12.4. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Geometriai valószínűség – megoldások

4512 *a)* $p = \frac{4}{10} = 0,4.$

b) Nem, a végpont nem befolyásolja az intervallum hosszát.

4513 –

4514 *a)* $p = \frac{4}{9} \approx 0,44;$ *b)* $p = \frac{5}{8} = 0,625;$ *c)* $p = \frac{1+1}{6} \approx 0,33.$

4515 *a)* $p = \frac{4}{9} \approx 0,44;$ *b)* $p = \frac{5}{9} \approx 0,56.$

4516 $p = 0,7 = \frac{x}{7}$, így $x = 4,9$. I-nek 4,9 hosszú intervallumnak kell lennie. Pl. $[8;\ 12,9]$.

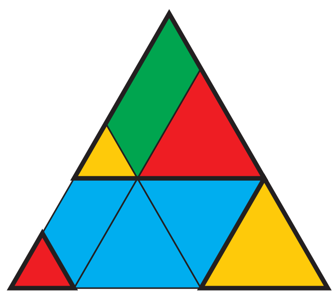
4517 $p = \frac{18}{19} - \frac{11}{20} = \frac{151}{380} \approx 0,3974.$

4518 $p = \frac{12 - 5 \cdot 0,8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0,67.$

4519 $p = \frac{5 \cdot 15 - 2 \cdot 3^2}{5 \cdot 15} = \frac{57}{75} = 0,76.$

4520 *a)* $P_{\text{bull}} = \frac{1,5^2 \cdot \pi}{16,75^2 \cdot \pi} \approx 0,008;$ *b)* $P_{\text{bull's eye}} = \frac{0,75^2 \cdot \pi}{16,75^2 \cdot \pi} \approx 0,002.$

4521 Tekintsük az ablak nyitott (kék) részén kívüli darabokat.



I. megoldás: Ezek három, az eredetihez hasonló háromszöget alkotnak. A szöveg alapján tudjuk, hogy a kis háromszögek oldalai feleakkorák, mint egy nagyobb háromszög oldala. Mivel két nagyobb és egy pici háromszög oldala kiadja az ablak alsó oldalát, így a kis piros háromszög oldala éppen $\frac{1}{5}$-e, a sárga nagyobb háromszög oldala $\frac{2}{5}$-e, míg a felső színes háromszög oldala $\frac{3}{5}$-e az ablak oldalának. A hasonlóságnál igazoltak alapján (hasonló alakzatok területei a hasonlósági arány négyzetével arányosak):

$$P_{(\text{betöri az ablakot})} = \frac{T_{\text{nem kék}}}{T_{\text{ablak}}} = \frac{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25}}{1} = \frac{14}{25} = 0,56.$$

II. megoldás: A feladatot átdarabolással is megoldhatjuk. Számoljuk össze, hogy a bal alsó kis piros háromszöget hányszor mérhetjük fel az ábra többi alkotóelemére. (A hasonlóság miatt ezt megtehetjük.)

4522 Gyakorlatilag nyolc sávot látunk a táblán a középkört is beleértve, így a tábla sugara 16 cm. Bármely sáv területét megkapjuk, ha a külső határoló kör területéből kivonjuk a belső határoló kör területét.

a) $p=\dfrac{2^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}015625;$ *b)* $p=\dfrac{4^2\cdot\pi-2^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}046875;$

c) $p=\dfrac{8^2\cdot\pi-6^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}109375;$ *d)* $p=\dfrac{12^2\cdot\pi-10^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}171875;$

e) $p=\dfrac{6^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}140625;$ *f)* $p=1-\dfrac{10^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}609375;$

g) $p=\dfrac{12^2\cdot\pi-4^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}=0{,}5.$

h) Két dobásból 15 pontot úgy érhetünk el, ha 9-et és 6-ot, vagy 6-ot és 9-et, vagy 8-at és 7-et, vagy 7-et és 8-at dobunk:

$$P(9\text{ és }6\quad\text{vagy}\quad 6\text{ és }9)=2\cdot\frac{4^2\cdot\pi-2^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}\cdot\frac{10^2\cdot\pi-8^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}\approx 0{,}01318,$$

$$P(8\text{ és }7\quad\text{vagy}\quad 7\text{ és }8)=2\cdot\frac{6^2\cdot\pi-4^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}\cdot\frac{8^2\cdot\pi-6^2\cdot\pi}{16^2\cdot\pi}\approx 0{,}01708.$$

A két eredmény összege adja a kérdésre a választ: $p\approx 0{,}03$.

