12.6. ÉRETTSÉGI GYAKORLÓ FELADATSOROK

KÖZÉPSZINTŰ FELADATSOROK

1. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $x(x+2)$.

2. A háromszög köré írható kör sugara $2{,}6$ cm.

3. Körtéből 9 kg-ot, almából 18 kg-ot, banánból pedig 54 kg-ot adott el.

4. A hűtőszekrény $52{,}5$ literes.

5. A bank 3000 Ft kamatadót vont le.

6. 4867.

7. $x \mapsto -(x-2)^2+3$.

8. $(x-1)^2+(y-1)^2=10$.

9. $\dfrac{70}{200}=0{,}35$.

10. A nagyváros lakossága 4 év eltelte után haladja meg a $210\,000$ főt.

11. *a)* Nem. *b)* Igen. *c)* Igen.

12. $\alpha=2$ radián vagy $\alpha\approx 114{,}59°$.

1. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ behelyettesítéssel $\sin x$-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$\sin^2 x = 1-\sin^2 x + 5\sin x + 2, \quad \text{ahonnan} \quad \sin x = 3 \quad \text{vagy} \quad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Mivel $-1\le \sin x \le 1$ minden x-re teljesül, ezért a $\sin x = 3$ egyenletnek nincsen megoldása.

A $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ egyenlet megoldásai: $x_1=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$ és $x_2=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

A kapott megoldások kielégítik az egyenletet.

b) Látható, hogy az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Mivel egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

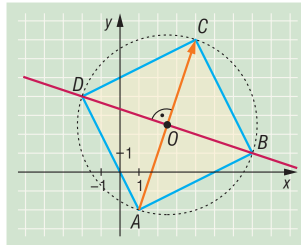
$$\sqrt{x^2+5}=3, \quad \text{illetve} \quad \sqrt{x^2+5}=-\frac{1}{2}.$$

A második egyenlet azonban egyetlen x-re sem teljesül, mivel a bal oldalon egy nemnegatív, míg a jobb oldalon egy negatív szám áll. Ebből adódóan

$$\sqrt{x^2+5}=3 \quad \Rightarrow \quad x^2=4, \quad \text{ennek megoldásai:} \quad x_1=2 \ \text{és}\ x_2=-2.$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy mindkét szám megoldása az egyenletnek.

14. *a)* A négyzet középpontja az AC szakasz O felezőpontja, melynek koordinátái az A és C pontok ismeretében könnyen számolhatók: $O\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$.



A BD átlót tartalmazó egyenes merőleges az $\overrightarrow{AC}(3; 9)$ vektorra, továbbá tartalmazza az O pontot, így normálvektoros egyenlete:

$$3x + 9y = 3 \cdot \frac{5}{2} + 9 \cdot \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad x + 3y = 10.$$

b) A négyzet hiányzó csúcsai illeszkednek a BD egyenesre, valamint az O középpontú,

$$OA = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{90}{4}} \text{ sugarú körre.}$$

A négyzet köré írt kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}.$$

A BD egyenes egyenletéből $x = 10 - 3y$, amit a kör egyenletébe helyettesítve:

$$\left(\frac{15}{2} - 3y\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} \quad \Rightarrow \quad y^2 - 5y + 4 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai: $y_1 = 4$ és $y_2 = 1$, ebből pedig $x_1 = -2$ és $x_2 = 7$.
A négyzet hiányzó csúcsainak koordinátái $B(7; 1)$ és $D(-2; 4)$.

15. *a)* A szépirodalmi könyvek számát $7x$, az albumok számát $5x$ alakban kereshetjük.
A feltételek alapján a műszaki könyvek száma $1{,}8 \cdot (5x) = 9x$.
Ha a 15 könyvből minden polcra ugyanannyit helyezünk, akkor a polcokon rendre $7x + 5$, $5x + 5$, illetve $9x + 5$ könyv lesz, továbbá például $(7x + 5) : (5x + 5) = 4 : 3$.
A felírt arányból $x = 5$. Eszerint Kristófnak összesen 35 szépirodalmi könyve, 25 albuma és 45 műszaki könyve van.
Az ellenőrzés mutatja, hogy ekkor műszaki könyvből valóban 1,8-szer annyi van, mint albumból, továbbá ha minden polcra 5 könyvet helyezünk, akkor a könyvek számának aránya $4:3:5$ lesz.

b) Kristóf $\binom{25}{3} = 2300$-féleképpen tud három albumot kölcsönadni Károlynak.

c) Ha Kristóf valóban megveszi a 15 kiszemelt könyvet, akkor összesen 120 könyvet tárol majd a polcokon.

1. Feladatsor II. rész /*B* – megoldások

16. *a)* Az 5 doboz $5! = 120$-féleképpen helyezhető egymás mellé.

b) Az első gyermek 5-féle, a második 4-féle, a harmadik 3-féle színű lufit kaphat. Az esetek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

c) Az árus az első órában összesen 14 lufit adott el. A lufik átlagára euróban:

$$\frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 1{,}4 + 4 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 2}{14} = \frac{19{,}4}{14} \approx 1{,}39.$$

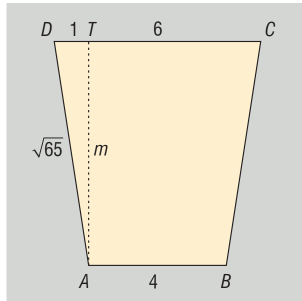
Az árus átlagosan 139 centért adta a lufikat az első órában.

d) A lufikból 19,4 € az árus bevétele. A lufi beszerzési ára 0,4 €, ez 14 lufi esetén 5,6 €, ezért a lufis haszna 13,8 €. Ez körülbelül 246,4%-os haszonnak felel meg.

e) Az eladott 14 lufi között vannak olyanok, amelyeket nem tudunk megkülönböztetni (az azonos színűek), így a lufik ismétléses permutációjáról van szó. Az esetek száma:

$$\frac{14!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 2!}=25225200.$$

17. *a)* A gyertya tengelymetszetét az ábra mutatja. A csonka kúp m magasságát az ATD derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével számolhatjuk: $m = 8$ cm.

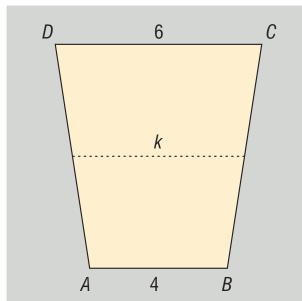


Mivel a csonka kúp alapkörének sugara 2 cm, fedőkörének sugara pedig 3 cm, ezért térfogata:

$$V=\frac{8\pi}{3}\cdot\left(2^2+2\cdot 3+3^2\right)\approx 159{,}17.$$

A gyertya térfogata 159,17 cm^3.

b) Ha a gyertyát az alapokkal párhuzamos síkkal két részre vágjuk, akkor két csonka kúp alakú rész keletkezik, ahol mindkét keletkező trapéz magassága 4 cm, k éppen az $ABCD$ trapéz középvonala, így hossza a két alap számtani közepe, azaz $k = 5$ cm.



Ha V_1 a kisebb, V_2 a nagyobb rész térfogatát jelöli, akkor arányukra:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4\pi}{3}\cdot\left(2^2+2\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)}{\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\cdot 3+3^2\right)}=\frac{61}{91}\approx 0{,}67.$$

A keletkező két rész térfogatának aránya $\frac{61}{91}$.

18. *a)* A 15 szintes lépcső egyes szintjeit alkotó kockák száma felülről lefelé haladva számtani sorozatot alkot, amelynek első tagja 1, különbsége 2. Ebből következik, hogy a legalsó, 15. szinten található kockák száma $1 + 14\cdot 2 = 29$.

b) Az n szintből álló lépcső legfelső szintjén 1, legalsó szintjén pedig $1 + 2(n - 1) = 2n - 1$ kocka található, ezért megépítéséhez összesen

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$$

kocka szükséges. Az S összegben éppen az első n páratlan szám összege áll, amit a számtani sorozat összegképletének alkalmazásával számíthatunk ki:

$$S=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2.$$

Az n szintből álló lépcső megépítéséhez n^2 darab kocka szükséges. Mivel Aladárnak 150 darab építőkockája van, ezért a legnagyobb olyan n egész számot keressük, amelyre $n^2 \le 150$ teljesül, azaz $n \approx 12{,}25$, vagyis Aladár építőkockáiból maximum 12 szintes lépcsőt építhet.

c) Aladár a következő számú építőkockákat használhatja fel a lépcsők építéséhez: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144. Ha Aladár épít egy kétszintes, egy ötszintes, továbbá egy tizenegy szintes lépcsőt, akkor mind a 150 kockát felhasználja, így egy sem marad felhasználatlan.

2. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $5{,}325 \cdot 10^{-18}$.

2. Összesen 6 dolgozó volt már mindkét városban.

3. *c*).

4. $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} = 6 \cdot 3 = 18$ utazó csapat alakítható ki.

5. $f(-3) = -3, \quad f(0) = 0, \quad f(3) = 0.$

6. A 4 ismert szám összege 177, amihez ha még 70-et adunk, akkor 247-et kapunk. Ehhez az ismeretlen számjegyet hozzáadva 9-cel osztható számot kell kapnunk. Mivel a 247-nek a 9-cel való osztás során fellépő maradéka 4, ezért még 5-öt kell hozzáadni, hogy 9-cel osztható számot kapjunk, ezért az 5. nyertes szám a 75.

7. *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz.

8. A tört nem értelmezhető, ha nevezője 0, azaz ha $2\sin x - 1 = 0$, vagyis $\sin x = \frac{1}{2}$. Az adott intervallumban ez az $x_1 = \frac{\pi}{6}$-ra és az $x_2 = \frac{5\pi}{6}$-ra teljesül. Erre a két értékre a tört nem értelmezhető.

9. Az akváriumhoz $3 \cdot 80 \cdot 60 + 2 \cdot 60 \cdot 60 = 21\,600\ \text{cm}^2 = 2{,}16\ \text{m}^2$ üveget használtak fel.

10. A két térkép hasonló egymáshoz, az $1 : 2\,300\,000$ méretarányú térképet $\lambda = \frac{2\,300\,000}{1\,200\,000} = \frac{23}{12}$ arányú hasonlósági transzformációval lehet átvinni az $1:1\,200\,000$ méretarányú térképbe. Ebből következik, hogy az utóbbi térképen a Cegléd–Szeged távolság $4{,}5 \cdot \frac{23}{12} \approx 8{,}6$ cm.

Kiszámolhatjuk a két város valóságban mért távolságát is:

$$4{,}5 \cdot 2\,300\,000 = 10\,350\,000\ \text{cm},$$

majd kiszámoljuk, hogy ennek mekkora távolság felel meg az $1 : 1\,200\,000$ méretarányú térképen:

$$10\,350\,000 : 1\,200\,000 \approx 8{,}6\ \text{cm}.$$

11. $x + 3y = 10$.

12. A módusz és a medián egyaránt 3.

2. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A négyzetgyökvonás miatt $x \geq -\frac{1}{2}$. A logaritmus értelmezése miatt $5 - \sqrt{2x+1} > 0$, amiből $12 > x$. Az egyenlet értelmezési tartománya $12 > x \geq -\frac{1}{2}$. Mivel $\log_3 9 = 2$, valamint $\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$, ezért egyenletünk $\log_2\left(5 - \sqrt{2x+1}\right) = 3$ alakban írható.

