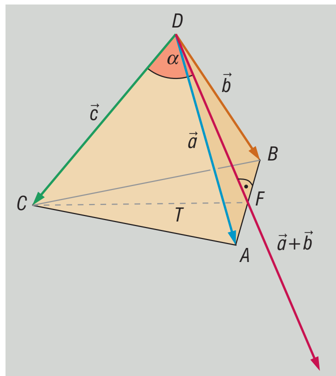
$$FH^2 = AF^2 + AH^2 - 2\cdot AF\cdot AH\cdot\cos 72^\circ \quad\Rightarrow\quad FH \approx 7{,}68.$$

Az AB oldal felezőpontjából az AC oldal C-hez közelebbi harmadolópontjába mutató vektor hossza $7{,}68$ cm.

5514 *a)* A $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok által bezárt szög 60°. Tehát $\vec{b}\cdot\vec{c} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

b) Az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor hossza kétszer akkora, mint az egységoldalú szabályos háromszög magassága,

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$



Az ábrán látható $ABCD$ szabályos tetraéderben az AB él felezőpontja F.

Az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor $\vec{c}$ vektorral bezárt szöge az $\alpha = CDF\sphericalangle$.

A CDF háromszög CD oldala egységnyi, a másik két oldala az egységnyi oldalú szabályos háromszög magassága:

$$CF = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ennek az egyenlő szárú háromszögnek az alaphoz tartozó magasságát behúzva az α szögre felírható:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Így a művelet eredménye:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\alpha = \sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1.$$

c) Mivel egy szabályos tetraéder kitérő élei merőlegesek egymásra, az $\vec{a}-\vec{b}$ vektor merőleges a $\vec{c}$ vektorra, tehát $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = 0$.

5515 *a)* A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt:

$$\sin x > 0 \quad\Rightarrow\quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

A tört nevezőjében nem állhat 0, ezért:

$$\cos x \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+l\pi\right\},\ l\in\mathbb{Z}.$$

A kifejezés értelmezési tartománya a két halmaz metszete:

$$x\in\left]2n\pi;\frac{\pi}{2}+2n\pi\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}+2n\pi;\pi+2n\pi\right[,\ n\in\mathbb{Z}.$$

A kifejezés egyszerűbb alakja: $\dfrac{2^{\log_2\sin x}}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$

b) A négyzetgyökjel alatt álló tört mindig pozitív értéket vesz fel. A tört nevezőjében nem állhat 0, ezért $x \neq 0$, és a ctg miatt $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A kifejezés értelmezési tartománya:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

A kifejezés egyszerűbb alakja:

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x^2}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot x^2}} = \frac{1}{|\cos x| \cdot |x|}.$$

5516 Mivel $\cos x$ nem 0, a kifejezés átírható a következő alakba:

$$\frac{2\sin x + 3\cos x}{5\cos x - 2\sin x} = \frac{2 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} + 3}{5 - 2 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{5 - 2\operatorname{tg} x}.$$

Mivel $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, a kifejezés tovább alakítható:

$$\frac{2\operatorname{tg} x + 3}{5 - 2\operatorname{tg} x} = \frac{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + 3}{5 - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+4}{4-\sqrt{3}} = \frac{19+8\sqrt{3}}{13}.$$

A kifejezés értéke $\dfrac{19+8\sqrt{3}}{13}$.

5517 Az $\dfrac{1}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{9}$ összefüggés bal oldalát alakítva:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \cos^2\alpha.$$

Ez alapján $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{9}$, amiből $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{3}$.

Ha α hegyesszög, akkor $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, ez esetben:

$$a^2 = 10^2 + 22^2 - 2 \cdot 10 \cdot 22 \cdot \cos\alpha = 10^2 + 22^2 - 2 \cdot 10 \cdot 22 \cdot \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad a \approx 20{,}91 \text{ cm}.$$

Ha α tompaszög, akkor $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$, ez esetben:

$$a^2 = 10^2 + 22^2 - 2 \cdot 10 \cdot 22 \cdot \cos\alpha = 10^2 + 22^2 - 2 \cdot 10 \cdot 22 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad a \approx 27{,}03 \text{ cm}.$$

A háromszög harmadik oldala $20{,}91$ cm vagy $27{,}03$ cm.

5518 Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = -\cos^2 x + 2\sin x - 1 = -(1-\sin^2 x) + 2\sin x - 1 = \sin^2 x + 2\sin x - 2 = (\sin x + 1)^2 - 3.$$

Induljunk ki a szinuszfüggvény értékkészletéből: $-1 \le \sin x \le 1$, vagyis $0 \le \sin x + 1 \le 2$.

A másodfokú függvény a nemnegatív valós számok halmazán szigorúan monoton növekvő, tehát $0 \le (\sin x + 1)^2 \le 4$, amiből $-3 \le (\sin x + 1)^2 - 3 \le 1$.

Az $f(x) = -\cos^2 x + 2\sin x - 1$ függvény értékkészlete a $[-3;\ 1]$ intervallum.

5519 Mivel a koszinuszfüggvény 2π szerint periodikus, így az $a_n = \cos n \cdot \frac{\pi}{6}$ sorozat tagjai is periodikusan ismétlődnek:

$$a_n = \cos n \cdot \frac{\pi}{6} = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \cos(n+12k) \cdot \frac{\pi}{6} = a_{n+12k}, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

A sorozat periódusa 12:

$$a_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad a_2 = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \qquad a_3 = \cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} = 0; \qquad a_4 = \cos 4 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$a_5 = \cos 5 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad a_6 = \cos 6 \cdot \frac{\pi}{6} = -1; \qquad a_7 = \cos 7 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad a_8 = \cos 8 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$a_9 = \cos 9 \cdot \frac{\pi}{6} = 0; \qquad a_{10} = \cos 10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \qquad a_{11} = \cos 11 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad a_{12} = \cos 12 \cdot \frac{\pi}{6} = 1.$$

Egy perióduson belül a 12 tag közül 4 irracionális.

Mivel $200 = 16 \cdot 12 + 8$, az irracionális tagok számát megkapjuk úgy, hogy vesszük a 16 periódus $4 \cdot 16$ számú irracionális tagját, és ehhez még hozzávesszük a soron következő $a_{193} = a_1$, $a_{197} = a_5$ és $a_{199} = a_7$ irracionális tagokat.

A sorozat első 200 tagja között tehát $4 \cdot 16 + 3 = 67$ irracionális szám van.

A 200 tag közül kettőt $\binom{200}{2}$-féleképpen választhatunk ki. Az összes eset száma $\binom{200}{2}$. A kedvező esetek száma $\binom{67}{2}$.

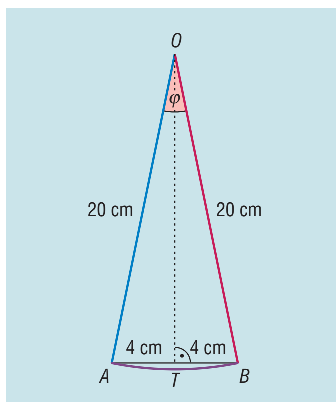
Annak a valószínűsége, hogy mind a két kiválasztott szám irracionális lesz:

$$\frac{\binom{67}{2}}{\binom{200}{2}} = \frac{\frac{67 \cdot 66}{2}}{\frac{200 \cdot 199}{2}} = \frac{2211}{19900} \approx 0{,}11.$$

5520 *a)* Az inga két szélső helyzete közti elfordulás szöge egy 20 cm sugarú kör 8 cm hosszú húrjához tartozó φ középponti szög.

Az ábra jelöléseit használva az ATO derékszögű háromszögből:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AT}{AO} = \frac{4}{20} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 23{,}07°.$$



Az inga végpontja egy lengés alatt a kör AB ívhosszának megfelelő utat tesz meg:

$$i_{AB} = 2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot \frac{\varphi}{360°} = 40 \cdot \pi \cdot \frac{23{,}07°}{360°} \approx 8{,}05 \text{ cm}.$$

Huszonnégy óra alatt az inga végpontja

$$s = 24 \cdot 60 \cdot 50 \cdot i_{AB} = 579\,600 \text{ cm},$$

azaz megközelítőleg $5{,}8$ km utat tesz meg.

b) A nagymutató 2 óra 20 perc alatt kétszer körbefordult, majd a 12 órás helyzetéhez képest még $360° \cdot \frac{20}{60} = 120°$-ot fordult el.

A kismutató óránként 30°-ot fordul el, így a kismutató 2 óra 20 perc alatt $60^\circ + 30^\circ \cdot \frac{20}{60} = 70^\circ$-os szöggel fordul el a 12 órás helyzetéhez képest.

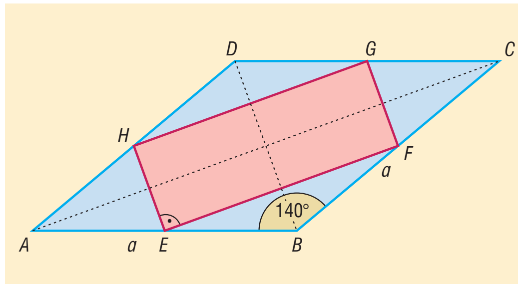
A kis- és nagymutató 2 óra 20 perckor $120^\circ - 70^\circ = 50^\circ$ szöget zár be.

A két mutató végpontjának d távolságát koszinusztétellel határozhatjuk meg:

$$d^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 50^\circ \quad \Rightarrow \quad d \approx 5{,}39 \text{ cm}.$$

A két mutató végpontja 2 óra 20 perckor 5,39 cm távolságra van egymástól.

5521 Az ábrán látható $ABCD$ rombusz oldalainak felezőpontjai által meghatározott négyszög $EFGH$.



Az ABC háromszögben EF középvonal, tehát $EF = \frac{AC}{2}$, és $EF \parallel AC$. Az ABC háromszög hasonló az EBF háromszöghöz, és a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete, ezért: $T_{EBF} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABC}$. Ugyanilyen megfontolással az ADC háromszögben: $T_{HDG} = \frac{1}{4} \cdot T_{ADC}$.

Ezek alapján:

$$T_{EBF} + T_{HDG} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABC} + \frac{1}{4} \cdot T_{ADC} = \frac{1}{4} \cdot (T_{ABC} + T_{ADC}) = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}.$$

Hasonlóan belátható, hogy $T_{EHA} + T_{FCG} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}$.

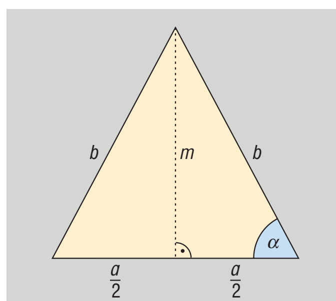
Ezzel bebizonyítottuk, hogy egy négyszög oldalfelezőpontjai által meghatározott négyszög területe fele az eredeti négyszög területének.

A rombusz oldalának hossza legyen a. Területe:

$$a^2 \cdot \sin 140^\circ = 2 \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad a \approx 17{,}64.$$

A rombusz oldalának hossza 17,64 cm.

5522 Az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága m, szára b, az alapja pedig a hosszúságú. Ha a számtani sorozat differenciája d, akkor $m = a - d$ és $b = a + d$.



Az alaphoz tartozó magasság két egybevágó derékszögű háromszögre bontja az egyenlő szárú háromszöget.

Felírva a Pitagorasz-tételt:

$$b^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Mivel a nem lehet 0, az egyenletet rendezve az $a = 16d$ összefüggéshez jutunk.

A háromszög alapon fekvő α szögére felírható:

$$\sin\alpha = \frac{m}{b} = \frac{a-d}{a+d} = \frac{16d - d}{16d + d} = \frac{15}{17} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 61{,}93^\circ.$$

A háromszög szögei 61,93°, 61,93° és 56,14°.

5523 A szabályos sokszög beírt körének sugara legyen r, köré írt körének sugara R.

$$r^2 \cdot \pi = 108\pi \quad \Rightarrow \quad r = 6\sqrt{3},$$
$$R^2 \cdot \pi = 144\pi \quad \Rightarrow \quad R = 12.$$

A szabályos sokszög két szomszédos A és B csúcsát a sokszög O középpontjával összekötve olyan egyenlő szárú háromszöget kapunk, amelynek szára R, magassága r. A háromszög α szárszögére felírható:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ.$$

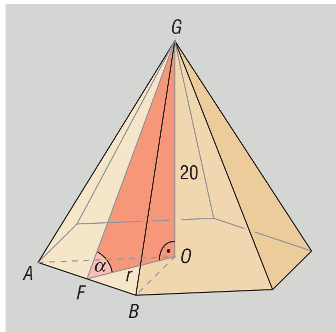
a) A szabályos sokszög $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ oldalú.

b) A szabályos hatszög oldala a köré írható körének sugara, azaz 12 cm.

c) Az ábrán látható egyenes gúla alaplapjának az oldallapjával bezárt α szöge az FOG derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{GO}{FO} = \frac{20}{6\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 62{,}54^\circ.$$

A gúla alaplapja az oldallapjával $62{,}54^\circ$-os szöget zár be.

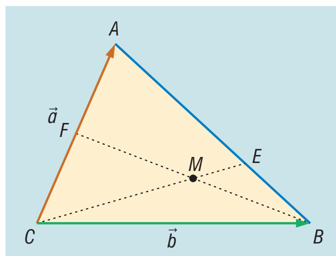


5524 A feltétel szerint:

$$\overrightarrow{CF} = \frac{\vec{a}}{2}, \qquad \overrightarrow{CE} = \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3}.$$

Mivel $\overrightarrow{CM}$ és $\overrightarrow{CE}$ vektorok egyirányúak, létezik olyan α valós szám, hogy:

$$\overrightarrow{CM} = \alpha \cdot \overrightarrow{CE} = \alpha \cdot \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3}.$$



A $\overrightarrow{BF} = \frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$, és mivel $\overrightarrow{BM}$ és $\overrightarrow{BF}$ vektorok egyirányúak, létezik olyan β valós szám, hogy:

$$\overrightarrow{BM} = \beta \cdot \overrightarrow{BF} = \beta \cdot \left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}\right).$$

Ugyanakkor igaz, hogy $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$, tehát:

$$\beta \cdot \left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}\right) = \alpha \cdot \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3} - \vec{b}, \quad \text{amiből átrendezés után} \quad \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{3}\right) \cdot \vec{a} = \left(\beta - 1 + \frac{2\alpha}{3}\right) \cdot \vec{b}.$$

Mivel $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem párhuzamos vektorok, ez utóbbi egyenlőség csak akkor áll fenn, ha:

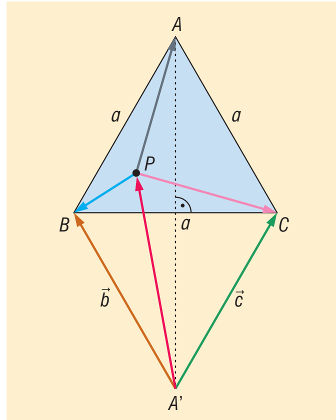
$$\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{3} = 0 \quad \text{és} \quad \beta - 1 + \frac{2\alpha}{3} = 0.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\beta = \frac{1}{2}$ és $\alpha = \frac{3}{4}$.

