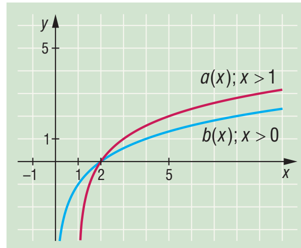
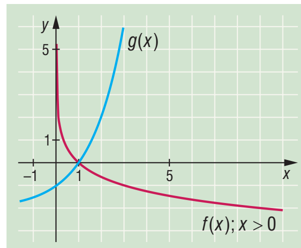
11.4. FÜGGVÉNYEK

Az exponenciális és logaritmusfüggvény – megoldások

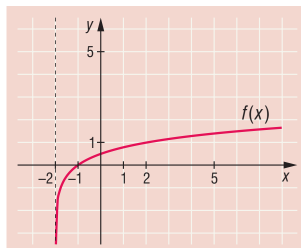
3460 *a)* Egy közös pontjuk van az $x = 2$ helyen.
Mindkét függvény az $y = 0$ értéket veszi fel.



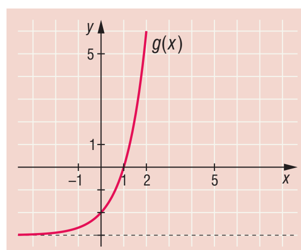
b) Egy közös pontjuk van az $x = 1$ helyen.
Mindkét függvény az $y = 0$ értéket veszi fel.



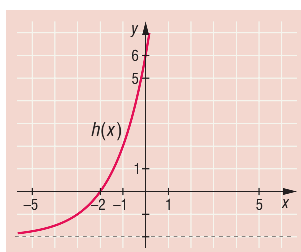
3461 *a)* Értelmezési tartomány: $x > -2$.
Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.
Az x tengelyt az $x = -1$ helyen, az y tengelyt az $y = \frac{1}{2}$ helyen metszi.



b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
Értékkészlet: $y > -3$.
Az x tengelyt az $x = 1$ helyen, az y tengelyt az $y = -2$ helyen metszi.



c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
Értékkészlet: $y > -2$.
Az x tengelyt az $x = -2$ helyen, az y tengelyt az $y = 6$ helyen metszi.

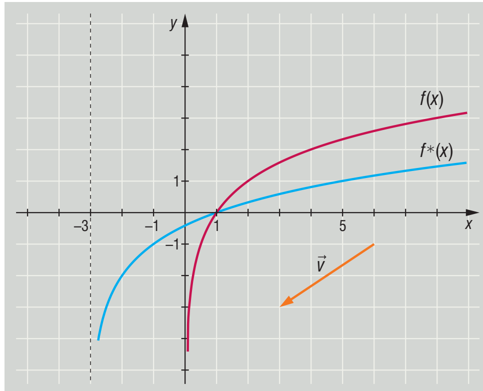


3462 $f(11) = \log_3 9 + 3 = 5,\quad f(3) = \log_3 1 + 3 = 3,\quad f(11) + f(3) = 8.$

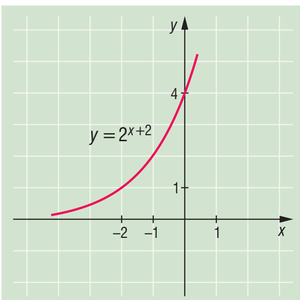
3463 $f(a+1) - f(a-1) = 2^{a+1} - 2^{a-1} = 2 \cdot 2^a - \dfrac{2^a}{2} = 2^a \cdot \left(2 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \cdot 2^a = 3 \cdot 2^{a-1}.$

3464 *a)* $f^*(x) = \log_2(x+3) - 2;$

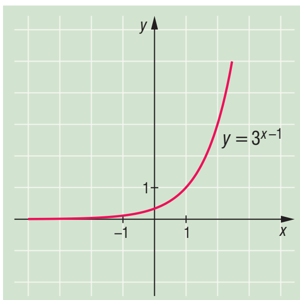
b) Értelmezési tartomány: $x > -3$.
Értékkészlet: változatlan.
Zérushely: $x = 1$-ben, ami nem változott.



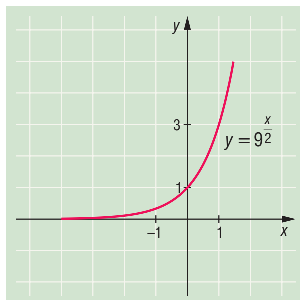
3465 *a)*



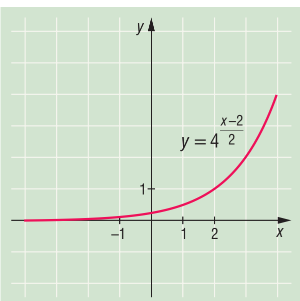
b)



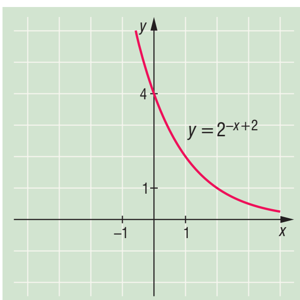
c)



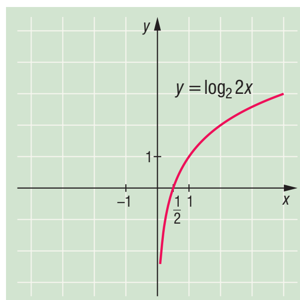
d)



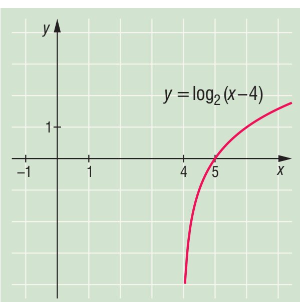
e)



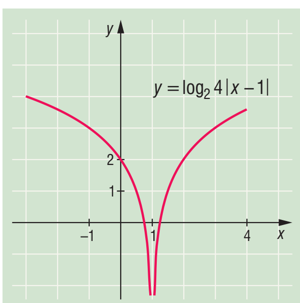
f)



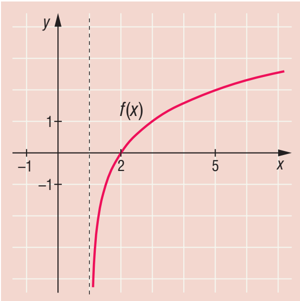
g)



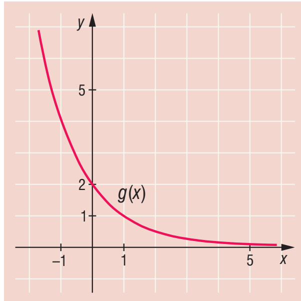
h)



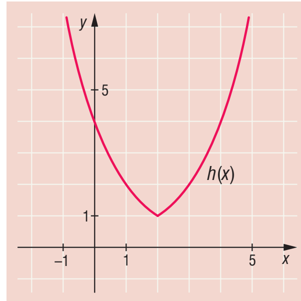
3466 *a)*



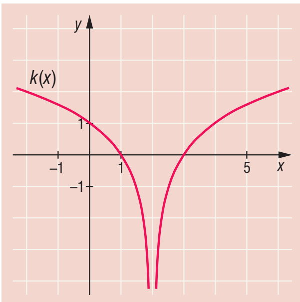
b)



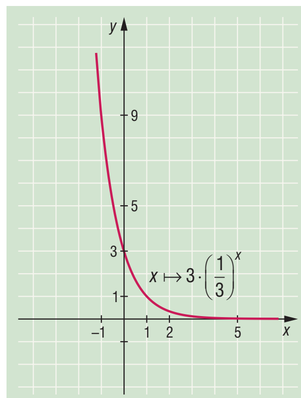
c)



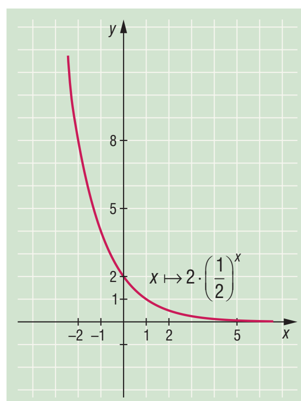
d)

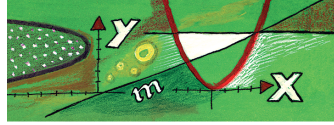


3467 *a)* $x \mapsto \sqrt[3]{3^{3\cdot(1-x)}} = 3^{1-x} = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x;$

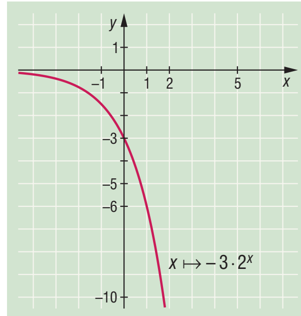


b) $x \mapsto 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x;$

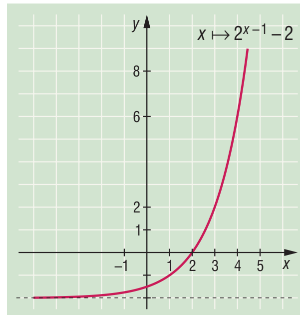




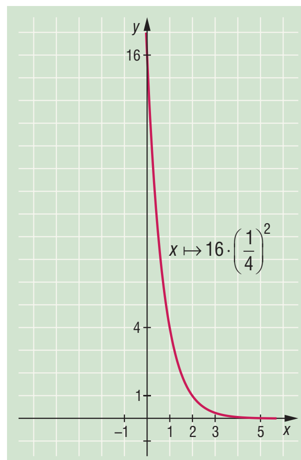
c) $x \mapsto -3 \cdot 2^x;$



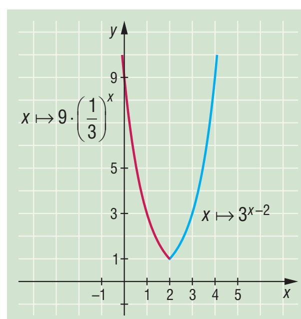
d) $x \mapsto \sqrt{2^{2\cdot(x-1)}} - 2 = 2^{x-1} - 2;$



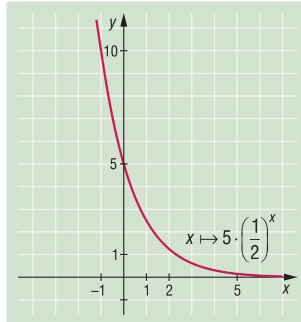
e) $x \mapsto 4^{1-x+1} = 4^{2-x} = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x;$



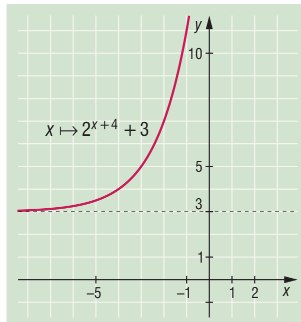
f) $x \mapsto 3^{|2-x|} = \begin{cases} 3^{2-x} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & \text{ha} \quad x \le 2, \\ 3^{-2+x} = 3^{x-2}, & \text{ha} \quad x > 2. \end{cases}$



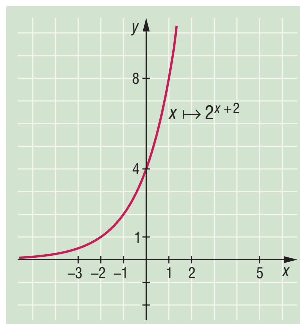
g) $x \mapsto \dfrac{2}{2^x} + \dfrac{3}{2^x} = \dfrac{5}{2^x} = 5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x;$



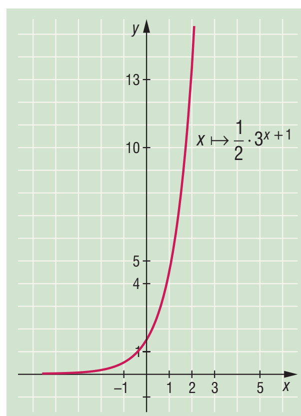
h) $x \mapsto 2^{-2} \cdot 2^{x+6} + 3 = 2^{x+4} + 3;$



i) $x \mapsto 16^{\frac{1}{4}x} \cdot 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{16^x} \cdot \sqrt{16} = 4 \cdot \sqrt[4]{\left(2^x\right)^4} = 4 \cdot |2^x| = 2^{x+2};$



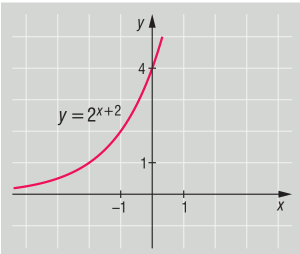
j) $x \mapsto \dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x} = \dfrac{3}{2} \cdot 3^x = \dfrac{1}{2} \cdot 3^{x+1}.$



3468 *a)* $f(x)=\begin{cases} -x-4, & \text{ha} \quad -5 \le x < 0, \\ 5^x-5, & \text{ha} \quad 0 \le x < 1, \\ \log_3 x, & \text{ha} \quad 1 \le x \le 9; \end{cases}$ *b)* $f(x) \in [-4;\, 2]$;

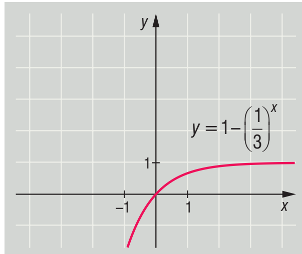
c) $x \in \,]-4;\, 1[$; *d)* $x \in [-5;\, 3]$; *e)* $x_1=-4$ és $x_2=1$.

3469 *a)*



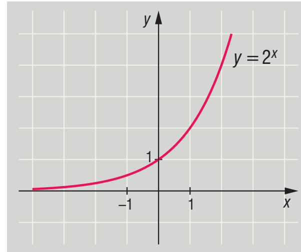
$2^{\frac{x^2-4}{x-2}}=2^{x+2},\ x \ne 2;$

b)



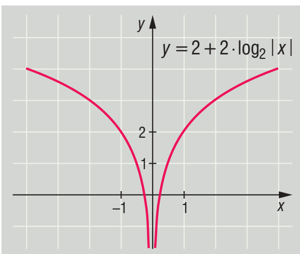
$1-3^{-x}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^x;$

c)



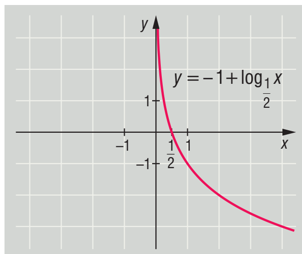
$\dfrac{1}{4^{-\frac{x}{2}}}=4^{\frac{x}{2}}=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x=2^x;$

d)



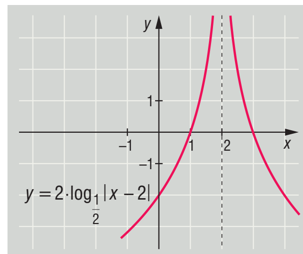
$\log_2 4x^2=2+2\cdot\log_2|x|;$

e)



$\log_{\frac{1}{2}} 2x=-1+\log_{\frac{1}{2}} x;$

f)

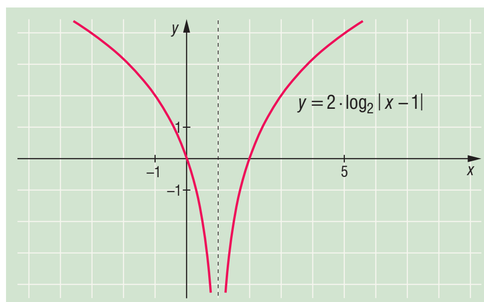


$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2=2\cdot\log_{\frac{1}{2}}|x-2|.$

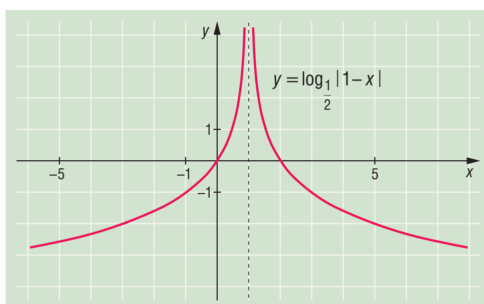
3470 *a)* Az ismert azonosságokkal a függvényt definiáló kifejezést így írhatjuk:

$\log_2(x^2-2x+1)=\log_2(x-1)^2=2\cdot\log_2|x-1|.$

A függvény $]-\infty;\, 1[$-ban csökken, $]1;\, +\infty[$-ban pedig nő, grafikonja szimmetrikus az $x=1$ egyenletű egyenesre.



