12.1. LOGIKA, BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

Logikai feladatok, kijelentések – megoldások

4001 *a)* Nem. *b)* Igen. *c)* Nem. *d)* Igen. *e)* Nem. *f)* Igen.

4002 *a)* Nem. *b)* Igen, igaz. *c)* Igen, hamis.
d) Nem. *e)* Igen, értéke függ a helyzettől. *f)* Igen, hamis.

4003 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Igaz. *d)* Igaz. *e)* Hamis.

4004 A helyes tippek: 1, 1, 2, X, 1, X.

4005 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Igaz.

4006 Nem, ugyanis
a) nem kijelentés (paradoxon);
b) kijelentés, amelynek logikai értéke a következő mondattól függ.

4007 *a)* Hétfőn, kedden, szerdán, pénteken, szombaton.
b) Csütörtökön, vasárnap.

4008 *a)* Minden nap. *b)* Soha.

4009 Beteg nem lehet, mert akkor nem mondhatna igazat. Egészséges orvos sem lehet, hiszen ők igazat mondanak. A megoldás *b)*, vagyis egészséges ápolt.

4010 Nándi és Oszi kijelentései ellentmondanak egymásnak. Ha mindkettőt igaznak fogadnánk el, akkor paradoxonhoz jutnánk, tehát valamelyiknek hamisnak kell lennie. Viszont így Laci és Marci igazat szólnak, azaz Nándi volt a tettes (és közben kiderült az is, hogy Nándi az, aki hazudik).

4011 Tudjuk, hogy kettejük közül az egyik igazat mond, a másik hazudik. Mivel a jelenlegi állapotukról egyelőre nincs információnk, ezért olyan kérdést kell egyiküknek szegezni, amellyel a jól ismert múltbeli helyzet után érdeklődünk. Például:

„Te vagy a királylány?” vagy *„Régen a házastársad mindig igazat mondott?”*

Ha a királylány válasza *„igen”*, akkor igazat mond (tehát a juhász éppen hazudik). Ha a válasza *„nem”*, akkor hazudós napja van (tehát a juhász igazat mond).

Ha a juhász válasza *„nem”*, akkor igazat mond (tehát a királylány éppen hazudik). Ha a válasza *„igen”*, akkor hazudós napja van (tehát a királylány igazat mond).

4012 Az első megjegyzés miatt Tivadar csak Kis, Fekete vagy Fehér lehet. Mivel Feketével és Fehérrel más iskolába járt, Tivadar vezetékneve Kis. Az első megjegyzés miatt Kisnek hívhatták volna még Konrádot (~~Kis~~, Nagy, Fehér) vagy Csillát (~~Kis~~, Nagy, Fekete). Konrád és Emma vezetéknevei ellentétek, így csak színek lehetnek: Fehér Konrád, Fekete Emma és Nagy Csilla.

4013 A legkisebb összeget akkor kapjuk, ha a lehető legalacsonyabb helyezésekkel rendelkezők mondanak igazat (azaz az első 10), mindenki más pedig azt mondja, hogy első lett. Ekkor az összeg $55 + 40 = 95$.

A legnagyobb összeget úgy halljuk, ha az utolsó 10 mond igazat, és minden előttük érkező utolsónak vallja magát. Ekkor az összeg 2455.

4014 Tekintsük végig a lehetőségeket Józsi szemszögéből.

Először tegyük fel, hogy Józsi beteg (azaz pont fordítva látja a valóságot, mint kellene). Ekkor Jani nem beteg, tehát egészséges (amit hisz, az úgy is van). Ekkor viszont Józsi orvos. Ajjaj, Józsi beteg orvos! (Janiról azonkívül, hogy egészséges, nem tudunk semmit.)

Másodszor tegyük fel, hogy Józsi egészséges. Ezek szerint Jani beteg, tehát Józsi nem orvos, hanem ápolt. Ajjaj, ekkor Józsi egészséges ápolt! (Janiról azonkívül, hogy beteg, nem tudunk többet.)

Bárhogy is nézzük, Józsi vagy beteg orvos, vagy egészséges ápolt. Bármelyik is, nem kellene az intézetben tartózkodnia. Janiról a feltételek alapján nem tudunk nyilatkozni.

4015 *a)* Ha az első mondat igaz, akkor saját igazságát állítja. Így a második mondatnak hamisnak kell lennie. Ha az első mondat hamis, akkor a második igaz.

Tehát a két mondat közül pontosan az egyik igaz.

b) Ha az első mondat igaz, akkor a második mondat hamis. Ha az első mondat hamis, akkor a második mondat igaz.

A két mondat közül pontosan az egyik igaz.

c) Ha az első mondat igaz, akkor a második mondat is igaz. Azonban akkor az első mondat hamis. Így ellentmondásra jutunk. Ha az első mondat hamis, akkor a második mondat is hamis. Ami azt jelenti, hogy az első mondat igaz. Így is ellentmondásra jutunk.

Ez a mondatpár paradoxon. A két mondatnak nem tudunk úgy logikai értéket tulajdonítani, hogy teljesüljön. A mondatpár tagjait nem tekinthetjük kijelentéseknek.

d) Ha az első mondat igaz, akkor a második mondat hamis. Ha az első mondat hamis, akkor a második mondat igaz.

Ismét arra jutunk, hogy a két mondat közül pontosan egy igaz, és egy hamis.

4016 Induljunk ki valamelyik állításból, és próbáljunk meg következtetéseket levonni. Kezdjük a legegyértelműbbel. (Zárójelben az állítások sorszáma, melyekből adódik.)