4523 Először számítsuk ki a dupla 20 és a tripla 20 pontszámot adó részek területeit:

$$T_{\mathrm{D20}}=\frac{16{,}75^2\cdot\pi-15{,}75^2\cdot\pi}{20}\approx 5{,}105\ \mathrm{cm}^2,$$

$$T_{\mathrm{T20}}=\frac{10{,}75^2\cdot\pi-9{,}75^2\cdot\pi}{20}\approx 3{,}22\ \mathrm{cm}^2.$$

Ezek után könnyebb kiszámítani a sima 20 pontot érő területet:

$$T_{20}=\frac{15{,}75^2\cdot\pi-1{,}5^2\cdot\pi}{20}-T_{\mathrm{T20}}\approx 38{,}61-3{,}22=35{,}39\ \mathrm{cm}^2.$$

Fel vagyunk vértezve a valószínűségek kiszámításához szükséges adatokkal.

a) $P(\mathrm{D20})=\dfrac{T_{\mathrm{D20}}}{T_{20}+T_{\mathrm{D20}}+T_{\mathrm{T20}}}\approx 0{,}1168;$ *b)* $P(\mathrm{T20})=\dfrac{T_{\mathrm{T20}}}{T_{20}+T_{\mathrm{D20}}+T_{\mathrm{T20}}}\approx 0{,}0737.$

c) Az előző pontból:

$$P(20)=1-P(\mathrm{D20})-P(\mathrm{T20})\approx 0{,}8096.$$

Két nyíllal 80 pontot úgy szerezhet Dávid, ha két dupla 20-at, vagy egy tripla és egy sima 20-at, vagy egy sima és egy tripla 20-at dob. Valószínűségeik összege:

$$P(80\text{ pont})=P(\mathrm{D20})\cdot P(\mathrm{D20})+2\cdot P(20)\cdot P(\mathrm{T20})\approx 0{,}1328.$$

4524 Írjuk fel a valószínűséget. Jelölje a kis kör sugarát r, a nagy körét R. Ekkor:

$$P=\frac{r^2\cdot\pi}{R^2\cdot\pi}=0{,}01,$$

innen $r=0{,}1\cdot R$.

Tehát a középkör sugara 10%-a kell, hogy legyen a tábla sugarának.

4525 Írjuk fel a másodfokú egyenlet megoldóképletét, egyszerűsítsünk 2-vel:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4c}}{2}=2\pm\sqrt{4-c}.$$

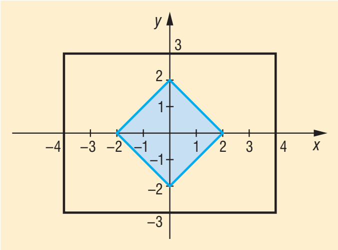
Természetesen akkor lesz mindkét megoldás 1-nél nagyobb, ha a kisebb gyök is nagyobb 1-nél:

$$2-\sqrt{4-c}>1.$$

Megoldását a $c>3$ valós számok adják. Így a keresett valószínűség:

$$p=\frac{1}{6}.$$

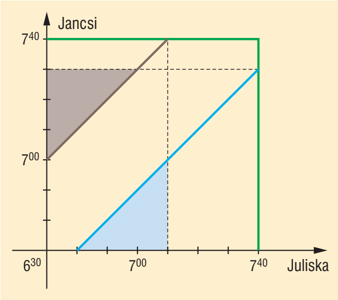
4526 Keressük meg azokat a pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek kielégítik az egyenlőtlenséget. Az ábrán ezeket a pontokat látjuk a téglalappal együtt.



A valószínűséget a területek mértékéből meghatározhatjuk:

$$p=\frac{4\cdot 2}{8\cdot 6}=\frac{1}{6}.$$

4527 Képzeljük el egy koordináta-rendszerben a fürdőbe lépések lehetséges időpontjait. Jancsi és Juliska 6^{30}-kor kelnek és 7^{40}-kor hagyják el a házat. Tehát e két időpont között tartózkodhatnak a fürdőszobában (ábrán zöld négyzet). Mivel Juliskának 30 perc szükséges, hogy elkészüljön, legkésőbb 7^{10}-kor meg kell kezdenie a szépítkezést (függőleges szaggatott vonal és attól balra). Jancsinál ez az idő 10 perc, így ő ráér akár még 7^{30}-kor is bemenni a fürdőbe (vízszintes szaggatott vonal és attól lefelé). Így az eseménytér a tengelyek és a szaggatott vonalak közé eső téglalap alakú terület.



Ha Jancsi 6^{30}-kor megy a fürdőbe, akkor Julisnak 6^{40}-től szabad a pálya. Ha Jancsi 6^{40}-kor lép be, akkor Julis 6^{50}-től mehet, stb. Ezeket a belépési pontokat a kék terület mutatja. Ha Julis lép be először rögtön ébredés után, akkor Jancsi csak 7^{00}-tól mehet be. Ha Julis csak 6^{40}-kor megy be, akkor Jancsinak várnia kell 7^{10}-ig stb. Ezt a barna részen látjuk.

