



11.3. A TRIGONOMETRIA ALKALMAZÁSAI

Vektorműveletek rendszerezése, alkalmazások (emlékeztető) – megoldások

3242 a) Egyenlő vektorok: \vec{a} és \vec{c} .

c) $\vec{a} + \vec{f} + \vec{d} = \vec{0}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{e} = \vec{0}$.

b) Ellentett vektorok: \vec{b} és \vec{d} .

3243 a) $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{c}$;

b) $\vec{AF} = -\vec{a} - \vec{c}$;

c) $\vec{FD} = \vec{c} - \vec{a}$;

d) $\vec{BD} = -2 \cdot \vec{a} - \vec{c}$;

e) $\vec{EA} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{c}$;

f) $\vec{EC} = 2 \cdot \vec{c} + \vec{a}$;

g) $\vec{FC} = 2 \cdot \vec{c}$.

3244 A vektorok által bezárt szög:

a) 0° ;

b) 180° .

3245 a) $\vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$;

b) $4 \cdot \vec{a} - \vec{b}$.

3246 A vektor hossza:

a) $\sqrt{24^2 + 12^2} = 12 \cdot \sqrt{5} \approx 26,83$ cm;

b) $\sqrt{6^2 + 16^2} = 2 \cdot \sqrt{73} \approx 17,09$ cm.

3247 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 \cdot 10 \cdot \cos 20^\circ \approx 18,79$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 2 \cdot 10 \cdot \sin 20^\circ \approx 6,84$ egység.

3248 a) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$;

b) $-\vec{b} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}}{3}$;

c) $\frac{2 \cdot \vec{a} - \vec{b}}{3}$.

3249 a) Olyan vektorok felelnek meg a feltételnek, amelyek hegyesszöget zárnak be.

b) Olyan vektorok felelnek meg a feltételnek, amelyek hossza egyenlő.

3250 a) $(12,5; -13,5)$;

b) $(0; -8)$;

c) $(2,05; -1,11)$.

3251 a) $\vec{AB}(2; 8)$.

b) A felezőpont helyvektora $\vec{f}(4; 3)$.

3252 A háromszög belső szögfelezője a szemben levő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja:

$\frac{AD}{DB} = \frac{10}{20}$, így a D pont az AB oldal A -hoz közelebbi harmadolópontja. A szakasz harmadolópontjába mutató helyvektorra vonatkozó összefüggés ismeretében: $\vec{CD} = \frac{\vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{3}$.

3253 a) Az $\vec{a} + \vec{b}$ és \vec{c} vektor bezárt szöge 90° .

b) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{12^2 + (12 \cdot \sqrt{3})^2} = 24$.

3254 a) $\vec{AI} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \vec{c}$;

b) $\vec{AJ} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

c) $\vec{IJ} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{c}$.

3255 A \vec{v} vektor előállítható az \vec{a} és a \vec{b} vektorok lineáris kombinációjaként $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ alakban. A feladatunk az, hogy α és β értékét meghatározzuk. Ehhez meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 6 = 4\alpha - 2\beta \\ 5 = \alpha + 3\beta \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Tehát a \vec{v} vektor előállítása: $\vec{v} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$.



3256 Először megmutatjuk, hogy az $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ vektort az O kezdőpontba eltolva a vektor végpontja rajta lesz a háromszög C csúcsából induló magasságának egyenesén.

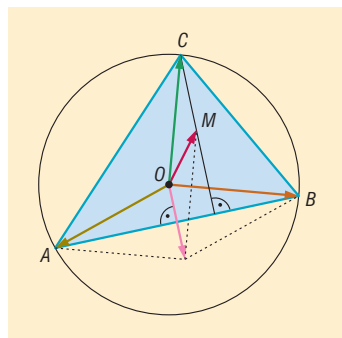
Az O pont az ABC háromszög köré írt kör középpontja, tehát az \vec{OA} és \vec{OB} vektorok egyenlő hosszúságúak. A paralelogrammaszabály alapján a két vektort összeadva egy rombuszt kapunk. Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért az összegvektor merőleges lesz AB egyenesére.

Ismét használva a paralelogrammaszabályt, az O kezdőpontból kiindulva adjuk hozzá az $\vec{OA} + \vec{OB}$ vektorhoz az \vec{OC} vektort.

Mivel a háromszög C csúcsából induló magasságának egyenese és az $\vec{OA} + \vec{OB}$ egyaránt merőleges AB egyenesére, az $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ végpontja rajta lesz az ABC háromszög C -ből kiinduló magasságvonalán.

Hasonlóan belátható, hogy ha az O kezdőpontból kiindulva az $\vec{OB} + \vec{OC}$ vektorhoz hozzáadjuk az \vec{OA} vektort, az $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ végpontja rajta lesz az ABC háromszög A -ból kiinduló magasságvonalán is.

Azt kaptuk, hogy ha $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ kezdőpontja az O pont, akkor végpontja rajta van a háromszög két magasságvonalának egyenesén, tehát a vektor végpontja a háromszög M magasságpontja. Ezzel beláttuk, hogy $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM}$.



3257 Legyen az ABC háromszög magasságpontja M , a körülírt kör középpontja O , az AB oldal felezőpontja F . Mivel OF merőleges AB -re, elég belátnunk, hogy $\vec{CM} = 2 \cdot \vec{OF}$.

Ismert, hogy egy tetszőleges vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató két helyvektor számtani közepe. Ha a vonatkoztatási pont O , akkor

$$\vec{OF} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}.$$

A 3256. feladat alapján:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM},$$

amiből következik, hogy:

$$\vec{CM} = \vec{OM} - \vec{OC} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) - \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

Tehát $\vec{CM} = 2 \cdot \vec{OF}$, vagyis a feladat állítását bebizonyítottuk.

3258 Az ABC háromszög körülírt körének O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok legyenek \vec{a} , \vec{b} és \vec{c} .

Egy tetszőleges vonatkoztatási pontból az ABC háromszög súlypontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe. Ha a vonatkoztatási pont a háromszög körülírt körének O középpontja és az S pont a háromszög súlypontja, akkor:

$$\vec{OS} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

A 3256. feladat alapján:

$$\vec{OM} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Ez utóbbi két egyenlőségből következik, hogy $\vec{OM} = 3 \cdot \vec{OS}$, ami azt jelenti, hogy O , M és S pontok egy egyenesen vannak, és S pont az OM szakasz O -hoz közelebbi harmadolópontja.



- 3259** a) Az ABC háromszög körülírtó körének O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok legyenek \vec{a} , \vec{b} és \vec{c} , magasságpontja M .

A 3256. feladat alapján $\vec{OM} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, tehát:

$$\vec{OF} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}.$$

A háromszög AB oldalának C_1 felezőpontjába mutató vektor:

$$\vec{OC_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \Rightarrow \vec{C_1F} = \vec{OF} - \vec{OC_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{c}}{2}.$$

Hasonló számolással adódik, hogy a BC oldal A_1 , illetve az AC oldal B_1 felezőpontjába mutató vektorok $\frac{\vec{a}}{2}$, illetve $\frac{\vec{b}}{2}$.

Mivel az \vec{a} , \vec{b} és \vec{c} vektorok hossza a háromszög köré írtó kör sugara, az F pont a háromszög minden oldalának felezőpontjától egyenlő távolságra van.

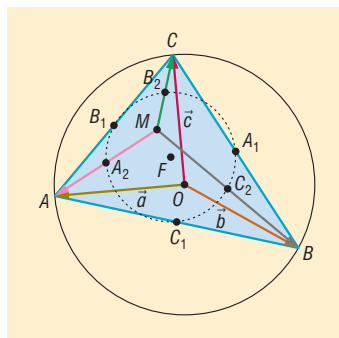
- b) Az A csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz felezőpontja legyen A_2 , ekkor $\vec{OA_2} = \frac{\vec{OM} + \vec{a}}{2}$.

A 3256. feladat alapján:

$$\vec{OA_2} = \frac{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{a}}{2}.$$

Mivel $\vec{FA_2} = \vec{OA_2} - \vec{OF}$,

$$\vec{FA_2} = \frac{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{a}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}}{2}.$$



Hasonlóan adódik, hogy az F pontból a B csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz B_2 felezőpontjába, illetve a C csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz C_2 felezőpontjába mutató vektorok $\frac{\vec{b}}{2}$, illetve $\frac{\vec{c}}{2}$.

Mivel az \vec{a} , \vec{b} és \vec{c} vektorok hossza a háromszög köré írtó kör sugara, az F pont a háromszög minden csúcsát a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontjától egyenlő távol van.

A megfontolásainkból következik, hogy ha az ABC háromszög körülírtó körének sugara R , akkor az F középpontú $\frac{R}{2}$ sugarú körön rajta van a háromszög három oldalának felezőpontja, és a háromszög minden csúcsát a háromszög magasságpontjával összekötő szakasz felezőpontja. Ezt a kört hívják a háromszög Feuerbach körének. Szokás még kilenc pont körének is nevezni, mivel az említett hat ponton kívül még rajta van a háromszög három magasságának talppontja is.

A skaláris szorzat – megoldások

- | | | | |
|-----------------------------|------------------|------------------------------------|----------------------------|
| 3260 a) 16; | b) 0; | c) $-16 \cdot \sqrt{2}$; | d) -32 . |
| 3261 a) 60° ; | b) 135° ; | c) 90° ; | d) $\approx 67,98^\circ$. |
| 3262 a) 9; | b) 4; | c) $\frac{12 \cdot \sqrt{2}}{7}$; | d) 0. |



3263 A skaláris szorzat legkisebb értéke -84 , a legnagyobb értéke 84 .

3264 a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2};$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AT} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 0^\circ = \frac{1}{2};$ d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{TC} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3}{4}.$

3265 A négyzet átlójának a hossza 2 egység.

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2 = 4;$

b) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 2;$

c) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = 0,$ vagy

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 90^\circ = 0;$

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + 2 = 2,$ vagy

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 2.$

3266 a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$

b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0,$ mivel a két vektor merőleges egymásra.

c) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot \vec{b};$

d) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b});$

e) $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = 2(\vec{a})^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3(\vec{b})^2 = 2 - \frac{5}{2} - 3 = -\frac{7}{2}.$

3267 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{3}{2}.$

3268 a) Mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|$, ezért $|\vec{b}| = \frac{1}{\cos \alpha}.$

Minden olyan \vec{b} vektor megfelel, amelynek hossza az \vec{a} és \vec{b} vektorok által bezárt szög koszinuszának a reciproka.

b) Nincsenek ilyen vektorok, mert a skaláris szorzat értéke mindig egy valós szám.

c) Minden olyan \vec{a} és \vec{b} vektor megfelel, amelyek nem egyirányúak.

d) Az egyenlőség igaz, ha a két vektor merőleges egymásra.

e) Az egyenlőséget olyan \vec{a} és \vec{b} vektorok teljesítik, amelyek skaláris szorzata 2 .

3269 a) Mivel az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor merőleges a \vec{c} vektorra, a skaláris szorzatuk 0 .

b) Mivel az $\vec{a} + \vec{b}$ és $\vec{a} + \vec{c}$ hossza egyaránt $\sqrt{2}$, valamint a közbezárt szögük 60° :

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 1.$$

c) Az $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ testátló vektora $\sqrt{3}$, az $\vec{a} + \vec{c}$ lapátló vektora $\sqrt{2}$ hosszúságú, és a bezárt szögük koszinusza $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ezért:

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 2.$$



- 3270** Legyen \vec{a} és \vec{b} vektorok által bezárt szög α . Mivel a $3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$ vektor merőleges az $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ vektorra, a skaláris szorzatuk 0:

$$(3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}) = 3 \cdot \vec{a}^2 - 4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{b}^2 = 0.$$

Ebből következik, hogy:

$$4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \Rightarrow 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha = -1.$$

Így kapjuk, hogy $\cos \alpha = -0,25$, amiből $\alpha \approx 104,48^\circ$.

- 3271** A két vektor merőleges egymásra, mert:

$$\begin{aligned} (\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}) \cdot (5 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b}) &= 5 \cdot \vec{a}^2 - 6 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} - 8 \cdot \vec{b}^2 = \\ &= 5 \cdot |\vec{a}|^2 - 6 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 120^\circ - 8 \cdot |\vec{b}|^2 = \\ &= 5 \cdot |\vec{a}|^2 - 6 \cdot |\vec{a}|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 8 \cdot |\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot (5 + 3 - 8) = 0. \end{aligned}$$

- 3272** Tekintsük a két vektor skaláris szorzatát, és alkalmazzuk a skaláris szorzás ismert műveleti tulajdonságait:

$$[(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b}] \cdot \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{a}) = 0.$$

Mivel a szorzat 0, a két vektor merőleges egymásra.

- 3273** Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $ABCD$ tetraéder ABC lapjának oldalai között az $AB \geq BC \geq CA$ egyenlőtlenség áll fenn. Elég bizonyítanunk, hogy a BCA hegyesszög. Ehhez elég belátni, hogy $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ skaláris szorzat értéke pozitív valós szám:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}) = \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC}. \end{aligned}$$

Mivel \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} és \overrightarrow{DC} vektorok páronként merőlegesek egymásra, ezért:

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$$

Így:

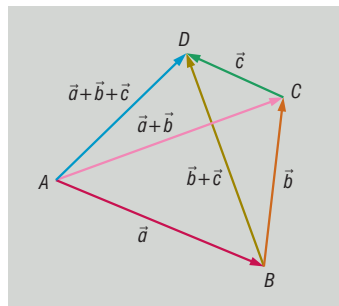
$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DC}|^2 > 0,$$

ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

- 3274** Az ábrán látható $ABCD$ négyszög oldalainak vektorai \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} és $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Elég belátni, hogy a szemközti oldalvektorok négyzetösszegének különbsége akkor és csak akkor nulla, ha az átlóvektorok merőlegesek egymásra. Vegyük a szemben lévő oldalvektorok négyzetösszegének a különbségét:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 + \vec{b}^2 - \vec{a}^2 - \vec{c}^2 &= \\ = 2 \cdot \vec{b}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} &= \\ = 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}). \end{aligned}$$

Ez utóbbi szorzat akkor és csak akkor 0, ha $\vec{a} + \vec{b}$ átlóvektor merőleges $\vec{b} + \vec{c}$ átlóvektorra. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.





3275 Irányítsuk az oldalakat az ábrán látható módon vektorokként. Egy szakasz felezőpontjába mutató vektor a végpontokba mutató vektorok számtani közepe:

$$\overrightarrow{CH} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$

Az ábráról leolvasható, hogy $\overrightarrow{EF} = \vec{f} - \vec{e}$.

Tekintsük ez utóbbi két vektor skaláris szorzatát:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{EF} &= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \cdot (\vec{f} - \vec{e}) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{f} - \vec{e}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{f} - \vec{a} \cdot \vec{e} + \vec{b} \cdot \vec{f} - \vec{b} \cdot \vec{e}).\end{aligned}$$

Az \vec{a} és \vec{e} , valamint a \vec{b} és \vec{f} vektorok merőlegesek egymásra, tehát skaláris szorzatuk 0, tehát:

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{f} - \vec{b} \cdot \vec{e}).$$

Legyen γ a háromszög C csúcsánál lévő szöge. Tekintsük az $\vec{a} \cdot \vec{f}$ és $\vec{b} \cdot \vec{e}$ skaláris szorzatokat:

$$\vec{a} \cdot \vec{f} = |\vec{a}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos(\gamma + 90^\circ),$$

$$\vec{b} \cdot \vec{e} = |\vec{b}| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos(\gamma + 90^\circ).$$

Figyelembe véve, hogy $|\vec{a}| = |\vec{e}|$ és $|\vec{b}| = |\vec{f}|$, a két skaláris szorzat egyenlő, tehát

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{f} - \vec{b} \cdot \vec{e}) = 0.$$

Ha két vektor skaláris szorzata 0, akkor merőlegesek egymásra, tehát CH egyenes merőleges EF egyenesére.

Az $EF = 2 \cdot CH$ összefüggés bizonyításához tekintsük a $(2 \cdot CH)^2 - EF^2$ különbséget:

$$(2 \cdot CH)^2 - EF^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{f} - \vec{e})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 - \vec{e}^2 + 2 \cdot \vec{e} \cdot \vec{f} - \vec{f}^2.$$

Az $|\vec{a}| = |\vec{e}|$ és $|\vec{b}| = |\vec{f}| \Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \vec{e}^2 - \vec{f}^2 = 0$, valamint az $\angle ACB = \gamma$, illetve az $\angle ECF = 180^\circ - \gamma$, tehát:

$$(2 \cdot CH)^2 - EF^2 = 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{e} \cdot \vec{f} = 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma + 2 \cdot |\vec{e}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos(180^\circ - \gamma).$$

Ismert, hogy $\cos \gamma = -\cos(180^\circ - \gamma)$, tehát:

$$(2 \cdot CH)^2 - EF^2 = 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma - 2 \cdot |\vec{e}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos \gamma = 0.$$

Azt kaptuk, hogy $(2 \cdot CH)^2 - EF^2 = 0$, vagyis $EF = 2 \cdot CH$.

3276 Vezessük be a következő jelöléseket: $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$.

Legyen a BC -vel párhuzamos egységvektor \vec{e} .

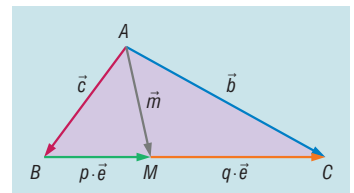
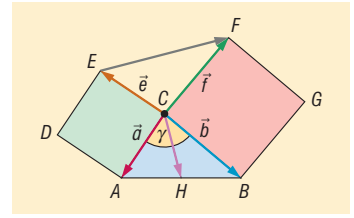
Ha $MC = q$ és $BM = p$, akkor $\overrightarrow{MC} = q \cdot \vec{e}$, illetve $\overrightarrow{BM} = p \cdot \vec{e}$.

A következő egyenlőségeket emeljük négyzetre:

$$\vec{c} = \vec{m} - p \cdot \vec{e} \quad \text{és} \quad \vec{b} = \vec{m} + q \cdot \vec{e}.$$

A skaláris szorzás tulajdonságai miatt ezeket négyzetre emelve kapjuk a következő egyenleteket:

$$AB^2 = AM^2 + p^2 - 2p \cdot (\vec{m} \cdot \vec{e}) \quad \text{és} \quad AC^2 = AM^2 + q^2 + 2q \cdot (\vec{m} \cdot \vec{e}).$$





Az első egyenletet q -val, a másodikat p -vel szorozva, majd összeadva, megkapjuk a következő összefüggést:

$$AB^2 \cdot q + AC^2 \cdot p = AM^2 \cdot (p + q) + pq^2 + qp^2,$$

$$AB^2 \cdot q + AC^2 \cdot p = AM^2 \cdot (p + q) + pq \cdot (p + q),$$

$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM = AM^2 \cdot BC + BM \cdot MC \cdot BC.$$

Ez utóbbi összefüggés éppen a bizonyítandó állítás.

3277 Az ABC háromszög S súlypontját tekintjük vonatkoztatási pontnak. Ekkor a súlypontba mutató képlet alapján az A , B és C csúcsok \vec{a} , \vec{b} és \vec{c} helyvektoraira fennáll:

$$\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

Ha a P pont helyvektora \vec{p} , akkor $|\vec{p}| = r$, továbbá:

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= (\vec{a} - \vec{p})^2 + (\vec{b} - \vec{p})^2 + (\vec{c} - \vec{p})^2 = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{p} + 3 \cdot \vec{p}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3r^2. \end{aligned}$$

Tehát az adott ABC háromszögben a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg az r sugarú kör kerületének bármely P pontjára nézve ugyanakkora.

3278 A 3277. feladat alapján adott ABC háromszög esetén a

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3r^2$$

összeg akkor minimális, ha $r = 0$, vagyis P pont éppen a háromszög súlypontja.

Skaláris szorzat a koordináta-rendszerben – megoldások

3279 a) $\sqrt{34}$; b) $\frac{\sqrt{37}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; d) $\sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$;

e) $\sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3}$; f) 1.

3280 a) $\sqrt{290}$; b) $\sqrt{145}$.

3281 Az \vec{a} vektorral egyirányú egységvektor: $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tehát koordinátái:

a) $\vec{a}_0(0, 8; -0, 6)$; b) $\vec{a}_0\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}; \frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)$;

c) $\vec{a}_0\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}; \frac{2mn}{m^2+n^2}\right)$.

3282 Az \vec{a} vektorral megegyező irányú 5 egység hosszú vektor: $\vec{b} = 5 \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tehát koordinátái:

a) $\vec{b}\left(-\frac{25}{13}; \frac{60}{13}\right)$; b) $\vec{b}\left(\frac{45 \cdot \sqrt{130}}{130}; \frac{35 \cdot \sqrt{130}}{130}\right)$;

c) $\vec{b}(-\sqrt{5}; 2 \cdot \sqrt{5})$.



3283 Az \vec{a} vektorral ellentétes irányú 3 egység hosszú vektor: $\vec{b} = -3 \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tehát koordinátái:

a) $\vec{b} \left(\frac{15}{13}; -\frac{36}{13} \right);$

b) $\vec{b} \left(-\frac{27 \cdot \sqrt{130}}{130}; -\frac{21 \cdot \sqrt{130}}{130} \right);$

c) $\vec{b} \left(\frac{3}{5} \cdot \sqrt{5}; -\frac{6}{5} \cdot \sqrt{5} \right).$

3284 a) 9; b) 25,4; c) -3,8; d) -108,4; e) 254.

3285 a) 14,25°; b) 92,81°; c) 18,60°; d) 90°.

3286 Két vektor merőlegességének szükséges feltétele, hogy a két vektor skaláris szorzata 0 legyen.

a) $y = \frac{81}{7};$ b) $y = \frac{\sqrt{3}}{4};$ c) $y = 5$ vagy $y = 11,5$.