Aki ropit eszik, középen ül. (2)

Mivel sem Károly, sem Zsolt nem iszik kólát, azt csak Pista ihat. (1, 3)

Mivel Zsolt jobbján iszik Pista kólát és a sor szélén ül, így csak a jobb szélen ülhet. Ugyanebből adódik, hogy középen ül Zsolt és a bal oldalon Károly. (3, 5)

A pattogatott kukoricát balra kellett adni, tehát Pista pattogatott kukoricát és Károly sós mogyorót eszik. (4)

Károly szomszédja Zsolt, így ő iszik gyömbért, Károly pedig jeges teát. (6)

A fiúk így ülnek a moziban:

Mozivászon			
	jeges tea	gyömbér	kóla
…	sós mogyoró	ropi	pattogatott kukorica
	Károly	Zsolt	Pista

4017 Ismét kezdjük egy teljesen egyértelmű kijelentéssel. (Zárójelben az állítások sorszáma, melyekből adódik.)

A fiúk nem egymás mellett ülnek. (1)

Mivel Feri nem szereti a gyümölcsleveket és az egyik fiú gyümölcslevet iszik, így Lóri narancslevet iszik. (2, 8)

Mivel Angi kakaót, Kati teát iszik, Feri nem szereti a gyümölcslevet és Lóri narancslevet iszik, így Hugi baracklevet és Feri vizet iszik. (2, 3, 9)

Aki szendvicset eszik, vizet iszik hozzá, ezért Feri szendvicset eszik. (5)

Mivel rántottát és főtt tojást Lóri mellett esznek, pirítóst ehet Lóri vagy a Feri mellett (de nem a fiúk között egyedül) ülő lány. Lóriról azonban tudjuk, hogy narancslevet iszik: ekkor nem lényeges az az információ, hogy a pirítóst evő nem teát kér. Tehát pirítóst a Feri mellett ülő lány eszik. (7, előző)

Hugiról már tudjuk, hogy baracklevet iszik és Lóri mellett ül. Szabad még a tea és a kakaó helye: mivel a pirítóst evő nem kér teát, így ő csak kakaót ihat, tehát ő Angéla. (6, 10, 3)

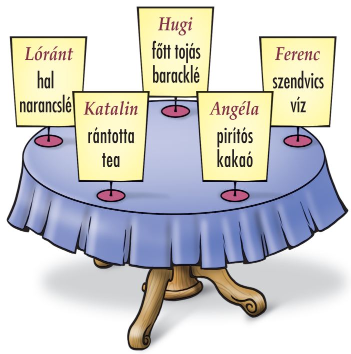
Mivel ételnek már csak egy szabad hely maradt, így Lóri halat eszik. (előzőek)

Angi egyik szomszédja süti magának a reggelit – Feri nem, mert hideg szendvicset eszik. Ebből következik, hogy a Lóri és Angi között ülő rántottát eszik, a fiúk között ülő pedig főtt tojást. (3)

Mivel a rántottát reggeliző nem gyümölcslevet kért, így csak teát ihat: ő Kati. (4)

Következésképpen Hugi a két fiú között főtt tojást reggelizik baracklével. (előző)

A reggelizőkre és az általuk fogyasztott ételekre, italokra egy példa az ábrán látható.



Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció – megoldások

4018 *a)* $\neg A$; *b)* $A \wedge B$; *c)* $A \vee B$;
d) $(A \wedge B) \vee C$; *e)* $\neg(A \wedge B)$; *f)* $(A \wedge B) \wedge (\neg C) \wedge (\neg D)$;
g) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$.

4019 *a)* Félek a dolgozattól.
b) Van olyan film, amit még nem láttam.
c) Van olyan szarka, amelyiknek a farka egyszínű.
d) Minden rövid nyakú zsiráf rosszul fésült.
e) Bármely geometriai rendszerben a háromszög belső szögeinek összege 180º.
f) Létezik olyan érettségi feladatsor, amelyben nincs ilyen feladat.
g) Minden holló fekete.
h) Létezik olyan héttel osztható szám, amely 5-tel is osztható.
i) Van két egyenes, melyek nem metszik egymást.

4020 *a)* Hideg van és fázom.
b) Jól felöltözöm vagy mozogni kell.
c) Mozogni kell és nem fázom.
d) Nem igaz, hogy fázom és mozogni kell, vagy jól felöltözöm.
e) Hideg van és fázom, vagy jól felöltözöm és nem kell mozogni.

4021 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis. *e)* Igaz. *f)* Igaz.

4022 *b)*

4023 A és D, illetve B és C egymás tagadásai.

4024 *a)* Nem biliárdozok jól vagy nem golfozok jól.
b) Nem vagy Kata és nem is vagy Klára.
c) Nem igaz, hogy James vagy Bond vagyok.
d) Nem igaz, hogy a boltba megyek és felporszívózok.

4025 *a)* $\neg A$ = Van olyan trapéz, melynek nincsenek párhuzamos oldalai vagy vannak egyenlő szögei.
$\neg B$ = Bármely deltoidnak vannak egyenlő szögei.
$\neg C$ = Minden négyzetnek van olyan oldala, mely nem egységnyi és területe sem az.
b) A kitöltött táblázat:

	Állítás	Tagadás
A = Minden trapéznak van két párhuzamos oldala és minden szöge különböző.	hamis	igaz
B = Van olyan deltoid, melynek minden szöge különböző.	hamis	igaz
C = Létezik olyan négyzet, melynek minden oldala vagy területe egységnyi.	igaz	hamis

4026 *a)* Öt lehetőség van.
1. Az illető mindent megtanul.
2. Csak a verset tanulja meg.
3. A verset megtanulja, azonkívül csak matek házit ír.
4. A verset megtanulja, azonkívül csak fizika házit ír.
5. Csak a reál tárgyak háziját készíti el.

b) Három lehetőség van, de minden esetben meg kell nézni a filmet.
1. Elkészíti mindkét ételt.
2. Csak rántottát süt.
3. Csak bundás kenyeret süt.

4027 *a)* Minden nap minden órájának minden percében csak rád gondolok.
b) Bármely együttesnek van olyan száma, amelyben minden versszakot megértek.
c) Van olyan étel, amit akárhogyan is készítenek el, bármikor hajlandó vagyok megenni.

4028 *a)* Négy lehetőség van: Karcsi korán kelt vagy nem, illetve sokat dolgozott vagy nem. Ha tényleg korán kelt és sokat dolgozott (azaz mindkettő igaz), akkor annak a tagadása hamis. Minden más esetben valamelyik (vagy mindkettő) kijelentés hamis, így tényleg nem igaz, hogy egyszerre teljesülnek. Ekkor az állítás igaz.
b) Ha színvak vagyok, akkor az állítás igaz, bármilyen is a labda. Ha nem vagyok színvak és a labda valóban gömbölyű és piros, akkor is igaz. Ha viszont nem vagyok színvak és a labda valamelyik jellemzője (esetleg mind a kettő) hamis, akkor az összetett állítás hamis.
c) Ha elalszom, akkor az állítás hamis, függetlenül az előadástól. Ha nem alszom el és az előadás nem volt sem rövid, sem izgalmas, akkor is hamis. Ha viszont nem aludtam el és az előadás két jellemzője közül legalább az egyik teljesül, akkor igaz a kijelentés.