Tehát a $\overrightarrow{CM}$ vektor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével kifejezve:

$$\overrightarrow{CM} = \alpha \cdot \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3} = \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{4}.$$

5525 Az ABC szabályos háromszög oldalának hossza legyen a. Az A csúcsnak a BC oldal egyenesére vonatkozó tükörképe A'.



Legyen $\overrightarrow{A'B} = \vec{b}$ és $\overrightarrow{A'C} = \vec{c}$, valamint P a sík egy tetszőleges pontja. Ekkor:

$$\overrightarrow{PB} = \vec{b} - \overrightarrow{A'P}, \qquad \overrightarrow{PC} = \vec{c} - \overrightarrow{A'P},$$

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{A'A} - \overrightarrow{A'P} = \vec{b} + \vec{c} - \overrightarrow{A'P}.$$

Azokat a P pontokat keressük, amelyekre:

$$PA^2 = PB^2 + PC^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{PA}\right)^2 = \left(\overrightarrow{PB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PC}\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\vec{b} + \vec{c} - \overrightarrow{A'P}\right)^2 = \left(\vec{b} - \overrightarrow{A'P}\right)^2 + \left(\vec{c} - \overrightarrow{A'P}\right)^2.$$

Felhasználva a skaláris szorzás disztributív tulajdonságát:

$$\left(\vec{b} + \vec{c} - \overrightarrow{A'P}\right)^2 = \left(\vec{b} - \overrightarrow{A'P}\right)^2 + \left(\vec{c} - \overrightarrow{A'P}\right)^2,$$

$$\left(\vec{b}\right)^2 + \left(\vec{c}\right)^2 + \left(\overrightarrow{A'P}\right)^2 + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\overrightarrow{A'P} - 2\vec{c}\cdot\overrightarrow{A'P} = \left(\vec{b}\right)^2 - 2\vec{b}\cdot\overrightarrow{A'P} + \left(\overrightarrow{A'P}\right)^2 + \left(\vec{c}\right)^2 - 2\vec{c}\cdot\overrightarrow{A'P} + \left(\overrightarrow{A'P}\right)^2,$$

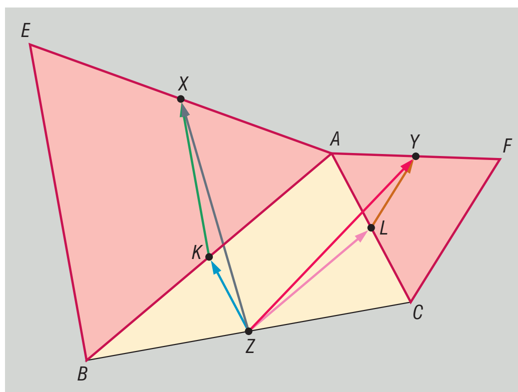
$$2\vec{b}\vec{c} = \left(\overrightarrow{A'P}\right)^2.$$

A $2\vec{b}\cdot\vec{c}$ skaláris szorzat értéke:

$$2\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 2\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos 60° = 2\cdot a\cdot a\cdot\frac{1}{2} = a^2.$$

Ez utóbbi eredményünk azt jelenti, hogy az adott tulajdonságú P pontok halmaza az A' pont köré írt a sugarú kör.

5526 A BC oldal felezőpontja legyen Z, az AE oldalé X és az AF oldalé Y.



Elég belátni, hogy a $\overrightarrow{ZX}$ vektor a $\overrightarrow{ZY}$ vektor $+60°$-os forgatottja.

Legyen AB oldal felezőpontja K, AC oldal felezőpontja L. Ekkor

$$\overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{ZK} + \overrightarrow{KX}, \quad \text{illetve} \quad \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{ZL} + \overrightarrow{LY}.$$

Mivel a KAX háromszög szabályos háromszög, $\overrightarrow{KX}$ vektor $\overrightarrow{KA}$ vektor $+60°$-os forgatottja.

Az ABC háromszög középvonala ZL, tehát $\overrightarrow{ZL} = \overrightarrow{KA}$, amiből adódik, hogy a $\overrightarrow{KX}$ vektor a $\overrightarrow{ZL}$ vektor $+60°$-os forgatottja.

Hasonlóan belátható, hogy $\overrightarrow{ZK}$ vektor a $\overrightarrow{LY}$ vektor $+60°$-os forgatottja.

Tehát a $\overrightarrow{ZX}$ vektor $\overrightarrow{ZK}$ és $\overrightarrow{KX}$ összetevői a $\overrightarrow{ZY}$ vektor $\overrightarrow{LY}$ és $\overrightarrow{ZL}$ összetevőinek $+60°$-os forgatottjai.

Ez azt jelenti, hogy a $\overrightarrow{ZX}$ vektor a $\overrightarrow{ZY}$ vektor $+60°$-os forgatottja.

5527 Alakítsuk át a kifejezést:

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{(1-\cos^2 x)^2 + 4\cos^2 x} + \sqrt{(1-\sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{(1+\cos^2 x)^2} + \sqrt{(1+\sin^2 x)^2} = 1 + \cos^2 x + 1 + \sin^2 x = 3.$$

5528 Alkalmazzuk a megfelelő trigonometrikus összefüggéseket:

a) $$4\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=4\cdot\left(\frac{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]-\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{2}\right)=$$

$$=4\cdot\frac{\cos\frac{2\pi}{3}-\cos 2x}{2}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}-\cos 2x\right)=-1-2\cdot(1-2\cdot\sin^2 x)=4\cdot\sin^2 x-3;$$

b) $$\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{\cos 2x}=\frac{\sin 2x+1}{\cos 2x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\cos x+\sin x)\cdot(\cos x-\sin x)}=$$

$$=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}.$$

5529 Használjuk fel a két tag összegének négyzetére és köbére vonatkozó nevezetes azonosságot, valamint a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ összefüggést:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x,$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^4 x\cdot\cos^2 x-3\sin^2 x\cdot\cos^4 x=$$
$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)=1-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x.$$

Ez alapján a kifejezés átalakítható:

$$(\sin^6 x+\cos^6 x)\cdot p^2+(\sin^4 x+\cos^4 x)\cdot p-4(\sin^4 x+\cos^4 x)=$$
$$=(1-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x)\cdot p^2+(1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x)\cdot p-4(1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x)=$$
$$=p^2+p-4-(3p^2+2p-8)\cdot(\sin^2 x\cdot\cos^2 x).$$

Ez a kifejezés akkor lesz x-től független, ha $3p^2+2p-8=0$.

Az egyenlet gyökei: $p_2=-2$ és $p_2=\frac{4}{3}$.

Ha a p paraméter értéke -2 vagy $\frac{4}{3}$, akkor a kifejezés értéke x-től független állandó.

5530 Az egyenlőség igazolásához elég belátni, hogy:

$$4\cdot t\cdot\operatorname{ctg}\alpha+4\cdot t\cdot\operatorname{ctg}\beta+4\cdot t\cdot\operatorname{ctg}\gamma=a^2+b^2+c^2.$$

A kotangens szögfüggvény definícióját és a háromszög területére vonatkozó trigonometrikus összefüggéseket használva a bal oldal tovább alakítható:

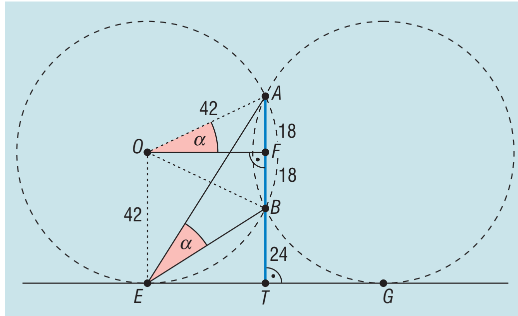
$$4t\cdot\operatorname{ctg}\alpha+4t\cdot\operatorname{ctg}\beta+4t\cdot\operatorname{ctg}\gamma=$$
$$=4\cdot\frac{bc\cdot\sin\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+4\cdot\frac{ac\cdot\sin\beta}{2}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+4\cdot\frac{ab\cdot\sin\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=$$
$$=2bc\cdot\cos\alpha+2ac\cdot\cos\beta+2ab\cdot\cos\gamma.$$

A koszinusztétel alapján:

$$2bc\cdot\cos\alpha+2ac\cdot\cos\beta+2ab\cdot\cos\gamma=$$
$$=\left(b^2+c^2-a^2\right)+\left(a^2+c^2-b^2\right)+\left(a^2+b^2-c^2\right)=a^2+b^2+c^2.$$

Ezzel a bizonyítandó egyenlőséget beláttuk.

5531 Tekintsük a mellékelt ábra jelöléseit. A torony teteje legyen A, talppontja T, a felső $\frac{3}{5}$ része AB.



Tekintsünk egy a tornyot tartalmazó, a talaj síkjára merőleges síkot.

Vegyük AB szakasz azon látószögkörívét, amelyik érinti a talaj egyenesét.

Ha az AB szakasz az E és G érintési pontból α szög alatt látszik, akkor a látszögköríven kívül lévő minden pontból α-nál kisebb szög alatt látszik.

Tehát az AB szakasz a talaj egyenesének E és G érintési pontjából látszik a legnagyobb szög alatt.

Ennek a látószögkörívnek a sugara az AB szakasz F felezőpontjának T ponttól vett távolsága:

$$\frac{2}{5}\cdot 60+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot 60=42\text{ m}.$$

Az $ET=OF$ távolságot az OAF derékszögű háromszögből határozhatjuk meg:

$$OF=ET=\sqrt{42^2-18^2}=12\sqrt{10}.$$

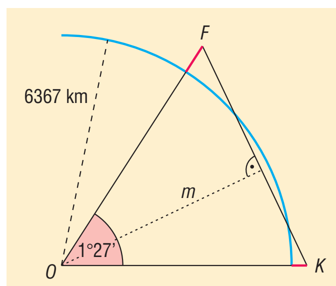
A torony felső $\frac{3}{5}$ része a vízszintes síkon egy olyan kör kerületének pontjaiból látszik a legnagyobb szögben, amelynek sugara $12\sqrt{10}\approx 37{,}95$ m, és középpontja a torony talppontja.

Az α szög a kerületi és középponti szögek tétele alapján egyenlő az $AOF\sphericalangle$-gel, amely az AOF háromszögből számítható:

$$\sin\alpha=\frac{FA}{OA}=\frac{18}{42}\quad\Rightarrow\quad\alpha\approx 25{,}38°.$$

A torony felső $\frac{3}{5}$ része a vízszintes síkon legfeljebb 25,38° szög alatt látszik.

5532 Tekintsük a mellékelt sematikus ábrát. A Föld középpontja legyen az O pont, a Fogadalmi templom tornyának a teteje az F, a kilátó a K pont.



A két város megközelítőleg azonos szélességi fokon van, az $FOK\sphericalangle$ nagysága: 20°09' – 18°42' = 1°27'.

A kilátó és a templom tengerszint feletti magasságát is figyelembe véve $OK = 6367{,}136$ km és $OF = 6367{,}165$ km.

Azt kell megvizsgálni, hogy a Fogadalmi templom tornyának a teteje a kilátóhelyről nézve a látóhatár felett van-e.

Ehhez arra a kérdésre kell válaszolnunk, hogy a Föld középpontjának a KF egyenestől mért m távolsága a Föld sugaránál kisebb vagy nagyobb.

Számítsuk ki a KOF háromszög KF oldalának hosszát koszinusztétellel: $KF\approx 161{,}13$ km.

A háromszög $KF = 161{,}13$ km hosszú oldalához tartozó m magasságának meghatározásához a háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{6367{,}136\cdot 6367{,}165\cdot\sin 1°27'}{2}=\frac{161{,}13\cdot m}{2}\quad\Rightarrow\quad m\approx 6366{,}68\text{ km}.$$

Mivel $m < 6367$ km, a KF egyenesnek a Föld O középpontjától való távolsága kisebb, mint a Föld sugara, tehát biztosan nem lehet látni a templom tornyát a kilátóhelyről.

Nevezetes síkidomok tulajdonságai – megoldások

5533 A háromszög-egyenlőtlenségből: $4 < c < 18$. Lehetséges értékek c-re: 5, 7, 11, 13, 17 (cm).

5534 90°, 45° és 45°.

5535 A két szögfelező 62,5°-os szöget zár be egymással.

5536 A két magasságvonal 55°-os szöget zár be egymással.

5537 70°.

5538 Nem lehetnek. A középvonalak hossza nem elégíti ki a háromszög-egyenlőtlenséget.

5539 Az AB távolság lehetséges értékei: 9 km, 10 km, 11 km, 12 km és 13 km.

5540 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Igaz. *d)* Hamis. *e)* Hamis. *f)* Igaz.
g) Hamis. *h)* Hamis. *i)* Igaz.

5541 Ha a kerületi szöget α, akkor a hozzá tartozó középponti szöget 2α jelöli, tehát $3\alpha = 22{,}5°$. A keresett szögek:

$$\alpha = 7{,}5° = \frac{\pi}{24}\text{ (rad)}, \qquad 2\alpha = 15° = \frac{\pi}{12}\text{ (rad)}.$$

5542 A háromszög belső szögei: 70°, 65°, 45°.

5543 *a)* $R = 8$ cm; *b)* $R = 6{,}5$ cm; *c)* $R \approx 4{,}58$ cm.

5544 *a)* derékszögű; *b)* tompaszögű; *c)* hegyesszögű; *d)* derékszögű.

