EMELT SZINTŰ FELADATSOROK

1. Feladatsor / *A* – megoldások

1. A bal oldalon álló tört értelmezési tartománya : $1-4x^2 \geq 0,\ x \neq 0,$ azaz $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5.$
Bővítjük a törtet az $1+\sqrt{1-4x^2}$ összeggel:

$$\frac{4x^2}{x\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)} = \frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}} < 3.$$

Ha $-0{,}5 \leq x < 0,$ akkor $4x < 0$ és $1+\sqrt{1-4x^2} > 0,$ így hányadosuk negatív, azaz kisebb 3-nál.
Ha $0 \leq x < 0,$ akkor $0 < 4x \leq 2,$ $1+\sqrt{1-4x^2} \geq 1,$ tehát a tört értéke $\leq 2.$
Tehát az egyenlőtlenség az összes, az értelmezési tartományba tartozó x valós számra teljesül: $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5.$

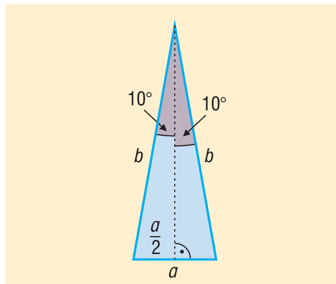
2. Az ábráról leolvasható, hogy $\sin 10° = \dfrac{a}{2b}.$
A $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ azonosságot $\alpha = 10°$-ra alkalmazva:

$$\sin 30° = 0{,}5 = 3\cdot\sin 10° - 4\cdot\sin^3 10° = 3\cdot\frac{a}{2b} - 4\cdot\left(\frac{a}{2b}\right)^3.$$

Átrendezve:

$$0{,}5 = 1{,}5\cdot\frac{a}{b} - 0{,}5\cdot\frac{a^3}{b^3}, \qquad \text{amiből} \qquad a^3+b^3 = 3ab^2,$$

és ezt kellett igazolni.



3. Mivel a logaritmus alapja csak 1-től különböző pozitív szám lehet, $0 < x,\ x \neq 1,\ x \neq 16,\ x \neq 64.$
A megfelelő logaritmus azonosságok felhasználásával az egyenlet így írható:

$$\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 x - 4} = \frac{1}{\log_2 x - 6}.$$

Ha a $\log_2 x = z$ jelölést használjuk, akkor a kapott egyenlet így alakítható át:

$$z(z-4) = z-6, \quad \text{azaz} \quad z^2-5z+6=0.$$

Innen $z_1 = 2,\ z_2 = 3,$ és így $x_1 = 4,\ x_2 = 8.$ A kapott gyökök kielégítik az egyenletet.

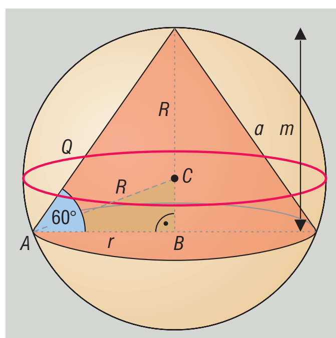
4. Jelölje a kúp alapkörének sugarát r, alkotóját a, így a palást felszíne: $A_p = ra\pi,\ t_{kör} = r^2\pi.$ A feltétel szerint $ra\pi = 2r^2\pi,$ tehát $a = 2r,$ azaz egyenlő oldalú kúpot kaptunk. Ennek magassága $m = r\sqrt{3},$ tehát a térfogata:

$$V = r^3\cdot\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Mivel a kúp alapköre és csúcsa a gömbfelületre illeszkedik, az ábrán látható ABC derékszögű háromszögből:

$$\left(r\sqrt{3}-R\right)^2 + r^2 = R^2, \quad \text{innen} \quad r = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

A kúp térfogata tehát: $V = R^3\cdot\dfrac{3\pi}{8}.$

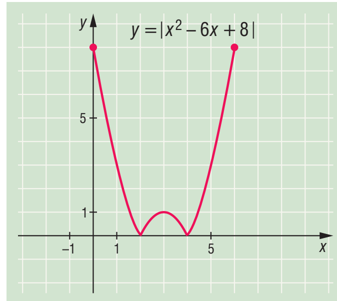


1. Feladatsor / *B* – megoldások

5. *a)* Az f függvény grafikonja az ábrán látható.

A függvény átalakítható:

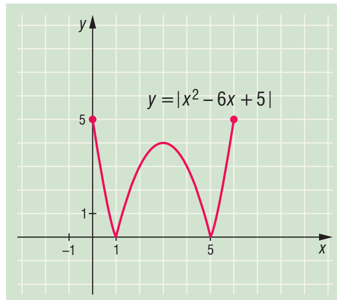
$$f(x) = |x^2 - 6x + 8| = |(x-3)^2 - 1|.$$



b) A g függvény grafikonja az ábrán látható.

A függvény átalakítható:

$$g(x) = |x^2 - 6x + 5| = |(x-3)^2 - 4|.$$

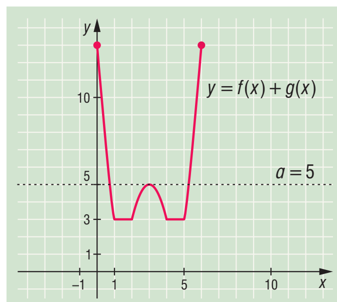


Ábrázoljuk a

$$h(x) = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|, \quad 0 \le x \le 6$$

függvényt, amelyre $h(x) = f(x) + g(x)$.

Az ábráról leolvasható, hogy $3 \le a < 5$ esetén van az egyenletnek 3-nál több megoldása a valós számok körében.



6. Az $y = x^2 + ax + b$ egyenletű parabola tengelypontjának koordinátái: $x = -\dfrac{a}{2}$ és $y = b - \dfrac{a^2}{4}$. Ezért az $y = x^2 + (2p+1)x + p^2 - 1$ egyenletű parabola tengelypontjának koordinátái: $x = -p - 0{,}5$, illetve $y = -p - 1{,}25$.

Innen látható, hogy a tengelypontok koordinátái kielégítik az $y - x = -0{,}75$, azaz az $y = x - 0{,}75$ egyenletet, amely egyenes egyenlete. A tengelypontok tehát illeszkednek az $y = x - 0{,}75$ egyenesre.

7. Rendezzük át az egyenlőtlenséget, és használjuk fel, hogy a háromszögben $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, ezért $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta > 2 - \sin^2(\alpha + \beta),$$
$$\sin^2(\alpha + \beta) > 2 - (1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta),$$
$$\sin^2(\alpha + \beta) > \cos^2\alpha + \cos^2\beta. \quad (1)$$

Használjuk fel a szinuszfüggvény addíciós tételét, és végezzük el a négyzetre emelést:

$$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta > \cos^2\alpha + \cos^2\beta. \quad (2)$$

Ezután újra rendezzük át az egyenlőtlenséget, és használjuk az ismert azonosságokat:

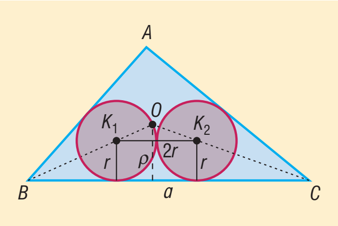
$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta > 2\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta. \qquad (3)$$

Mivel $\cos\alpha,\ \cos\beta > 0$ (α és β hegyesszögek), oszthatunk ezekkel és 2-vel, majd átrendezve:

$$0 > \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha+\beta). \qquad (4)$$

A (4) egyenlőtlenség igaz, mert $90° < \alpha+\beta < 180°$, hiszen γ is hegyesszög. A (4) egyenlőtlenségből következik a (3), ebből a (2) és végül az (1), mert a lépések megfordíthatók. Így igazoltuk az egyenlőtlenséget.

8. Az ábra jelöléseit használjuk. A két kör érinti egymást, és a háromszög két oldalát, ellenkező esetben sugaruk növelhető lenne. Jelölje az ABC háromszögbe írt kör sugarát ρ, a két egybevágó kör sugarát r. Mivel BO és CO szögfelezők, O a beírt kör középpontja, ennek az a oldaltól való távolsága ρ. Ha K_1 és K_2 a két egyenlő sugarú kör középpontja, akkor a BCO és K_1K_2O háromszögek hasonlók, így a megfelelő szakaszaik aránya egyenlő: $\dfrac{\rho}{a} = \dfrac{\rho - r}{2r}$.



Ebből

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\rho}{2r} - \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\rho}{a} + \frac{1}{2} = \frac{\rho}{2r} \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{2\rho + a} = \frac{r}{\rho},$$

így a kivágandó kör sugara:

$$r = \frac{a\cdot\rho}{2\rho + a} = \frac{a\cdot\rho + 2\rho^2 - 2\rho^2}{2\rho + a} = \rho - \frac{2\rho^2}{2\rho + a}.$$

Leolvasható, hogy r annál nagyobb, minél nagyobb az a, azaz akkor a legnagyobb, ha a a legnagyobb oldal.