4029 *a)* Volt nehéz feladat, vagy olyan, amit nem oldottam meg.

b) Ebben a pizzériában van rossz ízű pizza, és minden pizzát megkóstoltunk.

c) Bármely háromszögnek van olyan szöge, ami nem derékszög.

d) Van olyan Rubik-kocka, amelynek bármely oldalán van olyan szín, ami nem kék.

4030 *a)* Elegendő, ha D hamis.

b) Szükséges, hogy mind a négy kijelentés hamis legyen.

c) Az első kettő vagy a második kettő kijelentésnek egyszerre kell hamisnak lennie.

d) Az első kettő kijelentésnek kell egyszerre igaznak lennie, vagy a második kettőnek egyszerre hamisnak.

4031 Mivel a formulák mindegyikében két kijelentés (változó) szerepel, így értékeik (igaz vagy hamis) összesen négy esetet adnak:

$$i–i,\quad i–h,\quad h–i,\quad h–h.$$

A legegyszerűbb, ha készítünk mindhárom formulához egy-egy *igazságtáblázatot.*

A piros oszlop mindegyik esetre érvényes, a végeredményt a zöld oszlop mutatja.

A	B
i	i
i	h
h	i
h	h

a)

A	$\wedge$	$(\neg B)$
i	**h**	h
i	**i**	i
h	**h**	h
h	**h**	i

b)

$(A$	$\wedge$	$B)$	$\vee$	$(\neg A)$
i	i	i	**i**	h
i	h	h	**h**	h
h	h	i	**i**	i
h	h	h	**i**	i

c)

A	$\wedge$	$(B$	$\vee$	$\neg A)$
i	**i**	i	i	h
i	**h**	h	h	h
h	**h**	i	i	i
h	**h**	h	i	i

4032 A feladatban az első két formula három kijelentést tartalmaz, melyek mindegyike lehet igaz vagy hamis, ezért a lehetőségek száma:

$$2^3 = 8,$$

azaz ennyi sora van az igazságtáblázatnak.

A *c)* kérdésben négy formula szerepel, ott 16 soros a táblázat. A végeredményt most is a zöld oszlop jelöli.

A	B	C
i	i	i
i	i	h
i	h	i
i	h	h
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

a)

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\vee$	C
h	i	i	i	**i**	i
h	i	i	i	**h**	h
i	i	h	h	**i**	i
i	i	h	h	**i**	h
i	h	h	i	**i**	i
i	h	h	i	**i**	h
i	h	h	h	**i**	i
i	h	h	h	**i**	h

b)

$\neg A$	$\wedge$	$(B$	$\vee$	$C)$
h	**h**	i	i	i
h	**h**	i	i	h
h	**h**	h	i	i
h	**h**	h	h	h
i	**i**	i	i	i
i	**i**	i	i	h
i	**i**	h	i	i
i	**h**	h	h	h

A	*B*	*C*	*D*
i	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*i*	*h*
i	*i*	*h*	*i*
i	*i*	*h*	*h*
i	*h*	*i*	*i*
i	*h*	*i*	*h*
i	*h*	*h*	*i*
i	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*i*
h	*i*	*i*	*h*
h	*i*	*h*	*i*
h	*i*	*h*	*h*
h	*h*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*h*
h	*h*	*h*	*i*
h	*h*	*h*	*h*

c)

¬	(*A*	∧	*B*)	∧	(*C*	∨	*D*)
h	*i*	*i*	*i*	***h***	*i*	*i*	*i*
h	*i*	*i*	*i*	***h***	*i*	*i*	*h*
h	*i*	*i*	*i*	***h***	*h*	*i*	*i*
h	*i*	*i*	*i*	***h***	*h*	*h*	*h*
i	*i*	*h*	*h*	***i***	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	*h*	***i***	*i*	*i*	*h*
i	*i*	*h*	*h*	***i***	*h*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	*h*	***h***	*h*	*h*	*h*
i	*h*	*h*	*i*	***i***	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*i*	***i***	*i*	*i*	*h*
i	*h*	*h*	*i*	***i***	*h*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*i*	***h***	*h*	*h*	*h*
i	*h*	*h*	*h*	***i***	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*h*	***i***	*i*	*i*	*h*
i	*h*	*h*	*h*	***i***	*h*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*h*	***h***	*h*	*h*	*h*

Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia – megoldások

4033 *a)* $A \to B$; *b)* $(A \lor B) \to C$; *c)* $(A \land B) \to C$; *d)* $A \to (B \land \neg C)$;
e) $A \leftrightarrow (B \lor C)$; *f)* $((B \lor C) \to A) \land (A \to (B \lor C))$; *g)* $A \leftrightarrow B$.

4034 *a)* Ha egy négyszög négyzet, akkor paralelogramma. Igaz.

b) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor rombusz. Hamis.

c) Egy négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha két-két szemközti oldala egyenlő. Igaz.

d) Ha a négyszög két-két szemközti és két-két szomszédos oldala egyenlő, akkor rombusz. Igaz.

e) Ha egy négyszög két-két szemközti és két-két szomszédos oldala egyenlő, továbbá szögei egyenlők, akkor négyzet. Igaz.

f) Ha egy négyszög két-két szemközti és két-két szomszédos oldala egyenlő, vagy szögei egyenlők, akkor rombusz. Hamis.

g) Egy négyszög pontosan akkor négyzet, ha rombusz és szögei egyenlők. Igaz.

4035 *a)* Thalész tétele.

b) *B*.

4036 *a)* A megfordítása: Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.

B megfordítása: Ha egy háromszög belső szögeinek felezői egy pontban metszik egymást, akkor súlypontja a háromszögön kívülre esik.

C megfordítása: Ha egy függvény felülről korlátos, akkor van minimuma.