3287 Az \overrightarrow{AB} vektor:

$$\overrightarrow{AB} \left(-\frac{b}{a^2 - b^2}; \frac{2b}{a^2 - b^2} \right).$$

A vektor hossza a koordinátáinak négyzetösszegéből vont négyzetgyök:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(-\frac{b}{a^2 - b^2} \right)^2 + \left(\frac{2b}{a^2 - b^2} \right)^2} = \sqrt{5} \cdot \left| \frac{b}{a^2 - b^2} \right|.$$

3288 Az AOB háromszög OA oldalának hossza az A pont helyvektorának az abszolút értéke:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-12)^2 + 7^2} = \sqrt{193}.$$

A OB oldal hossza a B pont helyvektorának az abszolút értéke:

$$|\vec{b}| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}.$$

Az AB oldal hossza az $\overrightarrow{AB}(20; -5)$ vektor abszolút értéke:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{20^2 + (-5)^2} = 5 \cdot \sqrt{17}.$$

A háromszög kerülete:

$$\sqrt{193} + \sqrt{68} + 5 \cdot \sqrt{17} = 42,75 \text{ egység}.$$

3289 Mivel:

$$\sqrt{4 - 2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1,$$

a két vektor skaláris szorzata:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} + \sqrt{3} = 0.$$

Tehát a két vektor 90°-os szöget zár be.

3290 a) $\vec{b}(3; 5);$ b) $\vec{b} \left(-\frac{2}{5}; \frac{4}{3} \right);$ c) $\vec{b}(1 - 2k; k).$

3291 A \vec{c} vektor koordinátái legyenek $\vec{c}(x; y)$. A skaláris szorzatokat a koordináták segítségével kiszámolva a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} = 7 &\Rightarrow 3x - 2y = 7 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 &\Rightarrow 4x - y = 1 \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = -1$ és $y = -5$. Tehát a \vec{c} vektor: $\vec{c}(-1; -5)$.



- 3292** Legyen $\vec{b}(x; -7)$. A két vektor skaláris szorzatát számolhatjuk kétféleképpen, így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$4x + 21 = 5 \cdot \sqrt{x^2 + 49} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Négyzetre emelés után az

$$x^2 + 48x - 49 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek gyökei 1 és -49 .

Ha $x = -49$, akkor a két vektor skaláris szorzata negatív, tehát nem zárhatnak be hegyesszöget. A \vec{b} vektor első koordinátája 1, és ekkor a két vektor valóban 45° -os szöget zár be.

- 3293** Az adott vektorokkal egyirányú egységnyi hosszú vektorok rombuszt feszítenek ki, így összegük a két vektor szögfelezőjének irányába mutat. A keresett vektor tehát így állítható elő:

$$\vec{v} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Mivel $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ koordinátái $\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$ és $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ koordinátái $\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$, ezért a két vektor szögfelezőjének irányába mutató vektor:

$$\vec{v} \left(\frac{112}{65}; -\frac{14}{65} \right).$$

- 3294** Mivel az \vec{OA} , illetve \vec{OB} vektorok skaláris szorzata:

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -12 \cdot 14 + 7 \cdot 24 = 0,$$

a két vektor merőleges egymásra, tehát az OAB háromszög derékszögű.

Egy derékszögű háromszög beírt körének sugarát kiszámíthatjuk az $r = \frac{a + b - c}{2}$ összefüggés alapján, ahol a, b a befogók, és c az átfogó hosszát jelöli.

A befogók hossza:

$$|\vec{OA}| = \sqrt{193} \quad \text{és} \quad |\vec{OB}| = \sqrt{772} = 2 \cdot \sqrt{193}.$$

Az átfogó hossza:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{5 \cdot 193} = \sqrt{965}.$$

A beírt kör sugara tehát:

$$r = \frac{(3 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{193}}{2} \approx 5,31.$$

A háromszög köré írt kör sugara Thalész tételének értelmében az átfogó fele, vagyis:

$$\frac{\sqrt{965}}{2} \approx 15,53.$$

- 3295** Két vektor akkor és csak akkor zár be tompaszöget, ha a két vektor skaláris szorzata negatív:

$$(2 - 2p) \cdot (x + 1) + x^2 \cdot (5 - p) < 0.$$

Keressük p valós paraméter értékét úgy, hogy a

$$(5 - p) \cdot x^2 + (2 - 2p) \cdot x + (2 - 2p) < 0$$

egyenlőtlenség minden valós x -re fennálljon.



Ha az egyenlőtlenség elsőfokú, akkor $p = 5$, és vizsgálnunk kell a $-8x - 8 < 0$ egyenlőtlenséget. Ez csak $x > -1$ esetén teljesül, tehát $p = 5$ nem felel meg a feladat feltételeinek.

Ha az egyenlőtlenség másodfokú, akkor az

$$f(x) = (5 - p) \cdot x^2 + (2 - 2p) \cdot x + (2 - 2p)$$

másodfokú függvény csak negatív értékeket vehet fel. Ez akkor teljesül, ha a függvény főegyütthatója negatív, és a függvénynek nincs zérushelye. Mivel a függvényhez tartozó másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (2 - 2p)^2 - 4 \cdot (5 - p) \cdot (2 - 2p),$$

a következő egyenlőtlenségrendszert kell megoldani:

$$\left. \begin{aligned} (2 - 2p)^2 - 4 \cdot (5 - p) \cdot (2 - 2p) &< 0 \\ 5 - p &< 0 \end{aligned} \right\}.$$

Az első egyenlőtlenség a következő alakra hozható:

$$-p^2 + 10p - 9 < 0,$$

amelynek megoldása: $p < 1$ vagy $p > 9$.

A második egyenlőtlenség $p > 5$ esetén teljesül.

A két megoldáshalmaz metszete: $p > 9$.

Tehát $p > 9$ esetén minden valós x értékre az \vec{a} és \vec{b} vektor tompaszöget zár be.

3296 Legyen $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$. Számítsuk ki a skaláris szorzatukat kétféleképpen:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \cos \alpha,$$

ahol α a két vektor által bezárt szög. Ismert, hogy $\cos \alpha \leq 1$, így ebből közvetlenül adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\cos \alpha = 1$, vagyis a két vektor egyirányú. Tehát létezik olyan $\lambda \geq 0$ valós szám, hogy $a_1 = \lambda \cdot b_1$, és $a_2 = \lambda \cdot b_2$.

3297 a) Alkalmazzuk az $\vec{a}(12; 5)$ és $\vec{b}(a; b)$ vektorokra a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $12b = 5a \geq 0$.

b) Alkalmazzuk az $\vec{a}(\sqrt{7a+1}; \sqrt{7b+1})$ és $\vec{b}(1; 1)$ vektorokra Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, és használjuk ki, hogy $a + b = 1$:

$$\sqrt{7a+1} \cdot 1 + \sqrt{7b+1} \cdot 1 \leq \sqrt{(\sqrt{7a+1})^2 + (\sqrt{7b+1})^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = b = \frac{1}{2}$.

3298 Alkalmazzuk az $\vec{a}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}; \sqrt{\frac{3}{b}}\right)$ és $\vec{b}(\sqrt{a}; \sqrt{b})$ vektorokra a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, és végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{\frac{3}{b}} \cdot \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{2}{a} + \frac{3}{b}} \cdot \sqrt{a+b},$$

felhasználva, hogy $a + b = 7$:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq \sqrt{\frac{2}{a} + \frac{3}{b}} \cdot \sqrt{7}.$$



Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív:

$$\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{7} \leq \frac{2}{a} + \frac{3}{b}.$$

Tehát $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ minimális értéke $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{7}$.

A kifejezés a minimális értéket olyan a és b értékekre veszi fel, amelyre teljesül, hogy:

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{\frac{3}{b}} \cdot \sqrt{a} \quad \text{és} \quad a + b = 7.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$a = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 7 \cdot (\sqrt{6} - 2) \quad \text{és} \quad b = \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 7 \cdot (3 - \sqrt{6}).$$

A szinusztétel – megoldások

3299 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
5 cm	3,70 cm	4,62 cm	73°	45°	62°
1,88 m	8,67 m	9 m	12°	74°	94°
3,75 dm	4 dm	4,61 dm	51°	56°	73°

3300 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
9 cm	5 cm	9,39 cm	70°	31,47°	78,53°
7,43 m	12 m	8 m	37,30°	102°	40,70°
18 dm	19,42 dm	120 cm	65°	77,83°	37,17°

3301 a) A háromszögben két oldal és a kisebbikkel szemben levő szög adott, tehát a háromszög nem egyértelműen meghatározott. Legyen a szokásos jelöléseket használva $a = 6$, $b = 10$ és $\alpha = 30^\circ$. Felírva a szinusztételt:

$$\frac{\sin \beta}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{6} \Rightarrow \sin \beta \approx 0,8333.$$

Innen β értéke hegyes- és tompaszög is lehet:

$$\beta_1 = 56,44^\circ \quad \text{illetve} \quad \beta_2 = 123,56^\circ.$$

A szinusztételt ismételten használva a háromszög szögei és oldalai lehetnek:

a	b	c	α	β	γ
6 cm	10 cm	11,98 cm	30°	56,44°	93,56°
6 cm	10 cm	5,34 cm	30°	123,56°	26,44°

b) Hasonlóan az előző részhez a háromszög szögei és oldalai lehetnek:

a	b	c	α	β	γ
6 cm	10 cm	14,33 cm	20°	34,75°	125,25°
6 cm	10 cm	4,47 cm	20°	145,25°	14,75°



- 3302** a) Az $a + b = 12$ cm összefüggésből $a = 12 - b$. A szinusztételt használva:

$$\frac{\sin 42,8^\circ}{\sin 72,5^\circ} = \frac{12 - b}{b}.$$

A b oldalra így adódik:

$$b = \frac{12 \cdot \sin 72,5^\circ}{\sin 42,8^\circ + \sin 72,5^\circ} \approx 7,00.$$

A szinusztételt ismételten használva a háromszög oldalai:

5,00 cm, 7,00 cm és 6,65 cm.

- b) A háromszög oldalai:

17,28 cm, 30,72 cm és 24,89 cm.

- 3303** A szinusztételt használva a háromszög oldalai:

a) 146,86 cm, 92,86 cm és 160,57 cm;

b) 43,18 cm, 13,18 cm és 50,16 cm.

- 3304** A szinusztétel segítségével a háromszög oldalaira kapjuk:

38,5 cm, 32,0 cm és 29,5 cm.

- 3305** A háromszög oldalai:

12,89 cm, 17,36 cm és 19,75 cm.

- 3306** A $2a + b = c$ egyenlőség mindkét oldalát osztva c -vel, majd használva a szinusztételt adódik, hogy igaz az állítás.

- 3307** A paralelogramma oldalai: 10,59 cm és 8,23 cm.

- 3308** a) 116,63 N és 84,31 N;

b) 85,95 N és 26,47 N.

- 3309** a) $25,55 \text{ cm}^2$;

b) $4153,51 \text{ cm}^2$.

- 3310** Egy háromszög területét a szokásos jelöléssel számíthatjuk a következő képlettel:

$$T = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \alpha} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin \alpha}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}}.$$

- a) A háromszög szögei 50° , 82° és 48° , így az egyes oldalak:

$$a = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin 50^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \sin 48^\circ}} \approx 14,64, \quad b = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin 82^\circ}{\sin 50^\circ \cdot \sin 48^\circ}} \approx 18,93,$$

$$c = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin 48^\circ}{\sin 50^\circ \cdot \sin 82^\circ}} \approx 14,21.$$

A háromszög oldalai tehát:

14,64 cm, 18,93 cm és 14,21 cm.

- b) Hasonlóan a háromszög oldalaira kapjuk:

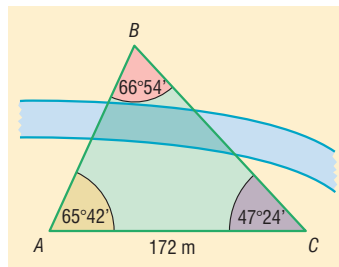
12,31 cm, 18,20 cm és 17,51 cm.



- 3311** Az ABC háromszög harmadik szöge $66^\circ 54'$. A háromszög AB és AC oldalára felírva a szinusztételt:

$$\frac{AB}{172} = \frac{\sin 47^\circ 24'}{\sin 66^\circ 54'} \Rightarrow AB \approx 137,64.$$

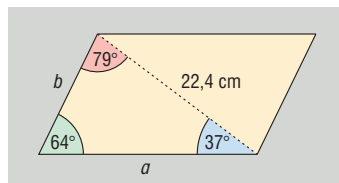
Az AB távolság 137,64 m.



- 3312** A paralelogramma 22,4 cm-es átlója a paralelogramma oldalaival olyan háromszöget határoz meg, amelynek szögei 37° , 79° és 64° . Ebben a háromszögben felírva a szinusztételt adódik, hogy $a = 24,46$ és $b = 15,00$.

A paralelogramma oldalai:

$$24,46 \text{ cm és } 15,00 \text{ cm.}$$



- 3313** Vegyük fel az $ABCD$ trapéz hosszabbik AB alapján az E pontot úgy, hogy az $AECD$ négyszög paralelogramma legyen. Ekkor:

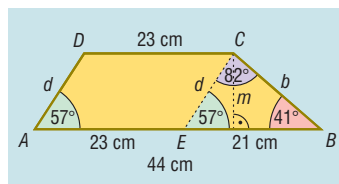
$$EB = 44 - 23 = 21 \text{ cm,}$$

$$\angle CEB = 57^\circ, \angle EBC = 41^\circ \text{ és } \angle BCE = 82^\circ.$$

Az EBC háromszögnek ismerjük egy oldalát és a szögeit, így a szinusztétellel a b és d oldalak hosszát kiszámíthatjuk:

$$\frac{b}{21} = \frac{\sin 57^\circ}{\sin 82^\circ} \Rightarrow b = 21 \cdot \frac{\sin 57^\circ}{\sin 82^\circ} \approx 17,79;$$

$$\frac{d}{21} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin 82^\circ} \Rightarrow d = 21 \cdot \frac{\sin 41^\circ}{\sin 82^\circ} \approx 13,91.$$



a) A trapéz szárainak hossza:

$$17,79 \text{ cm és } 13,91 \text{ cm.}$$

b) A terület meghatározásához számoljuk a trapéz magasságát:

$$m = b \cdot \sin 41^\circ \approx 11,67.$$

A trapéz területe:

$$T = \frac{11,67 \cdot (44 + 23)}{2} = 390,95 \text{ cm}^2.$$

- 3314** A szóban forgó $ABCD$ trapéz hosszabbik AB alapján vegyük fel az E pontot úgy, hogy az $AECD$ négyszög paralelogramma legyen. Az EBC háromszögben így ismert két oldal, és a hosszabbikkal szemben levő szög. Szinusztétellel β és EB oldal számítható:

$$\frac{\sin \beta}{\sin 72^\circ} = \frac{16}{22} \Rightarrow \beta \approx 43,76^\circ \Rightarrow \gamma \approx 64,24^\circ;$$

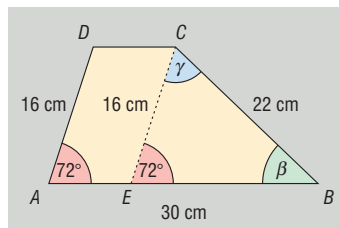
$$\frac{EB}{22} = \frac{\sin 64,24^\circ}{\sin 72^\circ} \Rightarrow EB \approx 20,83.$$

a) A trapéz rövidebb alapja:

$$AB - EB = 30 - 20,83 = 9,17 \text{ cm.}$$

b) Mivel a trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180° , a trapéz szögei rendre:

$$72^\circ, 43,76^\circ, 136,24^\circ \text{ és } 108^\circ.$$

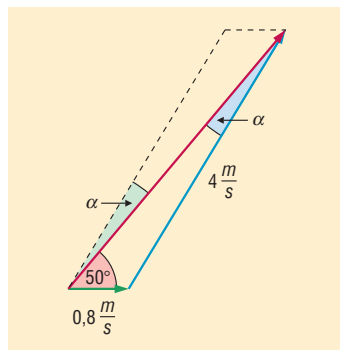




- 3315** Ahhoz, hogy a csónak a kikötőbe érjen, a csónak és a folyó sebességvektorának összege a folyó partjával 50° -os szöget kell hogy bezárjon. A két vektort a háromszögszabály szerint összeadva, a vektorok egy olyan háromszöget alkotnak, amelynek két oldala 4, illetve 0,8 egység, és a 4 egységnyi oldallal szemben levő szög 50° . Feladatunk az, hogy szinusztétellel meghatározzuk a 0,8 egységnyi oldallal szemben levő α szöget:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 50^\circ} = \frac{0,8}{4} \Rightarrow \alpha \approx 8,81^\circ.$$

Tehát a cél irányától $8,81^\circ$ -kal kell eltérnünk a folyási iránnyal ellentétesen.



- 3316** Az $ABCDE$ szabályos ötszög minden szöge 108° . A beírt $IFGH$ négyzet oldala 25 cm.

A GFC háromszögben:

$$\angle GFC = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ.$$

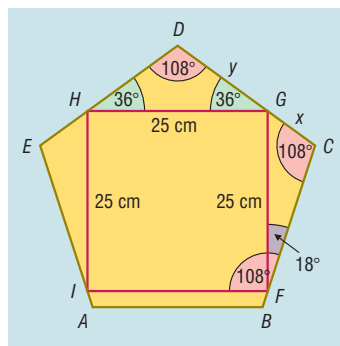
Felírva a szinusztételt:

$$\frac{x}{25} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 108^\circ} \Rightarrow x \approx 8,12.$$

A HGD egyenlő szárú háromszögből:

$$y = \frac{12,5}{\cos 36^\circ} \approx 15,45.$$

Az ötszög oldala: $x + y = 23,57$ cm.



- 3317** Alakítsuk át a $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$ egyenlőséget:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} + \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma} = 1.$$

(Háromszögről lévén szó, $\sin \gamma$ nem lehet 0.)

A szinusztétel értelmében ez utóbbi egyenlőség így is írható:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Ha egy háromszögben két oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a Pitagorasz-tétel értelmében az állítás megfordítása is igaz.

- 3318** Tudjuk, hogy egy háromszögben tompaszög vagy derékszög csak a legnagyobb oldallal szemben lehet, ezért ha van a feltételeknek megfelelő háromszög, akkor a 10 cm-es oldallal szemben levő α szög csak hegyesszög lehet.

Legyen a 23 cm-es oldallal szemben levő szög β . Felírva a háromszögben a szinusztételt:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{23}{10} \Rightarrow \sin \beta = \frac{23}{10} \cdot \sin \alpha.$$

Mivel $\sin \beta$ értéke legfeljebb 1 lehet, ahhoz, hogy létezzen ilyen háromszög szükséges, hogy $\frac{23}{10} \cdot \sin \alpha \leq 1$ teljesüljön.

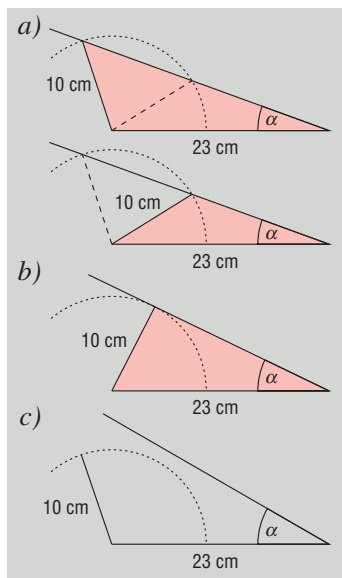

$$\frac{23}{10} \cdot \sin \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha < \frac{10}{23},$$

Ekkor a háromszögben két oldal és a kisebbikkel szemben levő szög adott, tehát két ilyen háromszög létezik.

$$\frac{23}{10} \cdot \sin \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{10}{23},$$

Ekkor egy, a feltételeknek megfelelő háromszög van.

c) Nincs a feltételeknek megfelelő háromszög, ha $\sin \beta$ értéke 1-nél nagyobb vagy α tompaszög, vagyis ha $\alpha > 25,77^\circ$.



Az ABD háromszögben:

$$\begin{aligned} \angle ADB &= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ, \\ \angle ABD &= 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 80^\circ. \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{300} = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow AB = 300 \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}.$$
$$\begin{aligned} \angle ADC &= 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ, \\ \angle ACD &= 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ. \end{aligned}$$

A háromszögben felírva a szinusztételt:

$$\frac{AC}{300} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 50^\circ} \Rightarrow AC = 300 \cdot \frac{\sin 100^\circ}{\sin 50^\circ}.$$

$$BC = 300 \cdot \frac{\sin 100^\circ}{\sin 50^\circ} - 300 \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 99,42 \text{ m}$$

távolságra van egymástól.

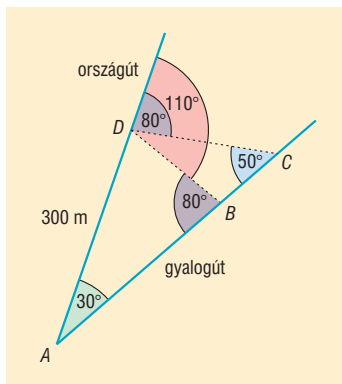
b) A gazda a megadott sebességgel

$$t = \frac{99,42}{1,5} = 66,28$$

másodperc alatt teszi meg az utat.

Ez idő alatt a kutyája által megtett út:

$$s = 66,28 \cdot 6 = 397,68 \text{ m.}$$





A koszinusztétel – megoldások

3320 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
9 cm	8 cm	9,79 cm	59,84°	50,16°	70°
17,12 m	12,4 m	8,3 m	110°	42,89°	27,11°
18 dm	17,7 dm	120 cm	71,70°	69°	39,30°

3321 a) A háromszög legnagyobb szöge: 102,64°.

b) A háromszög legkisebb szöge: 26,05°.