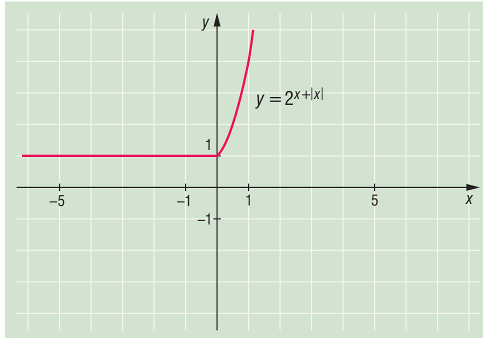
b) A függvény $]-\infty;\, 1[$-ban nő, $]1;\, +\infty[$-ban pedig csökken, grafikonja az $x=1$ egyenletű egyenesre szimmetrikus.



c) A függvényt definiáló kifejezést így írhatjuk:

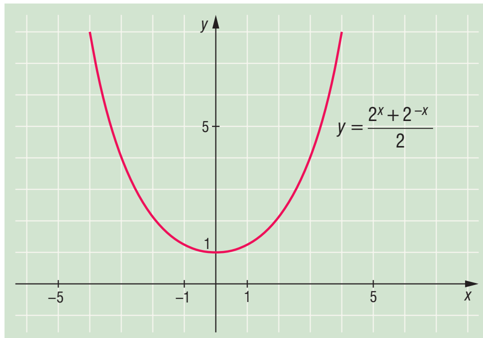
$$2^{x+|x|}=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x<0,\\ 2^{2x}=4^{x}, & \text{ha} \quad x\ge 0.\end{cases}$$

A függvény $]-\infty;\,0]$-ban konstans, $[0;\,+\infty[$-ban pedig nő.



d) A függvény grafikonját az $x\mapsto 2^{x}$ és $x\mapsto 2^{-x}$ függvények grafikonjának ismeretében rajzolhatjuk meg vázlatosan.

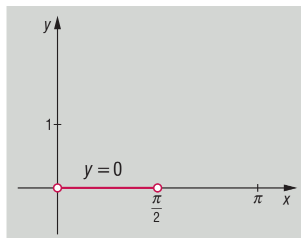
A függvény páros, grafikonja az y tengelyre szimmetrikus, $]-\infty;\,0]$-ban csökken, $[0;\,+\infty[$-ban nő.



3471 *a)* Használjuk fel az ismert azonosságokat:

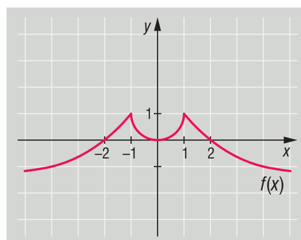
$$\lg \operatorname{tg} x+\lg \operatorname{ctg} x=\lg(\operatorname{tg} x\cdot \operatorname{ctg} x)=\lg 1=0,$$

ha $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, hiszen itt $\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x>0$. A függvény tehát konstans, értéke 0.



b) Az esetszétválasztással megadott függvényt így ábrázolhatjuk:

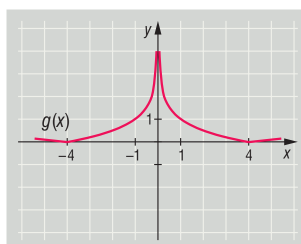
A függvény páros, grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, $]-\infty;\,-1]$-ban nő, $]-1;\,0]$-ban csökken, $[0;\,1]$-ban nő, $[1;\,+\infty[$-ban csökken.



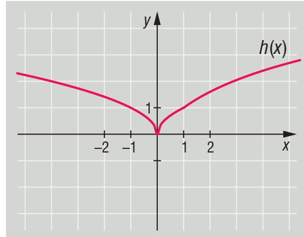
c) A logaritmus azonossága alapján a függvényt definiáló kifejezést így írhatjuk:

$$\left|\log_{\frac{1}{4}}|x|\cdot\frac{1}{4}\right|=\left|\log_{\frac{1}{4}}|x|+1\right|.$$

A függvény páros, grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, $]-\infty;\,-4]$-ban csökken, $[-4;\,0[$-ban nő, $]0;\,4]$-ban csökken, $[4;\,+\infty[$-ban nő.

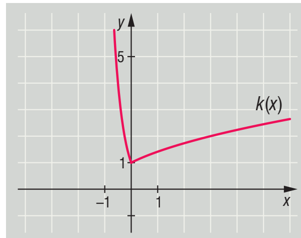


d) A függvény $]-\infty;\, 0]$-ban csökken, $[0;\, +\infty[$-ban nő, minimuma 0.



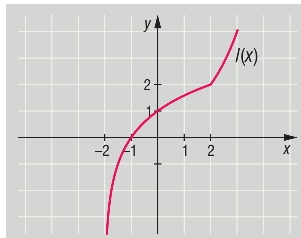
e) A függvény $]-\infty;\, 0]$-ban csökken, $[0;\, +\infty[$-ban nő, minimuma 1.

$$k(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{ha} \quad x \ge 0, \\ \left(\dfrac{1}{16}\right)^x, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



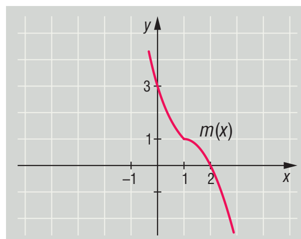
f) A függvény $]-2;\, +\infty[$-ban szigorúan nő, zérushelye –1.

$$l(x) = \begin{cases} \log_2(x+2), & \text{ha} \quad -2 < x \le 2, \\ \dfrac{1}{2} \cdot 2^x, & \text{ha} \quad x > 2. \end{cases}$$



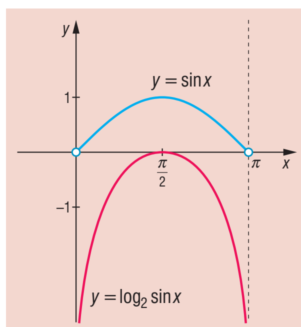
g) A függvény csökken, zérushelye $x = 2$.

$$m(x) = \begin{cases} 3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & \text{ha} \quad x \le 1, \\ -(x-1)^2 + 1, & \text{ha} \quad x > 1. \end{cases}$$



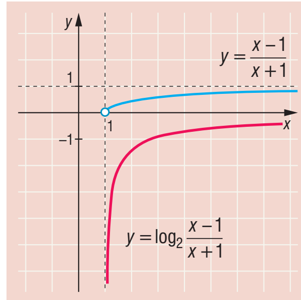
3472 Mindhárom függvény grafikonját oly módon érdemes vázolni, hogy a közvetett függvényből először a „belső” függvényt ábrázoljuk, majd a logaritmusfüggvény tulajdonságait felhasználva tudjuk vázolni a megadott függvényt.

a) A függvény grafikonja az $x = \dfrac{\pi}{2}$ egyenletű egyenesre szimmetrikus, $\left]0;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$-ban nő, $\left[\dfrac{\pi}{2};\, \pi\right[$-ban csökken.

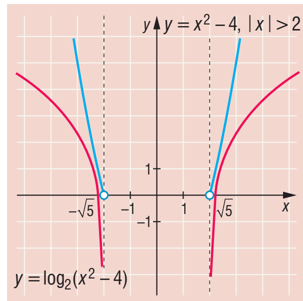


b) A függvény $]1; +\infty[$-ban nő, értéke negatív.

$$x \mapsto \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} = -2 \cdot \frac{1}{x+1} + 1.$$



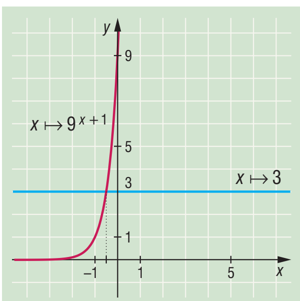
c) A függvény páros, grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, $]-\infty; -2]$-ban csökken, $]2; +\infty[$-ban nő.



Egyenletek és függvények – megoldások

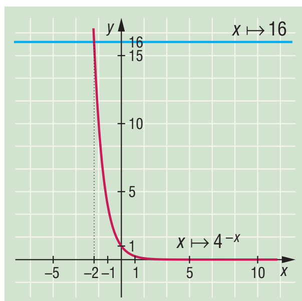
3473 Az egyenletek bal és jobb oldalát külön függvényként ábrázolva kapjuk:

a)



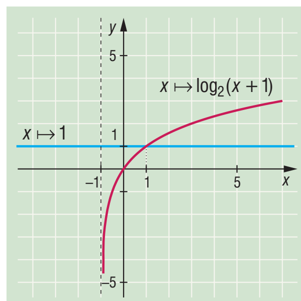
$x = -\dfrac{1}{2}$;

b)



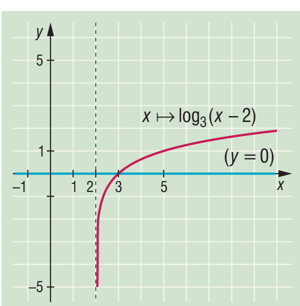
$x = -2$;

c)



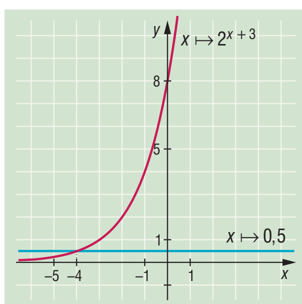
$x = 1$ (ÉT: $x > -1$);

d)



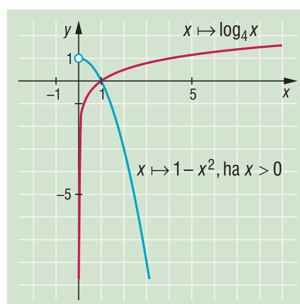
$x = 3$ (ÉT: $x > 2$);

e)



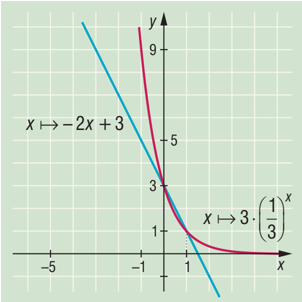
$x = -4$;

f)



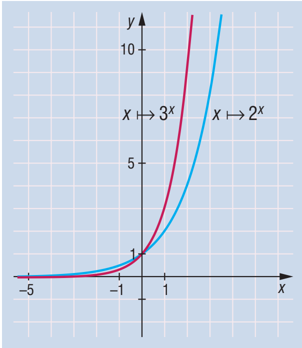
$x = 1$ (ÉT: $x > 0$);

g)

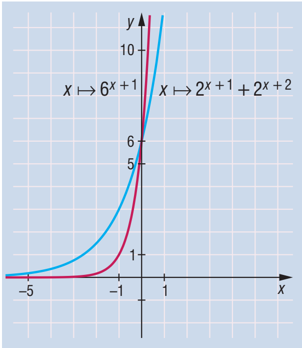


$x_1 = 0$ és $x_2 = 1$.

3474 *a)* Ha $x > 0$, akkor $3^x > 2^x$, ha $x < 0$, akkor $3^x < 2^x$, így az egyetlen gyök: $x = 0$.

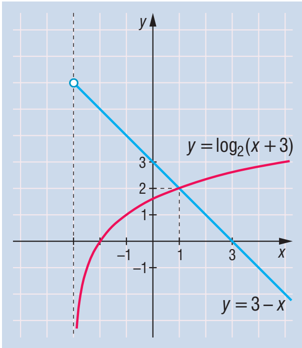


b) $6^{x+1} = 2^{x+1} + 2^{x+2} = 6 \cdot 2^x$, az egyetlen gyök $x = 0$.



c) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a bal oldalon és a jobb oldalon álló kifejezésekkel értelmezhető függvényeket $x > -3$ esetén.

Mivel a $\log_2(x+3)$, $x > -3$ nő, a $3 - x$, $x > -3$ csökken, és $x = 1$-re mindkettő értéke 2, az egyenlet egyetlen gyöke: $x = 1$.



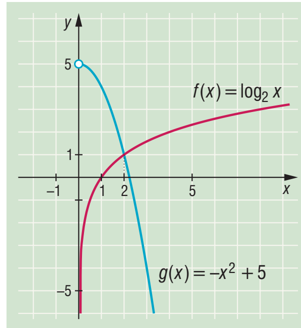
d) Az előzőhöz hasonlóan oldható meg, itt is egyetlen gyököt kapunk az értelmezési tartományon ($x > 1$): $x = 10$.

3475 *a)* Értelmezési tartomány: $x > 0$.

Átalakítás után:

$$\log_2 x = -x^2 + 5.$$

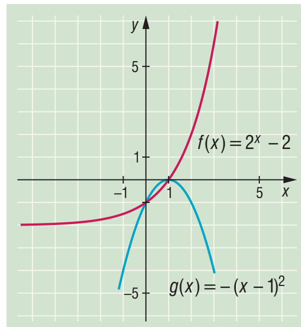
Az egyenletnek egy gyöke van, az $x = 2$.



b) Átrendezés után:

$$2^x - 2 = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2.$$

Az egyenletnek 2 gyöke van, az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 1$.



3476 *a)* Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a bal és jobb oldalon álló függvényeket, és olvassuk le az eredményt a grafikonról. Ellenőrizzük algebrai úton.

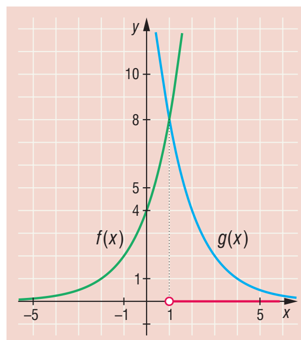
$$f(x) = 2^{x+2}, \quad g(x) = 2^{-x+4} = 2^{-1\cdot(x-4)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4};$$

$$f(x) > g(x).$$

Megoldás: $x > 1$.

Ellenőrzés:

$$2^{x+2} > 2^{4-x}, \quad 4 \cdot 2^x > \frac{16}{2^x}, \quad 2^{2x} > 4, \quad x > 1.$$



b) Ábrázoljuk:

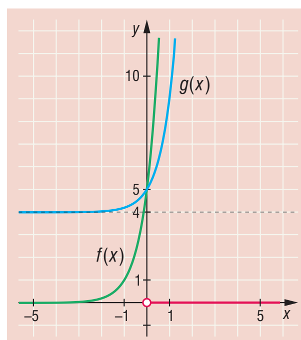
$$f(x) = 5^{x+1}, \quad g(x) = 5^x + 4;$$

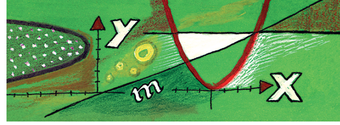
$$f(x) > g(x).$$

Megoldás: $x > 0$.

Ellenőrzés:

$$5 \cdot 5^x > 5^x + 4, \quad 5^x > 1, \quad x > 0.$$





c) Értelmezési tartomány: $x > \frac{1}{3}$.

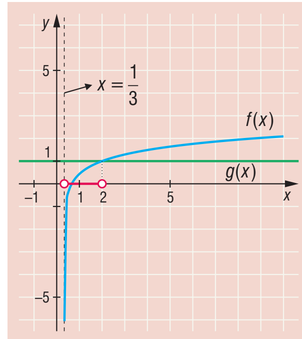
Ábrázoljuk:

$$f(x) = \log_5(3x - 1), \qquad g(x) = 1;$$
$$f(x) < g(x).$$

Megoldás: $\frac{1}{3} < x < 2$.

Ellenőrzés:

$$\log_5(3x-1) < 1, \qquad 0 < 3x - 1 < 5, \qquad 1 < 3x < 6, \qquad \frac{1}{3} < x < 2.$$



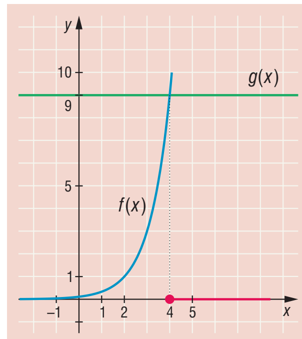
d) Ábrázoljuk:

$$f(x) = 3^{x-2}, \qquad g(x) = 9;$$
$$f(x) \ge g(x).$$

Megoldás: $x \ge 4$.

Ellenőrzés:

$$3^{x-2} \ge 3^2, \qquad x - 2 \ge 2, \qquad x \ge 4.$$



e) Értelmezési tartomány: $1 > x$.

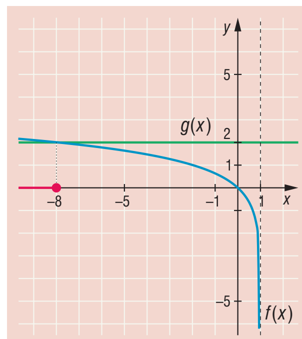
Ábrázoljuk:

$$f(x) = \log_3(1 - x), \qquad g(x) = 2;$$
$$f(x) \ge g(x).$$

Megoldás: $x \le -8$.

Ellenőrzés:

$$\log_3(1-x) \ge 2, \qquad 1 - x \ge 3^2 = 9, \qquad -8 \ge x.$$



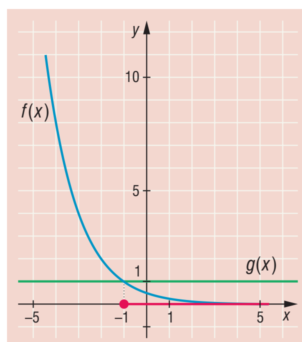
f) Ábrázoljuk:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, \qquad g(x) = 1;$$
$$f(x) \le g(x).$$

Megoldás: $x \ge -1$.

Ellenőrzés:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \le 1, \qquad x + 1 \ge 0, \qquad x \ge -1.$$



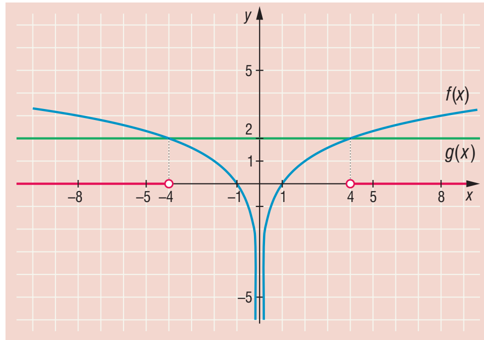
g) Ábrázoljuk:

$$f(x) = \log_2|x|, \quad g(x) = 2,$$
$$f(x) > g(x).$$

Megoldás: $x < -4$ vagy $x > 4$; összefoglalva: $|x| > 4$.