D megfordítása: Ha egy egész szám osztható 21-gyel, akkor osztható 7-tel.

b) A kitöltött táblázat:

	Állítás	Megfordítás
A = Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az paralelogramma.	igaz	igaz
B = Ha egy háromszög súlypontja a háromszögön kívülre esik, akkor belső szögeinek felezői egy pontban metszik egymást.	igaz	hamis
C = Ha egy függvénynek van minimuma, akkor felülről korlátos.	hamis	hamis
D = Ha egy egész szám osztható 7-tel, akkor osztható 21-gyel.	hamis	igaz

4037 *a)* A Pitagorasz-tétel megfogalmazható ekvivalenciaként.

b) Ez a kijelentés igaz, de megfordítása nem.

c) A Thalész-tétel is megfogalmazható ekvivalenciaként.

d) Megfordítása sem igaz.

4038 Figyeljük meg, hogy a feltétel mindig teljesül.

a) Így az implikáció akkor válik igazzá, ha a következtetés is igaz.

A befejezés bármilyen igaz kijelentés lehet, például: $2 + 2 = 4$.

b) Igaz feltétel mellett az implikáció akkor válik hamissá, ha a következtetés hamis.

A befejezés bármilyen hamis kijelentés lehet, például: $2 + 2 = 5$.

4039 Figyeljük meg, hogy a következmény hamis.

a) Az implikáció akkor válik igazzá, ha a feltétel hamis.

A kiegészítés bármilyen hamis kijelentés lehet.

b) Az implikáció akkor hamis, ha a feltétel igaz.

A kiegészítés bármilyen igaz kijelentés lehet.

4040 *a)* Mivel A feltétele hamis, így az implikáció következményétől függetlenül válik igazzá.

Az A mondat kipontozott részére bármit írva az implikáció igaz. (Hiszen $h \to i \equiv i$ és $h \to h \equiv i$.)

b) Mivel B következménye igaz, akármit is írunk feltételnek, az implikáció teljesül. (Hiszen $i \to i \equiv i$ és $h \to i \equiv i$.)

c) Az *a)* pontban ismertetett megfontolások miatt az implikáció nem lehet hamis.

d) A *b)* pontban látott megfontolások miatt az implikáció nem lehet hamis.

4041 *a)* A keresett formulák:

$(A \wedge B) \to C$ = Ha n 3-mal és 8-cal osztható, akkor 24-gyel is osztható.

$D \to \neg F$ = Ha n páros, akkor nem prím.

$E \leftrightarrow (A \vee B)$ = n pontosan akkor osztható 12-vel, ha 3-mal vagy 8-cal osztható.

$(F \wedge \neg A) \to D$ = Ha n prím és nem osztható 3-mal, akkor páros.

b) A logikai értékek: igaz, hamis, hamis, hamis.

4042 Figyeljük meg a következőket:

– A-ból következik D, tehát az A és D kijelentések ugyanarról a számról szólnak.
– B és C kizárják egymást, tehát egyik az egyik, másik a másik számra vonatkozik.
– Amire A és D vonatkozik, az nem lehet prím, azaz A és D kizárja E-t.

Ezek alapján két eset lehetséges.

I. eset: Az egyik számra A, D, B; a másikra E, C vonatkozik. Az egyetlen 5-tel osztható prím az 5. Az A, D, B követelményeknek végtelen sok szám megfelel, legkisebb közülük a 6.

II. eset: Az egyik számra A, D, C; a másikra E, B vonatkozik. Az egyetlen páros prím a 2. Az A, D, C követelményeknek végtelen sok szám megfelel, legkisebb közülük a 15.

4043 *a)* Az A kijelentés csak abban az egy esetben hamis, ha hideg van és nem fázom. Ekkor a B kijelentés is hamis, hiszen nem igaz, hogy nincs hideg és nem fázom. Minden más esetben A és B is igaz. A és B ekvivalens állítások.

b) Az A kijelentés csak akkor hamis, ha piszkálnak és mégsem leszek mérges. B hamis, ha egyrészt nem igaz, hogy nem piszkálnak, másrészt nem igaz, hogy mérges vagyok. Minden más esetben A és B is igaz. A és B ekvivalens állítások.

c) Az A kijelentés pontosan akkor lesz hamis, ha süt a nap és mégsem jó a kedvem. Ebben az esetben a B kijelentés feltétele (nem jó a kedvem) igaz, de a következmény (nem süt a nap) nem teljesül, azaz B is hamis. Amennyiben a kedvem jó, akkor B igaz. Utoljára azt gondoljuk meg, ha rossz a kedvem és a nap se süt: ekkor igaz B feltétele és következménye is, azaz maga B kijelentés. Kimondhatjuk, A és B ekvivalens állítások.

Megjegyzés: Jelölje C = süt a nap, D = jó a kedvem. Ekkor formulákkal leírva az állításokat: $A = C \to D$ és $B = (\neg D) \to (\neg C)$.

d) Írjuk fel formulákkal a kijelentéseket. Jelölje M = most igent mond, S = soha nem mond igent. Ekkor $A = (\neg M) \to S$. A B állítás felírásához azt gondoljuk meg, hogy az „egyszer igent mond" megegyezik a „nem igaz, hogy sohasem mond igent" kijelentéssel. Tehát $B = (\neg S) \to M$.

Vegyük észre, hogy ez a forma megegyezik a *c)* feladatban látottal, csak C helyére $(\neg M)$-t és D helyére S-t kell írnunk! Tehát itt is teljesül, hogy A és B állítások ekvivalensek.

4044 A keresett táblázatok:

A	B
i	i
i	h
h	i
h	h

a)

A	→	B	(¬A)	∨	B
i	**i**	i	h	**i**	i
i	**h**	h	h	**h**	h
h	**i**	i	i	**i**	i
h	**i**	h	i	**i**	h

b)

A	↔	B	(A	→	B)	∧	(B	→	A)
i	**i**	i	i	i	i	**i**	i	i	i
i	**h**	h	i	h	h	**h**	h	i	i
h	**h**	i	h	i	i	**h**	i	h	h
h	**i**	h	h	i	h	**i**	h	i	h

4045 *a)* Felhasználva a kettős tagadást, hogy a diszjunkció kommutatív és $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$:

$$A \to B \equiv (\neg A) \vee B \equiv B \vee (\neg A) \equiv \neg(\neg B) \vee (\neg A) \equiv (\neg B) \to (\neg A).$$

b) Az egyes lépéseket a számok magyarázzák:

$$(A \to B) \to C \equiv (1) \equiv [(\neg A) \vee B] \to C \equiv (2) \equiv \neg[(\neg A) \vee B] \vee C \equiv (3) \equiv [A \wedge (\neg B)] \vee C \equiv$$
$$\equiv (4) \equiv (A \vee C) \wedge [(\neg B) \vee C] \equiv (5) \equiv [\neg(\neg A) \vee C] \wedge [(\neg B) \vee C] \equiv (6) \equiv [(\neg A) \to C] \wedge [B \to C].$$

(1), (2) és (6): Az implikáció már megismert átírása diszjunkcióra, $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$.