3322 A két mutató végpontja 12,49 cm távolságra van egymástól.

3323 A paralelogramma átlói 66,80 cm és 90,98 cm hosszúak.

3324 A két erő eredője 46,30 N.

3325 A paralelogramma oldalai 10,92 cm és 21,42 cm.

3326 a) A paralelogramma másik oldala 20 cm.

b) A paralelogramma átlói 14,32 cm és 26,89 cm hosszúak.

3327 3 óra 40 perc múlva a két hajó 208,03 km-re lesz egymástól.

3328 Koszinusztétellel számítható a PQ távolság: 2,33 km. A vitorlás átlagsebessége:

$$v = \frac{2,33 \text{ km}}{0,6 \text{ h}} \approx 3,88 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

3329 Az AC oldal hossza legyen x . Felírva a koszinusztételt:

$$100 = x^2 + (3x)^2 - 2 \cdot x \cdot (3x) \cdot \cos 54^\circ \Rightarrow x \approx 3,93.$$

A háromszög hiányzó oldalainak hossza:

$$3,93 \text{ cm} \text{ és } 11,79 \text{ cm}.$$

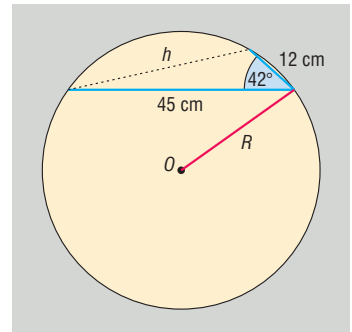
3330 Számítsuk ki a húrok másik végpontjait összekötő húr h hosszát koszinusztétellel:

$$h^2 = 45^2 + 12^2 - 2 \cdot 45 \cdot 12 \cdot \cos 42^\circ \Rightarrow h \approx 36,96.$$

Egy kör sugara, húrjának hossza és a húrhoz tartozó kerületi szög közötti összefüggés alapján a kör R sugara:

$$R = \frac{h}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{36,96}{2 \cdot \sin 42^\circ} \approx 27,62.$$

A kör sugara tehát 27,62 cm.



3331 A biliárdgolyó ütközésig megtett útja:

$$\frac{10}{\sin 33^\circ} \approx 18,36 \text{ cm}.$$

Ütközés után a megállásig

$$\frac{15}{\sin 33^\circ} \approx 27,54 \text{ cm}$$

utat tesz még meg, mivel a beesés szöge egyenlő a visszaverődés szögével.



A két út egymással bezárt szöge:

$$180^\circ - 2 \cdot 33^\circ = 114^\circ.$$

A biliárdgolyó két helyzete közti d távolságot koszinusztétellel számolhatjuk:

$$d^2 = 18,36^2 + 27,54^2 - 2 \cdot 18,36 \cdot 27,54 \cdot \cos 114^\circ \Rightarrow d \approx 38,82.$$

A golyó két helyzete közti távolság 38,82 cm.

3332 A kismutató hosszát jelölje k , a nagymutatóét n . Számoljunk deciméterekben.

9 órakor a mutatók derékszöget zárnak be, így hosszukra felírható a Pitagorasz-tétel:

$$10^2 = k^2 + n^2.$$

8 órakor a mutatók 120° -os szöget zárnak be, így hosszukra felírható a koszinusztétel:

$$12^2 = k^2 + n^2 - 2 \cdot k \cdot n \cdot \cos 120^\circ.$$

A második egyenletbe $k^2 + n^2$ értéket beírva:

$$12^2 = 10^2 - 2 \cdot k \cdot n \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow k \cdot n = 44 \Rightarrow k = \frac{44}{n}.$$

Ez utóbbi eredményünket az első egyenletbe írjuk be, majd rendezzük az egyenletet:

$$10^2 = \left(\frac{44}{n}\right)^2 + n^2,$$

$$0 = n^4 - 100n^2 + 1936,$$

$$n_{1,2}^2 = \frac{100 \pm \sqrt{2256}}{2}.$$

A megoldások: $n_1 \approx 8,59$ és $n_2 \approx 5,12$, amiből $k_1 \approx 5,12$ és $k_2 \approx 8,59$.

(A megoldásnál figyelembe vettük, hogy a mutatók hossza csak pozitív szám lehet.)

A kismutató hossza 51,2 cm, a nagymutatóé 85,9 cm.

3333 Ismeretes, hogy egy háromszög belső szögfelezője a szemben lévő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. Ha $AB:AC = 3:4$, akkor a háromszög AB oldalának hossza legyen $3x$, az AC oldalának hossza $4x$.

A háromszög területét felírhatjuk:

$$24 = \frac{3x \cdot 4x \cdot \sin 70^\circ}{2} \Rightarrow x \approx 2,06.$$

A háromszögben $AB \approx 6,18$ és $AC \approx 8,24$.

A háromszög BC oldalát koszinusztétellel számolhatjuk: $BC \approx 8,44$.

A háromszög oldalai:

$$6,18 \text{ cm}, 8,24 \text{ cm} \text{ és } 8,44 \text{ cm}.$$

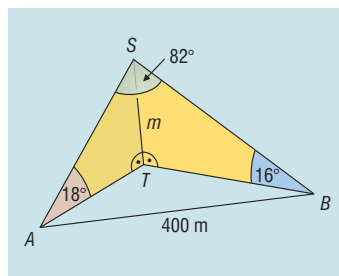
3334 A sasfészek síkra vonatkozó merőleges vetülete T . Jelöljük az ST távolságot m -mel.

Az ATS derékszögű háromszögből:

$$AS = \frac{m}{\sin 18^\circ},$$

a BTS derékszögű háromszögből:

$$BS = \frac{m}{\sin 16^\circ}.$$





Az ABS háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$400^2 = \left(\frac{m}{\sin 18^\circ}\right)^2 + \left(\frac{m}{\sin 16^\circ}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m}{\sin 18^\circ} \cdot \frac{m}{\sin 16^\circ} \cdot \cos 82^\circ.$$

Kifejezve m -et:

$$\frac{400 \cdot \sin 18^\circ \cdot \sin 16^\circ}{\sqrt{\sin^2 16^\circ + \sin^2 18^\circ - 2 \cdot \sin 18^\circ \cdot \sin 16^\circ \cdot \cos 82^\circ}} \approx 88,65.$$

A sasfészek megközelítőleg 89 m magasan van.

3335 A háromszög oldalai legyenek $n-1$, n és $n+1$ ($n > 4$).

A koszinusztétel segítségével számoljuk ki a háromszög legnagyobb oldalával szemben levő α szög koszinuszát:

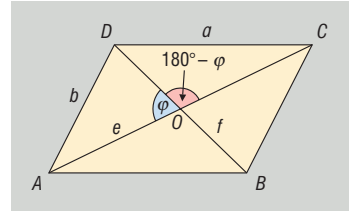
$$(n+1)^2 = n^2 + (n-1)^2 - 2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{n-4}{2 \cdot (n-1)}.$$

Az $\frac{n-4}{2 \cdot (n-1)}$ mindig pozitív $n > 4$ miatt, tehát a háromszög legnagyobb α szögének koszinusza pozitív szám. Ez pedig azt jelenti, hogy az α szög hegyesszög, vagyis a háromszög biztosan hegyesszögű.

3336 Az ábrán látható $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja O , az átlók által bezárt szög φ . Az oldalak hossza a , b , az átlók pedig e , f .

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, az AOD és a DOC háromszögekben az alábbi módon felírhatjuk a koszinusztételt:



$$b^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos \varphi,$$

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos(180^\circ - \varphi).$$

Mivel $\cos \varphi = -\cos(180^\circ - \varphi)$, a két egyenletet összeadva adódik:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{f}{2}\right)^2 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2.$$

Tehát egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalainak négyzetösszegével.

3337 Ismeretes, hogy egy háromszög területét a $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ képlet alapján is számolhatjuk.

A területből a két adott oldal által közbezárt γ szög szinuszára kapunk értéket:

$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot 18000}{250 \cdot 180} = 0,8,$$

amiből $\gamma_1 \approx 53,13^\circ$ és $\gamma_2 \approx 126,87^\circ$.

Tehát a telek γ szöge lehet hegyesszög vagy tompaszög.

Ha γ hegyesszög, a telek harmadik oldala a koszinusztételből: 202,24 m.

Ha γ tompaszög, a telek harmadik oldala a koszinusztételből: 385,88 m.



a) Győzőnek nincs igazsága.

b) A háromszög területét számíthatjuk a beírt körének r sugarával:

$$T = r \cdot \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow r = \frac{2T}{a+b+c}.$$

A beírt kör sugara γ hegyesszög esetén: $r \approx 56,94$ m, γ tompaszög esetén: $r \approx 44,12$ m.

Nem biztos, hogy elfér a telken egy 50 m sugarú kör alakú delfinárium.

3338 A háromszög oldalainak hossza a szokásos jelöléssel legyen a , b és c . A szögfelezőtétel alapján a C csúcsnál lévő szög szögfelezője a szemközti c oldalt egy olyan D pontban metszi, amelyre igaz, hogy:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}.$$

Legyen $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

Egy szakasz osztópontjába mutató vektor képlete alapján:

$$\overrightarrow{CD} = \frac{b \cdot \vec{a} + a \cdot \vec{b}}{a+b},$$

$$|\overrightarrow{CD}|^2 = \left(\frac{b \cdot \vec{a} + a \cdot \vec{b}}{a+b} \right)^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2b^2 \cdot \cos \gamma}{(a+b)^2}.$$

Mivel a koszinusztétel alapján:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

ezért:

$$|\overrightarrow{CD}|^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2b^2 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{(a+b)^2} = \frac{ab \cdot (2ab + a^2 + b^2 - c^2)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{ab \cdot ((a+b)^2 - c^2)}{(a+b)^2}.$$

Szorzattá alakítva és használva az $s = \frac{a+b+c}{2}$ jelölést adódik, hogy:

$$|\overrightarrow{CD}|^2 = \frac{ab \cdot ((a+b)^2 - c^2)}{(a+b)^2} = \frac{4ab \cdot \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}{(a+b)^2} =$$

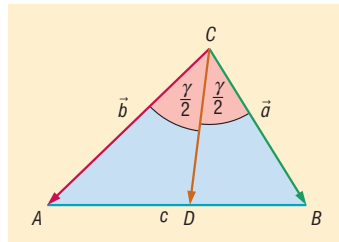
$$= \frac{4ab}{(a+b)^2} \cdot s \cdot (s-c).$$

Tehát a C csúcsból induló belső szögfelező hossza:

$$CD = \frac{2}{a+b} \cdot \sqrt{ab \cdot s \cdot (s-c)}.$$

Hasonlóan az A , illetve a B csúcsból induló szögfelezők hossza:

$$\frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{bc \cdot s \cdot (s-a)} \quad \text{illetve} \quad \frac{2}{a+c} \cdot \sqrt{ac \cdot s \cdot (s-b)}.$$





Trigonometrikus összefüggések alkalmazásai – megoldások

3339 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
6 cm	9 cm	12 cm	28,96°	46,57°	104,47°
12,5 dm	6,3 dm	9,8 dm	99,57°	29,80°	50,63°
51 dm	420 cm	2 m	105,08°	52,67°	22,25°

3340 A másik oldal 12 cm, a másik átló 25,25 cm hosszú.

3341 a) Az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor hossza: 9,06 cm.

b) Az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor hossza: 8,23 cm.

c) Az eredő vektor az \vec{a} vektorral 52,2°-ot, a \vec{b} vektorral 31,8°-ot zár be.

3342 A súlyvonalak hossza: 9,18 cm, 13,89 cm és 13,20 cm.

3343 A háromszög hiányzó oldalainak hossza 9 cm és 12 cm, a velük szemben lévő szögek pedig 48°33' és 88°46'.

3344 A háromszög két hiányzó oldala legyen x és $x + 6$. Felírva a koszinusztételt:

$$12^2 = x^2 + (x + 6)^2 - 2x \cdot (x + 6) \cdot \cos 60^\circ,$$

$$0 = x^2 + 6x - 108.$$

Az egyenlet pozitív megoldása: $x \approx 7,82$.

A háromszög hiányzó oldalai: 7,82 cm és 13,82 cm.

A háromszög többi szögeit szinusztétellel számolva: 34,36° és 85,64°.

3345 A paralelogramma oldalainak hossza legyen a és b , az általuk bezárt szög 60°. A szöggel szemben lévő átló hossza $e = 23$ cm, a másik átló hossza f .

a) Az a , b és e oldalú háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$23^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 60^\circ.$$

A feladat szerint $a + b = 30$, amiből $a = 30 - b$. Ezek alapján b -re a következő egyenletet kapjuk:

$$23^2 = (30 - b)^2 + b^2 - 2 \cdot (30 - b) \cdot b \cdot \cos 60^\circ,$$

$$0 = 3b^2 - 90b + 371.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $b_1 = 25,07$ cm és $b_2 = 4,93$ cm. A hozzá tartozó a értékek: $a_1 = 4,93$ cm és $a_2 = 25,07$ cm.

A paralelogramma oldalainak hossza 25,07 cm és 4,93 cm.

b) A paralelogramma másik f átlójának hossza a koszinusztétel alapján:

$$f = \sqrt{25,07^2 + 4,93^2 - 2 \cdot 25,07 \cdot 4,93 \cdot \cos 120^\circ} \approx 27,86 \text{ cm.}$$

3346 Az ABC háromszögben $AB = 12$, $BAC \hat{=} 30^\circ$.

a) Ismeretes, hogy egy háromszög területét a $T = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$

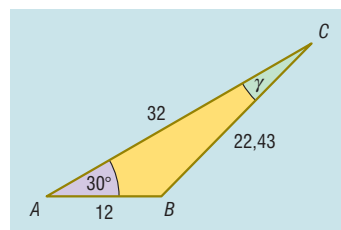
képlet alapján is számolhatjuk. Ez alapján a háromszögben az AC oldal hossza:

$$AC = \frac{2 \cdot 96}{12 \cdot \sin 30^\circ} = 32.$$

A BC oldal hossza a koszinusztétellel határozható meg:

$$BC = \sqrt{12^2 + 32^2 - 2 \cdot 12 \cdot 32 \cdot \cos 30^\circ} \approx 22,43.$$

A háromszög hiányzó két oldalának hossza 32 cm és 22,43 cm.





b) A háromszög C csúcsnál levő szögét a szinusztétellel számolhatjuk:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{22,43} \Rightarrow \sin \gamma = \sin 30^\circ \cdot \frac{12}{22,43} \Rightarrow \gamma \approx 15,52^\circ.$$

(A háromszögben a legkisebb oldallal szemben levő szöget számoltuk, γ csak hegyesszög lehet.)

A háromszög hiányzó két szöge $15,52^\circ$ és $134,48^\circ$.

3347 Ismeretes, hogy egy háromszög területét a $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ képlet alapján számolhatjuk. A területből

a két adott oldal által közbezárt γ szög szinuszára kapunk értéket:

$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot 30,64}{8 \cdot 10} = 0,766 \Rightarrow \gamma_1 \approx 50^\circ \text{ és } \gamma_2 \approx 130^\circ.$$

Tehát két háromszög is megfelel a feladat feltételeinek. Két oldal és a közbezárt szög segítségével a koszinusztétellel számíthatjuk a háromszög harmadik oldalát, majd a szinusztételt használva egy másik szögét.

a	b	c	α	β	γ
8 cm	10 cm	7,82 cm	$51,60^\circ$	$78,40^\circ$	50°
8 cm	10 cm	16,34 cm	$22,04^\circ$	$27,96^\circ$	130°

A megoldásokat a táblázat tartalmazza.

3348 A háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölésekkel: $a = 43$ cm, $b = 52$ cm és a kettő által bezárt szög: $\gamma = 38^\circ$.

A háromszög harmadik oldalának hosszát a koszinusztétellel számolhatjuk:

$$c = \sqrt{43^2 + 52^2 - 2 \cdot 43 \cdot 52 \cdot \cos 38^\circ} \approx 32,08 \text{ cm.}$$

A háromszög c oldalához tartozó súlyvonal hossza:

$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 43^2 + 2 \cdot 52^2 - 32,08^2}}{2} \approx 44,94 \text{ cm.}$$

3349 A háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölésekkel: $a = 16$ cm, $b = 8$ cm, valamint $s_c = 9$ cm.

a) A súlyvonal kiszámítására vonatkozó összefüggés alapján:

$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2},$$

amiből:

$$c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - (2 \cdot s_c)^2} = \sqrt{2 \cdot 16^2 + 2 \cdot 8^2 - (2 \cdot 9)^2} \approx 17,78 \text{ cm.}$$

A harmadik oldal hossza 17,78 cm.

b) Az s_c , b és $\frac{c}{2}$ oldalú háromszögben a b oldallal szemben levő szöget kell kiszámítani. Felírva a koszinusztételt:

$$b^2 = s_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2s_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos \delta,$$

amiből:

$$\cos \delta = \frac{s_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - b^2}{2s_c \cdot \frac{c}{2}} = \frac{9^2 + (8,89)^2 - 8^2}{2 \cdot 9 \cdot 8,89} \approx 0,6001 \Rightarrow \delta \approx 53,12^\circ.$$

A súlyvonal és a harmadik oldal hajlásszöge $53,12^\circ$.



- 3350** A mellékelt ábra szerint a kert az ABC háromszög, amelyben $BC = 12$, $AC = 20$ és $\angle ACB = 118^\circ$.

Az AB oldalt a koszinusztétellel számolhatjuk:

$$AB^2 = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos 118^\circ,$$

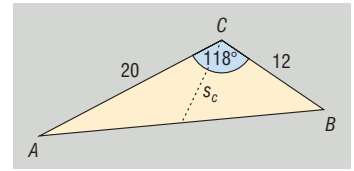
amiből $AB \approx 27,74$.

- a) A kertet $27,74 + 20 + 12 = 59,74$ m kerítéssel lehet körbekeríteni.
b) A kert területét a C csúcsból kiinduló súlyvonal felezi. Ennek hosszát az

$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

összefüggés alapján számolhatjuk: $s_c \approx 8,92$.

A kert területét felező út hossza $8,92$ m.



- 3351** A háromszög oldalainak hossza legyen $6x$, $7x$ és $10x$.

a) Írjuk fel a koszinusztételt:

$$(6x)^2 = (7x)^2 + (10x)^2 - 2 \cdot 7x \cdot 10x \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0,8071 \Rightarrow \alpha \approx 36,18^\circ$$

A szinusztétellel számolható a $7x$ hosszúságú oldallal szemközi β hegyesszög: $\beta \approx 43,53^\circ$.

A háromszög szögei:

$$36,18^\circ, 43,53^\circ \text{ és } 100,29^\circ$$

- b) Egy kör sugara, húrjának hossza és a húrhoz tartozó kerületi szög közötti összefüggés alapján számíthatók a háromszög oldalai:

$$a = 2R \cdot \sin \alpha \approx 41,32, \quad b = 2R \cdot \sin \beta \approx 48,21 \text{ és } c = 2R \cdot \sin \gamma \approx 68,87.$$

A háromszög oldalai:

$$41,32 \text{ cm}, 48,21 \text{ cm} \text{ és } 68,87 \text{ cm}.$$

- c) Legyen a háromszög beírt körének sugara r . A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = r \cdot \frac{a + b + c}{2} \Rightarrow r = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{a + b + c} \approx 12,37.$$

A beírt kör sugara $12,37$ cm.

- 3352** Az $ABCD$ trapéz AC átlója 40 cm.

a) A megadott szögeértékek alapján meghatározhatók az ABC háromszög szögei: 50° , 100° és 30° .

Írjuk fel az ABC háromszögben a szinusztételt az AB alap hosszának meghatározásához:

$$\frac{AB}{40} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB \approx 78,78.$$

Hasonlóan BC oldal hossza is kiszámítható: $BC \approx 61,28$.

Az ACD háromszögben ugyanígy eljárva: $DC \approx 20,31$ és $AD \approx 31,11$.

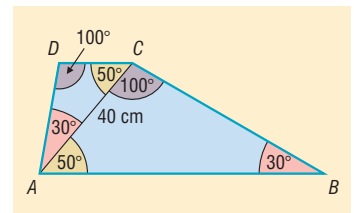
A trapéz oldalai rendre:

$$78,78 \text{ cm}, 61,28 \text{ cm}, 20,31 \text{ cm} \text{ és } 31,11 \text{ cm}.$$

- b) A BD átló meghatározásához használjuk az ABD háromszögben a koszinusztételt:

$$BD^2 = 78,78^2 + 31,11^2 - 2 \cdot 78,78 \cdot 31,11 \cdot \cos 80^\circ \Rightarrow BD \approx 79,52.$$

A trapéz másik átlója $79,52$ cm.





3353 Az ábra szerinti ABC háromszögben a szokásos jelölés mellett $\alpha = 34^\circ$, $c = 30$ és $s_c = 18$.

Az ADC háromszögben a szinusztétellel meghatározhatjuk az ACD szöget:

$$\frac{\sin ACD}{\sin 34^\circ} = \frac{15}{18},$$

amiből $ACD \approx 27,77^\circ$.

(A háromszögben nem a legnagyobb oldallal szemben levő szöget számoltuk, így ACD szög csak hegyesszög lehet.)

Újabb szinusztétel segítségével a háromszög b oldalának hossza 28,36.