A logaritmus definíciójának alkalmazása, majd rendezés után a $\sqrt{2x+1} = -3$ egyenletet kapjuk. Mivel a jobb oldalán negatív, bal oldalán nemnegatív szám áll, így az egyenletnek nincs megoldása.

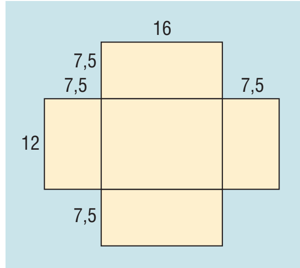
b) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A hatványozás azonosságait használva $3^{x^2} = 3^{12+4x}$. Mindkét oldalon 3-as alapú hatványok állnak, amelyek csak úgy egyezhetnek meg, ha kitevőik is egyenlők, ezért $x^2 - 4x - 12 = 0$.

A kapott másodfokú egyenletből: $x_1 = 6$ és $x_2 = -2$. Mindkét szám megoldása az egyenletnek.

14. *a)* A befőttesüveg alapkörének sugara $r = 4$ cm, magassága $m = 15$ cm.

Egy üveg térfogata: $V = r^2\pi m \approx 753{,}98\ \text{cm}^3$, azaz közelítően 7,5 dl.

b) Az üvegek tárolására szolgáló kartondoboz felül nyitott téglatest, amely alaplapjának oldalai 24 cm és 32 cm, magassága 15 cm. A doboz hálójának kicsinyített képe az ábrán látható (az adatok centiméterben vannak megadva).



c) Mivel 1 dobozba 12 üveg fér, ezért nagymamának összesen 4 dobozra van szüksége.

Egy doboz térfogata $V = 24 \cdot 32 \cdot 15 = 11\,520\ \text{cm}^3$, így a 4 doboz összesen $46\,080\ \text{cm}^3 = 46{,}08\ \text{dm}^3$ helyet foglal el.

15. *a)* Az 1500 €-ból 200 € 1%-os kamatlábbal kamatozik, így erre a részre a bank 2 € kamatot fizet. A maradék 1300 € után 4% kamat jár, azaz $1300 \cdot 0{,}04 = 52$ €. A bank a lekötött összeg után 54 € kamatot fizet.

b) Mivel $\dfrac{54}{1500} = 0{,}036$, ezért a bank által ténylegesen kifizetett kamat 3,6%.

c) Ha x eurós betétnél legalább 3,8%-os kamatot fizet a bank, akkor

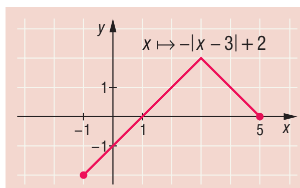
$$2 + (x - 200) \cdot 0{,}04 \geq x \cdot 0{,}038, \quad \text{vagyis} \quad x \geq 3000.$$

Legalább 3000 €-t kell lekötnünk ahhoz, hogy arra a bank legalább 3,8%-os kamatot fizessen.

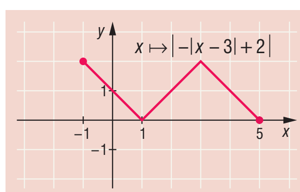
2. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* A függvény értékkészlete a $[-2;\ 2]$ intervallum. A függvény a maximumát az $x = 3$ helyen veszi fel, a maximum értéke 2; a minimumát az $x = -1$ helyen veszi fel, a minimum értéke -2.

b) A függvény grafikonjáról leolvasható, hogy az egyenlőtlenséget a $[2;\ 4]$ intervallum számai elégítik ki.



c) Az $x \mapsto -|x - 3| + 2$ szabállyal megadott függvény grafikonjának x tengely alatti negatív részét tükrözzük az x tengelyre.



17. *a)* Anna a három kockával összesen $6^3 = 216$-féleképpen dobhat. A kedvező esetek számbavételénél hasznos lehet azokat a következő módon csoportosítani:

- A dobott pontok száma 18, ha Anna minden kockával 6-ost dob.
- A dobott pontok száma 17, ha két 6-ost és egy 5-öst dob. Attól függően, hogy a piros, zöld vagy kék kockával dobja az 5-öst, ez az eset 3-féleképpen következhet be.

- A dobott pontok összege 16, ha két 5-ös mellett egy 6-ost dobott (összesen 3 eset), vagy két 6-os mellett egy 4-est (szintén 3 eset). A pontok száma 6-féleképpen lehet 16.
- A dobott pontok összege 15. A lehetséges dobások: két 6-os mellett egy 3-as (3 eset), egy 6-os, egy 5-ös és egy 4-es ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eset), illetve három 5-ös (1 eset). Ez összesen 10 eset.

Anna tehát összesen $1 + 3 + 6 + 10 = 20$-féleképpen dobhat úgy, hogy azzal a játékot megnyerje, ezért nyerésének valószínűsége $\dfrac{20}{216} \approx 0{,}0926$.

b) Anna a zöld és kék kockákkal összesen 36 különböző eredményt dobhat. Ha a piros kockával 6-ost dobott, akkor ahhoz, hogy a játékot megnyerje, a másik két kockával összesen legalább 9-et kell dobnia. A következő esetek lehetségesek:

- A dobott pontok összege 12, ha a zöld és a kék kockával egyaránt 6-ost dob.
- A dobott pontok összege 11. Ez kétféleképpen következhet be: zöld 6-os és kék 5-ös, vagy fordítva.
- A dobott pontok összege 10. Ekkor vagy két 5-öst dob (1 eset), vagy egy 6-ost és egy 4-est (2 eset). A pontok összege 3-féleképpen lehet 10.
- A dobott pontok összege 9. Ekkor vagy egy 6-ost és egy 3-ast dob (2 eset), vagy egy 5-öst és egy 4-est (2 eset). Összesen 4 esetben lehet a dobott pontok összege 9.

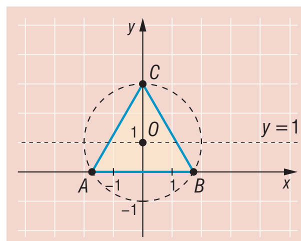
Anna legalább 9-et $1 + 2 + 3 + 4 = 10$-féleképpen dobhat, ezért nyerésének valószínűsége: $\dfrac{10}{36} \approx 0{,}2778$.

18. *a)* Az ABC háromszög szabályos. Számoljuk ki oldalainak hosszát:

$$AB = 2\sqrt{3}, \qquad AC = \sqrt{\left(0+\sqrt{3}\right)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \qquad \text{hasonlóan} \qquad BC = 2\sqrt{3}.$$

Mivel a három oldal hossza megegyezik, ezért az ABC háromszög valóban szabályos.

b) A szabályos háromszög köré írt kör középpontja egybeesik a háromszög súlypontjával, sugara pedig a súlyvonal hosszának kétharmada (ld. ábra). A C csúcsot az origóval összekötő szakasz az $ABC_\triangle$-nek egyben súlyvonala is, ezért a körülírt kör középpontja e szakasznak az origóhoz közelebbi harmadolópontja. Vagyis: $O(0;\,1)$, sugara pedig $OC = 2$. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2 + (y-1)^2 = 4$.



c) Két metszéspont van, ezek koordinátái: $(-2;\,1)$, illetve $(2;\,1)$.

3. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Van, aki nem kiváló matematikából.
Nem mindenki kiváló matematikából.

2. $\dfrac{1}{12}$-dik hatvány.

3. 1 mérföld = 63 360 inch.

4. $a \neq 2$, $a \neq -2$, a tört: $\dfrac{3}{a-2}$.

5. $A \cup B = [-6;\,4[$ és $A \cap B = [-3;\,2]$.

6. $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}.$

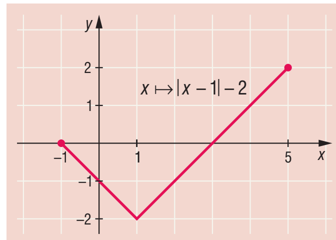
7. $x \in \left]\dfrac{2}{5}; \infty\right[.$

8. $x = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$

9. 66°, 66°, 48° vagy 54°, 54°, 72°.

10. Mindkét nyelvet beszéli: $0{,}85 + 0{,}75 - 1 = 0{,}6$, a lakosok 60%-a. A keresett valószínűség 0,6.

11. Értékkészlet: $[-2; 2]$.



12. Koszinusztétellel számolva a legnagyobb oldallal szemközti szöget: $\gamma = 97{,}98°$.

3. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* Az értelmezési tartomány: $x \ge \dfrac{13}{7}$, négyzetre emelés után: $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, mindkettő megoldás.

b) Az egyenletet 3-as alapú hatványra átírva, majd rendezve: $27 \cdot 3^{2x} - 244 \cdot 3^x + 9 = 0$.

Az egyenlet 3^x-re másodfokú, megoldásai: $3^x = 9$ és $3^x = \dfrac{1}{27}$, amiből az eredeti egyenlet gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

14. *a)* A kamatozott összeg mértani sorozatot alkot: $x = 150\,000 \cdot 1{,}05^{12} = 269\,378$ Ft lesz a felvehető összeg. A haszon 119 378 Ft lesz.

b) A kivehető összeg:

$$150\,000 \cdot 1{,}05^{12} + 150\,000 \cdot 1{,}05^{11} + 150\,000 \cdot 1{,}05^{10} + \ldots + 50\,000 \cdot 1{,}05.$$

Ebből:

$$150\,000(1{,}05^{12} + 1{,}05^{11} + \ldots + 1{,}05) = 150\,000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{12} - 1}{1{,}05 - 1} = 2\,506\,947 \text{ Ft.}$$

Mivel összesen $12 \cdot 150\,000 = 1\,800\,000$ Ft-ot fektetett be, a haszon 706 947 Ft.

15. *a)* A teljes gráfhoz 8 él hiányzik, ennyi kézfogás lesz.

b) Nem, mert Antinak csak egy ismerőse van.

c) Tibi két oldalára $3 \cdot 2$ féle módon kerülhet egy-egy lány, a kimaradó 3 emberrel együtt 4! a leülések lehetséges száma, tehát:

$$p = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{5}.$$

3. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. 1 csepp víz térfogata: $V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 1{,}5^3}{3} \approx 14{,}14\ \text{mm}^3.$

a) $2\ \text{dl} = 200\,000\ \text{mm}^3$, ez $14144{,}27$ csepp víz, ennyi csepp ≈ 3536 perc ≈ 58 óra 56 perc alatt csöpög le.

b) 1 év alatt $4 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 2\,102\,400$ csepp esik le, ennek a térfogata kb. $29{,}7$ liter.

c) 1 évben 52 dl tisztítószer fogy el, ehhez 11 flakont kell megvenni, amelynek az ára: 9020 Ft.