9. Az egyenletesen gyorsuló test útját a következő képlet adja meg: $s = v_0\cdot t + \dfrac{a\cdot t^2}{2}$.
A hátrább lévő test esetén ha $t = 1$ s, akkor $s = 25$ m, tehát:

$$25 = v_0 + \frac{a}{2}, \qquad (1)$$

ha $t = 2\text{s}$, akkor $s = 50\frac{1}{3}$ m, tehát

$$50\frac{1}{3} = 2v_0 + 2a. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből $a = \dfrac{1}{3}$ és $v_0 = 25 - \dfrac{1}{6} = 24\dfrac{5}{6}$. Tehát $s_1 = 24\dfrac{5}{6}\cdot t + \dfrac{t^2}{6}$.

A másik test esetén ha $t = 1$ s, akkor $s = 30$ m, tehát:

$$30 = v_0 + \frac{a}{2}, \qquad (3)$$

ha $t = 2\text{s}$, akkor $s = 59\frac{1}{2}$ m, tehát

$$59\frac{1}{2} = 2v_0 + 2a. \qquad (4)$$

A (3) és (4) egyenletekből $a = -\dfrac{1}{2}$ és $v_0 = 30\dfrac{1}{4}$. Tehát $s_2 = 30\dfrac{1}{4}\cdot t - \dfrac{t^2}{4}$.

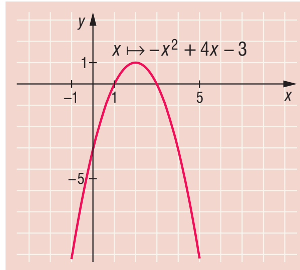
Az első test akkor éri utol a másodikat, ha $s_1 = s_2 + 20$. Ebből t-re a következő egyenletet kapjuk:

$$t^2 - 13t - 48 = 0.$$

Ennek gyökei 16 és -3. Nyilván csak a pozitív gyök jó, tehát 16 másodperc múlva éri utol az első test a másodikat.

2. Feladatsor / *A* – megoldások

1. *a)* A logaritmus értelmezése alapján $-x^2 + 4x - 3 > 0$, valamint $x - 1 > 0$. Az utóbbi egyenlőtlenség megoldása $x > 1$, míg az első egyenlőtlenség bal oldalán álló másodfokú kifejezés két zérushelye: $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$. Az $x \mapsto -x^2 + 4x - 3$ másodfokú függvény grafikonjáról (ld. ábra) leolvasható, hogy az első egyenlőtlenség megoldása $1 < x < 3$.



A kifejezés értelmezési tartománya az $]1; 3[$ intervallum.

b) A logaritmus azonosságai és definíciója alapján az egyenlet a következő alakokban is felírható:

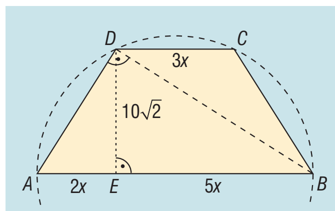
$$\log_2 \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-1)^2} = 1, \quad \text{amiből} \quad \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-1)^2} = 2.$$

Az *a)* feladatban kiszámoltuk a számláló gyökeit. A gyöktényezős alak alkalmazásával kapjuk, hogy $-x^2 + 4x - 3 = -(x-1)(x-3)$, és ezért a bal oldalon álló tört egyszerűsítése után:

$$\frac{-(x-3)}{x-1} = 2, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{5}{3}.$$

A kapott szám eleme az értelmezési tartománynak, és ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy megoldása az egyenletnek.

2. *a)* A feltételek alapján a trapéz nem téglalap. Ekkor az ábra jelöléseit használva a trapéz alapjai $AB = 7x$, $CD = 3x$, a D csúcsból induló magasság talppontja E, továbbá az ABD háromszög derékszögű. Az ABD háromszögben a magasságtétel alapján adódik: $DE^2 = 2x \cdot 5x = 10x^2$, ebből következik, hogy $200 = 10x^2$, végül $x = 2\sqrt{5}$.



A trapéz alapjai:

$$AB = 14\sqrt{5} \approx 31{,}30 \text{ cm}, \quad CD = 6\sqrt{5} \approx 13{,}42 \text{ cm}.$$

A trapéz területe:

$$T = \frac{AB + CD}{2} \cdot DE = \frac{14\sqrt{5} + 6\sqrt{5}}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 100\sqrt{10} \approx 316{,}23 \text{ cm}^2.$$

b) Thalész tételének megfordítása alapján az ABD derékszögű háromszög köré írt kör középpontja éppen az AB átfogó felezőpontja. Természetesen a C csúcs szintén illeszkedik az AB átmérőjű körre, így a trapéz köré írt kör sugara az AB átfogó fele, azaz $r = 7\sqrt{5} \approx 15{,}65$ cm.

A kör területe:

$$T = r^2\pi = 245\pi \approx 769{,}69 \text{ cm}^2.$$

3. *a)* Jelöljük p-vel annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott tanuló mekkora valószínűséggel oldja meg egyedül a házi feladatát, azaz $p = 0{,}65$.

Mivel független eseményekről van szó, ezért a keresett valószínűség $p^{15} \approx 0{,}0016$. Sajnálattal állapítjuk meg, hogy ez elkeserítően kicsi érték.

b) Azt a 10 diákot, aki nem önállóan dolgozott, $\binom{15}{10} = 3003$-féleképpen választhatjuk ki. A binomiális eloszlás alapján annak a valószínűsége, hogy éppen 10 diák készítette el segítséggel a házi feladatát:

$$\binom{15}{10} \cdot p^5 \cdot (1-p)^{10} \approx 0{,}0096.$$

4. *a)* A holtverseny az 1., 2., 3., 4., illetve 5. hely valamelyikén lehetett. A hat versenyző közül $\binom{6}{2}=15$-féleképpen választhatjuk ki azt a kettőt, akik holtversenyt értek el. A maradék négy helyen a többi versenyző $4!=24$-féleképpen érhetett célba. Így összesen $5\cdot 15\cdot 24=1800$ különböző sorrendben érhettek célba a versenyzők.

b) Mivel a versenyt Andor egyedül nyerte meg, ezért az 1. helyen nem alakulhatott ki holtverseny.

I. eset: Fábián az 5. helyen holtversennyel ért célba. Ekkor Fábián mellé 4-féleképpen választhatunk 5. helyezettet. A 2., 3., 4. helyen a maradék 3 versenyző $3!=6$-féleképpen érhetett célba, ezért az 1. eset összesen $4\cdot 6=24$-féleképpen valósulhatott meg.

II. eset: Fábián egyedül ért célba az utolsó helyen. Ekkor a holtverseny a 2., a 3. vagy a 4. helyen következhetett be. Az együtt célba érkezőket $\binom{4}{2}=6$-féleképpen választhatjuk ki. A maradék két helyezésen kétféleképpen alakulhatott a sorrend, ezért a 2. eset összesen $3\cdot 6\cdot 2=36$-féleképpen valósulhatott meg.

A verseny végeredménye összesen $24+36=60$-féleképpen alakulhatott.

2. Feladatsor / *B* – megoldások

5. *a)* Anna a 4 év alatt 48 alkalommal fizet be 10 000 Ft-ot, ezért összesen 480 000 Ft-ot fizet be.

b) Anna az 1. évben összesen 12-szer fizet be 10 000 Ft-ot. Az első összeg 12 hónapig kamatozik, a második 11 hónapig, és így tovább; a december 1-jén befizetett 10 000 Ft után a bank már csak 1 havi kamatot fizet. Így december 31-én az Anna számláján lévő összeg:

$$10\,000\cdot 1{,}003^{12}+10\,000\cdot 1{,}003^{11}+\ldots+10\,000\cdot 1{,}003.$$

A fenti összeg egy mértani sorozat első 12 tagjának összege. A sorozat első tagja $10\,000\cdot 1{,}003$, hányadosa 1,003, így az összeg:

$$10000\cdot 1{,}003\cdot\frac{1{,}003^{12}-1}{1{,}003-1}\approx 122\,365{,}93,$$

vagyis Anna számláján hozzávetőlegesen 122 366 Ft lesz.

c) A megtakarítás összegét két részre bonthatjuk.

I. rész: Anna befizetései, valamint annak kamata. Az első hónapban befizetett összeg 48 hónapig, a második hónapban befizetett összeg 47 hónapig és így tovább; az utolsó befizetett összeg már csak 1 hónapig kamatozik. Ennek megfelelően a befizetésekből, valamint annak kamataiból Anna számláján a következő összeg íródik jóvá:

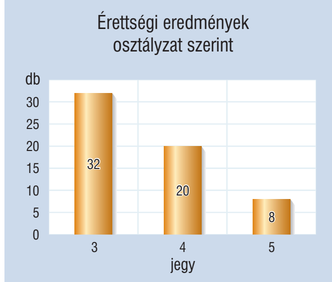
$$10000\cdot 1{,}003^{48}+10000\cdot 1{,}003^{47}+\ldots+10000\cdot 1{,}003=$$
$$=10000\cdot 1{,}003\cdot\frac{1{,}003^{48}-1}{1{,}003-1}\approx 516\,996{,}95\ \text{Ft}.$$

II. rész: az állami támogatás, valamint annak kamatai. Az első év után az állam 36 000 Ft-ot utal a számlára. Ez az összeg 36 hónapig kamatozik. A második év után kapott 36 000 Ft 24 hónapig, míg a harmadik év után járó 36 000 Ft csak 12 hónapig kamatozik. A negyedik év után járó állami támogatás jóváíródik a számlán az 5. év első napján, de kamat már nem jár utána. Ezek alapján az állami támogatás, valamint az utána járó kamat összege:

$$36\,000\cdot 1{,}003^{36}+36\,000\cdot 1{,}003^{24}+36\,000\cdot 1{,}003^{12}+36\,000\approx 152\,100{,}26\ \text{Ft}.$$

Anna a takarékoskodási időszak letelte után összesen $516\,996{,}95+152\,100{,}26\approx 669\,097$ Ft összeget vehet fel.

