



11.2. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

Hatványozás és gyökvonás (emlékeztető) – megoldások

3161 a) a^{11} ; b) b^{-4} ; c) x^{23} ; d) y^{24} ; e) $x^{18} \cdot y^{-2}$; f) $a^{24} \cdot b^{-4}$;
g) $a^{23} \cdot b^{12}$; h) $a^{-3} \cdot b^{-7}$; i) $a^{-24} \cdot b^{14}$; j) $a^{55} \cdot b^{25}$.

3162 a) $x > 0$, $\sqrt{\frac{1}{x^3}} = \sqrt{x^{-3}}$;

b) $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, $\frac{1}{y} = y^{-1}$;

c) $a > 0$, a ;

d) $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, $\sqrt[3]{\frac{b^7}{a}} = b^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$;

e) $a > 0$, $\sqrt[12]{a^{29}} = a^2 \cdot \sqrt[12]{a^5}$;

f) $a, b > 0$, $\sqrt[12]{\frac{b^{29}}{a^{27}}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \sqrt[12]{\frac{b^5}{a^3}}$;

g) $a, b > 0$, $\sqrt[24]{a^{17} \cdot b^{36}} = b \cdot \sqrt[24]{a^{17} \cdot b^{12}}$;

h) $a, b > 0$, $\sqrt[60]{\frac{b^{159}}{a^{177}}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \sqrt[60]{\frac{b^{39}}{a^{57}}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \sqrt[20]{\frac{b^{13}}{a^{19}}}$.

3163 a) $6^9 \cdot 9^3 = 2^9 \cdot 3^{15} > 8 \cdot 18^7 = 2^{10} \cdot 3^{14}$; b) $\sqrt[3]{7^{53}} = 7^{17} \cdot \sqrt[3]{49} < 7^{18} = 7^{17} \cdot \sqrt[3]{7^3}$;

c) $\sqrt[6]{60^{2010}} = \sqrt[6]{2^{4020} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2010}} = \sqrt[6]{\left[(2^{10})^{201} \cdot 3^{1005} \cdot 5^{1005}\right]^2} = \sqrt[6]{2^{4020} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2010}}$;

d) $\sqrt[3]{100^{-4}} = \sqrt[3]{10^{-8}} = \sqrt[15]{10^{-40}} < \sqrt[5]{10^{-9}} = \sqrt[15]{10^{-27}}$;

e) $20^{-5} \cdot 16^{-8} = 2^{-42} \cdot 5^{-5} < 2^{-14} \cdot 5^{-14} \cdot \frac{2^{-27}}{5^{-9}} = 2^{-41} \cdot 5^{-5}$;

f) $\sqrt{45^{-7} \cdot 75^{-21}} = \sqrt{5^{-7} \cdot 3^{-14} \cdot 3^{-21} \cdot 5^{-42}} = \sqrt{3^{-35} \cdot 5^{-49}} =$
 $= 3^{-17} \cdot 5^{-24} \cdot \sqrt{\frac{1}{15}} > 3^{-17} \cdot 5^{-25} = 3^{-17} \cdot 5^{-24} \cdot \frac{1}{5}$.

3164 a) $\frac{3^{-5} \cdot 10^{-6} \cdot 21^{-5} \cdot 25^{-2}}{6^{-7} \cdot 15^{-5} \cdot 35^{-5}} = \frac{3^{-5} \cdot 2^{-6} \cdot 5^{-6} \cdot 3^{-5} \cdot 7^{-5} \cdot 5^{-4}}{2^{-7} \cdot 3^{-7} \cdot 3^{-5} \cdot 5^{-5} \cdot 5^{-5} \cdot 7^{-5}} = 18$;

b) $\left(\frac{6^{-6} \cdot 10^{-2}}{9^{-3} \cdot 200^{-1} \cdot 32^{-1}}\right)^{100} = \left(\frac{2^{-6} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{-2} \cdot 5^{-2}}{3^{-6} \cdot 2^{-3} \cdot 5^{-2} \cdot 2^{-5}}\right)^{100} = 1$;

c) $\sqrt{\frac{24^{-4} \cdot 36^{-3}}{18^{-4} \cdot 256^{-1} \cdot 72^{-2}}} = \sqrt{\frac{2^{-12} \cdot 3^{-4} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-6}}{2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 2^{-8} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-4}}} = 3$;

d) $\sqrt[15]{\frac{2000^{-20} \cdot 25^{11}}{(-800)^{-19}}} = \sqrt[15]{\frac{2^{-80} \cdot 5^{-60} \cdot 5^{22}}{-2^{-95} \cdot 5^{-38}}} = -2$;



$$e) \sqrt[5]{45^{-12}} : (\sqrt[5]{15^{-7}} \cdot \sqrt[5]{27^{-4}}) = \sqrt[5]{\frac{3^{-24} \cdot 5^{-12}}{3^{-7} \cdot 5^{-7} \cdot 3^{-12}}} = \frac{1}{15};$$

$$f) \frac{\sqrt[3]{100^{-5}} \cdot \sqrt[4]{20^{-3}} \cdot \sqrt[12]{5^7}}{\sqrt[9]{1000^{-5}} \cdot \sqrt[3]{2^{-7}}} = \sqrt[12]{\frac{100^{-20} \cdot 20^{-9} \cdot 5^7}{1000^{-10} \cdot 2^{-28}}} = \sqrt[12]{\frac{2^{-40} \cdot 5^{-40} \cdot 2^{-18} \cdot 5^{-9} \cdot 5^7}{2^{-30} \cdot 5^{-30} \cdot 2^{-28}}} = \frac{1}{5}.$$

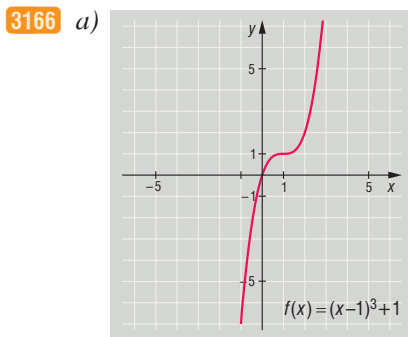
3165 a) $\sqrt{7+4 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{7-4 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 4;$

b) $\sqrt[4]{28+16 \cdot \sqrt{3}} - \sqrt[4]{28-16 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt[4]{(4+2 \cdot \sqrt{3})^2} - \sqrt[4]{(4-2 \cdot \sqrt{3})^2} =$
 $= \sqrt{4+2 \cdot \sqrt{3}} - \sqrt{4-2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = 2;$

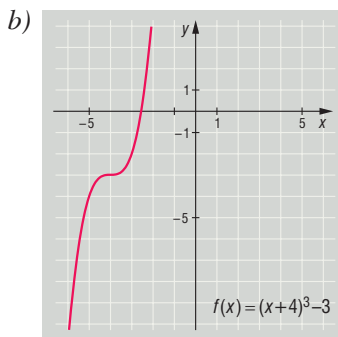
c) $\sqrt[3]{8+3 \cdot \sqrt[3]{49}} + 3 \cdot \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{15+6 \cdot \sqrt[3]{49}} + 12 \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{7}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt[3]{7}+2)^3} = -1;$

d) $\sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3}-10} = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3}+9+3 \cdot \sqrt{3}+1} - \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3}-9+3 \cdot \sqrt{3}-1} =$
 $= \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3} = 2.$

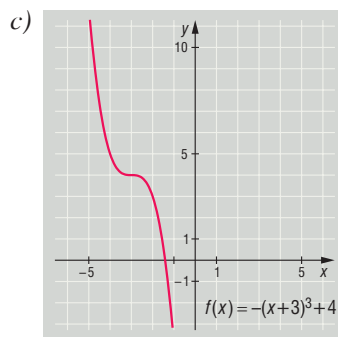
Hatványfüggvények és gyökfüggvények – megoldások



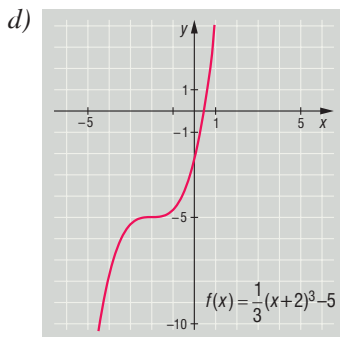
$x \in \mathbb{R};$



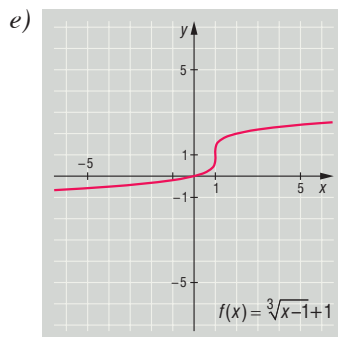
$x \in \mathbb{R};$



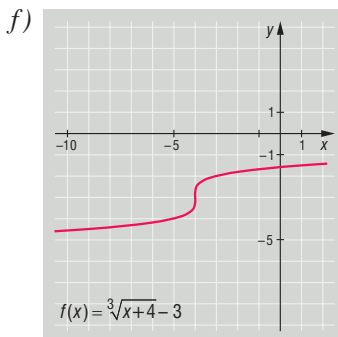
$x \in \mathbb{R};$



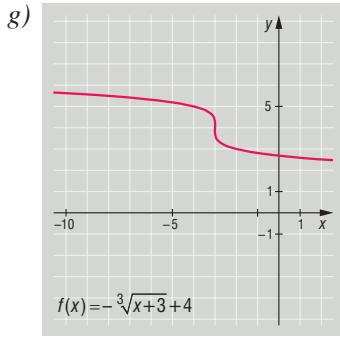
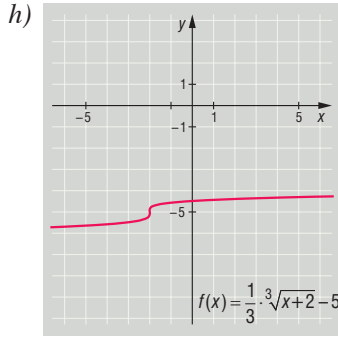
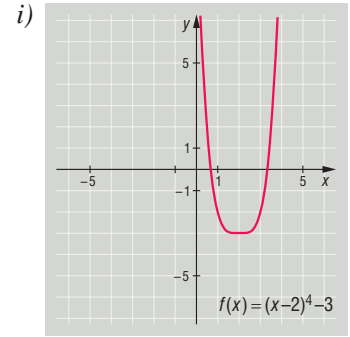
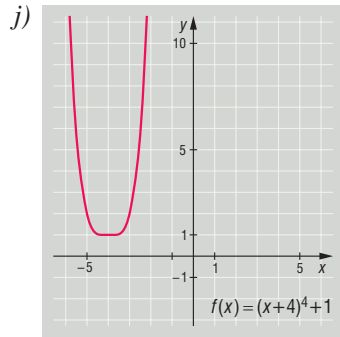
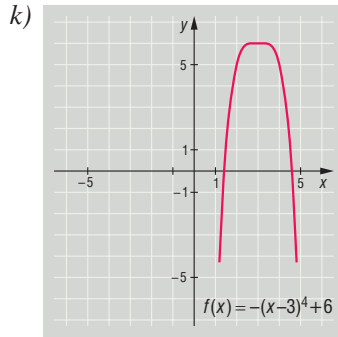
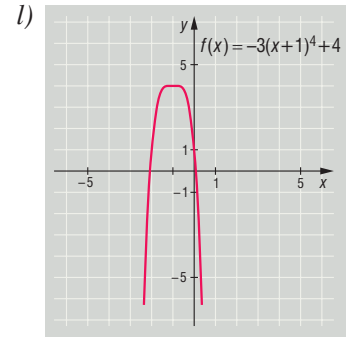
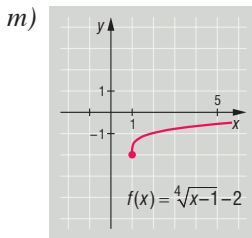
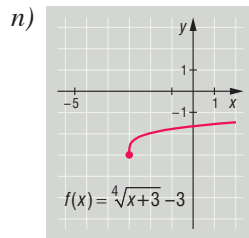
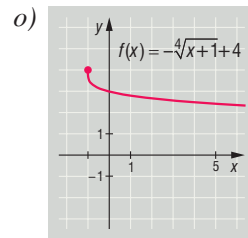
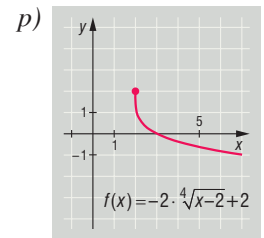
$x \in \mathbb{R};$



$x \in \mathbb{R};$



$x \in \mathbb{R};$


 $x \in \mathbb{R};$

 $x \in \mathbb{R};$

 $x \in \mathbb{R};$

 $x \in \mathbb{R};$

 $x \in \mathbb{R};$

 $x \in \mathbb{R};$

 $x \geq 1, x \in \mathbb{R};$

 $x \geq -3, x \in \mathbb{R};$

 $x \geq -1, x \in \mathbb{R};$

 $x \geq 2, x \in \mathbb{R}.$

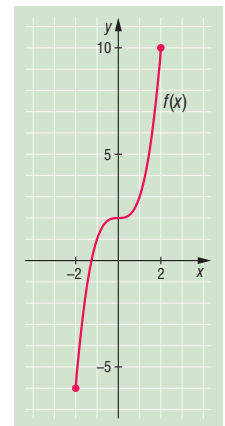
3167 a) Értékkészlete: $[-6; 10]$.

Menete: a függvény növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -2$, értéke: $y = -6$;

maximumának helye: $x = 2$, értéke: $y = 10$.

Zérushelye: $x = \sqrt[3]{-2}$.





b) Értékkészlete: $[-6; 10]$.