5545 *a)* A másik befogó hossza körülbelül 71,69 cm, az átfogó 96,77 cm.
b) A körülírt kör sugara kb. 48,39 cm.
c) A beírt kör sugara kb. 19,96 cm.
d) Az AB oldalhoz tartozó súlyvonal 48,39 cm, a BC oldalhoz tartozó 78,71 cm, az AC oldalhoz tartozó 74,23 cm.

5546

a	b	c	m	p	q
28	45	53	$\frac{1260}{53} \approx 23{,}77$	$\frac{784}{53} \approx 14{,}79$	$\frac{2025}{53} \approx 38{,}21$
$24\sqrt{5} \approx 53{,}67$	$12\sqrt{5} \approx 26{,}83$	60	24	48	12
25	$\frac{175}{24} \approx 7{,}29$	$\frac{625}{24} \approx 26{,}04$	7	24	$\frac{49}{24} \approx 2{,}04$
48 (vagy 55)	55 (vagy 48)	73	$\frac{2640}{73}$	$\frac{2304}{73}, \left(\frac{3025}{73}\right)$	$\frac{3025}{73}, \left(\frac{2304}{73}\right)$

5547 Először alkalmazva a magasságtételt, ered, hogy az átfogó: $c = 10$ cm. Majd például befogótételekkel számolva: $a = 2\sqrt{5}$ cm, $b = 4\sqrt{5}$ cm.

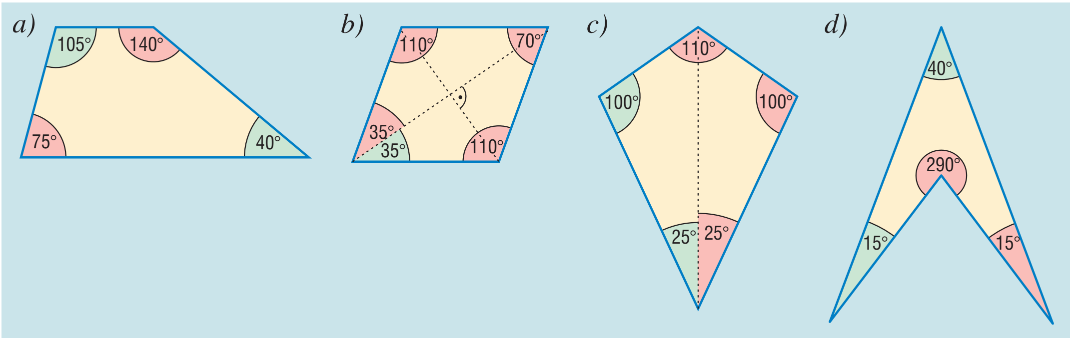
5548 *a)* A szinusztétel alapján $\sin\alpha \approx 0{,}7329$. Két ilyen háromszög van. Az egyikben $\alpha \approx 47{,}13°$, $\gamma \approx 112{,}87°$ és $AB \approx 18{,}86$ cm. A másik háromszögben $\alpha \approx 132{,}87°$, $\gamma \approx 27{,}13°$ és $AB \approx 9{,}33$ cm.
b) A szinusztétel alapján $\sin\alpha \approx 1{,}0004$. Mivel $\sin\alpha \le 1$ mindig teljesül, ezért nincsen ilyen háromszög. Ha valaki két tizedesjegyre kerekít, akkor $\sin\alpha \approx 1{,}00$, ezáltal α-ra 90° adódna. A hiba az, hogy a $\sin\alpha$ maximumát a közelítő érték lefelé kerekítése után kaptuk, így természetesen nem létezik ilyen háromszög.

5549 *a)* Az Andrásfalva és Csabaháza közti út hossza pontosan $\sqrt{3}$-szorosa a Barnabásfalva és Csabaháza közti út hosszának.

b) A két út 30°-os szöget zár be egymással.

5550 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Hamis. *e)* Hamis. *f)* Hamis.
g) Igaz. *h)* Igaz. *i)* Hamis.

5551



5552 A deltoid két oldalának hossza 61 cm, másik két oldala $\sqrt{521} \approx 22{,}83$ cm. A deltoid szögei 140,80°, 140,80°, 57,62°, 20,78°. A deltoid területe 880 cm^2.

5553 A rombusz átlóinak hossza 8 cm és 12 cm, területe 48 cm^2, különböző szögei 112,62° és 67,38°.

5554 A paralelogramma területe 75 cm^2. A középvonalak hossza 5,13 cm és 16,92 cm. A paralelogramma különböző szögei 59,78° és 120,22°.

5555 *a)* Igen, a 27 oldalú sokszögek. *b)* Nincs ilyen sokszög.

5556 A sokszögnek 12 oldala van. A belső szögek összege 1800°, a külső szögek összege 360°.

5557 A szabályos sokszögnek 8 oldala, és így 8 szimmetriatengelye van. A sokszög belső szöge 135°.

5558 A sokszögnek 6 oldala van.

5559 A húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180°. Mivel a deltoidnak biztosan van két egyenlő nagyságú szemközti szöge, ezért ezek csak 90°-osak lehetnek. Ha egy deltoid húrnégyszög, akkor a szimmetriaátlójával szemközti szögek 90°-osak. Ebből az is következik, hogy a négyszög köré írt kör középpontja a szimmetriaátló felezőpontja.

5560 *a)* A téglalapok; *b)* a rombuszok.

5561 Három ilyen deltoid van. Ezekben a másik két szög: 25° és 200°, 110° és 115°, illetve 112,5° és 112,5°.

5562 A további belső szögek: 105°, 125° és 55°.

5563 Az érintőszakaszok hossza 16 cm. A két érintő hajlásszöge 73,74°.

5564 *a)* A húr a kör középpontjából 38,94°-os szögben látszik. A szög mértéke radiánban 0,68.

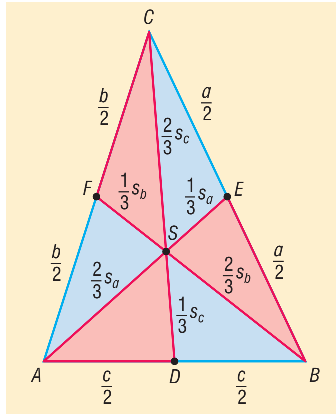
b) A húr a hosszabb körív pontjaiból 19,47° (0,34 radián), a rövidebb körív pontjaiból pedig 160,53° (2,80 radián) szög alatt látszik.

c) A kisebb körcikk területe 12,23 cm^2, a nagyobbé 100,86 cm^2.

d) A kisebb körív hossza 4,08 cm, a nagyobbé 33,62 cm.

e) A kisebb körszelet területe 0,92 cm^2, a nagyobbé 112,18 cm^2.

5565 A háromszög S súlypontja 2 : 1 arányban osztja fel a súlyvonalakat, amit az ábrán is bejelöltünk. A pirossal megjelölt háromszögekben a háromszög-egyenlőtlenség alapján:



az ADS háromszögben $\frac{2}{3}s_a + \frac{1}{3}s_c > \frac{c}{2}$,

a BES háromszögben $\frac{2}{3}s_b + \frac{1}{3}s_a > \frac{a}{2}$,

a CFS háromszögben $\frac{2}{3}s_c + \frac{1}{3}s_b > \frac{b}{2}$.

A három egyenlőtlenség megfelelő oldalainak összege

$$s_a + s_b + s_c > \frac{1}{2} \cdot (a + b + c),$$

ez éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség első fele.

Alkalmazzuk ismét a háromszög-egyenlőtlenséget, ezúttal:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{az } ADC \text{ háromszögben} & b + \frac{c}{2} > s_c, \\ \text{az } ABE \text{ háromszögben} & c + \frac{a}{2} > s_a, \\ \text{a } BCF \text{ háromszögben} & a + \frac{b}{2} > s_b. \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot (a + b + c) > s_a + s_b + s_c,$$

ami éppen a második bizonyítandó egyenlőtlenség.

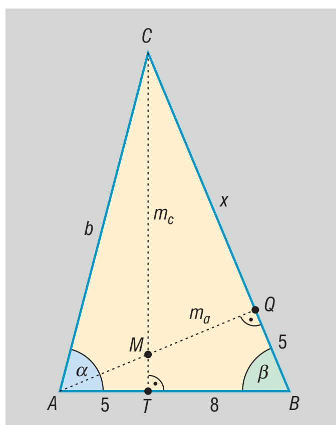
5566 A háromszög két külső szögét $3x$, illetve $4x$ alakban kereshetjük. Három eset lehetséges.

I. Ha a háromszög 65°-os szöge a $3x$ nagyságú szög mellékszöge, akkor $3x = 180° - 65° = 115°$, ebből $x \approx 38{,}33°$. A háromszög egy további külső szöge $4x \approx 153{,}33°$, a mellette fekvő belső szög pedig $26{,}67°$. A háromszög belső szögei $65°$, $26{,}67°$ és $88{,}33°$.

II. Ha a háromszög 65°-os szöge a $4x$ nagyságú külső szög mellékszöge, akkor $4x = 115°$, $x = 28{,}75°$. A háromszög egy további külső szöge $86{,}25°$. A háromszög belső szögei $65°$, $93{,}75°$ és $21{,}25°$.

III. Ha az adott arányú külső szögek egyike sem mellékszöge a 65°-os szögnek, akkor a másik két belső szög $180° - 3x$ és $180° - 4x$, így a belső szögekre: $180° - 3x + 180° - 4x + 65° = 180°$. Az egyenlet megoldása $x = 35°$, a háromszög belső szögei pedig $65°$, $75°$ és $40°$.

5567 *a)* Az ábra jelöléseit követve $AT = 5$ cm, $BT = 8$ cm, $BQ = 5$ cm. Az ABQ derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján:



$$m_a^2 = 13^2 - 5^2 \quad \Rightarrow \quad m_a = 12 \text{ cm}.$$

Ha $CQ = x$, akkor a háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{13 \cdot m_c}{2} = \frac{(x+5) \cdot 12}{2} \quad \Rightarrow \quad m_c = \frac{12}{13} \cdot (x + 5).$$

Pitagorasz tételét alkalmazva, ezúttal a BCT háromszögben:

$$m_c^2 + 8^2 = (x + 5)^2,$$

$$\frac{144}{169} \cdot (x+5)^2 + 8^2 = (x+5)^2,$$

$$(x+5)^2 = \frac{169 \cdot 64}{25}.$$

Felhasználva, hogy a bal oldalon álló hatvány alapja pozitív:

$$x + 5 = \frac{13 \cdot 8}{5} = 20{,}8 \text{ cm}.$$

A háromszög BC oldala 20,8 cm.

A háromszög AB oldalához tartozó magassága:

$$m_c = \frac{12}{13} \cdot (x + 5) = 19{,}2 \text{ cm}.$$

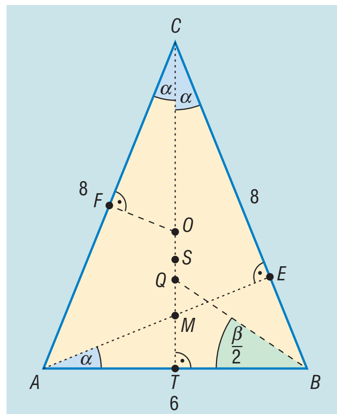
Az AC oldalt az ACT háromszögre felírt Pitagorasz-tétellel számolhatjuk: $b^2 = 5^2 + 19{,}2^2$. A háromszög AC oldala 19,84 cm hosszúságú.

b) A háromszög szögeit szögfüggvények segítségével célszerű kiszámolni. Az ACT háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{19{,}2}{5}$, amiből $\alpha \approx 75{,}40°$. A BCT háromszögben $\operatorname{tg}\beta = \frac{19{,}2}{8}$, tehát $\beta \approx 67{,}38°$.

A háromszög szögei $75{,}40°$, $67{,}38°$ és $37{,}22°$.

5568 *a)* Az ABC háromszög S súlypontja a súlyvonalakat a csúcstól számítva $2:1$ arányban osztja. Mivel a CT súlyvonal hossza $CT = \sqrt{55} \approx 7{,}42$ cm, ezért:

$$CS = \frac{2}{3} \cdot CT = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{55} \approx 4{,}94 \text{ cm}.$$



A súlypont a C csúcstól 4,94 cm távolságra található.

b) Az $MAT\sphericalangle$ és az $MCE\sphericalangle$ szögek szárai páronként merőlegesek egymásra, ezért a két szög ugyanakkora, az ábra jelöléseivel: $MAT\sphericalangle = MCE\sphericalangle = \alpha$. Ekkor viszont az MAT és BCT háromszögek szögei páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlók. A megfelelő oldalaik arányára:

$$\frac{MT}{AT} = \frac{BT}{CT} \quad \Rightarrow \quad \frac{MT}{3} = \frac{3}{\sqrt{55}}.$$

Az MT távolságra $MT \approx 1{,}21$ cm adódik, ezért az ABC háromszög magasságpontja a C csúcstól $7{,}42 - 1{,}21 = 6{,}21$ cm távolságra van.

c) Az ABC háromszögbe írt kör Q középpontja illeszkedik a belső szögfelezőkre. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő β szögre:

$$\cos\beta = \frac{BT}{BC} = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 67{,}98°.$$

Ha a háromszögbe írt kör sugara $QT = r$, akkor a QBT derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{3}, \quad \text{így} \quad r \approx 2{,}02 \text{ cm}.$$

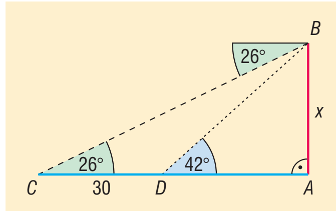
A Q pont a C csúcstól $7{,}42 - 2{,}02 = 5{,}40$ cm távolságra van.

d) A háromszög köré írt kör O középpontja illeszkedik az oldalfelező merőlegesekre. Ha az AC oldal felezőpontja F, akkor a COF háromszög derékszögű, és α hegyesszöge megegyezik a CAT háromszög megfelelő hegyesszögével. A két háromszög így hasonló, amiből:

$$\frac{CO}{CF} = \frac{CA}{CT} \quad \Rightarrow \quad \frac{CO}{4} = \frac{8}{\sqrt{55}} \quad \Rightarrow \quad CO \approx 4{,}31 \text{ cm}.$$

A körülírt kör középpontja 4,31 cm távolságra található a C csúcstól.