Örömmel akkor vesznek búcsút, ha nem veszekedtek, azaz ha a fürdőre nem kellett várniuk. Ennek a valószínűségét a háromszögek területeinek összege és a téglalap területének aránya adja meg. A két háromszögből készíthetünk egy négyzetet:

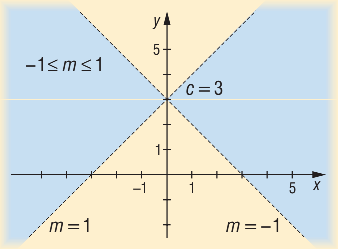
$$P(\text{öröm és boldogság})=\frac{3\cdot 3}{6\cdot 4}=0{,}375.$$

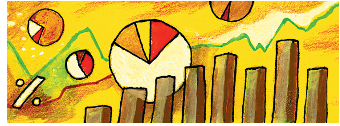
Hát ez bizony nem túl sok… Érdemes lenne valami rendszert vinniük a reggeli készülődésbe.

4528 Az egyenletben m jelöli az egyenes meredekségét, c pedig a függőleges eltolás mértékét.

Keressünk olyan egyeneseket, melyek kielégítik a metszésre kapott feltételt.

Például ha $c=3$ lenne, akkor m értékét a $[-1;\,1]$ intervallumból választhatnánk tetszőlegesen. (Ez azonban nem felel meg a feladat megoldásának, hiszen c értéke nem lehet 2-nél nagyobb.)

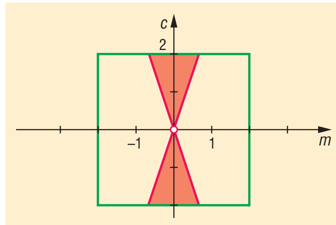




Ha $c = 2$, akkor m legalább $-\frac{2}{3}$, legfeljebb $\frac{2}{3}$ lehet.

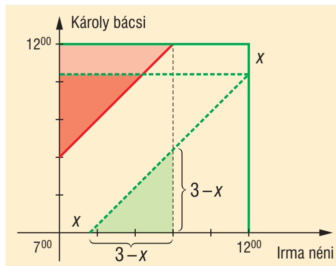
Ha $c = 1$, akkor m legalább $-\frac{1}{3}$, legfeljebb $\frac{1}{3}$ lehet. Hasonlóan kapjuk a negatív c-re adódó értékeket. Érdekes módon, ha $c = 0$, akkor m nem vehet fel értéket, hiszen bárhogy is adjuk meg, az egyenes metszeni fogja a $[-3; 3]$ intervallumon az x tengelyt.

Ábrázoljuk egy $m-c$ koordináta-rendszerben a lehetséges és a feltételeknek megfelelő paramétereket. Ezt látjuk a jobb oldali ábrán, a piros színű rész a számunkra kedvező. A kérdezett valószínűség:



$$p = \frac{4 \cdot \frac{2}{3}}{4 \cdot 4} = \frac{1}{6}.$$

4529 Képzeljük el a konyhába való belépési időpontokat egy derékszögű koordináta-rendszerben. Jelöljük az abszcisszatengelyen Irma néni, az ordinátatengelyen Károly bácsi belépésének idejét. A tengelyeken mérjük az egységet órában. Irma néniről ismert, hogy 2 órát tölt a konyhában, Károly bácsi ottlétének hosszát jelölje x. x nem lehet kisebb 0-nál és nem lehet nagyobb 3-nál, hiszen akkor már biztosan rányit egyikük a másikra. Azt is tudjuk, hogy Irma néninek legkésőbb 10^{00}-kor el kell kezdeni a főzést (függőleges szaggatott vonal).



A piros színű rész azokat a pontokat jelöli, amikor Károly bácsi beléphet a konyhába Irma néni után. Ezt biztosan ismerjük. Nem ismerjük x értékét. Annyit tudunk, hogy x befolyásolja az alsó zöld háromszög területét, illetve magát az eseményteret is (a tengelyek és a velük párhuzamos szaggatott vonalak által határolt téglalap). A zöld háromszögből és a piros háromszögnek az eseménytérbe eső részéből össze tudunk állítani egy $(3 - x)$ oldalú négyzetet. Az eseménytér egyik oldala biztosan 3 (Irma néni konyhában töltött ideje miatt). Írjuk fel a területegységek hányadosát x függvényében:

$$P(\text{nem zavarják egymást}) = \frac{(3-x)^2}{3 \cdot (5-x)}.$$

Most próbáljunk meg válaszolni a kérdésekre.

a) Ha azt szeretnénk, hogy 0,5-nél kisebb valószínűséggel kapjanak össze, akkor 0,5-nél nagyobbá kell tenni az előző valószínűséget. Szorozzunk a nevezővel (mivel $0 \le x < 3$, az egyenlőtlenség iránya nem változik), majd rendezzünk egy oldalra:

$$\frac{(3-x)^2}{3 \cdot (5-x)} > 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad (3-x)^2 > 1{,}5 \cdot (5-x) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4{,}5x + 1{,}5 > 0.$$

Innen:

$$x_{1,2} = \frac{4{,}5 \pm \sqrt{4{,}5^2 - 4 \cdot 1{,}5}}{2}, \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 0{,}36 \quad \text{és} \quad x_2 \approx 4{,}14.$$