6. *a)* Közepest a 20 diák 60%-a (12 fő), illetve a 40 diák 50%-a (20 fő) kapott, tehát összesen 32-en. Jót, azaz 4-est a 20 diák 25%-a (5 tanuló), valamint a 40 diák 37,5%-a (15 tanuló), összesen 20-an kaptak. A maradék 8 tanuló jelesre érettségizett. Az adatok szemléltetésére oszlopdiagram a legmegfelelőbb.



b) A matematikaérettségi jegyek átlaga:

$$\frac{12\cdot 3+5\cdot 4+3\cdot 5}{20}=3{,}55.$$

A történeleméretttségi jegyek átlaga:

$$\frac{20\cdot 3+15\cdot 4+5\cdot 5}{40}\approx 3{,}63.$$

c) Tegyük fel, hogy legalább n diáknak kellett volna 4-est szereznie a jobb átlaghoz. Ekkor:

$$\frac{(12-n)\cdot 3+(5+n)\cdot 4+3\cdot 5}{20}\geq 3{,}75.$$

A műveletek elvégzése után $n\geq 4$ adódik, azaz legalább 4 embernek kellett volna 4-est elérnie a közepesre érettségizők közül a jobb átlaghoz.

d) Az átlag csak a következő esetekben nagyobb vagy egyenlő, mint 4,20:

I. eset: két ötös; II. eset: egy ötös és egy négyes tanulót választunk ki.

Az I. eset bekövetkezésének valószínűsége:

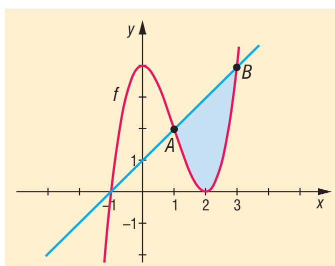
$$P(\text{két 5-ös tanulót választunk})=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{10}{780}\approx 0{,}0128,$$

a II. eset bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(\text{egy 5-ös és egy 4-es tanulót választunk})=\frac{5\cdot 15}{\binom{40}{2}}=\frac{75}{780}\approx 0{,}0962.$$

A keresett valószínűség $\approx 0{,}1090$.

7. *a)* Mivel $1^3-3\cdot 1^2+4=2$, valamint $3^3-3\cdot 3^2+4=4$, ezért A és B egyaránt illeszkednek az f függvény grafikonjára.



b) Az AB egyenes egyenlete: $y=x+1$.

c) Az AB egyenes az x tengelyt a $(-1;\,0)$ pontban metszi. Egyszerű számolás mutatja, hogy $(-1)^3-3\cdot(-1)^2+4=0$, így a $(-1;\,0)$ pont illeszkedik az f függvény grafikonjára is.

d) A zérushelyeket az $x^3-3x^2+4=0$ egyenlet megoldásai adják. A *c)* feladat eredménye alapján az AB egyenes zérushelye $x=-1$. Az egyenlet bal oldalán szorzattá alakítunk:

$$x^3-3x^2+4=x^3+1-3x^2+3=(x+1)(x^2-x+1)-3(x^2-1)=$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1)=(x+1)(x^2-x+1-3x+3)=$$
$$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$$

A szorzattá bontásból leolvasható, hogy az egyenlet megoldásai: $x_1=-1$ és $x_2=2$.

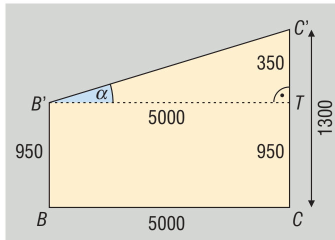
e) Az f függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. A derivált előjelének vizsgálatából látható, hogy a függvény az $[1;\,2]$-on csökken, a $[2;\,3]$-on pedig növekszik. Ebből adódik, hogy az AB szakasz és a függvény grafikonja által közrefogott síkidom területe:

$$T = \int_1^3 (x+1) - (x^3 - 3x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 -x^3 + 3x^2 + x - 3\,\mathrm{d}x.$$

A Newton–Leibniz-formula alapján:

$$T = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\right]_{x=1}^{x=3} = 4.$$

8. *a)* Ha a Tündér-hegy csúcsát B', a Magas-hegyét pedig C' jelöli, akkor a $BCC'B'$ derékszögű trapéz alapjai $BB' = 950$ m, $CC' = 1300$ m, míg egyik szára $BC = 5000$ m (ld. ábra).



A $B'TC'$ derékszögű háromszögben:

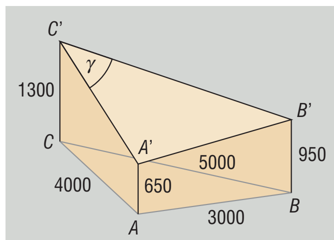
$$C'T = 1300 - 950 = 350 \text{ m},$$

így a keresett $C'B'T\sphericalangle = \alpha$ szögre:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{350}{5000}, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha \approx 4{,}00°.$$

A Tündér-hegy csúcsáról a Magas-hegy csúcsa $4{,}00°$-os emelkedési szögben látszik.

b) Ha a Pokol-hegy csúcsát A' jelöli, akkor az $A'C'B' = \gamma$ szög nagyságát keressük.



A γ szöget az $A'C'B'$ háromszög oldalaiból például a koszinusztétel segítségével számolhatjuk ki. Az *a)* feladat ábráján szereplő $B'C'T$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével $B'C' \approx 5012{,}24$ m adódik. Hasonló számolások után:

$$A'B' = \sqrt{3000^2 + (950-650)^2} \approx 3014{,}96 \text{ m},$$

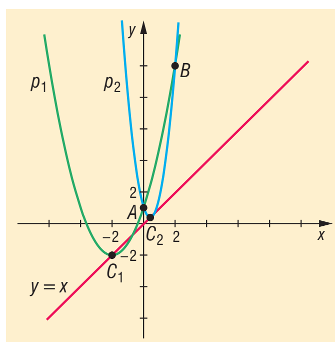
$$A'C' = \sqrt{4000^2 + (1300-650)^2} \approx 4052{,}47 \text{ m}.$$

Az $A'C'B'$ háromszögre felírva a koszinusztételt kapjuk, hogy:

$$A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2 - 2\cdot A'C'\cdot B'C'\cdot\cos\gamma, \qquad \text{ahonnan} \qquad \gamma \approx 36{,}97°.$$

A Magas-hegy csúcsáról a másik két hegycsúcsot összekötő szakasz körülbelül $36{,}97°$-os szögben látszik.

9. A második feltétel alapján a parabola áthalad a $(0;\,1)$ ponton, ezért:



$$a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 1, \qquad \text{amiből} \qquad c = 1.$$

Mivel a parabola illeszkedik a $(2;\,10)$ pontra is, ezért:

$$a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 1 = 10 \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b = 9. \quad (1)$$

A parabola egyenletének jobb oldalát teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 1,$$

$$y - \left(-\frac{b^2}{4a} + 1\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

A fenti egyenletből leolvasható, hogy a parabola tengelypontjának koordinátái:

$$C\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}+1\right).$$

Ha a tengelypont illeszkedik az $y = x$ egyenletű egyenesre, akkor koordinátái kielégítik az egyenletet, azaz:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{b^2}{4a}+1, \qquad / \cdot 4a$$

$$-2b = -b^2 + 4a.$$

Felhasználva, hogy (1) alapján $4a = 9 - 2b$, adódik, hogy:

$$-2b = -b^2 + 9 - 2b, \quad \text{innen} \quad b_1 = 3 \quad \text{és} \quad b_2 = -3.$$

Ha $b_1 = 3$, akkor $a_1 = \frac{3}{4}$, míg ha $b_2 = -3$, akkor $a_2 = \frac{15}{4}$.

A feltételeknek két parabola tesz eleget, ezek egyenlete:

$$p_1:\ y = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 1 \quad \text{és} \quad p_2:\ y = \frac{15}{4}x^2 - 3x + 1.$$

A két parabolát és a feltételek teljesülését az ábra szemlélteti.

3. Feladatsor / *A* – megoldások

1. Legyen x a hajó sebessége állóvízben, y pedig a folyó sebessége:

$$AB = 5\cdot(x+y), \qquad BA = \frac{17}{3}\cdot(x-y).$$

A két út egyenlőségéből: $x = 16y$.