5569 Az épület tetejét B, talppontját A, az első megfigyelési pontot D jelöli az ábrán. Ha a D ponttól számítva még 30 métert távolodunk az épülettől, akkor olyan C pontba jutunk, ahonnan a B ponthoz tartozó emelkedési szög (amely váltószöge a hozzá tartozó depressziós szögnek) 26°. Ha az épület magassága x, akkor az ADB és ACB derékszögű háromszögekből:



$$\operatorname{tg} 42^\circ = \frac{x}{AD} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} 26^\circ = \frac{x}{AD + 30}.$$

Mindkét egyenletből kifejezve AD-t, azt kapjuk, hogy:

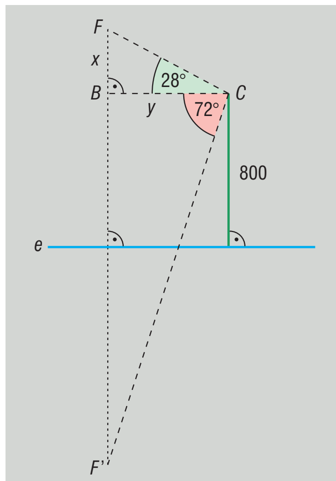
$$\frac{x}{\operatorname{tg} 42^\circ} = \frac{x}{\operatorname{tg} 26^\circ} - 30.$$

A kapott egyenlet megoldása:

$$x = \frac{30 \cdot \operatorname{tg} 26^\circ \cdot \operatorname{tg} 42^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ - \operatorname{tg} 26^\circ} \approx 31{,}93 \text{ m}.$$

Az épület magassága 31,93 méter.

5570 Az ábrán a hegy csúcsát C, a felhő helyét F, a felhő tükörképét a tóban F' jelöli. A tó tükrének szintje legyen az e egyenes, amely az FF' szakasz felezőmerőlegese.



Az FBC háromszögben:

$$\operatorname{tg} 28^\circ = \frac{x}{y}.$$

Az $F'BC$ háromszögben:

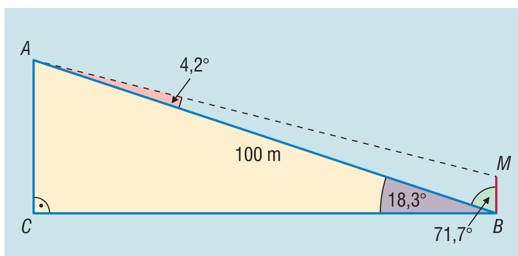
$$\operatorname{tg} 72^\circ = \frac{x + 1600}{y}.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$x = \frac{1600 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ} \approx 334{,}15.$$

A felhő a hegycsúcs felett 334 méterre van.

5571 Tekintsük az ábra jelöléseit. A lejtős út elejét jelölje A, a végét B, az emlékoszlop tetejét az M pont.



Az ABM háromszögben ismert az AB oldal: $AB = 100$ m, és a rajta levő két szög:

$$BAM\sphericalangle = 4{,}2^\circ,$$
$$ABM\sphericalangle = 90^\circ - 18{,}3^\circ = 71{,}7^\circ.$$

A háromszög harmadik szöge:

$$180^\circ - 4{,}2^\circ - 71{,}7^\circ = 104{,}1^\circ.$$

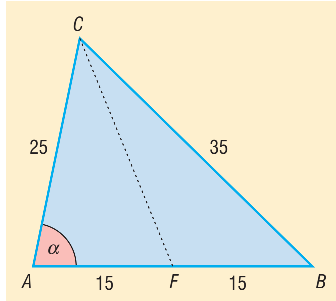
Az ABM háromszögben felírva a szinusztételt, az emlékoszlop MB magassága meghatározható:

$$\frac{MB}{100} = \frac{\sin 4{,}2^\circ}{\sin 104{,}1^\circ} \quad \Rightarrow \quad MB \approx 7{,}55 \text{ m}.$$

Az emlékoszlop 7,55 m magas.

5572 Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$35^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \cos\alpha,$$
$$\cos\alpha = 0{,}2,$$
$$\alpha \approx 78{,}46^\circ.$$



Az élményfürdő az AB oldal F felezőpontjába kerül, ezért a feladat az ABC háromszög CF súlyvonalának hosszát kérdezi. Az ACF háromszögben ismét a koszinusztétel alapján:

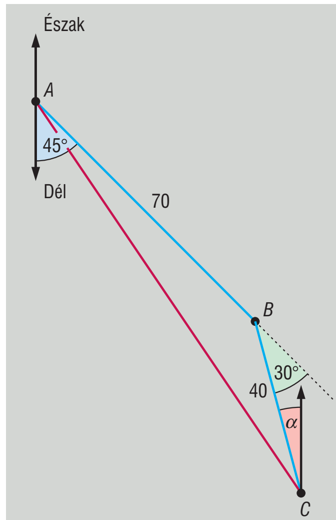
$$CF^2 = 25^2 + 15^2 - 2 \cdot 25 \cdot 15 \cdot \cos 78{,}46^\circ,$$
$$CF \approx 26{,}5 \text{ km}.$$

A tervezett útszakasz hossza 26,5 km.

5573 *a)* A társaság útját az ábra mutatja. A B pontban a fordulás szöge az ABC háromszög külső szöge. Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$AC^2 = 70^2 + 40^2 - 2 \cdot 70 \cdot 40 \cdot \cos 150^\circ.$$

A műveletek elvégzése után $AC \approx 106{,}5$, azaz a társaság a kiinduló helyétől légvonalban 106,5 km távolságra került.



b) Az ABC háromszögben ezúttal a szinusztétel alapján:

$$\frac{\sin BAC\sphericalangle}{\sin 150^\circ} = \frac{40}{106{,}5} \quad \Rightarrow \quad \sin BAC\sphericalangle \approx 0{,}1878.$$

Mivel a $BAC\sphericalangle$ egészen biztosan hegyesszög, ezért:

$$BAC\sphericalangle \approx 10{,}82^\circ.$$

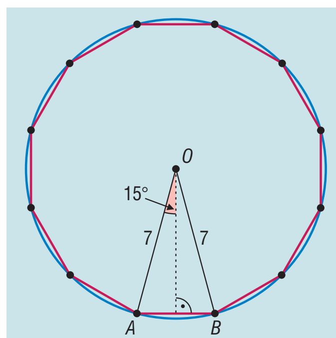
A pihenőhelyet a kiindulási hellyel összekötő egyenes út

$$\alpha = 45^\circ - 10{,}82^\circ = 34{,}18^\circ\text{-os}$$

szöget zárna be az északi iránnyal.

5574 *a)* A 14 cm oldalú négyzetből kivágható legnagyobb kör sugara 7 cm. A szabályos tizenkétszög egy oldalához tartozó középponti szög 30°. Ebből következik, hogy az ábra jelölései alapján:

$$\sin 15^\circ = \frac{\frac{AB}{2}}{7} = \frac{AB}{14}, \quad \text{ahonnan} \quad AB \approx 3{,}62 \text{ cm}.$$



A legnagyobb kivágható szabályos tizenkétszög oldala 3,62 cm.

b) A kör alakú kartonlap területe:

$$T_{\text{kör}} = 49\pi \approx 153{,}94 \text{ cm}^2.$$

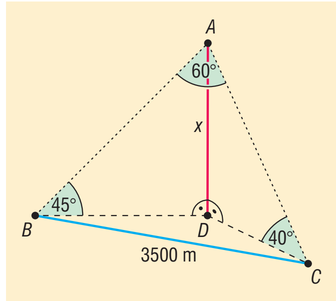
A tizenkétszög területe az ABO háromszög területének 12-szerese, azaz:

$$T_{12} = 12 \cdot \frac{7 \cdot 7 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 147 \text{ cm}^2.$$

Mivel $\frac{T_{12}}{T_{\text{kör}}} \approx 0{,}9549$, ezért a kör alakú kartonnak $100 - 95{,}49 = 4{,}51\%$-a vész kárba.

c) A négyzet területe 196 cm^2, ezért $\frac{196 - 147}{196} = \frac{1}{4}$-ed része, azaz 25%-a vész kárba.

5575 Jelölje a hegy csúcsát A, az A pontnak az autóút síkjára eső vetületét D, a településeket B és C. Ha a hegy magassága x, akkor az ABD derékszögű háromszögben $\sin 45° = \frac{x}{AB}$, ebből $AB = x\sqrt{2}$. Az ACD derékszögű háromszögben $\sin 40° = \frac{x}{AC}$, amiből pedig $AC = \frac{x}{\sin 40°}$.



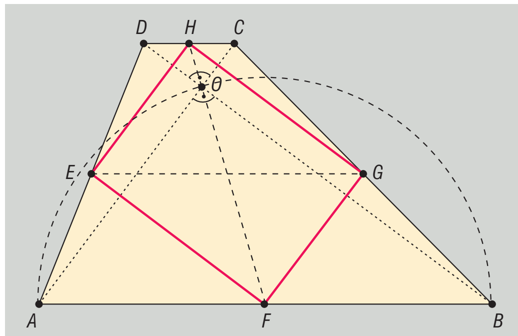
Végül az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$BC^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sin 40°}\right)^2 - 2 \cdot \left(x\sqrt{2}\right) \cdot \frac{x}{\sin 40°} \cdot \cos 60°.$$

Felhasználva, hogy $BC = 3500$ m, a műveletek elvégzése után $x \approx 2349$ m adódik.

A hegy csúcsa az út síkja felett 2349 m magasságban van.

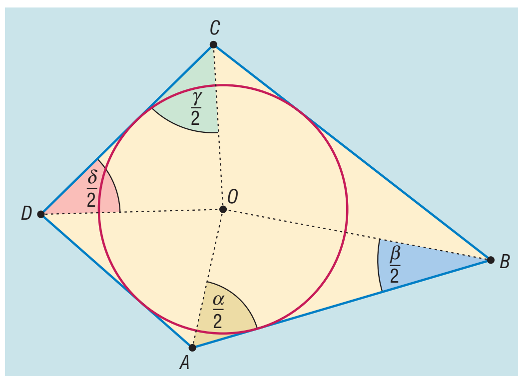
5576 *a)* A hosszabb alap 10 cm, a szárakat összekötő középvonal (az ábrán EG) hossza 6 cm.



b) Thalész tételének megfordítása alapján az O pont illeszkedik az AB szakasz fölé emelt Thalész-körre, ezért ha F az AB szakasz felezőpontja, akkor FO a kör sugara, azaz $FO = 5$ cm. Ugyanígy látható, hogy HO a CD alap felével egyenlő: $HO = 1$ cm. Az ABO és CDO derékszögű háromszögek hasonlók, az O pontra vonatkozó középpontos hasonlósággal egymásba vihetők, amiből következik, hogy az F, O és H pontok egy egyenesre illeszkednek. Ebből adódóan az FH középvonal hossza: $FH = FO + HO = 6$ cm.

c) A középvonalak végpontjai az $EFGH$ paralelogrammát fogják közre. Mivel EF a $BDA_\triangle$, GH pedig a $BDC_\triangle$ középvonala, ezért mindkét szakasz párhuzamos a BD átlóval. Hasonlóan igazolható, hogy az EH és FG szakaszok párhuzamosak az AC átlóval. A feltételek alapján a trapéz átlói merőlegesek egymásra, ezért az $EFGH$ négyszög oldalai is, azaz $EFGH$ téglalap.

5577 *a)* A szögfelezők közös pontja a négyszög mind a négy oldalától ugyanakkora távolságra van, ezért a négyszögnek van beírt köre, vagyis érintőnégyszögről van szó.



b) Az $ABCD$ négyszög szögeit a szokásos módon jelöljük. Az ABO háromszögben:

$$AOB\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right),$$

valamint a CDO háromszögben:

$$COD\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right).$$

A két szöget összeadva, és felhasználva, hogy a négyszög belső szögeinek összege 360°:

$$AOB\sphericalangle + COD\sphericalangle = 360° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = 360° - \frac{360°}{2} = 180°.$$

Megjegyzés: Az érintőnégyszögben természetesen $BOC\sphericalangle + DOA\sphericalangle = 180°$ is teljesül.

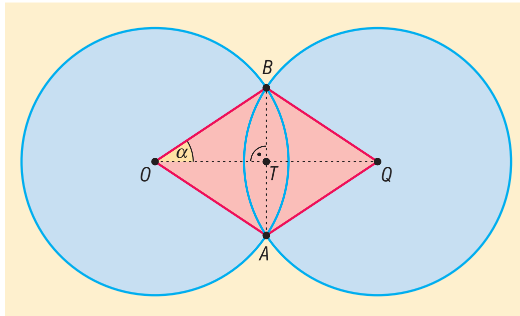
5578 *a)* Az $OAQB$ négyszög minden oldala 3 cm, ezért a négyszög rombusz. Az ábra jelöléseit követve az OTB derékszögű háromszögben:

$$BT^2 = OB^2 - OT^2 = 3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{11}{4},$$

ebből $BT = \dfrac{\sqrt{11}}{2} \approx 1{,}66$ cm.

Az $OAQB$ rombusz területe:

$$\frac{5 \cdot 3{,}32}{2} = 8{,}29 \text{ cm}^2.$$



b) Az $OTB_\triangle$-ben $\cos\alpha = \dfrac{2{,}5}{3}$, amiből $\alpha = 33{,}56°$. A körök közös része két olyan 3 cm sugarú körszelet egyesítéséből áll, amelyekhez $2\alpha = 67{,}12°$ középponti szög tartozik. Az OA és OB sugarak által határolt körcikk területe:

$$t = \frac{3^2 \cdot \pi}{360°} \cdot 2\alpha \approx 5{,}27 \text{ cm}^2.$$

A megfelelő körszelet területe:

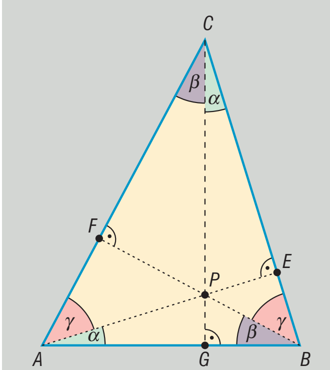
$$t - t_{OAB} \approx 5{,}27 - \frac{8{,}29}{2} = 1{,}125 \text{ cm}^2.$$

A két kör közös részének területe 2,25 cm^2.