(3): De Morgan-azonosság diszjunkcióra, $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.

(4): a diszjunkció disztributív a konjunkcióra, $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

(5): kettős tagadás, $A \equiv \neg(\neg A)$.

Megjegyzés: Az *a)* pontban látott azonosság alapján alkothatjuk meg a *kontrapozíciónak* nevezett bizonyítási eljárást. A *„ha …, akkor …”* állításban megfordítjuk és letagadjuk a feltételt és a következményt, majd ezt az állítást bizonyítjuk. Ilyet alkalmaztunk pl. ebben a kijelentésben:

Ha α, β, γ egy háromszög belső szögei, akkor legalább az egyik szög legalább 60°-os.

A kontrapozíciós állítás:

Ha nem igaz, hogy $\alpha \geq 60°$ vagy $\beta \geq 60°$ vagy $\gamma \geq 60°$, akkor α, β, γ nem egy háromszög belső szögei.

A kontrapozíciós állítás bizonyítása:

A letagadott feltételt a De Morgan-azonosság alapján átírhatjuk $\alpha < 60°$ és $\beta < 60°$ és $\gamma < 60°$ alakban. Így $\alpha + \beta + \gamma < 3 \cdot 60° = 180°$. Mivel bizonyítottuk, hogy minden háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért α, β, γ nem lehetnek ugyanazon háromszög szögei. (Természetesen kijelentésünk csak az euklideszi geometriában érvényes.)

Teljes indukció (emelt szintű tananyag) – megoldások

4046 A sorok sorszáma szerinti teljes indukciót alkalmazunk. S_k jelöli a k-adik sorban levő számok összegét.

1. A 0-adik sorban levő 1-esre teljesül, hogy az összeg $S_0 = 1 = 2^0$.
2. Tegyük fel, hogy (t.f.h.) a k-adik sorban az összeg $S_k = 2^k$.
3. Kérdés, hogy $S_{k+1} = 2^{k+1}$ teljesül-e.

   Mivel minden sorban duplán számoljuk az előző sorban előforduló számokat (egyszer jobbra le, egyszer balra le, illetve az első és az utolsó 1-est odaírjuk), így az ott keletkező összeg is duplája lesz az előzőnek:

$$S_{k+1} = 2 \cdot S_k = (2) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

4047 Az n kitevő szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

1. A legkisebb természetes számra, $n = 0$-ra teljesül az állítás: $3 \mid 2 \cdot 7^0 + 1 = 3$.
2. T.f.h. $n = k$-ra teljesül az állítás: $3 \mid 2 \cdot 7^k + 1$.
3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén $3 \mid 2 \cdot 7^{k+1} + 1$ teljesül-e.

   Alakítsuk át a kifejezést:

$$2 \cdot 7^{k+1} + 1 = 2 \cdot 7 \cdot 7^k + 1 = 7 \cdot (2 \cdot 7^k + 1) - 6.$$

   Az indukciós feltevés miatt a zárójeles kifejezés (és annak hétszerese) osztható 3-mal, az utolsó 6-os osztható 3-mal, így különbségük is.

4048 Minden esetben n szerinti indukciót alkalmazunk.

a) 1. $n = 0$-ra: $2 \mid 0^2 - 0 = 0$.

2. T.f.h. $n = k$-ra $2 \mid k^2 - k$.
3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén igaz-e, hogy $2 \mid (k + 1)^2 - (k + 1)$.

   Alakítsuk át:

$$(k + 1)^2 - (k + 1) = k^2 + 2k + 1 - k - 1 = k^2 + k = k^2 - k + 2k.$$

   Az első két tag különbsége az indukciós feltevés miatt osztható 2-vel, a $2k$ tag pedig páros. Tehát az állítás igaz.

b) 1. $n = 0$-ra: $27 \mid 10^0 + 18 \cdot 0 - 1 = 0$.

2. T.f.h. $n = k$-ra $27 \mid 10^k + 18k - 1$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re $27 \mid 10^{k+1} + 18 \cdot (k + 1) - 1$ teljesül-e.

Alakítsuk át:

$$10^{k+1} + 18 \cdot (k + 1) - 1 = 10 \cdot 10^k + 18k + 17 = 10 \cdot (10^k + 18k - 1) - 162k + 27.$$

A zárójeles kifejezés osztható 27-tel (az indukciós feltevés miatt), mint ahogy 162 és 27 is. Így az egész kifejezés osztható 27-tel.

c) 1. $n = 0$-ra $6 \mid 0^3 + 11 \cdot 0 = 0$.

2. T.f.h. $n = k$ esetén $6 \mid k^3 + 11k$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén $6 \mid (k + 1)^3 + 11 \cdot (k + 1)$ teljesül-e.

Alakítsuk át:

$$(k + 1)^3 + 11 \cdot (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = k^3 + 11k + 3k \cdot (k + 1) + 12.$$

Az első két tag összege az indukciós feltevés miatt osztható 6-tal. A szorzat osztható 3-mal, és mivel két egymást követő szám is szerepel benne, az egyik biztosan páros. Tehát $3k \cdot (k + 1)$ is osztható 6-tal. Végül $6 \mid 12$, így 6 az egész kifejezésnek is osztója.

4049 Ismét n szerinti indukciót alkalmazunk.

1. $n = 0$-ra az állítás teljesül: $1 = (1 + a)^0 \ge 1 + 0 \cdot a = 1$.
2. T.f.h. $n = k$-ra igaz, hogy $(1 + a)^k \ge 1 + k \cdot a$.
3. Kérdés, hogy ekkor $(1 + a)^{k+1} \ge 1 + (k + 1) \cdot a$ teljesül-e.