17. *a)* A piros, a zöld és a citromsárga részek területe:

$$T_{\text{piros}} = r^2 \cdot \pi = 113{,}10\ \text{cm}^2,$$

$$T_{\text{zöld}} = T_{\text{citrom}} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 93{,}53\ \text{cm}^2.$$

A narancssárga szabályos sokszög 12 darab egyenlő szárú háromszögre bontható, a háromszög magassága:

$$m = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ} \approx 11{,}2.$$

Ebből adódik:

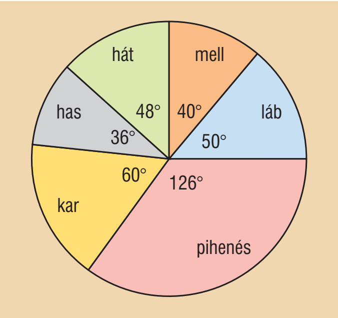
$$T_{\text{narancs}} = 12 \cdot \frac{a \cdot m}{2} - r^2 \cdot \pi = 289{,}96\ \text{cm}^2.$$

b) A $12 \cdot \dfrac{a \cdot m}{2} - x^2 \cdot \pi = x^2 \cdot \pi$ egyenletből $x \approx 8$ cm.

c) A belső kör színezésére 4 lehetőség van, a körülötte levő részre 3 színből választhatunk, és a külső háromszögeket a maradék két színnel csak egyféleképpen színezhetjük ki.
Tehát $4 \cdot 3 = 12$ különböző, a feltételeknek megfelelő színezés lehetséges.

18. *a)* Az edzésformák heti összesítése:

	Összes idő (perc)	Középponti szög (fok)
Lábizom-erősítés	75	50
Mellizom-erősítés	60	40
Hátizom-erősítés	72	48
Hasizom-erősítés	54	36
Karizom-erősítés	90	60
Pihenés (összesen)	189	126



b) $\dfrac{189}{540} = 0{,}35$, tehát az idő 35%-ában pihen.

c) A négyféle edzéstípus lehetséges sorrendje $4!$, amikor két kiválasztott egymás után van, a lehetőségek száma $2 \cdot 3!$.
A feltételnek megfelelő esetek száma a kettő különbsége: $4! - 2 \cdot 3! = 12$.

4. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $A \cap B = \{36; 81\}$.

2. $50°,\ 50°,\ 80°$ vagy $50°,\ 65°,\ 65°$.

3. $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

4. A tagadás a *c)*.

5. $36^{3\cdot\log_6 2} = 2^6 = 64$.

6. Az első szám a 63, a második a 64, ez a nagyobb.

7. $\dfrac{3\cdot 0{,}88 + 9\cdot 0{,}44}{12} = 0{,}55$, az éves kihasználtság 55%-os.

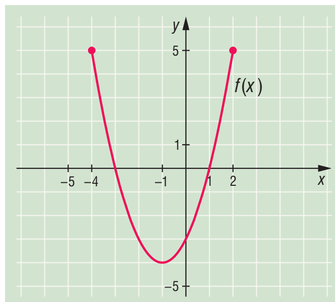
8. 4,8 m, 6,4 m, 3,2 m.

9. Egy 0-ra, hiszen csak egy darab 2-es és 5-ös van a szorzatban.

10. $x \in \left]\dfrac{11}{8}; \infty\right[$.

11. A függvény átalakításával: (➡)

$$f(x) = (x+1)^2 - 4.$$



12. Szinusztétellel számolva a 28°-kal szemközti oldalt:

$$b = 14{,}63 \text{ cm}.$$

4. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A $3\cdot\dfrac{x}{100} = 0{,}5\cdot\dfrac{10}{100}$ egyenletből $x = \dfrac{5}{3}$, tehát 1,67%-os oldatot kapunk.

b) A $3\cdot\dfrac{2}{100} = x\cdot\dfrac{10}{100}$ egyenletből $x = 0{,}6$, tehát 0,6 liter ecethez 2,4 liter vizet kell öntenünk.

14. A naponta elolvasott oldalak száma számtani sorozatot alkot, amelyben $a_1 = 15$.

a) Az $S_n = \dfrac{30+12d}{2}\cdot 13 \geq 413$ egyenlőtlenség megoldása: $d \geq 2{,}79$.

Tehát ha naponta legalább 3 oldallal növeli az elolvasott mennyiséget, be tudja fejezni a könyvet a határidőre.

b) Ha $d = 4$, $S_{12} = 444$, tehát az utolsó napra már nem marad olvasni való. Mivel $S_{11} = 385$, már a tizenkettedik napon is csak 28 oldalt kell elolvasnia.

15. *a)* Egyetlen pontra teljesül: $P(5; -8)$.

b) Az A középpontú 5 egység sugarú kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Az AB szakasz felezőpontja: $F(4{,}5; 1{,}5)$, az AB szakaszfelező merőlegese: $7x - y = 30$.

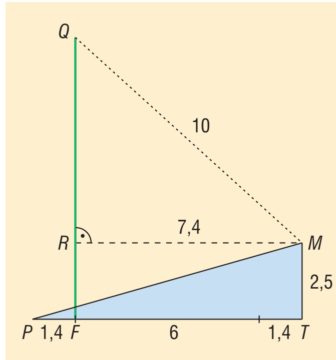
A keresett pontok az egyenes és kör metszéspontjai: $P(5; 5)$ és $Q(4; -2)$.

4. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Az ábra alapján számolható a PM távolság. Az $MTP_\triangle$-ben, Pitagorasz-tétellel:

$$PM^2 = 2{,}5^2 + 8{,}8^2, \quad \text{ebből} \quad PM \approx 9{,}15 \text{ m.}$$

Tehát a készülék érzékeli a macska mozgását.



b) Az MRQ háromszögben szintén Pitagorasz-tétellel számítható az RQ szakasz hossza:

$$RQ^2 = 10^2 - 7{,}4^2, \quad \text{ebből} \quad RQ \approx 6{,}73 \text{ m.}$$

Az $FQ = 2{,}5 + 6{,}73 = 9{,}23$ m.

Tehát ha a szemközti fára 9,23 méternél magasabb helyre száll a bagoly, akkor a készülék nem érzékeli.

c) Készítsünk új ábrát. A keresett AB szakasz az ABT egyenlő szárú háromszögben található, melynek magassága $FT = 7{,}4$ m.

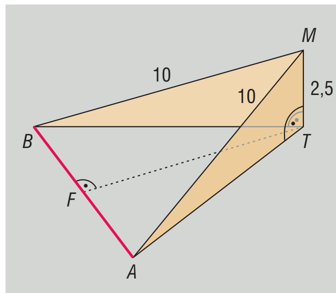
A BT hossza az $MTB_\triangle$–ben Pitagorasz-tétellel számítható:

$$BT^2 = 10^2 - 2{,}5^2, \quad \text{ebből} \quad AT = BT = 9{,}68 \text{ m.}$$

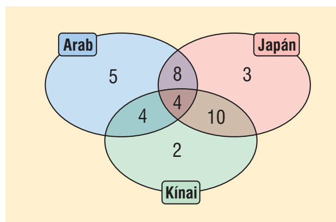
Az $ABT_\triangle$ alapja, szintén Pitagorasz-tétellel:

$$BF^2 = 9{,}68^2 - 7{,}4^2, \quad BF = 6{,}24 \text{ m}, \quad AB = 2BF = 12{,}48 \text{ m.}$$

Tehát a készülék a járda szélén egy 12,48 m hosszú szakaszt „tart megfigyelés alatt”.



17. A szöveg alapján a következő halmazábra készíthető el:



a) $p = \dfrac{16}{36} = 0{,}44;$ *b)* $p = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{36}{2}} = \dfrac{1}{105} = 0{,}0095.$

c) Az ábra alapján 10 olyan tanuló jár az osztályba, aki csak egy nyelvet tanul a fentiek közül.

18. A vásárolt edény térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \approx 89{,}6 \text{ liter.}$$

Ebbe az edénybe

$$\frac{89{,}6 - 17}{0{,}90} \approx 80{,}7 \text{ liter}$$

földet kell vásárolni.

a) Több megoldás is lehetséges, például egy 50 literes, egy 20 literes, egy 10 literes és egy 5 literes csomag megfelel.

b) Az előbbiek ára összesen: 1477 Ft, a legolcsóbb a két darab 50 literes virágföld, 1450 Ft.

c) Ebben az esetben 89,6 liter földet kell vásárolni, s ez most is többféleképpen lehetséges. Például négy 20 literes és egy 10 literes csomag.

A legolcsóbb ebben az esetben is a két 50 literes csomag.

5. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Normálalakban:

a) $A \cdot B = 1 \cdot 10^{24}$; *b)* $A + B = 5{,}2 \cdot 10^{12}$.

2. A síkon 8 különböző pont legfeljebb $\binom{8}{2}$, azaz 28 egyenest határoz meg.

3. A függvény

a) értelmezési tartománya: $x \in [-4; 4]$; *b)* értékkészlete: $y \in [-1; 4]$.

4. Az eredeti háromszög kerülete 30 cm.

5. A túra teljes hossza 30 km.

6. Az ábrán jelölt tartomány: $C \cup (B \setminus A)$ vagy $(A \cup B \cup C) \setminus (A \setminus C)$.

7. A paralelogramma átlóinak metszéspontjából a csúcsokba mutató vektorok:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad -\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}.$$

8. A háromszög két adott oldala által bezárt szög lehet 30° vagy 150°.

9. A mondat tagadása B: „Van olyan erdész, akinek nincs zöld kalapja.”

10. Az egyenlőtlenség megoldása: $x \in]-\infty; -2[\cup]5; \infty[$.

11. A háromszög C csúcsának koordinátái $C(-2; 1)$.

12. A valószínűség:

$$P(\text{30-cal osztható}) = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}, \qquad P(\text{30-cal nem osztható}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

5. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* Az egyenlet bal és jobb oldala minden valós x helyen értelmezve van. A hatványozás azonosságait alkalmazva, valamint az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt:

$$3^{-1} \cdot 3^{-\frac{3}{2} \cdot x - 3} = 3^{2x-2} \cdot 3, \qquad \text{amiből} \qquad x = -\frac{6}{7}.$$

Ez valóban gyöke az eredeti egyenletnek.

b) A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, ezért:

$$x^2 + 5x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty; \frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; \infty\right[,$$

$$4x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]\frac{1}{4}; \infty\right[.$$

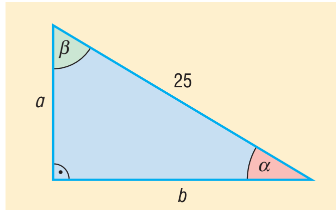
Az egyenlet alaphalmaza: $x \in \left]\frac{1}{4}; \infty\right[$.

A logaritmus azonosságai és a logaritmusfüggvény kölcsönös egyértelműsége miatt:

$$\sqrt{x^2+5x+3}=4x-1 \quad\Rightarrow\quad 15x^2-13x-2=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=1 \text{ és } x_2=-\frac{2}{15}.$$

Az egyenlet alaphalmazába csak $x=1$ tartozik bele, és ez megoldása is az eredeti egyenletnek.