Ezután az ABC háromszögben az oldal hosszát a koszinusztétellel számolhatjuk:

$$a^2 = 28,36^2 + 30^2 - 2 \cdot 28,36 \cdot 30 \cdot \cos 34^\circ \Rightarrow a \approx 17,13.$$

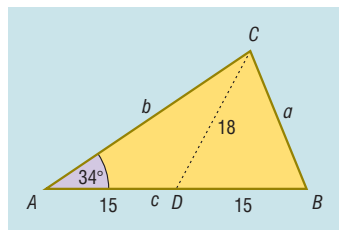
A háromszög β szögét az ABC háromszögben felírt szinusztétellel kaphatjuk meg: $\beta \approx 67,79^\circ$.

A háromszög oldalai tehát:

$$30 \text{ cm}, 17,13 \text{ cm} \text{ és } 28,36 \text{ cm},$$

a velük szemben lévő szögek pedig:

$$78,21^\circ, 34^\circ \text{ és } 67,79^\circ.$$



3354 A feltételek szerint a háromszögben

$$a^2 + b^2 = 296, \text{ valamint } \frac{ab \cdot \sin 30^\circ}{2} = 35.$$

Az a és b oldalak meghatározásához az

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 &= 296 \\ \frac{ab}{4} &= 35 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A másodikból kifejezve b -t, majd beírva az elsőbe, a következő másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet kapjuk:

$$a^4 - 296a^2 + 19600 = 0.$$

Ennek pozitív megoldásai: 10 és 14.

Az egyenletrendszert $a_1 = 10$, $b_1 = 14$, illetve $a_2 = 14$, $b_2 = 10$ értékek elégítik ki.

A háromszög harmadik oldalának hossza a koszinusztétellel számítva 7,32.

A 10 cm-es oldallal szemben levő szögre a szinusztétel alapján $43,08^\circ$ adódik.

A háromszög oldalainak hossza tehát:

$$10 \text{ cm}, 14 \text{ cm} \text{ és } 7,32 \text{ cm},$$

a velük szemben lévő szögek pedig rendre:

$$43,08^\circ, 106,92^\circ \text{ és } 30^\circ.$$

3355 A háromszögben a szokásos jelölések szerint legyen: $a^2 + b^2 = 244 \text{ dm}^2$, $c = 2 \cdot \sqrt{31} \text{ dm}$ és a háromszög területe: $T = 30 \cdot \sqrt{3} \text{ dm}^2$.

A háromszög területéből kiindulva:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} \Rightarrow a \cdot b = \frac{2 \cdot T}{\sin \gamma}.$$



A háromszög c oldalára felírjuk a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{2 \cdot T}{\sin \gamma} \cdot \cos \gamma,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{4 \cdot T}{\operatorname{tg} \gamma}. \quad (\cos \gamma \neq 0)$$

A feladat feltételeit figyelembe véve:

$$(2 \cdot \sqrt{31})^2 = 244 - \frac{4 \cdot 30 \cdot \sqrt{3}}{\operatorname{tg} \gamma} \Rightarrow \gamma = 60^\circ.$$

Innen a 3354. feladat gondolatmenetét követve a háromszög hiányzó oldalainak hossza és a velük szemben lévő szögek nagysága:

$$a = 10 \text{ dm}, b = 12 \text{ dm} \text{ és } \alpha = 51,05^\circ, \beta = 68,95^\circ.$$

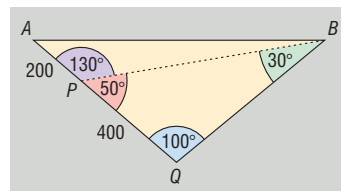
- 3356** A PBQ háromszög külső szöge 130° , ami egyenlő a nem mellette levő két belső szög összegével, ezért $PBQ\angle = 30^\circ$. Ebben a háromszögben a szinusztétel:

$$\frac{BQ}{400} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow BQ \approx 612,84.$$

Az AQB háromszögben a koszinusztétel:

$$AB^2 = 600^2 + 612,84^2 - 2 \cdot 600 \cdot 612,84 \cdot \cos 100^\circ \Rightarrow AB \approx 929,13.$$

Az A és B pontok távolsága 929,13 m.



- 3357** Jelölje az épület tetejét C , a lábát D pont, $AD = 24$, $AB = 28$.

a) Az ABC háromszög ACB szöge 16° . A szinusztétel alapján:

$$\frac{AC}{28} = \frac{\sin 19^\circ}{\sin 16^\circ} \Rightarrow AC \approx 33,07.$$

Az ADC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$CD^2 = 24^2 + 33,07^2 - 2 \cdot 24 \cdot 33,07 \cdot \cos 35^\circ,$$

amiből $CD \approx 19,22$.

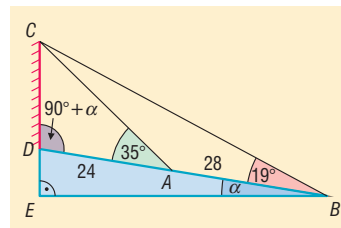
Az épület magassága tehát 19,22 m.

b) Az ADC háromszögben ADC tompaszög a szinusztétellel megadható: $ADC\angle = 99,29^\circ$.

Mivel ADC szög a DEB háromszög külső szöge, a lejtő α hajlásszögére igaz, hogy:

$$90^\circ + \alpha = 99,29^\circ \Rightarrow \alpha = 9,29^\circ.$$

A lejtő hajlásszöge $9,29^\circ$.



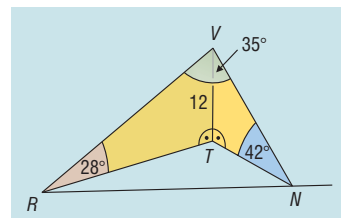
- 3358** A vadászlesen V pontban tartózkodunk, ennek a síkra vonatkozó merőleges vetülete T . A róka helyét jelölje R , a nyúl helyét N pont. $VT = 12$.

A VTR derékszögű háromszögből:

$$VR = \frac{12}{\sin 28^\circ},$$

a VTN derékszögű háromszögből:

$$VN = \frac{12}{\sin 42^\circ}.$$





Az RVN háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$RN^2 = \left(\frac{12}{\sin 28^\circ} \right)^2 + \left(\frac{12}{\sin 42^\circ} \right)^2 - 2 \cdot \frac{12}{\sin 28^\circ} \cdot \frac{12}{\sin 42^\circ} \cdot \cos 35^\circ \Rightarrow RN \approx 14,97.$$

A róka és a nyúl távolsága tehát 14,97 méter.

A nyúl a rekettyésig az 50 m távolságot

$$t = \frac{s}{v} = \frac{50}{8} \approx 6,25 \text{ másodperc},$$

míg a róka a rekettyésig az $50 + 14,96 = 64,96$ m távolságot

$$t = \frac{s}{v} = \frac{64,96}{10} \approx 6,5 \text{ másodperc}$$

alatt teszi meg.

A rókának hosszabb idő kell a távolság megtételéig, tehát a róka a rekettyésig nem éri utol a nyulat.

- 3359** Az ABC háromszög AB oldalához és a BCD háromszög DC oldalához tartozó magasságok egyenlő hosszúak, tehát a háromszögek területének arányából következik, hogy $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}$.

Legyen a trapéz AB alapja $5x$, DC alapja $3x$ hosszúságú. Mivel az ABD háromszög szabályos, a BDC háromszögben $BD = 5x$ és $\angle BDC = 60^\circ$. Ez utóbbi háromszögben két oldal és a közbezárt szög segítségével felírhatjuk a koszinusztételt:

$$BC^2 = (5x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3x \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow BC = \sqrt{19} \cdot x.$$

A szinusztétel segítségével számítható $\angle DBC$:

$$\frac{\sin \angle DBC}{\sin 60^\circ} = \frac{3x}{\sqrt{19} \cdot x} \Rightarrow \angle DBC \approx 36,59^\circ.$$

A trapéz szögei rendre: 60° , $96,59^\circ$, $83,41^\circ$ és 120° .

A trapéz oldalait a területe segítségével határozhatjuk meg. A trapéz magassága a szabályos háromszög magassága: $\frac{5x \cdot \sqrt{3}}{2}$.

$$1000 = \frac{(5x + 3x) \cdot \frac{5x \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{100}{\sqrt{3}}} \approx 7,60.$$

A trapéz alapjai 22,80 cm és 38,00 cm, a szárai 33,13 cm és 38,00 cm hosszúak.

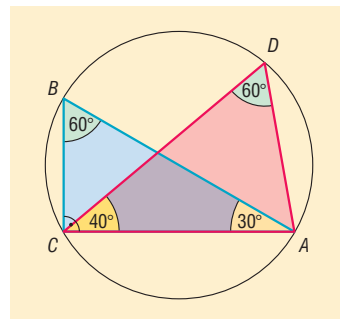
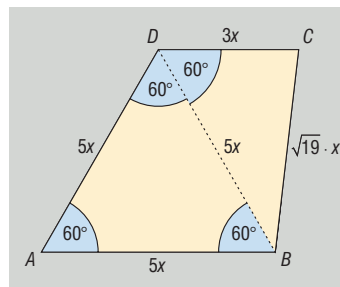
- 3360** a) Az ABC és ADC szögek ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek, tehát $\angle ADC = 60^\circ$.

Mivel $\angle BCD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, és a BCD és BAD szögek ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek, $\angle BAD = 50^\circ$.

Az ADC háromszög szögei: 40° , 80° és 60° .

- b) Az ABC háromszög egy fél szabályos háromszög, amelynek átfogója 20 cm, tehát hosszabb AC befogója:

$$\frac{20 \cdot \sqrt{3}}{2} = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17,32.$$





Az ADC háromszögben a szinusztétel:

$$\frac{DA}{10 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} \Rightarrow DA \approx 12,86.$$

Hasonlóan adódik, hogy $DC \approx 19,70$.

Az ADC háromszög oldalai: 17,32 cm, 12,86 cm és 19,70 cm.

3361 A virágágyások köreinek A , B és C középpontjait összekötő szakaszok hosszai a megfelelő körök sugarainak összege:

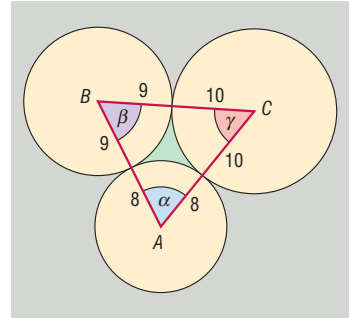
$$AB = 8 + 9 = 17, \quad BC = 9 + 10 = 19 \quad \text{és} \quad AC = 10 + 8 = 18.$$

Ennek a háromszögnek az α szögét meghatározhatjuk a koszinusztétellel:

$$19^2 = 17^2 + 18^2 - 2 \cdot 17 \cdot 18 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha \approx 65,68^\circ.$$

A szinusztétellel meghatározható a β szög:

$$\frac{\sin \beta}{\sin 65,68^\circ} = \frac{18}{19} \Rightarrow \beta \approx 59,69^\circ \Rightarrow \gamma \approx 54,63^\circ.$$



(β tompaszög nem lehet, mert nem a legnagyobb oldallal szemben van.)

A zöld színű területet kell kiszámítanunk. Ehhez határozzuk meg a háromszög és a három körcikk területét:

$$T_{ABC \text{ háromszög}} = \frac{17 \cdot 18 \cdot \sin 65,68^\circ}{2} \approx 139,42,$$

$$T_{\alpha \text{ körcikk}} = \frac{8^2 \cdot \pi \cdot 65,68^\circ}{360^\circ} \approx 36,66,$$

$$T_{\beta \text{ körcikk}} = \frac{9^2 \cdot \pi \cdot 59,69^\circ}{360^\circ} \approx 42,17,$$

$$T_{\gamma \text{ körcikk}} = \frac{10^2 \cdot \pi \cdot 54,63^\circ}{360^\circ} \approx 47,65.$$

Vonjuk ki a háromszög területéből a három körcikk területét:

$$T = T_{ABC \text{ háromszög}} - T_{\alpha \text{ körcikk}} - T_{\beta \text{ körcikk}} - T_{\gamma \text{ körcikk}} = 12,94.$$

12,94 m² területet bevetéséhez 12,94 · 8 = 103,52 kg fűmag kell.

Tehát a terület füvesítéséhez megközelítőleg 1035 g fűmag szükséges.

3362 Az $ABCD$ húrnégyszet oldalainak hossza $AB = 40$, $BC = 52$, $CD = 68$ és $AD = 60$.

A húrnégyszögek tétele alapján:

$$\text{ha } \angle ABC = \beta \Rightarrow \angle CDA = 180^\circ - \beta.$$

Írjuk fel a koszinusztételt az ABC , illetve ACD háromszögekben:

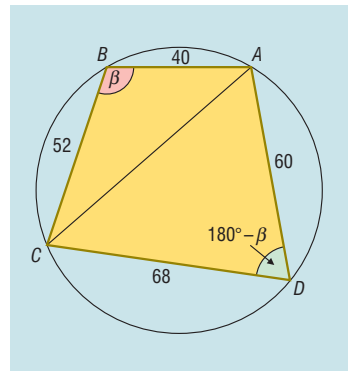
$$AC^2 = 40^2 + 52^2 - 2 \cdot 40 \cdot 52 \cdot \cos \beta,$$

$$AC^2 = 68^2 + 60^2 - 2 \cdot 68 \cdot 60 \cdot \cos(180^\circ - \beta).$$

A műveleteket elvégezve:

$$AC^2 = 4304 - 4160 \cdot \cos \beta,$$

$$AC^2 = 8224 - 8160 \cdot \cos(180^\circ - \beta).$$





A két egyenlet bal oldalának egyenlőségéből:

$$4304 - 4160 \cdot \cos \beta = 8224 - 8160 \cdot \cos(180^\circ - \beta).$$

Mivel $\cos \beta = -\cos(180^\circ - \beta)$:

$$\cos \beta = \frac{4304 - 8224}{4160 + 8160} \Rightarrow \beta \approx 108,55^\circ.$$

Hasonlóan felírva az ABD , illetve BCD háromszögekben a koszinusztételt, azt kapjuk, hogy a négyszög C csúcsánál levő szöge $79,67^\circ$.

Mivel egy húrnégyszög szemben levő szögeinek összege 180° , az $ABCD$ négyszög szögei rendre:

$$100,33^\circ, 108,55^\circ, 79,67^\circ, 71,45^\circ.$$

3363 A koszinusztétel alapján:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{és} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ezt beírva a

$$\cos \beta + \cos \gamma = \frac{b+c}{a}$$

összefüggésbe, majd ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b+c}{a},$$

$$b \cdot (a^2 + c^2 - b^2) + c \cdot (a^2 + b^2 - c^2) = 2bc \cdot (b+c),$$

$$ba^2 + bc^2 - b^3 + ca^2 + cb^2 - c^3 = 2bc \cdot (b+c),$$

$$a^2 \cdot (b+c) + bc \cdot (b+c) - (b^3 + c^3) = 2bc \cdot (b+c),$$

$$a^2 \cdot (b+c) - (b+c) \cdot (b^2 - bc + c^2) = bc \cdot (b+c).$$

Ez utóbbi egyenletet $b+c \neq 0$ -val osztva, majd rendezve, $a^2 = b^2 + c^2$ alakhoz jutunk.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű, és az „ a ” oldal a háromszög átfogója.

Összegési képletek – megoldások

3364 Alkalmazzuk az addíciós tételeket:

a) $-\sin \alpha, -\cos \alpha;$

b) $\cos \alpha, -\sin \alpha;$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha;$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha, -\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha;$

e) $\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha.$



3365 Alkalmazzuk az addíciós tételeket:

$$a) \sin 36^\circ \cdot \cos 24^\circ + \cos 36^\circ \cdot \sin 24^\circ = \sin(36^\circ + 24^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$b) \sin 96^\circ \cdot \cos 36^\circ - \cos 96^\circ \cdot \sin 36^\circ = \sin(96^\circ - 36^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$c) \cos 125^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 125^\circ \cdot \sin 25^\circ = \cos(125^\circ + 25^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$d) \cos 104^\circ \cdot \cos 44^\circ + \sin 104^\circ \cdot \sin 44^\circ = \cos(104^\circ - 44^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

3366 Alkalmazzuk az addíciós tételeket:

$$a) \cos(150^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha) - \sin(30^\circ + \alpha) - \sin(120^\circ - \alpha) = -\sin \alpha - \sqrt{3} \cdot \cos \alpha;$$

$$b) \sin(45^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha) + \sin(60^\circ + \alpha) = 0;$$

$$c) \sin^2(\beta + \alpha) - \sin^2(\beta - \alpha) = 4 \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta;$$

$$\cos^2(\beta + \alpha) - \cos^2(\beta - \alpha) = -4 \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha = -2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta = -\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta;$$

$$d) -1.$$

3367 Az összegzési képleteket használjuk α és $\alpha + \beta$ szögekre:

$$a) \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha = \cos((\alpha + \beta) - \alpha) = \cos \beta.$$

A b), c) és d) részeknél hasonlóan járhatunk el.

3368 $a) \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4};$

$$b) \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$$

$$c) \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, \quad \cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4};$$

$$d) \sin 165^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \cos 165^\circ = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4};$$

$$e) \sin 345^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \quad \cos 345^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

3369 Alkalmazzuk a $\sin \alpha \pm \sin \beta$, illetve $\cos \alpha \pm \cos \beta$ szorzattá alakítására vonatkozó azonosságokat:

$$a) \sin 105^\circ - \sin 15^\circ = 2 \cdot \cos \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \sin \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$b) \sin 105^\circ + \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$c) \cos 105^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$d) \cos 105^\circ + \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



3370 $\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 10^\circ = \frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 40^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\sin(40^\circ + 10^\circ)}{\cos 40^\circ} = \frac{\sin 50^\circ}{\cos 40^\circ} = 1.$

3371 Mivel a háromszög két szögének a számtani közepe a harmadik szögével egyenlő, a szögeit jelölhetjük így: $\alpha - \varphi$, α , $\alpha + \varphi$.

A feladat feltétele szerint:

$$\sin(\alpha - \varphi) + \sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi) = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}.$$

A háromszög belső szögeinek összege 180° , tehát $\alpha = 60^\circ$:

$$\sin 60^\circ \cdot \cos \varphi - \cos 60^\circ \cdot \sin \varphi + \sin 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos \varphi + \cos 60^\circ \cdot \sin \varphi = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2},$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A φ szög hegyesszög, tehát $\varphi = 45^\circ$.

A háromszög szögei: 15° , 60° és 105° .

3372 A merőleges vetületek hossza nem változik, ha az egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk. A mellékelt ábrát tekintve az egyenes haladjon át az ABC háromszög A csúcsán, és az AB oldallal zárjon be α szöget.

A vetületek nagysága:

$$AB' = 10 \cdot \cos \alpha,$$

$$C'B' = 10 \cdot \cos(60^\circ - \alpha),$$

$$AC' = 10 \cdot \cos(60^\circ + \alpha).$$

Ezek négyzetösszege:

$$AB'^2 + B'C'^2 + C'A^2 = 10^2 \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2(60^\circ - \alpha) + \cos^2(60^\circ + \alpha)).$$

Használva az addíciós tételt:

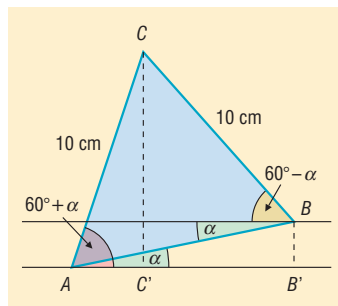
$$\cos^2(60^\circ - \alpha) = \left(\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{3}{4} \cdot \sin^2 \alpha,$$

$$\cos^2(60^\circ + \alpha) = \left(\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \cos^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{3}{4} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Tehát:

$$AB'^2 + B'C'^2 + C'A^2 = 10^2 \cdot \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{3}{2} \cdot \sin^2 \alpha \right) = \frac{300}{2} \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{300}{2}.$$

A vetületek négyzetösszege α szögtől függetlenül $\frac{300}{2} = 150 \text{ cm}^2$.



3373 Alakítsuk át az addíciós tétel segítségével a $\sin x + \cos x$ kifejezést:

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$



Mivel a $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ minimális értéke -1 , maximális értéke 1 :

$$-\sqrt{2} \leq f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}.$$

Az $f(x)$ függvény minimuma $-\sqrt{2}$, maximuma $\sqrt{2}$.

Minimális értékét azokon a helyeken veszi fel, ahol

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Maximális értékét azokon a helyeken veszi fel, ahol

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

3374 Ha egy derékszögű háromszög átfogója 20 cm és egyik hegyesszöge α , akkor a befogói $20 \cdot \sin \alpha$ és $20 \cdot \cos \alpha$. A háromszög kerülete:

$$k = 20 + 20 \cdot \sin \alpha + 20 \cdot \cos \alpha = 20 \cdot (1 + \sin \alpha + \cos \alpha).$$

A 3373. feladat alapján a terület maximális értéke: $20 \cdot (1 + \sqrt{2})$.

Ezt a maximális értéket akkor veszi fel, ha $\alpha = 45^\circ$, vagyis ha a háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

3375 Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos x \right).$$

Mivel $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ és $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ négyzetösszege 1 , létezik olyan φ szög, hogy:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi \quad \text{és} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi.$$

Az addíciós tétel alapján:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi).$$

Mivel a szinuszfüggvény minimális értéke -1 , maximális értéke 1 , az $f(x)$ függvény minimuma $-\sqrt{a^2 + b^2}$, maximuma $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Minimális értékét ott veszi fel, ahol $\sin(x + \varphi) = -1$, maximális értékét pedig ott, ahol $\sin(x + \varphi) = 1$.

3376 Mivel $a^2 + b^2 = 1$, létezik olyan x szög, hogy $a = \sin x$ és $b = \cos x$. Elég tehát a $\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x$ kifejezés szélsőértékeit keresni.