Feltételeinknek csak a kisebb érték felel meg. Mivel a másodfokú kifejezés egy felfelé nyíló parabola, így az egyenlőtlenség megoldása:

$$0 \le x < 0{,}36.$$

Azaz ha Károly bácsi 0,36 óránál (kb. 21 perc és 36 másodpercnél) kevesebb időt tölt el a konyhában, akkor 50%-nál nagyobb valószínűséggel kevesebb hangos szó hallatszik.

b) Annál kisebb a másik megzavarásának valószínűsége, minél nagyobb a $p = \dfrac{(3-x)^2}{3\cdot(5-x)}$ kifejezés értéke. Vizsgáljuk a kifejezést a $0 \le x < 3$ intervallumon. Néhány érték behelyettesítése után azt sejtjük, hogy $x = 0$-ra kapjuk a legnagyobb értéket, mégpedig $p_{max} = \dfrac{3}{5}$. Hogyan igazolhatnánk ezt?

Azt mutatjuk meg, hogy p a p_{max} értéknél csak kisebb lehet minden $0 < x < 3$ esetén:

$$\frac{(3-x)^2}{3\cdot(5-x)} < \frac{3}{5}.$$

Tüntessük el a törteket, majd fejtsük ki a zárójelet, és rendezzük az egyenlőtlenséget egy oldalra (pozitív számmal szorzunk):

$$5\cdot(3-x)^2 < 9\cdot(5-x),$$
$$45 - 30x + 5x^2 < 45 - 9x,$$
$$5x^2 - 21x < 0,$$
$$x\cdot(5x-21) < 0.$$

Megoldása:

$$0 < x < 4{,}2 \quad \text{(egyenes állású parabola).}$$

Mivel $]0;\,3[\; \subset \;]0;\,4{,}2[$, ezért valóban teljesülnek a fenti egyenlőtlenségek.

Végeztünk: Irma néniék akkor vesznek össze a legkisebb,

$$1 - p_{max} = \frac{2}{5}$$

valószínűséggel a konyha használatán, ha Károly bácsi 0 órát tölt el ott, azaz a konyha közelébe sem megy.

Megjegyzés: Ezt Irma néni a fenti példa megoldása nélkül is nagyon jól tudja.

Várható érték (emelt szintű tananyag) – megoldások

4530 $M = 0{,}1\cdot1 + 0{,}2\cdot(-2) + 0{,}3\cdot3 + 0{,}4\cdot(-4) = -1$. Nem érdemes a játékban részt venni.

4531 $M = 0{,}4\cdot1 + 0{,}3\cdot(-2) + 0{,}2\cdot3 + 0{,}1\cdot(-4) = 0$. Igen, érdemes a játékban részt venni.

4532 $M = \dfrac{1}{6}\cdot1 + \dfrac{1}{6}\cdot2 + \dfrac{1}{6}\cdot3 + \dfrac{1}{6}\cdot4 + \dfrac{1}{6}\cdot5 + \dfrac{1}{6}\cdot6 = \dfrac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6) = \dfrac{21}{6} = 3{,}5.$

4533 *a)* $M_A = \dfrac{1}{2}\cdot(-10) + \dfrac{1}{2}\cdot8 = -1;$ *b)* $M_B = \dfrac{1}{2}\cdot10 + \dfrac{1}{2}\cdot(-8) = 1.$

4534 $M = \dfrac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}\cdot1145 + \dfrac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\cdot17690 + \dfrac{\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}\cdot2127600 + \dfrac{\binom{5}{5}\cdot\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}\cdot675000000 \approx 75{,}5$ Ft.

$75{,}5 - 225 = -149{,}5$. Nem érte meg.

4535 *a)* Az első pörgetéskor akkor éri el a legnagyobb pontnövekedést, ha 3000-et forgat. Ezután viszont mindig kétszer a duplázót kell kiforgatnia, azaz maximum 20 000 pontot érhet el.

b) A keréken nyolc mező van és feltételezzük, hogy nem csalnak a játékban, azaz minden mezőnek ugyanakkora a valószínűsége. A duplázó 2000-rel növeli, a felező 1000-rel, a negyedelő 1500-zal, a nullázó 2000-rel csökkenti a pontszámot, ezért a pörgetéskor várhatóan kapható pontszám:

$$M = \frac{1}{8}\cdot(-2000) + \frac{1}{8}\cdot(-1500) + \frac{1}{8}\cdot(-1000) + \frac{1}{8}\cdot(-1000) +$$
$$+\frac{1}{8}\cdot 1000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 + \frac{1}{8}\cdot 3000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 = 312{,}5.$$

A forgatás után a játékosnak sok ilyen helyzetet tekintve átlagosan

$$2000 + 312{,}5 = 2312{,}5$$

pontja lesz.

c) Ha lenullázta magát, akkor a számára negatív mezőket nem kell figyelembe venni, hiszen ennél kevesebb pontja nem lehet. Hasonló a helyzet a duplázóval is. Így:

$$M = \frac{1}{8}\cdot 1000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 + \frac{1}{8}\cdot 3000 = 750.$$