14. Legyen a derékszögű háromszög két befogójának hossza a és b.



a) A szokásos jelölésekkel a hegyesszögek koszinuszainak aránya:

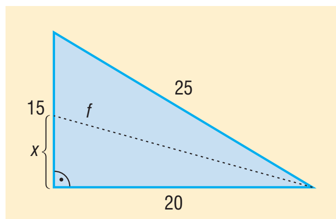
$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{25}}{\frac{b}{25}}=\frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{b}=\frac{3}{4}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján $a^2+b^2=25^2$. A két összefüggésből $a=15$ és $b=20$. A háromszög befogói 15 cm és 20 cm hosszúak.

b) Legyen a háromszög beírt körének sugara r. A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a\cdot b}{2}=r\cdot\frac{a+b+c}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{15\cdot 20}{2}=r\cdot\frac{15+20+25}{2} \quad\Rightarrow\quad r=5.$$

A háromszög beírt körének sugara $r=5$ cm.



c) Egy háromszög belső szögfelezője a szemben levő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. A kisebbik hegyesszöggel szemben levő oldal 15 cm hosszú, és ezt a szögfelező $20:25$ arányban osztja. Az ábrán az x szakasz hossza: $\frac{20}{3}$.

A szögfelező f hosszára felírható Pitagorasz-tétel:

$$f^2=20^2+\left(\frac{20}{3}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad f=\frac{20}{3}\cdot\sqrt{10}\approx 21{,}08.$$

A kisebb hegyesszög felezőjének a háromszög belsejébe eső szakasza $\frac{20}{3}\cdot\sqrt{10}\approx 21{,}08$ cm hosszú.

15. *a)* Számítsuk ki 8, 12 és 14 legkisebb közös többszörösét: $[8;12;14]=168$.

A buszok a megállóból 168 percenként indulnak egyszerre. Reggel 5-től délelőtt 10-ig 300 perc, 11-ig 360 perc telik el. Mivel $2\cdot 168=336$, 10 és 11 óra között van olyan időpont, amikor a megállóból egyszerre indul mind a három járat, és ez az időpont 10 óra 36 perc.

b) Minden várakozó 3-féle buszra szállhat fel, ezért 3^{35}-féleképpen szállhatnak fel a buszokra.

c) A 70-es buszra $35\cdot 0{,}2=7$ ember, a 71-esre $35\cdot\frac{2}{7}=10$, a 72-esre $35-7=18$ utas száll fel.

A kedvező esetek száma $\binom{35}{7}\cdot\binom{28}{10}\cdot\binom{18}{18}$, az összes eset a *b)* rész alapján 3^{35}.

A keresett valószínűség $\dfrac{\binom{35}{7}\cdot\binom{28}{10}\cdot\binom{18}{18}}{3^{35}}\approx 0{,}0018.$

d) A kiindulási pont $K(0;0)$, az első megálló $E(-2;3)$, a második megálló $M(2;5)$, a harmadik $H(3;3)$. A kiindulási helyétől a harmadik megállóig megtett út:

$$s=KE+EM+MH=\sqrt{(-2)^2+3^2}+\sqrt{(2-(-2))^2+(5-3)^2}+\sqrt{(3-2)^2+(3-5)^2}=$$
$$=\sqrt{13}+\sqrt{20}+\sqrt{5}=\sqrt{13}+3\sqrt{5}\approx 10{,}31 \text{ km}.$$

5. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. A befektetni kívánt pénz legyen a forint.

a) Az (1) lehetőség szerint három év múlva $a \cdot 1{,}08^3 \approx 1{,}2597a$ forintot kapunk.
A (2) lehetőség szerint három év múlva $a \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}15 \approx 1{,}2544a$ forintot kapunk.
Takarékos Oszkár az első befektetési forma esetén jut több pénzhez 3 év letelte után.

b) Ha a bank negyedévenként p százalékkal növeli a pénzünket, akkor 3 év után $a \cdot \left(1+\dfrac{p}{100}\right)^{12}$ forinthoz jutunk. Legyen $1+\dfrac{p}{100}=x$.

$$a \cdot x^{12} = a \cdot 1{,}08^3, \quad / : a \neq 0$$
$$x = \sqrt[4]{1{,}08} \approx 1{,}0194.$$

Negyedévenkénti 1,94%-os kamat esetén kapunk annyi pénzt, mint az (1) befektetési mód esetén.

c) Tegyük fel, hogy n év múlva legalább 5 000 000 forint áll majd rendelkezésére. Ez akkor következik be, ha

$$2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}08^n + 10^6 \cdot 1{,}08^{n-1} \geq 5 \cdot 10^6.$$

Osztva mindkét oldalt 10^6-nal és az egyenlőtlenséget rendezve:

$$2 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08^{n-1} + 1{,}08^{n-1} \geq 5,$$
$$3{,}16 \cdot 1{,}08^{n-1} \geq 5,$$
$$1{,}08^{n-1} \geq \frac{5}{3{,}16}.$$

Mindkét oldal pozitív, így vehetjük a tízes alapú logaritmusát:

$$\lg 1{,}08^{n-1} \geq \lg \frac{5}{3{,}16}, \qquad \text{amiből} \qquad n \geq 6{,}96.$$

Takarékos Oszkárnak hét évet kell várni hogy év végén legalább 5 000 000 forintot vehessen fel.

17. *a)* A stadion egyes soraiban levő ülőhelyek számai olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első eleme 200, differenciája 4. Tegyük fel, hogy n sor van a stadionban. A számtani sorozat első n elemének összegére vonatkozó összefüggés alapján:

$$11500 < n \cdot \frac{400+(n-1)\cdot 4}{2} < 12000.$$

Az egyenlőtlenség-rendszert rendezve:

$$11500 < n \cdot (200+(n-1)\cdot 2) < 12000,$$
$$5750 < n^2 + 99n < 6000.$$

A sorok n számára teljesülnie kell, hogy (1) $0 < n^2 + 99n - 5750$ és (2) $n^2 + 99n - 6000 < 0$.
Az (1) egyenlőtlenség megoldása:

$$n < \frac{-99-\sqrt{32\,801}}{2} \approx -140{,}06 \qquad \text{vagy} \qquad n > \frac{-99+\sqrt{32\,801}}{2} \approx 41{,}06.$$

A (2) egyenlőtlenség megoldása:

$$-141{,}43 \approx \frac{-99-\sqrt{33\,801}}{2} < n < \frac{-99+\sqrt{33\,801}}{2} \approx 42{,}43.$$

Mivel n pozitív egész, a két feltételt csak $n = 42$ teljesíti, tehát a stadionban 42 sor van.

b) Az összes lehetőség száma $\binom{8}{3}$.

Ha az első három között nincs angol versenyző, akkor 5 versenyző közül került ki a három dobogós helyezett. A kedvezőtlen esetek száma $\binom{5}{3}$.

Annak a valószínűsége, hogy valamelyik dobogós helyre angol futó került:

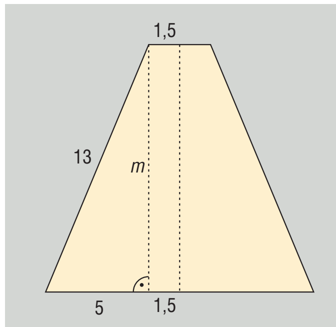
$$p = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{23}{28} \approx 0{,}82.$$

c) Az eladott jegyek árainak átlaga:

$$\frac{4740 \cdot 0{,}4 \cdot 3200 + 4740 \cdot 0{,}3 \cdot 4000 + 4740 \cdot 0{,}3 \cdot 4700}{4740} = 3890 \text{ forint.}$$

Az eladott jegyek árainak módusza 3200 forint, mediánja pedig 4000 forint.

18. *a)* Először az alsó egyenes csonka kúp alakú rész térfogatát számítjuk ki először.



A csonka kúp alapkörének sugara $R = 6{,}5$ cm, fedőkörének sugara $r = 1{,}5$ cm. A kúp magasságát a tengelymetszetből számíthatjuk:

$$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm.}$$

A csonka kúp térfogata:

$$V_{\text{csonka kúp}} = \frac{m \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \cdot \pi}{3} = 217\pi.$$

A felső hengeres rész térfogata:

$$V_{\text{henger}} = r^2 \cdot \pi \cdot m' = 27\pi.$$

A flaska teljes űrtartalma:

$$V = V_{\text{csonkakúp}} + V_{\text{henger}} = 244\pi \approx 766{,}55 \text{ cm}^3.$$

A $7{,}5 \text{ dl} = 750 \text{ cm}^3$ bort beleöntve a flaskába: $766{,}55 - 750 = 16{,}55 \text{ cm}^3$ térfogatnyi hely marad. Mivel ez kisebb, mint a felső hengeres rész térfogata, az üvegben a bor szintje a felső hengeres résznél van, felülről számítva a következő magasságban:

$$h = \frac{V_{\text{hiány}}}{r^2 \cdot \pi} = \frac{16{,}55}{1{,}5^2 \cdot \pi} \approx 2{,}34 \text{ cm.}$$

b) Ha az üvegből annyit kiöntünk, hogy a bor szintje 3 centiméterrel csökkenjen, akkor ez

$$V^* = 1{,}5^2 \cdot \pi \cdot 3 \approx 21{,}21 \text{ cm}^3$$

bor kiöntését jelenti. A bor alkoholtartalma eredetileg $750 \cdot 0{,}125 \text{ cm}^3$. Az alkoholtartalom minden kiöntés után $\frac{750 - 21{,}21}{750} = \frac{728{,}79}{750}$-szeresére változik.

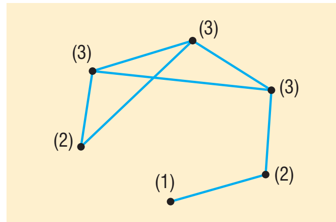
A kínált bor alkoholtartalma végül $750 \cdot 0{,}125 \cdot \left(\frac{728{,}79}{750}\right)^4 \text{ cm}^3$.

A vendégeket Vendel $\dfrac{750 \cdot 0{,}125 \cdot \left(\frac{728{,}79}{750}\right)^4}{750} \cdot 100 \approx 11{,}14\%$-os borral kínálta.

6. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Az egyszerűsített tört: $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1)\cdot n.$

2. Kössük össze a haragosokat éllel. Az ábrán egy lehetséges megoldást látunk.



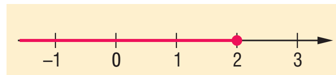
3. A szavazáson $7\,530\,000$ fő vehetett volna részt.

4. A sorozat első 5 elemének összege $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Igaz.

6. A focilabdát $5{,}73°$-ban látjuk.

7. Az egyenlet valós megoldásai a számegyenesen láthatók.

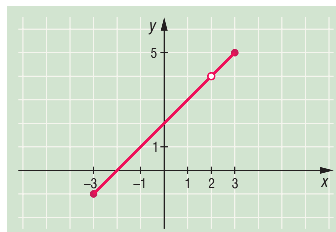


8. Az $ABC\sphericalangle = 21°$.

9. A fizetések átlaga $126\,571$ forint, módusza $90\,000$ forint, mediánja pedig $105\,000$ forint.

10. Az egyenlet diszkriminánsa $4\sqrt{2}$.

11. A függvény grafikonja az ábrán látható.



12. Annak a valószínűsége, hogy Ambrus Adri mellett ül:

$$\frac{2\cdot 5!}{6!} = \frac{1}{3}.$$

6. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. *a)* Használjuk fel, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$2\cdot(1-\sin^2 x) + 1 = 5\cdot \sin x,$$

$$0 = 2\cdot \sin^2 x + 5\cdot \sin x - 3.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$\sin x = -3$, ami nem lehet a szinuszfüggvény értékkészlete miatt,

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

amelyek kielégítik az eredeti egyenletet.

b) Írjuk fel az egyenlet jobb és bal oldalát 2 hatványaként.

$$2^{2x+2\cdot|x+1|} = 2^5.$$

Mivel az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, a $2x + 2|x+1| = 5$ egyenletet kell megoldanunk.