Azaz $AB = 5 \cdot 17y = 85y$, tehát a tutaj 85 óra alatt teszi meg az AB utat.

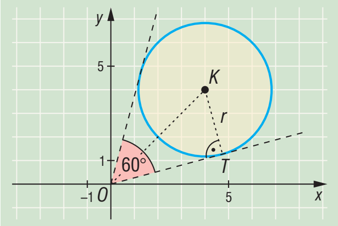
2. A kör egyenlete $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 32 - p^2$, középpontja $K(4; 4)$.

$OK = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Az OTK derékszögű háromszögben:

$$\sin 30° = \frac{r}{4\sqrt{2}}, \qquad \text{ebből} \qquad r = 2\sqrt{2}.$$

Mivel $r^2 = 32 - p^2$, adódik, hogy $p^2 = 24$.

Tehát $p_1 = 2\sqrt{6}$ és $p_2 = -2\sqrt{6}$ értékei esetén látszik 60°-os szögben az origóból a kör.



3. Számítsuk ki a játékosok nyerési esélyeit.

Attila: az ellentett esemény alapján $1 - \frac{6\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{16}{36}\ \left(= \frac{4}{9} = 0,\dot{4}\right)$.

Balázs: a kedvező számhármasok:

(1; 2; 3), (1; 2; 5), (1; 3; 4), (1; 3; 5), (1; 4; 5), (1; 5; 6), (2; 3; 5), (3; 4; 5),

a nyerés esélye: $\frac{8\cdot3!}{6^3} = \frac{8}{36}$.

Csanád esélye pedig a maradék $\frac{12}{36}$.

A játék akkor igazságos, ha a tétek a nyerési esélyekkel arányosak, tehát Attila tétje 20 zseton, Csanádé pedig 15 zseton.

4. Oldjuk meg az első egyenletet:

$$\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x,$$
$$0 = \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x,$$
$$0 = \cos x \cdot (\cos x - \sin x).$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát $\cos x = 0$, vagy $\cos x - \sin x = 0$.

A $\cos x = 0$ megoldásai a $[0;\, 2\pi]$-ban: $x_1 = \frac{\pi}{2}$ vagy $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. A $\cos x - \sin x = 0$-ból $\sin x = \cos x$.

Az egyenletet $\cos x$-szel osztva (a $\cos x = 0$ nem megoldás, mivel ilyen x-ekre $\sin x$ nem lehet 0) $\operatorname{tg} x = 1$ egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai a $[0;\, 2\pi]$-ban: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ vagy $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Tehát $A = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

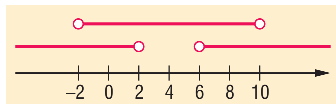
Oldjuk meg a második egyenlőtlenséget.

Mivel $-5 = \log_{\frac{1}{2}} 32$, elég a $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 12) > \log_{\frac{1}{2}} 32$ egyenlőtlenséggel foglalkoznunk.

Figyelembe véve az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény értelmezési tartományát és szigorú monoton csökkenését, x-re a következő feltételeket kapjuk: $0 < x^2 - 8x + 12 < 32$.

A bal oldali $0 < x^2 - 8x + 12$ egyenlőtlenség megoldásai:

$$x \in \left]-\infty;\, 2\right[\cup \left]6;\, \infty\right[.$$



A jobb oldali $x^2 - 8x + 12 < 32$ egyenlőtlenséget rendezve kapjuk: $x^2 - 8x - 20 < 0$, ennek megoldásai: $x \in \left]-2;\, 10\right[$.

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $B = \left]-2;\, 2\right[\cup \left]6;\, 10\right[$.

A π közelítő értékét felhasználva:

$$A \cap B = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}, \qquad A \cup B = \left]-2; 2\right[\cup \left]6; 10\right[\cup \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

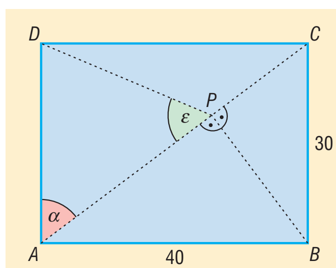
3. Feladatsor / *B* – megoldások

5. A keresett pont a téglalap átlóján található.

a) Az ABC derékszögű háromszög, átfogója $AC = 50$ m, átfogóhoz tartozó magassága: $PB = 24$ m. A Pitagorasz-tétellel számolható $AP = 32$ m és $PC = 18$ m.

A PD szakasz koszinusztétellel számítható az APD háromszögből, ha ismernénk a $DAP\sphericalangle$-et. Ez viszont a CDA derékszögű háromszögből: $\alpha = 53{,}13°$.

Ezt felhasználva: $PD = 27{,}78$ m.



b) Az ADP háromszög P-nél lévő szöge szinusztétellel számítható: $\varepsilon = 59{,}76°$, ekkora szögben látszik az AD oldal. A CD oldal pedig $180° - \varepsilon = 120{,}24°$ szögben látszik P-ből.

6. *a)* Az átlag alapján $S_{11} = 154$, ebből $a_1 = 4$ és $a_{11} = 24$. A mért legnagyobb csapadékmennyiség 24 mm volt.

b) A számtani sorozat 11 eleme és a 10 darab 0 lehetséges sorrendje:

$$21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 11 = \frac{21!}{10!} = 42\,325\,920.$$

c) Az a_1 helyzete és a sorban mögötte található 0-ák elhelyezkedése egyértelműen adja a sorozat elemeinek helyét. Az a_1 csak a hiányzó első 10 helyre kerülhet.

Ha a_1 november 1-jén van, mögötte a 10 darab 0 helyét $\binom{20}{10}$-féleképpen választhatjuk ki.

Ha a_1 november 2-án van, a mögötte lévő 9 darab 0 helyét $\binom{19}{9}$-féleképpen adhatjuk meg.

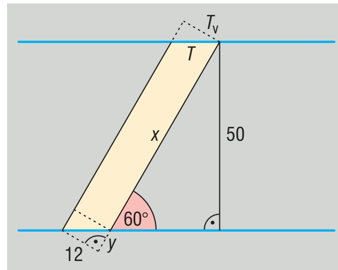
És így tovább, összesen:

$$\binom{20}{10}+\binom{19}{9}+\binom{18}{8}+\binom{17}{7}+\binom{16}{6}+\binom{15}{5}+\binom{14}{4}+\binom{13}{3}+\binom{12}{2}+\binom{11}{1}+\binom{10}{0}=352\,716.$$

7. *a)* A cső teljes hossza két részből tevődik össze, az ábra alapján:

$$x=\frac{50}{\sin 60^\circ}=57{,}74\ \text{cm},\qquad y=12\cdot\operatorname{tg}30^\circ=6{,}93\ \text{cm},$$

tehát $x+y=64{,}67$ cm hosszú csőre van szükség.



b) A keletkező lyuk területének vetülete a fúrás irányára merőleges síkra: $T_v=6^2\cdot\pi\approx 113\ \text{cm}^2$. A két sík szöge 30°, tehát:

$$T_v=T\cdot\cos 30^\circ,\ \text{ahonnan}\ T=130{,}6\ \text{cm}^2.$$

c) Az egyenes henger térfogata:

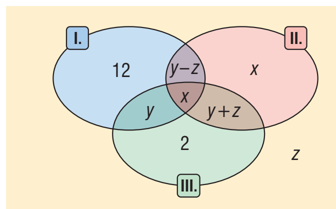
$$V_e=6^2\cdot\pi\cdot 50=5654{,}9\ \text{cm}^3.$$

A ferde henger egy x magasságú egyenes hengerré darabolható át, térfogata:

$$V_f=6^2\cdot\pi\cdot 57{,}74=6530{,}2\ \text{cm}^3,$$

ami 15,5%-kal több, mint az egyenes hengeré.

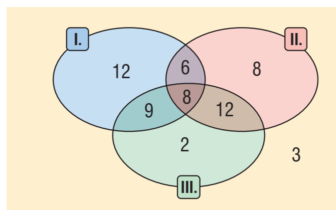
8. *a)* Szemléltessük az igennel szavazók halmazát.