A 3373. feladat alapján:

$$\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = \sin x \cdot (\sin x + \cos x) = \sin x \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Két szög szinuszának szorzatát összeggé alakítva:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4} + x\right) \right] = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$



Mivel a $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ minimális értéke -1 , maximális értéke pedig 1 :

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Az $a^2 + ab$ kifejezés minimuma $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$, maximuma $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

A kifejezés a maximális értékét ott veszi fel, ahol

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor

$$a = \sin\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right), \quad b = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right).$$

Az a és b pontos értékének megadásához használjuk fel a $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ összefüggést:

$$\cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Ha k páros, akkor $\frac{3\pi}{8} + k\pi$ első negyedbeli szög:

$$b = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

valamint:

$$a = \sin\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right) = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Ha k páratlan, akkor $\frac{3\pi}{8} + k\pi$ harmadik negyedbeli szög:

$$b = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

valamint:

$$a = \sin\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Az $a^2 + ab$ kifejezés maximumát a következő értékek esetén veszi fel:

$$a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{és} \quad b = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad \text{vagy} \quad a = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{és} \quad b = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

A kifejezés minimális értékét ott veszi fel, ahol

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{vagyis} \quad x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor:

$$a = \sin\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi\right), \quad b = \cos\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi\right).$$

Az előzőhöz hasonló módon:

$$\cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$



Ha k páros, akkor $-\frac{\pi}{8} + k\pi$ negyedik negyedbeli szög:

$$b = \cos\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2},$$

valamint:

$$a = \sin\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi\right) = -\sqrt{1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}.$$

Ha k páratlan, akkor $-\frac{\pi}{8} + k\pi$ második negyedbeli szög:

$$b = \cos\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2},$$

valamint:

$$a = \sin\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}.$$

Az $a^2 + ab$ kifejezés minimumát a következő értékek esetén veszi fel:

$$a = -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \text{ és } b = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \quad \text{vagy} \quad a = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \text{ és } b = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}.$$

3377 Mivel háromszögről van szó:

$$\sin \alpha = \sin((180^\circ - (\beta + \gamma)) = \sin(\beta + \gamma).$$

A $2 \cdot \cos \gamma = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ egyenlőséget ennek figyelembevételével a következőképpen alakíthatjuk át:

$$2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma = \sin(\beta + \gamma).$$

Alkalmazva az addíciós tételeket:

$$2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma = \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \beta \cdot \sin \gamma,$$

$$\sin \beta \cdot \cos \gamma - \cos \beta \cdot \sin \gamma = 0,$$

$$\sin(\beta - \gamma) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\beta - \gamma = k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Mivel β és γ háromszög szögei, ezért $k = 0$, ami azt jelenti, hogy $\gamma = \beta$. Tehát a háromszög egyenlő szárú.

3378 Két szög szinuszának és koszinuszának összegét alakítsuk szorzattá:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{és} \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ez alapján a feladatban szereplő egyenlőség a következőképpen alakítható át:

$$2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 0.$$

Ez utóbbi szorzat kétféleképpen lehet 0.

I. Ha $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Háromszögről lévén szó, ez egyetlen k értékre sem teljesülhet.

II. Ha $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Mivel $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$, $k = 0$, vagyis $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tehát a háromszög harmadik szöge 90° , vagyis derékszögű a háromszög.



Az összegzési képletek alkalmazásai – megoldások

3379 A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggések alapján:

$$a) 2 \cdot \sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x = 2 \cdot \sin^2 x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x;$$

$$b) 2 \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = 2 \cdot \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin 2x;$$

$$c) \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = 2 \cdot \operatorname{ctg} x;$$

$$d) \frac{\cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2 \cdot \cos^2 x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{2 \cdot \cos^2 x} = \\ = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x};$$

$$e) \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x \cdot \sin x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x \cdot \sin x}} = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x}.$$

$$f) \operatorname{ctg} x - \sin 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{\cos x \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 x)}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ = \operatorname{ctg} x \cdot \cos 2x;$$

$$g) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x};$$

$$h) 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 2 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = \sin 4x;$$

$$i) \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \sin^2 x}{2}} = |\sin x|;$$

$$j) \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos^2 x}{2}} = |\cos x|;$$

$$k) \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{2 \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \\ = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x};$$

$$l) 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x\right) = \\ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 1 + \sin 2x;$$



$$\begin{aligned}
 m) \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \sin x\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \frac{1}{2} \cdot \sin x\right) = \frac{3 \cdot \cos^2 x - \sin^2 x}{4} = \\
 &= \frac{3 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x}{4 \cdot \sin x} = \frac{2 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x}{4 \cdot \sin x} = \\
 &= \frac{\cos x \cdot (2 \cdot \sin x \cdot \cos x) + \sin x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)}{4 \cdot \sin x} = \frac{\cos x \cdot \sin 2x + \sin x \cdot \cos 2x}{4 \cdot \sin x} = \frac{\sin 3x}{4 \cdot \sin x}.
 \end{aligned}$$

3380 A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggések alapján:

$$a) \frac{\sin 2x}{2 \cdot \cos x} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{2 \cdot \cos x} = \sin x;$$

$$b) 2 \cdot \sin^2 x + \cos 2x = 2 \cdot \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$c) \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x + \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x;$$

$$d) \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x;$$

$$e) \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos 2x} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 1;$$

$$f) \text{ Mivel } \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right), \text{ a kifejezés egyszerűbb alakja:}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin 2x = -\sin 2x;$$

$$g) \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\sin^2 2x} = \frac{\sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)}{4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{4};$$

$$h) \frac{\sin 3x + \sin x}{2 \cdot \cos x \cdot \sin 2x} = \frac{2 \cdot \sin \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2}}{2 \cdot \cos x \cdot \sin 2x} = \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x}{2 \cdot \cos x \cdot \sin 2x} = 1;$$

$$i) \frac{\cos 3x - \cos x}{2 \cdot \sin x \cdot \sin 2x} = \frac{-2 \cdot \sin \frac{3x+x}{2} \cdot \sin \frac{3x-x}{2}}{2 \cdot \sin x \cdot \sin 2x} = \frac{-2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x}{2 \cdot \sin x \cdot \sin 2x} = -1.$$

3381 Az addíciós tételeket használva:

$$a) \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3};$$

$$b) \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{ctg} 15^\circ = 2 + \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 75^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$



3382 Az addíciós tételeket használva:

$$a) \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 1}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}\right)^2 = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x};$$

$$b) \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x) \cdot (\cos x - \sin x)} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x};$$

$$c) \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} x} - \frac{1}{1 - \operatorname{ctg} x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} - \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1} = \frac{-2 \cdot \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x + 1) \cdot (\operatorname{tg} x - 1)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} 2x;$$

$$d) \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = 2 \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cdot \operatorname{ctg} x;$$

$$e) \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1.$$

3383 Az addíciós tételeket használva:

$$a) \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}\right)^2}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}\right)^2} = \frac{1 - \left(\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right)^2}{1 + \left(\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right)^2} = \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^2 - (1 - \operatorname{tg} x)^2}{(1 + \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \operatorname{tg} x)^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot \operatorname{tg} x}{2 + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sin 2x;$$



$$\begin{aligned}
 b) \quad & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{2}{\cos 2x} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} - \frac{2}{\cos 2x} = \\
 & = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} - \frac{2}{\cos 2x} = \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \operatorname{tg} x)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \frac{2}{\cos 2x} = \\
 & = \frac{2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \frac{2}{\cos 2x} = -\frac{2 \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} - \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad & \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \\
 & = \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \\
 & = \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) \cdot \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)} = 1.
 \end{aligned}$$

3384 A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggések alapján:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \sin^4 \frac{13\pi}{12} - \cos^4 \frac{23\pi}{12} = \left(-\sin \frac{\pi}{12}\right)^4 - \left(\cos \frac{\pi}{12}\right)^4 = \\
 & = \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12}\right) \cdot \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12}\right) = \\
 & = -\cos 2 \cdot \frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{2 \cdot \sin 20^\circ} \cdot (2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ) \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \\
 & = \frac{1}{2 \cdot \sin 20^\circ} \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{4 \cdot \sin 20^\circ} \cdot (2 \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ) \cdot \cos 80^\circ = \\
 & = \frac{1}{4 \cdot \sin 20^\circ} \cdot \sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8 \cdot \sin 20^\circ} \cdot \sin 160^\circ = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

3385 A két adott kifejezést átírhatjuk:

$$A = \log_2 0,5^{\sin x} = \log_2 2^{-\sin x} = -\sin x,$$

$$B = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|.$$

a) $-1 \leq -\sin x \leq 1$, tehát A minimális értéke -1 , maximális értéke 1 .

b) $0 \leq |\cos x| \leq 1$, tehát B minimális értéke 0 , maximális értéke 1 .



c) $A + B = -\sin x + |\cos x|$ lehet:

$$A + B = -\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) = -\sqrt{2} \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \quad \text{ha } \cos x \geq 0,$$

$$A + B = -\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) = -\sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right), \quad \text{ha } \cos x < 0.$$

Mivel a szinuszfüggvény minimális értéke -1 , maximális értéke 1 , mindkét esetben $A + B$ minimális értéke $-\sqrt{2}$, maximális értéke $\sqrt{2}$.

d) $A \cdot B = -\sin x \cdot |\cos x|$ lehet:

$$A \cdot B = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{2} \cdot \sin 2x, \quad \text{ha } \cos x \geq 0,$$

$$A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x, \quad \text{ha } \cos x < 0.$$

Mivel a szinuszfüggvény minimális értéke -1 , maximális értéke 1 , mindkét esetben $A \cdot B$ minimális értéke $-\frac{1}{2}$, maximális értéke $\frac{1}{2}$.

3386 A kétszeres szögek szinuszára vonatkozó összefüggés alapján tekintsük a következő egyenlőségeket:

$$\sin 12^\circ \cdot \cos 12^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 24^\circ, \quad \sin 24^\circ \cdot \cos 24^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 48^\circ,$$

$$\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 72^\circ, \quad \sin 48^\circ \cdot \cos 48^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 96^\circ,$$

$$\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 120^\circ, \quad \sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 144^\circ,$$

$$\sin 84^\circ \cdot \cos 84^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 168^\circ.$$

Szorozzuk össze az egyenlőségek bal oldalait, illetve jobb oldalait, majd használjuk ki, hogy $\sin 96^\circ = \sin 84^\circ$, $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, $\sin 144^\circ = \sin 36^\circ$ és $\sin 168^\circ = \sin 12^\circ$. Ezek után éppen a bizonyítandó egyenlőséghez jutunk.

3387 a) Az addíciós tételeket használva:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

b) Az addíciós tételeket használva:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - 20^\circ) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + 20^\circ) = \\ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} = \\ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} = \sqrt{3} \cdot \frac{3 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg}^3 20^\circ}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 20^\circ}. \end{aligned}$$

Ez utóbbi kifejezés az a) rész alapján:

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}(3 \cdot 20^\circ) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$



- 3388** Legyen a háromszög 6,4 cm-es oldalával szemben levő szög α . A feladat feltétele szerint a 9,3 cm-es oldallal szemben levő szög 2α . Írjuk fel a háromszögben a szinusztételt:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{9,3}{6,4} \Rightarrow \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{9,3}{6,4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{9,3}{12,8} \Rightarrow \alpha \approx 43,40^\circ \Rightarrow 2\alpha = 86,80^\circ.$$

A harmadik, ismeretlen x hosszúságú oldallal szemben levő szög:

$$180^\circ - 43,40^\circ - 86,80^\circ = 49,80^\circ.$$

Felírva a szinusztételt:

$$\frac{x}{6,4} = \frac{\sin 49,8^\circ}{\sin 43,4^\circ} \Rightarrow x \approx 7,11.$$

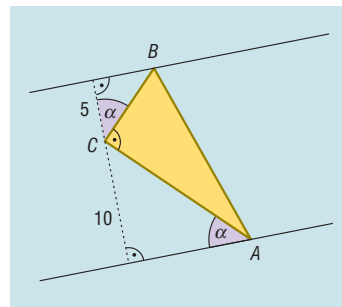
A háromszög oldalainak hossza 6,4 cm, 9,3 cm és 7,11 cm, a velük szemben levő szögek rendre $43,40^\circ$, $86,80^\circ$ és $49,80^\circ$.

- 3389** Az ábrán α -val jelölt szögek merőleges szárú hegyesszögek.

Az ABC derékszögű háromszög BC befogója $\frac{5}{\cos \alpha}$, az AC befogója $\frac{10}{\sin \alpha}$.

A háromszög területe:

$$T = \frac{\frac{5}{\cos \alpha} \cdot \frac{10}{\sin \alpha}}{2} = \frac{50}{2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{50}{\sin 2\alpha}.$$



Ez a pozitív előjelű kifejezés akkor minimális, ha $\sin 2\alpha$ maximális, vagyis 1. Mivel α csak hegyesszög lehet, ez csak $2\alpha = 90^\circ$ esetén teljesül, azaz ha $\alpha = 45^\circ$.

A háromszög területe akkor minimális, ha befogóinak hossza:

$$BC = \frac{5}{\cos 45^\circ} = 5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm, illetve } AC = \frac{10}{\cos 45^\circ} = 10 \cdot \sqrt{2} \text{ cm.}$$

Az átfogója Pitagorasz tétele alapján $5 \cdot \sqrt{10}$ cm.

- 3390** A bizonyítandó egyenlőség bal oldalán álló törtet bővítsük $\sin(\alpha + \beta)$ -val:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

A két szög szinuszának szorzatát összeggé alakítva:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (\cos[(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)] - \cos[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)])}{\sin^2(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (\cos 2\beta - \cos 2\alpha)}{\sin^2(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

A kétszeres szög koszinuszára vonatkozó összefüggés ($\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha$ és $\cos 2\beta = 1 - 2 \cdot \sin^2 \beta$) alapján:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (\cos 2\beta - \cos 2\alpha)}{\sin^2(\alpha + \beta)} = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$



Mivel háromszögről van szó:

$$\sin \gamma = \sin((180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta),$$

így:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma}.$$

A szinusz-tétel alapján:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

A bal oldalból kiindulva ekvivalens átalakítások során a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalához jutottunk, tehát bármely háromszögben igaz, hogy

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

3391 a) Alakítsuk át az $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}}$ kifejezést a szinusz-tétel segítségével, majd használjuk ki, hogy mindkét oldal pozitív, a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}},$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}},$$

$$\sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \sin^2 \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} - \sin^2 \beta \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0,$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \cos \beta) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség mivel $\sin \alpha$, illetve $\sin \beta$ nem lehet nulla, csak akkor teljesülhet, ha

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos \beta,$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta.$$

Mivel háromszögről van szó, a 2α , illetve 2β szög szinusza csak abban a két esetben lehet egyenlő, ha

$$2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta, \quad \text{vagy} \quad 2\alpha = 180^\circ - 2\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ.$$

A háromszög tehát vagy egyenlő szárú, vagy derékszögű.

b) A háromszögben:

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin((180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta) = \sin 2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \end{aligned}$$

Az ismert összefüggés alapján:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$



Tehát a $\sin \gamma = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ egyenlőséget a következő alakba írhatjuk:

$$2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}},$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \left(2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 1 \right) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesülhet, ha:

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = 0 \quad \text{vagy} \quad 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = 1.$$

Az első esetben azt kapjuk, hogy $\alpha + \beta = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ez egyetlen háromszög esetén sem teljesülhet.

A második esetben:

$$\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\left| \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből:

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{vagy} \quad \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Innen:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{vagy} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mivel háromszögről van szó, csak az első eset jöhet szóba, ekkor $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Tehát a kérdéses háromszög derékszögű.

c) Alakítsuk szorzattá a $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$ összeget:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Mivel α , β és γ háromszög szögei, az ismert trigonometrikus összefüggések alapján írjuk át $\cos 2\gamma$ -t:

$$\cos 2\gamma = \cos 2 \cdot (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \cos 2 \cdot (\alpha + \beta) = \cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha + \beta).$$

Az eredeti egyenlet jobb oldalán szereplő $-1 = -\cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha + \beta)$.

Ezek alapján az eredeti $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$ egyenlet a következőképpen alakul:

$$2 \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha + \beta) = -\cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha + \beta),$$

$$2 \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + 2 \cdot \cos^2(\alpha + \beta) = 0,$$

$$2 \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) = 0.$$

A $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ összeget szorzattá alakítva:

$$2 \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0,$$

$$2 \cdot \cos \gamma \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha vagy $\cos \gamma$, vagy $\cos \alpha$, vagy $\cos \beta$ nulla értéket vesz fel.

Mivel α és β háromszög szögei, ez csak akkor teljesülhet, ha a háromszög valamelyik szöge 90° , tehát a háromszög derékszögű.



Trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek – megoldások

3392 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x_1 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 \approx 1,18 + 2k\pi, x_2 \approx \pi - 1,18 + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z});$

d) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

e) $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

f) $x \approx \pm 1,00 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

g) $x \approx \pm 2,50 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

h) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

i) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

j) $x \approx 1,50 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

k) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

l) $x \approx 0,75 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

3393 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, x_2 = \frac{17\pi}{12} + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, x_2 = \frac{7\pi}{12} + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z});$

d) $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

e) $x = \frac{\pi}{4} + 3k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

f) $x = \frac{1}{2} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

g) $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

h) $x = \frac{7\pi}{60} + \frac{1}{5} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

3394 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cdot k\pi, x_2 = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \cdot l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, x_2 = 3l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z}),$ ami felírható $x = \frac{3}{2} k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ alakban.

d) $x_1 = \frac{5\pi}{12} + k\pi, x_2 = \frac{\pi}{12} + l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z});$

e) $x_1 = 2k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z});$

f) $x_1 = \frac{1}{2} \cdot k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z}).$



3395 Az egyenletek megoldásai:

$$a) x_1 = 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z});$$

$$b) x_1 = -\frac{7\pi}{12} - 2k\pi, x_2 = \frac{11\pi}{36} + \frac{2}{3} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z});$$

$$c) x_1 = -\frac{4}{7} \cdot k\pi, x_2 = \frac{4}{9} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z});$$

$$d) x_1 = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z});$$

$$e) x = \frac{1}{4} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$$

$$f) x = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3396 a) Használjuk ki, hogy a szinuszfüggvény páratlan:

$$x_1 = -\frac{\pi}{21} + \frac{2}{7} \cdot k\pi, x_2 = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Használjuk ki, hogy $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot k\pi, x_2 = \frac{\pi}{4} - 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}), \text{ ami felírható } x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ alakban.}$$

c) Használjuk ki, hogy $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-x)$, és hogy a szinuszfüggvény páratlan:

$$x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot k\pi, x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

d) Használjuk ki, hogy $\cos(x + \pi) = -\cos x$. A megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{32} + \frac{1}{4} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

e) A megoldások:

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{6} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

f) Használjuk ki, hogy $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. A megoldások:

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3397 Hozzuk $\operatorname{tg} x = c$ alakra az egyenleteket.

$$a) x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$$

$$b) x \approx -0,32 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$$

$$c) x \approx 0,30 + \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$$

$$d) x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



3398 Használjuk ki, hogy $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, valamint azt, hogy a szinuszfüggvény páratlan.

a) $x = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$

b) $x_1 = \frac{19\pi}{72} - \frac{1}{3} \cdot k\pi, x_2 = \frac{13\pi}{24} + l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z});$

3399 Másodfokú egyenletre visszavezethetők a trigonometrikus egyenletek.

a) A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$\sin x = -6$, ami nem lehet.

A megoldások közül a $[0; 2\pi]$ intervallumba az $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$ gyökök esnek.

b) A megoldóképlet alapján:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$\cos x = 3$, ami nem lehet.

A megoldások közül a $[0; 2\pi]$ intervallumba az $x_1 = \frac{2\pi}{3}, x_2 = \frac{4\pi}{3}$ gyökök esnek.

c) A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$\sin x = -\sqrt{3}$, ami nem lehet.

A megoldások közül a $[0; 2\pi]$ intervallumba az $x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}$ gyökök esnek.

d) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A megoldóképlet alapján:

$$\operatorname{tg} x = 3 \Leftrightarrow x_1 \approx 1,25 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások közül a $[0; 2\pi]$ intervallumba az $x_1 \approx 1,25, x_2 \approx 1,25 + \pi, x_3 = \frac{\pi}{4}, x_4 = \frac{5\pi}{4}$ gyökök esnek.

3400 A feladatokban használjuk a trigonometrikus összefüggéseket.

a) Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet ilyen alakba is írható: $\sin^2 x + 2 \cdot \sin x - 3 = 0$.

A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$\sin x = -3$, ami nem lehet.

b) Mivel $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, az egyenlet ilyen alakba is írható: $2 \cdot \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

A megoldóképlet alapján:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x_2 = \pi + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$



- c) A tangensfüggvény értelmezési tartományából $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Mivel $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, valamint $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet ilyen alakra is hozható: $\sin^2 x + 2 \cdot \sin x - 1 = 0$.

A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x_1 \approx 0,43 + 2k\pi, x_2 \approx \pi - 0,43 + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$$\sin x = -1 - \sqrt{2} < 1, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldás beletartozik a tangensfüggvény értelmezési tartományába.

- d) Az egyenlet alaphalmaz: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ekvivalens átalakítások után az egyenlet a következő alakra hozható: $2 \cdot \cos^2 x = 1$.

Innen a megoldás:

$$|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A megoldás az értelmezési tartománynak megfelel.

- e) A tangensfüggvény értelmezési tartományából $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ekvivalens átalakítások után az egyenlet $6 \cdot \cos^2 x + \sqrt{3} \cdot \cos x - 6 = 0$ alakra hozható.

Innen a megoldás:

$$\cos x = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} < -1, \text{ ami nem lehet, vagy}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezek a megoldások a az értelmezési tartománynak nem mondanak ellent.