Ellenőrzés:

$$\log_2|x| > 2, \quad |x| > 2^2 = 4.$$



h) Ábrázoljuk:

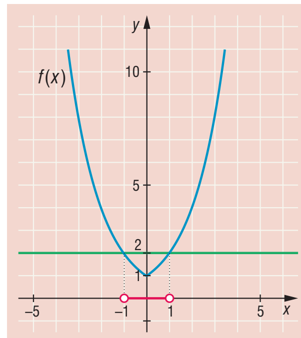
$$f(x) = 2^{|x|}, \quad g(x) = 2,$$
$$f(x) < g(x).$$

Mivel

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

ezért:

$$f(x) = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



Megoldás: $-1 < x < 1$, vagyis $|x| < 1$.

Ellenőrzés:

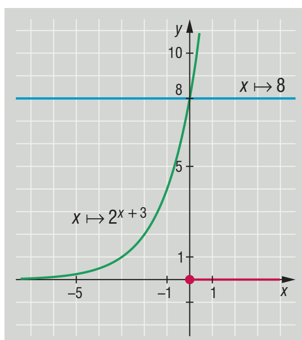
$$2^{|x|} < 2, \quad |x| < 1.$$

3477 Megoldás:

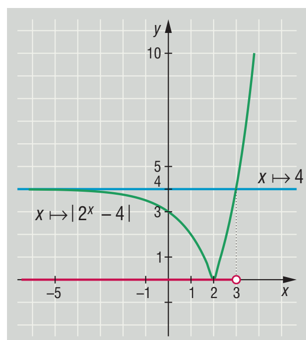
A: $x \in [0; \infty[$, vagyis $x \geq 0$;

B: $x \in\ ]-\infty; 3[$, vagyis $x < 3$.

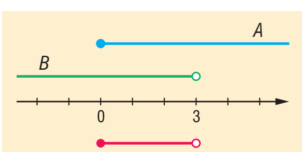
(1)



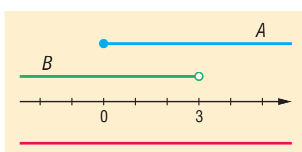
(2)



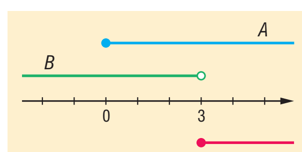
a) $x \in [0; 3[$;

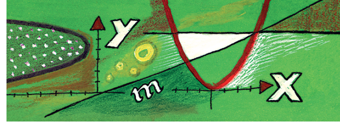


b) $x \in \mathbb{R}$;



c) $x \in [3; \infty[$.





3478 *a)* Az $\frac{1}{5}$ alapú logaritmus csökkenő, így:

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{4x+6}{x} \le 1.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség átalakítva:

$$0 < 4 + \frac{6}{x} \le 1, \qquad -4 < \frac{6}{x} \le -3, \qquad -1{,}5 > x \ge -2.$$

b) A szorzat logaritmusára vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1 \ (x > -1) \quad \Rightarrow \quad \log_3(x^2 + 4x + 3) = 1.$$

A logaritmusfüggvény szigorúan monoton, ezért:

$$x^2 + 4x + 3 = 3, \quad \text{amiből} \quad x \cdot (x+4) = 0.$$

A megoldások: $x = 0$ jó, $x = -4$ nem jó gyök.

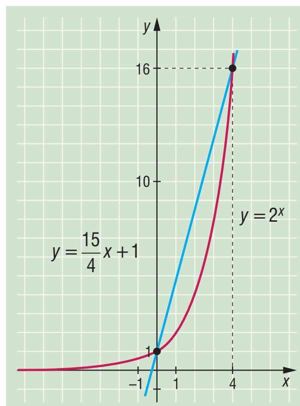
c) Átalakítással:

$$x^2 \cdot 5^x - 5^{x+2} < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot 5^x < 25 \cdot 5^x.$$

Az exponenciális függvény miatt $5^x \ne 0$, ezért:

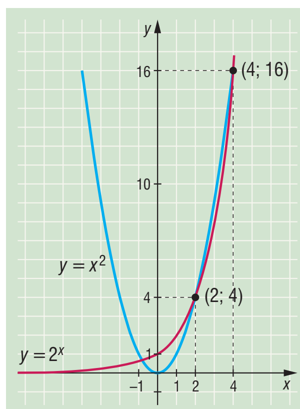
$$x^2 < 25, \quad \text{amiből} \quad |x| < 5.$$

3479 *a)* Az $x \mapsto 2^x$ és $x \mapsto \frac{15}{4}x + 1$ függvény grafikonját egy koordináta-rendszerben ábrázolva látszik, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ gyöke az egyenletnek. Más gyök nincs, hiszen a 2^x függvény konvex, tehát az egyenesnek és a görbének több közös pontja nincs.

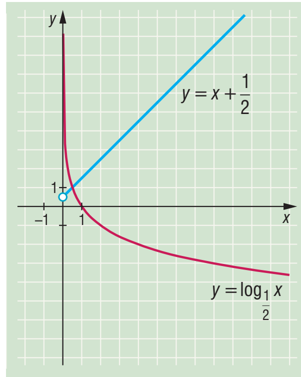


b) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az $x \mapsto 2^x$ és $x \mapsto x^2$ függvényeket.

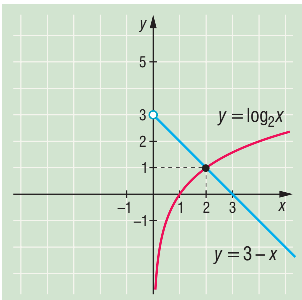
Ha $x > 0$, akkor $x_1 = 2$ és $x_2 = 4$ jó gyök, mert a két függvény képének (2; 4) és (4; 16) közös pontja. Más közös pont itt nincs. Ha $x < 0$, akkor az $x \mapsto x^2$ függvény csökken, az $x \mapsto 2^x$ függvény nő, így legfeljebb egy közös pont van. Ez –1 és 0 között lesz, $x_0 \approx -0{,}7$.



c) Az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ és $x \mapsto x + \frac{1}{2}$, $x > 0$ függvények grafikonját egy koordináta-rendszerben ábrázolva világos, hogy $x = \frac{1}{2}$ az egyetlen gyöke az egyenletnek, hiszen itt a két függvény értéke egyenlő, és $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ csökken, $x \mapsto x + \frac{1}{2}$ nő, tehát legfeljebb egy közös pontja van a két grafikonnak.

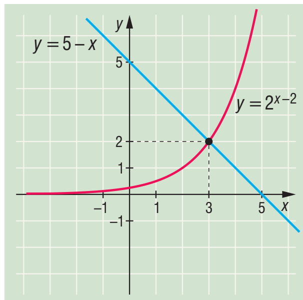


d)



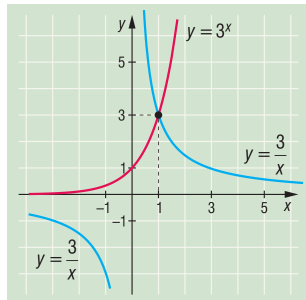
$x = 2$ (ÉT: $x > 0$);

e)



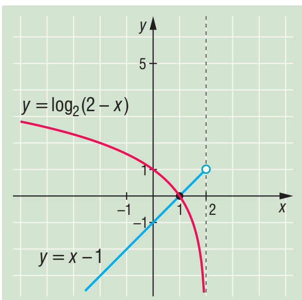
$x = 3$;

f)



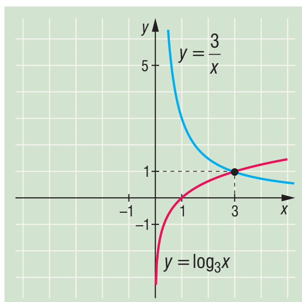
$x = 1$ (ÉT: $x \neq 0$);

g)



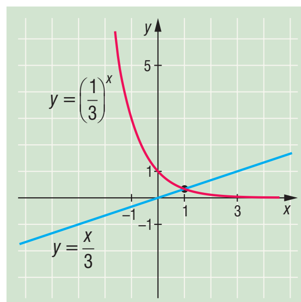
$x = 1$ (ÉT: $x < 2$);

h)



$x = 3$ (ÉT: $x > 0$);

i)

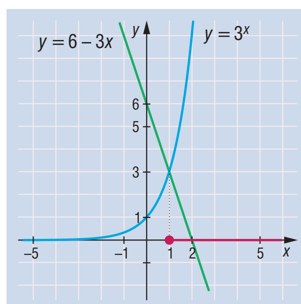


$x = 1$.

3480 *a)* Átrendezve az egyenlőtlenséget:

$$3^x \geq 6 - 3x.$$

Ábrázolva külön a bal és jobb oldalt függvényként, leolvasható a megoldás: $x \geq 1$.

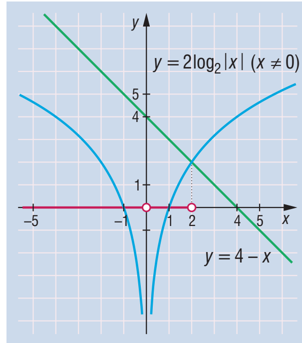


b) Az *a)*-hoz hasonló eljárással:

$$\frac{1}{2}\log_2 x^4 < 4 - x, \qquad (x^4 > 0,\ \text{vagyis}\ x \neq 0)$$

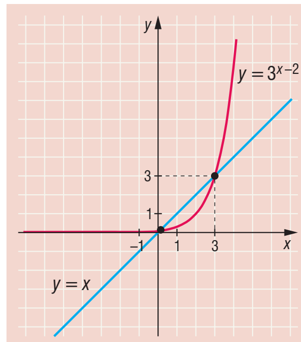
$$2\log_2|x| < 4 - x.$$

Megoldás: $x < 2,\ x \neq 0$.



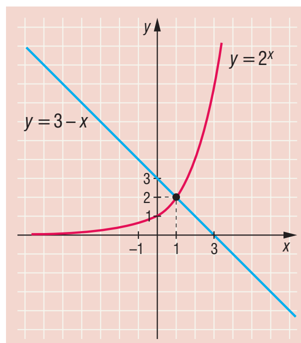
3481 *a)* Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az $x \mapsto x$ és $x \mapsto 3^{x-2}$ függvényeket.

Mivel az $x \mapsto 3^{x-2}$ függvény konvex, ezért az $y = x$ egyenletű egyenesnek és az exponenciális függvény grafikonjának legfeljebb két közös pontja van. Az ábráról leolvasható, hogy az egyik közös pont (3; 3), tehát az egyenlet egyik gyöke: $x_1 = 3$, a másiknak az x koordinátája 0 és 1 között van, pontosabb számolással ez adódik: $x_2 \approx 0{,}3$.



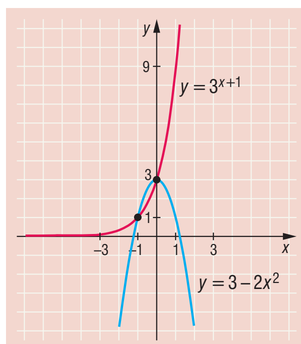
b) Az $x \mapsto 2^x$ és $x \mapsto 3 - x$ függvények közül az első nő, a második csökken, így a grafikonjaiknak legfeljebb egy metszéspontja lehet.

Az egyenlet egyetlen gyöke: $x = 1$.

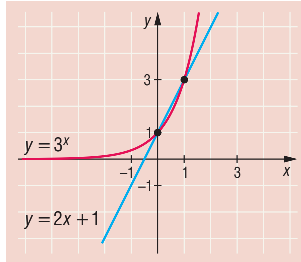


c) Ábrázoljuk itt is az $x \mapsto 3^{x+1}$ és $x \mapsto 3 - 2x^2$ függvény grafikonját egy koordináta-rendszerben.

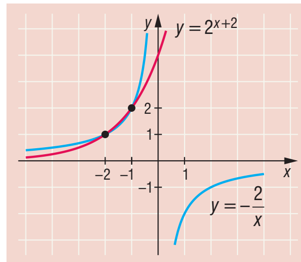
A függvények tulajdonságai alapján látható, hogy két gyök van: $x_1 = -1$ és $x_2 = 0$.



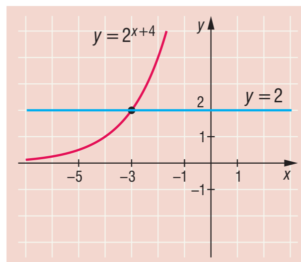
d) Az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenes két helyen metszi az exponenciális függvény grafikonját: az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 1$ helyen. Mivel az $y = 3x$ egyenletű függvénygörbe konvex, csak ez a két metszéspont van.



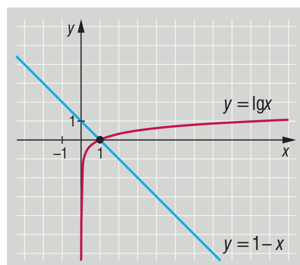
e) Értelmezési tartomány: $x \neq 0$. Két metszéspontja van a két függvény grafikonjának, az $x_1 = -2$ helyen és az $x_2 = -1$ helyen.



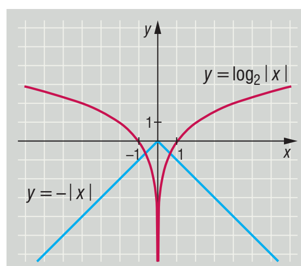
f) Átalakítva az egyenletet kapjuk, hogy $2^{x+4} = 2$. Egy metszéspontja van a két függvény grafikonjának, az $x = -3$. Ellenőrizve algebrai úton kapjuk, hogy $4 \cdot 2^{x+4} = 8$, amiből $2^{2+x+4} = 2^3$, $x + 6 = 3$, $x = -3$.

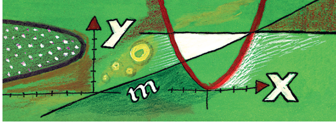


3482 *a)* Az $x \mapsto \lg x$ $(x > 0)$ és $x \mapsto 1 - x$ függvények grafikonja alapján világos, hogy az egyenlet egyetlen gyöke: $x = 1$, hiszen az első függvény nő, a második csökken, így legfeljebb egy közös pont van.

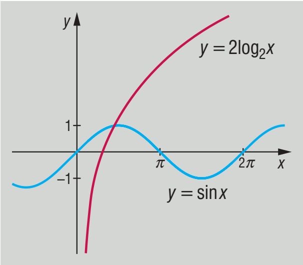


b) Értelmezési tartomány: $x \neq 0$. Ha az $x \mapsto \log_2|x|$ $(x \neq 0)$ és $x \mapsto -|x|$ függvények grafikonját egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk, láthatjuk, hogy az egyenletnek két gyöke van: $x_1 \approx -0{,}6$ és $x_2 \approx 0{,}6$.





c) Az $x \mapsto 2\log_2 x$ $(x > 0)$ és $x \mapsto \sin x$ függvény grafikonja alapján az egyenletnek egy gyöke van: $x \approx 1{,}4$.



3483 *a)* Mivel $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$\left(2^{-1}\right)^{x^2-x-6} > 2^{x^2-x-6},$$

vagyis

$$-x^2 + x + 6 > x^2 - x - 6,$$

azaz, akkor és csak akkor igaz, ha

$$x^2 - x - 6 < 0,$$

ennek megoldása: $-2 < x < 3$.

b) Az adott egyenlet így írható:

$$(3^x + 2) \cdot (2^x - 9) = 0.$$

Mivel $3^x > 0$, ez csak akkor teljesül, ha $2^x = 9$, azaz $x = \log_2 9$.

c) Használjuk fel, hogy

$$\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) = -\log_3(x + 1),$$

így a megadott egyenlőtlenség:

$$0 > \log_3(x + 1) + \log_3(2 - x) = \log_3(x + 1) \cdot (2 - x),$$

ahol $x + 1 > 0$ és $2 - x > 0$, azaz $-1 < x < 2$.

A $0 > \log_3(x + 1) \cdot (2 - x)$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$0 < (x + 1) \cdot (2 - x) < 1, \quad \text{azaz} \quad 0 < 2 + x - x^2 < 1.$$

A bal oldali egyenlőtlenség akkor igaz, ha

$$-1 < x < 2.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség:

$$1 + x - x^2 < 0,$$
$$x^2 - x - 1 > 0.$$

Ez akkor és csak akkor igaz, ha

$$x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{vagy} \quad x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Tehát az eredeti egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

$$-1 < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{vagy} \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < 2.$$

d) Két esetet érdemes külön vizsgálni: ha az alap 0 és 1 közé esik (I. eset), illetve, ha az alap nagyobb 1-nél (II. eset).