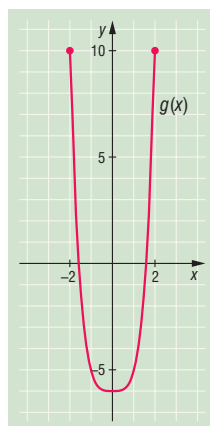
Menete: $[-2; 0]$ -ban csökken,

$[0; 2]$ -ban növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = -6$;

maximumának helye: $x = -2$ és $x = 2$, értéke: $y = 10$.

Zérushelyek: $x = \sqrt[4]{6}$ és $x = -\sqrt[4]{6}$.



c) Értékkészlete: $[-2; 2]$.

Menete: a függvény növekszik.

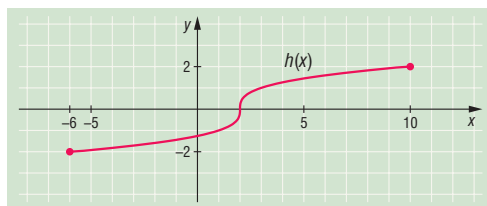
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -6$,

értéke: $y = -2$;

maximumának helye: $x = 10$,

értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $x = 2$.



d) Értékkészlete: $[0; 2]$.

Menete: a függvény növekszik.

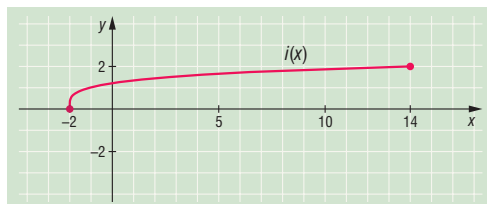
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -2$,

értéke: $y = 0$;

maximumának helye: $x = 14$,

értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $x = -2$.



e) Értékkészlete: $[1; 4]$.

Menete: a függvény növekszik.

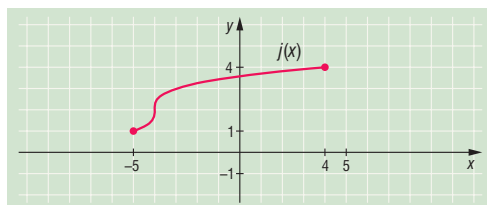
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -5$,

értéke: $y = 1$;

maximumának helye: $x = 4$,

értéke: $y = 4$.

Zérushelye: nincs.



f) Értékkészlete: $[1; 3]$.

Menete: a függvény csökken.

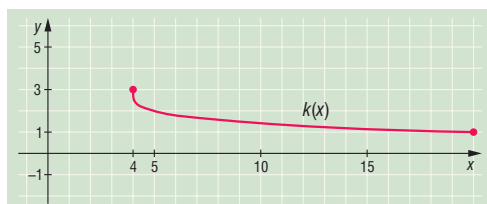
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 20$,

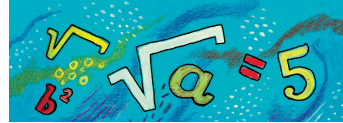
értéke: $y = 1$;

maximumának helye: $x = 4$,

értéke: $y = 3$.

Zérushelye: nincs.



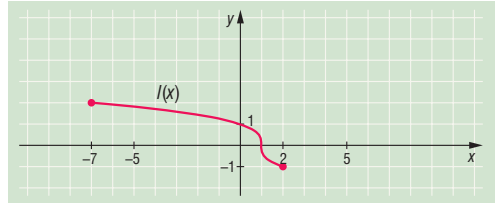


g) Értékkészlete: $[-1; 2]$.

Menete: a függvény csökken.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 2$,
értéke: $y = -1$;
maximumának helye: $x = -7$,
értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $x = 1$.

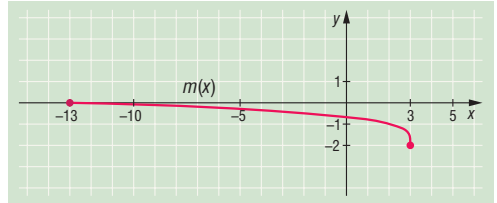


h) Értékkészlete: $[-2; 0]$.

Menete: a függvény csökken.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 3$,
értéke: $y = -2$;
maximumának helye: $x = -13$,
értéke: $y = 0$.

Zérushelye: $x = -13$.



3168 a) A függvény átalakítva:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 - 1, & \text{ha } x \geq 2, \\ -(x-2)^3 - 1, & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

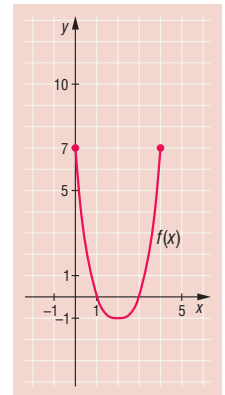
Értékkészlete: $[-1; 7]$.

Menete: $[0; 2]$ -ban csökken,

$[2; 4]$ -ban növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 2$,
értéke: $y = -1$;
maximumának helye: $x = 0$ és $x = 4$,
értéke: $y = 7$.

Zérushelyei: $x = 1$ és $x = 3$.



b) A függvény átalakítva:

$$g(x) = \begin{cases} -2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2, & \text{ha } x < -1, \\ 0, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, \\ 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$$

Értékkészlete: $[0; 2]$.

Menete: $[-8; -1]$ -ben csökken,

$[-1; 1]$ -ben konstans,

$[1; 8]$ -ban növekszik.

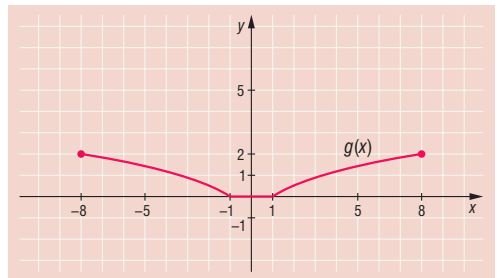
Szélsőértékei: minimumának helye: $-1 \leq x \leq 1$,

értéke: $y = 0$;

maximumának helye: $x = -8$ és $x = 8$,

értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $-1 \leq x \leq 1$.





c) A függvény átalakítva:

$$h(x) = |(x-1)^3 - 1| = \begin{cases} (x-1)^3 - 1, & \text{ha } x \geq 2, \\ -(x-1)^3 + 1, & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

Értékkészlete: $[0; 9]$.

Menete: $[-1; 2]$ -ban csökken,

$[2; 3]$ -ban növekszik.

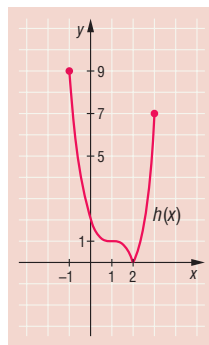
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 2$,

értéke: $y = 0$;

maximumának helye: $x = -1$,

értéke: $y = 9$.

Zérushelye: $x = 2$.



Törtkitevőjű hatvány – megoldások

3169 a) 8; b) 9; c) 4; d) 3; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{1}{2}$;

g) $\frac{1}{1000}$; h) $\frac{1}{100}$; i) 25; j) 1000. k) $\frac{8}{27}$; l) $\frac{2}{3}$.

3170 a) $\sqrt[8]{5}$; b) $\sqrt[7]{13^2}$; c) $\sqrt[11]{10^3}$; d) $\sqrt[3]{11^7}$; e) $\sqrt[3]{15^{-2}}$; f) $\sqrt[2]{23^{-4}}$;

g) $\sqrt[7]{7^{-20}}$; h) $\sqrt[2]{41^{-2}}$; i) $\sqrt[10]{9^{-7}}$; j) $\sqrt[100]{10^{-23}}$; k) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$; l) $\frac{2}{\sqrt[3]{b^2}}$.

3171 a) $5^{\frac{1}{10}}$; b) $5^{\frac{4}{7}}$;

c) $5^{\frac{1}{6}}$; d) $5^{\frac{6}{11}}$;

e) $\sqrt[5]{5^{-1}} = 5^{-\frac{1}{5}}$; f) $\sqrt[8]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{8}}$;

g) $\sqrt[3]{5^{11}} = 5^{\frac{11}{3}}$; h) $\sqrt[12]{5^3 \cdot 5^2} = 5^{\frac{5}{12}}$;

i) $\sqrt[12]{\frac{5^9}{5^4 \cdot 5^2}} = \sqrt[12]{5^3} = 5^{\frac{1}{4}}$;

j) $\frac{\sqrt[12]{5^4 \cdot 5^3}}{5} = \sqrt[24]{5^7} \cdot 5^{-1} = 5^{-\frac{17}{24}}$;

k) $\sqrt[20]{\frac{(5^2)^4 \cdot (5^3)^{10}}{(5^5)^5}} = \sqrt[20]{5^{13}} = 5^{\frac{13}{20}}$;

l) $\frac{\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[6]{5^3}}}{\sqrt[6]{5 \cdot \sqrt[4]{5^3}}} = \frac{\sqrt[4]{5 \cdot 5^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[6]{5 \cdot 5^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[24]{5^2} = 5^{\frac{1}{12}}$.

3172 a) $\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{5}{6}}} = \frac{a^{\frac{14}{12}}}{a^{-\frac{1}{12}}} = a^{\frac{15}{12}} = a^{\frac{5}{4}}$;

b) $\frac{b^{-\frac{3}{5}} \cdot b^{-\frac{3}{10}}}{b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{7}{10}}} = \frac{b^{-\frac{9}{10}}}{b^{-\frac{12}{10}}} = b^{\frac{3}{10}}$;

c) $\frac{c^{\frac{1}{12}} \cdot c^{-\frac{1}{6}}}{c^{-\frac{1}{6}} \cdot c^{-\frac{5}{12}}} = \frac{c^{\frac{1}{12}}}{c^{-\frac{5}{12}}} = c^{\frac{1}{2}}$;

d) $\frac{\left(d^{-\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{7}{5}}}{\left(d^{-\frac{2}{5}} \cdot d^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{d^{\frac{7}{10}} \cdot d^{-\frac{14}{15}}}{d^{\frac{4}{15}} \cdot d^{\frac{1}{2}}} = \frac{d^{-\frac{7}{30}}}{d^{\frac{23}{30}}} = d^{-1}$.



$$3173 \quad a) \quad 4^{-\frac{4}{3}} = 2^{-\frac{8}{3}} < \sqrt[3]{32^{-1}} = 2^{-\frac{5}{3}} < \sqrt[5]{8^{-2}} = 2^{-\frac{6}{5}} < \sqrt[8]{8^{-3}} = 2^{-\frac{9}{8}} < 2^{-\frac{3}{5}};$$

$$b) \quad \sqrt{27^{-3}} = 3^{-\frac{9}{2}} < \sqrt[5]{81^{-3}} = 3^{-\frac{12}{5}} < \sqrt[7]{3^{-6}} = 3^{-\frac{6}{7}} < 3^{-\frac{5}{7}} < \sqrt[3]{9^{-1}} = 3^{-\frac{2}{3}};$$

$$c) \quad 25^{-\frac{7}{5}} = 5^{-\frac{14}{5}} < \sqrt{125^{-1}} = 5^{-\frac{3}{2}} < \sqrt[4]{5^{-5}} = 5^{-\frac{5}{4}} < \sqrt[3]{25^{-1}} = 5^{-\frac{2}{3}} < 5^{-\frac{2}{5}};$$

$$d) \quad 7^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{7^3}} < 7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[10]{7^5}} < \sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{7^3} < \sqrt[3]{49} = \sqrt[12]{7^8} < \sqrt[3]{343} = \sqrt[12]{7^{12}}.$$

$$3174 \quad a) \quad 2^{\frac{4}{5}} = (2^2)^{\frac{2}{5}} = a;$$

$$b) \quad 16^{\frac{2}{5}} = (4^2)^{\frac{2}{5}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^2 = a^2;$$

$$c) \quad 4^{\frac{1}{3}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{5}{6}};$$

$$d) \quad 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{4}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{15}{8}} = a^{\frac{15}{8}};$$

$$e) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{4}} = 4^{-\frac{1}{8}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{5}{16}} = a^{-\frac{5}{16}};$$

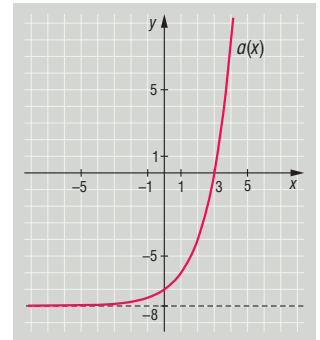
$$f) \quad 32^{-\frac{2}{3}} = (2^5)^{-\frac{2}{3}} = 4^{-\frac{5}{3}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{25}{6}} = a^{-\frac{25}{6}}.$$

Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális függvény – megoldások

$$3175 \quad a) \quad \text{Értékkészlete: } a(x) > -8.$$

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

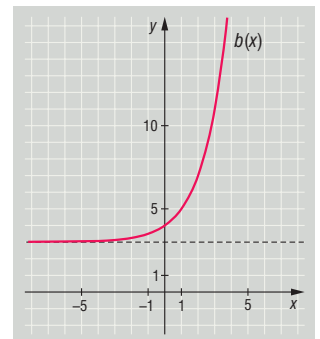
Zérushelye: $x = 3$.



$$b) \quad \text{Értékkészlete: } b(x) > 3.$$

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

Zérushelye: nincs.