- f) Az egyenlet alaphalmaz: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$ ($k \in \mathbb{Z}$) Ekvivalens átalakítások után az egyenlet a következő alakra hozható: $\operatorname{tg}^2 x - 2 \cdot \operatorname{tg} x - 1 = 0$.

Innen a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$\operatorname{tg} x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x_1 \approx 1,18 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x_2 \approx -0,39 + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

- g) Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\cos^2 x$ -szel (a $\cos x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, mert $\sin x$ és $\cos x$ egyszerre nem lehet 0):

$$2 \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 1 = 0,$$

$$2 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 3 \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 \approx 0,46 + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$



h) A g) rész gondolatmenete alapján:

$$2 \cdot \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 \approx -0,46 + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

3401 a) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Ekvivalens átalakítások

után a $\sin x \cdot (2 \cdot \cos x - \sqrt{3}) = 0$ egyenletet kapjuk. Innen:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x_1 = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

b) Az egyenletet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon oldjuk meg. Átalakítások után a következő alakhoz jutunk: $\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ahonnan az $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ megoldásokhoz jutunk.

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

c) Egy tört akkor nulla, ha:

$$\text{a számlálójá } 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -2 \Leftrightarrow x \approx -1,11 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Bontsuk fel az abszolút értéket, és osszuk el $\cos x$ -szel ($\cos x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, mert $\sin x$ és $\cos x$ egyszerre nem vehet fel 0 értéket).

Ha $\cos x > 0$, akkor az egyenlet $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ alakba írható. Ennek megoldása $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$,

de $\cos x > 0$ miatt csak az első negyedbeli szög megoldás: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\cos x < 0$, akkor az egyenlet $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ alakba írható. Ennek megoldása $x = \frac{5\pi}{6} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$,

de $\cos x < 0$ miatt csak a második negyedbeli szög megoldás: $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$.

3402 a) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, \quad (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Átszorozás után:

$$\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1,$$

$$\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesülhet, ha

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 \approx 0,46 + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

Az egyenlet pozitív megoldásai: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$ és $x_2 \approx 0,46 + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$.



- b) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Redukáljuk nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá:

$$\begin{aligned}\sin x - \cos x + 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 2 &= 0, \\ (\sin x - \cos x) + 2 \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} &= 0, \\ (\sin x - \cos x) \cdot \left(1 + \frac{2}{\cos x} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőség csak akkor teljesül, ha a szorzótényezők valamelyike 0.

Ha az első tényező 0:

$$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A második tényező akkor 0, ha $\cos x$ értéke -2 , ez nem lehet.

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

Az egyenlet pozitív megoldásai: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$.

3403 Vizsgáljuk az adott egyenletek jobb és bal oldalának értékkészletét.

- a) Az egyenletnek nincs megoldása, mivel a bal oldal csak 8-nál kisebb értéket vehet fel.
b) A bal oldal értéke legalább 1, mivel:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2\sin^2 x \leq 2.$$

A jobb oldal a koszinuszfüggvény értékkészlete miatt legfeljebb 1.

Így az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldal 1 értéket vesz fel, azaz ha:

$$\cos x = 1 \text{ és } 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0.$$

Az egyenlet megoldása: $x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

3404 a) Az addíciós tétel alapján az egyenlet a következő alakba írható:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x \right) = (1 + \sqrt{3}) \cdot \sin x, \quad \text{amiből} \quad \cos x = \sin x.$$

Az utóbbi egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- b) Használjuk az addíciós tételeket:

$$\begin{aligned}\sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) &= \sin 3x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos 3x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 3x, \\ \cos \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) &= \cos 3x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin 3x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 3x.\end{aligned}$$

Ezek alapján a megoldandó egyenlet:

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 3x + \frac{1}{2} \cdot \cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 3x = 0.$$

Mivel $\cos 3x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, az egyenletet $\operatorname{tg} 3x$ -re rendezve kapjuk, hogy:

$$\operatorname{tg} 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



- c) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A bal oldalon álló kifejezéseket írjuk át az addíciós tételek segítségével, majd végezzük el az összevonásokat:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot \cos x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \\ \sqrt{2} \cdot \cos^2 x &= \sin x, \\ \sqrt{2} \cdot \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} &= 0.\end{aligned}$$

Innen a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$\begin{aligned}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}), \text{ vagy} \\ \sin x &= -\sqrt{2}, \text{ ami nem lehet.}\end{aligned}$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

- d) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A bal oldalon álló kifejezéseket írjuk át az addíciós tételek segítségével, majd végezzük el az összevonásokat:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cdot \sin x &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}, \\ 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin^2 x &= \cos x, \\ 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos^2 x + \cos x - 2 \cdot \sqrt{3} &= 0.\end{aligned}$$

Innen a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$\begin{aligned}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy} \\ \sin x &= -\frac{2}{\sqrt{3}} < -1, \text{ ami nem lehet.}\end{aligned}$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

3405 Alkalmazzuk az $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ típusú egyenletek megoldási módszerét: osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{a^2 + b^2}$ -tel, majd használjunk addíciós tételt.

- a) Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$ -vel:

$$\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az addíciós tételt használva:

$$\sin x \cdot \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

amelynek megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z});$$

- b) A megoldások:

$$x_1 \approx -0,44 + 2k\pi, x_2 \approx 2,30 + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$



3406 Az egyenlet megoldási lépései:

$$\sin(\pi \cdot \cos x) = \cos(\pi \cdot \sin x),$$

$$\sin(\pi \cdot \cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin x\right).$$

I. eset:

$$\pi \cdot \cos x = \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos x + \sin x = \frac{1}{2} + 2k, \quad / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot k,$$

$$-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}k \leq 1.$$

⇓

Az egyenlőtlenségek csak $k = 0$ esetén teljesülnek:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$x_1 \approx \pm 1,21 + \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\pi \cdot \cos x = \pi - \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \sin x + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{2} + 2l, \quad / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot l,$$

$$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot l \leq 1.$$

⇓

Az egyenlőtlenségek csak $l = 0$ esetén teljesülnek:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$x_2 \approx \pm 1,21 - \frac{\pi}{4} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 \approx \pm 1,21 + \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{és} \quad x_2 \approx \pm 1,21 - \frac{\pi}{4} + 2m\pi \quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$



- 3407** a) Használjuk a kétszeres szögekre vonatkozó összefüggéseket, illetve a szögfüggvényekre érvényes pitagoraszai összefüggést:

$$\begin{aligned}\sin^2 x - \cos 2x &= 2 - \sin 2x, \\ 2 \cdot \sin^2 x - \cos^2 x &= 2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \\ 0 &= 3 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \\ 0 &= \cos x \cdot (3 \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x).\end{aligned}$$

Az egyenlet megoldásai:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 \approx 0,98 + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

- b) Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\cos^2 x$ -szel (megtehetjük, mert $\cos x = 0$ nem megoldása az egyenletnek).

A $\operatorname{tg}^2 x + (\sqrt{3} + 1) \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ egyenletet megoldva:

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{\pi}{4} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

- c) Az egyenlet jobb oldalán álló 2-t írjuk fel $2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x$ alakban, majd redukáljuk 0-ra az egyenletet. Így a b) részben alkalmazott módszert alkalmazva $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$ egyenlethez jutunk.

Az egyenlet megoldásai:

$$\operatorname{tg} x = -2 \Leftrightarrow x_1 \approx -1,11 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

- d) A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggés alapján az egyenlet:

$$12 \cdot \sin^4 x + 4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \cos^4 x.$$

A b) részben alkalmazott módszert alkalmazva: $12 \cdot \operatorname{tg}^4 x + 4 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$.

A másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet megoldva adódik, hogy:

$$\operatorname{tg}^2 x = -\frac{1}{2}, \text{ ami nem lehet, vagy}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x \approx \pm 0,39 + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldása: $x \approx \pm 0,39 + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$.

- e) Mivel

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2},$$

a $\sin^2 2x = 1$ egyenletet kell megoldanunk.

A megoldás:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



f) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\} (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\sin x + \cos x = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \cos x, \quad / : \sqrt{2}$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x.$$

Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

g) Az egyenlet mindkét oldalát 2-vel osztva, majd alkalmazva a $\sin(\alpha + \beta)$ -ra vonatkozó addíciós tételt:

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 4x = \sin 3x,$$

$$\sin \left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 3x.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha:

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{21} + \frac{2}{7} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

h) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\} (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A bal oldalt alakítva:

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

A jobb oldalt $16 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)$ alakba írva a megoldandó egyenlet:

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 16 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x),$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - 16 \right) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha:

$$\operatorname{tg}^2 x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_2 = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

i) Az egyenletet 2-vel osztva, majd használva a $\sin(\alpha - \beta)$ -ra vonatkozó addíciós tételt, a következő egyenlethez jutunk:

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 3x = 1.$$

Mivel a szinuszfüggvény 1-nél nagyobb értéket, illetve -1 -nél kisebb értéket nem vehet fel, ez utóbbi egyenlőség két esetben teljesül.



I. eset: $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ és $\sin 3x = 1$.

Az első összefüggésből:

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

a másodikból:

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \cdot l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Ezek alapján k és l egész számokra teljesülnie kell az alábbi egyenlőségnek:

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \cdot l\pi.$$

Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $l = 1 + 3k$, tehát az eredeti egyenletünk megoldása:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \cdot (1 + 3k) \cdot \pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

II. eset: $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ és $\sin 3x = -1$.

Az első összefüggésből:

$$x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

a másodikból:

$$3x = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Ezek alapján n és m egész számokra teljesülnie kell az alábbi egyenlőségnek:

$$-\frac{\pi}{6} + 2n\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot m\pi.$$

Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $m = 3n - 1$, tehát az eredeti egyenletünk megoldása:

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot (3n - 1) \cdot \pi = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad (k, n \in \mathbb{Z}), \text{ ami } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ alakban is írható.}$$

j) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\} \quad (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A nullától különböző valós szám és reciproka összegére ismert egyenlőtlenség miatt:

$$|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| = \left| \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right| \geq 2,$$

tehát az egyenlet jobb oldalának értékszelete $]-\infty; -10] \cup [10; \infty[$.

A szinuszfüggvény alapján az egyenlet bal oldalának értékszelete a $[-2; 2]$ intervallum.

Mivel a jobb és bal oldal értékszelet halmazának a metszete üres halmaz, az egyenletnek nincs megoldása.



3408 a) Alakítsuk szorzattá az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned}\sin 2x - \sin x &= 2 \cdot \cos \frac{2x+x}{2} \cdot \sin \frac{2x-x}{2} = 2 \cdot \cos \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}, \\ \cos 2x - \cos x &= -2 \cdot \sin \frac{2x+x}{2} \cdot \sin \frac{2x-x}{2} = -2 \cdot \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Az egyenletet nullára redukálva, majd szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\sin \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right) = 0.$$

Innen vagy $\sin \frac{x}{2} = 0$, vagy $\operatorname{tg} \frac{3x}{2} = -1$. Az egyenlet megoldásai a $[0; 2\pi]$ intervallumon:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{7\pi}{6}, \quad x_4 = \frac{11\pi}{6} \quad \text{és} \quad x_5 = 2\pi.$$

b) Alakítsunk alkalmasan szorzattá:

$$\begin{aligned}\cos x + \cos 3x &= 2 \cdot \cos \frac{x+3x}{2} \cdot \cos \frac{x-3x}{2} = 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos(-x) = 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x, \\ \cos 2x + \cos 4x &= 2 \cdot \cos \frac{2x+4x}{2} \cdot \cos \frac{2x-4x}{2} = 2 \cdot \cos 3x \cdot \cos(-x) = 2 \cdot \cos 3x \cdot \cos x.\end{aligned}$$

Ezeket felhasználva, az egyenletet nullára redukálva, majd szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$2 \cdot \cos x \cdot (\cos 2x + \cos 3x) = 0.$$

Újabb szorzattá alakítás után:

$$\begin{aligned}2 \cdot \cos x \cdot 2 \cdot \cos \frac{2x+3x}{2} \cdot \cos \frac{2x-3x}{2} &= 0, \\ 4 \cdot \cos x \cdot \cos \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} &= 0.\end{aligned}$$

Az egyenlet megoldásai a valós számok halmazán:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \cdot l\pi, \quad x_3 = \pi + 2m\pi \quad (k, l, m \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai a $[0; 2\pi]$ intervallumon:

$$x_1 = \frac{\pi}{5}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{5}, \quad x_4 = \pi, \quad x_5 = \frac{3\pi}{2}, \quad x_6 = \frac{7\pi}{5} \quad \text{és} \quad x_7 = \frac{9\pi}{5}.$$

3409 a) Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést átalakítva az $|\sin x| = 1 - \sin|x|$ egyenletet kell megoldanunk.

Mivel mind a bal, mind a jobb oldalon álló függvény páros, ha egy valós szám megoldása az egyenletnek, akkor az ellentettje is megoldás lesz.

Elég a megoldásokat $x \geq 0$ esetén keresnünk. Ekkor $|\sin x| = 1 - \sin x$.

Ha $\sin x \geq 0$, akkor az egyenlet:

$$2 \cdot \sin x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}).$$

Ha $\sin x < 0$, akkor ellentmondásra jutunk.

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \quad x_3 = -\frac{\pi}{6} - 2k\pi, \quad x_4 = -\frac{5\pi}{6} - 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}).$$



- b) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ ($k \in \mathbb{Z}$) alaphalmazon van értelmezve.
Bontsuk fel a jobb oldalon álló abszolútértéket tartalmazó kifejezést:

$$\left| x - \frac{\pi}{2} \right| - \left| x + \frac{\pi}{2} \right| = \begin{cases} \pi, & \text{ha } x < -\frac{\pi}{2}, \\ -2x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ -\pi, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x. \end{cases}$$

Ez alapján:

Ha $x < -\frac{\pi}{2}$, akkor

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}^-).$$

Ha $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{2}{\sqrt{3} \cdot \pi} \cdot x,$$

amelynek az adott intervallumon nem lehet megoldása, mert a jobb és bal oldal előjele különböző.

Ha $\frac{\pi}{2} \leq x$, akkor

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{\pi}{3} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}^+).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}^-) \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}^+).$$

Ezek a megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

- 3410** a) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ ($k \in \mathbb{Z}$) alaphalmazon van értelmezve. Ekvivalens átalakítások után:

$$\begin{aligned} 16^{\operatorname{tg}^2 x} - 4^{\operatorname{tg}^2 x + 1} &= 192, \\ (4^{\operatorname{tg}^2 x})^2 - 4 \cdot 4^{\operatorname{tg}^2 x} - 192 &= 0. \end{aligned}$$

A kapott másodfokúra visszavezethető egyenletet megoldva:

$$4^{\operatorname{tg}^2 x} = -12, \text{ ami nem lehet, vagy}$$

$$4^{\operatorname{tg}^2 x} = 16 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{2}, \text{ amiből } x \approx \pm 0,96 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Az $x \approx \pm 0,96 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

- b) A bal oldalon álló logaritmusos kifejezések akkor vannak értelmezve, ha $\sin x$ és $\cos x$ pozitív értéket vesz fel, és egyik sem 1. Az egyenlet megoldásait tehát az $\left] 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon kell keresnünk.

A logaritmusra vonatkozó azonosságok alapján:

$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2,$$

$$\frac{1}{\log_{\sin x} \cos x} + \log_{\sin x} \cos x = 2.$$



Ismert, hogy nullától különböző valós szám és reciproka összegének abszolút értéke nagyobb egyenlő mint 2, valamint az összeg csak abban az esetben lehet 2, ha a valós szám éppen 1.

Az egyenlet megoldását tehát a $\log_{\sin x} \cos x = 1$ egyenlet szolgáltatja.

Innen $\sin x = \cos x$ adódik, amelyet az alaphalmaz elemei közül csak az $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) valós számok elégítenek ki.

Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3411 Először adjuk meg azt az alaphalmazt, amelyen a megadott egyenlőség értelmezve van:

$$x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{illetve} \quad \frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \Rightarrow x \neq -l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Az addíciós tétel alapján az egyenlet bal oldala $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$, de ezt csak akkor írhatjuk fel, ha $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Ismert, hogy $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, tehát az adott egyenlet a következő alakba is írható:

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \Rightarrow x \approx 0,32 + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Ha $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$), akkor ez megoldása az egyenletnek, mivel a bal oldal:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

és a jobb oldal:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - n\pi\right) - 1 = -1.$$

Az egyenlet megoldásai az alaphalmazon:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x_2 \approx 0,32 + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

3412 A másodfokúra visszavezethető egyenlet diszkriminánsa:

$$D = 4 \cdot (p+1)^2 - 16p = 4 \cdot p^2 - 8p + 4 = 4 \cdot (p-1)^2.$$

A megoldóképletet használva:

$$\sin x_{1,2} = \frac{2 \cdot (p+1) \pm 2 \cdot |p-1|}{2} = \frac{2 \cdot (p+1) \pm 2 \cdot (p-1)}{2},$$

ahonnan

$$\sin x = 2, \text{ ami egyetlen } x\text{-re sem teljesülhet,} \quad \text{vagy} \\ \sin x = 2p.$$

Figyelembe véve, hogy

$$-1 \leq \sin x = 2p \leq 1,$$

az egyenletnek akkor lesz megoldása, ha:

$$-\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{1}{2}.$$



3413 Az adott intervallumon az $x = 0$ helyen az egyenlet nincs értelmezve.

Mivel

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x + 2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x &= \operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x = \\ &= \operatorname{tg}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2, \end{aligned}$$

az egyenlet $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ -re nézve másodfokú. Legyen $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = a$.

Az egyenlet a következő alakba írható:

$$a^2 - 4ma + 3m^2 = 0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = 16m^2 - 12m^2 = 4m^2 \quad \Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{4m \pm 2|m|}{2} = \frac{4m \pm 2m}{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3m, \quad a_2 = m.$$

Ez alapján $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = m$ és $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 3m$ egyenletek megoldásainak számát kell vizsgálnunk

m függvényében a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon.

A $\operatorname{tg} x$ függvény kölcsönösen egyértelmű a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, és értékkészlete a valós számok halmaza.

Ezeket figyelembe véve az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény grafikonja alapján a következő megállapításokat tehetjük.

Az adott intervallumon a $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$ egyenletnek

két megoldása van, ha $|m| > 2$,

egy megoldása van, ha $|m| = 2$,

nincs megoldása, ha $|m| < 2$.

Az adott intervallumon a $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3m$ egyenletnek

két megoldása van, ha $|3m| > 2 \Leftrightarrow |m| > \frac{2}{3}$,

egy megoldása van, ha $|3m| = 2 \Leftrightarrow |m| = \frac{2}{3}$,

nincs megoldása, ha $|3m| < 2 \Leftrightarrow |m| < \frac{2}{3}$.

Tehát az egyenletnek

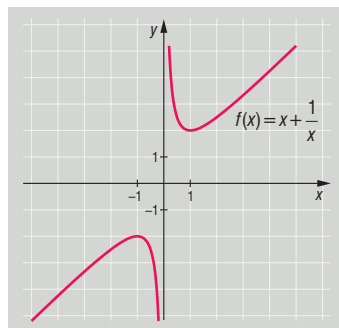
nincs megoldása, ha $|m| < \frac{2}{3}$,

egy megoldása van, ha $|m| = \frac{2}{3}$,

két megoldása van, ha $\frac{2}{3} < |m| < 2$,

három megoldása van, ha $|m| = 2$,

négy megoldása van, ha $|m| > 2$.





3414 a) Az első egyenletből y -t kifejezve, majd beírva a másodikba:

$$\sin x = \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x.$$

Mivel a $\cos x \neq 0$, ezért $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Ez alapján az egyenletrendszer megoldásai:

$$\left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} - k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Az első egyenletből $\sin x = -\cos y$, ezt beírva a második egyenletbe kapjuk, hogy:

$$\cos y \cdot \sin y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt visszaírva az első összefüggésbe, ha

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + 2l\pi, \quad \text{akkor} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{vagy} \quad x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2m\pi,$$

$$y_2 = \frac{5\pi}{4} + 2l\pi, \quad \text{akkor} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_3 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{vagy} \quad x_4 = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi.$$

Az egyenletrendszer megoldásai a valós számok halmazán a következő számpárok $(l, m, n \in \mathbb{Z})$:

$$\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi; \frac{\pi}{4} + 2l\pi\right), \quad \left(\frac{7\pi}{4} + 2m\pi; \frac{\pi}{4} + 2l\pi\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \frac{5\pi}{4} + 2l\pi\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4} + 2m\pi; \frac{5\pi}{4} + 2l\pi\right).$$

c) Kihasználva, hogy az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű:

$$\left. \begin{aligned} \cos 2x + \cos 2y &= 0 \\ 2 \cdot \cos x \cdot \cos y &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

Az első egyenlet bal oldalát alakítsunk szorzattá:

$$\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = 0.$$

A második egyenlet bal oldalát alakítsuk összeggé:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 1.$$

Az első egyenlet bal oldalán lévő szorzat két esetben lehet 0.