I. eset:

$$0 < 2x < 1,$$
$$0 < x < 0{,}5.$$

Ekkor a logaritmusfüggvény csökken, tehát az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következőkkel:

$$x^2 - 5x + 6 > 2x,$$

azaz

$$(x-6)\cdot(x-1) > 0,$$

amiből:

$$x < 1 \text{ vagy } x > 6.$$

II. eset: Mivel $0{,}5 < x$, ekkor a logaritmusfüggvény nő, tehát az eredeti egyenlőtlenség a következővel ekvivalens:

$$0 < x^2 - 5x + 6 < 2x.$$

A bal oldali egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x < 2 \quad \text{vagy} \quad x > 3,$$

a jobb oldali pedig akkor, ha

$$1 < x < 6.$$

Tehát mindkettő teljesül, ha

$$1 < x < 2 \quad \text{vagy} \quad 3 < x < 6.$$

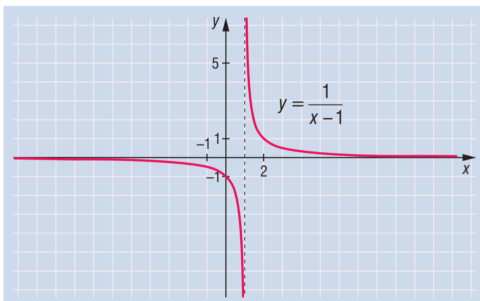
3484 *a)* Az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmusfüggvény csökken, ezért az egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$0 < \log_3 \frac{x+1}{x-1} \le 1.$$

A 3-as alapú logaritmusfüggvény nő, így a kapott egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$1 < \frac{x+1}{x-1} \le 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{x-1} \le 1.$$

Az ábra alapján a megoldás: $2 \le x$.



b) Az előző feladat megoldásához hasonlóan az adott egyenlőtlenség a következő alakra hozható:

$$0 < \log_5(x^2 - 4) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x^2 - 4 < 5.$$

A megoldás: $\sqrt{5} < |x| < 3$.

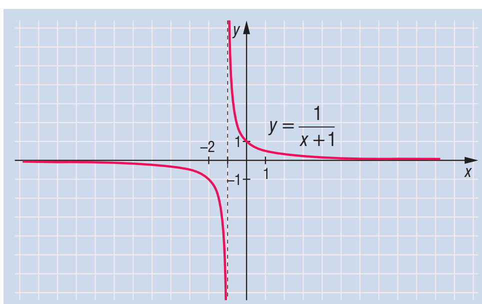
c) Itt is az előzőhöz hasonló gondolatmenet szerint:

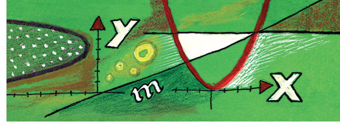
$$0 < \log_2 \frac{x}{1+x} < 1.$$

A kapott egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$1 < \frac{x}{1+x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > \frac{1}{x+1} > -1.$$

Az ábra alapján a megoldás: $x < -2$.

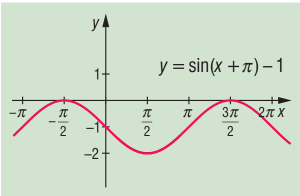




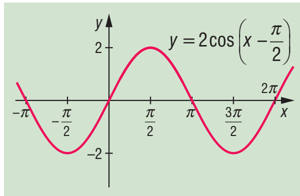
Trigonometrikus függvények – megoldások

3485 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Igaz. *e)* Hamis.

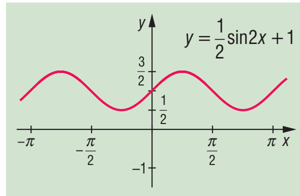
3486 *a)*



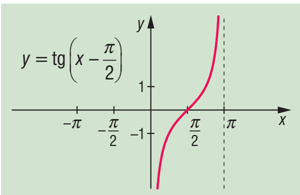
b)



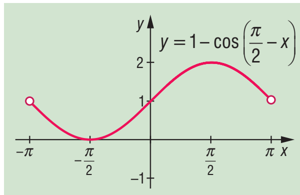
c)



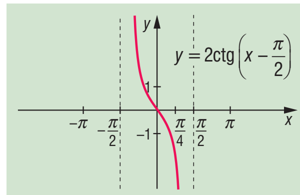
d)



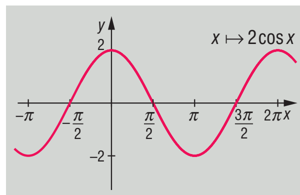
e)



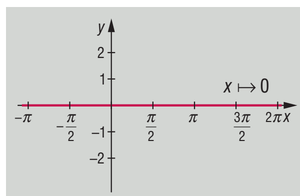
f)



3487 *a)* $x \mapsto 2\cos x$.



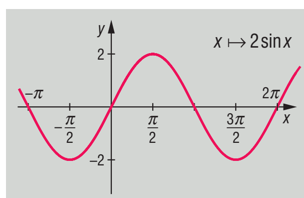
b) $x \mapsto -\sin x + \sin x = 0$.



c) $x \mapsto \cos x + \cos x = 2\cos x$. (lásd *a)* ábra)

d) $x \mapsto \sin x - \sin x = 0$. (lásd *b)* ábra)

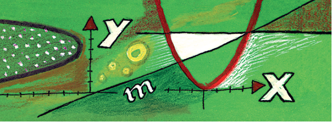
e) $x \mapsto 2\sin x$.



3488 Megoldás: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

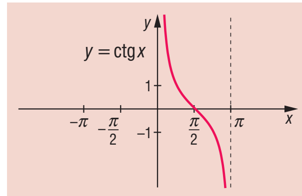
3489 A keresett függvény: $f(x) = \mathrm{ctg}\,x$.

a) $\sqrt{3} + 3$; *b)* $\frac{1}{6}$; *c)* -2.



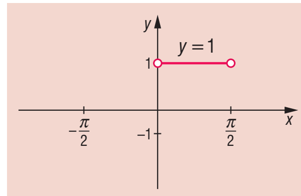
3490 *a)* Használjuk fel, hogy $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, ezért:

$$\frac{\cos x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg} x.$$



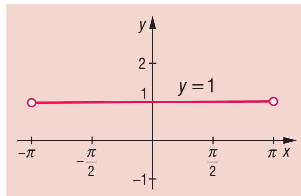
b) Mivel $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, ezért:

$$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1.$$

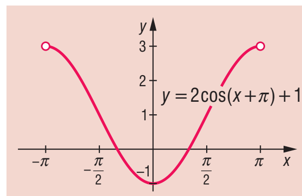


c) Mivel $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, ezért:

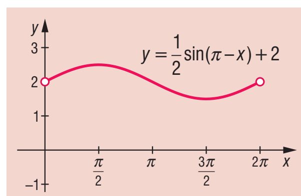
$$\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$



d) A függvény grafikonja az ábrán látható.



e) A függvény grafikonja az ábrán látható.



3491 *a)* $y(2)=2\cdot\sin(4\cdot 2)=2\cdot\sin 8\approx 1{,}98.$

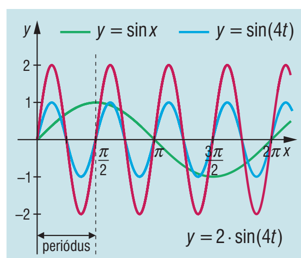
b) $2=2\cdot\sin(4t)$, amiből:

$$1=\sin(4t),$$

$$4t=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{N}$$

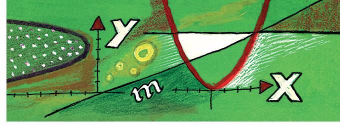
$$t=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{N}$$

$$t\approx 0{,}39+\frac{k\pi}{2}.$$



c) $t\mapsto 2\cdot\sin(4t)$ függvény periodikus, periódusa $\frac{\pi}{2}$, ez egyben egy teljes rezgés periódusa.

d) A test pályája az ábrán látható.



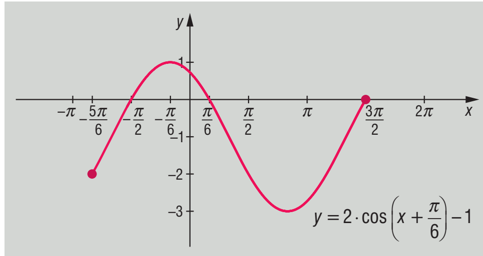
3492 *a)* $f(0)=2\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}-1=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1=\sqrt{3}-1;$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\cos\frac{\pi}{3}-1=0;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)-1=-2;$$

$$f(\pi)=2\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)-1=-\sqrt{3}-1.$$

b)

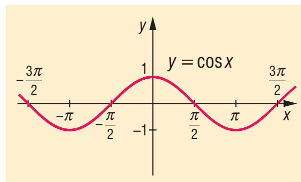


c) Értékkészlet: $y\in[-3;\,1]$; zérushely: $x_1=-\dfrac{\pi}{2}$, $x_2=\dfrac{\pi}{6}$, $x_3=\dfrac{3\pi}{2}$.

Menete: $\left[-\dfrac{5\pi}{6};-\dfrac{\pi}{6}\right]$-on és $\left[\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{3\pi}{2}\right]$-on nő, $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$-on csökken.

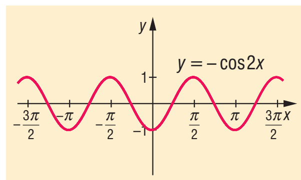
3493 *a)* A tanult azonosság szerint:

$$f(x)=\cos x,\quad x\in\mathbb{R}.$$



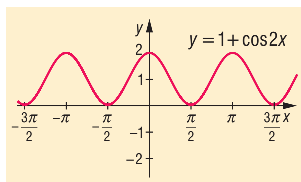
b) Alkalmazzuk a megismert azonosságokat:

$$g(x)=1-\cos^2x-\cos^2x=\sin^2x-\cos^2x=-\cos 2x,\quad x\in\mathbb{R}.$$



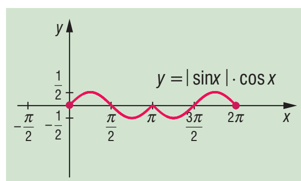
c) Itt is az azonosságok segítenek:

$$h(x)=2\cdot\cos^2x=1-\sin^2x+\cos^2x=1+\cos 2x,\quad x\in\mathbb{R}.$$



3494 *a)* Mivel $0\le x\le\pi$-ben $\sin x\ge 0$, és $\pi\le x\le 2\pi$-ben $\sin x\le 0$, így:

$$|\sin x|\cdot\cos x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x, & \text{ha}\quad 0\le x\le\pi,\\[2mm] -\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x, & \text{ha}\quad \pi\le x\le 2\pi.\end{cases}$$

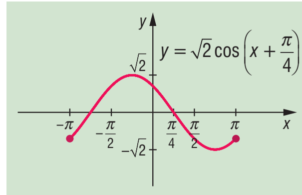


A függvény grafikonja az $x=\pi$ egyenletű egyenesre szimmetrikus.

Maximuma $\dfrac{1}{2}$ a $\dfrac{\pi}{4}$ és $\dfrac{7\pi}{4}$ helyeken, minimuma $-\dfrac{1}{2}$ a $\dfrac{3\pi}{4}$ és $\dfrac{5\pi}{4}$ helyeken.

Érdekes, hogy a függvénynek az $x=\pi$ helyen helyi maximuma van, itt a függvény értéke 0, míg $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$, $x\ne\pi$ esetén a függvény értéke negatív.

b) Alakítsuk át a függvényt definiáló kifejezést:



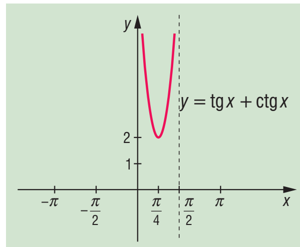
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cdot\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

A függvény $\left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right]$-ban és $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$-ban nő, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$-ban csökken.

A maximuma $\sqrt{2}$, az $x = -\frac{\pi}{4}$ helyen, minimuma $-\sqrt{2}$, az $x = \frac{3\pi}{4}$ helyen.

c) Eljárhatunk úgy, hogy a tg és ctg függvények $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$-hoz tartozó ágait grafikusan összeadjuk.

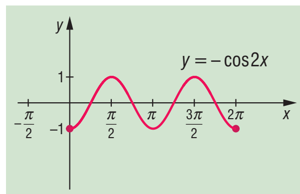


A függvény $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$-ban csökken, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$-ban nő.

Minimumának értéke 2, az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen.

d) Alkalmazzunk azonosságokat $(0 \le x \le 2\pi)$:

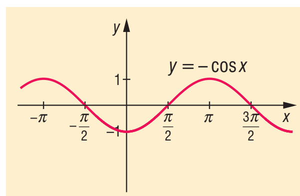
$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)\cdot(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x.$$



3495 *a)* A megfelelő azonosságok alkalmazásával $(x \in \mathbb{R})$:

$$f(x) = \sin^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} =$$

$$= \left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right) = -\cos x.$$

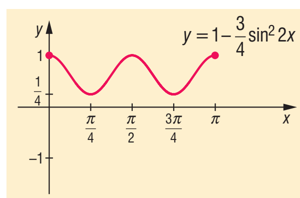


b) Itt is azonosságokat használunk:

$$g(x) = \cos^6 x + \sin^6 x =$$

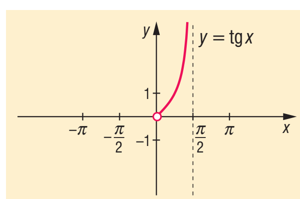
$$= (\cos^2 x + \sin^2 x)\cdot(\cos^4 x - \cos^2 x\cdot\sin^2 x + \sin^4 x) =$$

$$= \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 - 3\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x = 1 - \frac{3}{4}\cdot\sin^2 2x.$$



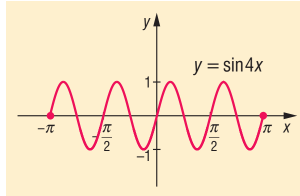
c) Alakítsuk át a törtet:

$$h(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cdot\sin^2 x}{2\cdot\sin x\cdot\cos x} = \text{tg}\,x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$



d) Az addíciós tételek alkalmazásával kapjuk, hogy:

$$k(x) = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 - \sin^2 x) =$$
$$= 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = \sin 4x.$$

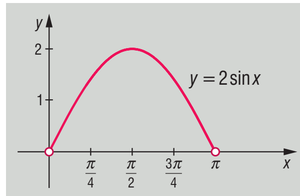


3496 *a)* Alakítsuk át a függvényt definiáló kifejezést:

$$f(x) = \frac{4 \cdot \sin^4 x + 4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{2 \cdot \sin x} = 2 \cdot \sin x, \quad 0 < x < \pi.$$

A függvény $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$-ban nő, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$-ban csökken.

Maximuma $x = \frac{\pi}{2}$ helyen, értéke 2, minimuma nincs.



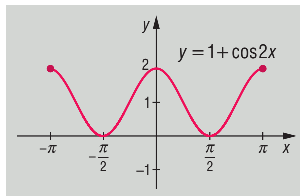
b) Alakítsuk át a függvényt megadó kifejezést:

$$g(x) = 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \cos^4 x = 2 \cdot \cos^2 x =$$
$$= \cos^2 x + 1 - \sin^2 x = 1 + \cos 2x, \quad |x| \le \pi.$$

A függvény páros.

A függvény $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ban és $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ban csökken, $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ban és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ban pedig nő.

Minimuma 0, az $x = -\frac{\pi}{2}$ és $x = \frac{\pi}{2}$ helyeken, maximuma 2, az $x = -\pi$, $x = 0$ és $x = \pi$ helyeken.

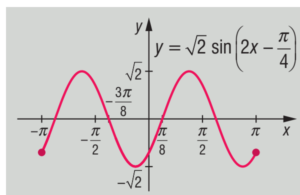


c) A kifejezést átalakítva:

$$h(x) = \sqrt{2} \cdot \left(\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

A függvény $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{8}\right]$-ban, $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$-ban és $\left[\frac{7\pi}{8}; \pi\right]$-ban nő, $\left[-\frac{5\pi}{8}; -\frac{\pi}{8}\right]$-ban és $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$-ban pedig csökken.

Minimuma $-\sqrt{2}$, az $x = -\frac{\pi}{8}$ és $x = \frac{7\pi}{8}$ helyeken, maximuma $\sqrt{2}$, az $x = -\frac{5\pi}{8}$ és $x = \frac{3\pi}{8}$ helyeken.



Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (kiegészítő anyag) – megoldások

3497 *a)* $\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

b) $\cos^2 x = 1$, amiből $\cos x = 1$ vagy $\cos x = -1 \Rightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

c) $\operatorname{tg} 2x = 1$, amiből $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$

d) Mivel $\sin x \le 1$ és $\sin(\pi - x) \le 1$, ezért $2 \cdot \sin x + 3 \cdot \sin(\pi - x) \le 5$ és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $\sin x = 1$ és $\sin(\pi - x) = 1$ teljesül, azaz $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

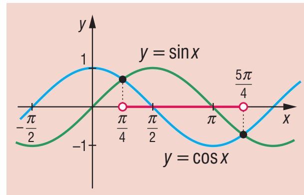
e) Két szám négyzetének összege csak akkor lehet 0, ha mindkét szám 0, azaz $\sin x = \operatorname{tg} x = 0$, tehát $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3498 *a)* A $\sin 3x < 1$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$3x \ne \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{azaz} \quad x \ne \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

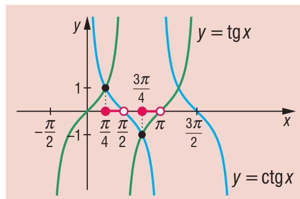
b) A szinusz- és koszinuszfüggvény grafikonjáról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



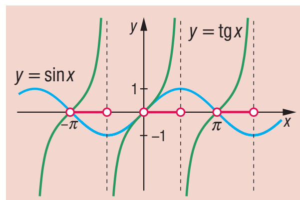
c) A függvények tulajdonságai alapján az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



d) A tangens- és szinuszfüggvényeket közös koordináta-rendszerben felrajzolva látható, hogy az egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



3499 *a)* Mivel a bal oldalon mindhárom tényező értéke abszolút értékben 1, a szorzat értéke csak akkor lehet 1, ha vagy mindhárom tényező 1 (I. eset), vagy két tényező –1, egy tényező 1 (II. eset).

I. eset: $\cos x = 1$, $\cos 2x = 1$, $\cos 4x = 1$ esetén $\sin x = 0$. A $\cos x = 1$, $\sin x = 0$ esetén $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ez kielégíti a másik két egyenletet.

II. eset: Ha $\cos x = 1$, $\cos 2x = -1$, $\cos 4x = -1$, akkor $\cos^2 x - \sin^2 x = -1$; $1 - \sin^2 x = -1$, azaz $2 = \sin^2 x$. Ez nem lehet, tehát ekkor nincs gyök. Hasonlóan adódik, hogy a másik két esetben sincs gyök.

Tehát az eredeti egyenletet csak az $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ számok elégítik ki.

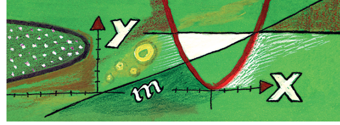
b) Mivel a bal oldalon álló két tag egymás reciproka, és az $\frac{1}{z} + z = -2$ egyenlet ekvivalens a

$$z^2 + 2z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -1$$

egyenletekkel, így a $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} = -1$ egyenletet kell megoldanunk, ahol $x \ne k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(-x),$$
$$2x = -x + k\pi, \quad \operatorname{tg} x \ne 0.$$

Ebből $3x = k\pi$, így a megoldás: $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.



c) A következő átalakítást célszerű elvégezni:

$$\cos^4 x + 1 - \cos^2 x = 1,$$
$$\cos^4 x = \cos^2 x,$$
$$\cos^2 x \cdot (\cos^2 x - 1) = 0.$$

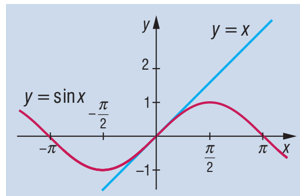
Amiből kapjuk, hogy $\cos^2 x = 0$ vagy $\cos^2 x = 1$. Tehát $\cos x = 0$, $\cos x = -1$, $\cos x = 1$ a lehetséges gyökökre, azaz:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

d) Ha $3 \cdot \sin x - \cos 2x = 4$, a bal oldal értéke csak akkor lehet 4, ha $\sin x = 1$ és $\cos 2x = -1$, azaz:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3500 *a)* Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az $x \mapsto x$ és $x \mapsto \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket.

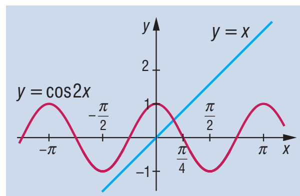


Tudjuk, hogy ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor $\sin x < x$, ez nyilván $\frac{\pi}{2} \le x$-re is igaz.

Mivel mindkét függvény páratlan, $x < 0$ esetén $\sin x > x$ igaz.

$x = 0$-ra $\sin x = 0$, tehát az egyenletnek egy gyöke van: $x = 0$.

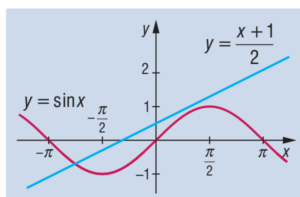
b) Ábrázoljuk az $x \mapsto \cos 2x$ és $x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket egy koordináta-rendszerben.



Az ábráról az olvasható le, hogy az egyenletnek egy gyöke van, méghozzá 0 és $\frac{\pi}{4}$ között. Valóban $\cos 0 = 1$ és $\cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0$, és $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$-ban $\cos 2x$ csökken, x nő, mert az x a 0-ban 0, míg $\frac{\pi}{4}$-ben $\frac{\pi}{4}$ értéket vesz fel. Itt tehát a két grafikonnak egy metszéspontja van.

Ha $x > \frac{\pi}{4}$, akkor nyilván nincs már metszéspont. Hasonlóan látható, hogy $x < 0$-ra nincs a grafikonoknak közös pontja. Tehát az egyenletnek egy gyöke van.

c) Ábrázoljuk az $x \mapsto \sin x$ és $x \mapsto \frac{x+1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket.



Az ábra alapján itt is egy gyöke van az egyenletnek, méghozzá a $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ban. Valóban, hiszen $]0; 1[$-ban $\sin x < x < \frac{x+1}{2}$ teljesül, itt tehát nincs gyök, és ha $x \ge 1$, akkor $\frac{x+1}{2} \ge 1$, itt sincs gyök. Hasonlóan látható, hogy $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ban sincs gyök, ha $x < -\pi$, akkor sincs. $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ban $\sin x$ csökken, $\frac{x+1}{2}$ nő, itt legfeljebb egy gyök van.

3501 *a)* Mivel a szinuszfüggvény abszolút értéke legfeljebb 1, $|\sin x| \le 1$ és $|\sin 2x| \le 1$. Az egyenlőség tehát csak akkor teljesülhet, ha vagy $\sin x = \sin 2x = 1$, vagy $\sin x = \sin 2x = -1$. Ezek nem teljesülnek egyszerre egyetlen valós x-re sem, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

b) A szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényező értéke 0, tehát vagy $\sin x = 0$, vagy $\sin 2x = 0$, vagy $\sin 3x = 0$.

Így a megoldások:

$$x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

vagy

$$2x = n\pi, \quad \text{amiből} \quad x_2 = n \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z},$$

vagy

$$3x = l\pi, \quad \text{amiből} \quad x_3 = l \cdot \frac{\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z}.$$

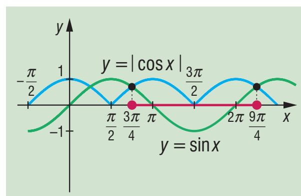
c) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$ $(\sin x \neq 0,\ x \neq k\pi)$, akkor és csak akkor, ha $\sin x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

d) Mivel $|\sin x| \le 1$ és $|\cos 2x| \le 1$, az egyenlőtlenség csak akkor lehet igaz, ha $\sin x = 1$ és $\cos 2x = 1$ egyszerre teljesül, azaz $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, de ekkor $2x = \pi + 4k\pi$ és $\cos 2x = -1$, tehát nincs megoldás.

e) Mivel $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (ahol $\cos x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$), $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x \ge 1$, ami csak $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén teljesülhet. Vagyis az értelmezési tartomány miatt nincs megoldás.

3502 *a)* A tangens- és szinuszfüggvények grafikonjai csak az $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ helyeken metszik egymást $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

b) Ábrázoljuk az $x \mapsto |\cos x|$ és $x \mapsto \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket egy koordináta-rendszerben.

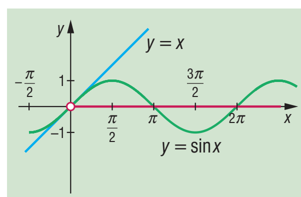


Az ábráról leolvasható, hogy a megoldás:

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{9\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Mivel $\sin(2\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$, az egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

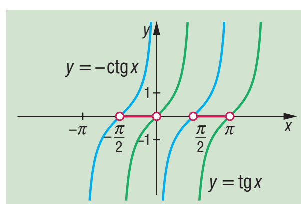
$$-\sin x > -x, \quad \text{tehát} \quad \sin x < x.$$



Így az ábráról leolvasható, hogy $x > 0$ esetén teljesül az egyenlőtlenség.

d) A két oldal közös értelmezési tartománya $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Mivel $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, az egyenlőtlenség ezzel ekvivalens: $-\operatorname{ctg} x > \operatorname{tg} x$.

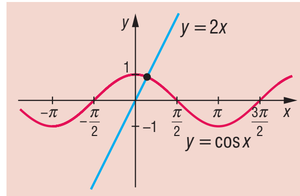


Leolvasható, hogy a megoldás:

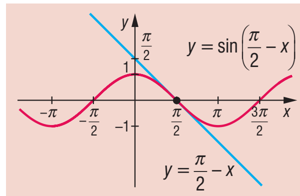
$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

e) A két függvény grafikonja a $\cos x = 0$, azaz $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ helyen metszi egymást.

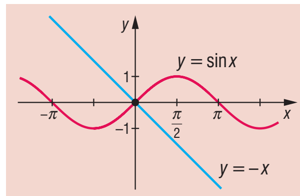
3503 *a)* Ábrázoljuk az egyenlőség két oldalán álló kifejezéssel megadható függvényeket.
Erről leolvasható, hogy 0 és $\frac{\pi}{2}$ között van egy gyöke az egyenletnek.



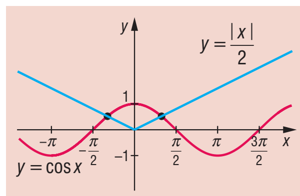
b) Az ábráról leolvasható, hogy egy gyöke van az egyenletnek, ez az $x = \frac{\pi}{2}$.



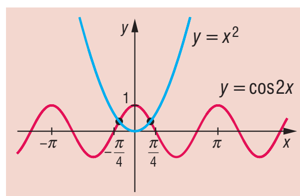
c) Látható, hogy az egyetlen gyök $x = 0$.



d) Az ábra alapján az egyenletnek két gyöke van.



e) Az egyenletnek két gyöke van.



3504 *a)* Ha $|\sin x| < 1$ és $|\cos x| < 1$, akkor $\sin^6 x < \sin^2 x$ és $\cos^6 x < \cos^2 x$, tehát
$$\sin^6 x + \cos^6 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$
Így az egyenlet csak akkor teljesülhet, ha vagy $|\sin x| = 1$ és akkor $\cos x = 0$, vagy $|\cos x| = 1$ és akkor $\sin x = 0$. Az egyenlet gyökei tehát:
$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Az *a)* feladat megoldásához hasonlóan itt is azt kapjuk, hogy az egyetlen gyöksorozat:
$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Az egyenlet ekvivalens a következővel:
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin 2x} \quad (\text{ahol } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}), \qquad \text{azaz} \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin 2x = 1.$$

Mivel mindkét tényező abszolút értéke legfeljebb 1, tehát az egyenlőség csak akkor teljesül, ha

$$\text{vagy}\quad (1)\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \ \text{ és }\ \sin 2x=1,\quad \text{vagy}\quad (2)\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\ \text{ és }\ \sin 2x=-1.$$

(1) Mindkét feltételt az $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k,\in\mathbb{Z}$ szögek elégítik ki.

(2) Nincs olyan szög, amely egyszerre mindkét feltételt kielégíti.

d) Az előzőhöz hasonló egyenlethez jutunk, ha mindkét oldalt 2-vel osztjuk, és alkalmazzuk az összegzési tételt:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin 4x=1.$$

Itt vagy $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ és $\sin 4x=1$ (I. eset), vagy $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ és $\sin 4x=-1$ (II. eset).

I. eset:

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad \text{tehát}\quad x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},$$

és

$$4x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\quad \text{tehát}\quad x=\frac{\pi}{8}+2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ezek egyszerre nem teljesülhetnek.

II. eset: Hasonlóan adódik, hogy ez sem lehet egyetlen valós x-re sem.

3505 *a)* A nevezőt vizsgáljuk:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cdot\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha:

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad \text{azaz}\quad x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Mivel a nevező nem lehet 0, ezért:

$$x\ne\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Minden, az értelmezési tartományban lévő x-re a nevező pozitív, tehát a tört értéke akkor pozitív, ha a számláló is pozitív:

$$\sin^2 x>\frac{1}{4},$$

$$|\sin x|>0{,}5.$$

Innen kapjuk a megoldást:

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<|x|<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\quad x\ne\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

b) A tangensfüggvény értelmezése alapján:

$$x\ne\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad n\in\mathbb{Z},$$

$$2x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad \text{azaz}\quad x\ne\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z},$$

$$3x\ne\frac{\pi}{2}+l\pi,\quad \text{azaz}\quad x\ne\frac{\pi}{6}+l\cdot\frac{\pi}{3},\quad l\in\mathbb{Z}.$$

Az utóbbi két kikötést elég feltenni, az első benne van az utolsóban.

Alkalmazzuk a tangensfüggvényre megismert azonosságot:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{tg} 3x = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x}.$$

Ezeket behelyettesítve, majd rendezve az egyenletet, azt kapjuk, hogy kapjuk:

$$\operatorname{tg}^4 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x + 1 = (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 > 0.$$

Ez minden olyan $x \in \mathbb{R}$-re érvényes, amire az eredeti kifejezésnek értelme van.

c) Használjuk fel a következő azonosságokat:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\big)$$

úgy, hogy a $\sin x \cdot \sin 3x$ szorzatot alakítjuk át:

$$\sin 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = \frac{4}{5},$$

$$2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x - 2 \cdot \cos 4x = \frac{16}{5},$$

$$\sin 4x - 2 \cdot \cos 4x = \frac{16}{5}.$$

A jobb oldal nagyobb mint 3, a bal oldal viszont 3-nál nagyobb nem lehet, mert $\sin 4x \le 1$ és $-2 \cdot \cos 4x \le 2$. Így nincs olyan $x \in \mathbb{R}$, amire az egyenlőség teljesülne.

3506 *a)* Alkalmazzuk a megfelelő azonosságokat:

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x.$$

Mivel $0 \le \sin^2 2x \le 1$, nyilván teljesül, hogy

$$\frac{1}{4} \le f(x) \le 1.$$

b) Használjuk fel a $2 \cdot \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ és $2 \cdot \cos^2 x = 1 + \cos 2x$, valamint a $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ ismert azonosságot. Ezek alapján:

$$g(x) = 3 + 3 \cdot \sin 2x + \cos 2x = 3 + \sqrt{10} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \cos 2x\right).$$

Mivel $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1$, van olyan α valós szám, hogy $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ és $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ezek alapján $g(x)$ így írható:

$$g(x) = 3 + \sqrt{10} \cdot \sin(2x + \alpha).$$

Innen következik, hogy:

$$3 - \sqrt{10} \le g(x) \le 3 + \sqrt{10}.$$

c) A megfelelő azonosságok alapján:

$$h(x) = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3 + \sin 2x},$$

tehát

$$\frac{7}{2} \cdot \sqrt{2} \le h(x) \le 7.$$

3507 Tegyük fel, hogy $n > 0$ egész és az f függvény 3π szerint periodikus. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$-re:

$$f(x+3\pi) = \cos n\cdot(x+3\pi)\cdot\sin\frac{5}{n}\cdot(x+3\pi) = \cos nx\cdot\sin\frac{5}{n}\cdot x = f(x).$$

Legyen $x = 0$, ekkor:

$$\cos n\cdot 3\pi\cdot\sin\frac{15\pi}{n} = 0.$$

Mivel $|\cos n\cdot 3\pi| = 1$, így $\sin\frac{15\pi}{n} = 0$, ami akkor és csak akkor igaz, ha $\frac{15}{n}$ egész szám, azaz n osztója 15-nek, tehát $n = \pm1, \pm3, \pm5, \pm15$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott n értékek mindegyike megfelelő.

3508 Az addíciós tétel szerint az egyenlet így írható:

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5,$$

amiből:

$$(1)\quad 3x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\qquad \text{illetve}\qquad (2)\quad 3x+\frac{\pi}{4} = 5\cdot\frac{\pi}{6}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Az (1)-ből:

$$x = -\frac{\pi}{36}+2k\cdot\frac{\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z},$$

a (2)-ből pedig:

$$x = \frac{7\pi}{36}+2n\cdot\frac{\pi}{3},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Az első sorozat legkisebb pozitív eleme $k = 1$-hez tartozik, ekkor $x = \frac{23\pi}{36}$.

A második sorozat legkisebb pozitív eleme pedig $n = 0$-hoz tartozik, ekkor $x = \frac{7\pi}{36}$.

Tehát egy egyenlet legkisebb pozitív gyöke $\frac{7\pi}{36}$.