A közös rész kerülete két egybevágó körív hosszából áll: $K \approx 2 \cdot \dfrac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{360°} \cdot 67{,}12° \approx 7{,}03$ cm.

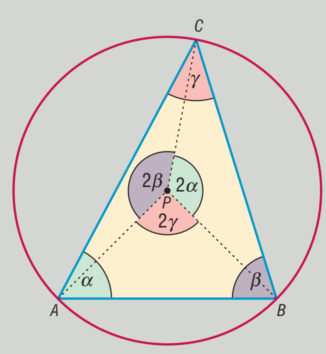
c) A megfelelő látószög $180° - \alpha \approx 146{,}44°$.

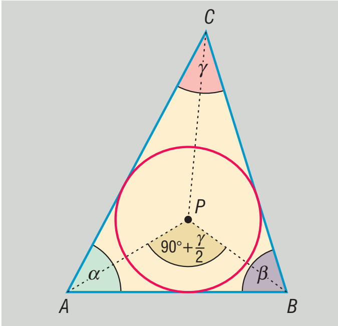
5579 *a)* A feltételek szerint az ábrán azonos módon megjelölt szögek megegyeznek. Az $ABC_\triangle$ belső szögeinek összegére felírható: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, amiből $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Ha a P ponton és a háromszög egy-egy csúcsán átmenő egyenesek a háromszög oldalait az E, F és G pontokban metszik (ld. ábra), akkor például az $ACG_\triangle$-ben az A és C csúcsoknál lévő szögek összege $\gamma + \alpha + \beta = 90°$, ezért a háromszög derékszögű, és a CP egyenes merőleges AB-re. Ugyanígy látható, hogy AP merőleges BC-re, és BP merőleges AC-re. A P pont tehát az $ABC_\triangle$ magasságpontja. Fordítva: az $ABC_\triangle$ magasságpontja nyilván mindhárom feltételt kielégíti.



b) Ha a P pont az $ABC_\triangle$ köré írt kör középpontja, akkor a kerületi és középponti szögek tétele értelmében a szögekre vonatkozó összes feltétel teljesül. Megmutatjuk, hogy a körülírt kör középpontján kívül más pont nem tehet eleget egyidejűleg mindhárom feltételnek.

Az első feltétel alapján ugyanis a P pont illeszkedik az AB szakasz 2γ szögű látószögkörívére (pontosabban a háromszög belsejébe eső körívre). A második feltétel szerint a P pont rajta van a BC szakasz 2α szögű látószögkörívén is. A két körívnek a B pont közös pontja, így ezen kívül már csak egy közös pontjuk lehet, ez pedig éppen a P pont. Ugyanakkor korábbi megjegyzésünk alapján a körülírt kör középpontja szintén rajta van mindkét körön, ezért P és a középpont szükségképpen megegyezik. Nyilvánvaló, hogy ekkor P a harmadik oldal megfelelő látószögkörívén is rajta van.



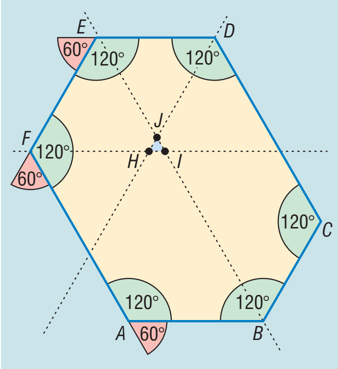


c) A P pont egybeesik az $ABC_\triangle$ beírt körének középpontjával. Előbb megmutatjuk, hogy a beírt kör középpontja eleget tesz a feltételeknek. Valóban, ha P a beírt kör középpontja, akkor az $ABP_\triangle$ szögeinek összege

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+APB\sphericalangle=180^\circ \quad\Rightarrow\quad APB\sphericalangle=90^\circ+\frac{\gamma}{2}.$$

A másik két feltétel teljesülése hasonló módszerrel igazolható.

A *b)* feladatban ismertetett módszer értelemszerű módosításával igazolható, hogy a beírt kör középpontján kívül más pont nem tehet egyidejűleg eleget mindhárom feltételnek.



5580 *a)* A hatszög minden szöge 120°, külső szögei 60°-osak, ezért az ábra jelölései alapján az ED és AB oldalegyenesek egymással 60° + 60° + 60° = 180°-os szöget zárnak be, ezért $ED \parallel AB$. Ugyanígy bizonyítható, hogy $EF \parallel BC$, és $FA \parallel CD$.

b) Húzzunk párhuzamost az F ponton keresztül AB-vel (és így persze ED-vel is), a B ponton át FA-val (és CD-vel), végül a D ponton át EF-fel (és BC-vel). A keletkező egyenesek a $HIJ_\triangle$-et fogják közre (ld. ábra). Ebben a háromszögben a H csúcsnál lévő belső szög szárai páronként ellentétes irányúak az $ABCDEF$ hatszög E csúcsánál lévő, az ábrán megjelölt külső szög száraival, így a két szög váltószög. Ebből következik, hogy a $HIJ_\triangle$ H csúcsánál 60°-os szög található. A háromszög J csúcsánál található belső szög, valamint a hatszög F csúcsánál lévő külső szög egyállású, ezért a $HIJ_\triangle$ J csúcsánál is 60°-os szög van. Ebből már következik, hogy a $HIJ_\triangle$ szabályos. Látható, hogy az $ABCDEF$ hatszög az $ABIF$, $BCDJ$, $DEFH$ paralelogrammákra, valamint a HIJ szabályos háromszögre bontható.

c) A paralelogramma szemközti oldalai egyenlők, ezért $FI = AB$ és $FH = ED$, amiből következik, hogy $HI = FI - FH = AB - ED$. Hasonlóan: $JI = BJ - BI = CD - AF$ és $JH = HD - JD = FE - BC$. Mivel a $HIJ_\triangle$ oldalai egyenlők, ezért $AB - ED = CD - AF = FE - BC$, így az $ABCDEF$ hatszög szemközti oldalai hosszának különbsége megegyezik.

5581 Az $E'F'C'$, $F'D'A$ és $D'E'B_\triangle$-ekben a koszinusztétel alapján:

$$x^2=\frac{9}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2-2\cdot\frac{3}{2}b\cdot\frac{1}{2}a\cdot\cos(180^\circ-\gamma),$$

$$y^2=\frac{9}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2-2\cdot\frac{3}{2}c\cdot\frac{1}{2}b\cdot\cos(180^\circ-\alpha),$$

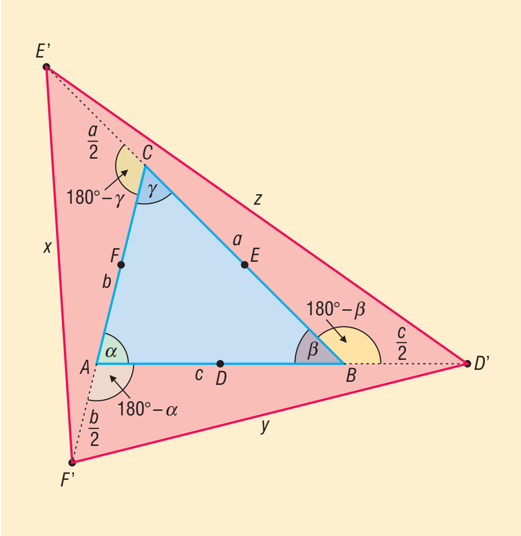
$$z^2=\frac{9}{4}a^2+\frac{1}{4}c^2-2\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2}c\cdot\cos(180^\circ-\beta).$$

Mivel $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$, ezért:

$$x^2=\frac{9}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}ba\cdot\cos\gamma,$$

$$y^2=\frac{9}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{2}cb\cdot\cos\alpha,$$

$$z^2=\frac{9}{4}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{3}{2}ac\cdot\cos\beta.$$



Ha az $ABC_\triangle$ a megfelelő oldalra felírt koszinusztételből kifejezzük az utolsó tagokban szereplő szorzatokat, akkor kapjuk, hogy:

$$ba\cdot\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2},\qquad cb\cdot\cos\alpha=\frac{c^2+b^2-a^2}{2},\qquad ac\cdot\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}.$$

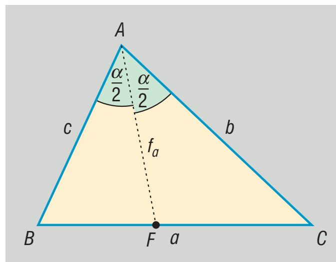
A kapott összefüggéseket visszahelyettesítve az x, y, z oldalak négyzetét tartalmazó sorokba:

$$x^2=3b^2+a^2-\frac{3}{4}c^2,\qquad y^2=3c^2+b^2-\frac{3}{4}a^2,\qquad z^2=3a^2+c^2-\frac{3}{4}b^2.$$

A megfelelő oldalak összege:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{13}{4}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{13}{4}.$$

5582 *a)* Az A csúcsból induló szögfelező a BC oldalt az F pontban metszi (ld. ábra). Az $ABC_\triangle$ területére:



$$T_{ABC}=T_{ABF}+T_{CAF},$$

$$\frac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{c\cdot f_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}+\frac{b\cdot f_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Mivel $\sin\alpha=2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$, ezért $\sin\frac{\alpha}{2}$-vel történő egyszerűsítés után:

$$bc\cdot 2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=c\cdot f_a+b\cdot f_a,\qquad\text{ebből}\qquad f_a=\frac{2bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c},$$

tehát éppen a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

b) Az *a)* feladat ábrájának jelöléseit követve a szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{BF}{FC}=\frac{c}{b}\quad\Rightarrow\quad\frac{BF}{a-BF}=\frac{c}{b}\quad\Rightarrow\quad BF=\frac{ac}{b+c}.$$

Az $ABF_\triangle$-ben a koszinusztétel alapján:

$$f_a^2=c^2+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2-2\cdot c\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot\cos ABF\sphericalangle.$$

A fenti összefüggésben szereplő $ABF\sphericalangle$ koszinuszát kifejezhetjük az $ABC_\triangle$ oldalai segítségével. Ennek érdekében a koszinusztételt ezúttal az $ABC_\triangle$-ben is felírjuk:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos ABF\sphericalangle\quad\Rightarrow\quad\cos ABF\sphericalangle=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Ha a kapott összefüggést a szögfelező négyzetét tartalmazó egyenlőségbe visszahelyettesítjük, akkor:

$$f_a^2=c^2+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2-2c\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Az egyszerűsítések elvégzése és közös nevezőre hozás után:

$$f_a^2=\frac{c^2\cdot(b+c)^2+a^2c^2-c\cdot(b+c)\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)}{(b+c)^2}.$$

A számlálóban végezzük el a kijelölt műveleteket:

$$f_a^2 = \frac{b^2c^2 + 2bc^3 + c^4 + a^2c^2 - a^2bc - a^2c^2 - c^3b - c^4 + b^3c + b^2c^2}{(b+c)^2} =$$

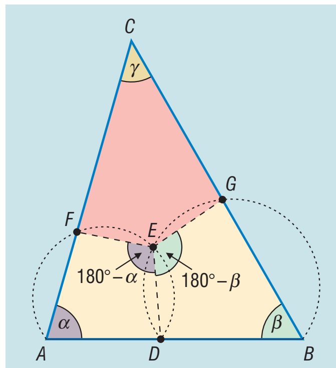
$$= \frac{2b^2c^2 + bc^3 - a^2bc + b^3c}{(b+c)^2}.$$

Vegyük észre, hogy a számlálóban bc kiemelhető, így kapjuk, hogy:

$$f_a^2 = \frac{bc \cdot \left(2bc + c^2 - a^2 + b^2\right)}{(b+c)^2} = \frac{bc \cdot \left((b+c)^2 - a^2\right)}{(b+c)^2}.$$

Éppen ezt kellett igazolnunk.

5583 Az $EGCF$ négyszög húrnégyszög. Mivel az F pont az ADE háromszög köré írt kör egy pontja, ezért az $ADEF$ négyszög húrnégyszög, így követve az ábra jelöléseit:



$$DEF\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

Ugyanígy húrnégyszög a $BDEG$ négyszög is, így:

$$DEG\sphericalangle = 180° - \beta.$$

Ekkor az $EGCF$ négyszögben az E csúcsnál lévő szög:

$$FEG\sphericalangle = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta.$$

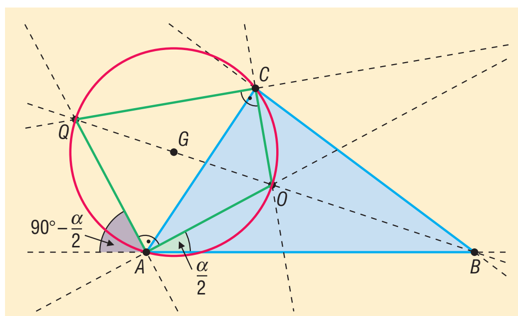
Az $EGCF$ négyszög E és C csúcsainál lévő szögek összege:

$$FEG\sphericalangle + FCG\sphericalangle = \alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

hiszen éppen az ABC háromszög szögeinek összegét kapjuk.

A húrnégyszögek tételének megfordítása alapján az $EGCF$ négyszög valóban húrnégyszög.

5584 *a)* A háromszögbe írt kör O középpontja illeszkedik az A és B csúcsokból induló szögfelezőre, ezért például:



$$OAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Az AC oldalhoz írható kör Q középpontja illeszkedik a B csúcsnál található belső szög szögfelezőjére, valamint az A és C csúcsoknál található külső szögek szögfelezőjére. Ezért a QA egyenes az AB oldalegyenessel $90° - \dfrac{\alpha}{2}$ szöget zár be. Ekkor viszont $QAO = 90°$.

Ugyanígy látható be, hogy az $AOCQ$ négyszög C csúcsánál is 90°-os szög van.

A húrnégyszögek tételének megfordítása alapján az $AOCQ$ négyszög húrnégyszög.

Megjegyzés: A háromszög egy belső szögének felezője mindig merőleges a szomszédos külső szög felezőjére.

b) Az $AOCQ$ négyszög köré írt kör egybeesik az OQ szakasz Thalész-körével, ezért G középpontja az OQ szakasz felezőpontja.