Sok ilyen szituáció után körülbelül 750 pont lesz a pontjainak átlaga.

d) 10 000 pont esetén a duplázó ugyanennyivel növeli a pontok számát, illetve a felező 5000-rel, a negyedelő 7500-zal, a nullázó 10 000-rel csökkenti a pontokat. Tehát:

$$M = \frac{1}{8}\cdot(-10000) + \frac{1}{8}\cdot(-7500) + \frac{1}{8}\cdot(-5000) + \frac{1}{8}\cdot(-1000) +$$
$$+\frac{1}{8}\cdot 1000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 + \frac{1}{8}\cdot 3000 + \frac{1}{8}\cdot 10000 = -937{,}5.$$

Ebben a szituációban (sok játék átlagát tekintve) a játékos pontszáma $10\,000 - 937{,}5 = 9062{,}5$ pontra csökken. Úgy tűnik, hogy minél több pontja van egy játékosnak, az arányosan csökkentő és a nullázó mezők annál jobban csökkentik a pontjait.

4536 A játékos nyereményét a játék árának kell egyensúlyba hozni. Azaz akár a játékos, akár a játékot szervező Dani várható nyereménye 0 kell, hogy legyen. Mivel a játékos nyereménye $\frac{1}{3}\cdot 6 = 2$ játékeuró, ezért a játék árának is 2 eurót kell választani. (Az egyiket minden fordulóban „megnyeri” valamelyik fél, a másikat „elveszíti”.)

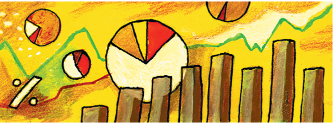
4537 Tekintsük Balázs szempontjából a bevételeket és a kiadásokat. A játék ára (2 euró) Balázsnál marad, ha a játékra befizető veszít. Ha a játékos nyer, akkor 6 eurót fizet neki Balázs. Ez csak 4 euró veszteség Balázsnak, hiszen előtte 2 euróért a játékos megvette a játékot. A két esemény közül az egyik biztosan bekövetkezik: ha egyiknek x valószínűséget tulajdonítunk, akkor a másik $(1 - x)$ valószínűséggel következik be.

A kérdés: hogyan válasszuk meg a valószínűségeket, hogy a játék várható értéke Balázs szempontjából 1 legyen?

Írjuk fel a várható értéket:

$$(1 - x)\cdot 2 + x\cdot(-4) = 1, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{1}{6}.$$

Tehát Balázsnak úgy kell meghirdetnie a játékot, hogy a játékos csak egy dobott szám esetén nyerjen. Például a hatos dobásra fizet nyereményt, a többire nem.



4538 Tegyük fel, hogy a kezdőcsapat 10 tagjából x fő rutinos. Ekkor $(10-x)$ fő tapasztalatlan. Azt szeretnénk, ha várhatóan legalább hat fő berúgná a tizenegyest:

$$0{,}8x + 0{,}25 \cdot (10 - x) \geq 6,$$
$$0{,}55x \geq 3{,}5,$$
$$x \geq 6{,}36.$$

Ezek szerint legalább hét tapasztalt játékosnak kell lennie a csapatban.

4539 *a)* Nyilván akkor éri meg a játékosnak, ha a játék várható értéke pozitív. A várható értéket növeljük, ha a játékos számára kedvezőtlen (negatív) nyereményeket a kisebb valószínűségű, a kedvező (pozitív) nyereményeket a nagyobb valószínűségű esetekhez rendeljük. Például:

$$P(-4) = 0{,}2; \quad P(-2) = 0{,}1; \quad P(3) = 0{,}3; \quad P(1) = 0{,}4$$

esetén a várható érték már pozitív:

$$M = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot (-2) + 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot (-4) = 0{,}3.$$

b) A legnagyobb várható érték akkor lehetséges, ha a legkedvezőtlenebb esethez (-4) rendeljük a legkisebb valószínűséget, majd a következőhöz a következőt stb.:

$$P(-4) = 0{,}1; \quad P(-2) = 0{,}2 \quad \text{és} \quad P(3) = 0{,}4; \quad P(1) = 0{,}3.$$

Ekkor a várható nyeremény:

$$M = 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot (-2) + 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot (-4) = 0{,}7.$$

4540 *a)* Egy vaníliás krémtúrót a visszatevés nélküli esetet tekintve legalább elsőre vagy legfeljebb hetedikre vehetünk ki a dobozból. Annak a valószínűsége, hogy elsőre ilyen kerül a kezünkbe, 0,4. Tekintsünk egy közbülső esetet, például azt, ha negyedikre vesszük ki a vaníliást: ebben az esetben elsőre, másodikra, harmadikra meggyest vagy kekszest kell kivennünk:

$$P(\text{negyedik a vaníliás}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \approx 0{,}0952.$$