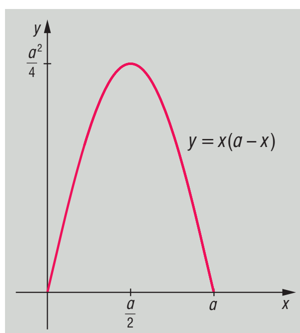
3509 Használjuk fel, hogy $1-\cos^2 x = \sin^2 x$, az egyenlet így írható:

$$\cos x\,(1+\cos^2 x) = (2+\sin^2 3x)\cdot\sqrt{1+\sin^2 3x}.$$

A bal oldal értéke legfeljebb 2, ez akkor teljesül, ha $\cos x = 1$. A jobb oldal értéke legalább 2, ez akkor teljesül, ha $\sin 3x = 0$. Az egyenlőség tehát csak akkor lehet igaz, ha $\cos x = 1$ és $\sin 3x = 0$, azaz $x = 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

3510 Az adott egyenlet gyökei azok az $x\in\mathbb{R}$ számok, amelyekre teljesül, hogy:

$$\pi\cdot\sqrt{x\cdot(a-x)} = \frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \text{azaz}\ \sqrt{x\cdot(a-x)} = 2k+\frac{1}{2},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

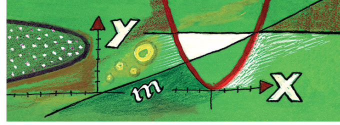


Ebből:

$$x\cdot(a-x) = (2k+0{,}5)^2 > 0,$$

aminek akkor van két gyöke, ha $(2k+0{,}5)^2 < a\cdot 0{,}5$, és egy gyöke van, ha $(2k+0{,}5)^2 = a\cdot 0{,}5$. Ahhoz tehát, hogy összesen 2001 gyöke legyen az egyenletnek, az kell, hogy teljesüljön a-ra:

$$a = 2\cdot(2000+0{,}5)^2 = 0{,}5\cdot(4001)^2.$$



3511 A négyzetgyök értelmezése miatt teljesülnie kell, hogy $0 \le \pi^2 - x^2$, azaz $|x| \le \pi$, tehát:

$$-\pi \le x \le \pi.$$

Ennek megfelelően:

$$-\frac{\pi}{3} \le \sqrt{\pi^2 - x^2} - \frac{\pi}{3} \le \frac{2\pi}{3},$$

és a szinuszfüggvény értékkészlete alapján:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le f(x) \le 1.$$

3512 Alakítsuk át a $\sin x$-et tartalmazó törtet:

$$\frac{5 \cdot \sin x - 3}{\sin x + 1} = 5 - \frac{8}{\sin x + 1}.$$

Mivel $0 < \sin x + 1 \le 2$ ezért $\frac{8}{\sin x + 1} \ge 4$, és így $5 - \frac{8}{\sin x + 1} \le 1$, tehát:

$$g(x) = 0{,}1 \cdot \frac{5 \cdot \sin x - 3}{\sin x + 1} \le 0{,}1.$$

A függvény értékkészlete tehát a $]-\infty; 0{,}1]$ intervallum.

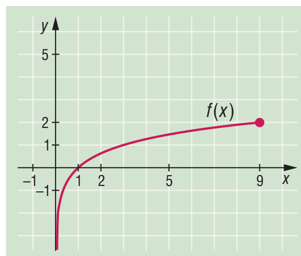
Vegyes feladatok – megoldások

3513 *a)* A megadott függvényérték alapján:

$$2 = \log_a 9, \qquad a > 0,\ a \ne 1$$
$$a^2 = 9,$$
$$a = 3.$$

A függvény hozzárendelési szabálya:

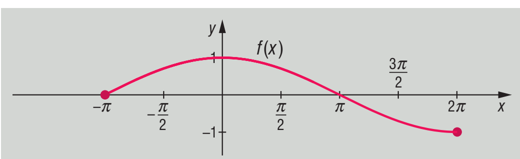
$$f(x) = \log_3 x \ (x > 0).$$



b) $y = \frac{1}{3}$ esetén: $\frac{1}{3} = \log_3 x \iff \sqrt[3]{3} = x$,

$y = -1$ esetén: $-1 = \log_3 x \iff \frac{1}{3} = x$.

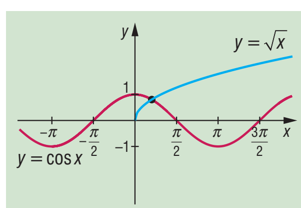
3514



x	0	π	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

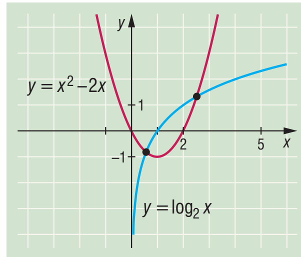
3515 *a)* Ábrázoljuk az $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ és az $x \mapsto \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket egy koordináta-rendszerben.

Az egyenletnek egy gyöke van, 0 és $\frac{\pi}{2}$ között.



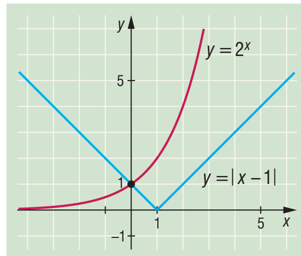
b) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $x \mapsto \log_2 x,\ x > 0$ és az $x \mapsto x^2 - 2x,\ x \in \mathbb{R}$ függvényeket.

Az egyenletnek két gyöke van, az egyik 0 és 1 között, a másik 2 és 3 között.



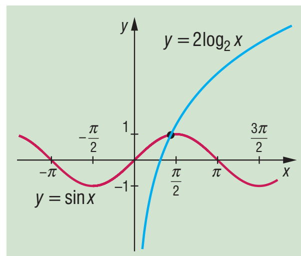
c) Ábrázoljuk az $x \mapsto x^2,\ x \in \mathbb{R}$ és az $x \mapsto |x - 1|,\ x \in \mathbb{R}$ függvényeket egy koordináta-rendszerben.

Az egyenletnek egy gyöke van, az $x = 0$.



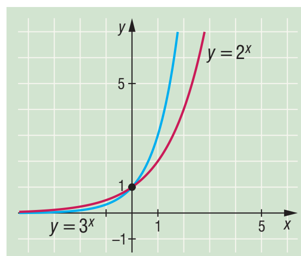
d) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $x \mapsto 2 \cdot \log_2 x,\ x > 0$ és az $x \mapsto \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ függvényeket.

Az egyenletnek egy gyöke van, 1 és 2 között.

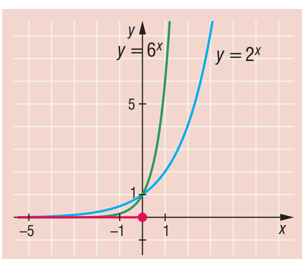


e) Ábrázoljuk az $x \mapsto 2^x,\ x \in \mathbb{R}$ és az $x \mapsto 3^x,\ x \in \mathbb{R}$ függvényeket egy koordináta-rendszerben.

Az egyenletnek egy gyöke van, az $x = 0$.

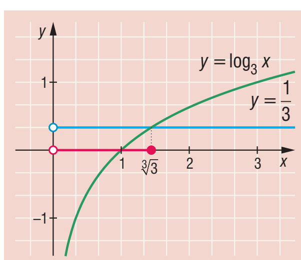


3516 *a)*



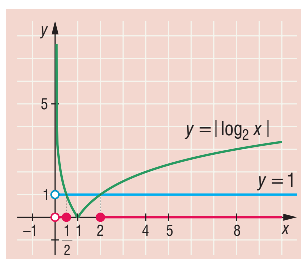
$x \le 0$;

b)



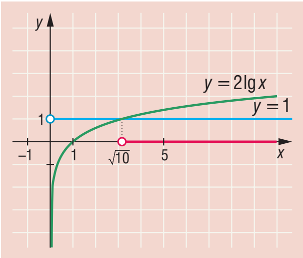
$0 < x \le \sqrt[3]{3}$;

c)



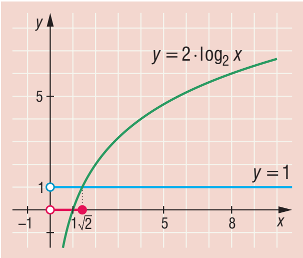
$0 < x \le \frac{1}{2}$, vagy $x \ge 2$;

d)



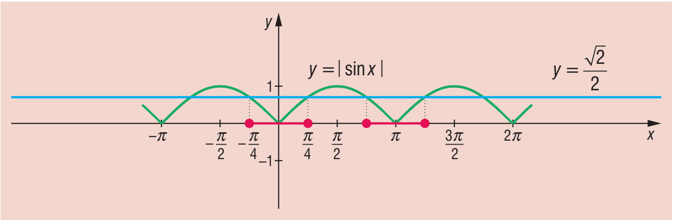
$x > \sqrt{10}$;

e)



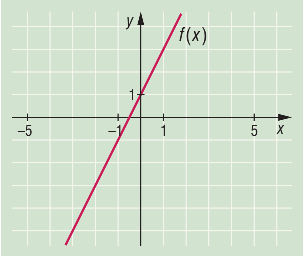
$0 < x \leq \sqrt{2}$;

f)

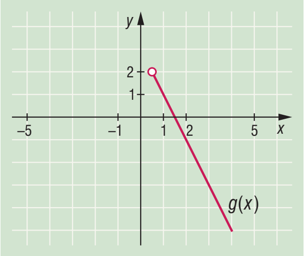


$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

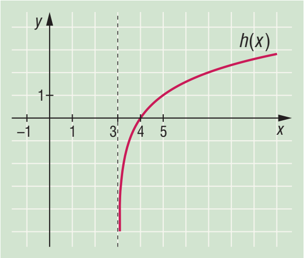
3517 *a)* $f(x) = \log_3 3^{2x} + 1 = 2x + 1, \quad (x \in \mathbb{R})$;

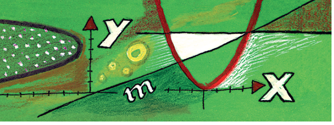


b) $g(x) = 2 - 3^{\log_3(2x-1)} = 2 - (2x - 1) = -2x + 3, \quad \left(x > \frac{1}{2}\right)$;

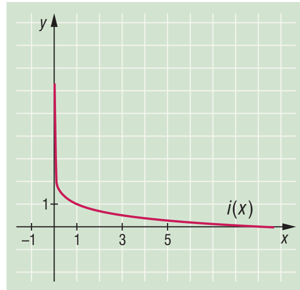


c) $h(x) = \log_2 \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \log_2(x - 3), \quad (x > 3)$;

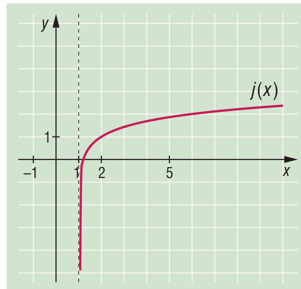




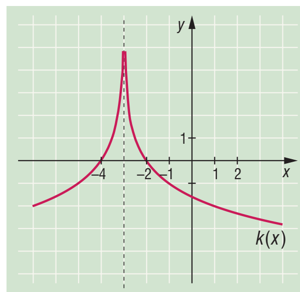
d) $i(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \log_3 x = -\frac{1}{2} \cdot \log_3 x + 1, \quad (x > 0);$



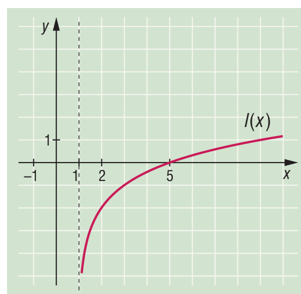
e) $j(x) = \log_5\left[\frac{1}{3} \cdot (3x - 3)\right] + 1 = \log_5(x - 1) + 1, \quad (x > 1);$



f) $k(x) = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{(x + 3)^2} = \log_{\frac{1}{2}} |x + 3|, \quad (x \neq -3);$

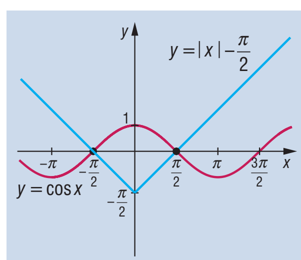


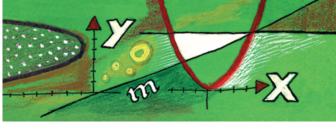
g) $l(x) = \log_2 \frac{1}{2} \cdot (2x - 2) - 2 = \log_2(x - 1) - 2, \quad (x > 1).$



3518 *a)* Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $x \mapsto \cos x,\ x \in \mathbb{R}$ és az $x \mapsto |x| - \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R}$ függvényeket.

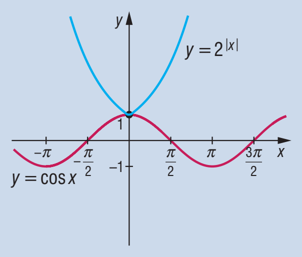
Az ábra alapján világos, hogy az egyenlőtlenség $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ esetén teljesül.





b) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az $x \mapsto 2^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ és az $x \mapsto \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket.

Az ábra alapján látható, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz az egyenlőtlenség.

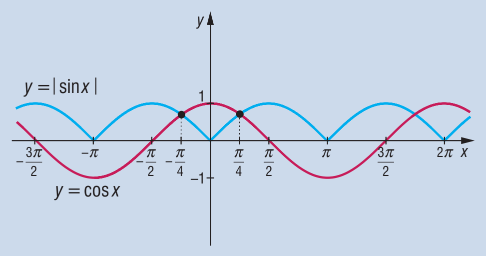


c) Mivel $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, az egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$|\sin x| \le \cos x.$$

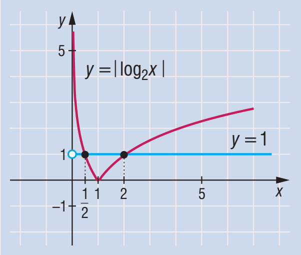
Ha közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $x \mapsto |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$ és az $x \mapsto \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket, akkor látható, hogy az egyenlőtlenség az alábbi esetekben igaz:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



d) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $x \mapsto |\log_2 x|$, $x>0$ és az $x \mapsto 1$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket.

Leolvasható, hogy az egyenlőtlenség $0{,}5 \le x \le 2$ esetén teljesül.



3519 *a)* A megadott adatokból felírható a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad -1=\log_a 1+b \\ &(2)\quad 0=\log_a 2+b \end{aligned}\right\} \quad a>0,\ a\neq 1.$$

(1)-ből kivonva a (2)-t:

$$-1=\log_a 1-\log_a 2,$$

$$-1=\log_a \frac{1}{2},$$

$$\Updownarrow$$

$$a^{-1}=2^{-1},$$

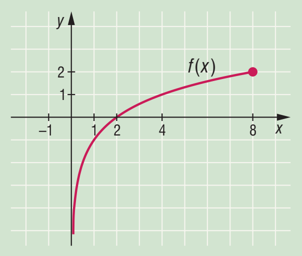
$$a=2.$$

(1)-be visszaírva a kapott a értéket:

$$-1=\log_2 1+b \quad \Rightarrow \quad b=-1.$$

A kapott függvény:

$$g(x)=\log_2 x-1 \quad (x \in \,]0;\,8]).$$



b) A függvény görbéje az ábrán látható.

c) Értékkészlet: $g(x) \le 2$, vagy másként: $y \in \,]-\infty;\,2]$.

d) $A(5;\,1)$ pont esetén: $y=1$ és $x=5$, tehát:

$$1=\log_2 5-1 \;\Rightarrow\; 2=\log_2 5 \;\Rightarrow\; 4\neq 5.$$

Az A pont nem illeszkedik $g(x)$-re.

$B(2;\,0)$ esetén: $y=0$ és $x=2$, tehát:

$$0=\log_2 2-1 \;\Rightarrow\; 1=\log_2 2 \;\Rightarrow\; 1=1.$$

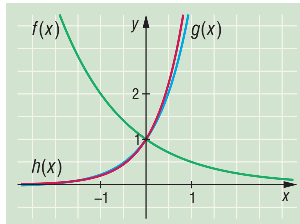
A B pont illeszkedik $g(x)$-re.

$C(16;\,3)$ esetén: $y=3$ és $x=16$, tehát:

$$3=\log_2 16-1 \;\Rightarrow\; 4-1=3.$$

De a függvény értelmezési tartománya $]0;\,8]$, ezért nem illeszkedik C az adott függvényre.

3520 *a)* $f(x)$ esetén:



$$f(-1)=2,\quad \text{ekkor}\quad 2=a^{-1} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{a}=2 \;\Leftrightarrow\; a=\frac{1}{2}.$$

A hozzárendelési szabály:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

$g(x)$ esetén:

$$g(2)=16 \;\Leftrightarrow\; 16=a^2 \;\Leftrightarrow\; a=4,\ \text{mivel } a>0.$$

A hozzárendelési szabály:

$$g(x)=4^x.$$

$h(x)$ esetén:

$$h(2)=25 \;\Leftrightarrow\; 25=a^2 \;\Leftrightarrow\; a=5,\ \text{mivel } a>0.$$

A hozzárendelési szabály:

$$h(x)=5^x.$$

c) Az értékkészletek:

$$f(x)\in\left[\frac{1}{2};\,4\right],\qquad g(x)\in\left[\frac{1}{16};\,4\right],\qquad h(x)\in\left[\frac{1}{25};\,5\right].$$

d) Igen, a függvények mindkét esetében az $y=2$ értéket veszik fel:

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2 \qquad \text{és} \qquad f(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2^1=2.$$

3521 *a)* Az A pont akkor és csak akkor illeszkedik az adott függvény grafikonjára, ha $p^2=9$, $p>0$, azaz $p=3$.

b) A logaritmus alapja csak 1-től különböző pozitív szám lehet, tehát $p>0$, $p\neq 1$, és $\log_p 0{,}5=1$, azaz $p=0{,}5$.