I. eset:

$$\cos(x+y) = 0 \Leftrightarrow x+y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$0 + \cos(x-y) = 1 \Rightarrow x-y = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Így az egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} x+y &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x-y &= 2n\pi \end{aligned} \right\}.$$

Innen:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{k}{2} + n\right) \cdot \pi, \quad y_1 = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{k}{2} - n\right) \cdot \pi.$$



II. eset:

$$\cos(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y = \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$\cos(x + y) + 0 = 1 \Rightarrow x + y = 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Így az egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} x - y &= \frac{\pi}{2} + l\pi \\ x + y &= 2m\pi \end{aligned} \right\}$$

Innen:

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{l}{2} + m\right) \cdot \pi, \quad y_2 = -\frac{\pi}{4} - \left(\frac{l}{2} - m\right) \cdot \pi.$$

A feladat megoldásai $(k, l, m, n \in \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{k}{2} + n\right) \cdot \pi, & y_1 &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{k}{2} - n\right) \cdot \pi, \\ x_2 &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{l}{2} + m\right) \cdot \pi, & y_2 &= -\frac{\pi}{4} - \left(\frac{l}{2} - m\right) \cdot \pi. \end{aligned}$$

- 3415** a) Az x -re másodfokúnak tekinthető egyenletnek csak akkor van valós megoldása, ha diszkriminánsa nem negatív:

$$D = 4 \cdot \sin^2 xy - 4 = 4 \cdot (\sin^2 xy - 1) \geq 0.$$

Mivel $\sin^2 xy$ legfeljebb 1 értéket vehet fel, a diszkrimináns pozitív nem lehet.

Tehát, hogy legyen megoldás, a diszkriminánsnak 0-nak kell lennie. Ebben az esetben $\sin xy = 1$ vagy $\sin xy = -1$.

Ha $\sin xy = 1$, akkor az egyenlet megoldása:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow \sin xy = \sin(-y) = 1 \Leftrightarrow y = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ha $\sin xy = -1$, akkor az egyenlet megoldása:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \sin xy = \sin y = -1 \Leftrightarrow y = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai az $\left(1; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ és $\left(-1; \frac{3\pi}{2} + 2l\pi\right)$ számpárok, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.

- b) Ismert, hogy egy 0-tól különböző valós szám és reciproka összegének abszolút értéke legalább 2. Az összeg 2 értéket csak akkor vesz fel, ha a valós szám 1, illetve -2 értéket akkor, ha a valós szám -1 .

Figyelembe véve a koszinuszfüggvény értékkészletét, $\cos y$ értéke 1 vagy -1 lehet.

Ha $\cos y = 1$, akkor

$$y = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x = 1.$$

Ha $\cos y = -1$, akkor

$$y = \pi + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x = -1.$$

Az egyenlet megoldásai az $(1; 2k\pi)$ vagy $(-1; \pi + 2l\pi)$ számpárok, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.



3416 A körcikkhez tartozó kör középpontja legyen O , az AB húrt a C pont ossza két részre úgy, hogy $AC:CB = 1:2$.

Mivel az AOB háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárszöge 120° , $OAB\hat{=} OBA\hat{=} 30^\circ$.

Legyen $AOC\hat{=} \alpha$, ekkor $BOC\hat{=} 120^\circ - \alpha$.

Írjuk fel az AOC , illetve BOC háromszögekben a szinusztételt:

$$\frac{AC}{CO} = \frac{\sin \alpha}{\sin 30^\circ}, \quad \text{illetve} \quad \frac{CB}{CO} = \frac{\sin(120^\circ - \alpha)}{\sin 30^\circ}.$$

A két egyenletet egymással elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin(120^\circ - \alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sin(120^\circ - \alpha)} \Leftrightarrow 2 \sin \alpha = \sin(120^\circ - \alpha).$$

Az addíciós tételt használva:

$$2 \sin \alpha = \sin 120^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 120^\circ \cdot \sin \alpha,$$

$$2 \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha,$$

$$\frac{3}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha.$$

Mivel $\cos \alpha = 0$ nem megoldása az egyenletnek:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Az egyenlőség megoldása a 120° -nál kisebb pozitív szögeket tekintve: $\alpha = 30^\circ$.

A két részsög nagysága 30° és 90° .

3417 A focista tartózkodik a P pontban, és a pálya AB oldala legyen 105 m, az AD oldala 68 m hosszú.

Jelölje az ABP szöget α . Ekkor a P -nél lévő szögek nagyságát figyelembe véve:

$$PAD\hat{=} \alpha \quad \text{és} \quad PDA\hat{=} 30^\circ - \alpha.$$

Az ABP derékszögű háromszögben:

$$\frac{PA}{105} = \sin \alpha,$$

amiből

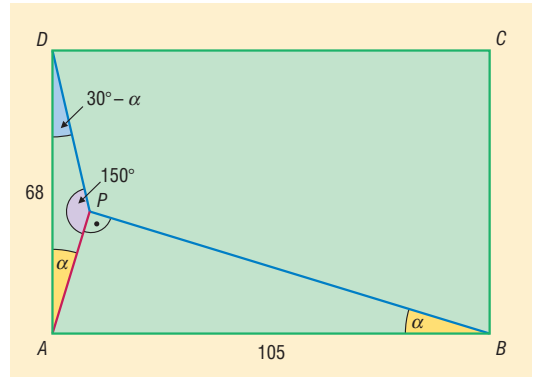
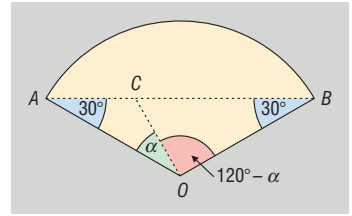
$$PA = 105 \cdot \sin \alpha.$$

Az APD háromszögben felírva a szinusztételt:

$$\frac{PA}{68} = \frac{\sin(30^\circ - \alpha)}{\sin 150^\circ}.$$

Behelyettesítve az ismert értékeket:

$$\frac{PA}{68} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2}} \Rightarrow PA = 68 \cdot \cos \alpha - 68 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin \alpha.$$





A két összefüggésből a következő trigonometrikus egyenlethez jutunk:

$$105 \cdot \sin \alpha = 68 \cdot \cos \alpha - 68 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin \alpha.$$

Ezt megoldva:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{68}{105 + 68 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \approx 16,97^\circ.$$

Az APD háromszög A csúcsánál lévő szög $16,97^\circ$, a D csúcsnál lévő szög $30^\circ - 16,97^\circ = 13,03^\circ$, ezért $PA < PD$, tehát a PA távolságot kell meghatároznunk.

A focistának a P ponttól az A csúcsig $105 \cdot \sin 16,97^\circ \approx 30,6$ m távolságot kell megtennie.

Trigonometrikus egyenlőtlenségek – megoldások

3418 a) $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

b) $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

c) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

d) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

e) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

f) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

g) $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

h) $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

i) $\frac{3\pi}{4} + k\pi \leq x < \pi + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3419 a) $-\frac{3\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

b) $\frac{7\pi}{3} + 4k\pi \leq x \leq 5\pi + 4k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

c) $\frac{7\pi}{36} + \frac{1}{3} \cdot k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cdot k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

d) $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

e) $\frac{7\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\}$ ($k \in \mathbb{Z}$);

g) $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

h) Az egyenlőtlenség $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ alakba írható. Megoldása: $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3420 a) Az egyenlőtlenséget azok a valós x számok elégítik ki, amelyekre $\operatorname{tg} x > 1$ vagy $\operatorname{tg} x < -1$. Az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{vagy} \quad \frac{\pi}{2} + l\pi < x < \frac{3\pi}{4} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

b) Az egyenlőtlenség minden valós számra igaz, mert $\frac{\pi}{3} > 1$.

c) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ ($k \in \mathbb{Z}$) alaphalmazon van értelmezve.

Legyen $\operatorname{tg} x = a$, és ekkor az $a^2 + a - 2 > 0$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Ennek megoldásai: $a < -2$ vagy $a > 1$.



Az eredeti egyenlőtlenséget azok az x valós számok elégítik ki, amelyekre $\operatorname{tg} x < -2$ vagy $\operatorname{tg} x > 1$.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -1,11 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{vagy} \quad \frac{\pi}{4} + l\pi < x < \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

- d) A c) részhez hasonló gondolatmenet alapján az egyenlőtlenséget azok a valós x számok elégítik ki, amelyre $-2 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$.

A bal oldali egyenlőtlenséget minden valós szám kielégíti, a jobb oldali és egyben a teljes egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- e) Felhasználva, hogy $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, a következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$2 \cdot \cos^2 x - \cos x - 1 < 0.$$

Ebből a $-\frac{1}{2} < \cos x < 1$ feltételt kapjuk $\cos x$ -re.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x \neq 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

- 3421** a) A logaritmus után álló kifejezés csak pozitív értéket vehet fel, tehát a $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

Megoldás:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- b) A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt a $\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

Megoldás:

$$k\pi < x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- c) A logaritmusfüggvény értelmezési tartományából adódóan $\sin x > 0$.

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $\lg(\sin x) \geq 0$, amiből a tízes alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt $\sin x \geq 1$.

Elég tehát a $\sin x \geq 1$ egyenlőtlenséget megoldanunk.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- d) A $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$ kifejezés értelmezési tartománya $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\} \quad (k \in \mathbb{Z})$

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos x} \geq 1.$$



Ez utóbbi egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha:

$$0 < \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2l\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A kifejezés értelmezési tartománya:

$$-\frac{\pi}{2} + 2m\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad x \neq 2k\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

3422 a) Alakítsuk szorzattá a bal oldalt:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x,$$

$$\cos 2x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Használjuk a $\sin 2x$ -re vonatkozó azonosságot, majd nullára redukálás után alakítsuk szorzattá az egyenlőtlenség bal oldalát:

$$\sin x \cdot (2 \cdot \cos x - 1) < 0.$$

A szorzat negatív értéket vesz fel, ha a tényezők különböző előjelűek.

I. eset:

$$\sin x > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$2 \cdot \cos x - 1 < 0 \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2l\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\sin x < 0 \Leftrightarrow -\pi + 2k\pi < x < 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$2 \cdot \cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2l\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$-\frac{\pi}{3} + 2m\pi < x < 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Összefoglalva az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{vagy} \quad -\frac{\pi}{3} + 2m\pi < x < 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

c) Az egyenlőtlenség mindkét oldalát osszuk el $\sqrt{2}$ -vel, redukáljuk 0-ra, és alkalmazzuk a két szög különbségének szinuszára vonatkozó addíciós képletet.

Így a megoldandó egyenlet:

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) < 0.$$

A megoldás:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



d) A bal oldalon levő tört akkor van értelmezve, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$.

Az egyenlőtlenség bal oldala átalakítható az addíciós tételek segítségével:

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} > 0.$$

A tört pozitív értéket vesz fel, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

I. eset:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2l\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{5\pi}{4} + 2l\pi < x < \frac{9\pi}{4} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$\frac{5\pi}{4} + 2m\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Összefoglalva az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + p\pi < x < \frac{3\pi}{4} + p\pi \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

3423 a) Kétszeres szögekre vonatkozó összefüggés alapján:

$$4 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \sin 2x.$$

A logaritmusfüggvény értelmezési tartományából adódóan:

$$2 \cdot \sin 2x + 1 > 0 \Rightarrow \sin 2x > -\frac{1}{2}.$$

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $\log_2(2 \cdot \sin 2x + 1) \geq 0$, amiből a kettes alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt:

$$2 \cdot \sin 2x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \sin 2x \geq 0.$$

Elég tehát az értelmezési tartomány meghatározásához a $\sin 2x \geq 0$ egyenlőtlenséget megoldani.

A kifejezés értelmezési tartománya:

$$l\pi < x < \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$



b) A logaritmus után álló kifejezés csak pozitív értéket vehet fel:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x + 1 &> 0, \\ \sin x + \cos x &> -1.\end{aligned}$$

Osszuk le az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\sqrt{2}$ -vel, majd használjuk a $\sin(\alpha + \beta)$ -ra vonatkozó addíciós összefüggést:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3424 Az egyenlet másodfokú, ha $\sin 2p \neq 0$, vagyis $p \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Egy másodfokú egyenletnek akkor van két különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív:

$$\begin{aligned}D &= (4 \cdot \cos p)^2 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 2p = 16 \cdot (\cos^2 p - \sqrt{3} \cdot \sin p \cdot \cos p) = \\ &= 32 \cdot \cos p \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos p - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin p\right) = 32 \cdot \cos p \cdot \cos\left(p + \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 16 \cdot \left[\cos\left(2p + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \frac{\pi}{3}\right] = 16 \cdot \left[\cos\left(2p + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

Ez alapján a $\cos\left(2p + \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk, amely pontosan akkor teljesül, ha:

$$\begin{aligned}-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi &< 2p + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \\ -\pi + 2k\pi &< 2p < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ -\frac{\pi}{2} + k\pi &< p < \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Az egyenletnek két különböző valós megoldása van, ha:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < p < \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{és} \quad p \neq l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3425 a) Írjuk fel $\cos \alpha$ -t $1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ alakban.

A $\cos \beta + \cos \gamma$ összeget alakítsuk szorzattá, és vegyük figyelembe, hogy $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$:

$$\begin{aligned}\cos \beta + \cos \gamma &= 2 \cdot \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \\ &= 2 \cdot \cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}.\end{aligned}$$

Ezek alapján:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Mivel $\cos \frac{\beta - \gamma}{2}$ maximális értéke 1:

$$1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \leq 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2} - 2 \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)^2.$$



Egy valós szám négyzete nem lehet negatív, vagyis:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha:

$$\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 1 \quad \text{és} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mivel α, β és γ háromszög szögei, ez csak akkor lehet, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, vagyis ha a háromszög szabályos.

b) Mivel α, β és γ háromszög szögei, $\cos \alpha, \cos \beta$ és $\cos \gamma$ pozitív valós számok.

Írjuk fel a számtani és mértani közép közti összefüggést erre a három számra, és használjuk fel az a) részben bizonyított egyenlőtlenséget:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \right)^3 \leq \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha:

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma \quad \text{és} \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{3}{2}.$$

Ezen feltételek csak szabályos háromszög esetén teljesülnek.

Vegyes feladatok – megoldások

3426 a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) -1 .

- 3427 a) A két vektor merőleges egymásra.
b) A két vektor 30° -os szöget zár be.
c) A két vektor 120° -os szöget zár be.

3428 A paralelogramma oldalainak hossza 9,54 cm és 13,45 cm.

- 3429 a) A háromszög tompaszögű.
b) A háromszög tompaszögű.

3430 A háromszög másik két oldala 10,78 cm és 12,26 cm.

3431 A kert harmadik oldala a koszinusztétellel számítható:

$$c^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos 76,41^\circ \Rightarrow c = 22.$$

A kert kerülete: $15 + 20 + 22 = 57$ m.

A bekerítéshez $57 \cdot 1,85 = 105,45$ m² dróthálóra van szükség.

3432 A háromszög szögei: $149,15^\circ$, $11,19^\circ$ és $19,66^\circ$.

3433 A háromszög hiányzó oldalainak hossza $4 \cdot \sqrt{21} \approx 18,33$ cm, $5 \cdot \sqrt{21} \approx 22,91$ cm, a velük szemben levő szögek rendre $49,11^\circ$ és $70,89^\circ$.

3434 a) Az egyenletet redukáljuk nullára, majd alakítsunk szorzattá. A megoldások:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$



- b) Az egyenlet alaphalmazza minden olyan valós szám, amelyre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
Szorzattá alakítás után a megoldások:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

- c) Használjuk fel, hogy $\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$. A megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \cdot k\pi, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} - 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3435 a) $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2l\pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); b) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3436 a) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

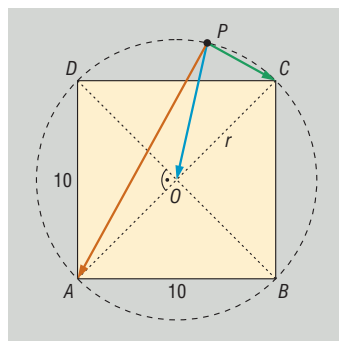
b) Az értelmezési tartomány az üres halmaz.

c) $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- 3437 a) Az $ABCD$ négyzet körülírható körének r sugara az átló hosszának fele, $5 \cdot \sqrt{2}$ egység. A kör középpontja a négyzet átlóinak O metszéspontja.

Ismert, hogy egy szakasz felezőpontjába mutató vektor a végpontokba mutató vektorok számtani közepe, tehát:

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) = \\ &= 4 \cdot \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}}{2} = 4 \cdot \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PO} = \\ &= 4r^2 = 4 \cdot (5 \cdot \sqrt{2})^2 = 200. \end{aligned}$$



- b) Mivel a négyzet átlói merőlegesek egymásra, vektoraik skaláris szorzata 0:

$$(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) \cdot (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PD}) = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$$

- 3438 a) Ha egy 7 egység hosszú vektor merőleges az $\vec{a}(-3; 4)$ vektorra, akkor x, y koordinátáira fennáll a következő két összefüggés:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 49 \\ -3x + 4y &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai, és így az $\vec{a}(-3; 4)$ vektorra merőleges 7 egység hosszú vektor koordinátái:

$$\left(\frac{28}{5}; \frac{21}{5}\right) \quad \text{vagy} \quad \left(-\frac{28}{5}; -\frac{21}{5}\right).$$

- b) Az előző részben leírt gondolatmenet alapján az $\vec{a}(-5; 12)$ vektorra merőleges 7 egység hosszú vektor koordinátái lehetnek:

$$\left(\frac{84}{13}; \frac{35}{13}\right) \quad \text{vagy} \quad \left(-\frac{84}{13}; -\frac{35}{13}\right).$$



3439 Ha $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, akkor $\operatorname{ctg} x = \frac{4}{3}$, $|\sin x| = \frac{3}{5}$ és $|\cos x| = \frac{4}{5}$.

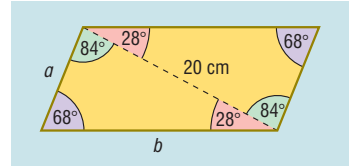
a) Mivel $\operatorname{tg} x$ értéke pozitív, az x szög az első vagy a harmadik negyedben lehet. Ezekben a negyedekben $\sin x$ és $\cos x$ előjele azonos, tehát:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{12}{25}.$$

b) A kifejezés értéke:

$$\frac{1}{\sin^2 x + \operatorname{ctg} x} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{4}{3}} = \frac{75}{127}.$$

3440 A paralelogramma másik két szöge 112° , és ezeket a szögeket az átló egy 28° -os és egy 84° -os szögre osztja. Így ez az átló a paralelogrammát két olyan háromszögre bontja, amelynek szögei 68° , 28° és 84° . A háromszög 68° -os szöggel szemben levő oldala 20 cm hosszú, a háromszög másik két oldala pedig a paralelogramma két oldala.



A szinusztétellel kiszámítható a háromszög hiányzó két oldalának hossza:

$$\begin{aligned} \frac{a}{20} &= \frac{\sin 28^\circ}{\sin 68^\circ} \Rightarrow a = 20 \cdot \frac{\sin 28^\circ}{\sin 68^\circ} \Rightarrow a \approx 10,13, \\ \frac{b}{20} &= \frac{\sin 84^\circ}{\sin 68^\circ} \Rightarrow b = 20 \cdot \frac{\sin 84^\circ}{\sin 68^\circ} \Rightarrow b \approx 21,45. \end{aligned}$$

A paralelogramma oldalainak hossza 10,13 cm és 21,45 cm.

3441 A feladatban szereplő terítő legyen az ABC háromszög. Egy háromszög területét egy csúcsából kiindulva pontosan a súlyvonal felezi. Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $c = 18$ cm, a másik két oldalhoz tartozó súlyvonal hossza $s_a = 15$ cm és $s_b = 21$ cm.

Ismert a háromszög súlyvonalára vonatkozó $s_a = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}$ és $s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$ összefüggés.

Az ismert adatokat beírva, és az egyenletrendszert megoldva: $a \approx 28,77$ és $b \approx 23,24$.

A terítő másik két oldalának hossza 28,77 cm és 23,24 cm hosszú.

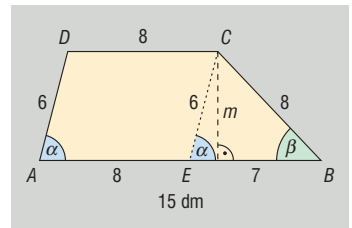
3442 Vegyük fel az $ABCD$ trapéz hosszabbik AB alapján az E pontot úgy, hogy az $AECD$ négyszög paralelogramma legyen. Ekkor $EB = 15 - 8 = 7$ dm, $BC = 8$ dm és $EC = 6$ dm.

Az EBC háromszögben ismerjük három oldal hosszát, így a koszinusztétellel kiszámíthatjuk β szögét:

$$6^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos \beta \Rightarrow \beta \approx 46,57^\circ.$$

Az EBC háromszög E csúcsánál levő α szögét a szinusztétellel határozhatjuk meg:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 46,57^\circ} = \frac{8}{6} \Rightarrow \alpha \approx 75,53^\circ.$$



$(180^\circ - 75,53^\circ = 104,47^\circ)$ nem lehet, mert ekkor a háromszög harmadik szöge $28,96^\circ$ lenne, ami nem tesz annak eleget, hogy egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.)



- a) A trapéz szögei: $46,57^\circ$, $75,53^\circ$, $104,47^\circ$ és $133,43^\circ$.
 b) A trapéz magassága az EBC háromszög EB oldalához tartozó magassága:

$$m = 8 \cdot \sin 46,57^\circ \approx 5,81 \text{ dm.}$$

A trapéz területe:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(15 + 8) \cdot 5,81}{2} = 66,82 \text{ dm}^2.$$

- 3443** Az ABC háromszög $AB = 24 + 36 = 60$ cm hosszú oldalát a belső szögfelező a D pontban metszi. Ismeretes, hogy egy háromszög belső szögfelezője a szemben lévő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. A háromszög AC oldalának hossza legyen $3x$, a BC oldalának hossza $2x$.

Az ABC háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$60^2 = (3x)^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2x \cdot \cos 78^\circ \Rightarrow x \approx 18,51.$$

- a) A háromszög oldalainak hossza: $AC = 55,53$ cm és $BC = 37,02$ cm.
 b) A háromszög α szögét a szinusztétellel számolhatjuk ki:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 78^\circ} = \frac{37,02}{60} \Rightarrow \alpha \approx 37,12^\circ.$$

(Az α biztosan hegyesszög, mert nem a leghosszabb oldallal szemben lévő szög.)