Ha $x \geq -1$, akkor $2x + 2(x+1) = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{3}{4}$.

Ha $x < -1$, akkor $2x + 2(-x-1) = 5$, nincs megoldás.

Tehát $x = \dfrac{3}{4}$, ami az eredeti egyenletnek valóban gyöke.

14. Az első nap a kutya $2(20+60) = 160$ m utat tesz meg.

A második nap $2(20+50) + 160 = 300$ m utat tesz meg, mivel az első háztömb szélességét, és még két háztömb közti távot kétszer kell megtennie az előző napihoz képest.

A harmadik nap $2(20+50+20+50) + 160 = 440$ m utat tesz meg, az előző napinál ismét $2(20+50) = 140$ méterrel többet.

A kutya által naponként megtett távolságok egy számtani sorozat tagjai. A sorozat első tagja 160, differenciája 140.

a) A kutya a hetedik napon $a_7 = a_1 + 6d = 160 + 6 \cdot 140 = 1000$ méter utat tesz meg.

b) Húsz nap alatt a kutya összesen $S_{20} = 20 \cdot \dfrac{2a_1 + 19d}{2} = 29800$ métert, azaz 29,8 km-t fut.

15. Az első kép alapján az első fájl 25%-a az összes másolás 7%-a, tehát az első fájl az összes másolandónak $\dfrac{7}{25} \cdot 100 = 28\%$-a.

Ezért és a második kép alapján a második fájl 15%-a az összes másolás $37\% - 28\% = 9\%$-a.

A második fájl az összes másolandó anyagnak $\dfrac{9}{15} \cdot 100 = 60\%$-a.

A harmadik fájl mérete tehát az összesnek $100\% - 28\% - 60\% = 12\%$-a.

Ha a teljes másolás a 91%-ánál tart, akkor a harmadik fájlból akkora rész másolása történt meg, amennyi az összes másolandónak $91\% - 28\% - 60\% = 3\%$-a.

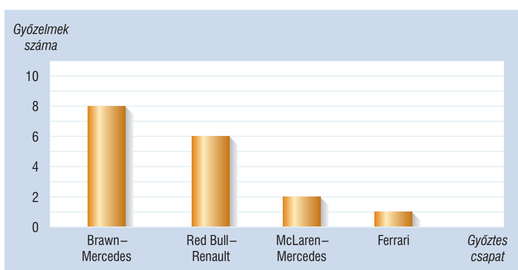
A 3% a 12%-nak $\dfrac{3}{12} \cdot 100 = 25\%$-a.

A harmadik fájl másolása során, ha a felső sávban 91% látható, akkor az alsó sávban 25%-ot láthatunk.

6. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Az átlagpontszám 53,95. Az átlagpontszámhoz Lewis Hamilton pontszáma van a legközelebb.

b) Az adatsor módusza a Brawn–Mercedes csapata, ők nyertek legtöbbször futamot.



c) Az összes helyszín száma 17, ebből a két megszüntetendő helyszínt $\binom{17}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani, tehát az összes esetek száma $\binom{17}{2}$.

Ha Magyarországot kiválasztanák, akkor a másik helyszín a fennmaradó 16 másik közül kerülne ki, tehát a kedvező esetek száma 16.

Annak a valószínűsége, hogy Magyarország a két kiválasztott közt lenne:

$$\frac{16}{\binom{17}{2}} = \frac{2}{17} \approx 0{,}12.$$

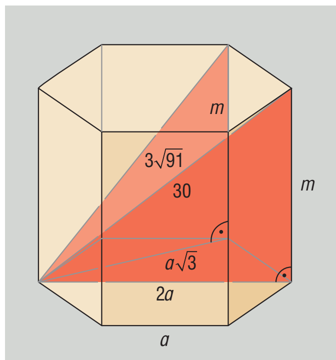
d) Mivel Schumacher 3 perc 20 másodpercenként körözi le a másik autót, ennyi idő alatt Schumacher a pálya hosszával, azaz 4381 méterrel több utat tesz meg.

Legyen az autó sebessége v. Mivel 3 perc 20 másodperc az $\frac{1}{18}$ óra, az $s = v \cdot t$ összefüggés alapján a megtett utak különbsége:

$$199 \cdot \frac{1}{18} - v \cdot \frac{1}{18} = 4{,}381, \quad \text{ebből} \quad v = 120{,}142.$$

A másik autó sebessége megközelítőleg $120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

17. Legyen a szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alaplapjának éle a, magassága m hosszúságú.



A szabályos hatszög hosszabb átlója az alapél kétszerese: $2a$, rövidebb átlója egy a oldalú szabályos háromszög magasságának a kétszerese: $a\sqrt{3}$.

Pitagorasz tételét felírva a testátlókat tartalmazó derékszögű háromszögekben:

$$\left.\begin{aligned}\left(a\sqrt{3}\right)^2 + m^2 &= \left(3\sqrt{91}\right)^2\\ (2a)^2 + m^2 &= 30^2\end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer pozitív megoldásai: $a = 9$ és $m = 24$.

A hasáb alapéle 9 cm, magassága 24 cm.

a) A hasáb térfogata:

$$V = T_{\text{alap}} \cdot m = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m = 2916 \cdot \sqrt{3} \approx 5050{,}66\ \text{cm}^3.$$

b) A hasáb felszíne:

$$A = 2 \cdot T + 6 \cdot a \cdot m = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot a \cdot m = 243\sqrt{3} + 1296 \approx 1716{,}89\ \text{cm}^2.$$

18. Thalész tétele értelmében a derékszögű csúcs rajta van az átfogó mint átmérő fölé írt körön. A kör középpontja AB felezőpontja, vagyis $O(3;1)$, sugara:

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(8-(-2))^2 + (-11-13)^2}}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

A kör egyenlete:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 169.$$

a) A körnek az y tengellyel való metszéspontját a $(0-3)^2+(y-1)^2=169$ egyenlet megoldása adja:

$$(y-1)^2=160,$$
$$|y-1|=\sqrt{160}.$$

Ebből a háromszög derékszögű csúcsának koordinátái lehetnek:

$$C_1\left(0;1+4\sqrt{10}\right) \quad \text{vagy} \quad C_2\left(0;1-4\sqrt{10}\right).$$

b) A kör kerületén keressük meg azokat a pontokat, amelyeknek első koordinátája 15. Ehhez oldjuk meg a $(15-3)^2+(y-1)^2=169$ egyenletet:

$$144+(y-1)^2=169,$$
$$|y-1|=5.$$

Az egyenlet megoldásai: $y_1=6$ és $y_2=-4$.

Az $E_1(15;6)$ és $E_2(15;-4)$ érintési pontokban kell a körhöz érintőket húznunk. Mivel egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, az érintők normálvektorait a kör középpontjából az érintési pontokba húzott vektorokkal adhatjuk meg.

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{OE_1}(12;5) \quad\Rightarrow\quad e_1\!: 12x+5y=12\cdot 15+5\cdot 6 \quad\Rightarrow\quad 12x+5y=210,$$
$$\vec{n}_2=\overrightarrow{OE_2}(12;-5) \quad\Rightarrow\quad e_2\!: 12x+5y=12\cdot 15-5\cdot(-4) \quad\Rightarrow\quad 12x-5y=200.$$

Az érintők egyenletei: $12x+5y=210$ és $12x-5y=200$.

Az érintők hajlásszögét normálvektoraik hajlásszögének segítségével adhatjuk meg, amelyet a skaláris szorzatukkal számolhatunk:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{119}{13^2} \quad\Rightarrow\quad \varphi\approx 45{,}24°.$$

Mivel a φ szög hegyesszög, az érintők hajlásszöge $45{,}24°$.

7. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}=\dfrac{x-y}{x+y}.$

2. $\dfrac{n}{50+n}<0{,}25$; $0{,}75n<12{,}5$; $n<16{,}\dot{6}$. Legfeljebb 16 marcipános kerülhet bele.

3. Két nem egybe eső kör két pontban metszheti egymást. Minden újabb kör metszheti már az összes korábbit 2-2 pontban, így a lehetséges metszéspontok száma $1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 2+4\cdot 2=20$.

4. Nyolc elem mediánja a két középső elem számtani közepe. Ha X és Y is kisebb, mint 4, akkor a medián pontosan 3,5. Ha csak X kisebb 4-nél, akkor a medián maximum 5,5. Így X, $Y>4$, és $X=5$, $Y=7$. (Feltettük, hogy X kisebb Y-nál, és a számok mind különbözők.)

5. $T=5^2\cdot\sin 60°\approx 21{,}65\ \text{cm}^2$.

6. Az ötpontú teljes gráf éleinek száma $\dfrac{5\cdot 4}{2}=10$, az adott gráfnak $\dfrac{2+2+2+2+4}{2}=6$ éle van. Így még 4 élt kell berajzolni.

7. A keresett egyenes egyenlete $e\!: -3x+2y=1$.

8. Az egyenlet két gyöke: $x_1=0$ és $x_2=-9$. A megoldás: $x=-9$.

9. A megoldás: *c)*, azaz $y = 2^{x+1} - 1$.

10. 0° és 360° között két szög van, melyekre $\sin 240° = \sin 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Közülük $\cos 240° < 0$, ezért $\cos 240° = -\frac{1}{2}$.

11. Jelölje n a Berlinben jártakat. Ekkor $10 + \frac{n}{2} = 14$, ebből $n = 8$. Tehát 4 fő járt mindkét városban.

12. A logaritmus definíciója miatt $2x - 4 > 0$, azaz $x > 2$, és $x \in \mathbb{N}$.

7. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* $\frac{6+9+10+8+X}{5} = 8$, vagyis $X = 7$.

b) Az egyes napokon 5, 10, 9, 11 autó érkezett, a változások (+5, –1, +2) átlaga: $\frac{5-1+2}{3} = 2$. Ennek alapján péntekre $11 + 2 = 13$ autó várható.

c) Ha egyik napon sem érkezett olyan jármű, amelyen egyszerre végzik el a kétfajta beavatkozást, akkor a valószínűség 1. A legkisebb értéket pedig akkor kapjuk, ha minden nap a lehető legtöbb jármű vesz részt mindkét típusú beavatkozásban, azaz hétfőn 5 (1), kedden 9 (1), szerdán 9 (1), csütörtökön 8 (3). Zárójelben azon járművek száma szerepel, amelyeken csak az egyik beavatkozást végzik el. Így a kérdéses valószínűség:

$$\frac{1+1+1+3}{37} \approx 0{,}16.$$

14. *a)* $\left(2^x\right)^2 - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$, $(2^x)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$, ahonnan $(2^x)_1 = 6$ és $(2^x)_2 = 2$.

A két megoldás: $x_1 = \log_2 6 \approx 2{,}585$ és $x_2 = 1$.

b) A feladat értelmezési tartománya: $x > 0$. Rendezve az egyenlőtlenséget:

$$\frac{x}{x+3} - 9 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-8x - 27}{x+3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{27}{8} \quad \text{vagy} \quad x > -3.$$

Az értelmezési tartomány miatt az egyenlőtlenség megoldása: $x > 0$.