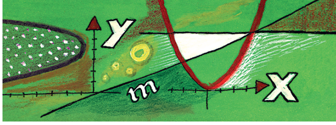
c) A függvény értelmezési tartománya miatt $-\pi<x+p<\pi$, tehát $x=0$-ra $-\pi<p<\pi$, és $\sin p=1$. Ebből következik, hogy $p=\dfrac{\pi}{2}$.

d) Az értelmezési tartomány miatt $p>0$ és $\log_2 p=0$, tehát $p=1$.

3522 *a)* A négyzetgyök miatt $4-x\geq 0 \;\Leftrightarrow\; 4\geq x$.

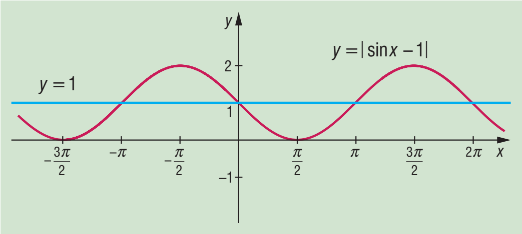
A tört nevezője nem lehet 0, ezért $\lg(x-3)\neq 0 \;\Leftrightarrow\; x-3\neq 1,\ x\neq 4$.

A logaritmus miatt $x-3>0 \;\Leftrightarrow\; x>3$. Tehát : $x\in\mathbb{R} \mid 3<x<4$, vagyis: $x\in\,]3;\,4[$.

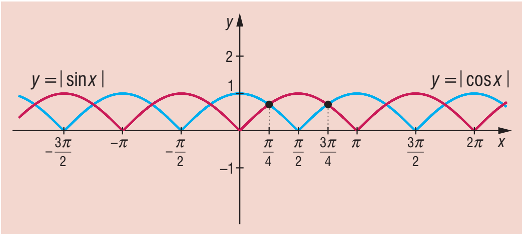


b) A logaritmus miatt:
$$x^2 + 4x - 5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -5 \text{ vagy } x > 1.$$
A négyzetgyök miatt:
$$\lg(x^2 + 4x - 5) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x - 5 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x - 6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x < -\sqrt{10} - 2 \quad \text{vagy} \quad x > \sqrt{10} - 2.$$
Értelmezési tartomány:
$$x \in \left]-\infty; -\sqrt{10} - 2\right[\quad \text{vagy} \quad x \in \left]\sqrt{10} - 2; \infty\right[.$$

3523 Az ábráról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha:
$$(2k + 1) \cdot \pi \leq x \leq (2k + 2) \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



3524 Az ábráról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha:
$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

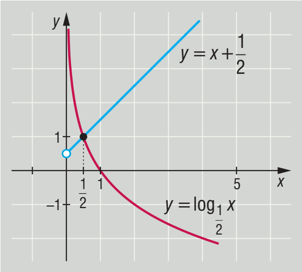


3525 *a)* Mivel $\sin x \leq 1$, és a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan nő:
$$2^{\sin x} \leq 2,$$
és a 2 értéket ott veszi fel, ahol $\sin x = 1$, azaz az $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken.

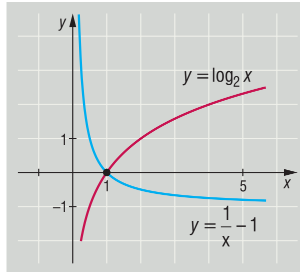
b) A $|\cos x| \leq 1$, és az egyenlőség csak az $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken teljesül. Ezért a 3-as alapú exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:
$$3 \cdot 3^{|\cos x|} \leq 3^2 = 9.$$
A 9 értéket csak az $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken veszi fel a függvény.

c) A szinuszfüggvény tulajdonsága miatt $1 - \sin x \leq 2$, és itt az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\sin x = -1$, azaz $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Az 5 alapú exponenciális függvény szigorúan nő, ezért:
$$5^{1 - \sin x} \leq 5^2 = 25.$$
Az egyenlőség csak az $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken teljesül.

3526 *a)* A logaritmus miatt az értelmezési tartomány $x > 0$.
A két függvény grafikonját a közös értelmezési tartományon ábrázolva látjuk, hogy az $x = \frac{1}{2}$ helyen metszi egymást.
Mivel a bal oldali $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$, $x > 0$ függvény szigorúan csökken, a jobb oldali $x \mapsto x + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}^+$ függvény pedig szigorúan nő, így több metszéspontjuk nincs.

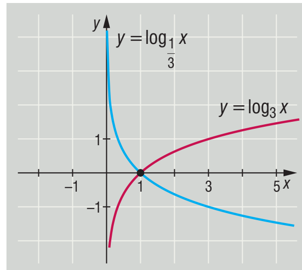


b) Az $x \mapsto \frac{1}{x} - 1$, $x \in \mathbb{R}^+$ függvény szigorúan csökken, a 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan nő, a grafikonok metszéspontja $x = 1$-nél van.

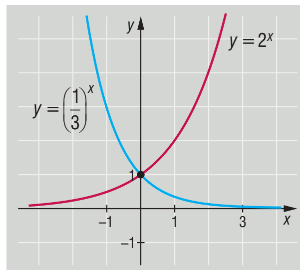


c) Értelmezési tartomány: $x > 0$.

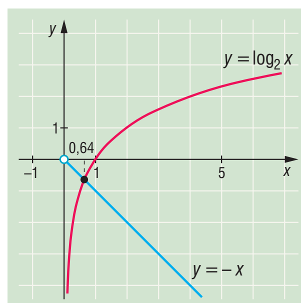
Itt is a grafikonról látható, hogy $x = 1$ az egyetlen megoldás.



d) A grafikonról látható, hogy az egyetlen megoldás: $x = 0$.

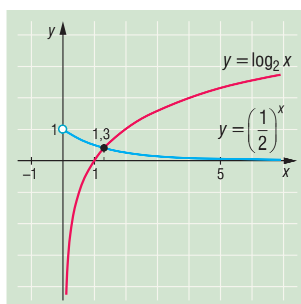


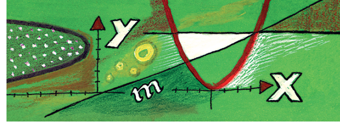
3527 *a)* Ábrázoljuk az $x \mapsto \log_2 x$, $x > 0$ és az $x \mapsto -x$, függvényeket a közös értelmezési tartományon. Zsebszámológéppel vagy táblázat használatával $x = 0{,}64$ adódik egyetlen gyökként.



b) Ábrázoljuk az $x \mapsto \log_2 x$, $x > 0$ és az $x \mapsto (0{,}5)^x$, $x > 0$ függvényeket.

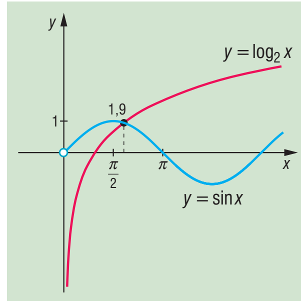
Mivel az $x \mapsto \log_2 x$ függvény nő, az $x \mapsto (0{,}5)^x$ függvény csökken, legfeljebb egy gyök lehet. Az ábráról leolvasható, hogy az $]1; 2[$ intervallumban van gyök. A pontosabb számolás azt mutatja, hogy a gyök 1,3.





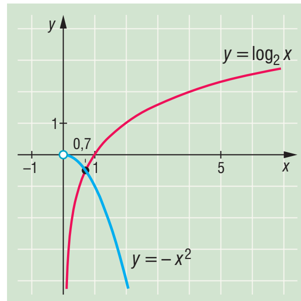
c) Ábrázoljuk itt is az $x \mapsto \log_2 x$, $x > 0$ és az $x \mapsto \sin x$, $x > 0$ függvényeket.

Az ábra és a függvények tulajdonságai alapján világos, hogy $\frac{\pi}{2}$ és 2 között van egy gyök, több gyök nem lehet. A pontosabb számolás azt mutatja, hogy a gyök 1,9.



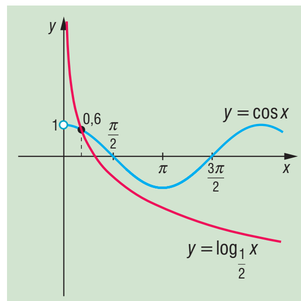
d) Ábrázoljuk az $x \mapsto \log_2 x$, $x > 0$ és az $x \mapsto -x^2$, $x > 0$ függvényeket.

Világos, hogy az $x \mapsto \log_2 x$, $x > 0$ függvény nő, az $x \mapsto -x^2$, $x > 0$ függvény csökken, és $]0,5; 1[$-ban van gyöke, pontosabban a gyök 0,7.



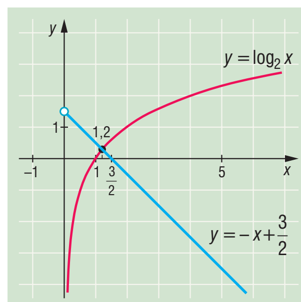
e) Ábrázoljuk az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$, $x > 0$ és az $x \mapsto \cos x$, $x > 0$ függvényeket.

Az ábra és a függvények tulajdonságai alapján világos, hogy a $]0,5; 1[$-ban van egy gyöke az egyenletnek, ez a gyök 0,6.



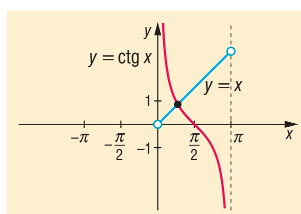
f) Itt is ábrázoljuk az $x \mapsto \log_2 x$, $x > 0$ és az $x \mapsto -x + 1{,}5$, $x > 0$ függvényeket.

Az $x \mapsto \log_2 x$, $x > 0$ függvény nő, az $x \mapsto -x + 1{,}5$, $x > 0$ függvény csökken, így legfeljebb egy gyök van. Az ábráról leolvasható, hogy ez a gyök az $]1; 1{,}5[$-ban van, a gyök 1,2.



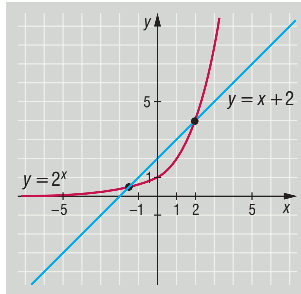
3528 Itt is ábrázoljuk az $x \mapsto \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$ és az $x \mapsto x$, $0 < x < \pi$ függvényeket.

Itt is csak egy metszéspont van, ezt például iterációval kaphatjuk meg: 0,86.



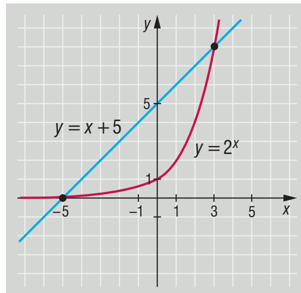
3529 *a)* Ábrázoljuk az $x \mapsto 2^x$ és az $x \mapsto x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket.

Az $x \mapsto 2^x$ függvény grafikonja konvex $]-\infty; +\infty[$-ban, ezért legfeljebb két gyök lesz, hiszen az $x \mapsto x + 2$ képe egyenes. Az egyik gyök $x = 2$, a másik láthatóan -2 és -1 közé esik. Pontosabb értéke: $-1{,}7$.



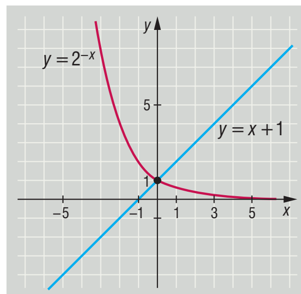
b) Itt is az *a)* megoldásában látottakat alkalmazzuk.

Az $x \mapsto 2^x$ függvény grafikonja konvex, ezért legfeljebb két gyök van. Az egyik 3, a másik -5 és -4 közé esik, ez $-4{,}6$ lesz.



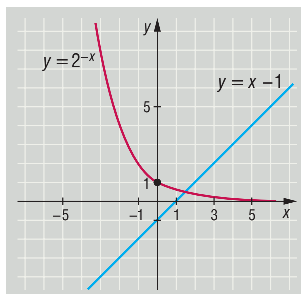
c) Ábrázoljuk az $x \mapsto 2^{-x}$ és az $x \mapsto x + 1$ függvényeket.

Az $x \mapsto 2^{-x}$ függvény csökken, a másik nő, így legfeljebb egy gyöke van. Az egyetlen gyök: $x = 0$.



d) Ábrázoljuk itt is az $x \mapsto 2^{-x}$ és az $x \mapsto x - 1$ függvényeket.

Ebben az esetben is az egyik függvény csökken, a másik nő, így legfeljebb egy gyök van, amely az 1 és 2 közé esik: 1,4.



3530 *a)* A logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján az adott egyenlőtlenségből a következő ekvivalens egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_5(x^2 - 11) > 0,$$

$$0 < \log_5(x^2 - 11) < 1,$$

$$1 < (x^2 - 11) < 5,$$

$$12 < x^2 < 16,$$

$$2 \cdot \sqrt{3} < |x| < 4.$$

b) A hatványazonosságok alkalmazásával ekvivalens átalakításokat végezhetünk:

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1},$$

$$4^x + \frac{1}{2}\cdot 4^x = \sqrt{3}\cdot 3^x + \frac{3^x}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{3}{2}\cdot 4^x = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot 3^x, \quad \text{mivel } 3^x \neq 0, \text{ ezért:}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{az exp. fv. szig. monotonitása miatt:}$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

c) Átalakításokkal:

$$(0{,}4)^{\lg^2 x+1} = (6{,}25)^{2-\lg x^3}, \quad x > 0$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x+1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2-3\cdot\lg x},$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{6\cdot\lg x-4}, \quad \text{a logaritmus fv. szig. monotonitása miatt:}$$

$$\lg^2 x + 1 = 6\cdot\lg x - 4,$$

$$\lg^2 x - 6\cdot\lg x + 5 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei:

$$\lg x_1 = 1 \quad \text{és} \quad \lg x_2 = 5,$$

amiből:

$$x_1 = 10 \quad \text{és} \quad x_2 = 10^5.$$

A kapott gyökök jók, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.

3531 Ekvivalens átalakítással 2-es alapú logaritmusra áttérve így írhatjuk az egyenlőtlenséget:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \leq -2\cdot\cos\alpha.$$

Nyilván $0 < x,\ x \neq 1$ jöhet szóba csak.

Ha $0 < x < 1$, akkor $\log_2 x < 0$ és így:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \leq -2.$$

A $-2 \leq -2\cdot\cos\alpha$ egyenlőtlenség minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén igaz, tehát az egyenlőtlenség teljesül, ha:

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad 0 < x < 1.$$

Ha $x > 1$, akkor $\log_2 x > 0$, így:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \geq 2,$$

és itt egyenlőség csak $\log_2 x = 1$, azaz $x = 2$ esetén teljesül. Másrészt $-2\cdot\cos\alpha \geq 2$ csak $\cos\alpha = -1$ esetén teljesül, ekkor az egyenlőség igaz, tehát:

$$\alpha = (2k+1)\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3532 A logaritmus azonosságait felhasználva ekvivalens átalakítással $f(x)$ értékét a következő alakra hozhatjuk:

$$f(x) = \log_2^2 x \cdot \left(\log_2^2 x + 12 \cdot (3 - \log_2 x)\right) = \log_2^2 x \cdot (\log_2^2 x - 12 \cdot \log_2 x + 36) =$$
$$= \left(\log_2 x \cdot (6 - \log_2 x)\right)^2.$$

Mivel $1 \le x \le 64$, ezért $0 \le \log_2 x \le 6$, tehát ha a $\log_2 x = z$ jelölést használjuk, a $\left(z \cdot (6 - z)\right)^2$ legnagyobb értékét keressük, ha $0 \le z \le 6$.

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján:

$$z \cdot (6 - z) \le \left(\frac{z + 6 - z}{2}\right)^2 = 9,$$

és egyenlőség csak akkor teljesül, ha $z = 6 - z$, azaz $z = 3$.

Ezek szerint $f(x) \le 9^2 = 81$, és az egyenlőség $\log_2 x = 3$, azaz $x = 8$ esetén teljesül.