Koordináta-geometria – megoldások

5585 *a)* $(27; -14)$; *b)* $\vec{a}\cdot\vec{b} = -29$; *c)* $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{53}$.

d) A két vektor hajlásszöge 142,82°.

e) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\dfrac{3}{5}\mathbf{i} + \dfrac{4}{5}\mathbf{j}$, és $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \dfrac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$. Mindkét vektor hossza 1.

5586 A $\vec{v}$ vektorral párhuzamos vektorok: $\vec{a}$, $\vec{c}$. A $\vec{v}$ vektorra merőleges vektorok: $\vec{b}$, $\vec{d}$.

5587 *a)* $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, a két vektor merőleges egymásra.

b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 13$, a két vektor hegyesszöget zár be egymással.

c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -2$, a két vektor tompaszöget zár be egymással.

5588 *a)* $AB = 4\sqrt{10} \approx 12{,}65$. A felezőpont $F(-1; 1)$, a harmadolópontok pedig $\left(-3; \dfrac{5}{3}\right)$ és $\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$.

b) $AB = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$. A felezőpont $F(6; 2)$, a harmadolópontok pedig $\left(\dfrac{16}{3}; 1\right)$ és $\left(\dfrac{20}{3}; 3\right)$.

5589 *a)* Mivel $AB = 5\sqrt{2}$, $AC = BC = 5$, ezért a háromszög egyenlő szárú. Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű, mivel $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

b) A háromszög súlypontja $S\left(\dfrac{7}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

c) Az ABC háromszög köré írt kör egyenlete $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{2}$.

5590 A keresett pont a háromszög súlypontja, melynek koordinátái $S(3; 2)$.

5591 *a)* A két falu távolsága 7,62 km.

b) A buszmegálló a $\left(-\dfrac{5}{3}; -1\right)$ koordinátájú pontban található.

c) Az összekötő út egyenlete $-3x + 7y = -2$.

d) Az út csak a C pontban található településen halad keresztül.

e) 23,20°-ot.

5592 *a)* $x + 7y = 11$; *b)* $y + 2 = \sqrt{3}(x - 7)$; *c)* $3x + 4y = -17$; *d)* $2x + 5y = 11$;

e) $y = \dfrac{7}{3}x$; *f)* $x = -6$; *g)* $3x - 2y = 3$; *h)* $x + 4y = 18$.

5593 *a)* $x + y = 1$; *b)* $y = 3x - 1$; *c)* $y = 1$; *d)* $x - 5y = 13$.

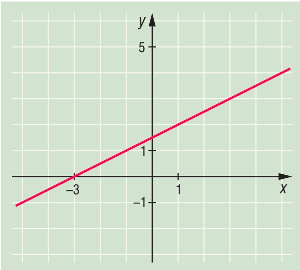
5594 Két ilyen egyenes van. Ezek egyenlete $y = x - 3$, illetve $y = -x - 1$.

5595 *a)* $x + 5y = 22$, illetve $y = 5x + 20$; *b)* $y = 5$, illetve $x = -3$;
c) $x = -3$, illetve $y = 5$; *d)* $y = 4x + 17$, illetve $x + 4y = 17$.

5596 Az adott egyenletű egyenesre merőleges egyenesek: a és b. Az egyenessel csak a d egyenes párhuzamos.

5597 *a)* $(-2; 0)$ és $(5; 0)$; *b)* $(0; -10)$ és $(0; 1)$; *c)* $(-4; -3)$ és $(7; -6)$.

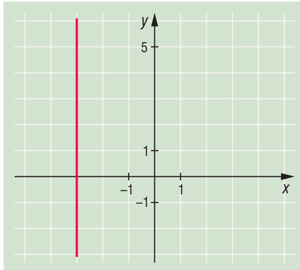
5598 *a)*



$\vec{v}(2; 1)$, $\vec{n}(1; -2)$,

$m = \frac{1}{2}$, $\alpha \approx 26{,}57°$;

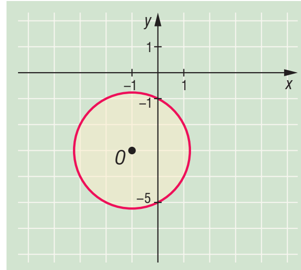
b)



$\vec{v}(0; 1)$, $\vec{n}(1; 0)$,

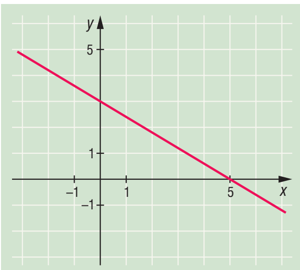
nincs meredekség, $\alpha = 90°$;

c)



$O(-1; -3)$, $r = \sqrt{5}$;

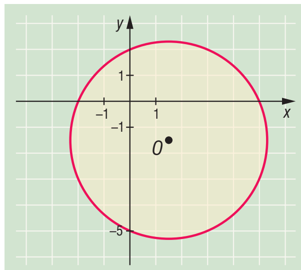
d)



$\vec{v}(5; -3)$, $\vec{n}(3; 5)$,

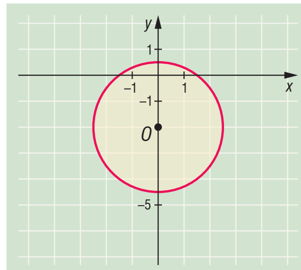
$m = -\frac{3}{5}$, $\alpha \approx -30{,}96°$;

e)



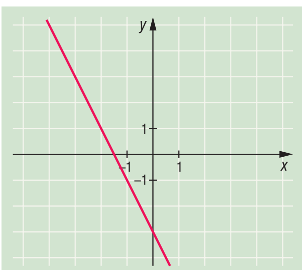
$O\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $r = \sqrt{\frac{29}{2}}$;

f)



$O(0; -2)$, $r = \frac{5}{2}$;

g)



$\vec{v}(1; -2)$, $\vec{n}(2; 1)$,

$m = -2$, $\alpha \approx -63{,}43°$.

5599 *a)* $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 9$; *b)* $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 82$; *c)* $(x-2)^2 + (y+2)^2 = \frac{41}{4}$;
d) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 52$; *e)* $x^2 + (y+2)^2 = 10$.

5600 *a)* Az AC és BD átlók felezőpontja egybeesik az origóval, ezért az $ABCD$ négyszög paralelogramma. Az $\overrightarrow{AB}(5; 1)$ és az $\overrightarrow{AD}(-1; 5)$ vektorok skaláris szorzata $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = 0$, ezért a négyszög AB és AD oldalai merőlegesek egymásra, így az $ABCD$ négyszög téglalap. Végül $AB = AD = \sqrt{26}$, így a négyszög valóban négyzet.

b) $(2; 3)$.

c) $5x + y = 0$; $x - 5y = 0$; $2x + 3y = 0$; $-3x + 2y = 0$.

d) A beírt kör egyenlete $x^2 + y^2 = \frac{13}{2}$, a négyzet köré írható kör egyenlete $x^2 + y^2 = 13$.

e) Az adott egyenes áthalad a négyzet középpontján, így annak területét megfelezi. Ebből következően mindkét keletkező trapéz területe 13 egység.

5601 *a)* A test egy körbefordulás alkalmával $10\pi \approx 31{,}42$ egység utat tesz meg.

b) A test C pont kivételével az összes többi ponton áthalad.

c) A test a kört az E pontban érintő egyenesen haladna tovább. Ennek egyenlete $4x - 3y = -16$.

5602 Meghatározzuk mindkét egyenes iránytangensét:

$$4x + ky = 30 \quad \text{esetén} \quad \vec{n}(4;\, k) \;\Rightarrow\; \vec{v}(k;\, -4) \;\Rightarrow\; m = -\frac{4}{k},$$

$$kx + 16y = 28 \quad \text{esetén} \quad \vec{n}(k;\, 16) \;\Rightarrow\; \vec{v}(16;\, -k) \;\Rightarrow\; m = -\frac{k}{16}.$$

Két párhuzamos egyenes iránytangense megegyezik:

$$-\frac{4}{k} = -\frac{k}{16} \quad \Rightarrow \quad k = \pm 8.$$

5603 Meghatározzuk mindkét egyenes iránytangensét:

$$mx - y = 2 \quad \text{esetén} \quad \vec{n}(m;\, -1) \;\Rightarrow\; \vec{v}(1;\, m) \;\Rightarrow\; m = \frac{m}{1},$$

$$5x - 7y = 12 \quad \text{esetén} \quad \vec{n}(5;\, -7) \;\Rightarrow\; \vec{v}(7;\, 5) \;\Rightarrow\; m = \frac{5}{7}.$$

Két merőleges egyenes iránytangensének szorzata -1:

$$m \cdot \frac{5}{7} = -1 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{7}{5}.$$

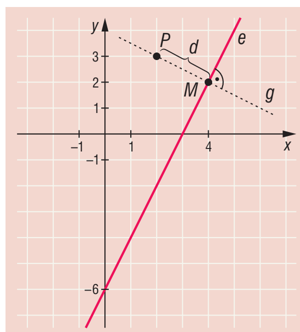
5604 Az ábra jelöléseit használva P pontból merőlegest állítunk az adott e: $2x - y = 6$ egyenesre. Ennek az egyenesnek az egyenlete:

$$g\colon\ x + 2y = 8.$$

A két egyenes metszéspontja $M(4;\, 2)$ pont. M és az adott $P(2;\, 3)$ pont távolsága a kérdés:

$$\left|\overrightarrow{PM}\right| = \sqrt{(4-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}.$$

A pont és az adott egyenes távolsága $\sqrt{5}$ egység.



5605 *a)* Az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása után kapjuk, hogy a két egyenes az $A(4;\, -2)$ pontban metszi egymást.

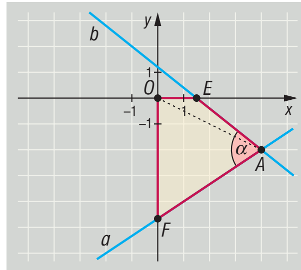
b) Az a egyenes egy normálvektora $\vec{n}_a(-2;\, 3)$, a b egyenesé $\vec{n}_b(4;\, 5)$.

A két vektor hossza $|\vec{n}_a| = \sqrt{13}$ és $|\vec{n}_b| = \sqrt{41}$, skaláris szorzatuk $\vec{n}_a \cdot \vec{n}_b = 7$. Ha a két egyenes által bezárt szög α, akkor:

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}}, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha \approx 72{,}3°.$$

A két egyenes $72{,}3°$-os szöget zár be egymással.

c) Az a egyenes az y tengelyt az $F\left(0; -\frac{14}{3}\right)$ pontban, a b egyenes az x tengelyt az $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ pontban metszi. Ha az origót O jelöli, akkor a feladat az $OEAF$ négyszög területét kérdezi. Az OEA háromszög OE oldala $\frac{3}{2}$, az ehhez tartozó magasság 2, ezért:



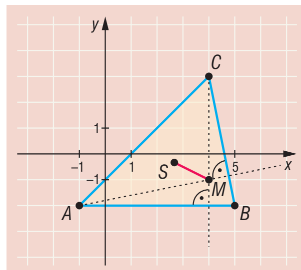
$$T_{OEA} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Az OFA háromszögben $OF = \frac{14}{3}$, az ehhez tartozó magasság 4, ezért $T_{OFA} = \frac{28}{3}$.

Az $OEAF$ négyszög területe:

$$T_{OEAF} = \frac{3}{2} + \frac{28}{3} = \frac{65}{6}.$$

5606 Az $ABC_{\triangle}$ súlypontja $S\left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. Az M magasságpont koordinátáit két magasságvonal metszéspontjaként kereshetjük. Mivel az AB oldal párhuzamos az x tengellyel, ezért a hozzá tartozó magasságvonal egyenlete $x = 4$. A BC oldalhoz tartozó magasságvonal egy normálvektora $\overrightarrow{CB}(1; -5)$, egy pontja pedig A, ezért egyenlete $x - 5y = 9$. A két magasságvonal metszéspontja $M(4; -1)$.

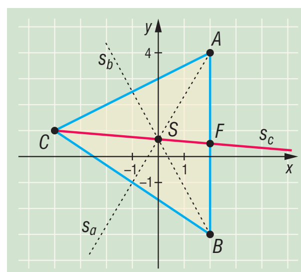


A súlypont és a magasságpont távolsága:

$$SM = \sqrt{\left(4 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \quad (\approx 1{,}49).$$

5607 *a)* Vegyük észre, hogy a megadott csúcs koordinátái kielégítik az s_a egyenes egyenletét, ezért az csak a háromszög A csúcsa lehet, így $A(2; 4)$. A háromszög S súlypontjának koordinátáit a súlyvonalak egyenletéből álló

$$\left.\begin{aligned} s_a&:\ -5x + 3y = 2 \\ s_b&:\ 11x + 6y = 4 \end{aligned}\right\}$$



egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$, ezért a háromszög S súlypontja $S\left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Mivel az F felezőpont nem illeszkedik az s_a súlyvonalra, ezért biztosan valamelyik A csúcsot is tartalmazó oldal felezőpontja. Az A pont F pontra vonatkozó tükörképének koordinátái $(2; -3)$, erről látható, hogy illeszkedik az s_b súlyvonalra, ezért csak a B pont lehet, tehát $B(2; -3)$.

Ha a C csúcs koordinátái $C(c_1; c_2)$, akkor a súlypont koordinátáira:

$$\frac{2 + 2 + c_1}{3} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{4 + (-3) + c_2}{3} = \frac{2}{3},$$

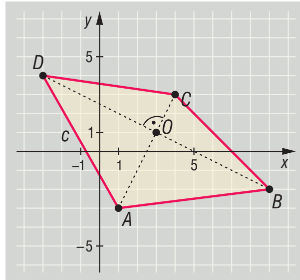
amiből $C(-4; 1)$.

A háromszög csúcsai tehát $A(2; 4)$, $B(2; -3)$, $C(-4; 1)$.

b) A harmadik súlyvonal egyenlete s_c: $x + 12y = 8$.

5608 *a)* Az AC egyenes egyenlete $y = 2x - 5$.

b) A deltoid tulajdonságai alapján a hiányzó B csúcs illeszkedik a D ponton átmenő, AC egyenesre merőleges egyenesre, továbbá az átlók O metszéspontja éppen a BD átló felezőpontja.