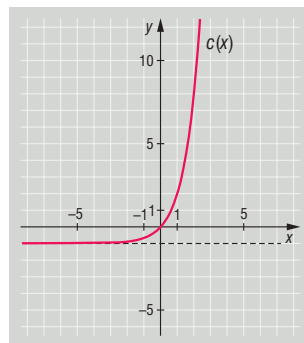




c) Értékkészlete: $c(x) > -1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

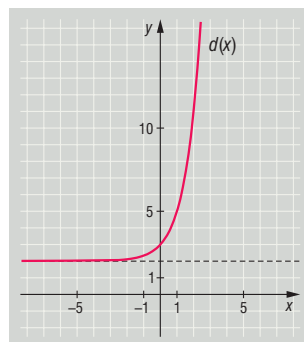
Zérushelye: $x = 0$.



d) Értékkészlete: $d(x) > 2$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

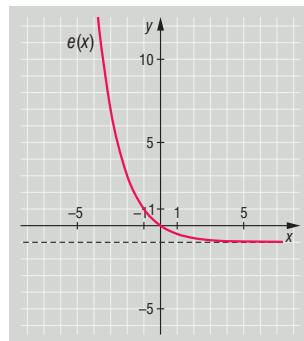
Zérushelye: nincs.



e) Értékkészlete: $e(x) > -1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

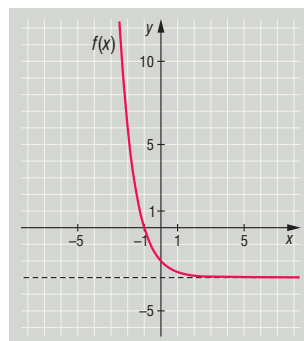
Zérushelye: $x = 0$.



f) Értékkészlete: $f(x) > -3$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

Zérushelye: $x = -1$.

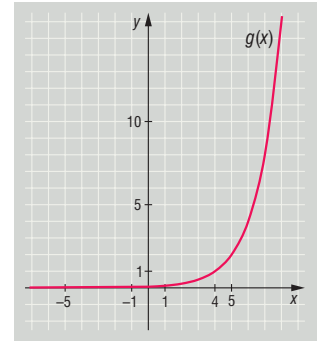




g) Értékkészlete: $g(x) > 0$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

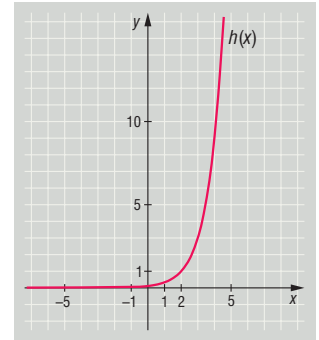
Zérushelye: nincs.



h) Értékkészlete: $h(x) > 0$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

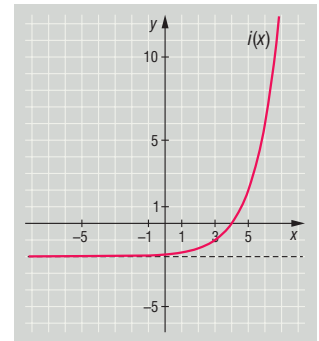
Zérushelye: nincs.



i) Értékkészlete: $i(x) > -2$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

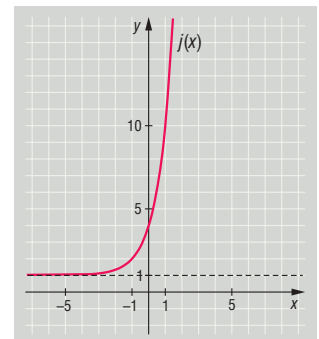
Zérushelye: $x = 4$.



j) Értékkészlete: $j(x) > 1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

Zérushelye: nincs.

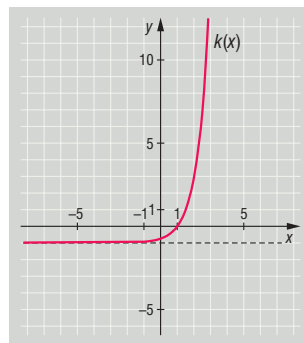




k) Értékkészlete: $k(x) > -1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

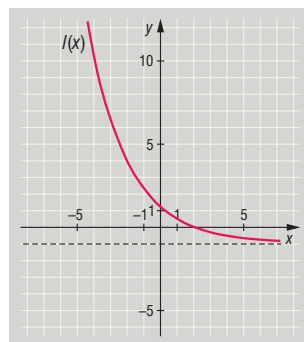
Zérushelye: $x = 1$.



l) Értékkészlete: $l(x) > -1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

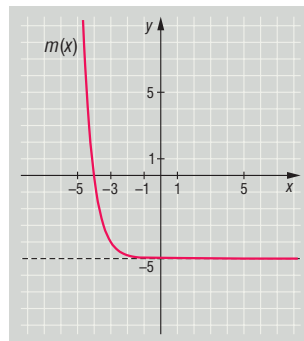
Zérushelye: $x = 2$.



m) Értékkészlete: $m(x) > -5$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

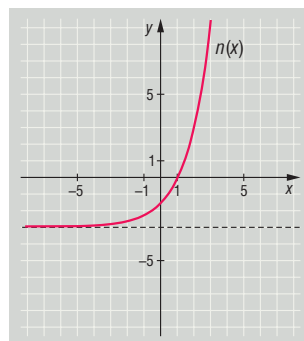
Zérushelye: $x = -4$.



n) Értékkészlete: $n(x) > -3$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

Zérushelye: $x = 1$.





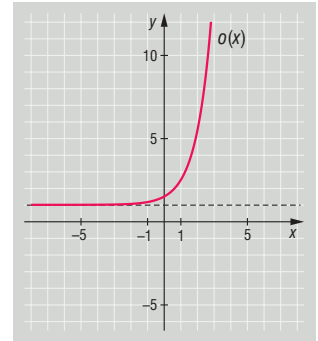
o) Az $o(x)$ függvény átalakítható a következőképpen:

$$o(x) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3^{x-1} + 1 = \frac{1}{2} \cdot 3^x + 1.$$

Értékkészlete: $o(x) > 1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

Zérushelye: nincs.



p) A $p(x)$ függvény átalakítható a következőképpen:

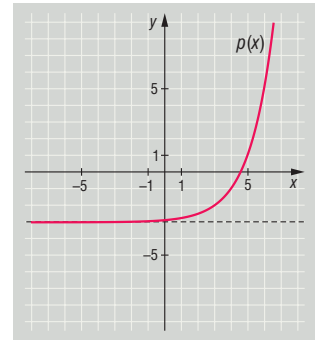
$$p(x) = \frac{2^{x-1}}{2^2} - 3 = 2^{x-3} - 3.$$

Értékkészlete: $p(x) > -3$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

Zérushelye: $x \approx 4,6$.

(Később, ha a logaritmust tanuljuk, ezt az értéket már ki tudjuk számítani.)



3176 a) $a(x) = 2^x - 2$;

c) $c(x) = 2^{x-1}$;

e) $e(x) = 2^{x+1} + 1$;

g) $g(x) = 2^{-x} - 2$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$;

i) $i(x) = 2^{3-x} - 4$, $i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 4$;

b) $b(x) = 2^x - 4$;

d) $d(x) = 2^{x+3}$;

f) $f(x) = 2^{x-2} - 8$;

h) $h(x) = 2^{-x-2} + 1$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 1$;

j) $j(x) = 2^{-x-3} - 8$, $j(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 8$.

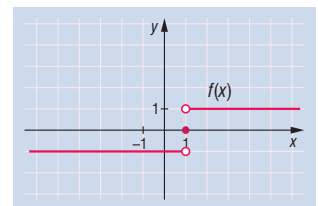
3177 a) $t(0) = 22^\circ\text{C}$, $t(6) \approx 33^\circ\text{C}$.

b) $t(15) \approx 60,76^\circ\text{C}$, tehát túllépte a 60°C -ot.

c) $t(8) \approx 37,82^\circ\text{C}$. $t(12) \approx 49,59^\circ\text{C}$, ami 31,1%-os növekedés.

3178 a) A függvény átalakítva:

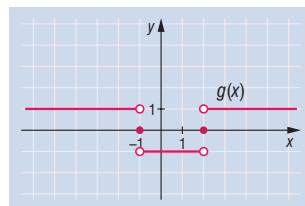
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 1, \\ 0, & \text{ha } x = 1, \\ -1, & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$





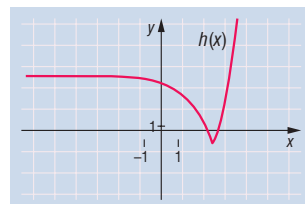
b) A függvény átalakítva:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x < -1 \text{ vagy } x > 2, \\ 0, & \text{ha } x = -1 \text{ vagy } x = 2, \\ -1, & \text{ha } -1 < x < 2. \end{cases}$$



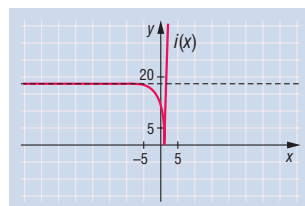
c) A függvény átalakítva:

$$h(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 4, & \text{ha } x \geq 3, \\ -2^{x-1} + 4, & \text{ha } x < 3. \end{cases}$$



d) A függvény átalakítva:

$$i(x) = 2 \cdot |3^{x+1} - 9| = \begin{cases} 2 \cdot (3^{x+1} - 9), & \text{ha } x \geq 1, \\ -2 \cdot (3^{x+1} - 9), & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$



3179 a) Ábrázolás előtt rendezve az egyenletet:

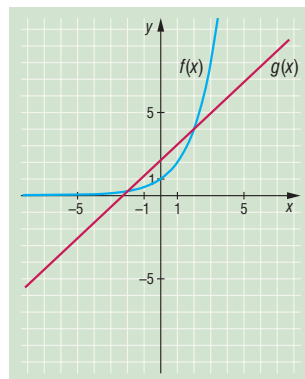
$$2^x = \frac{15}{16} \cdot x + \frac{34}{16}.$$

Legyen

$$f(x) = 2^x \quad \text{és} \quad g(x) = \frac{15}{16} \cdot x + \frac{34}{16}.$$

Az ábráról leolvasott megoldások, ellenőrzés után:

$$x_1 = 2 \quad \text{és} \quad x_2 = -2.$$



b) Ábrázolás előtt átalakítva:

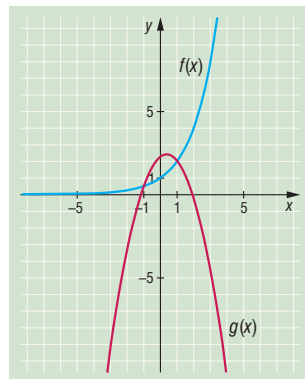
$$2^x = -x^2 + \frac{3}{4} \cdot x + \frac{9}{4} \quad \text{azaz} \quad 2^x = -\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{153}{64}.$$

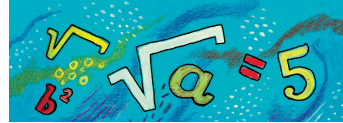
Legyen

$$f(x) = 2^x \quad \text{és} \quad g(x) = -\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{153}{64}.$$

Az ábráról leolvasott megoldások, ellenőrzés után:

$$x_1 = -1 \quad \text{és} \quad x_2 = 1.$$





Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek – megoldások

3180 a) $x = \frac{5}{4}$; b) $x = 0$; c) $x = -\frac{1}{4}$; d) $x = \frac{1}{2}$; e) $x = \frac{7}{2}$; f) $x = 1$;
 g) $x = 9$; h) $x = 2$; i) $x = -4$; j) $x = -1$; k) $x = 0$; l) $x = 5$;
 m) $x = 3$; n) $x = -5$; o) $x = \frac{13}{2}$; p) $x = \frac{1}{5}$; q) $x = \frac{7}{2}$; r) $x = -\frac{5}{2}$;
 s) $x = \frac{6}{5}$; t) $x = 6$; u) $x = 0$.

3181 a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x_1 = 6$ vagy $x_2 = 0$; c) $x_1 = 5$ és $x_2 = -7$;
 d) $x_1 = \frac{5}{2}$ és $x_2 = -\frac{5}{2}$; e) $x = -\frac{1}{5}$; f) $x = -3$;
 g) Nincs megoldás. h) $x = -4$; i) $x = -2$.

3182 a) $x = -1$; b) $x = \frac{1}{4}$; c) $x = 2$; d) $x = -\frac{2}{3}$; e) $x = 2$; f) $x = 1$.

3183 a) $x = 0$; b) $x = -2$; c) $x = 1$; d) $x = 4$; e) $x = 3$; f) $x = 2$;
 g) $x = 3$; h) $x = 4$.

3184 a) $x_1 = 1, x_2 = 0$; b) $x_1 = 2, x_2 = 1$; c) $x_1 = 2, x_2 = 1$;
 d) $x_1 = 3, x_2 = -1$; e) $x_1 = 1, x_2 = -2$; f) $x_1 = 1, x_2 = -2$;
 g) $x = 5$; h) $x = -1$; i) $x_1 \approx 1,305, x_2 = 1$;
 j) $x = -1$; k) $x = 0$; l) $x = -1$.

3185 a) $x = 2, y = 1$; b) $x = 0, y = 3$; c) $x = \frac{1}{2}, y = 2$;
 d) $x = 2, y = 1$; e) $x = 2, y = 0$; f) $x = 1, y = 1$;
 g) $x = 5, y = -7$; h) $x = 1, y = \frac{1}{2}$; i) $x = 4, y = 5$;
 j) $x = 3, y = 1$.

3186 a) $x < 5$; b) $x \geq \frac{1}{2}$; c) $x \geq \frac{3}{5}$; d) $x < -\frac{1}{3}$; e) $x > -\frac{8}{3}$; f) $x \leq \frac{5}{9}$;
 g) $x > \frac{25}{17}$; h) $x \leq -2$; i) $x < 2$; j) $x > \frac{32}{17}$.

3187 a) $x = 3$; b) $x = 4$; c) $x = 1$; d) $x = -\frac{7}{11}$; e) $x = -4$; f) $x = 3$;
 g) $x = 2$; h) $x = -3$; i) $x_1 = 1, x_2 = -2$; j) $x_1 = 4, x_2 = -2$;
 k) $x = -1$; l) $x = \frac{2}{3}$; m) $x = -1$; n) $x = -\frac{1}{3}$; o) $x = 2$; p) $x = 4$.