Kezdjük átalakítani a bal oldalt:

$$(1 + a)^{k+1} = (1 + a) \cdot (1 + a)^k \ge (1 + a) \cdot (1 + k \cdot a) =$$
$$= 1 + a + k \cdot a + k \cdot a^2 \ge 1 + a + k \cdot a = 1 + (k + 1) \cdot a.$$

Az első egyenlőtlenségnél kihasználtuk az indukciós feltevést, a másodiknál egész egyszerűen elhagytunk egy nemnegatív tagot (k természetes szám, $a^2 \ge 0$).

4050 1. $n = 1$-re $1^2 = \dfrac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$.

2. T.f.h. $n = k$-ra $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$ igaz-e.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$
$$= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + \frac{6 \cdot (k+1)^2}{6} = (k+1) \cdot \frac{k \cdot (2k+1) + 6 \cdot (k+1)}{6} =$$
$$= (k+1) \cdot \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = (k+1) \cdot \frac{(k+2) \cdot (2k+3)}{6}.$$

Pontosan ezt kerestük.

4051 n szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

1. A kiinduló érték $n = 2$, erre az állítás teljesül: $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Átalakítva $6\sqrt{2} > 8$, négyzetre emelve mindkét oldalt: $72 > 64$.
2. T.f.h. $n = k$ esetén $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2k-1}{2k} > \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén teljesül-e: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot (k+1) - 1}{2 \cdot (k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{(k+1)}}$.

Az indukciós feltevés szerint igaz, hiszen minden szorzótényező pozitív szám:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2 \cdot (k+1) - 1}{2 \cdot (k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{2 \cdot (k+1) - 1}{2 \cdot (k+1)} = \frac{2k+1}{4\sqrt{k} \cdot (k+1)}.$$

Kérdés, hogy ez a csökkentett érték vajon nagyobb-e még a kérdéses $\frac{1}{2\sqrt{(k+1)}}$-nél. Szorozzuk meg mindkét oldalt $4\sqrt{k} \cdot (k+1)$-gyel:

$$\frac{2k+1}{4\sqrt{k} \cdot (k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{(k+1)}},$$

$$2k + 1 > 2\sqrt{k \cdot (k+1)}.$$

Négyzetre emelve mindkét oldalt, kapjuk az igaz $4k^2 + 4k + 1 > 4k^2 + 4k$ egyenlőtlenséget.

4052 1. $n = 1$-re: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 8 + 6}{24} > 1$.

2. T.f.h. $n = k$-ra az állítás teljesül: $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re teljesül-e: $\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \ldots + \frac{1}{3 \cdot (k+1) + 1} > 1$.

$$\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \ldots + \frac{1}{3 \cdot (k+1)+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1} + \ldots + \frac{1}{3k+4} =$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1} + \ldots + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} >$$

$$> 1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}.$$

Ha most az utolsó négy tag összege pozitív, akkor ez az összeg is nagyobb, mint 1.

Legyen $x = 3k + 3 > 0$, így $k + 1 = \frac{x}{3} > 0$.

Ekkor:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} =$$

$$= \frac{x \cdot (x+1) + x \cdot (x-1) - 2 \cdot (x^2 - 1)}{x \cdot (x^2 - 1)} = \frac{2}{x \cdot (x^2 - 1)} > 0.$$

4053 Vizsgáljuk meg az első néhány összeget:

$$1 = 1; \quad 1 + 3 = 4; \quad 1 + 3 + 5 = 9; \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16; \quad \ldots$$

Egyrészt azt látjuk, hogy az összeg négyzetszám. Másrészt az utolsó, n-edik szám előáll $(2n - 1)$ alakban. Sejtésünk tehát így szól: az első n páratlan szám összege n^2.

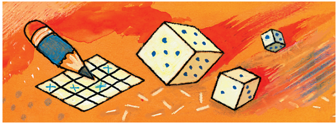
Bizonyítsuk n szerinti teljes indukcióval.

1. $n = 1$-re az állítás teljesül.

2. T.f.h. $n = k$ esetén az állítás teljesül: $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ teljesül-e.

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$



4054 1. $n = 1$-re $3 = \dfrac{10^{1+1} - 9 \cdot 1 - 10}{27} = \dfrac{81}{27} = 3$.

2. T.f.h. $n = k$ esetén $3 + 33 + 333 + \ldots + 33\ldots3 = \dfrac{10^{k+1} - 9k - 10}{27}$.

3. Kérdés, hogy $3 + 33 + 333 + \ldots + 33\ldots3 + 33\ldots33 = \dfrac{10^{k+2} - 9 \cdot (k+1) - 10}{27}$ teljesül-e.

(Az utolsó $33\ldots33$ szám $(k + 1)$ darab 3-as számjegyet tartalmaz.)
Használjuk fel az indukciós feltevést, majd vizsgáljuk meg, egyenlő-e a két oldal:

$$\frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + 33\ldots33 = \frac{10^{k+2} - 9 \cdot (k+1) - 10}{27}, \qquad / \cdot 27$$

$$10 \cdot 10^k - 9k - 10 + 27 \cdot 33\ldots33 = 100 \cdot 10^k - 9k - 19, \qquad / + 9k,\ +10,\ -10 \cdot 10^k$$

$$81 \cdot 11\ldots11 = 90 \cdot 10^k - 9, \qquad /:9$$

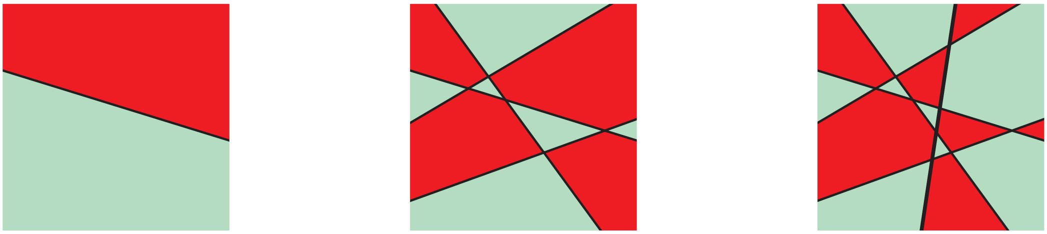
$$9 \cdot 11\ldots11 = 10^{k+1} - 1,$$

$$99\ldots99 = 10^{k+1} - 1,$$

ez pedig igaz, mert a bal oldalon $(k + 1)$ darab 9-es számjegyet találunk.