A feltételek szerint:

$$\left.\begin{aligned}12+2y+x-z&=35\\14+z+y&=26\\x+2y+z+2&=31\end{aligned}\right\}.$$

Az első és harmadik egyenlet kivonásából $z=3$, ezt a másodikba helyettesítve: $y=9$. Mindkettőt az elsőbe helyettesítve: $x=8$. A kapott értékeket beírva a halmazábrába kiderül, hogy 60 fő vett részt a szavazáson.



b) A lehetséges eredmények száma: $\binom{35}{7}=6\,724\,520.$

c) A keresett valószínűség: $\dfrac{\dfrac{30!}{10!\cdot 10!\cdot 10!}}{3^{30}}=0{,}02696.$

9. Az autónak 100 km úton a literekben mért fogyasztását keressük $f(v)=av^2+bv+c$ alakban v sebességének függvényeként. A megadott táblázat alapján a sebességet $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban mérve:

$$\begin{aligned}
f(50)=5{,}5 &\Rightarrow 5{,}5=a\cdot 50^2+b\cdot 50+c &&\Rightarrow 5{,}5=a\cdot 2500+b\cdot 50+c,\\
f(100)=7 &\Rightarrow 7=a\cdot 100^2+b\cdot 100+c &&\Rightarrow 7=a\cdot 10\,000+b\cdot 100+c,\\
f(150)=9{,}5 &\Rightarrow 9{,}5=a\cdot 150^2+b\cdot 150+c &&\Rightarrow 9{,}5=a\cdot 22\,500+b\cdot 150+c.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva $a=\frac{1}{5000}$, $b=0$, $c=5$ adódik, vagyis $f(v)=\frac{1}{5000}\cdot v^2+5$.

a) Az autó fogyasztása 100 kilométeren $90\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél:

$$f(90)=\frac{1}{5000}\cdot 90^2+5=6{,}62 \text{ liter.}$$

b) A 300 km-es utazás $\dfrac{300}{v}$ óra időt vesz igénybe v sebesség esetén, tehát a sofőrnek kifizetett költség $\dfrac{300}{v}\cdot 2000$ forint. A 300 km megtételéhez szükséges benzin mennyisége literben:

$$\frac{300}{100}\cdot\left(\frac{1}{5000}\cdot v^2+5\right)=\frac{3}{5000}\cdot v^2+15.$$

Mivel a benzin literenkénti ára 320 Ft, az üzemanyag $320\cdot\left(\dfrac{3}{5000}\cdot v^2+15\right)$ forintba kerül.
Az összköltség a sebesség függvényében:

$$k(v)=\frac{300}{v}\cdot 2000+320\cdot\left(\frac{3}{5000}\cdot v^2+15\right)=\frac{600\,000}{v}+\frac{96}{500}\cdot v^2+4800.$$

A $k(v)$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol az első deriváltja 0:

$$k'(v)=-\frac{600\,000}{v^2}+\frac{96}{250}\cdot v \quad\Rightarrow\quad 0=-\frac{600\,000}{v^2}+\frac{96}{250}\cdot v \quad\Rightarrow\quad v\approx 116.$$

Ha $v<116$, akkor $k'(v)<0$, ha $v>16$, akkor $k'(v)>0$, tehát a függvénynek $v=116$ helyen minimuma van.
Az utazás költsége $116\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ sebesség esetén lesz minimális.

4. Feladatsor / *A* – megoldások

1. Az egyenletrendszer az $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, $y>-1$ számokon van értelmezve.
A második egyenlet alapján $y+1=3^x$.
Ezt felhasználva, az első egyenlet:

$$\begin{aligned}3\cdot(y+1)^3&=3y^3+8y^2+8y+9,\\ 3y^3+9y^2+9y+3&=3y^3+8y^2+8y+9,\\ y^2+y-6&=0,\\ (y+3)\cdot(y-2)&=0.\end{aligned}$$

Az egyenlet megoldása: $y_1=2$ és $y_2=-3$. Ez utóbbi nem eleme az értelmezési tartománynak.
Az $y=2$ értéket a második egyenletbe helyettesítve $x=1$ adódik.
Az egyenletrendszer megoldása: $x=1$ és $y=2$.

2. Mivel $a_n=2a_{n+1}-a_{n+2}$, ebből $a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$.

Az a sorozat, amelynek bármely tagja (a másodiktól kezdve) előáll a két szomszédos tag számtani közepeként, számtani sorozat.
Ha a sorozat első eleme a_1, differenciája d, akkor:

$$a_3+a_7=a_1+2d+a_9-2d=a_1+a_9=12.$$

A sorozat első 9 tagjának összege:

$$S_9=9\cdot\frac{a_1+a_9}{2}=54.$$

3. A szekszárdi borászok száma legyen s, a villányiaké v, az egrieké e.

a) A feladat szövege szerint:

$$5s + 4v + 2e = 25 \quad \text{és} \quad s + v + e = 8.$$

A második egyenletből e-t kifejezve és beírva az elsőbe:

$$3s + 2v = 9, \quad \text{ebből} \quad v = \frac{9 - 3s}{2},$$

vagyis $9 - 3s$ páros és pozitív, tehát $9 - 3s > 0$, azaz $3 > s$. Tehát s lehet 1 vagy 2, de csak 1 esetén lesz a $9 - 3s$ páros. Így $s = 1 \Rightarrow v = 3$ és $e = 4$.

A borversenyen 1 szekszárdi, 3 villányi és 4 egri borász vett részt.

b) A binomiális eloszlás alapján annak a valószínűsége, hogy 10 ember közül 7-en mondják, hogy a vörösbort jobban szeretik:

$$p = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \binom{10}{7} \cdot \frac{2^7}{3^{10}} \approx 0{,}26.$$

4. A keresett egyenesnek az x tengellyel való metszéspontja legyen $(a; 0)$, az y tengellyel pedig $(0; b)$.

Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor az egyenes áthalad az origón, és egyenlete: $y = \frac{7}{2}x$.

Ha a és b közül egyik sem 0, az egyenes tengelymetszetes alakjából következően egyenlete:

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad (a, b \neq 0).$$

Az egyenes illeszkedik az $A(2; 7)$ pontra, ezért $1 = \frac{2}{a} + \frac{7}{b}$.

Alakítsuk át az egyenlet:

$$ab = 2b + 7a, \quad \text{átalakítás után} \quad ab - 2b - 7a + 14 - 14 = 0, \quad \text{vagyis} \quad (a - 2)(b - 7) = 14.$$

Mivel a és b egész számok, 14-et kell egész számok szorzataként felírnunk.

Ezeket a lehetőségeket a következő táblázat mutatja:

$a-2$	1	14	2	7	–1	–14	–2	–7
$b-7$	14	1	7	2	–14	–1	–7	–2
a	3	16	4	9	1	–12	0	–5
b	21	8	14	9	–7	6	0	5

Nyolc egyenes tesz eleget a feltételeknek, ezek egyenletei:

$$y = \frac{7}{2}x, \qquad 1 = \frac{x}{3} + \frac{y}{21}, \qquad 1 = \frac{x}{16} + \frac{y}{8}, \qquad 1 = \frac{x}{4} + \frac{y}{14},$$

$$1 = \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \qquad 1 = x - \frac{y}{7}, \qquad 1 = -\frac{x}{12} + \frac{y}{6}, \qquad 1 = -\frac{x}{5} + \frac{y}{5}.$$

4. Feladatsor / *B* – megoldások

5. Mivel a nevező minden x-re pozitív értéket vesz fel, a függvény az intervallum minden pontjában értelmezve van.

Ha $2 \le x \le 5$, akkor:

$$f(x) = \frac{x + x + 2}{x + x - 2} = \frac{x + 1}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, ebből következik, hogy

$$f(5) = \frac{3}{2} \le f(x) \le 3 = f(2).$$

Ha $0 \le x < 2$, akkor:

$$f(x) = \frac{x + x + 2}{x - x + 2} = x + 1.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő, ebből következik, hogy

$$f(0) = 1 \le f(x) < 3 = f(2).$$

Ha $-2 \le x < 0$, akkor:

$$f(x) = \frac{-x + x + 2}{-x - x + 2} = \frac{2}{-2x + 2} = -\frac{1}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő, ebből következik, hogy

$$f(-2) = \frac{1}{3} \le f(x) < 1 = f(0).$$

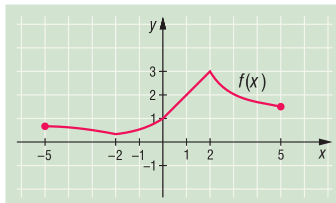
Ha $-5 \le x < -2$, akkor:

$$f(x) = \frac{-x - x - 2}{-x - x + 2} = \frac{-2x - 2}{-2x + 2} = \frac{x + 1}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, ebből következik, hogy

$$f(-2) = \frac{1}{3} < f(x) \le \frac{2}{3} = f(-5).$$

A függvény minimuma $\frac{1}{3}$, az $x = -2$ helyen, maximuma pedig 3, az $x = 2$ helyen.



6. A motor sebessége legyen $x\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, az autóé $y\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Bélatelep és Andrásfalva közti távolság s km.

a) Míg az autó visszaér Andrásfalvára, $2s$ utat tesz meg, ha pedig onnan visszafordulna, akkor a motorral való találkozásig újabb $\frac{2s}{3}$ utat tenne meg, azaz összesen $2s + \frac{2s}{3} = \frac{8s}{3}$ km-t haladna. Ez idő alatt a motor által megtett út $s + \frac{s}{3} = \frac{4s}{3}$ km, vagyis feleannyi, mint az autósé.