- 3188 a) $x_1 = 7, x_2 = 2;$ b) $x_1 = 5, x_2 = -3;$ c) $x_1 = 3, x_2 = -3;$
d) $x_1 = 4, x_2 = 1;$ e) $x_1 = 5, x_2 = -5;$ f) $x = 64;$
g) $x = 2;$ h) $x = 1;$ i) $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$
j) $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi, k, l \in \mathbb{Z};$ k) $x = 5.$
l) $x = -17;$ m) $x = 3;$ n) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2};$
o) $x_1 = 1, x_2 = -4;$ p) $x_1 = 1, x_2 = -3.$

3189 a) A hatványokat átírva:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 45 \cdot 3^x - \frac{7}{2} \cdot 2^y = 17 \\ (2) \quad 12 \cdot 3^x + \frac{5}{8} \cdot 2^y = 17 \end{array} \right\}, \text{ ahonnan } 3^x = 1 \text{ és } 2^y = 8, \text{ a megoldás: } x = 0, y = 3.$$

b) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt a két egyenletből:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 2x - 2 + y = -\frac{2}{3} \\ (2) \quad x + 3y - 1 = \frac{1}{2} \end{array} \right\}, \text{ a megoldás: } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}.$$

c) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt a két egyenletből:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 2xy = 3 \\ (2) \quad 2xy + x = 1 + \frac{3}{y} \end{array} \right\}, \text{ a megoldás: } x = 2, y = \frac{3}{4}.$$

d) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt a két egyenletből:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad x \cdot y = \frac{2}{3} \\ (2) \quad 2x - y = \frac{1}{3} \end{array} \right\}, \text{ a megoldások: } x_1 = \frac{2}{3}, y_1 = 1 \text{ és } x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = -\frac{4}{3}.$$

e) Jelölje $6^x = a$, és $5^y = b$. Így:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 5a + 8b = 13 \\ (2) \quad \frac{5}{a} + \frac{8}{b} = 13 \end{array} \right\}.$$

A (2)-es egyenletet beszorozva $a \cdot b$ -vel, valamint az (1) egyenletből kifejezett $a = \frac{13-8b}{5}$ -t helyettesítve (2)-be kapjuk:

$$5b + 8 \cdot \frac{13-8b}{5} = 13b \cdot \frac{13-8b}{5},$$

amiből ered: $b^2 - 2b + 1 = 0$. Megoldásai: $x = 0, y = 0$.

f) A (2) egyenletben átrendezés után: $y^{x^2-7y-1} = 1$. Felhasználva, hogy $1 = y^0$ ($y > 0$), valamint, hogy az exponenciális függvény szigorú monoton, kapjuk: $x^2 - 7y - 1 = 0$. Ebbe helyettesítve (1)-ből kifejezett $y = 1 - x$ -et nyerjük az $x^2 + 7x - 8 = 0$ egyenletet, melynek gyökei: $x_1 = 1$, és $x^2 = -8$, melyhez tartozó y értékek: $y_1 = 0$, és $y_2 = 9$.

Az egyenletrendszer megoldása: $(-8; 9)$ számpár.



- 3190 a) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$\frac{x+3}{x+2} > 2, \text{ amiből } \frac{-x-1}{x+2} > 0,$$

megoldása: $-2 < x < -1$.

- b) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$\frac{4x-2}{3x+2} \geq -3, \text{ amiből } \frac{13x+4}{3x+2} \geq 0,$$

megoldása: $x < -\frac{2}{3}$ vagy $-\frac{4}{13} \leq x$.

- c) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$\frac{2x+3}{4x-1} < \frac{1}{2}, \text{ amiből } \frac{10}{8x-2} < 0,$$

megoldása: $x < \frac{1}{4}$.

- d) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$x^2 - 2x > 8,$$

megoldása: $x < -2$ vagy $4 < x$.

- e) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$x^2 - 15 < -2x,$$

megoldása: $-5 < x < 3$.

- f) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$x^2 + 3 \geq -6x - 6,$$

megoldása: $x \in \mathbb{R}$.

- g) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$2 \cdot |x| \leq x + 2,$$

megoldása: $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$.

- h) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$|x-3| > \frac{1}{2} \cdot x,$$

megoldása: $x < 2$ vagy $x > 6$.

- i) A 2^x -re vonatkozóan másodfokú egyenlőtlenség, megoldása $2^x \leq 1$ vagy $2^x \geq 2$, amiből a megoldás: $x \leq 0$ vagy $x \geq 1$.

- j) Az 5^x -re másodfokú egyenlőtlenség megoldása: $\frac{1}{5} \leq 5^x \leq 25$, amiből: $-1 \leq x \leq 2$.

- k) Az $\frac{1}{2}$ -es alapú exponenciális függvény szigorú csökkenése miatt:

$$4 > \frac{2}{x},$$

megoldása: $x > \frac{1}{2}$.

- l) Az $\frac{1}{16}$ -os alapú exponenciális függvény szigorú csökkenése miatt:

$$2 \cdot |x| - 1 < 2,$$

megoldása: $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$.



- 3191** a) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x > 0$, $x \neq 1$.

A zárójelek felbontása után:

$$5 \left(1 + \frac{\sqrt{x} + 3}{2 \cdot \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} - 1} = 5^2.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:

$$\left(1 + \frac{\sqrt{x} + 3}{2 \cdot \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} - 1} = 2,$$

ha új változót vezetünk be: $\sqrt{x} = t$, beszorzás után:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0,$$

melynek gyökei: $t_1 = 3$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, csak az első felel meg, ebből $x = 9$.

- b) A jobb oldali kifejezés a számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$5^{-x} + 5^{x+2} \geq 2 \cdot \sqrt{5^{-x} \cdot 5^{x+2}} = 10.$$

A bal oldal:

$$1 - 6y - y^2 = 10 - (y + 3)^2 \leq 10.$$

Akkor van megoldás, ha mindkét oldal 10-zel egyenlő, ekkor: $x = -1$, $y = -3$.

- c) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Alakítsuk az egyik kitevőt:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1,$$

így az egyenletünk:

$$4\operatorname{tg}^{2x} + 2 \cdot 2\operatorname{tg}^{2x} - 80 = 0.$$

Az egyenlet $2\operatorname{tg}^{2x}$ -re vonatkozóan másodfokú.

Megoldásai:

$$2\operatorname{tg}^{2x} = -10, \text{ aminek nincs megoldása, és}$$

$$2\operatorname{tg}^{2x} = 8, \text{ amiből } \operatorname{tg}^{2x} = 3, \text{ azaz } \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \text{ vagy } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}.$$

$$\text{Ezek megoldásai: } x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ vagy } x_2 = -\frac{\pi}{3} + l\pi, k, l \in \mathbb{Z}.$$

- 3192** Az egyenlet $3^x = t$ -re nézve másodfokú. Mivel $3^x > 0$, akkor lesz két különböző valós gyök, ha az egyenlet diszkriminánsa $D > 0$ (1) és a t -re másodfokú egyenlet mindkét megoldása pozitív (2).

Az (1) teljesül, ha:

$$4 \cdot (p - 3)^2 - 4 \cdot (p^2 - 4) > 0,$$

ennek megoldása: $p < \frac{13}{6}$.

A (2) teljesül, ha $t_1 \cdot t_2 > 0$ (3) és $t_1 + t_2 > 0$ (4).

A (3) alapján: $p^2 - 4 > 0$, megoldása: $p < -2$ vagy $2 < p$.

A (4) alapján: $2 \cdot (p - 3) < 0$, megoldása: $p < 3$.

Az (1), (3) és (4) feltételek mindegyike teljesül, ha:

$$p < -2 \text{ vagy } 2 < p < \frac{13}{6}.$$



3193 Az első egyenlet:

$$2^{6x} + 2^{6y} = 12.$$

A második egyenletből:

$$x + y = \frac{5}{6}, \text{ vagyis } 6x + 6y = 5.$$

Az első egyenletbe helyettesítve:

$$2^{6x} + 2^{5-6x} = 12.$$

A 2^{6x} -re nézve másodfokú egyenlet megoldásai:

$$2^{6x} = 8 \text{ és } 2^{6x} = 4.$$

Az egyenletrendszer megoldásai:

$$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{3} \text{ és } x_2 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{1}{2}.$$

3194 a) Válasszuk szét a különböző alapokhoz tartozó hatványokat:

$$4^{-x} - \frac{3^{-x}}{\sqrt{3}} > \sqrt{3} \cdot 3^{-x} - \frac{4^{-x}}{2},$$

$$4^{-x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) > 3^{-x} \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\frac{3}{2} \cdot 4^{-x} > \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3^{-x},$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x} > \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3,$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x} > \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Az exponenciális függvény szigorú növekedése $\left(\frac{4}{3} > 1\right)$ miatt:

$$-x > \frac{3}{2}, \text{ amiből } x < -\frac{3}{2}.$$

b) Írjuk fel mindegyik alapot 2 hatványaként:

$$(2^{-2})^{3x} - (2^{-3})^{x-1} - 128 \leq 0,$$

$$2^{-6x} - 2^{-3x+3} - 128 \leq 0.$$

Az egyenlőtlenség másodfokú a $2^{-3x} = y$ -ra vonatkozóan:

$$y^2 - 8y - 128 \leq 0.$$

A másodfokú kifejezés zérushelyei: $y_1 = 16, y_2 = -8$.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-8 \leq y \leq 16.$$

Visszahelyettesítve:

$$-8 \leq 2^{-3x} \leq 16.$$

A bal oldali egyenlőtlenség minden valós szám esetén igaz, a jobb oldali pedig teljesül, ha $x \geq -\frac{4}{3}$.



A logaritmus fogalma – megoldások

- 3195** a) 2; b) 3; c) 7; d) $-\frac{1}{2}$;
 e) -2; f) $\frac{7}{3}$; g) $\frac{2}{5}$; h) $\frac{1}{7}$;
 i) 3; j) -4; k) 0; l) 23;
 m) -2; n) -4; o) -3; p) -2.

- 3196** a) 10; b) 57; c) 41; d) 11;
 e) 49; f) 27; g) 25; h) 169;
 i) 3; j) 8; k) 5; l) 81;
 m) 0,1; n) $\frac{1}{5}$; o) $\frac{1}{25}$; p) $\frac{1}{17}$.

- 3197** a) $x = 64$; b) $x = 625$; c) $x = \frac{1}{3}$; d) $x = \frac{1}{16}$;
 e) $x = 7$; f) $x = 5$; g) $x = 4$; h) $x = \frac{1}{2}$;
 i) $x = \frac{1}{9}$; j) $x = \frac{1}{32}$; k) $x = \frac{1}{100000}$; l) $x = \frac{1}{128}$.

- 3198** a) $x = 2$; b) $x = 4$; c) $x = 2$; d) $x = 10$;
 e) $x = 100$; f) $x = 1000$; g) $x = \sqrt{6}$; h) $x = 8$;
 i) $x = \frac{1}{6}$; j) $x = \frac{1}{5}$; k) $x = 32$; l) $x = \frac{1}{27}$;
 m) $x = \frac{8}{27}$; n) $x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq 1$; o) nincs megoldás; p) $x = 8$.

- 3199** a) $x > -1$; b) $x > \frac{6}{5}$; c) $x > \frac{3}{2}$; d) $-\frac{5}{7} < x < \frac{4}{5}$;
 e) $x > \frac{1}{4}$; f) $x < -\frac{2}{3}$ vagy $x > \frac{1}{4}$; g) $x > \frac{8}{3}$; h) $-\frac{5}{7} < x < \frac{4}{5}$;
 i) $x > \frac{3}{4}, x \neq 1$; j) nincs megoldás.

- 3200** a) 4; b) $-\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{4}$; d) -10; e) $\frac{2}{7}$; f) $-\frac{8}{5}$;
 g) $\frac{2}{5}$; h) $-\frac{5}{3}$; i) $-\frac{4}{3}$.

3201 a) $\log_2[\log_2(\log_2 16)] = \log_2(\log_2 4) = \log_2 2 = 1$;

b) $\log_5[\log_3(\log_{11} 11^3)] = \log_5(\log_3 3) = \log_5 1 = 0$;



$$c) \lg[\lg(\lg 10^{(10^{10})})] = \lg(\lg 10^{10}) \cdot \lg 10 = 1;$$

$$d) \log_5[\log_2(\log_6 \sqrt[32]{6})] = \log_5\left(\log_2 \frac{1}{32}\right) = \log_5(-5), \text{ ami nem értelmezhető.}$$

$$3202 \ a) 10 \cdot 10^{\lg 5} = 10 \cdot 5 = 50;$$

$$b) \frac{3^2}{3^{\log_3 6}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2};$$

$$c) \frac{5}{5^{\log_5 3}} = \frac{5}{3};$$

$$d) 4 \cdot 4^{\log_2 5} = 4 \cdot (2^{\log_2 5})^2 = 4 \cdot 5^2 = 100;$$

$$e) \frac{2^3}{2^{\log_4 25}} = \frac{8}{(4^{\log_4 25})^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{5};$$

$$f) 3 \cdot 3^{\log_9 4^3} = 3 \cdot (9^{\log_9 64})^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \sqrt{64} = 3 \cdot 8 = 24;$$

$$g) 7^{\log_7 5} \cdot (49^{\log_{49} 16})^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 4 = 20;$$

$$h) \frac{5^{\log_{25} 9^3}}{5^{\log_5 4^2}} = \frac{(25^{\log_{25} 9^3})^{\frac{1}{2}}}{4^2} = \frac{(3^6)^{\frac{1}{2}}}{16} = \frac{27}{16};$$

$$i) \frac{16^{\log_4 5}}{16^{\log_2 3}} = \frac{(4^{\log_4 5})^2}{(2^{\log_2 3})^4} = \frac{5^2}{3^4} = \frac{25}{81};$$

$$j) \frac{9^2}{9^{\log_3 2}} = \frac{81}{(3^{\log_3 2})^2} = \frac{81}{4};$$

$$k) \sqrt{5^4 \cdot 5^{\log_5 4}} = 5^2 \cdot \sqrt{4} = 50;$$

$$l) \sqrt[3]{\frac{10^6}{10^{\lg 27}}} = \sqrt[3]{\frac{10^6}{27}} = \frac{100}{3};$$

$$m) \log_a \frac{a^{-2} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{-6} \cdot a^{\frac{3}{2}}} = \log_a a^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2};$$

$$n) \log_x \left(x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{8}} \right) = \log_x x^{-\frac{7}{8}} = -\frac{7}{8}.$$

$$3203 \ a) \text{ Az } x^2 - 2x - 8 > 0 \text{ egyenlőtlenség megoldása: } x < -2 \text{ vagy } 4 < x.$$

$$b) \text{ Az } x^2 - 9 > 0 \text{ egyenlőtlenség megoldása: } x < -3 \text{ vagy } x > 3.$$

$$\text{Az } 1 - 3x > 0 \text{ egyenlőtlenség megoldása: } x < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Az egyenlőtlenségek közös megoldása: } x < -3.$$

$$c) \text{ A } 3x^2 - 16x + 5 > 0 \text{ egyenlőtlenség megoldása: } x < \frac{1}{3} \text{ vagy } x > 5.$$

$$\text{A } 7x + 5 > 0 \text{ egyenlőtlenség megoldása: } x > -\frac{5}{7}.$$

$$\text{Az egyenlőtlenségek közös megoldása: } -\frac{5}{7} < x < \frac{1}{3} \text{ vagy } x > 5.$$

$$d) \text{ A } 12x^2 + 5x - 3 > 0 \text{ egyenlőtlenség megoldása: } x < -\frac{3}{4} \text{ vagy } \frac{1}{3} < x.$$

$$\text{A } x^2 + 2x > 0 \text{ egyenlőtlenség megoldása: } x < -3 \text{ vagy } 0 < x.$$

$$\text{Az egyenlőtlenségek közös megoldása: } x < -2 \text{ vagy } \frac{1}{3} < x.$$



e) A $3 - |x| > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $-3 < x < 3$.