15. *a)* Az egyre növekvő kerületű körök sugarai: $r, 2r, 3r, \ldots, nr, \ldots$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$.
A körök kerülete: $K_1 = 2r \cdot \pi$, $K_2 = 2 \cdot (2r) \cdot \pi$, $K_3 = 2 \cdot (3r) \cdot \pi$, …, $K_n = 2 \cdot (nr) \cdot \pi$, …
Számtani a sorozat, ha a szomszédos elemek különbsége állandó. Ez teljesül a kerületekre:

$$K_{n+1} - K_n = 2 \cdot [(n+1) \cdot r] \cdot \pi - 2 \cdot (nr) \cdot \pi = 2r \cdot \pi = K_1 = \text{állandó}.$$

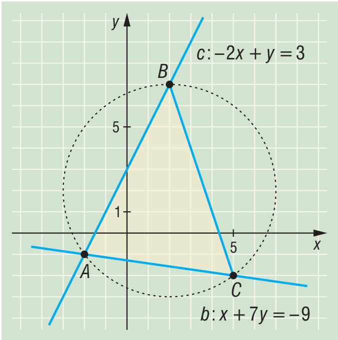
b) Jelölje a_n az n-edik körgyűrűbe került darabkák számát, ami arányos a kerülettel.
Mivel $K_n = K_{n-1} + K_1$, ezért $a_n = a_{n-1} + a_1$ (ahol $a_1 = 4$), tehát:

$$a_1 + (n-1)d = a_1 + (n-2)d + a_1,$$
$$nd - d = nd - 2d + 4,$$
$$d = 4.$$

Így a darabkák száma: $S_{20} = 840$. Ha egy járólap 6 darabkát adott ki, akkor 140 járólapot kellett miszlikbe aprítaniuk.

7. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. Ábrázoljuk a megadott alakzatokat. Látjuk, hogy ezek metszéspontjai adják a háromszög csúcsait. Két alakzat metszéspontját pedig a koordináta-geometriában egyenletrendszerek megoldásaként kapjuk.



a) $A = b \cap c$: $\left.\begin{aligned} -2x + y &= 3 \\ x + 7y &= -9 \end{aligned}\right\}$, a megoldás: $x = -2,\ y = -1$.

Tehát $A(-2; -1)$.

$B = c \cap k$: $\left.\begin{aligned} -2x + y &= 3 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$.

Fejezzük ki c egyenletéből y-t, kapjuk az $5x^2 - 20 = 0$ egyenletet, ahonnan $|x| = 2$. Az egyik megoldás éppen A, a másik: $x = 2,\ y = 7$. Tehát $B(2; 7)$.

$C = b \cap k$: $\left.\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-2)^2 &= 25 \\ x + 7y &= -9 \end{aligned}\right\}$, a megoldás: $x = 5,\ y = -2$. Tehát $C(5; -2)$.

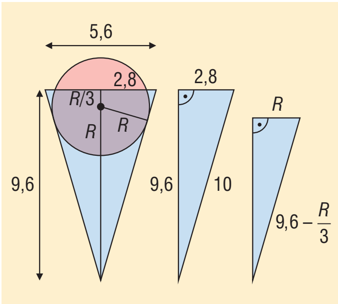
b) $K = d(AB) + d(AC) + d(BC) = \sqrt{80} + \sqrt{50} + \sqrt{90} \approx 25{,}5$ egység.

c) Mivel BC a legnagyobb oldal, a vele szemben levő α szög a legnagyobb. Például a koszinusztételt felírva:

$$90 = 80 + 50 - 2 \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{50} \cdot \cos\alpha, \quad \text{ebből} \quad \alpha \approx 71{,}56°.$$

17. Képzeletben vágjuk el a tölcsért és a fagyit középen egy függőleges síkkal. A metszetet rajzoljuk le.

a) A rajzon kiemelt két háromszög hasonló. (A tölcsér alkotójának hosszát kiszámíthatjuk a Pitagorasz-tétellel, értéke 10 cm.) Felírva az arányokat:



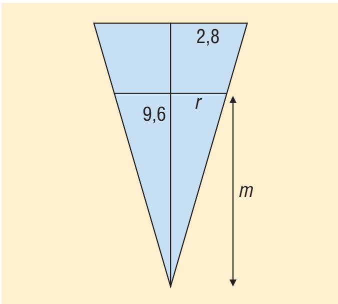
$$\frac{9{,}6 - \frac{R}{3}}{R} = \frac{10}{2{,}8}, \qquad \text{ahonnan} \qquad R \approx 2{,}4585 \text{ cm}.$$

Így a fagyi térfogata:

$$V_{\text{fagyi}} = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi \approx 62{,}24 \text{ cm}^3.$$

Kerekítve, a gombóc térfogata 62 cm^3.

b) Ha elolvad a fagyi, és az olvadt csoki „kitölti” a kúp alakú tölcsért, akkor szintén találunk két hasonló háromszöget:



$$\frac{m}{r} = \frac{9{,}6}{2{,}8} = \frac{24}{7}, \quad \text{innen} \quad m = \frac{24}{7} r.$$

Feltételezzük, hogy a fagyi térfogata nem változott (illetve a változástól eltekintünk), ezért:

$$V_{\text{olvadt csoki}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \frac{24}{7} r}{3} = \frac{8r^3 \cdot \pi}{7} = 62,$$

amiből $r \approx 2{,}58$ cm és $m \approx 8{,}86$ cm.

18. Minden esetben megfelelő módon kell behelyettesítenünk a megadott képletbe.

a) $L = 25\text{ cm} = 0{,}25\text{ m},\quad a = 0{,}81\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2},\quad T = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{0{,}25}{9{,}81-0{,}81}} = \dfrac{\pi}{3}\,(\text{s}).$

b) $T = 2\,(\text{s}),\quad a = 8{,}81\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2},\quad 2 = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{L}{9{,}81-8{,}81}}\quad\Rightarrow\quad L = \dfrac{1}{\pi^2}\approx 0{,}1013\,(\text{m}).$

c) $T = 3\text{ s},\quad L = 1\text{ m}.\quad 3 = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{1}{9{,}81-a}}\quad\Rightarrow\quad a = 9{,}81-\dfrac{4\pi^2}{9}\approx 5{,}42\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

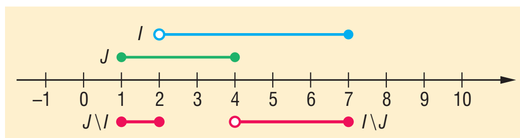
8. Feladatsor I. rész – megoldások

1. A végződés lehet 12, 32, 52, 72, 92, tehát X lehet 1, 3, 5, 7, 9.

2. A külső pontból a körhöz húzott érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. A Pitagorasz-tételből $x^2 + 6^2 = 10^2$, ebből $x = 8$.

3. Az első állítás megfordítása igaz. A második állítás megfordítása igaz. A harmadik állítás megfordítása hamis, mert az 1 önmagával és 1-gyel is osztható, mégsem prím.

4. Az intervallumok az ábrán láthatók.



5. $\dbinom{10}{4}\cdot 4! = \dfrac{10!}{(10-4)!} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040.$

6. $\dfrac{\dfrac{15}{100}+\dfrac{62}{80}+\dfrac{58}{100}+\dfrac{n}{80}}{4} = \dfrac{15+77{,}5+58+1{,}25n}{400}\geq 0{,}6,$ innen $n \geq 71{,}6.$

Ha a tanár csak egész pontokat ad, akkor legalább 72 pontost.

7. Mivel egymás reciprokai, a kotangens értéke is negatív.

8. $]-\infty; -4]$-on monoton növő az $f(x)$.

9. Ha eredetileg x árú az áru, akkor a vásárt követő csökkentés után $x\cdot 1{,}4\cdot 0{,}6 = x\cdot 0{,}84$ az ára, s ez az eredeti árnál kisebb. Mégpedig 16%-kal.

10. Az egyenletből a k kör középpontja $O_k(-2; 1)$, sugara $r = 3$. A két kör középpontjának távolsága:

$$d(OK) = \sqrt{(2+2)^2 + (4-1)^2} = 5.$$

Ha nincs közös pont, akkor:

$$R < d(OK) - r = 5 - 3 = 2 \quad\text{vagy}\quad R > d(OK) + r = 5 + 3 = 8.$$

11. $\log_2 12 = \log_2(2^2\cdot 3) = \log_2 2^2 + \log_2 3 = 2\log_2 2 + p = 2 + p.$

12. A valószínűség a területek aránya. A keret és a kép konkrét nagysága nem számít, tekintsük a kör sugarát egynek, így:

$$T_{\text{képkeret}} = 4 \quad\text{és}\quad T_{\text{körkép}} = 1^2\cdot\pi.$$

A találati valószínűség:

$$p = \frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854.$$

8. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. Az értelmezési tartomány: $y^2 + 2x - 5 \geq 0$. A második egyenletből $y = 3 - x$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe, egy várhatóan másodfokú egyismeretlenes egyenlethez jutunk:

$$\sqrt{(3-x)^2 + 2x - 5} = 2x + 3.$$

A gyökjel alatt nevezetes szorzatot találunk, mégpedig $(x-2)^2$-t, ezért az egyenlet:

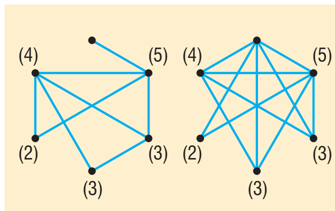
$$|x-2| = 2x + 3.$$

Az abszolút értékes egyenletnek egy megoldása van, $x = -\frac{1}{3}$, így $y = \frac{10}{3}$. Ellenőrizzük.

14. *a)* A három házaspár összesen hat fő. Ha valakinél elvágjuk a kört és „kiterítjük” az ülésrendet, akkor az eredmény $5! = 120$.

b) Most az egyik pár első tagjánál vágjuk el a sort és kiterítjük az ülésrendet, akkor 2-féle módon lehet a másik két párt leültetni, illetve minden páron belül 2-2-féleképpen a házastársakat. Így az eredmény $2 \cdot 2^3 = 16$.

c) Képzeljük el a hat személyt, mint egy gráf hat pontját. A gráf élei azt reprezentálják, hogy két személy egymás között kicserélte a salátástálat (az mindegy, hogy ki kinek adta). Ekkor az 5 fokú pont minden más ponttal szomszédos, tehát a hatodik pont fokszáma is legalább 1.



A 4 fokú pontból tudunk éleket rajzolni csak a többi ponthoz, illetve a leendő két 3 fokú pontot összekötve fokszámuk 3 lesz. Tehát az utolsó pont minimális fokszáma 1.

Másodszorra kössük össze a 4 fokú pontot a hatodik ponttal és a két 3 fokú ponttal. Végül kössük össze a 2 fokú pontot is a hatodik ponttal. Így a hatodik pont fokszáma 5 lesz. Tehát ennyi információ birtokában csak annyit állíthatunk, hogy a hatodik személy az asztalnál legalább egyszer, legfeljebb ötször adta-vette a salátástálat.