Összesen hét eset lehet, valószínűségeik az előzőhöz hasonlóan írhatók fel. A várható érték:

$$M = \frac{4}{10} \cdot 1 + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2 + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot 3 + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot 4 + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot 5 +$$
$$+ \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot 6 + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot 7 \approx 2{,}2.$$

Ha a dobozban 4 vaníliás, 2 meggyes és 4 kekszes krémtúró van, akkor visszatevés nélkül várhatóan másodikra veszünk ki vaníliást.

b) Ha visszatesszük a kivett krémtúrókat, akkor a húzások között nem változnak a valószínűségek értékei. Vagyis a vaníliás kivételének valószínűsége 0,4; a nem vaníliásé minden esetben 0,6. Rossz hír, hogy húzhatunk folyamatosan nem vaníliásat, tehát akár végtelen sok esetünk is lehetséges. Annak a valószínűsége, hogy csak negyedikre vesszük ki kedvencünket:

$$P(\text{negyedik a vaníliás}) = 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}0864.$$

Az első 10 tagot kiszámítva a várható érték:

$$M = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 \cdot 4 + 0{,}6^4 \cdot 0{,}4 \cdot 5 +$$
$$+ 0{,}6^5 \cdot 0{,}4 \cdot 6 + \ldots + 0{,}6^9 \cdot 0{,}4 \cdot 10 \approx 2{,}42.$$

(Ha az első 200 tagot írjuk fel, a várható érték akkor is csak 2,5-nek adódik.) Várhatóan másodikra vagy harmadikra fogjuk kivenni kedvenc krémtúrónkat.

Megjegyzés: Bizonyítható, hogy minden tagot számba véve az összeg 2,5-nek adódik.

4541 *a)* Jelölje x a játékos éppen aktuális pontszámát $(0 \le x)$. Ekkor a duplázó x, a nullázó $-x$, a negyedelő $\left(-\frac{3x}{4}\right)$, a felező $\left(-\frac{x}{2}\right)$ „megnyert" pontot jelent. A várható érték x függvényében:

$$M(x) = \frac{1}{8}\cdot(-x) + \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{3\cdot x}{4}\right) + \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\cdot(-1000) + \frac{1}{8}\cdot 1000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 + \frac{1}{8}\cdot 3000 + \frac{1}{8}\cdot x =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left(5000 - \frac{5}{4}\cdot x\right) = 625 - \frac{5}{32}\cdot x.$$

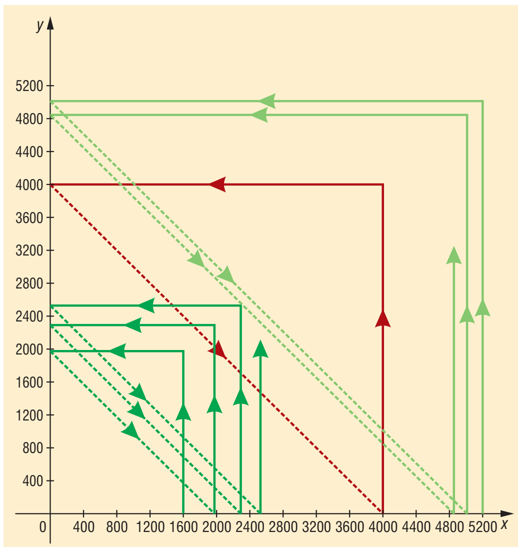
Ez a várható érték azonban csak akkor számítható, ha a játékosnak van pontja. Ugyanis 0 pont esetén az előző szerencsekerekes feladat *c)* pontjában kiszámított 750 pont várható.

A játékosnak eredetileg x pontja volt, ezt növelte/csökkentette a fenti értékkel. Így most pontjainak száma:

$$\text{összpontszám} = \begin{cases} x + 625 - \dfrac{5}{32}\cdot x = \dfrac{27}{32}\cdot x + 625, & \text{ha} \quad x > 0,\\ 750, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ez nem befolyásolja nagymértékben a játék kimenetelét, hiszen ha $x = 1$, akkor várhatóan 626 pont lesz a kerék megforgatása után.

b) Az előző pontban kiszámolt $M(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő lineáris függvény, zérushelye $x = 4000$. Ez az a pontszám, amellyel ha rendelkezik a játékos, akkor a játék igazságos.



Ha ennél több ponttal rendelkezik, akkor a játék a játékos számára kedvezőtlen, hiszen nagy átlagban levonnak tőle valamennyi pontot.

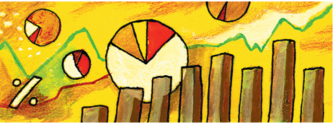
Ha 4000 pontnál kevesebbet gyűjt, akkor a játék kedvező a játékos számára, hiszen a várható érték pozitív. Sőt: minél jobban eltérünk ettől az értéktől, annál többet nyer vagy veszít.