A $2x + 3 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x > -\frac{3}{2}$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $-\frac{3}{2} < x < 3$.

f) Az $|x| - 2 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < -2$ vagy $2 < x$.

Az $x + 5 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x > -5$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $-5 < x < -2$ vagy $2 < x$.

g) A $2|x| - 1 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < -\frac{1}{2}$ vagy $\frac{1}{2} < x$.

Az $x^2 - x > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < 0$ vagy $1 < x$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $x < -\frac{1}{2}$ vagy $1 < x$.

h) A $3^x - 9 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x > 2$.

A $3x + 2 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x > -\frac{2}{3}$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $x > 2$.

i) A $4x + 5 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x > -\frac{5}{4}$ vagy $x > 0$, $x \neq 1$.

Az $1 - 3x > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < \frac{1}{3}$ vagy $x > -3$, $x \neq -2$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $0 < x < \frac{1}{3}$.

j) A $17x - 2 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x > \frac{2}{17}$ vagy $x > 1$, $x \neq 2$.

Az $6 - 2x > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < 3$ vagy $x > 0$, $x \neq 1$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $1 < x < 3$, $x \neq 2$.

3204 a) A $-4^{x+1} + 33 \cdot 2^x - 8 > 0$ egyenlőtlenség 2^x -re másodfokú, megoldása: $\frac{1}{4} < 2^x < 8$, amiből:
 $-2 < x < 3$.

b) A $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ és $\operatorname{tg} x > 0$ egyenlőtlenségek együtt teljesülnek, ha:

$$k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) A $\sin x > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $l \cdot 2\pi < x < \pi + l \cdot 2\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

Az $x^2 - 3x + 2 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < 1$ vagy $2 < x$.

A két egyenlőtlenség közös megoldása:

$$0 < x < 1 \quad \text{vagy} \quad 2 < x < \pi \quad \text{vagy} \quad k \cdot 2\pi < x < \pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad |k| \geq 1.$$

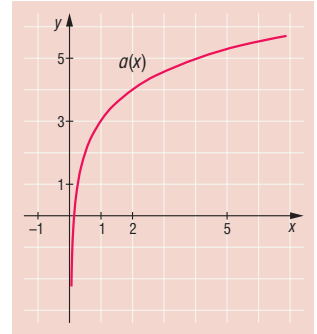


A logaritmusfüggvény – megoldások

3205 a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

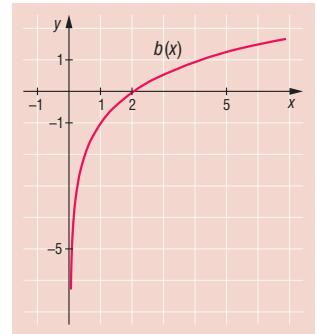
Zérushelye: $x = \frac{1}{8}$.



b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

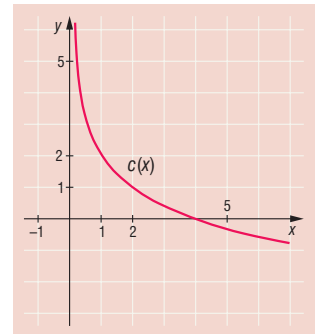
Zérushelye: $x = 2$.



c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

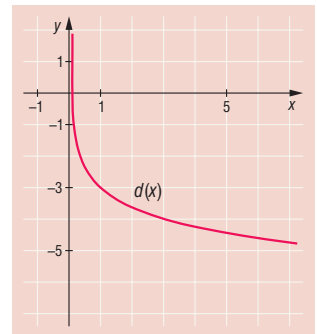
Zérushelye: $x = 4$.



d) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

Zérushelye: $x = \frac{1}{27}$.

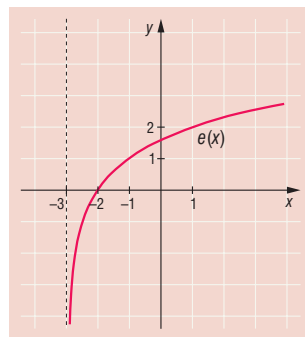




e) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > -3$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

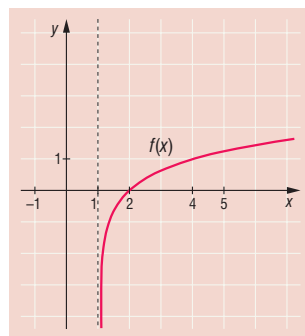
Zérushelye: $x = -2$.



f) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

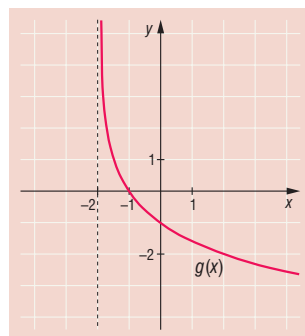
Zérushelye: $x = 2$.



g) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > -2$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

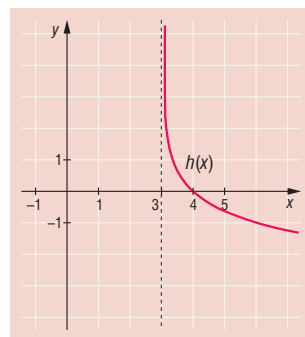
Zérushelye: $x = -1$.

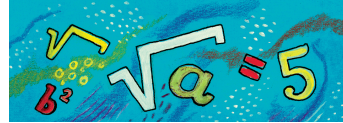


h) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 3$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

Zérushelye: $x = 4$.

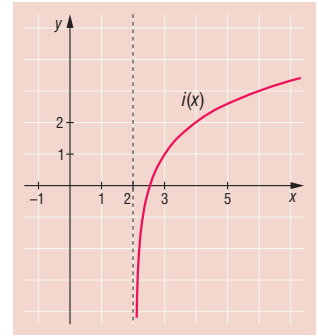




i) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 2$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

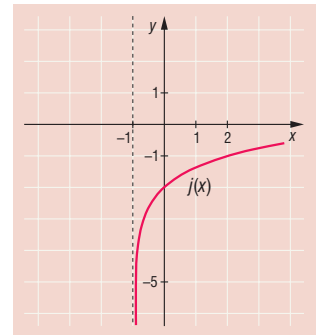
Zérushelye: $x = \frac{5}{2}$.



j) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > -1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

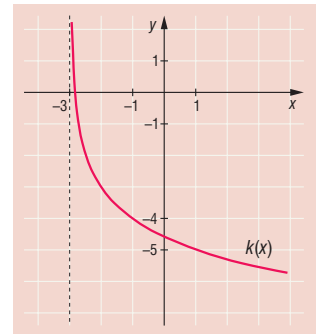
Zérushelye: $x = 8$.



k) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > -3$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

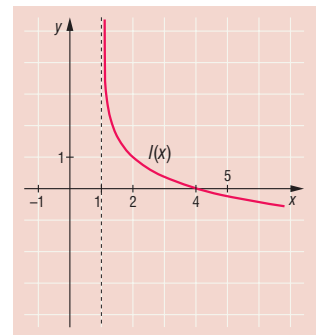
Zérushelye: $x = -\frac{23}{8}$.



l) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

Zérushelye: $x = 4$.

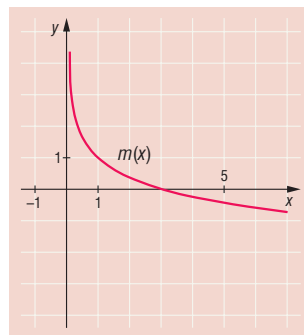




m) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

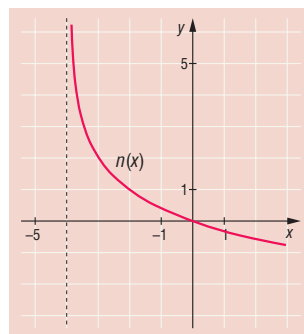
Zérushelye: $x = 3$.



n) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > -4$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

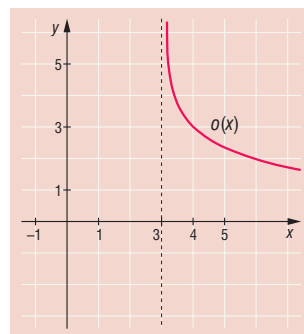
Zérushelye: $x = 0$.



o) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 3$.

Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.

Zérushelye: $x = 30$.



3206 a) $a(x) = \log_2 x - 2$;

c) $c(x) = \log_2(x - 1)$;

e) $e(x) = \log_2(x + 1) + 1$;

g) $g(x) = -\log_2 x$ vagy $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$;

i) $i(x) = -\log_2(x + 2) - 3$ vagy $i(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) - 3$.

b) $b(x) = \log_2 x - 4$;

d) $d(x) = \log_2(x - 3)$;

f) $f(x) = \log_2(x - 2) - 3$;

h) $h(x) = 1 - \log_2 x$ vagy $h(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$;

3207 a) A függvénybe behelyettesítve:

$$s(0) = 100, \quad s(1) = 100 + 30 \cdot \lg 8 \approx 127,1,$$

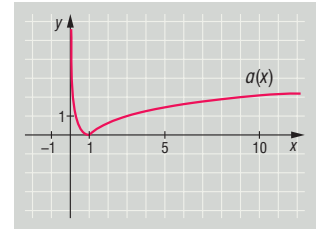
tehát a megjelenéskor 100 000 db-ot, egy év múlva 127 000 darabot fognak eladni.

b) A $200 = 100 + 30 \cdot \lg(7t + 1)$ egyenletből:

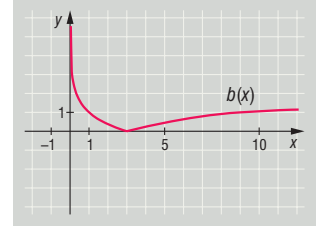
$$7t + 1 = 10^{\frac{10}{3}}, \quad \text{amiből} \quad t \approx 308 \text{ év.}$$



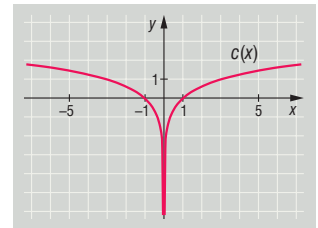
3208 a) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 0$.



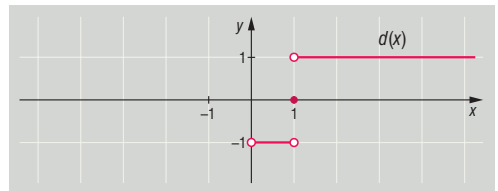
b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 0$.



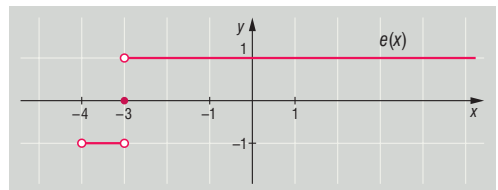
c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.



d) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > 0$.



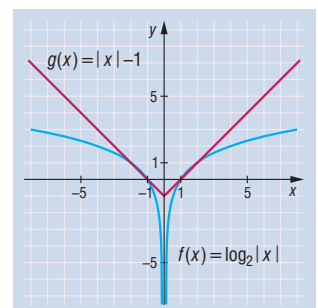
e) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, x > -4$.



3209 a) Az ábráról leolvasott megoldásokat ellenőrizni kell.

Megoldások:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$

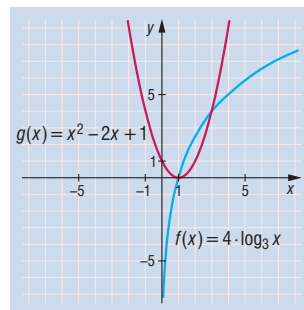




b) Az ábráról leolvasott megoldásokat ellenőrizni kell.