15. *a)* Ha egy $y = f(x)$ függvény áthalad az $(x'; y')$ ponton, akkor teljesül rá, hogy $f(x') = y'$. Azaz $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + c = 16$, innen $c = 4$.

b) Az $f(x)$ függvény pontosan ott metszi az x tengelyt, ahol $y = f(x) = 0$. Azaz $2x^2 - 5x + 4 = 0$.

A másodfokú egyenletnek nincs megoldása, hiszen $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 25 - 32 = -7 < 0$.

Mivel normál állású parabola, eszerint végig az x tengely felett halad, nem metszi azt.

c) Ha az x tengely felett halad, akkor függőlegesen lefelé kell elmozgatni, hogy érintse a tengelyt. Ezt pozitív konstans elvételével érhetjük el.

I. megoldás.

Az érintéshez a diszkriminánsnak 0-vá kell válnia:

$$D = 25 - 8(4-p) = -7 + 8p = 0, \quad \text{ahonnan} \quad p = \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

II. megoldás.

Alakítsuk a függvényt teljes négyzetté:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 4 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} + 4 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}.$$

Innen látható, hogy az utolsó tag elhagyása, azaz a görbe 0,875 egységgel való lefelé mozdítása után már érinti az x tengelyt.

8. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. Készítsünk a hotelszobákról egy összefoglaló táblázatot.

	Egy szinten található azonos típusú		Összesen a hotelben	
	szobák	közülük konyhával rendelkezik	szoba	konyhával
2 személyes	7	2	91	26
4 személyes	8	2	104	26
6 személyes	5	2	65	26
Összesen	20	6	260	78

a) A 8 párnak kétszemélyes szobákat utalnak ki a hotel 91 szobájából valamilyen sorrendben. Erre $\frac{91!}{(91-8)!}$-féleképpen kerülhet sor. A kétgyermekes pároknak négyszemélyes szobákra van szükségük, ezért számukra $\frac{104!}{(104-3)!}$ lehetőség adódik. (A szobákat és a párokat is megkülönböztetjük.) A kérdésre a válasz ezek szorzata, hiszen függetlenek: $\frac{91!}{(91-8)!}\cdot\frac{104!}{(104-3)!}$.

b) A felső öt emeleten összesen $5\cdot 8 = 40$ négyszemélyes szoba van. Hogy pont ilyenbe kopog be az illető, annak valószínűsége $P_1 = \frac{40}{260}$. Az alsó nyolc emeleten $8\cdot 5 = 40$ hatszemélyes szoba van, így utóbbi $P_2 = \frac{40}{260}$ valószínűsége megegyezik az előbbivel.

c) Mivel a feladat szövege tartalmazza a „legalább” szót, érdemes megvizsgálni a komplementer eseményre való áttérés lehetőségét. 39 szobát választunk ki összesen, közülük legalább egy konyhával rendelkezik: akkor rendelkezhet azzal 1, 2, 3, 4 stb. Ez nagyon sok lehetőség, megéri áttérni a komplementer eseményre!

Ha a kiválasztás után nincs konyhás szoba, akkor szintenként a kétszemélyesek közül 5, a háromszemélyesek közül 6, a hatszemélyesek közül 3 szoba jöhet szóba $\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}$ valószínűséggel.

Ugyanez érvényes mind a 13 szintre, tehát az ellentett esemény valószínűsége $\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}\right)^{13}$.

Magának a kérdezett eseménynek pedig $1-\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}\right)^{13}$ a valószínűsége.

17. Jelölje S a szépirodalmat, K a képregényeket, U az újságot olvasó tanulók halmazát. A feladat szövege szerint:

(1) $|S|+|K|-|S\cap K| = 15$;

(2) $|K|+|U|-|K\cap U| = 17$;

(3) $|S|+|U|-|S\cap U| = 18$;

(4) $\frac{1}{2}\cdot|S| = |S\cap K|$;

(5) $|K|-6 = |K\cap U|$;

(6) $|S\cap U| = 3$;

(7) $|S\cap U\cap K| = 1$.

(4)-et (1)-be helyettesítve: $\frac{1}{2}\cdot|S|+|K| = 15$.

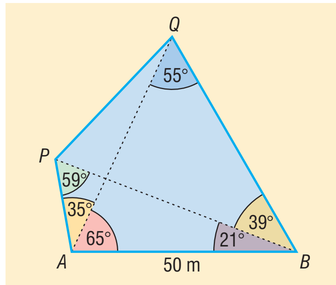
(5)-öt (2)-be helyettesítve: $|U| = 11$.

(6)-ot (3)-ba helyettesítve: $|S| + |U| = 21$, ebből $|S| = 10$, és így $|K| = 10$.
Ekkor (4)-ből $|S \cap K| = 5$, (5)-ből $|K \cap U| = 4$.
Tehát

$$30 - (|S| + |K| + |U| - |S \cap K| - |S \cap U| - |K \cap U| + |S \cap U \cap K|) =$$
$$= 30 - (10 + 10 + 11 - 5 - 3 - 4 + 1) = 10,$$

azaz 10-en nem olvassák egyiket sem. Mivel $10:30 \approx 0{,}333$, ez a tanulók 33,3%-át jelenti.

18. A következő ábrát rajzolhatjuk fel:



Felírva a szinusztételt az APB és QAB háromszögekben, kiszámíthatjuk AP és AQ hosszát:

$$\frac{AP}{50} = \frac{\sin 21°}{\sin 59°} \quad \text{és} \quad \frac{AQ}{50} = \frac{\sin 60°}{\sin 55°},$$

ahonnan $AP \approx 20{,}9$ m és $AQ \approx 52{,}861$ m.

Alkalmazzuk a koszinusztételt APQ háromszögben:

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cdot \cos 35° \approx 1421{,}1$$

amiből $PQ \approx 37{,}7$ m.

Nagy Papucsnak közelítőleg 37,7 m hosszú szárogatókötelet kell sodornia.

9. Feladatsor I. rész – megoldások

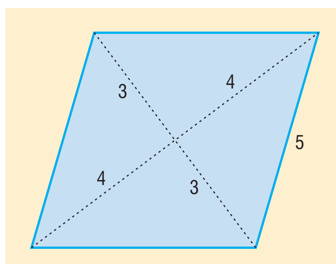
1. $3 + x \geq 0$, azaz $x \geq -3$. Négyzetre emelve, s rendezve az egyenlőtlenséget:

$$x^2 + x - 2 > 0, \quad \text{amiből} \quad x > 1 \quad \text{vagy} \quad x < -2.$$

Mivel a jobb oldalon nemnegatív szám áll, ezért a bal oldalon is annak kell (sőt pozitívnak a > jel miatt), tehát a megoldás: $x > 1$.

2. $\log_2 80 - \log_2 10 + \log_3 81 = \log_2 \frac{80}{10} + 4 = \log_2 8 + 4 = 3 + 4 = 7.$

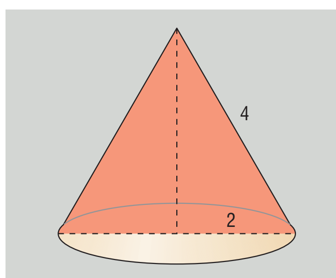
3. A rombusz átlói felezik egymást, és merőlegesek is egymásra. Pitagorasz tétele szerint a rombusz oldala 5 egység, így kerülete 20 egység.



4. A forgáskúp tengelymetszete az ábrán látható. (➡)

A kúp felszíne:

$$A = 2^2 \cdot \pi + 2\pi \cdot 4 = 12\pi.$$



5. A β szög a következő négy érték lehet: 31°, 329°, 391°, 689°.

6. A kedvező esetek száma 3 (prímszámok: 2, 3, 5), az összes esetek száma 6, így a prímszám dobásának valószínűsége:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

7. Ha a sorozat ötödik tagja a_5 és a differencia d, akkor a következő összeget kell kiszámítanunk:

$$3-4d+3-3d+3-2d+3-d+3+3+d+3+2d+3+3d+3+4d=9\cdot 3=27.$$

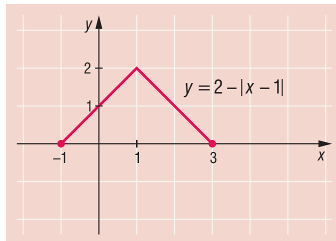
8. Az $y=2x+1$ egyenletű egyenes meredeksége 2, ezért a rá merőleges egyenes meredeksége $-\dfrac{1}{2}$, így az egyenlete: $y-2=-\dfrac{1}{2}\cdot(x-1)$, vagy más alakban: $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$.

9. Az első egyenletből $y=3-x$, ezt a másodikba helyettesítve, majd rendezve az egyenletet, kapjuk, hogy:

$$x^2-3x+2=0.$$

Ennek gyökei: $x_1=1$, $x_2=2$, a megfelelő y értékek: $y_1=2$, $y_2=1$.

10. A függvény legnagyobb értéke 2, ezt az $x=1$ helyen, a legkisebb értéke pedig 0, ezt az $x=-1$ és az $x=3$ helyeken veszi fel. (➡)



11. Az 1-től 100-ig terjedő egész számok között 50 db osztható 2-vel, 33 db osztható 3-mal, és 16 db osztható 2-vel is meg 3-mal is, tehát 6-tal.

Így $50+33-16=67$ olyan szám van, amely vagy 2-vel, vagy 3-mal osztható, tehát 33 olyan van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal.

12. Alkalmazzuk azt a területképletet, amely szerint a háromszög területe két oldalának és a közbezárt szög szinuszának szorzata osztva 2-vel:

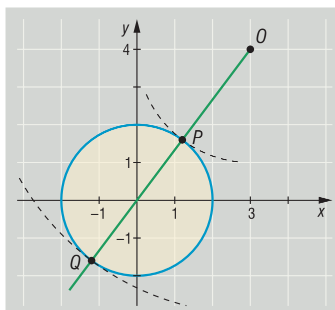
$$t=\frac{3\cdot 8\cdot \sin 120^\circ}{2}=6\sqrt{3}.$$

9. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. Az ábrán a 2 sugarú, origó középpontú kört és a másik kör középpontját $O(3;4)$ rajzoltuk meg. Az O és az origó távolsága 5, így r lehetséges értékei:

$$5-2=3 \quad \text{és} \quad 5+2=7.$$

A két kör érintési pontjain a középpontjukat összekötő egyenes halad át, ennek egyenlete: $y=\dfrac{4}{3}x$. Az egyenes és az origó középpontú 2 sugarú kör metszéspontjai:



$$P\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right), \quad \text{illetve} \quad Q\left(-\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right).$$

Ezek lesznek az érintési pontok.

14. A háromszög területe:

$$t=\frac{10\cdot 24\cdot \sin\alpha}{2}=120\cdot\sin\alpha,$$

ahol $\sin\alpha$ a két oldal által bezárt szög.

Mivel $0<\alpha<180^\circ$, $\sin\alpha$, és vele együtt t is akkor a legnagyobb, ha $\alpha=90^\circ$, azaz a közbezárt szög derékszög. Ekkor $\sin\alpha=1$, tehát a terület 120 cm^2.