Így már az is világos, hogy

– a legnagyobb várható nyereménye miért akkor van a játékosnak, amikor éppen lenullázta magát;

– ha elég sokáig játszik a játékos, akkor a nyereménye 4000 pont körül lesz. Ezt a várható értékből megállapított függvény alapján szemléltethetjük is. Az x tengelyen az aktuális pontszámot, az y tengelyen a forgatás utáni (várható) pontszámot jelöljük.

Ha például 1600 pontja van, akkor várhatóan 1975 pontja lesz. Az 1975 pontról újra forgatva 2291,4. Erről 2258,4 stb. Mindig közelebb kerül a 4000 ponthoz (sötétzöld töröttvonal, a haladási irányt a nyilak mutatják). Ha azonban 5200 pontja van, akkor várhatóan 5012,5 pontja lesz a kerék pörgetése után. Újra forgatva már csak 4854,3 stb. (világoszöld vonalak). Az egyetlen stabil helyzet az ábrán is 4000 pont (önmagába visszatérő bordó töröttvonal).



Statisztika – megoldások

4542 95 fő.

4543 Legalább az 5. helyre.

4544 5,5.

4545 *a)* 20 euró. *b)* 3 darab.

4546 5 percet.

4547 *a)* 50; *b)* 51.

4548 *a)* Jeles. *b)* Jó.

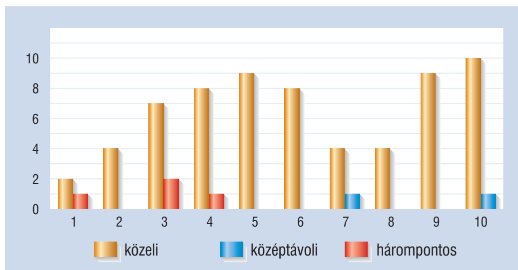
4549 65,4 m^3.

4550 *a)* 9 mm; *b)* 3 mm.

4551 9.

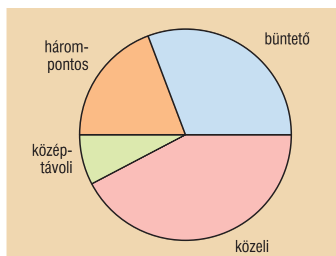
4552 $\dfrac{4+4+7+x+11}{5}=7$, ahonnan $x=9$. A keresett minta: 4, 4, 7, 9, 11.

4553 A keresett oszlopdiagram:

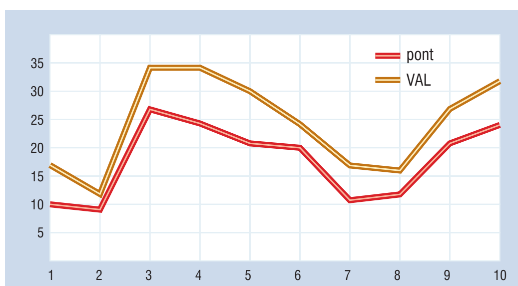


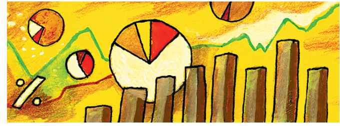
4554 Mivel $2ZK + 2KK + 3PK + BDK = 360°$, így:

$$2ZK \approx 152{,}3°;$$
$$2KK \approx 27{,}7°;$$
$$3PK \approx 69{,}2°;$$
$$BDK \approx 110{,}8°.$$

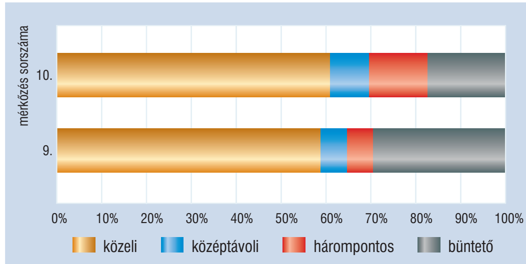


4555 Látható, hogy Roland értékét elsősorban a dobott pontok száma határozza meg, ez teszi ki a VAL-pontszám legnagyobb részét.





4556 Roland a 10. mérkőzésen az előzőhöz viszonyítva bátrabban próbálkozott a középtávoli, és méginkább a távoli dobásokkal.



4557 *a)* A legnagyobb és legkisebb érték alapján az osztályköz:

$$\frac{27-9}{3}=6.$$

Nagyon jó mérkőzés	(22–28)	3
Jó mérkőzés	(15–21)	3
Közepes mérkőzés	(8–14)	4

b) $A=\dfrac{10+9+27+24\cdot 2+21\cdot 2+20+11+12}{10}=17{,}9.$

c) $A_{\text{gyt}}=\dfrac{4\cdot 11+3\cdot 18+3\cdot 25}{10}=17{,}3.$

d) Az eltérés $0{,}6$. Oka, hogy több érték is felső kategóriahatár közelébe esik (21, 27).