Megoldások:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$



A logaritmus azonosságai – megoldások

3210 a) $a = \frac{x \cdot z}{y};$

b) $b = x^2 \cdot y;$

c) $c = 81 \cdot z^3;$

d) $d = \frac{y^2}{z^3};$

e) $e = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^2}};$

f) $f = \frac{10}{x};$

g) $g = \frac{100 \cdot \sqrt{x}}{125} = \frac{4 \cdot \sqrt{x}}{5};$

h) $h = \frac{\sqrt[3]{z} \cdot \sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[5]{10}};$

i) $i = \frac{1}{10000 \cdot (x+1) \cdot y^3};$

j) $j = 10^{x-y} \cdot z = \frac{z \cdot 10^x}{10^y}.$

3211 a) $a = 8;$

b) $b = 5;$

c) $c = 11;$

d) $d = 10;$

e) $e = 12;$

f) $f = \frac{13}{9};$

g) $g = 2 \cdot \sqrt{7};$

h) $h = \frac{1}{45}.$

3212 a) $\log_{\sqrt{2}} \frac{9 \cdot 48}{6^3} = \log_{\sqrt{2}} \frac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^3} = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2;$

b) $\log_6 \frac{12^5}{9^2 \cdot 4^4 \cdot 2} = \log_6 \frac{2^{10} \cdot 3^5}{2^9 \cdot 3^4} = \log_6 6 = 1;$

c) $\log_3 \frac{18^4 \cdot 256 \cdot 72^2}{36^3 \cdot 24^4} = \log_3 \frac{2^{12} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^6} = \log_3 9 = 2;$

d) $\log_5 \frac{6^6 \cdot 10^2}{32 \cdot 9^3 \cdot 200} = \log_5 \frac{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^2}{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^2} = \log_5 1 = 0;$

e) $\log_{\frac{1}{18}} \frac{6^7 \cdot 15^5 \cdot 35^5}{10^6 \cdot 21^5 \cdot 25^2 \cdot 3^5} = \log_{\frac{1}{18}} \frac{2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{10} \cdot 7^5}{2^6 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 7^5} = \log_{\frac{1}{18}} 18 = -1;$

f) $\log_8 \frac{\sqrt{2200} \cdot \sqrt{40}}{\sqrt{55} \cdot 10} = \log_8 \frac{10 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{11} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11} \cdot 10} = \log_8 4 = \frac{2}{3};$

g) $\log_2 \frac{\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ}{3} = \log_2 \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{3} = \log_2 \frac{1}{4} = -2;$



$$h) \log_4 \frac{\sin 45^\circ \cdot \sqrt{2}}{\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \log_4 \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \log_4 2 = \frac{1}{2};$$

$$i) \log_5 \frac{15 \cdot 25 \cdot \sqrt{63} \cdot \sqrt{28}}{126} = \log_5 \frac{3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 2}{3^2 \cdot 7 \cdot 2} = 3.$$

3213 a) Mivel az adott szorzatban a $\lg \operatorname{tg} 45^\circ$ értéke 0, ezért a szorzat is 0.

$$b) \lg \frac{\cos 30^\circ \cdot 4 \cdot \sin^2 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \lg \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \lg 1 = 0;$$

$$c) \lg \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \lg \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \lg 1 = 0;$$

$$d) \log_6 \frac{9a - 6}{a^2 - a} = \log_6 \frac{12}{2} = \log_6 6 = 1;$$

$$e) \log_{0,1} \left(10 \cdot \frac{2x + 5}{5} \right) = \log_{0,1} [2 \cdot (2x + 5)] = \log_{0,1} 10 = -1.$$

3214 a) $\lg(6 \cdot 10^{23}) = \lg 6 + 23 < \log_2 16^6 = \log_2 2^{24} = 24$, mert $\lg 6 < 1$;

$$b) \lg(9,1 \cdot 10^{-31}) = \lg 9,1 - 31 < \log_5 \left(\frac{1}{125} \right)^{10} = \log_5 5^{-30} = -30, \text{ mert } \lg 9,1 < 1;$$

$$c) \log_2 \left[5 \cdot \left(\frac{1}{32} \right)^{16} \right] = \log_2 (5 \cdot 2^{-80}) = \log_2 5 - 80 > \log_3 \left[5 \cdot \left(\frac{1}{81} \right)^{20} \right] = \log_3 (5 \cdot 3^{-80}) = \log_3 5 - 80,$$

mert $\log_2 5 > \log_3 5$.

$$d) \text{ Bal oldal: } \lg \left[\log_{\frac{2}{3}} (\log_7 \sqrt[3]{49}) \right] = \lg \left[\log_{\frac{2}{3}} \left(\log_7 7^{\frac{2}{3}} \right) \right] = \lg \left(\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} \right) = \lg 1 = 0.$$

$$\text{Jobb oldal: } \log_2 \left[\log_{\frac{5}{6}} (\log_8 \sqrt{32}) \right] = \log_2 \left(\log_{\frac{5}{6}} \frac{5}{6} \right) = \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0.$$

A két kifejezés egyenlő.

3215 a) $\lg 2250 = \lg(15^2 \cdot 10) = 2b + 1$.

$$b) \lg 75 = \lg \frac{750}{10} = \lg \frac{50 \cdot 15}{10} = a + b - 1.$$

$$c) \text{ Az } a = 1 + \lg 5 \text{ és } b = \lg 3 + \lg 5 \text{ alapján } \lg 3 = b - \lg 5 = b - (a - 1) = b - a + 1.$$

3216 A bal oldali tagokat átírva b alapú logaritmusra:

$$\log_b a + 6 \cdot \log_b a + 12 \cdot \log_b a - 20 \cdot \log_b a = -\log_b a.$$

$$\text{A jobb oldal: } \log_b a^{-1} = -\log_b a.$$



Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek – megoldások

- 3217** a) Értelmezés: $x > \frac{5}{7}$, megoldás: $x = 3$.
- b) Értelmezés: $x > -\frac{1}{3}$, megoldás: $x = 5$.
- c) Értelmezés: $x > -\frac{1}{8}$, megoldás: $x = \frac{1}{2}$.
- d) Értelmezés: $x > \frac{10}{11}$, megoldás: $x = \frac{91}{100}$.
- e) Értelmezés: $x > \frac{3}{10}$, megoldás: $x = \frac{7}{10}$.
- f) Értelmezés: $x > \frac{10}{13}$, megoldás: $x = \frac{21}{26}$.
- g) Értelmezés: $x < -8$ vagy $x > 8$, megoldások: $x_1 = 18$, $x_2 = -18$.
- h) Értelmezés: $x < \frac{7 - \sqrt{77}}{2}$ vagy $x > \frac{7 + \sqrt{77}}{2}$, megoldások: $x_1 = 8$, $x_2 = -1$.
- i) Értelmezés: $x \in \mathbb{R}$, megoldások: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.
- j) Értelmezés: $x < \frac{9 - \sqrt{21}}{2}$ vagy $x > \frac{9 + \sqrt{21}}{2}$, megoldások: $x_1 = 10$, $x_2 = -1$.
- k) Értelmezés: $x > \frac{15}{4}$, megoldás: $x = 5$.
- l) Értelmezés: $x > \frac{7}{3}$, megoldás: $x = 8$.
- m) Értelmezés: $x > 0$, $x \neq 1$, megoldások: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Csak az első megoldás.
- n) Értelmezés: $x > \frac{5}{6}$, $x \neq 1$, adódik: $x_1 = 5$, $x_2 = 1$. Csak az első megoldás.
- o) Értelmezés: $x > \frac{10}{7}$, adódik: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$. A harmadik nem megoldás.
- 3218** a) Értelmezés: $x > -1$, megoldás: $x = 7$.
- b) Értelmezés: $x > \frac{4}{3}$, adódik: $x = -7$, de nem megoldás.
- c) Értelmezés: $x > \frac{3}{2}$, adódik: $x = -\frac{9}{10}$, de nem megoldás.
- d) Értelmezés: $x > \frac{3}{5}$, megoldás: $x = 3$.
- e) Értelmezés: $x > \frac{5}{3}$, adódik: $x = -\frac{3}{8}$, de nem megoldás.



- f) Értelmezés: $-7 < x < 1$, megoldás: $x = -2$.
- g) Értelmezés: $x > -\frac{7}{5}$, megoldás: $x = 4$.
- h) Értelmezés: $x > -\frac{5}{3}$, megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{19}{13}$.
- i) Értelmezés: $x > \frac{5}{43}$, megoldások: $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{5}{3}$.
- j) Értelmezés: $x > \frac{1}{3}$, adódik: $x_1 = -3$, $x_2 = 27$. Csak a második megoldás.
- k) Az értelmezési tartomány üres halmaz, nincs megoldás.
- l) Értelmezés: $x > 8$, adódik: $x_1 = \frac{14}{3}$, $x_2 = 2$. Egyik sem megoldás.
- m) Értelmezés: $x > 6$, adódik: $x_1 = 1$, $x_2 = 8$. Csak a második megoldás.
- n) Értelmezés: $x > \frac{1}{5}$, adódik: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{17}{15}$. Csak az első megoldás.

3219 Értelmezés: $x > 0$, $y > 0$.

- a) $x = 1024$, $y = 16$; b) $x = 81$, $y = 9$; c) $x = 25$, $y = \frac{1}{5}$; d) $x = 7$, $y = 49$;
 e) $x = 1$, $y = 4$; f) $x = 4$, $y = 64$; g) $x = \frac{1}{4}$, $y = 8$; h) $x = \frac{1}{10}$, $y = 10$.

3220 a) Értelmezés: $x > \frac{3}{4}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x \leq \frac{4}{3}$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{3}{4} < x \leq \frac{4}{3}$.

b) Értelmezés: $x > \frac{1}{5}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $x \geq -3$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x > \frac{1}{5}$.

c) Értelmezés: $x > \frac{3}{4}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x > 7$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x > 7$.

d) Értelmezés: $x > \frac{5}{3}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x \leq 3$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{5}{3} < x \leq 3$.

e) Értelmezés: $x > \frac{3}{5}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $x > 6$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x > 6$.

f) Értelmezés: $x > -\frac{3}{4}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $x < -\frac{74}{100}$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{3}{4} < x < -\frac{74}{100}$.



3221 a) Értelmezés: $x > \frac{1}{7}$, megoldás: $x = \frac{3}{2}$.

b) Értelmezés: $x > \frac{1}{2}$, adódik: $x = -4$, de ez nem megoldás.

c) Értelmezés: $x > -1$. Érdemes beszorozni 2-vel, a $3x + 7 = (x + 1)^2$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Csak a második megoldás.

d) Értelmezés: $x > \frac{1}{3}$. Átszorítás után a $8x + 9 = (3x - 1)^2$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei:

$x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{4}{9}$. Csak az első megoldás.

e) Értelmezés: $x > 1000$. Átalakítva az egyenletet:

$$\lg(x - 1000) = \lg 10\,000 - \lg 25 = \lg 400.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt $x - 1000 = 400$, tehát: $x = 1400$.

f) Értelmezés: $x > -1$, $x \neq 0$. Átszorítás után, felhasználva a logaritmusfüggvény szigorú monotonitását, az $x^2 + 2x - 3 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Csak az $x_1 = 1$ a megoldás.

g) Értelmezés: $(x - 5) \cdot (x - 1) > 0$, $2x - 10 > 0$ és $\lg(2x - 10) \neq 0$ közös megoldása: $x > 5$, $x \neq 5,5$.

Az egyenletet átszorozva $\lg(2x - 10)$ -zel, kapjuk: $\lg(x - 5) \cdot (x - 1) = \lg(2x - 10)$. A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt $x^2 - 8x + 15 = 0$, amely akkor teljesül, ha: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$. Az értelmzési tartomány miatt az egyenletnek nincs megoldása.

h) Értelmezés: $x > 2$. Felhasználva a logaritmus azonosságait, kapjuk: $\lg[(x - 2) \cdot 8] = \lg(x^2 - 1)$, melyből a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt adódik: $8x - 16 = x^2 - 1$, vagyis $x^2 - 8x + 15 = 0$. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Mindkét gyök megfelel az adott értelmzési tartománynak.

i) A logaritmus definíciója alapján, sorban felbontva a zárójeleket:

$$\log_3[\log_4(\log_5 x)] = 1,$$

amiből $\log_4(\log_5 x) = 3$, ebből pedig $\log_5 x = 64$, amiből $x = 5^{64}$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

j) A logaritmus definíciója alapján felbontva a zárójeleket: $x = 25$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

k) Az előző módszerrel: $x = 128$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

l) Az előző módszerrel: $x = 16$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

3222 a) Értelmezés: $0 < x < 3$, $x \neq 1$ vagy $x > \frac{11}{3}$. A logaritmus definíciója alapján: $(3x^2 - 20x + 33) = 1$, amiből: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{8}{3}$. Mindkettő megoldás.

b) Értelmezés: $0 < x < \frac{7}{2} = 3,5$, $x \neq 1$ vagy $x > 6$. A logaritmus definíciójának segítségével kapjuk: $2x^2 - 19x + 42 = x$, amiből: $x_1 = 7$, $x_2 = 3$. Mindkettő megoldás.