Mivel az út és a sebesség egyenesen arányos, az autó sebessége kétszerese a motorénak, vagyis $y = 2x$.

b) Az első találkozásig az autó a két helység közti távolságnál 5 kilométerrel többet, a motor 5 kilométerrel kevesebbet tesz meg. Mivel az első találkozásig ugyanannyi ideig mozogtak, a $t = \frac{s}{v}$ öszefüggés alapján felírható: $\frac{s-5}{x} = \frac{s+5}{y}$. Felhasználva, hogy $y = 2x$:

$$\frac{s-5}{x} = \frac{s+5}{2x} \quad \Rightarrow \quad 2s - 10 = s + 5 \quad \Rightarrow \quad s = 15.$$

Az Andrásfalva és Bélatelep közti távolság 15 km.

c) Mivel a két helység közti kétszeres $2s = 30$ km távolságot az autó 20 perccel, azaz $\frac{1}{3}$ órával rövidebb idő alatt teszi meg, mint a motor, a mozgásuk idejére a $t = \frac{s}{v}$ összefüggés alapján felírható:

$$\frac{30}{x} = \frac{30}{y} + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{x} = \frac{30}{2x} + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 45.$$

A motor sebessége $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, az autó sebessége $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

7. Alkalmazva a megfelelő trigonometrikus összefüggéseket, a feladat másodfokú egyenletre vezet:

$$\sin 2x - 2\cdot\sin x - 2\cdot\cos x - 2 = 0,$$
$$2\cdot\sin x\cdot\cos x - 2\cdot(\sin x + \cos x) - 2 = 0,$$
$$\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x - 2\cdot(\sin x + \cos x) - 3 = 0,$$
$$(\sin x + \cos x)^2 - 2\cdot(\sin x + \cos x) - 3 = 0.$$

A $(\sin x + \cos x)$-re másodfokú egyenlet megoldásai: $\sin x + \cos x = -1$ vagy $\sin x + \cos x = 3$.

Ha $\sin x + \cos x = -1$, akkor mindkét oldalt $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel beszorozva:

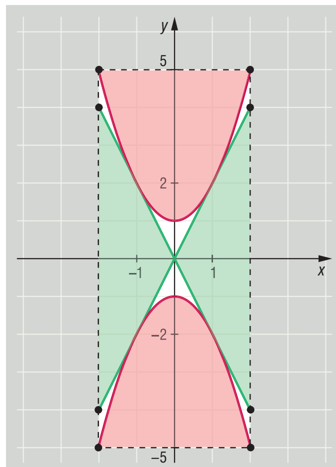
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1 = \pi + 2k\pi,\ \ x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

$\sin x + \cos x = 3$ nem lehet, mert $\sin x + \cos x$ kifejezés értéke legfeljebb $\sqrt{2}$.

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \pi + 2k\pi,\ \ x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

8. Helyezzük el a céltáblát egy olyan koordináta-rendszerbe, amelyben 1 egység 10 centiméternek felel meg, és a koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a céltábla középpontja.



A két parabolaív egyenlete: $y = x^2 + 1$, illetve $y = -x^2 - 1$.

A parabolaívekhez az origóból húzott érintők egyenleteit keressük $y = mx$ alakban. Az érintés feltétele, hogy a parabola és az érintő egyenletéből alkotott egyenletrendszernek egy megoldása legyen.

Az első és második síknegyedben levő parabola esetén az

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 + 1 \\ y &= mx \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell vizsgálni. Az egyenletrendszerből y-t kiküszöbölve, az $x^2 - mx + 1 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0, vagyis:

$$m^2 - 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad m = \pm 2.$$

A tengelyes szimmetria miatt a két parabolaív érintőinek egyenletei: $y = 2x$, illetve $y = -2x$.

- Először számítsuk ki a zöld terület nagyságát. Az első síknegyedbe eső területrész olyan derékszögű háromszög, amelynek befogói 2 és 4, területe tehát 4 egység. Az egész céltáblán a zöld terület nagysága: $T_{\text{zöld}} = 4\cdot 4 = 16$ területegység.
- Az első síknegyedbe eső piros területrészt megkapjuk úgy, hogy egy 2 és 5 egység oldalú téglalap területéből kivonjuk a $[0; 2]$-on a parabolaív alatti területet:

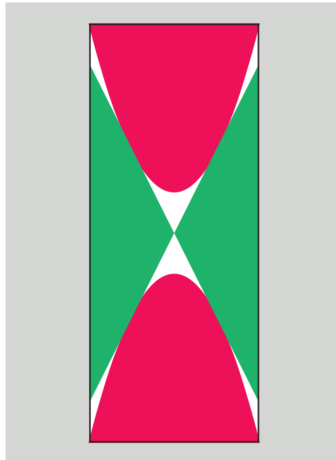
$$2\cdot 5 - \int_0^2 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = 10 - \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = 10 - \frac{14}{3} = \frac{16}{3}.$$

A piros terület nagysága a tengelyes szimmetria miatt: $T_{\text{piros}} = 4\cdot\frac{16}{3} = \frac{64}{3}$ területegység.

- A fehér terület nagyságát megkapjuk úgy, hogy a céltábla teljes területéből kivonjuk a piros és zöld területek nagyságát: $T_{\text{fehér}} = 10\cdot 4 - 16 - \frac{64}{3} = \frac{8}{3}$ területegység.

a) A geometriai valószínűség fogalmából adódóan a céltáblára véletlenszerűen érkező lövések akkora valószínűséggel érkeznek a zöldre festett területre, amekkora része a zöld rész területe az egész céltábla területének, tehát:

$$P(\text{zöld}) = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}.$$



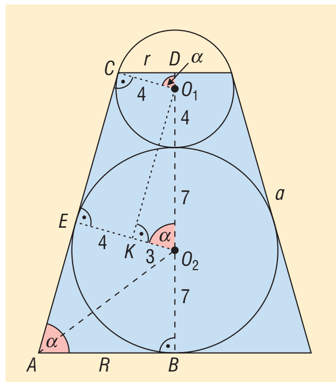
Hasonlóan:

$$P(\text{piros}) = \frac{\frac{64}{3}}{40} = \frac{8}{15}, \qquad \text{illetve} \qquad P(\text{fehér}) = \frac{\frac{8}{3}}{40} = \frac{1}{15}.$$

b) Az egy lövésért kapható pont várható értéke:

$$4 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{8}{15} + 6 \cdot \frac{1}{15} = \frac{70}{15} \approx 4{,}67.$$

9. A szoknya felszínének kiszámításához egy csonka kúp palástjának felszínét kell meghatároznunk.



Tekintsük a csonka kúp ábrán látható tengelymetszetét, és használjuk az ábra jelöléseit. A csonka kúp fedőlapjának sugara $r = CD$, az alaplapjának sugara $R = AB$, valamint a csonka kúp alkotójának hossza $a = AC$.

Húzzunk EC-vel párhuzamost a középső gömb O_1 középpontján keresztül. Mivel egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, az EKO_1C négyszög téglalap.

A KO_1O_2 derékszögű háromszög átfogója a két érintő gömb középpontjának távolsága $O_1O_2 = 7 + 4 = 11$. A háromszög KO_2 befogója pedig a gömbök sugarainak különbsége $KO_2 = 7 - 4 = 3$.

A Pitagorasz-tétel alapján a másik befogó:

$$KO_1 = EC = \sqrt{11^2 - 3^2} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}.$$

Az ábrán a $KO_2O_1\sphericalangle = CO_1D\sphericalangle$, mivel egyállású szögek, valamint $KO_2O_1\sphericalangle = EAB\sphericalangle$, mivel hegyesszögű merőleges szárú szögek. Jelöljük ezeket a szögeket α-val.

A KO_1O_2 derékszögű háromszögből $\cos\alpha = \frac{3}{11}$, és $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{7}}{11}$.

A csonka kúp fedőlapjának r sugarát az O_1DC derékszögű háromszögből számíthatjuk:

$$r = CD = 4 \cdot \sin\alpha = 4 \cdot \frac{4\sqrt{7}}{11} = \frac{16\sqrt{7}}{11}.$$

Mivel az AB, illetve az AE egyenesek érintik az O_2 középpontú kört, az AO_2 egyenes az A csúcsnál lévő α szög felezője. Az ABO_2 derékszögű háromszögből $AB = O_2B \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Ismert, hogy $\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, és mivel $\frac{\alpha}{2}$ hegyesszög, és $\cos\alpha = \frac{3}{11}$, ezért:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{11}}{1-\frac{3}{11}}} = \sqrt{\frac{14}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \qquad \text{amit felhasználva} \qquad R = AB = O_2B \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 7 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{7\sqrt{7}}{2}.$$

Az AE és az AB érintőszakaszok egyenlősége alapján a csonka kúp alkotójának hossza:

$$a = AC = AE + EC = AB + EC = \frac{7\sqrt{7}}{2} + 4\sqrt{7} = \frac{15\sqrt{7}}{2}.$$

A csonka kúp palástjának felszíne:

$$A = (R + r) \cdot a \cdot \pi = \left(\frac{7\sqrt{7}}{2} + \frac{16\sqrt{7}}{11}\right) \cdot \frac{15\sqrt{7}}{2} \cdot \pi = \frac{11445}{44} \cdot \pi \approx 817{,}17\ \text{cm}^2.$$

A szoknya elkészítéséhez $817{,}17\ \text{cm}^2$ területű karton szükséges.