4055 Az egyenesek száma szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

1. Egy egyenes $(n = 1)$ a síkot két részre osztja: az egyiket pirosra, a másikat zöldre színezzük.
2. T.f.h. $n = k$ egyenes esetén kiszíneztük a feltételeknek megfelelően a „térképet”.
3. Meg tudjuk-e ezt tenni még egy $(k + 1)$-edik egyenes berajzolása esetén? Igen, ugyanis berajzolva az újabb vonalat, ez két részre osztja a térképet. Az egyik oldalt hagyjuk meg úgy színezve, ahogy eddig is volt. A másik felén minden rész színét változtassuk az ellenkezőjére. Így
   – ezen az oldalon a szomszédos részek különböző színei különbözők maradnak;
   – azok a részek, amelyekbe az új egyenes belemetsz, két színűek lesznek, az egyenes két oldalán különböző színeket találunk.



Így elérjük, hogy továbbra se legyenek oldalszomszédos, azonos színű részek.

4056 1. $n = 0$ esetén $11 \mid 2^{6 \cdot 0 + 1} + 3^{2 \cdot 0 + 2} = 2 + 9 = 11$.

2. T.f.h. $n = k$-ra $11 \mid 2^{6k+1} + 3^{2k+2} = 2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re vajon $11 \mid 2^{6 \cdot (k+1) + 1} + 3^{2 \cdot (k+1) + 2}$ teljesül-e.

$$2^{6 \cdot (k+1)+1} + 3^{2 \cdot (k+1)+2} = 2^{6k+7} + 3^{2k+4} = 64 \cdot 2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9 \cdot 9^k =$$

$$= 64 \cdot (2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k) - 64 \cdot 9 \cdot 9^k + 9 \cdot (2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k) - 9 \cdot 2 \cdot 64^k.$$

A két zárójelben levő kifejezés az indukciós feltevés szerint osztható 11-gyel, ezért koncentráljunk a maradék két tagra. Kiemelve belőlük (–1)-et, kapjuk:

$$64 \cdot 9 \cdot 9^k + 9 \cdot 2 \cdot 64^k = 9 \cdot (2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k) + 55 \cdot 9 \cdot 9^k.$$

Itt a zárójeles kifejezés az indukciós feltevés szerint ismét osztható 11-gyel, mint ahogy az utolsó tagban levő 55-ös együttható is. Készen vagyunk: az összes tagról kimutattuk, hogy osztható 11-gyel.

4057 *a)* Kezdjük néhány eset megvizsgálásával:

$$1! < 3^1; \quad 2! < 3^2; \quad \ldots; \quad 6! < 3^6; \quad 7! > 3^7; \quad 8! > 3^8.$$

Sejtésünk: bármely $n \ge 7$ egész számra $n! > 3^n$.

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 7$-re az állítás teljesül: $5040 = 7! > 3^7 = 2187$.
2. T.f.h. $n = k$ értékre teljesül az állítás: $k! > 3^k$.
3. Kérdés, hogy $(k+1)! > 3^{k+1}$ teljesül-e. Induljunk ki a faktoriálisból, használjuk az indukciós feltevést:
$$(k+1)! = k! \cdot (k+1) > (k+1) \cdot 3^k.$$
Ha ez utóbbi kifejezés nagyobb vagy egyenlő, mint $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k$, akkor készen is vagyunk:
$$(k+1) \cdot 3^k \ge 3 \cdot 3^k?$$
Osszuk le mindkét oldalt a pozitív 3^k-nal, így $k + 1 \ge 3$, ami természetesen teljesül, hiszen $k > 6$.

b) Vizsgáljunk meg néhány értéket:

$$3^0 > 0^3; \quad 3^1 > 1^3; \quad 3^2 > 2^3; \quad 3^3 = 3^3; \quad 3^4 > 4^3; \quad 3^5 > 5^3; \quad \ldots$$

Úgy tűnik, 3-nál nagyobb és kisebb értékekre teljesül az állítás, csak 3-ra nem (ekkor egyenlőség áll fenn). A bizonyítandó állítás tehát: bármely $n > 3$ természetes számra $3^n > n^3$.

Megjegyzés: Ha megengedjük az egyenlőséget, akkor $n = 0$-tól kimondhatjuk az állítást.

1. $n = 4$ esetén $81 = 3^4 > 4^3 = 64$.
2. T.f.h. $n = k$-ra $3^k > k^3$.
3. Kérdés, hogy $3^{k+1} > (k+1)^3$ teljesül-e. Először alakítsuk át a bal oldalt, majd használjuk fel az indukciós feltételt:
$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot k^3.$$
Ha igaz, hogy $3 \cdot k^3 \ge (k+1)^3$, akkor készen is vagyunk.
Fejtsük ki a zárójelet, vonjunk ki mindkét oldalból k^3-t:
$$2k^3 \ge 3k^2 + 3k + 1.$$
Osszuk el mindkét oldalt k-val $(k > 3)$, és rendezzünk a tört kivételével egy oldalra:
$$2k^2 - 3k - 3 \ge \frac{1}{k}.$$
A parabola zérushelyei:
$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}, \qquad \text{azaz} \qquad k_1 \approx -0{,}69 \quad \text{és} \quad k_2 \approx 2{,}19.$$
Ne feledjük, hogy számunkra csak a $k > 3$ egész értékek lényegesek!
Ezekre $\frac{1}{k}$ kisebb 1-nél, a parabola pedig pozitív egész értékeket vesz fel, tehát az egyenlőtlenség teljesül.

4058 Figyeljük meg alaposan az összeget. Mivel a szinuszfüggvény 2π szerint periodikus, valamint $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, ezért a kérdéses összeg megegyezik a

$$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \ldots$$

váltakozó előjelű összeggel.