- c) Értelmezés: $x > 6$. A logaritmus definíciója alapján: $2x^2 - 7x - 30 = x^2$, amiből: $x_1 = 10$, $x_2 = -3$. Csak az első megoldás.
- d) Értelmezés: $x > \frac{3}{4}$, $x \neq 1$. A logaritmus definíciója alapján $4x^2 - 3x = x^3$, amiből: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Csak az $x = 3$ megoldás.
- e) Értelmezés: $x > 0$. A $\lg x$ -re nézve másodfokú egyenlet megoldásaiból: $x_1 = 10^5$, $x_2 = \sqrt{10}$.
- f) Értelmezés: $x > 0$. A $\log_3 x$ -re nézve másodfokú $\log_3^2 x - 8 \cdot \log_3 x + 15 = 0$ egyenlet megoldásaiból adódik: $x_1 = 3^5 = 243$, $x_2 = 3^3 = 27$.
- g) Értelmezés: $x > 0$. A $4 \cdot \log_5^2 x + 9 \cdot \log_5 x - 9 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásaiból adódik: $x_1 = 5^{\frac{3}{4}}$, $x_2 = 5^{-3} = \frac{1}{125}$.
- h) Értelmezés: $x > \sqrt{2}$. A $\lg\left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right) = \lg 3$ egyenletet megoldásai: $x^2 = -1$ és $x^2 = 4$. Csak a másodikból adódik megoldás, és abból is csak az $x = 2$ felel meg.
- i) Értelmezés: $\log_2 x \neq -1 \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$ és $\log_2 x \neq 5$ ($x \neq 32$).
- Beszorozva az egyenletet a közös nevezővel, és $\log_2 x = a$ -val jelölve, kapjuk:
- $$2 \cdot (a - 5) - (a + 1) = (a + 1) \cdot (a - 5),$$
- melyből $a^2 - 5a + 6 = 0$, amiből $a_1 = 3$ és $a_2 = 2$, amelynek megfelelő x értékek: $\log_2 x = 3$ ($x_1 = 8$) és $\log_2 x = 2$ ($x_2 = 4$).
- j) Értelmezés: $x > 0$, $x \neq 1$. Alkalmazva a logaritmus definícióját: $x^5 = 16x$. Rendezés és kiemelés után: $x \cdot (x^4 - 16) = 0$. Mivel $x \neq 0$, ezért $x^4 - 16 = 0$. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$. Az értelmzési tartománynak csak az első gyök felel meg.

- 3223** a) Értelmezés: $x > 1$, $y > 4$. Megoldás: $x = 101$, $y = 5$.
- b) Értelmezés: $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$. Megoldás: $x = 9$, $y = 2$.
- c) Értelmezés: $x > -1$, $y < 5$. Megoldás: $x = 7$, $y = -4$.
- d) Értelmezés: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$. Megoldás: $x = 8$, $y = 27$.
- e) Értelmezés: $x > 0$, $y > 0$. Megoldás: $x = 100$, $y = 1$.
- f) Értelmezés: $x - y > 0$, $x + y > 0$. Megoldás: $x = 13$, $y = 11$.

g) Értelmezés: $x, y > 0$ vagy $x, y < 0$. Megoldás: $x_1 = \frac{1}{3}$, $y_1 = \frac{1}{12}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = -\frac{1}{12}$.

- 3224** a) Értelmezés: $x > \frac{1}{2}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x < 0$ vagy $1 < x$.
Megoldás: $1 < x$.
- b) Értelmezés: $x > 2$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $-2 < x < 4$.
Megoldás: $2 < x < 4$.
- c) Értelmezés: $x > \frac{1}{2}$. Rendezés után, a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x \leq -3$. Nincs megoldás.



- d) Értelmezés: $x > \frac{4}{5}$. Az $\frac{5x-4}{x+2} \geq 3$ egyenlőtlenségből: $x < -2$ vagy $5 \leq x$. Megoldás: $x \geq 5$.
- e) Értelmezés: $x > \frac{7}{4}$. A $\frac{4x-7}{3x-1} \leq 25$ egyenlőtlenségből: $x \leq \frac{18}{71}$ vagy $x > \frac{1}{3}$. Megoldás: $x > \frac{7}{4}$.
- f) Értelmezés: $x > \frac{3}{7}$. A $\frac{7x-3}{2x+1} \leq \frac{1}{4}$ egyenlőtlenségből: $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$. Megoldás: $\frac{3}{7} < x \leq \frac{1}{2}$.
- g) Értelmezés: $x > 6$. Az $\frac{(x-2)^2}{x-6} \geq 16$ egyenlőtlenségből: $x > 6$. Megoldás: $x > 6$.
- h) Értelmezés: $x > \frac{1}{3}$. A $\frac{15x+17}{(3x-1)^2} \geq 8$ egyenlőtlenségből: $-\frac{1}{8} \leq x \leq 1$. Megoldás: $\frac{1}{3} < x \leq 1$.
- i) Értelmezés: $x > 3$. A $(4x-3) \cdot (x-3) \geq 100$ egyenlőtlenségből adódik: $x \leq -\frac{13}{4}$ vagy $7 \leq x$.
Megoldás: $x \geq 7$.
- j) Értelmezés: $x > 12$. A $(2x+1) \cdot (x-12) \leq 27$ egyenlőtlenségből adódik: $-\frac{3}{2} \leq x \leq 13$.
Megoldás: $12 < x \leq 13$.
- k) Értelmezés: $x < -\frac{4}{3}$ vagy $x > \frac{1}{2}$. A $\frac{3x+4}{2x-1} \leq 2$ egyenlőtlenségből adódik: $x < \frac{1}{2}$ vagy $x \geq 6$.
Megoldás: $x < -\frac{4}{3}$ vagy $x \geq 6$.
- l) Értelmezés: $0 < x < 1$ vagy $x > 4$. A $\frac{4 \cdot (x^2 - 4x)}{x-1} \leq 5$ egyenlőtlenségből adódik: $x \leq \frac{1}{4}$
vagy $1 < x \leq 5$. Megoldás: $0 < x \leq \frac{1}{4}$ vagy $4 < x \leq 5$.
- m) Értelmezés: $x > 4$ vagy $x < 2$. Az $(x-2) \cdot (x-4) \leq 3$ egyenlőtlenségből adódik: $1 \leq x \leq 5$.
Megoldás: $1 \leq x < 2$ vagy $4 < x \leq 5$.
- n) Értelmezés: $x > 4$. A $(3+x) \cdot (x-4) > 2x+6$ egyenlőtlenségből adódik: $x < -3$ vagy $x > 6$.
Megoldás: $x > 6$.
- o) Értelmezés: $-4 < x < 4$. A $4 - |x| \geq 8^{\frac{1}{3}}$ egyenlőtlenségből adódik: $-2 \leq x \leq 2$.
Megoldás: $-2 \leq x \leq 2$.
- p) Értelmezés: $x < 0$. Az $x^2 - 2x - 3 > 0$ egyenlőtlenségből adódik: $x < -1$ vagy $x > 3$.
Megoldás: $x < -1$.

3225 a) Értelmezés: $x > \frac{5}{3}$. Áttérve 2-es alapú logaritmusra az $\frac{(x+1)^2}{3x-5} = 4$ egyenlethez jutunk.
Megoldás: $x_1 = 3, x_2 = 7$.

b) Értelmezés: $x > 0, x \neq 1$. Áttérve 3-as alapú logaritmusra, a $\log_3 x + \frac{8}{\log_3 x} = 6$ másodfokú egyenletből: $x_1 = 9, x_2 = 81$.



- c) Mivel $5^x > 0$, az egyenletnek minden valós szám esetén van értelme. Írjunk fel minden tagot logaritmussal, és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\lg[10^x \cdot (5^x + 1)] = \lg(2^x \cdot 30).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt, és 2^x -nel osztva, a másodfokú egyenlet megoldásai: $5^x = -6$, aminek nincs megoldása és $5^x = 5$, ahonnan $x = 1$.

- d) Értelmezés: $x > 0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$(3 + \lg x) \cdot (\lg x - \lg 3) = \lg 3 + 4.$$

A $\lg x$ -re másodfokú egyenlet:

$$(\lg x)^2 + (3 - \lg 3) \cdot \lg x - 4 \cdot (\lg 3 + 1) = 0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (3 - \lg 3)^2 + 16 \cdot (\lg 3 + 1) = 25 + 10 \cdot \lg 3 + (\lg 3)^2 = (5 + \lg 3)^2.$$

A megoldások: $\lg x = \lg 30$, amiből $x = 30$ és $\lg x = -4$, amiből $x = 10^{-4}$.

- 3226** Az értelmzésből ($x > 0$, $x \neq 1$, $px > 0$) következik, hogy csak pozitív p -k esetén van megoldás. A logaritmus definíciója szerint: $x^p = px$.

Ha $p = 1$, akkor a megoldás: $x > 0$, $x \neq 1$.

Ha $p \neq 1$ (de $p > 0$), vegyük mindkét oldal p alapú logaritmusát: $p \cdot \log_p x = 1 + \log_p x$.

Ebből $\log_p x = \frac{1}{p-1}$, a logaritmus definíciója alapján: $x = p^{\frac{1}{p-1}}$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

- 3227** a) Értelmezés: $x, y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Legyen $a = \frac{\lg x}{\lg y}$, ezzel a második egyenlet: $a + \frac{1}{a} = \frac{13}{6}$, aminek megoldásai: $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$.

$$\frac{\lg x}{\lg y} = \frac{3}{2} \text{ az első egyenletbe beírva: } x_1 = 1000, y_1 = 100.$$

$$\frac{\lg x}{\lg y} = \frac{2}{3} \text{ az első egyenletbe helyettesítve: } x_2 = 100, y_2 = 1000.$$

- b) Értelmezés: $x > 4$, $y > 1$, $x - y + 5 > 0$. Az első egyenletből:

$$(x - 4)^2 = \frac{y^2 - 1}{6}. \quad (1)$$

A második egyenletből:

$$\frac{x + 2y + 2}{x - y + 5} = 3,$$

ahonnan

$$y = \frac{2x + 13}{5},$$

ezt (1)-be helyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$73x^2 - 626x + 1128 = 0.$$

A megoldásai: $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{188}{73}$, a második nem megoldás, mert $x > 4$, az elsőből $y = 5$.



Vegyes feladatok – megoldások

3228 Az egyes kifejezések értékei:

$$A = \frac{1}{8}, \quad B = -2, \quad C = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}, \quad D = -3, \quad E = \frac{13}{6}, \quad F = \frac{64}{25}, \quad G = \frac{1}{2}, \quad H = \frac{1}{2}.$$

A növekvő sorrend: $D < B < A < C < G = H < E < F$.

3229 a) Igaz. b) Hamis. c) Hamis. d) Igaz. e) Igaz. f) Igaz.

3230 a) $x_1 = 3, x_2 = 4$. b) $x = 2$. c) $x = 3$.

d) Értelmezés: $x > -\frac{1}{4}$, megoldás: $x_1 = 0, x_2 = 5$.

e) Értelmezés: $-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{5}$, megoldás: $x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{5}$. Csak a második megoldás.

f) Értelmezés: $x > 0$. Átalakítva az egyenletet $(\log_2 x)$ -re másodfokú egyenletet kapunk:

$$2 \cdot (\log_2 x)^2 - (\log_2 x) - 1 = 0.$$

Legyen: $\log_2 x = a$. A $2a^2 - a - 1 = 0$ egyenlet gyökei: $a_1 = 1$ és $a_2 = -\frac{1}{2}$, ennek megfelelően

$x_1 = 2$ és $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mindkét gyök megfelel az egyenlet értelmezési tartományának.

g) Értelmezés: $x \geq 0$. Jelölje $3^{\sqrt{x}} = a$ -nak, s átrendezve az $a^2 - 3a + 2 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $a_1 = 2$ és $a_2 = 1$. Ebből a $3^{\sqrt{x}} = 2$, ahol mindkét oldal 3-as alapú logaritmusát véve kapjuk:

$$\sqrt{x} \cdot \log_3 3 = \log_3 2 \Rightarrow x = \log_3^2 2, \text{ valamint } 3^{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow 3^{\sqrt{x}} = 3^0 \Rightarrow x = 0.$$

Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

Megjegyzés: Az előbbi gyök számolható úgy is, hogy mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve kapjuk:

$$\sqrt{x} \cdot \lg 3 = \lg 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0,63 \Rightarrow x \approx 0,4.$$

h) Összevonva a 11^{2x} és 13^x együtthatóit, átrendezve az egyenletet kapjuk:

$$49 \cdot 13^x = 49 \cdot 11^{2x},$$

melyből $x = 0$. Az egyenletnek egy gyöke van, az $x = 0$.

i) Értelmezés: $x < \frac{\lg 12}{\lg 2} \Rightarrow x < 3,58$. Átrendezve az egyenletet:

$$\log_2(12 - 2^x) = 5 - x,$$

majd alkalmazva a logaritmus definícióját, kapjuk: $2^{5-x} = 12 - 2^x$, amiből $\frac{32}{2^x} = 12 - 2^x$.

Jelölje: $2^x = a$. Így $a^2 - 12a + 32 = 0$, melynek gyökei $a_1 = 8$ és $a_2 = 4$. Ennek megfelelően $x_1 = 3$ és $x_2 = 2$. Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

j) Értelmezés: $x > 0, x \neq 1$. Jelölje $a = 2^{\log_x 16}$, így a következő egyenletet kapjuk:

$$a^2 - 17a + 16 = 0,$$

melynek gyökei: $a_1 = 16$ és $a_2 = 1$. Behelyettesítve a $2^{\log_x 16} = a$ alakba:

$$2^{\log_x 16} = 16,$$

melynek gyökei: $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$, de csak az első gyök felel meg az értelmezési tartománynak.



3231 a) $x = 2$, $y = 0$.

b) Értelmezés: $x > \frac{3}{2}$, $y > 4$. A logaritmus azonosságait és monotonitását felhasználva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} (2x - 3) \cdot 5 = 4y + 15 \\ (3x - 1) \cdot (y - 4) = 512 \end{cases}.$$

A feltételeknek megfelelő megoldások: $x = 11$, $y = 20$.

c) Értelmezés: $y > x$. Az első egyenletből a logaritmus definíciója miatt:

$$\sqrt{3}^2 = y - x \Leftrightarrow 3 + x = y.$$

Ezt a kifejezést helyettesítve a második egyenletbe:

$$2x \cdot 3^{3+x} = 972, \text{ vagyis } 2^x \cdot 3^3 \cdot 3^x = 972.$$

Osztva 3^3 -al, valamint felhasználva, hogy $2^x \cdot 3^x = 6^x$, kapjuk: $6^x = 36$, melynek gyöke $x = 2$, amiből $y = 5$.

Az egyenletrendszer megoldása a $(2; 5)$ számpár.

d) Értelmezés: $x + y > 0$, $x - y > 0$, $x \neq y$. Az első egyenletből ered: $x^2 - y^2 = 1000$, a második egyenletből pedig: $\frac{x+y}{x-y} = 2$, amelyből $x = 3y$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe, kapjuk, hogy $8y^2 = 1000$, vagyis: $y = \pm 5 \cdot \sqrt{5}$, melyből $x = \pm 15 \cdot \sqrt{5}$.