5. Feladatsor / *A* – megoldások

1. Az egyenlet értelmezési tartománya $x^2 - 1$ miatt: $-1 \le x \le 1$.
Figyeljük meg, hogy két gyökjel alatt is nevezetes szorzat áll:

$$\sqrt{(x-1)(x+1)} + \sqrt{x+1} = \sqrt{(x+1)^2}.$$

Mivel minden tagban megtaláljuk az $x + 1$ tényezőt, ezért az egyenlet egyik megoldása $x_1 = -1$.
Így akár le is oszthatunk $\sqrt{x+1}$-gyel (feltesszük, hogy $x \ne -1$):

$$\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+1}.$$

Mindkét oldal négyzetre emelése, majd az egyenlet rendezése után:

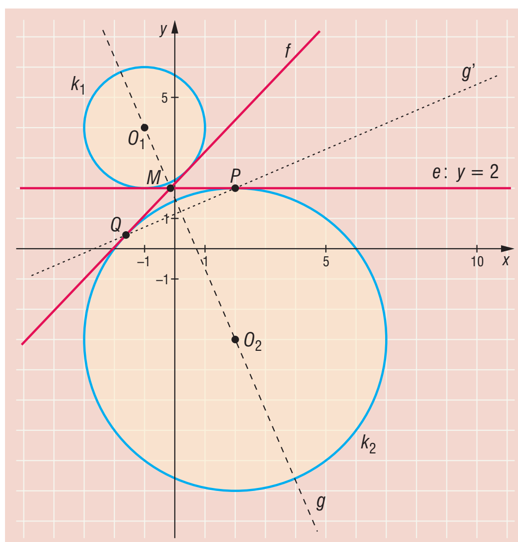
$$2\sqrt{x-1} = 1, \quad \text{ahonnan} \quad x_2 = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Ellenőrzés:

$$\sqrt{1{,}25^2 - 1} + \sqrt{1{,}25 + 1} = 0{,}75 + 1{,}5 = \sqrt{1{,}25^2 + 2 \cdot 1{,}25 + 1} = 2{,}25.$$

Az egyenletnek nincs más megoldása.

2. A körök elhelyezkedése miatt két közös belső érintőt keresünk.



Az ábra alapján azt sejtjük, hogy az e: $y = 2$ egyenes egyike a két keresett belső érintőnek. Behelyettesítve a körök egyenleteibe, a következő egyenleteket kapjuk:

$$(x + 1)^2 = 0 \quad \text{és} \quad (x - 2)^2 = 0.$$

Mindkettőnek csak 1-1 megoldása van, tehát e valóban közös belső érintő, k_2-vel vett érintési pontja $P(2; 2)$.

Az ábra szimmetrikus a körök középpontjain áthaladó g egyenesre. Ezért g és e olyan M pontban metszik egymást, amely rajta van f-en is.

Írjuk fel g egyenletét:

$$O_1O_2(3; -7) = \vec{v}_g \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_g(7; 3),$$

$$g\colon\ 7x + 3y = 5,$$

ebből (y helyére 2-t írva): $x = -\frac{1}{7}$. A három egyenes közös metszéspontja: $M\left(-\frac{1}{7}; 2\right)$.

Ismét használjuk ki a szimmetriát! P és Q érintési pontok is szimmetrikusak g-re, ezért ha P-ből g' merőlegest állítunk g-re, az Q-ban fogja metszeni k_2-t. g'-t g-ből könnyen megkapjuk:

$$g'\colon\ 3x - 7y = -8.$$

Meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{ll} g'\colon & 3x - 7y = -8 \\ k_2\colon & (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2 \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{13}{29}.$$

Az első megoldás a már ismert P pontot adja vissza, a második pedig $Q\left(-\frac{47}{29}; \frac{13}{29}\right)$-t.

Két pontból (M és Q) már fel tudjuk írni a keresett f egyenes egyenletét:

$$f\colon\ -21x + 20y = 43.$$

Megjegyzés: A feladatot más úton is megoldhatjuk, például MO_2 fölé írt Thalész-körrel.

3. *a)* (3; 4; 3) típusú ismétléses permutációt kell elszámolnunk: $\frac{10!}{3!\cdot 4!\cdot 3!} = 4200.$

b) A 10 papírdarabkából három magyar zászlót rakhatunk ki, és marad egy fehér lapocska. Ezt a lapot vagy az első zászló elé, vagy az első után a második elé, vagy a második után a harmadik elé, vagy a harmadik után a negyedik elé, vagy a negyedik után húzhatjuk. Ez összesen 4 lehetőség.

c) Ha csupán 2 piros-fehér-zöld zászlónk van, akkor a maradék 1 piros, 2 fehér, 1 zöld lapot majdnem bármelyik helyre húzhatjuk. Ez majdnem (2; 1; 2; 1)-tagú ismétléses permutáció, azaz $\frac{6!}{2!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!} = 180.$ Azért csak majdnem, mert ebben benne van annak a lehetősége, hogy létrejön egy harmadik zászló is, amit ebben az esetben ki kell zárnunk. Mivel arra 4 lehetőség volt, a megoldás: $180 - 4 = 176$.

d) Ha csak 1 trikolórt látunk, akkor ez és a maradék 2 piros, 3 fehér és 2 zöld lap majdnem (1; 2; 3; 2)-tagú ismétléses permutációt ad: $\frac{8!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 2!} = 1680.$ Ebből el kell vennünk azokat az eseteket, amikor három vagy kettő trikolór alakul ki, azaz 180-at.

Az eredmény $1680 - 180 = 1500$.

4. *a)* A függvény az $x = -1$ helyen metszi az x tengelyt, azaz:

$$f(-1) = -a + b - c + d = 0.$$

Ahol szélsőértéke van, ott az $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ deriváltja 0, vagyis

$$f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \quad \text{és} \quad f'(3) = 27a + 6b + c = 0.$$

Más információnk nincs a függvényről. Ha négy ismeretlen és három egyenlet áll csak rendelkezésünkre, akkor csak valamelyik paraméter függvényében tudunk nyilatkozni a többiről.

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & -a + b - c + d = 0 \\ (2) & 3a + 2b + c = 0 \\ (3) & 27a + 6b + c = 0 \end{array}\right\}.$$

Vonjuk ki a (2)-t a (3)-ból: $24a + 4b = 0$, így $b = -6a$.

Helyettesítsünk vissza (2)-be: $3a - 12a + c = 0$, így $c = 9a$.

Végül helyettesítsünk vissza (1)-be: $-a - 6a - 9a + d = 0$, így $d = 16a$.

Tehát $f(x)$ függvényünk a következő:

$$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax + 16a = a(x^3 - 6x^2 + 9x + 16).$$

b) $a = 1$ esetén $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$. Azt már tudjuk, hogy a függvény szélsőértékei az $x = 1$ és $x = 3$ helyeken vannak. Tekintsük a deriváltat:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3).$$

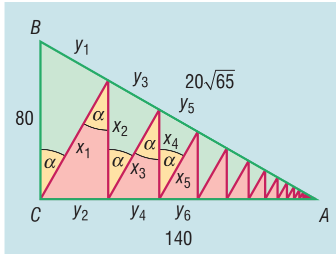
Mivel a derivált felfelé nyíló parabola, ezért előjelviszonyai a következők:

	$x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x$
$f'(x)$	pozitív	0	negatív	0	pozitív
$f(x)$	monoton növő	MAXIMUM	monoton csökkenő	MINIMUM	monoton növő

Innen leolvasható, hogy a függvénynek $x = 3$ helyen van a lokális minimuma.

5. Feladatsor / *B* – megoldások

5. *a)* Sorban véve a kis háromszögekben az $x_1, x_2, \ldots$ szakaszokat, kapjuk:



$$x_1 = 80 \cdot \cos\alpha,$$
$$x_2 = x_1 \cdot \cos\alpha = 80 \cdot \cos^2\alpha,$$
$$x_3 = x_2 \cdot \cos\alpha = 80 \cdot \cos^3\alpha,$$
$$x_4 = x_3 \cdot \cos\alpha = 80 \cdot \cos^4\alpha \text{ stb.}$$

A töröttvonal hossza a mértani sorozatot alkotó szakaszok összege (mértani sor):

$$80 \cdot \cos\alpha(1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \ldots) = 80 \cdot \cos\alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \cos^i\alpha = \frac{80 \cdot \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Mivel a nagy háromszögben az átfogó $20\sqrt{65}$, így

$$\cos\alpha = \frac{140}{20\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}.$$

Behelyettesítve, a vonal hosszára kapjuk:

$$\frac{7 \cdot 80}{\sqrt{65} - 7} = 35\left(\sqrt{65} + 7\right) \approx 527{,}18 \text{ cm}.$$

b) Tudjuk, hogy a derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának fele. Vegyük sorban az $y_1, y_2, \ldots$ szakaszok hosszait a kis háromszögekben:

$$y_1 = 80 \cdot \sin\alpha;$$
$$y_2 = x_1 \cdot \sin\alpha = 80 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha;$$
$$y_3 = x_2 \cdot \sin\alpha = 80 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha;$$
$$y_4 = x_3 \cdot \sin\alpha = 80 \cdot \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha \text{ stb.}$$