A D pontból az AC egyenesre állított merőleges egyenes egyenlete $x + 2y = 5$. Az O pont koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5 &= y \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása után $O(3; 1)$ adódik. Korábbi megjegyzésünk alapján az O pont a BD szakasz felezőpontja, ezért ha $B(x; y)$, akkor:

$$\frac{x + (-3)}{2} = 3 \quad \text{és} \quad \frac{y + 4}{2} = 1,$$

ahonnan $B(9; -2)$.

c) A deltoid területe az átlók szorzatának fele, azaz:

$$T_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}.$$

Mivel

$$AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \quad \text{és} \quad BD = \sqrt{180} = 6\sqrt{5},$$

ezért:

$$T_{ABCD} = \frac{3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{2} = 45 \text{ területegység.}$$

5609 A helyesen kitöltött táblázat:

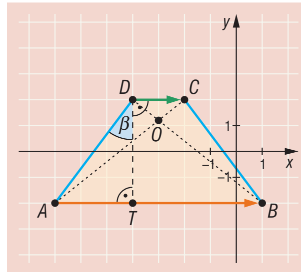
Állítás	Igaz	Hamis
Az $ABCD$ négyszög trapéz.	X	
Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög.	X	
Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.	X	
Az $ABCD$ négyszögnek minden szöge kisebb, mint 120°.		X
A négyszög átlói a $\left(-3; \frac{3}{2}\right)$ pontban metszik egymást.		X
Az átlók metszéspontja az AC átló C-hez közelebbi negyedelőpontja.		X

- Az $ABCD$ négyszög trapéz, mert $\overrightarrow{AB}(8; 0)$ és $\overrightarrow{DC}(2; 0)$, vagyis $\overrightarrow{AB} = 4 \cdot \overrightarrow{DC}$. Mivel ez azt is jelenti, hogy a két vektor párhuzamos egymással, ezért a négyszög valóban trapéz, amelyben AB és CD az alapok.
- Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, hiszen $AD = BC = 5$, ezért a trapéz szárai egyenlő hosszúak (és nem paralelogramma), így húrtrapézról van szó.
- Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.

  Mivel

  $$AD + BC = 5 + 5 = 10, \quad \text{valamint} \quad AB + CD = 8 + 2 = 10,$$

  ezért a négyszög szemközti oldalainak összege megegyezik. Az érintőnégyszögek tételének megfordítása alapján $ABCD$ valóban érintőnégyszög.



- Az $ABCD$ négyszögnek van 120°-nál nagyobb szöge. Ha a trapéz D csúcsából induló magasságának talppontja T, akkor az ATD derékszögű háromszögben:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{AT}{TD} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 36{,}87°.$$

Az $ABCD$ trapéz D csúcsánál lévő szög:

$$ADC\sphericalangle = \beta + 90° \geq 36{,}87° + 90° = 126{,}87°,$$

valóban 120°-nál nagyobb. Megjegyezzük, hogy a kerekítés miatt használtunk egyenlőtlenséget.

- A négyszög átlói nem a $\left(-3; \frac{3}{2}\right)$ pontban metszik egymást. Az $ABO_\triangle$ és a $COD_\triangle$ hasonló, hasonlóságuk aránya a trapéz alapjainak aránya, azaz $\lambda = \frac{1}{4}$.

Ebből következik, hogy a trapéz átlói $1:4$ arányban osztják egymást, azaz az átlók metszéspontja éppen a CA szakasz C-hez közelebbi ötödölőpontja.

Az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggés alapján:

$$O\left(\frac{1\cdot(-7)+4\cdot(-2)}{5}; \frac{1\cdot(-2)+4\cdot 2}{5}\right), \quad \text{azaz} \quad O\left(-3; \frac{6}{5}\right).$$

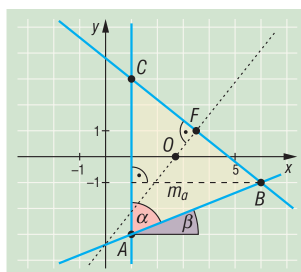
A kapott pont nem egyezik meg a $\left(-3; \frac{3}{2}\right)$ ponttal.

- Az elmondottakból következik, hogy az O pont nem negyedelőpontja az AC átlónak.

5610 *a)* Az AC és BC egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása után kapjuk, hogy $C(1; 3)$. Az AC és AB egyenesek metszéspontja $A(1; -3)$. Végül a BC és AB egyenesek közös pontja $B(6; -1)$.

Az $ABC_\triangle$ csúcsainak ismeretében a távolságok már könnyen kiszámolhatók:

$$AC = 6 \text{ km}, \quad AB = \sqrt{29} \approx 5{,}4 \text{ km}, \quad BC = \sqrt{41} \approx 6{,}4 \text{ km}.$$



b) A feladat az $ABC_\triangle$ A csúcsánál található α szöget kérdezi. Az AB egyenes egyenletéből leolvasható az egyenes meredeksége: $m_{AB} = \frac{2}{5}$, azaz az ábra jelölései alapján $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{2}{5}$.

Az AB egyenes irányszöge ebből következően $\beta = 21{,}8°$.

Mivel a háromszög AC oldalegyenese az x tengellyel 90°-os szöget zár be, ezért $\alpha = 90° - \beta \approx 68{,}2°$.

Az A településen találkozó utak 68,2°-os szögben metszik egymást.

c) Az $ABC_\triangle$ területét legkönnyebb a b oldal, valamint a hozzá tartozó magasság segítségével kiszámolni. Mivel $b = 6$ km és $m_b = 5$ km, ezért a három útszakasz által közrefogott terület 15 km^2.

d) A keresett pont az $ABC_\triangle$ köré írható kör O középpontja. Az O pont koordinátáit az oldalfelező merőlegesek metszéspontjaként számolhatjuk ki.

Az AC oldalfelező merőlegese egybeesik az x tengellyel, ezért egyenlete $y = 0$.

A BC oldal felezőpontja $F\left(\frac{7}{2};1\right)$. Az oldalfelező merőleges egy normálvektora $\overrightarrow{BC}(-5;4)$, így egyenlete:

$$-5x+4y=-\frac{27}{2}.$$

A megfelelő egyenletrendszer megoldása után $O\left(\frac{27}{10};0\right)$.

A szeméttelep helyét az $O\left(\frac{27}{10};0\right)$ pont jelöli ki a koordináta-rendszerben.

5611 Az elsőként adott kör egyenlete:

$$(x+2)^2+(y+3)^2=32,$$

ezért középpontja az $O_1(-2;-3)$ pont, sugara $r_1=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$

A másodikként adott kör egyenlete:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=8,$$

ezért középpontja az $O_2(4;3)$ pont, sugara $r_2=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

Mivel a két kör középpontjának távolságára $O_1O_2=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ teljesül, ezért $O_1O_2=r_1+r_2$, amiből következik, hogy a két kör érinti egymást.

A két kör E érintési pontja az O_1O_2 szakaszt a sugarak arányában osztja, azaz:

$$\frac{O_1E}{EO_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2.$$

Ez azt jelenti, hogy az E pont az O_1O_2 szakasz O_2-höz közelebbi harmadolópontja, ezért:

$$E\left(\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 4}{3};\frac{1\cdot(-3)+2\cdot 3}{3}\right).$$

A két kör közös pontja az $E(2;1)$ pont.

5612 *a)* Az egyenes egyenletéből $y=x+1$, amit a kör egyenletébe visszahelyettesítve:

$$x^2+(x+1)^2-2x-2(x+1)=11.$$

A műveletek elvégzése után: $2x^2-2x-12=0$. Az egyenlet megoldásai: $x_1=3$ és $x_2=-2$.

A metszéspontok $A(3;4)$ és $B(-2;-1)$.

b) A k kör egyenlete $(x+1)^2+(y+4)^2=25$, az e egyenesé $x+7y=-4$.

Az egyenes egyenletéből $x+1=-3-7y$, amit a kör egyenletébe helyettesítve:

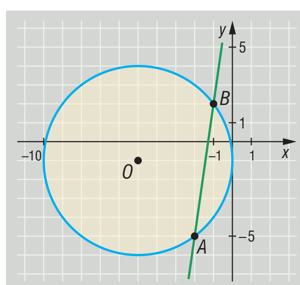
$$(-3-7y)^2+(y+4)^2=25.$$

A műveletek elvégzése után: $50y^2+50y=0$. Az egyenlet megoldása után kapjuk a metszéspontok koordinátáit: $A(-4;0)$ és $B(3;-1)$.

5613 *a)* A kör egyenletét átalakítva:

$$(x+5)^2+(y+1)^2=25,$$

ezért középpontja az $O(-5;-1)$ pont, sugara $r=5$.



b) A metszéspontok koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned}(x+5)^2+(y+1)^2&=25\\ 7x+9&=y\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják.

Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve a következő egyenlethez jutunk:

$$(x+5)^2+(7x+10)^2=25,$$
$$x^2+3x+2=0.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1=-1$ és $x_2=-2$. Az egyenes a kört az $A(-2;-5)$ és a $B(-1;2)$ pontokban metszi.

c) A kör sugara merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. Ebből következik, hogy az A pontbeli érintőnek az $\overrightarrow{OA}(3;-4)$ vektor egy normálvektora, így az érintő egyenes egyenlete:

$$3x-4y=14.$$

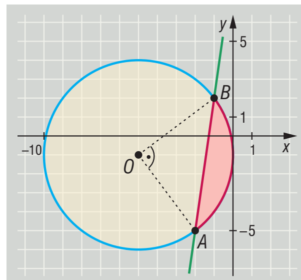
A B pontbeli érintő egy normálvektora az $\overrightarrow{OB}(4;3)$ vektor, egyenlete pedig $4x-3y=2$.

d) Az AB húr hossza $AB=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. Az $OAB_\triangle$-ben:

$$OA^2+OB^2=5^2+5^2=50, \quad \text{ezért} \quad OA^2+OB^2=AB^2.$$

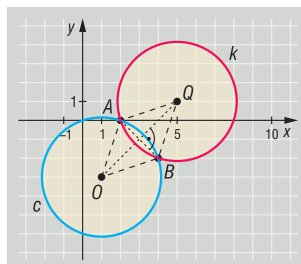
Pitagorasz tételének megfordítása alapján az $OAB_\triangle$ derékszögű. Megjegyezzük, hogy ezt onnan is láthatjuk, hogy $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, ezért a két vektor merőleges egymásra.

Ennek megfelelően a kérdéses körszelet területe egy negyedkör és egy derékszögű háromszög területének különbsége, azaz:



$$T_{\text{körszelet}}=\frac{5^2\cdot\pi}{4}-\frac{5\cdot 5}{2}=\frac{25}{4}\cdot(\pi-2)\approx 7{,}13.$$

5614 *a)* A c kör egyenletét átalakítva $(x-1)^2+(y+3)^2=10$, amiből a kör középpontja $O(1;-3)$, sugara $r=\sqrt{10}$. Ha az O pontot a megadott vektorral eltoljuk, akkor a $Q(5;1)$ pontot kapjuk, és mivel az eltolás a kör sugarát nem változtatja meg, ezért a k kör egyenlete $(x-5)^2+(y-1)^2=10$. A két kör metszéspontjait a körök egyenletéből álló



$$\left.\begin{aligned}(x-1)^2+(y+3)^2&=10\\(x-5)^2+(y-1)^2&=10\end{aligned}\right\}$$

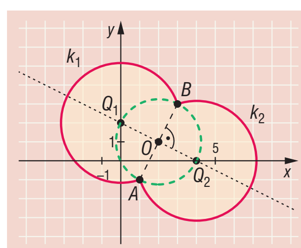
egyenletrendszer megoldásai adják. A megfelelő oldalak különbsége $8x+8y-16=0$, amiből $y=2-x$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=2$, $y_1=0$ és $x_2=4$, $y_2=-2$.

A két kör közös pontjai $A(2;0)$ és $B(4;-2)$.

b) Az $AOBQ$ négyszög minden oldala $r=\sqrt{10}$, ezért a négyszög rombusz. Az átlók hossza $OQ=4\sqrt{2}$ és $AB=2\sqrt{2}$. Az $AOBQ$ rombusz területe az átlók szorzatának a fele, azaz:

$$T=\frac{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2}=8.$$

5615 A látószögkörívekre vonatkozó tétel alapján az ilyen tulajdonságú pontok halmaza két, az AB szakaszra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő körív (melyeket az ábrán pirossal jelöltünk). Ha a látókörívek pontjaiból az AB szakasz 45°-os szög alatt látszik, akkor a középponti és kerületi szögek tétele alapján a látókörívek középpontjából az AB szakasz 90°-os szög alatt látszik. Ezért a keresett körívek középpontja illeszkedik az AB szakasz Thalész-körére, valamint természetesen a szakaszfelező merőlegesére is.



A körívek középpontjának koordinátáit (az ábrán Q_1 és Q_2) a két említett alakzat metszéspontjaként számolhatjuk ki.

Az AB szakasz felezőpontja (egyben Thalész-körének középpontja) $O(2;\ 1)$. A szakaszfelező merőleges egyenlete $x + 2y = 4$.

A megfelelő Thalész-kör egyenlete $OA = \sqrt{5}$ miatt $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$. A szakaszfelező merőleges egyenletéből $x = 4 - 2y$, amit a Thalész-kör egyenletébe helyettesítve, majd az első tagból 4-et kiemelve adódik, hogy:

$$(2-2y)^2 + (y-1)^2 = 5,$$
$$4 \cdot (1-y)^2 + (y-1)^2 = 5,$$
$$5 \cdot (y-1)^2 = 5.$$

A kapott egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $y = 2$ vagy $y = 0$. A két látószögkörív középpontja tehát $Q_1(0;\ 2)$ és $Q_2(4;\ 0)$.

A látószögkörívek sugara ugyanakkora: $r = Q_1A = Q_2A = \sqrt{10}$, egyenletük:

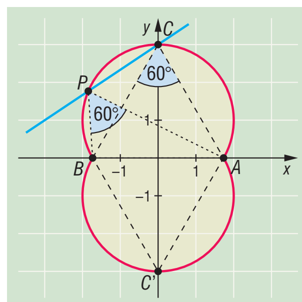
$$k_1:\ x^2 + (y-2)^2 = 10, \qquad k_2:\ (x-4)^2 + y^2 = 10.$$

A feladat feltételeinek a k_1 körvonalnak azok a pontjai felelnek meg, amelyek az AB egyenes „felett" vannak. Mivel az AB egyenes egyenlete $y = 2x - 3$, ezért a k_1 körnek azok a pontjai tartoznak a látószögkörívhez, amelyek koordinátáira $y > 2x - 3$ teljesül.