Az egyenletrendszer megoldása: $(15 \cdot \sqrt{5}; 5 \cdot \sqrt{5})$.

e) Értelmezés: $x + y > 0$, $x - y > 0$, $x \neq y$. Az első egyenletet átrendezve, azt kapjuk, hogy $x = 3y$. Ezt helyettesítve a második egyenletbe, melyből a logaritmus azonosságok felhasználása után: $x^2 - y^2 = 2$ egyenletet kaptuk, ered: $8y^2 = 2$, melynek gyöke: $y = \pm \frac{1}{2}$, amiből $x = \pm \frac{3}{2}$.

Az egyenletrendszer megoldása: $(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$.

f) Értelmezés: $x, y > 0$, vagy $x, y < 0$. Az első egyenletet átrendezve, azt kapjuk, hogy $x = 6 + 3y$. A második egyenletben a logaritmus definíciója miatt az $xy = 9$, melybe helyettesítve az első egyenletből kifejezett $x = 6 + 3y$ -t ered: $y^2 + 2y - 3 = 0$. Ebből $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. Így $x_1 = 9$ és $x_2 = -3$.

Az egyenletrendszer megoldásai a $(9; 1)$ és a $(-3; -3)$ számpárok.

g) Értelmezés: $x, y > 0$. Az első egyenletből a logaritmus azonosságainak felhasználása után, kapjuk, hogy $3x^2 = 8y$. A második egyenletből, felhasználva, hogy $1 = 0,5^0$, valamint, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton, ered: $y = x + 2$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk a $3x^2 - 8x - 16 = 0$ egyenletet, melynek gyökei: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4}{3}$, amiből $y_1 = 6$, $y_2 = \frac{2}{3}$.

Az egyenletrendszer megoldásai a $(4; 6)$ és a $(\frac{4}{3}; \frac{2}{3})$ számpárok.

3232 a) Az $y = 2^x$ helyettesítés után az $1024y^2 - 80y + 1 \leq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, melynek megoldása: $\frac{1}{64} \leq y \leq \frac{1}{16}$. Ebből: $-6 \leq x \leq -4$.

b) Értelmezés: $x > -1$. A logaritmus azonosságait felhasználva, a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $-6 \leq x \leq 1$. Megoldás: $-1 < x \leq 1$.



c) Értelmezés: $x < -4$. A 10-es alapú logaritmus szigorú monoton növekedése miatt:

$$-3x - 1 < x^2 - 5x - 36, \text{ vagyis } 0 < x^2 - 2x - 35,$$

amelynek gyökei: $x < -5$ vagy $x > 7$.

Az egyenlőtlenség megoldása az értelmezési tartományon: $x < -5$.

d) Értelmezés: $x > 1$. Felhasználva, hogy $1 = \log_2 2$, valamint, hogy a 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton nő, kapjuk, hogy $\log 5(x-1) < 2$, majd $2 = \log_5 25$, és az 5-ös alapú logaritmusfüggvény szintén szigorúan monoton nő, ezért $x-1 < 25$, amiből $x < 26$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $1 < x < 26$.

e) Felhasználva, hogy $1 = 3^0$, a megoldandó egyenlőtlenség: $(x+2) \cdot (x-1) < 0$. Ez akkor teljesül, ha a szorzat egyik tényezője negatív, másik pozitív, tehát itt akkor és csak akkor, ha $-2 < x < 1$.

f) Felhasználva, hogy $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, valamint, hogy az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus szigorúan monoton csökken, ezért: $x_2 - 8x + 18 = 3$ a megoldandó egyenlőtlenség. Ebből: $x_2 - 8x + 15 = 0$, amiből $3 \leq x \leq 5$.

3233 a) $8^{-\frac{2}{3}} + \log_4\left(\frac{1}{8}\right) + 7^{\log_7 3} = \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{7}{4};$

b) $10^{\log_{\sqrt{10}} 6 - \lg 12} + 8^{\log_2 3 - \log_8 9} = \frac{36}{12} + \frac{27}{9} = 6.$

3234 a) Értelmezés: $x > 0$. Vegyük mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát, és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$(\log_2 x + 4) \cdot \log_2 x = \log_2 32.$$

$\log_2 x = a$ -t helyettesítve kapjuk: $(a+4) \cdot a - 5 = 0$, melyből $a_2 + 4a - 5 = 0$, melynek gyökei $a_1 = 1$ és $a_2 = -5$. Visszahelyettesítve $\log_2 x = a$ kifejezésbe először $a_1 = 1$ -et ered: $x_1 = 2$, majd

$a_2 = -5$ -ből kapjuk: $x_2 = 2^{-5} = \frac{1}{32}$. Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

b) Értelmezés: $x > 0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, ekkor:

$$8 \cdot \lg x \cdot \lg x = \lg 100 \Rightarrow 8 \cdot \lg^2 x = 2 \Rightarrow \lg^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lg x = \pm \frac{1}{2},$$

melynek gyökei: $x_1 = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ és $x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

3235 A feltételek szerint:

$$\left. \begin{aligned} -2 &= \lg(5-a) + b \\ -1 &= \lg(95-a) + b \end{aligned} \right\}.$$

A második egyenletből kivonva az első:

$$1 = \lg(95-a) - \lg(5-a),$$

aminek megoldása: $a = -5$, visszahelyettesítve: $b = -3$.

A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = \lg(x+5) - 3.$$



3236 a) $1000 \cdot 2^8 = 256\,000$.

b) A $10^9 = 1000 \cdot 2^{\frac{x}{6}}$ egyenletből, mindkét oldal logaritmusát véve:

$$x = 6 \cdot \frac{\lg 10^6}{\lg 2} = \frac{36}{\lg 2} = 119,6 \text{ óra.}$$

A kísérlet 5 napig tart.

3237 a) $-\lg(10^{-7}) = 7$.

b) Az $5,5 = -\lg K$ egyenlőségből:

$$K = 10^{-5,5} \approx 3,16 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}.$$

c) Ha $p_1 = -\lg K$, akkor $p_2 = -\lg(100 \cdot K) = -\lg 100 - \lg K = -\lg K - 2$. A pH érték 2-vel csökken.

3238 a) $h(1) = 500 \cdot \log_3 5 \approx 732$.

b) Mivel $h(2) = 500 \cdot \log_3 7 \approx 886$ és $h(4) = 500 \cdot \log_3 11 \approx 1091$, ezért a növekedés 23,1%-os.

c) Az $1500 = 500 \cdot \log_3(2t + 3)$ egyenletből $t = 12$, tehát várhatóan 2017 márciusában éri el a halak száma az 1500-at.

3239 a) Értelmezés: $x, y > 0; y \neq 1$.

Az első egyenlet mindkét oldalának vegyük a 10-es alapú logaritmusát, majd rendezzük át, így

kapjuk: $\frac{\lg x}{\lg y} = \frac{2}{3}$. Ezt a második egyenlet bal oldala helyett beírva ered: $\frac{2}{3} = \lg \frac{x}{y}$.

Tehát: $\frac{2}{3} = \lg x - \lg y$. Az első egyenletből kapott $\lg x = \frac{2}{3} \lg y$ -t helyettesítve ebbe az egyen-

letbe kapjuk, hogy $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \lg y - \lg y$, amiből $-2 = \lg y$, tehát $y = 10^{-2}$, amiből $x = 10^{-\frac{4}{3}}$.

Az egyenletrendszer megoldása: $\left(10^{-\frac{4}{3}}; 10^{-2}\right)$ számpár.

b) Értelmezés: $x, y \neq 1$. Térjünk át 4-es alapú logaritmusra mindkét egyenlet esetén. Így:

$$\log_4 x + \frac{\log_4 y}{\log_4 16} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot \log_4 x + \log_4 y = 3,$$

$$\frac{\log_4 4}{\log_4 x} + \frac{\log_4 16}{\log_4 y} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 y} = 3.$$

Jelölje: $a = \log_4 x$ és $b = \log_4 y$ -t. Ekkor:

$$2a + b = 3$$

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 3$$

Az első egyenletből kapott $b = 3 - 2a$ -t helyettesítve a második egyenletbe: $\frac{1}{a} + \frac{2}{3 - 2a} = 3$, amiből: $2a^2 - 3a + 1 = 0$, vagyis $a_1 = 1$ és $a_2 = \frac{1}{2}$, valamint: $b_1 = 1$ és $b_2 = 2$.

Az a és b értékeket visszahelyettesítve kapjuk x és y értékeit, mely szerint: $\log_4 x = 1$, amiből $x = 4$, és $\log_4 y = 1$, amiből $y = 4$, valamint: $\log_4 x = \frac{1}{2}$, amiből $x = 2$, és $\log_4 y = 2$, amiből $y = 16$.

Az egyenletrendszer megoldásai: $(4; 4)$, és $(2; 16)$ számpárok.



c) Értelmezés: $y > 0$ és $x > 0$. Mindkét egyenlet 10-es alapú logaritmusát véve:

$$(1) \quad \lg y \cdot \lg x = \lg 9, \quad (= 2 \cdot \lg 3)$$

$$(2) \quad \lg x + \lg y = \lg 300. \quad (= \lg 3 + 2)$$

Az első egyenletből kifejezett $\lg x = \frac{2 \cdot \lg 3}{\lg y}$ -t ($\lg y \neq 0$, egyébként (1)-es nem teljesülhetne)

helyettesítjük a (2) egyenletbe, így kapjuk, hogy:

$$\frac{2 \cdot \lg 3}{\lg y} + \lg y = 2 + \lg 3,$$

melyből a $\lg^2 y - (2 + \lg 3) \cdot \lg y + 2 \cdot \lg 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei: $\lg y = 2$, valamint $\lg y = \lg 3$. Az $\lg y = 2$ megoldás esetén $y = 100$ és $x = 3$, az $\lg y = \lg 3$ esetén $y = 3$ és $x = 100$.

Az egyenletrendszer megoldásai a (3; 100) és a (100; 3) számpárok.

Megjegyzés: Egyszerű helyettesítéssel belátható, hogy mindkét számpár igazzá teszi az egyenletrendszert.

3240 a) Az egyenlet jobb oldala:

$$\frac{\lg 4}{\lg 8} = \frac{2 \cdot \lg 2}{3 \cdot \lg 2} = \frac{2}{3}.$$

Az egyenlet bal oldalának átalakításával:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+3} = \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} = \frac{2}{3}.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $x = 2$.

b) Értelmezés: $x > 3$. A logaritmus azonosságait alkalmazva, az

$$\lg[10 \cdot (3^{x-3} + 15)] = \lg[3 \cdot (9^{x-3} - 1)]$$

egyenletet kapjuk, amiből a

$$3 \cdot 9^{x-3} - 10 \cdot 3^{x-3} - 153 = 0$$

másodfokú egyenlet adódik, ennek megoldásai: $3^{x-3} = 9$ és $3^{x-3} = -\frac{17}{3}$.

Csak az elsőből kapunk megoldást: $x = 5$.

c) Értelmezés: $x > 0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\left[(\lg \sqrt{x})^3 - \frac{5}{8} \cdot \lg x\right] \cdot \lg x = -\frac{1}{2},$$

$$\left[\left(\frac{1}{2} \cdot \lg x\right)^3 - \frac{5}{8} \cdot \lg x\right] \cdot \lg x = -\frac{1}{2}.$$

Beszorzás után a következő negyedfokú egyenlet adódik:

$$(\lg x)^4 - 5 \cdot (\lg x)^2 + 4 = 0.$$

Ennek a megoldásai: $(\lg x)^2 = 4$ és $(\lg x)^2 = 1$. Mindkettőből kapunk megoldást:

$$x_1 = 100, \quad x_2 = \frac{1}{100}, \quad x_3 = 10, \quad x_4 = \frac{1}{10}.$$

Mind a négy eredmény megoldása az eredeti egyenletnek.



d) Vizsgáljuk az értelmezési tartományt, melyre: $3^x > 2$ és $3^x > 5$, vagyis az első esetben:

$$x > \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0,63,$$

a második esetben:

$$x > \frac{\lg 5}{\lg 3} \approx 1,46.$$

Tehát az egyenlet értelmezési tartománya: $x > \frac{\lg 5}{\lg 3}$.

Felhasználva a logaritmus azonosságait:

$$\log_2(3^x - 2) \cdot (3^x - 5) = 2,$$

majd alkalmazva a logaritmus definícióját, és elvégezve a beszorzást, kapjuk:

$$(3^x)^2 - 7 \cdot (3^x) + 10 - 4 = 0,$$

vagyis $3^x = a$ esetén:

$$a^2 - 7a + 6 = 0,$$

melynek gyökei: $a_1 = 6$ és $a_2 = 1$. Helyettesítve a $3^x = a$ kifejezésbe, $3^x = 6$ esetén $x_2 = 0$.

A második gyök nem felel meg az értelmezési tartománynak, az első kifejezhető 10-es alapú

logaritmussal is, ahol $x_1 = \frac{\lg 6}{\lg 3} \approx 1,63$. Ez megfelelő gyököknek bizonyul.

3241 Értelmezés: $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\log_7^2(2x - 1) + \frac{16}{\log_7^2(2x - 1)} \geq 2 \cdot \sqrt{\log_7^2(2x - 1) \cdot \frac{16}{\log_7^2(2x - 1)}} = 8.$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$\log_7^2(2x - 1) = \frac{16}{\log_7^2(2x - 1)}.$$

Megoldásai: $\log_7(2x - 1) = 2$, amiből $x = 25$, és $\log_7(2x - 1) = -2$, amiből $x = \frac{25}{49}$.

Tehát a kifejezés az $x = 25$ és $x = \frac{25}{49}$ esetén lesz a legkisebb, amelynek értéke 8.