A háromszög szögei: $37,12^\circ$, $64,88^\circ$ és 78° .

- c) Legyen a háromszög beírt körének sugara r . A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = r \cdot \frac{a + b + c}{2} \Rightarrow r = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{a + b + c} \approx 13,18.$$

A háromszög beírt körének sugara $13,18$ cm.

- d) Legyen a háromszög köré írt körének sugara R . Egy kör sugara, húrjának hossza és a húrhoz tartozó kerületi szög közötti $c = 2R \cdot \sin \gamma$ összefüggés alapján:

$$R = \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma} \approx 30,67.$$

A háromszög köré írt körének sugara $30,67$ cm.

- 3444** A hegycsúcs helyét az M , annak merőleges vetületét a T pont jelöli. A kikötők az A és B pontban vannak.

Az ATM derékszögű háromszögből:

$$AM = \frac{400}{\sin 8^\circ 14'},$$

a BTM derékszögű háromszögből:

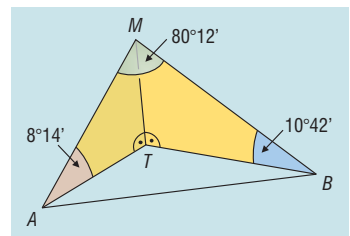
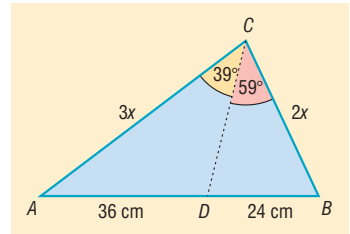
$$BM = \frac{400}{\sin 10^\circ 42'}.$$

Az ABM háromszögre felírva a koszinusztételt:

$$AB^2 = \left(\frac{400}{\sin 8^\circ 14'} \right)^2 + \left(\frac{400}{\sin 10^\circ 42'} \right)^2 - 2 \cdot \frac{400}{\sin 8^\circ 14'} \cdot \frac{400}{\sin 10^\circ 42'} \cdot \cos 80^\circ 12'.$$

Innen $AB \approx 3224$.

A két kikötő távolsága 3224 m.





3445 a) Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet $2 \cdot \sin^2 x + 5 \cdot \sin x - 3 = 0$ alakba írható.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján vagy $\sin x = -3$, ami nem lehet, vagy $\sin x = \frac{1}{2}$.
A megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Az egyenlet alaphalmaz $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Legyen $\operatorname{tg}^2 x = y$, ekkor az egyenlet:

$$y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3y^2 - 8y - 3 = 0.$$

A megoldások:

$$y_1 = 3 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$y_2 = -\frac{1}{3}, \text{ nem lehet.}$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

c) Az egyenlet a következő alakba írható:

$$\cos^2 x + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Szorzáttá alakítás után:

$$\cos x \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$

A megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

d) Az egyenlet alaphalmaz $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ekvivalens átalakítások után a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$2 \cdot \cos^2 x + 5 \cdot \cos x + 2 = 0.$$

Ennek megoldásai:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos x = -2 < -1, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

e) Az egyenlet alaphalmaz $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Az egyenlet mindkét oldalát $\sin x$ -szel szorozva, majd felhasználva, hogy $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\sin^2 x + \cos x \cdot \sin x = 1,$$

$$\sin^2 x + \cos x \cdot \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$\cos x \cdot (\sin x - \cos x) = 0.$$



Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, tehát:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$$\sin x = \cos x \quad (\cos x = 0 \text{ esetet már vizsgáltuk}) \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

f) Használjuk a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ összefüggést, és nullára redukálás után alakítsuk szorzattá:

$$\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x),$$

$$\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x - \sin^4 x,$$

$$\sin^4 x + \sin^3 x - 2 \cdot \sin^2 x = 0,$$

$$\sin^2 x \cdot (\sin^2 x + \sin x - 2) = 0,$$

$$\sin^2 x \cdot (\sin x + 2) \cdot (\sin x - 1) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, tehát

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x_1 = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ vagy}$$

$$\sin x = -2 < -1, \text{ ami nem lehet, vagy}$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = k\pi \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3446 a) A számlálóban $\operatorname{tg} x$ miatt $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

A nevezőben négyzetgyökös kifejezés áll, tehát:

$$1 - 2 \cdot \cos^2 x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > |\cos x| \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + l\pi < x < \frac{3\pi}{4} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A kifejezés értelmezési tartománya:

$$\left] \frac{\pi}{4} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} + m\pi; \frac{3\pi}{4} + m\pi \right[\quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

b) A logaritmus alapja pozitív és nem lehet egyenlő 1-gyel:

$$\sin x > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A logaritmus után álló kifejezés csak pozitív értéket vehet fel:

$$2 \cdot \cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

A három halmaz metszete adja az értelmezési tartományt:

$$x \in \left] 2m\pi; \frac{\pi}{3} + 2m\pi \right[\quad (m \in \mathbb{Z}).$$



3447 Ha két vektor merőlegesen egymásra, akkor skaláris szorzatuk 0, tehát:

$$(7\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = 0, \text{ valamint } (7\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 4\vec{b}) = 0.$$

A két egyenletből fejezzük ki az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ szorzatot:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{15 \cdot |\vec{b}|^2 - 7 \cdot |\vec{a}|^2}{16}, \text{ valamint } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{7 \cdot |\vec{a}|^2 + 8 \cdot |\vec{b}|^2}{30},$$

amiből adódik, hogy:

$$\frac{15 \cdot |\vec{b}|^2 - 7 \cdot |\vec{a}|^2}{16} = \frac{7 \cdot |\vec{a}|^2 + 8 \cdot |\vec{b}|^2}{30},$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2.$$

Ezen eredményünket felhasználva:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{15 \cdot |\vec{b}|^2 - 7 \cdot |\vec{a}|^2}{16} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}|^2.$$

Az $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}|^2$ egyenlőségek akkor teljesülnek egyszerre, ha a két vektor null-vektor, vagy ha a két vektor egyenlő hosszú és egymással 60° -os szöget zárnak be.

3448 Alkalmazzuk az $\vec{a}(2; 3)$ és $\vec{b}(a; b)$ vektorokra a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget:

$$2a + 3b \leq \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve és kihasználva, hogy $2a + 3b = 9$:

$$9 \leq \sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\frac{9}{\sqrt{13}} \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, tehát:

$$\frac{81}{13} \leq a^2 + b^2.$$

Az $a^2 + b^2$ minimuma $\frac{81}{13}$.

A kifejezés a minimális értékét akkor veszi fel, ha $3a = 2b \geq 0$ és $2a + 3b = 9$. Az egyenletrendszert

megoldva ez $a = \frac{18}{13}$ és $b = \frac{27}{13}$ esetén teljesül.

3449 Jelölje az érintő kör keresett sugarának hosszát r . A kisebb félkörök középpontjai legyenek A és B , a nagy félkör középpontja O , az érintőkör középpontja K .

Használjuk ki, hogy ha két kör érinti egymást, akkor a körök középpontjait összekötő egyenesen rajta van az érintési pont.

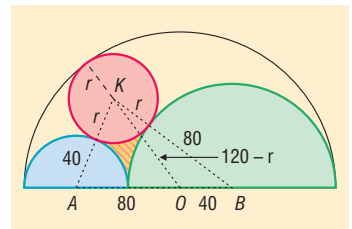
Az ABK háromszögben $BK = r + 80$, $AK = r + 40$, $AB = 120$ és $OK = 120 - r$, valamint $AO = 80$ és $BO = 40$.

Írjuk fel az AOK és BOK háromszögekre a koszinusztételt:

$$(40 + r)^2 = 80^2 + (120 - r)^2 - 2 \cdot 80 \cdot (120 - r) \cdot \cos AOK^\circ,$$

$$(80 + r)^2 = 40^2 + (120 - r)^2 - 2 \cdot 40 \cdot (120 - r) \cdot \cos BOK^\circ.$$

Vegyük figyelembe, hogy $AOK^\circ = 180^\circ - BOK^\circ$, tehát $\cos AOK^\circ = -\cos BOK^\circ$.





A második egyenlet kétszereséhez hozzáadva az első:

$$\begin{aligned}(40 + r)^2 + 2 \cdot (80 + r)^2 &= 80^2 + 2 \cdot 40^2 + 3 \cdot (120 - r)^2, \\ 1120r &= 38400, \\ r &\approx 34,29.\end{aligned}$$

a) A három félkört érintő kör sugara 34,29 cm.

b) A besatírozott terület kiszámításához az ABK háromszög területéből vonjuk ki a megfelelő körcikkek területét.

Az ABK háromszög oldalai:

$$AB = 120, \quad AK = 40 + 34,29 = 74,29 \quad \text{és} \quad BK = 80 + 34,29 = 114,29.$$

A koszinusztétellel számítsuk ki az AKB szöget:

$$120^2 = 74,29^2 + 114,29^2 - 2 \cdot 74,29 \cdot 114,29 \cdot \cos AKB \Rightarrow AKB \approx 75,75^\circ.$$

A szinusztétellel határozzuk meg az ABK szöget, ami nem lehet tompaszög:

$$\frac{\sin AKB}{\sin 75,75^\circ} = \frac{74,29}{120} \Rightarrow AKB \approx 36,87^\circ.$$

A háromszög harmadik szöge: $67,38^\circ$.

A körcikkek sugarai és középponti szögei rendre:

$$r_1 = 34,29, \quad \alpha_1 = 75,75^\circ; \quad r_2 = 40, \quad \alpha_2 = 67,38^\circ; \quad r_3 = 80, \quad \alpha_3 = 36,87^\circ.$$

A besatírozott terület:

$$\begin{aligned}T &= \frac{74,29 \cdot 114,29 \cdot \sin 75,75^\circ}{2} - \\ &- 34,29^2 \cdot \pi \cdot \frac{75,75^\circ}{360^\circ} - 40^2 \cdot \pi \cdot \frac{67,38^\circ}{360^\circ} - 80^2 \cdot \pi \cdot \frac{36,87^\circ}{360^\circ} \approx 337,43 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

3450 Vegyünk fel a négy tereppont által meghatározott négyszöghöz hasonló négyszöget, amelyben az $A'B'$ oldal a hosszúságú.

Az $A'B'C'$ háromszögnek ismert egy oldala és három szöge, így a szinusztétel segítségével megadható az $A'C'$ oldal:

$$\frac{A'C'}{a} = \frac{\sin 128^\circ}{\sin 22^\circ} \Rightarrow A'C' = a \cdot \frac{\sin 128^\circ}{\sin 22^\circ}.$$

Az $A'B'D'$ háromszögnek is ismert egy oldala és három szöge, így hasonlóan a szinusztétel segítségével megadható az $A'D'$ oldal:

$$\frac{A'D'}{a} = \frac{\sin 68^\circ}{\sin 40^\circ} \Rightarrow A'D' = a \cdot \frac{\sin 68^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

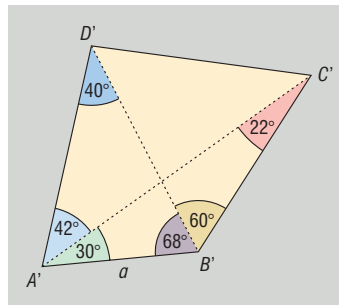
Az $A'D'C'$ háromszögben írjuk fel a koszinusztételt:

$$C'D'^2 = A'C'^2 + A'D'^2 - 2 \cdot A'C' \cdot A'D' \cdot \cos 42^\circ,$$

$$C'D' = \sqrt{\left(a \cdot \frac{\sin 128^\circ}{\sin 22^\circ}\right)^2 + \left(a \cdot \frac{\sin 68^\circ}{\sin 40^\circ}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{\sin 128^\circ}{\sin 22^\circ} \cdot a \cdot \frac{\sin 68^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot \cos 42^\circ}.$$

A számítások elvégzése után kapjuk: $C'D' \approx 1,41a$, amiből $a \approx \frac{C'D'}{1,41}$.

Mivel feladatunkban $CD = 2$ km, a keresett AB távolság: $\frac{2}{1,41} \approx 1,42$ km.





3451 A háromszög oldalainak hossza legyen $x - 2$, x és $x + 2$, valamint az $x + 2$ hosszúságú oldallal szemben lévő szöget jelölje α .

A háromszög területét felírva:

$$\frac{x \cdot (x - 2) \cdot \sin \alpha}{2} = 24 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{48}{x \cdot (x - 2)}.$$

A háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2 - 2x \cdot (x - 2) \cdot \cos \alpha,$$

amiből

$$\cos \alpha = \frac{x^2 + (x - 2)^2 - (x + 2)^2}{2x \cdot (x - 2)} = \frac{x^2 - 8x}{2x \cdot (x - 2)}.$$

Használjuk ki, hogy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\left(\frac{48}{x \cdot (x - 2)} \right)^2 + \left(\frac{x^2 - 8x}{2x \cdot (x - 2)} \right)^2 = 1.$$

Az egyenletet rendezve az

$$x^4 - 16x^2 - 3072 = 0$$

másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet kell megoldanunk.

A megoldóképlet alapján adódik:

$$x^2 = -48 \quad \text{vagy} \quad x^2 = 64.$$

Megoldást csak ez utóbbiból kapunk.

Mivel x egy háromszög oldalát jelöli: $x = 8$.

A háromszög oldalainak hossza tehát 6, 8 és 10 hosszegység.

Pitagorasz tételének megfordítása alapján ez a háromszög derékszögű, szögeit szögfüggvénnyel számolhatjuk ki.

A háromszög szögei: 90° , $36,87^\circ$ és $53,13^\circ$.

3452 Használjuk a következő összefüggéseket:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \text{és} \quad 1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha.$$

Innen:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{és} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Ez alapján a szögfüggvények lehetséges értékei:

$$\begin{array}{llll} \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}, & \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}, & \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}, & \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}; \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}, & \sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}, & \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{5}, & \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{3}; \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{4}, & \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}, & \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{5}, & \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{3}; \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{4}, & \sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}, & \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}, & \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}. \end{array}$$



3453 Trigonometrikus összefüggések felhasználása után:

$$a) \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)} =$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 1}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = \frac{2 + 1}{2 - 1} = 3.$$

$$b) \frac{1 - \sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^4 x} = \frac{1 - (1 - \cos^2 x)^2 - \cos^4 x}{\cos^4 x} = \frac{1 - 1 + 2 \cdot \cos^2 x - \cos^4 x - \cos^4 x}{\cos^4 x} =$$

$$= \frac{2 \cdot \cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x = 8.$$

3454 a) Alakítsuk át a $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$ egyenlőséget az addíciós tétel alapján:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \cos \alpha \cdot \cos \beta, \\ 0 &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, \\ 0 &= \cos(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Mivel α és β háromszög szögei, $k = 0$, tehát $\alpha + \beta = 90^\circ$, vagyis a háromszög derékszögű, és $\gamma = 90^\circ$.

b) Az egyenlet rendezése után alkalmazzuk a $\cos 2x$ -re vonatkozó addíciós tételt:

$$\begin{aligned} \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha &= \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta, \\ \cos 4\alpha &= \cos 4\beta. \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $4\alpha = 4\beta + 2k\pi$, vagy ha $4\alpha = -4\beta + 2l\pi$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.

I. eset: $4\alpha = 4\beta + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \beta + \frac{1}{2} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Mivel α és β háromszög szögei, k értéke 0 vagy 1 lehet.

Ha $k = 0$, akkor $\alpha = \beta$.

Ha $k = 1$, akkor $\alpha = \beta + 90^\circ$.

II. eset: $4\alpha = -4\beta + 2l\pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{2} \cdot l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$

Mivel α és β háromszög szögei, l értéke csak 1 lehet, és ekkor $\alpha + \beta = 90^\circ$.

A feladat feltételének megfelelő háromszög α és β szögére a következő összefüggések közül teljesül valamelyik:

- (1) $\alpha = \beta$, vagyis a háromszög egyenlő szárú;
- (2) $\alpha = \beta + 90^\circ$, vagyis a háromszög α szöge tompaszög, és 90° -kal nagyobb β -nál;
- (3) $\alpha + \beta = 90^\circ$, vagyis a háromszög derékszögű, és $\gamma = 90^\circ$.



3455 A szinusztétel értelmében $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$. Elég tehát a szögek szinuszainak arányát megadnunk. (Ezek biztosan pozitív értékek, hiszen tangenseik is pozitívak.)

Ismert, hogy

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \sin \beta = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}, \quad \sin \gamma = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}}.$$

A feladatunk az, hogy megadjuk $\operatorname{tg}^2 \alpha$, $\operatorname{tg}^2 \beta$ és $\operatorname{tg}^2 \gamma$ pontos értékét.

Mivel a háromszög szögeinek összege 180° , így

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha - \beta) = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

A $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma = 2 : 3 : 4$ arányból:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \gamma = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Az előző egyenletben ezeket felhasználva $\operatorname{tg} \alpha$ -ra a következő összefüggést kapjuk:

$$2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha}.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = -\frac{5 \operatorname{tg} \alpha}{2 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$4 \cdot \operatorname{tg} \alpha - 6 \operatorname{tg}^3 \alpha = -5 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$9 \cdot \operatorname{tg} \alpha - 6 \operatorname{tg}^3 \alpha = 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot (3 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0.$$

A szorzat első tényezője nyilvánvalóan nem lehet 0, tehát $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{3}{2}$.

Ez alapján β és γ tangenseinek négyzetét is kiszámolhatjuk:

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \left(\frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)^2 = \frac{9}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{27}{8}, \quad \text{és}$$

$$\operatorname{tg}^2 \gamma = (2 \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 = 4 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = 6.$$

A háromszög szögeinek szinuszai:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \sin \beta = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \sqrt{\frac{\frac{27}{8}}{1 + \frac{27}{8}}} = \sqrt{\frac{27}{35}},$$

$$\sin \gamma = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \sqrt{\frac{6}{1 + 6}} = \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Ez alapján:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{27}{35}} : \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Az arányt $\sqrt{\frac{35}{3}}$ -dal bővítve kapjuk, hogy a háromszög oldalai hosszának aránya: $\sqrt{7} : 3 : \sqrt{10}$.



3456 Mivel

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2},$$

valamint

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 2x,$$

az egyenlet a következő alakba írható:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x,$$

$$1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - 2 \cdot \sin^2 2x,$$

$$2 - \sin^2 2x = 2 - 4 \cdot \sin^2 2x,$$

$$\sin^2 2x = 0.$$

Az egyenlet megoldása:

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3457 a) Az egyenlet jobb oldalát alakítsuk át a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ összefüggés segítségével, majd alakítsunk szorzattá, és redukáljuk nullára az egyenletet:

$$\sin x - \cos x = \sin x \cdot \cos 2x,$$

$$\sin x - \cos x = \sin x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x),$$

$$\sin x - \cos x = \sin x \cdot (\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x),$$

$$(\sin x - \cos x) \cdot [1 + \sin x \cdot (\sin x + \cos x)] = 0,$$

$$(\sin x - \cos x) \cdot (1 + \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x) = 0.$$

A szorzat pontosan akkor nulla, ha

I. eset:

$$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$1 + \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0,$$

$$\cos^2 x + 2 \cdot \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0, \quad /: \cos^2 x \neq 0$$

$$2 \cdot \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa negatív, tehát nincs olyan valós x , amely kielégítené ezt az egyenletet.

Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) A szinusz- és koszinuszfüggvény periódusa 2π , tehát elegendő a következő egyenletet megoldanunk:

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) - 3 \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{2} - x \right) = 1 + 2 \cdot \sin x.$$

Az addíciós tételek alapján:

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) - 3 \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{2} - x \right) = 1 + 2 \cdot \sin x,$$

$$\cos 2x + 3 \cdot \sin x = 1 + 2 \cdot \sin x,$$

$$1 - 2 \cdot \sin^2 x + \sin x = 1,$$

$$\sin x \cdot (1 - 2 \cdot \sin x) = 0.$$



A szorzat akkor nulla, ha

I. eset:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x_1 = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{6} + 2l\pi, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \quad (l, n \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2l\pi, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \quad (k, l, n \in \mathbb{Z}).$$

3458 Alakítsuk át a kifejezést:

$$\cos^4 x \cdot \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \sin^4 x = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2x.$$

Mivel $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, a kifejezés minimális értéke 0, maximális értéke $\frac{1}{4}$.

A kifejezés a minimumát ott veszi fel, ahol $\sin 2x = 0$, vagyis $x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

A kifejezés a maximumát ott veszi fel, ahol $\sin 2x = \pm 1$, vagyis $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$.

3459 Ha $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, vagyis $\alpha = 120^\circ$, akkor az egyenlet elsőfokú:

$$-4x + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Ekkor az egyenletnek egy valós gyöke van.

Ha az egyenlet másodfokú ($\alpha \neq 120^\circ$), akkor van két valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív:

$$D = 16 - 4 \cdot (2 \cdot \cos \alpha + 1) \cdot (4 \cdot \cos \alpha - 2) = 16 - 8 \cdot (4 \cdot \cos^2 \alpha - 1) = 24 - 32 \cdot \cos^2 \alpha.$$

A következő egyenlőtlenség megoldásait keressük, ha α konvex szög:

$$24 - 32 \cdot \cos^2 \alpha > 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} > |\cos \alpha|.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség megoldása:

$$30^\circ + k \cdot 180^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ + k \cdot 180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Összefoglalva: az egyenletnek két valós megoldása van azokra a konvex α szögekre, amelyekre

$$30^\circ < \alpha < 150^\circ \quad \text{és} \quad \alpha \neq 120^\circ.$$