A zöld háromszögek területei a páratlan sorszámú x-ek és y-ok szorzatai felének az összege (mértani sor):

$$T_{\text{zöld}} = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} \cdot (1 + \cos^4\alpha + \cos^8\alpha + \ldots) =$$

$$= \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\cos^4\alpha)^i = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2(1 - \cos^4\alpha)}.$$

A piros háromszögek területei a páros sorszámú x-ek és y-ok szorzatai felének az összege (mértani sor):

$$T_{\text{piros}} = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha}{2} \cdot (1 + \cos^4\alpha + \cos^8\alpha + \ldots) =$$

$$= \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\cos^4\alpha)^i = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha}{2(1-\cos^4\alpha)}.$$

A hányadosuk pedig:

$$\frac{T_{\text{zöld}}}{T_{\text{piros}}} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{65}{49}.$$

6. *a)* Az n pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, az n pontú fának pedig $(n-1)$ éle van. Hányadosuk $\frac{n}{2}$.

b) Mivel a teljes gráfban bármely két pont szomszédos, így az őket összekötő utak hosszának minimuma mindig 1. A teljes gráfok átmérőinek maximuma 1. Az n pontú fagráfok lehetnek teljesen különbözőek is. A legszélesebb fákat akkor kapjuk, ha a pontokat egyetlen vonalra fűzzük fel (lánc). Ekkor a legtávolabbi pontok között $(n-1)$ él fut, azaz az ilyen gráfok átmérőinek maximuma $(n-1)$.

c) Tudjuk, hogy minden pont foka kettő, továbbá a gráf egyszerű és összefüggő. Vegyük észre, hogy az ilyen gráf „kör" alakú! A 8 pontú körben a szemközti pontok legkisebb távolsága 4, azaz a gráf átmérője is 4.

A „kör" alak igazolásához válasszuk ki az egyik pontot és annak egyik élét. A pontot satírozzuk be, és induljunk el az élen. A következő pontba jutva satírozzuk be azt is, majd menjünk tovább a másik élen. Ismételjük ezt addig, míg satírozott pontba nem érünk. Belátjuk, hogy ekkor minden pontot érintettünk: a satírozott pontok összefüggő gráfot alkotnak és ha lenne satírozatlan pont, akkor az eredeti gráfunk nem lenne összefüggő.

d) Ha minden pont foka 6, akkor bármely pontot is tekintve, van pontosan egy olyan, amellyel nem szomszédos. Azonban a többi hat ponttal ez is szomszédos, azaz a két említett pont távolsága 2. Ilyen feltételek mellett bármely két pont távolsága vagy 1, vagy 2. A gráfok átmérője 2.

e) A gondolatmenet nagyon hasonló a *d)* ponthoz, kis különbséggel. Induljunk ki pl. az A pontból, 4 szomszédos pontját jelölje S_A. B jelöljön olyan pontot, amely nem szomszédos A-val (három ilyen is van). Mivel B foka is 4, ezért maximum 2 olyan pont lehet vele szomszédos, amely nincs S_A-ban. Tehát B legalább két olyan ponttal szomszédos, amelyek A-val szomszédosak. Így most is bármely két pont távolsága vagy 1, vagy 2. Az ilyen gráfok átmérője is 2.

Megjegyzés: Ha minden pont foka 3, akkor nehezebb a helyzet. Lehetséges, hogy S_A egyik pontja sem szomszédos S_B egyik pontjával sem. Nem összefüggő gráfnak pedig nincs átmérője.

7. Jelölje a két ismeretlen értéket x és y. Az $]A-s; A+s[=]2{,}5941; 9{,}4059[$-ból kiindulva használjuk ki, hogy az intervallum középpontja a számtani átlag. Tehát:

$$A = \frac{A-s+A+s}{2} = 6.$$

Ebből négy tizedesjegyre megadhatjuk a szórást is:

$$6 + s = 9{,}4059 \quad \Rightarrow \quad s = 3{,}4059.$$

Ennyi információ már elegendő egy kétismeretlenes egyenletrendszer felírásához:

$$\left.\begin{aligned} 6 &= \frac{1+2+4+5+8+9+9+10+x+y}{10} \\ 3{,}4059 &= \sqrt{\frac{5^2+4^2+2^2+1^2+(-2)^2+(-3)^2+(-3)^2+(-4)^2+(6-x)^2+(6-y)^2}{10}} \end{aligned}\right\}.$$

Rendezzük mindkét sort. Mivel tudjuk, hogy x és y egészek, ezért $3{,}4059$ négyzetét kerekítjük:

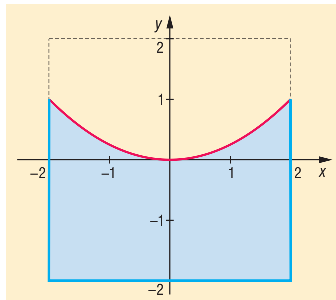
$$\left.\begin{aligned} 12 &= x+y \\ 32 &= (6-x)^2+(6-y)^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1=10,\quad x_2=2,\quad y_1=2,\quad y_2=10.$$

A minta hiányzó két eleme tehát a 10 és a 2.

8. Egy másodfokú függvénynek pontosan akkor van két zérushelye, ha a polinomból alkotott másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív szám:

$$D = p^2 - 4q > 0, \qquad \text{azaz} \qquad q < \frac{p^2}{4}.$$

Tudjuk, hogy $(p;\, q) \in I^2$, ahol $I = [-2;\, 2]$. A $(p;\, q)$ rendezett párt és a fenti feltételt legegyszerűbben koordináta-rendszerben ábrázolhatjuk. A kék színű rész jelenti azokat a pontokat, melyekre a kérdéses $g(x)$ függvénynek két különböző zérushelye van. A valószínűség a kék színű terület és a négyzet területének aránya. A parabolagörbe és az x tengely közötti terület:

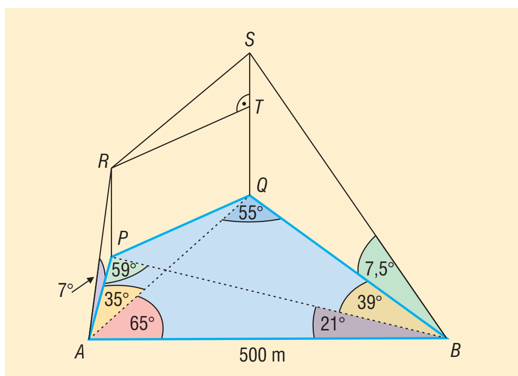


$$\int_{-2}^{2} \frac{p^2}{4}\,\mathrm{d}p = \left[\frac{p^3}{12}\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{12} + \frac{8}{12} = \frac{4}{3}.$$

A valószínűség:

$$\frac{T_{\text{kék}}}{T_{\text{négyzet}}} = \frac{8+\frac{4}{3}}{16} = \frac{7}{12}.$$

9. Feltételezhetjük, hogy a fák függőlegesen nőttek, ezért $RPQT$ négyszög téglalap, és RTS háromszög derékszögű. $APB\sphericalangle$ és $AQB\sphericalangle$ szögeket az adatokból kiszámíthatjuk. Mivel ismertek a szögek, $APB_\triangle$ és $AQB_\triangle$ oldalait kiszámíthatjuk szinusztétellel:



$$\frac{PA}{500} = \frac{\sin 21^\circ}{\sin 59^\circ} \quad \Rightarrow \quad PA \approx 209{,}04 \text{ m},$$

$$\frac{PB}{500} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 59^\circ} \quad \Rightarrow \quad PB \approx 574{,}45 \text{ m},$$

$$\frac{BQ}{500} = \frac{\sin 65^\circ}{\sin 55^\circ} \quad \Rightarrow \quad BQ \approx 553{,}2 \text{ m}.$$

Trigonometrikus összefüggések alapján:

$$\frac{PR}{PA} = \operatorname{tg} 7^\circ \;\Rightarrow\; PR \approx 25{,}67 \text{ m}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{QS}{QB} = \operatorname{tg} 7{,}5^\circ \;\Rightarrow\; QS \approx 72{,}83 \text{ m}.$$

Ekkor $ST = QS - PR = 47{,}16$ m. A $PQB_{\triangle}$-ben koszinusztétellel kiszámítható PQ:

$$PQ^2 = PB^2 + QB^2 - 2PB \cdot QB \cdot \cos 39^\circ \quad \Rightarrow \quad PQ \approx 376{,}95 \text{ m.}$$

Végül egy Pitagorasz-tétellel megadhatjuk RS értékét:

$$RS^2 = RT^2 + ST^2 = PQ^2 + (QS - PR)^2 \quad \Rightarrow \quad RS \approx 379{,}89 \text{ m.}$$

Ahhoz, hogy a kötélre rögzített tárgy a pálya egyik végpontjából a másikba jusson, a kötélnek legalább kétszer olyan hosszúnak kell lennie, mint a pálya hossza. Azaz a kérdésre a válasz:

$$2RS \approx 759{,}78 \text{ m.}$$