15. Jelölje x az A-ból B-be induló gyalogos emelkedőn megtett útját kilométerben, y a vízszintes utat, z a lejtőn megtett utat kilométerben mérve. Visszafelé természetesen z km lesz az emelkedő és x km a lejtő hossza. Így a következő egyenleteket írhatjuk fel:

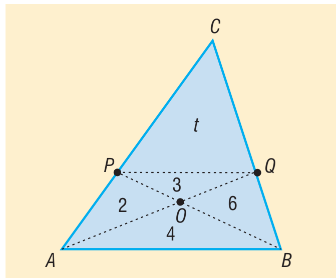
$$(1)\quad x+y+z=11{,}5; \qquad (2)\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=2{,}9; \qquad (3)\quad \frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=3{,}1.$$

A (2) és (3) megfelelő oldalait összeadva kapjuk: $\frac{8x}{15}+\frac{8z}{15}+\frac{y}{2}=6.$

Az (1)-ből $x+z=11{,}5-y$, ezt az előző egyenletbe helyettesítve y-ra egyismeretlenes egyenletet kapunk. Ebből $y=4$ km, tehát a vízszintes út 4 km hosszú volt.

9. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. Az ábrán az egyes háromszögek területét tüntettük fel. Használjuk fel, hogy ha két háromszög magassága egyenlő, akkor területük aránya az alapok arányával egyenlő. Ezek szerint a $POQ_\triangle$ területe 3 egység.

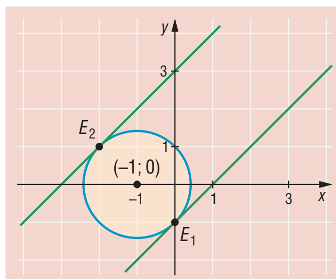


Hasonlóan adódik, hogy az $ABP_\triangle$ és a $PBC_\triangle$ területének aránya ugyanannyi, mint az $AQP_\triangle$ és a $PQC_\triangle$ területének aránya:

$$\frac{t+9}{6}=\frac{t}{5}, \qquad \text{ebből} \qquad t=45\ \text{cm}^2.$$

17. Az egyenlőtlenséget így írhatjuk:

$$(x+1)^2+y^2\le 2.$$



Azok a $P(x;\,y)$ pontok, amelyek ezt az egyenlőtlenséget kielégítik, egy $(-1;\,0)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú körlemezt alkotnak. Az $y=x+a$ egyenlet egy egyenes egyenlete. Akkor lesz egy megoldás, ha az egyenes érinti a kört.

Ez $a=-1$ és $a=3$ esetben következik be.

Megoldások tehát: az $E_1(0;\,-1)$ és $E_2(-2;\,1)$ pontpár.

18. Az összes kétjegyű szám összege:

$$10+11+12+\ldots+99=\frac{10+99}{2}\cdot 90=4905.$$

Ebből kell kivonni a 3-mal vagy 5-tel osztható kétjegyű számok összegét.

A 3-mal oszthatók összege:

$$12+15+\ldots+99=30\cdot\frac{12+99}{2}=1665.$$

Az 5-tel oszthatók összege:

$$10+15+\ldots+95=18\cdot\frac{10+95}{2}=945.$$

A 3-mal és 5-tel, azaz 15-tel oszthatók összege (ezek mindkét utóbbi összegben szerepelnek):

$$15+30+45+60+75+90=315.$$

Tehát a keresett összeg: $4905-(1665+945-315)=2610.$

10. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Az egyenlet így írható: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát a megoldások:

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

2. A logaritmus azonosságait és a definíciókat felhasználva:

$$\log_7 196 - \log_7 4 - \sin 270^\circ = \log_7 \frac{196}{4} - (-1) = \log_7 49 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

3. A négyzetgyöknek csak akkor van értelme a valós számok körében, ha $5x - 4 \geq 0$, azaz $x \geq \frac{4}{5}$. Mivel a bal oldalon nemnegatív kifejezés áll, a jobb oldalon is annak kell állnia, sőt pozitívnak, hiszen ez az oldal a nagyobb. Ezért $x > 0$, ebből az értelmezési tartomány: $x > \frac{4}{5}$. Az átalakítás után kapott $x^2 - 5x + 4 > 0$ egyenlőtlenség akkor igaz, ha $x < 1$ vagy $x > 4$, tehát a megoldás:

$$\frac{4}{5} < x < 1 \quad \text{vagy} \quad x > 4.$$

4. A dobott számok összege 11 vagy 12 lehet. 11-et úgy lehet dobni, hogy egyik kockán 5-öst, a másikon 6-ost dobunk, ennek valószínűsége $\frac{2}{36}$. 12-t csak úgy, hogy mindkét kockán 6-ost dobunk, ennek valószínűsége $\frac{1}{36}$, tehát a keresett valószínűség: $\frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

5. A két keresett szög mértéke $6x$ és $7x$, ezek összege: $6x + 7x = 130^\circ$. Ebből $x = 10$, tehát a két szög nagysága 60° és 70°.

6. A gömb sugarát jelölje r, akkor a térfogata:

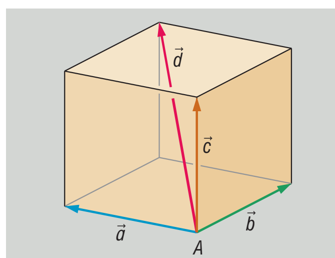
$$\frac{4r^3\pi}{3} = \frac{9}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{27}{8} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}.$$

A gömb felszíne:

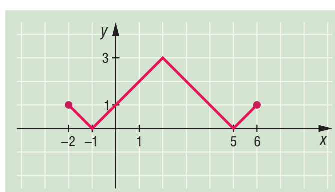
$$4r^2\pi = 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot \pi = 9\pi.$$

7. Az ábrán az adott három vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. A keresett testátló vektor:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$



8. A függvény grafikonja az ábrán látható.



9. A 784 prímtényezős felbontása:

$$784 = 2^4 \cdot 7^2.$$

A pozitív osztók száma:

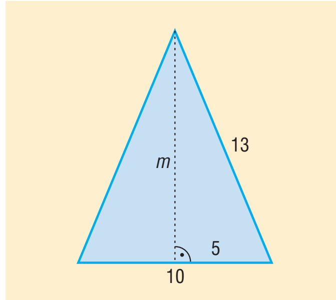
$$(4 + 1) \cdot (2 + 1) = 15.$$

10. A háromszög magassága Pitagorasz tételével kiszámítható:

$$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}.$$

A háromszög területe:

$$t = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$

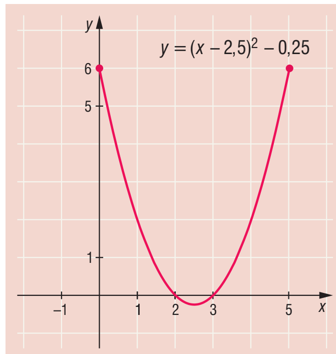


11. A szám 70%-a a szám 0,7-szerese, tehát $0{,}7 \cdot \frac{a}{5} = 35$, amiből $a = 250$.

12. Átalakítva a hozzárendelési szabályt:

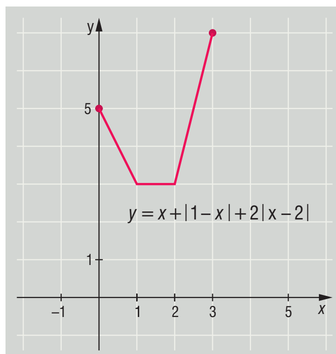
$$x \mapsto \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

A függvény legnagyobb értéke 6, ezt a 0 és a 6 helyen veszi fel. A legkisebb értéke a parabola tengelypontjában, $x = 2{,}5$-nél van, ez $y = -0{,}25$.



10. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. A függvény legnagyobb értéke 7, ezt az $x = 3$-nál, a legkisebb értéke 3, ezt $1 \le x \le 2$ esetén veszi fel.

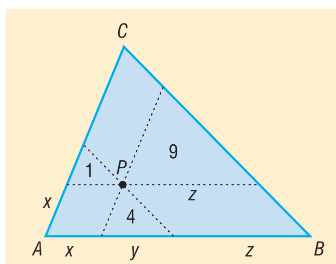


14. Azt használjuk fel, hogy hasonló háromszögek területének aránya a megfelelő oldalak arányának négyzetével egyenlő. A „kis" háromszögek mindegyike hasonló az ABC eredeti háromszöghöz, így ha az $ABC_\triangle$ területe t, akkor:

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad \frac{y}{x+y+z} = \frac{2}{\sqrt{t}}, \qquad \frac{z}{x+y+z} = \frac{3}{\sqrt{t}}.$$

A három egyenletet összeadva ezt kapjuk:

$$1 = \frac{6}{\sqrt{t}}, \qquad \text{tehát} \qquad t = 36 \text{ területegység.}$$



15. Az $n \neq -1$, $\dfrac{n+3}{n+1} = 1 + \dfrac{2}{n+1}$ átalakítás mutatja, hogy a tört csak akkor lehet egész, ha $n + 1$ osztója 2-nek, azaz $n + 1$ értéke -2, -1, 1, 2 lehet. Így n értéke -3, -2, 0, 1 lehet.

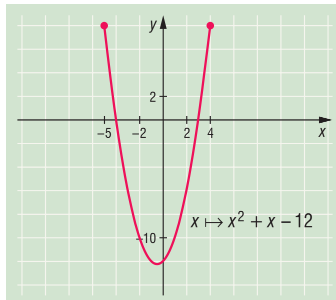
A másik törtből $n \neq -4$, $\dfrac{2n+15}{n+4} = 2 + \dfrac{7}{n+4}$, azaz $n + 4$ osztója 7-nek, vagyis $n + 4$ értéke -7, -1, 1, 7 lehet. Így n értékére ezt kapjuk: -11, -5, -3, 3.

A két szóba jöhető n értékrendszerben $n = -3$ a közös. Ez jó is, mert ekkor az első tört értéke 0, a másodiké 9, mindkettő egész szám.

10. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. Az $x \mapsto x^2 + x - 12$ átalakítása után:

$$x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}.$$



Az első egyenlőtlenségből $5^{3x-1} \leq 5^2$. Mivel az 5 alapú exponenciális függvény szigorúan nő, ebből $3x - 1 \leq 2$, azaz $x \leq 1$.
A második egyenlőtlenség így írható: $x^2 + x - 12 \leq 0$, ez pedig $-4 \leq x \leq 3$ esetén teljesül.
Mindkét egyenlőtlenséget a $-4 \leq x \leq 1$ valós számok elégítik ki.

17. Az A csap egy óra alatt a medence egyötöd részét, a B csap egy óra alatt az egy tizenötöd részét tölti meg. Így egy óra alatt a két csap együtt $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{4}{15}$ részét tölti meg a medencének.
Tehát összesen $\dfrac{15}{4}$ óra, azaz 3 óra 45 perc alatt tölti meg a két csap együtt a medencét.

18. Jelölje s az A és B közti távolságot kilométerben mérve. Ekkor a teherautó útja A-ból B-be $\dfrac{s}{60}$ óráig, B-ből A-ba $\dfrac{s}{100}$ óráig tartott, így az átlagsebessége:

$$\frac{2s}{\dfrac{s}{60} + \dfrac{s}{100}} = \frac{2}{\dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{100}} = 75\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ volt.}$$