Az alábbi táblázatban n az összeadandó váltakozó előjelű számok számát jelöli, S_n pedig az összegüket.

n	1	2	3	4	5	6	7
	–1	–1 + 2	1 – 3	–2 + 4	2 – 5	–3 + 6	3 – 7
S_n	–1	1	–2	2	–3	3	–4
	$-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n}{2}$	$-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n}{2}$	$-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n}{2}$	$-\frac{n+1}{2}$

A probléma az, hogy összegünk a váltakozó előjel miatt kétféleképpen viselkedik: más lesz páros sok és más páratlan sok szám összegére. Az indukciót csak két lépésben végezhetjük el. Egyszer igazolnunk kell a párosról páratlanra történő lépés helyességét, egyszer pedig a páratlanról párosra lépés helyességét. Ehhez írjunk fel két kiinduló értéket és két indukciós feltevést.

Kezdjük a páratlan esettel.

1. $n = 1$-re az állítás igaz, $-1 = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi\right) = -\frac{1+1}{2} = -1.$

2. T.f.h. $n = (2k-1)$-re az állítás teljesül, azaz $S_n = S_{2k-1} = -\frac{n+1}{2} = -\frac{2k-1+1}{2} = -k.$

3. Kérdés, hogy $n = 2k$-ra igaz-e az állítás: $S_n = \frac{n}{2}$ vagy másképp $S_{2k} = \frac{2k}{2} = k.$

$$S_{2k} = S_{2k-1} + 2k = -k + 2k = k.$$

Páratlanról párosra tehát át tudunk lépni. Gondoljunk bele, a párosról páratlanra átlépő indukcióhoz nincs szükség kezdőérték-vizsgálatra, ugyanis az $n = 1$ kezdőértéket megvizsgáltuk, és utána igazoltuk a róla való továbblépést. A második $n = 2$ érték igazsága ebből már következik.

Lássuk a páros eseteket.

2. T.f.h. $n = 2k$-ra az állítás teljesül, azaz $S_{2k} = \frac{n}{2} = \frac{2k}{2} = k.$

3. Kérdés, hogy $n = 2k+1$-re igaz-e.

$$S_n = S_{2k+1} = S_{2k} - (2k+1) = k - 2k - 1 = -k - 1 = -\frac{2k+2}{2} = -\frac{(2k+1)+1}{2} = -\frac{n+1}{2}.$$

Megjegyzés: Érdemes megvizsgálni a következő összeget is (az utolsó tagban sin-t vagy cos-t írunk aszerint, mire jön ki a váltakozó lépés):

$$1 \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 4 \cdot \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \ldots + n \cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

4059 A probléma kettős. Egyrészt a 2. indukciós feltevésben gyakorlatilag bármilyen k-ra feltesszük, hogy minden $n \le k$-ra igaz a feltétel. Ez azonban csak $n = k = 0$-ra igaz, bármely annál nagyobb értékre nem teljesül a feltétel.

Másrészt a 3. pontban kifejtett gondolatmenetben két értékre, k-ra és $(k-1)$-re is alkalmazzuk az indukciós feltételt, holott a kezdőérték-vizsgálatot csak egy értékre végeztük el ($n = 0$-ra). Persze a feladatban ezt nem is végezhetjük el többre, hiszen csak $a^0 = 1$ bármely a-ra.

Megjegyzés: Természetesen, ha több kezdőértékre is meg tudjuk állapítani az állítás igazságát, akkor ezeket fel is használhatjuk a bizonyításban.

Vegyes feladatok – megoldások

4060 *a)* Hamis. Például $2 + 3 = 5$.

c) Hamis. Mindkettő kisebb vagy egyenlő, mint 1, de ha az egyik 1, a másik 0.

c) Igaz. Négyzetszám csak 0 vagy 1 maradékot adhat hárommal osztva.

d) Igaz. Például $f(x) = 0$.

4061 *a)* Nem, mert a De Morgan-azonosságok szerint B-ben „vagy” műveletnek kell szerepelni.

b) Igen, hiszen a műveletek disztributívak.

4062 *a)* Kinyitottam a sütőt vagy kivettem a tálat, és megégettem a kezem.
Nem igaz, hogy kinyitottam a sütőt és kivettem a tálat.
Kinyitottam a sütőt és kivettem a tálat, vagy nem vettem ki a tálat és megégettem a kezem.

b) Nem nyitottam ki a sütőt és nem vettem ki a tálat, vagy nem égettem meg a kezem.
Kinyitottam a sütőt és kivettem a tálat.
Nem nyitottam ki a sütőt vagy nem vettem ki a tálat, és kivettem a tálat vagy nem égettem meg a kezem.

4063 *a)* $B \leftrightarrow (A \wedge C)$;

b) $(C \wedge B) \rightarrow (\neg A)$.

c) Ha esik az eső, akkor próbára megyek vagy fáradt vagyok.

d) Próbára megyek és nem vagyok fáradt, de esik az eső.

4064 A bolondokháza eme lakója őrült orvos.

4065 A kitöltött táblázat: (➡)

Állítás	Igaz	Hamis
a)		X
b)	X	
c)	X	
d)		X

4066 1. $n = 0$-ra $6 \mid 0 \cdot (0^2 + 5) = 0$.

2. T.f.h. $n = k$ esetén $6 \mid k \cdot (k^2 + 5) = k^3 + 5k$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén $6 \mid (k + 1) \cdot \left[(k + 1)^2 + 5\right]$ teljesül-e.

$$(k + 1) \cdot \left[(k + 1)^2 + 5\right] = (k + 1) \cdot \left[k^2 + 2k + 6\right] = k^3 + 3k^2 + 8k + 6 =$$
$$= k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6 = k^3 + 5k + 3k \cdot (k + 1) + 6.$$

Az első két tag összege, azaz $k^3 + 5k$ az indukciós feltevés miatt osztható 6-tal. A szorzat osztható 3-mal és az egyik tényezője biztosan páros, tehát osztható 6-tal.

4067 A meggondolással két probléma is van. Egyrészt az indukciós feltevés hibás, nyilván lehet már két leányt is találni, akiknek különböző színű a haja. Másrészt ha ez igaz is lenne, a bizonyítás elve akkor sem működik $n = 1$-ről $n = 2$-re való átlépéskor. Egymást átfedő csoportok létrehozásában gondolkodunk, de 2 fő esetén 1 fős csoportok lesznek, melyek között nincs átfedés.