3533 Nyilván $x > 0$ jöhet szóba megoldásként. A 2-es alapú logaritmusfüggvény az értelmezési tartományában szigorúan nő, így mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát véve, és felhasználva a logaritmus azonosságait, a következő, az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(3 - \log_2^2 x - 2 \cdot \log_2 x) \cdot \log_2 x > 0.$$

Az első tényezőt további szorzattá alakítva, és –1-gyel szorozva ezt kapjuk:

$$(\log_2 x - 1) \cdot (\log_2 x + 3) \cdot \log_2 x < 0.$$

A három tényező szorzata akkor lehet negatív, ha mindhárom tényező negatív, azaz a legnagyobb tényező negatív:

$$\log_2 x + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x < -3, \quad \text{amiből} \quad 0 < x < \frac{1}{8},$$

vagy ha egy tényező negatív, kettő pozitív, azaz a legkisebb tényező negatív, a középső pozitív:

$$\log_2 x - 1 < 0 < \log_2 x \quad \Rightarrow \quad 0 < \log_2 x < 1, \quad \text{amiből} \quad 1 < x < 2.$$

3534 A következőket kell tudni x-ről: $|x| \ne 0$, $|x| \ne 1$, $x + 2 > 0$, azaz $x > -2$.

Ha $0 < |x| < 1$, akkor a logaritmusfüggvény csökken, így az adott egyenlőtlenség a következővé alakul:

$$x + 2 > x^2, \quad \text{azaz} \quad 0 > x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1), \quad \text{amiből} \quad -1 < x < 2.$$

Ekkor tehát a megoldás:

$$-1 < x < 0 \quad \text{és} \quad 0 < x < 1.$$

Ha $|x| > 1$, akkor a logaritmusfüggvény nő, tehát az adott egyenlőtlenség a következővel ekvivalens:

$$x + 2 < x^2, \quad \text{azaz} \quad 0 < x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1), \quad \text{amiből} \quad x < -1 \text{ vagy } x > 2.$$

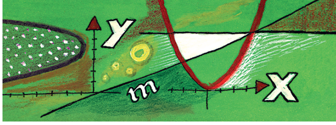
Az értelmezési tartományt is figyelembe véve ekkor a következő számok elégítik ki az egyenlőtlenséget:

$$x > 2 \quad \text{és} \quad -2 < x < -1.$$

3535 Fejezzük ki $\operatorname{tg} x$-et $\sin x$ és $\cos x$ segítségével, majd ezeket $\frac{x}{2}$ szögfüggvényeivel:

$$\frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2 \cdot \sin x}{1 + \cos x} = 2 \cdot \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Igazoltuk 10. osztályban, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $x < \operatorname{tg} x$, tehát az állítást igazoltuk.



3536 *a)* Az exponenciális függvény tulajdonságai alapján a hatvány értéke akkor és csak akkor nagyobb mint 1, ha vagy az alap 1-nél nagyobb és a kitevő pozitív (I. eset), vagy az alap 0 és 1 között van és a kitevő negatív (II. eset).

I. eset:

$$4x^2 + 2x + 1 > 1 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot (2x + 1) > 0,$$

amiből

$$x > 0 \quad \text{vagy} \quad x < -0{,}5,$$

valamint:

$$x^2 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x - 1) > 0,$$

amiből

$$x > 1 \quad \text{vagy} \quad x < 0.$$

Tehát ebben az esetben az $x > 1$, illetve $x < -0{,}5$ valós számokra igaz az egyenlőtlenség.

II. eset:

$$0 < 4x^2 + 2x + 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot (2x + 1) < 0,$$

amiből

$$-0{,}5 < x < 0,$$

illetve

$$x^2 - x < 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x - 1) < 0,$$

amiből

$$0 < x < 1.$$

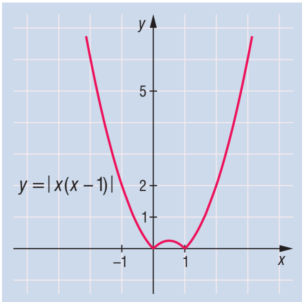
Mindkét kikötést egyetlen valós szám sem elégíti ki, tehát itt nincs megoldás.

b) Az exponenciális függvény tulajdonságai alapján az eredeti egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$0 < |x \cdot (x - 1)| < 2.$$

Ábrázolva az $x \mapsto |x \cdot (x - 1)|$ függvényt, az ábráról leolvasható, de számolással is könnyen ellenőrizhető, hogy a megoldások:

$$-1 < x < 0, \quad 0 < x < 1 \quad \text{és} \quad 1 < x < 2.$$



c) A logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján 2 eset lehetséges.

I. eset: $0 < x^2 < 1$ és $0 < 3 - 2x < x^2$ teljesül.

Az első egyenlőtlenségből $-1 < x < 0$ vagy $0 < x < 1$, a másodikból $1 < x < 1{,}5$ vagy $x < -3$, tehát ezeket kielégítő valós szám nincs.

II. eset: $1 < x^2$ és $3 - 2x > x^2$ teljesül.

Ebből $x < -1$ vagy $x > 1$, illetve $0 > x^2 + 2x - 3 = (x - 1) \cdot (x + 3)$, azaz $-3 < x < 1$. Mindkét feltételt a $-3 < x < -1$ számok elégítik ki, ezek az egyenlőtlenség megoldásai.

3537 Indirekt bizonyítást célszerű választani. Tegyük fel, hogy az f függvénynek van egy $p > 0$ periódusa, azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re $f(x + p) = f(x)$. Használjuk a szorzattá alakító azonosságokat:

$$f(x + p) - f(x) = 2 \cdot \sin\frac{p}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{p}{2}\right) + 2 \cdot \sin\frac{p \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\sqrt{2} \cdot x + \frac{p \cdot \sqrt{2}}{2}\right)$$

minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ez csak akkor teljesülhet, ha $\sin\frac{p}{2} = 0$, azaz $p = 2k\pi$, valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén és $\sin\frac{p \cdot \sqrt{2}}{2} = 0$, azaz $p = \sqrt{2} \cdot 2n\pi$, valamely $n \in \mathbb{Z}$ esetén. Ebből az következik, hogy van olyan $k, n \in \mathbb{Z}$, hogy $\sqrt{2} \cdot n = k$, $n \neq 0$ miatt $\sqrt{2} = \frac{k}{n}$, ami ellentmondás, mert $\sqrt{2}$ irracionális.

3538 A $\sin\sqrt{3}\cdot x$ értéke $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ szerint periodikus, $\cos\frac{x}{\sqrt{3}}$ értéke $2\pi\cdot\sqrt{3}$ szerint periodikus.

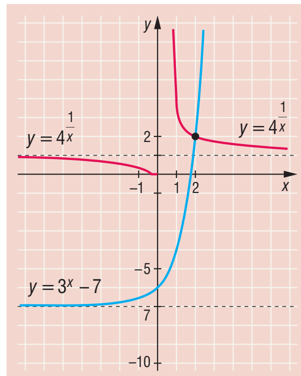
Akkor lesz $f(x)$ periodikus, ha van olyan k és n egész, hogy:

$$k\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = l\cdot 2\pi\cdot\sqrt{3},\quad l\neq 0.$$

Ebből $\frac{k}{l}=3$ adódik, $k=3$, $l=1$ esetén ez teljesül. Tehát az f függvény $2\pi\cdot\sqrt{3}$ szerint periodikus.
Valóban:

$$f\left(x+2\pi\cdot\sqrt{3}\right)=\sin\left(\sqrt{3}\cdot x+6\pi\right)-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+2\pi\right)=f(x).$$

3539 Ábrázoljuk az $x\mapsto 3^x-7$, $x\in\mathbb{R}$ és $x\mapsto 4^{\frac{1}{x}}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$ függvényeket.



Az $x\mapsto 3^x-7$, $x\in\mathbb{R}$ függvény végig nő, az $x\mapsto 4^{\frac{1}{x}}$ függvény $]-\infty;0[$-ban csökken és $]0;+\infty[$-ban is csökken, de mindenütt pozitív. Így legfeljebb egy gyök lehet. Az $x=2$ jó gyöknek, itt mindkét függvény értéke 2.

3540 *a)* Ha $0<x<\frac{\pi}{2}$, akkor $0<\sin x<x$, és

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=1-2\cdot\sin^2\frac{x}{2}>1-2\cdot\frac{x^2}{4}=1-\frac{x^2}{2}.$$

Ha $0<x<2$, akkor $x^2<2x$, azaz $\frac{x^2}{2}<x$, tehát:

$$\cos x>1-\frac{x^2}{2}>1-x.$$

b) Mivel $0<x<\frac{\pi}{2}$, akkor $0<\sin x<\operatorname{tg} x$, ebből következik, hogy:

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x>1-x.$$

Tehát az *a)*-ban igazolt azonosság felhasználásával:

$$x>1-\frac{\sin x}{x}>0.$$

3541 Ismert azonosságok alapján:

$$(1)\ \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad (2)\ 1=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

(1) és (2) összegéből:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},$$

és mivel $\cos\frac{\alpha}{2}\geq 0$, ezért:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

(1) és (2) különbségéből:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

és mivel $\sin\frac{\alpha}{2}\ge 0$, ezért:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

3542 A pontos értékek:

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\qquad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2};\qquad \sin\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$$

3543 Szorozzuk meg a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalát $16\cdot\sin\frac{x}{16}$-tal:

$$16\cdot\sin\frac{x}{16}\cdot\cos\frac{x}{16}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}=\sin x.$$

A $\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ azonosságot négyszer alkalmazva a bal oldalon, éppen a jobb oldalt kapjuk.

3544 Azonosságok alkalmazásával $f(x)$ így írható:

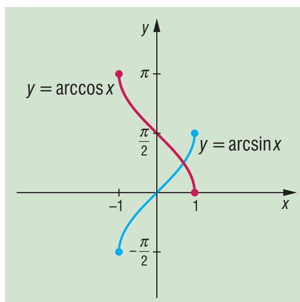
$$f(x)=\sin 5x\cdot\sin 2x.$$

Mivel $0<x<\frac{\pi}{2}$ esetén $\sin 2x>0$, így $f(x)>0$ akkor és csak akkor, ha $\sin 5x>0$. Ez pedig akkor teljesül, ha:

$$0<x<\frac{\pi}{5}\quad\text{és}\quad\frac{2\pi}{5}<x<\frac{\pi}{2}.$$

Inverz függvények – megoldások

3545 Ábrázoljuk az $x\mapsto\arcsin x$ és $x\mapsto\arccos x$, $|x|\le 1$ függvényeket közös koordináta-rendszerben.



Ha $0\le x\le 1$, akkor:

$$\sin\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)=\sqrt{1-x^2},$$

és

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\sqrt{1-x^2},$$

tehát az azonosság első része igaz.

Ha $-1\le x\le 0$, akkor:

$$\sin\left(\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)=\sqrt{1-x^2},$$

és $\frac{\pi}{2}\le\arccos x\le\pi$, ezért:

$$\sin(\arccos x)=\sin(\pi-\arccos x)=\sqrt{1-x^2},$$

tehát az azonosság második része is igaz.

3546 Alkalmazzuk többször a tangensfüggvény addíciós tételét:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)}=$$

$$=\frac{\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}+\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}}}{1-\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}\cdot\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}}}=\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}}=\frac{44+21}{77-12}=1.$$

Mivel $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, és mindkét oldal pozitív, valamint $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb, az azonosság igaz.

3547 A 3545. feladat megoldásakor már láttuk, hogy:

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},\quad \text{ha}\quad -1\le x\le 1.$$

Hasonlóan adódik, hogy:

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},\quad \text{ha}\quad -1\le x\le 1.$$

Mivel $0\le\sqrt{1-x^2}\le 1$, ezért:

$$\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2},$$

és ezt kellett igazolni.

3548 *a)* Mivel:

$$\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5\pi}{14},$$

ezért:

$$\arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)=\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{14}\right)=\frac{5\pi}{14},\qquad \text{hiszen}\qquad 0<\frac{5\pi}{14}<\pi.$$

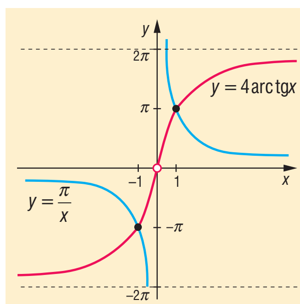
b) Mivel:

$$\cos\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)=-\sin\frac{\pi}{10},$$

ezért:

$$\arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{10}\right)=-\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\pi}{10}.$$

3549 Ábrázoljuk az $x\mapsto 4\cdot\operatorname{arctg}x$, $x\in\mathbb{R}$ és $x\mapsto\frac{\pi}{x}$, $x\ne 0$, $x\in\mathbb{R}$ függvényeket.



Mivel mindkét függvény páratlan, a grafikonjaik szimmetrikusak az origóra.

Az $x\mapsto\frac{\pi}{x}$ $]0;+\infty[$-ban csökken, az $x\mapsto 4\cdot\operatorname{arctg}x$ itt nő, tehát legfeljebb egy gyök van, $x=1$ jó gyök. A páratlanság miatt $x=-1$ is jó gyök, és más gyök nincs.

3550 Az arccos értelmezési tartománya $[-1;\ 1]$, így a következőket kell kikötni:

$$-1 \le 3x \le 1,$$
$$-\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3},$$

valamint:

$$\sqrt{6-15x} \le 1,$$
$$0 \le 6-15x \le 1,$$
$$5 \le 15x \le 6,$$
$$\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{5}.$$

Így csak $x=\frac{1}{3}$ jöhet szóba megoldásként. Ellenőrzés:

$$\arccos 3\cdot\frac{1}{3} = \arccos 1 = 0 \quad \text{és} \quad \arccos\sqrt{6-15\cdot\frac{1}{3}} = \arccos 1 = 0,$$

tehát $x=\frac{1}{3}$ jó megoldás.

3551 Ha $a \le 0$, akkor $x<0$ esetén:

$$\arcsin ax \le \frac{\pi}{2} \le 3\cdot\arccos x + \frac{\pi}{6},$$

míg $x \ge 0$ esetén:

$$\arcsin ax \le 0 \le 3\cdot\arccos x + \frac{\pi}{6},$$

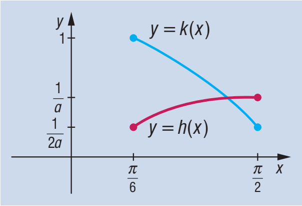
tehát ekkor nincs megoldás.

Ha $a>0$, akkor az

$$f(x) = \arcsin ax,\ |ax| \le 1 \quad \text{és} \quad g(x) = 3\cdot\arccos x + \frac{\pi}{6},\ -1 \le x \le 1$$

grafikonja akkor és csak akkor metszi egymást, ha a megfelelő inverz függvények grafikonjai metszik egymást.

Az inverz függvények:



$$h(x) = \frac{\sin x}{a},$$
$$k(x) = \cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{3}, \quad \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

A h és k függvények grafikonja akkor és csak akkor metszi egymást, ha

$$\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{a} \le \cos 0 = 1, \quad \text{azaz} \quad 0{,}5 \le a \quad \text{és} \quad \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{a} \ge \cos\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{3}, \quad \text{azaz} \quad a \le \frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}},$$

tehát akkor van legalább egy valós gyök, ha

$$0{,}5 \le a \le \frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}.$$

3552 Célszerű először átrendezni az egyenletet:

$$\operatorname{arctg}\frac{x\cdot(2-x)}{5}=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(1-x).$$

Elég azt megnézni, hogy a két oldal tangense mely valós x-re egyenlő. A bal oldal tangensének meghatározásakor a tangens addíciós tételét használjuk:

$$\frac{x\cdot(2-x)}{5}=\frac{1-(1-x)}{1+1\cdot(1-x)},$$

$$\frac{x\cdot(2-x)}{5}=\frac{x}{2-x}.$$

Szóba jöhet $x=0$, ez jó gyök.

Ha $x\neq 0$, akkor:

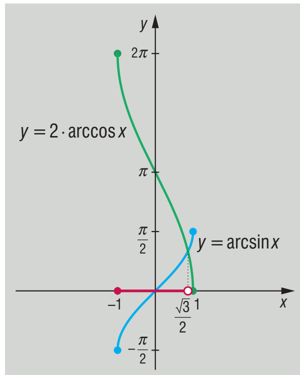
$$(2-x)^2=5,$$

$$x^2-4x-1=0,$$

$$x=2\pm\sqrt{5}.$$

A kapott gyökök kielégítik az egyenletet.

3553 Ábrázoljuk az $x\mapsto \arcsin x$ és $x\mapsto 2\cdot\arccos x$ függvényeket egy koordináta-rendszerben.



Mivel $[-1;\ 1]$-ban az $\arcsin x$ nő, a $2\cdot\arccos x$ csökken, legfeljebb egy metszéspontja van a két grafikonnak. Határozzuk meg a metszéspont x koordinátáját:

$$\arcsin x=2\cdot\arccos x,$$

$$\sin(\arcsin x)=\sin(2\cdot\arccos x),$$

$$x=2\cdot\sin(\arccos x)\cdot x.$$

Mivel $x\neq 0$, eloszthatjuk mindkét oldalt x-szel:

$$1=2\cdot\sqrt{1-x^2},\qquad (x>0)$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az eredeti egyenlőtlenség tehát $-1\le x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ esetén teljesül.

3554 *a)* Mivel $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ezért:

$$\operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)}.$$

Használjuk fel, hogy

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha},\ \text{ha } 0\le\sin\alpha\le 1\quad \text{és}\quad \sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha},\ \text{ha } -1\le\sin\alpha\le 0.$$

Mivel $0\le\arccos x\le\pi$ és $0\le\sin(\arccos x)\le 1$, ezért:

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}.$$

Tehát:

$$\operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\qquad \text{ha } |x|\le 1,\ x\neq 0.$$

b) Mivel $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$, ha $x \in \mathbb{R}$, ezért:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) > 0.$$

Másrészt:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \qquad \text{tehát} \qquad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Ezért:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$