A k_2 körnek azok a pontjai felelnek meg, amelyek az AB egyenes „alatt" vannak, azaz amelyek koordinátáira $y < 2x - 3$ teljesül.

Megjegyzés: A piros látókörívek kiegészítő köríveiből az AB szakasz 135°-os szög alatt látszik.

5616 Ha egy P pontból az AB szakasz 60°-os szög alatt látszik, akkor P illeszkedik az AB szakaszhoz tartozó 60°-os látószögkörívek valamelyikére.



Ha a C pont az AB szakasz végpontjaival szabályos háromszöget alkot, akkor a C pontból az AB szakasz biztosan 60°-os szög alatt látszik.

E két megállapításból következik, hogy az AB szakasz 60°-os látószögkörívei megegyeznek a szabályos $ABC_\triangle$ köré írható körök megfelelő köríveivel. Két olyan pont van, amelyek az A és B pontokkal szabályos háromszöget fognak közre. Mindkettő illeszkedik az y tengelyre, továbbá a két pont egymás tükörképe az x tengelyre vonatkozóan. Az y tengely pozitív felére illeszkedő megfelelő pont második koordinátája éppen a szabályos háromszög magasságával egyenlő.

Mivel $AB = 2\sqrt{3}$, amiből a háromszög magassága $m = \dfrac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$, ezért a megfelelő szabályos háromszög harmadik csúcsa $C(0;\ 3)$. Az y tengely negatív felére illeszkedő csúcs koordinátái $C'(0;\ -3)$ (ld. ábra).

A szabályos háromszög köré írható kör középpontja egybeesik súlypontjával, sugara pedig a magasság $\dfrac{2}{3}$ része, ezért az $ABC_\triangle$ köré írható kör középpontja $O(0;\ 1)$, sugara 2, egyenlete:

$$k_1:\quad x^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Hasonlóan az $ABC'_\triangle$ köré írt kör egyenlete:

$$k_2:\quad x^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Az AB szakasz 60°-os látószögkörívei: a k_1 kör x tengely „feletti" íve, illetve a k_2 kör x tengely „alatti" íve.

Világos, hogy ez utóbbi nem metszi az adott $-2x+3y=9$ egyenletű egyenest, ezért az egyenes azon pontjai, amelyekből az AB szakasz $60°$-os szög alatt látszik, csakis a k_1 körön lehetnek. Az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáit ennek megfelelően az

$$\left.\begin{aligned} x^2+(y-1)^2&=4 \\ -2x+3y&=9 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják: $x_1=0,\ y_1=3$ és $x_2=-\dfrac{24}{13},\ y_2=\dfrac{23}{13}$.

Két olyan pont van az adott egyenletű egyenesen, amelyekből az AB szakasz $60°$-os szög alatt látszik, ezek koordinátái: $C(0;\,3)$ és $P\left(-\dfrac{24}{13};\,\dfrac{23}{13}\right)$.

5617 *a)* A k kör egyenlete $(x-2)^2+(y+2)^2=1$, tehát a kör középpontja $O(2;\,-2)$, sugara pedig 1. Az érintők egyenletét $y=mx-4$, illetve a kényelmesebb $mx-y-4=0$ alakban kereshetjük. Mindkét érintő $r=1$ egység távolságra halad a kör O középpontjától, ezért a pont és egyenes távolságára vonatkozó formula alapján:

$$\left|\frac{2m+2-4}{\sqrt{m^2+1}}\right|=1, \quad \text{azaz} \quad \left|\frac{2m-2}{\sqrt{m^2+1}}\right|=1.$$

Ha mindkét oldalt négyzetre emeljük, akkor:

$$\frac{(2m-2)^2}{m^2+1}=1, \quad \text{ebből} \quad 3m^2-8m+3=0.$$

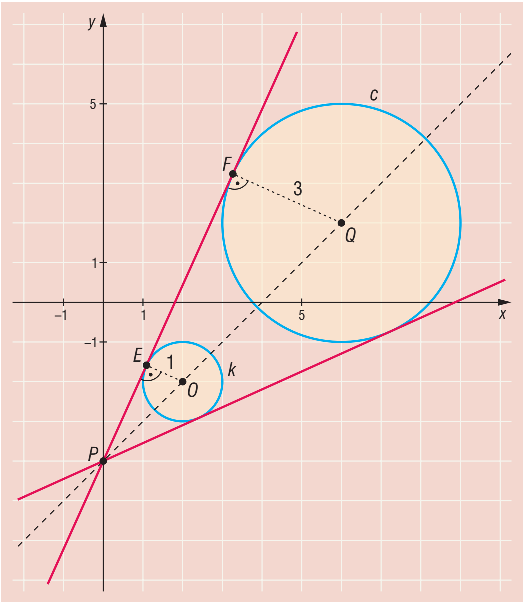
Az egyenlet megoldásai: $m_1=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ és $m_2=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$.

A P pontból a k körhöz húzható érintők egyenlete:

$$y=\frac{4+\sqrt{7}}{3}\cdot x-4 \quad \text{és} \quad y=\frac{4-\sqrt{7}}{3}\cdot x-4.$$

b) A feltételek alapján a c kör sugara 3. A két kört és közös érintőiket az ábra mutatja. Ha az egyik érintő érintési pontjait E és F, a c kör középpontját pedig Q jelöli, akkor a $POE_\triangle$ és $PQF_\triangle$ hasonló, megfelelő oldalaik arányára pedig:

$$\frac{PO}{PQ}=\frac{1}{3}.$$



A kapott egyenlőségből leolvasható, hogy az O pont éppen a PQ szakasz P-hez közelebbi harmadolópontja, ezért ha $Q(x;\,y)$, akkor az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggés alapján:

$$\frac{2\cdot 0+1\cdot x}{3}=2 \quad \text{és} \quad \frac{2\cdot(-4)+1\cdot y}{3}=-2.$$

Az egyenletek megoldása után a Q pontra $Q(6;\,2)$ adódik. A c kör egyenlete:

$$(x-6)^2+(y-2)^2=9.$$

c) A két kört és a közös belső érintőket az ábra mutatja. Ha az ábra jelöléseit követve a kialakuló érintési pontokat ezúttal is E és F jelöli, akkor a $POE_\triangle$ és $PQF_\triangle$ ismét hasonló, a megfelelő oldalaik arányára ezúttal is:

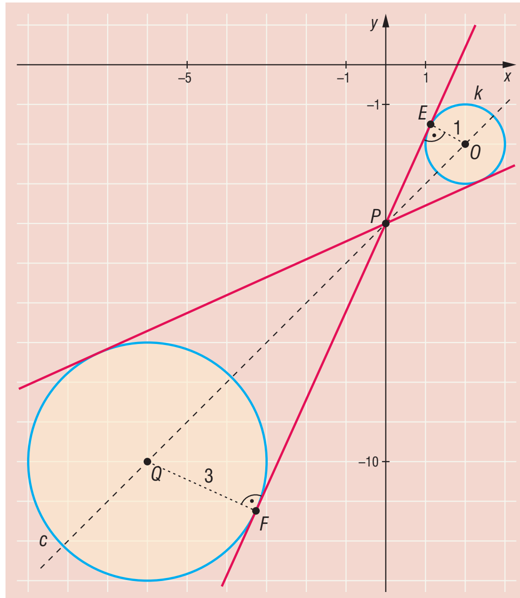
$$\frac{PO}{PQ}=\frac{1}{3}.$$

Ezúttal azonban a P pont elválasztja az O és Q pontokat, ezért P az OQ szakasz O-hoz közelebbi negyedelőpontja. Ha a Q pont koordinátái ismét $Q(x; y)$, akkor:

$$\frac{1\cdot x+3\cdot 2}{4}=0 \quad \text{és} \quad \frac{1\cdot y+3\cdot(-2)}{4}=-4.$$

Az egyenletek megoldása után a Q pontra $Q(-6; -10)$ adódik. A c kör egyenlete:

$$(x+6)^2+(y+10)^2=9.$$



5618 *a)* A parabola egyenletét átalakítva $y=(x-3)^2-2$. Az egyenletből leolvasható, hogy a parabola tengelypontja a $C(3; -2)$ pont, paramétere $p=\frac{1}{2}$, fókuszpontjának koordinátái $F\left(3; -\frac{7}{4}\right)$.

b) A parabola vezéregyenesének egyenlete v: $y=-\frac{9}{4}$.

c) Az A pont illeszkedik a parabolára, ezért az érintő meredeksége az f: $x\mapsto x^2-6x+7$ függvény deriváltjának $x_0=1$ helyen vett helyettesítési értéke. Mivel $f'(x)=2x-6$, ezért az érintő meredeksége -4, egyenlete: $y-2=-4(x-1)$, vagy átrendezve: $y=-4x+6$.

d) Az origó körül $+90°$-kal elforgatott parabola tengelypontját úgy kapjuk, hogy a C pontot $+90°$-kal elforgatjuk az origó körül. A elforgatott parabola tengelypontja $C'(2; 3)$. A kapott parabola paramétere nem változik, tengelye viszont az x tengellyel párhuzamos („balra nyílik”), ezért egyenlete: $x-2=-(y-3)^2$, vagy átrendezve: $x=-y^2+6y-7$.

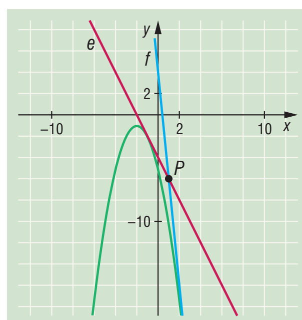
Az origó körül $-90°$-kal elforgatott parabola tengelypontja $C''(2; 3)$. A kapott parabola (mely „jobbra nyílik”) egyenlete: $x+2=(y+3)^2$, vagy átrendezve: $x=y^2+6y+7$.

5619 *a)* A mozgó test pályájának egyenletét $y=m(x-1)-6$ alakban kereshetjük. A feltételek szerint az egyenes a parabola egyik érintője, ezért az

$$\left.\begin{aligned} y&=-x^2-4x-5\\ y&=m\cdot(x-1)-6 \end{aligned}\right\}$$

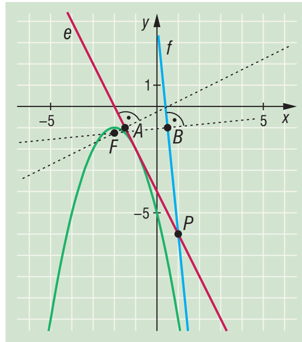
egyenletrendszer diszkriminánsa 0. Az y változót kiküszöbölve $m(x-1)-6=-x^2-4x-5$, majd rendezve kapjuk, hogy:

$$x^2+(4+m)x-(1+m)=0.$$



A kapott egyenlet diszkriminánsa $(4+m)^2+4(1+m)=0$. A műveletek elvégzése után az $m^2+12m+20=0$ egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai: $m_1=-2$ és $m_2=-10$. Eredményeink alapján két olyan egyenes van, amelyeken a test mozoghat. Ezeket az ábrán pirossal, illetve kékkel jelöltük, egyenletük pedig:

$$e:\quad y=-2x-4, \qquad \text{illetve} \qquad f:\quad y=-10x+4.$$



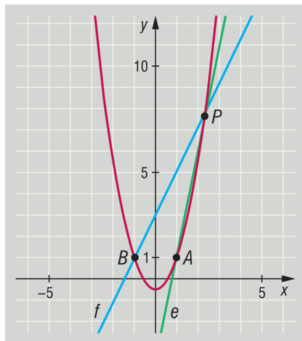
b) A parabola egyenletét átalakítva $y = -(x+2)^2 - 1$, amiből látható, hogy a fókuszpont $F\left(-2; -\frac{5}{4}\right)$.

Amikor a P pont a legközelebb volt az F fókuszponthoz, akkor rajta volt az F-ből a megfelelő érintőre emelt merőlegesen.

Az F pontból az e érintőre emelt merőleges egyenes egyenlete $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. A merőleges az érintőből az $A\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ pontot metszi ki, ezért ha a test az e érintőn mozog, akkor az A pontban volt a fókuszponthoz a legközelebb.

Az F pontból az f érintőre emelt merőleges egyenes egyenlete $y = \frac{1}{10}x - \frac{21}{20}$. A merőleges az f érintőből a $B\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ pontot metszi ki, ezért amennyiben a test az f érintőn mozog, akkor a B pontban volt a fókuszponthoz a legközelebb.

5620 Ha az ábrának megfelelően az e egyenes meredekségét m jelöli, akkor egyenlete: $y - 1 = m(x - 1)$. Mivel az f egyenes meredeksége $m - 3$, ezért egyenlete: $y - 1 = (m - 3)(x + 1)$. A két egyenes metszéspontjának koordinátáit az



$$\left.\begin{aligned} y - 1 &= m \cdot (x - 1) \\ y - 1 &= (m - 3) \cdot (x + 1) \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Mivel a két egyenlet bal oldalán ugyanaz a kifejezés áll, ezért a jobb oldalak is megegyeznek, így $m(x - 1) = (m - 3)(x + 1)$.

A műveletek elvégzése, valamint rendezés után: $x = \frac{2m - 3}{3}$.

A kapott értéket az első egyenletbe visszaírva, majd y értékét kifejezve kapjuk, hogy

$$y = \frac{2m^2 - 6m + 3}{3},$$

ezért az e és f egyenesek P metszéspontjának koordinátái:

$$P\left(\frac{2m - 3}{3}; \frac{2m^2 - 6m + 3}{3}\right).$$

A P pont első koordinátájából a meredekséget kifejezve $m = \frac{3x + 3}{2}$, tehát a P pont második koordinátája:

$$y = \frac{2 \cdot \left(\frac{3x + 3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3x + 3}{2} + 3}{3}.$$

A műveletek elvégzése után $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ adódik.

Eredményünk alapján az e és f egyenesek P metszéspontja illeszkedik az $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ egyenletű parabolára.

Számításaink „megfordíthatók”, ezért a parabola minden pontja egy-egy e, illetve f egyenes metszéspontja.