4558 *a)* A legnagyobb és legkisebb érték alapján az osztályköz:

$$\frac{100-50}{4}=12{,}5.$$

I. kategória	(88–100,5)	2
II. kategória	(75–87,5)	2
III. kategória	(62–74,5)	0
IV. kategória	(49–61,5)	6

b) $A=\dfrac{75+3\cdot 50+88+83+2\cdot 60+57+100}{10}=67{,}3\%.$

c) $A_{\text{gyt}}=\dfrac{2\cdot 94{,}25+2\cdot 81{,}25+6\cdot 55{,}25}{10}=68{,}25\%.$

d) Az eltérés minimális: $0{,}95\%$. Mivel több volt a kategória, kisebbek lettek az eltérések a kategóriaközepektől.

4559 *a)* Jelölje R a terjedelmet:

$$R_{\text{Kb}}=1-0=1 \quad \text{és} \quad R_{3\text{P}\%}=100-0=100\%.$$

Nem tudtunk meg fontos adatot.

b) Első minta:

$$0\%,\ 0\%,\ 0\%,\ 0\%,\ 0\%,\ 0\%,\ 0\%,\ 0\%,\ 0\%,\ 100\%.$$

$A_{\text{első}}=10\%.$

Második minta:

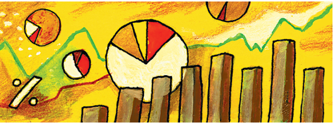
$$0\%,\ 100\%,\ 100\%,\ 100\%,\ 100\%,\ 100\%,\ 100\%,\ 100\%,\ 100\%,\ 100\%.$$

$A_{\text{második}}=90\%.$

4560 *a)* $A_{\text{idő}}=\dfrac{18+27+29+31+40+30+23+22+35+36}{10}=29{,}1$ perc.

b) $s_{\text{idő}}=\sqrt{\dfrac{(18-A)^2+(27-A)^2+(29-A)^2+(31-A)^2+(40-A)^2+(30-A)^2+(23-A)^2+(22-A)^2+(35-A)^2+(36-A)^2}{10}}\approx 6{,}49.$

c) $I=\,]29{,}1-6{,}49;\ 29{,}1+6{,}49[\,=\,]22{,}61;\ 35{,}59[$. Az intervallumba hat érték esik.



4561 *a)* A rangsorba rendezett adatok:

9, 10, 11, 12, 20, 21, 21, 24, 24, 27.

$Me_{\mathrm{Pt}} = 20{,}5.$

b) $\mathrm{AE}_{\mathrm{Pt}} = \dfrac{|9-Me|+|10-Me|+|11-Me|+|12-Me|+|20-Me|+2\cdot|21-Me|+2\cdot|24-Me|+|27-Me|}{10} = 5{,}5.$

c) $I = \,]20{,}5 - 5{,}5;\ 20{,}5 + 5{,}5[\, = \,]15;\ 26[.$ Az adatok közül öt esik a megadott intervallumba.

4562 *a)* Az eladott labdák, a kapott blokkok és a faultok a csapat szempontjából rosszak. Így ezeknél minél kisebb mutatót kell keresni, a többinél minél nagyobbat.

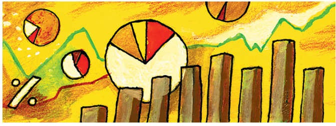
b) Az egyszerűbb döntés kedvéért készítsünk a rangsorokról is táblázatot. Mindegyik esetben adjuk meg mindhárom mutatót (A = átlag, Me = medián, Mo = módusz). A vastagon szedett mutatót választjuk.

Tám	1	1	2	3	3	3	4	4	4	4
Véd	2	2	3	4	4	4	5	5	6	7
ÖL	1	3	4	7	7	7	7	9	9	10
F	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
KF	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5
Bl	1	1	1	2	2	2	2	4	4	5
Kb	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
El	0	0	0	0	1	1	3	3	5	5
Sz	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3
Gp	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2

Támadólepattanók:	$A = 2{,}9$;	$Me = 3$;	$\boldsymbol{Mo = 4.}$
Védőlepattanók:	$\boldsymbol{A = 4{,}2;}$	$Me = 4$;	$Mo = 4.$
Összes lepattanó:	$\boldsymbol{A = 6{,}4;}$	$\boldsymbol{Me = 7;}$	$\boldsymbol{Mo = 7.}$
Faultok:	$A = 3$;	$Me = 3$;	$\boldsymbol{Mo = 2.}$
Kiharcolt faultok:	$A = 3{,}2$;	$Me = 3{,}5$;	$\boldsymbol{Mo = 4.}$
Blokkok:	$\boldsymbol{A = 2{,}4;}$	$Me = 2$;	$Mo = 2.$
Kapott blokkok:	$A = 0{,}3$;	$\boldsymbol{Me = 0;}$	$\boldsymbol{Mo = 0.}$
Eladott labdák:	$A = 1{,}8$;	$Me = 1$;	$\boldsymbol{Mo = 0.}$
Szerzett labdák:	$A = 1{,}8$;	$\boldsymbol{Me = 2;}$	$Mo = 2.$
Gólpasszok:	$A = 0{,}9$;	$\boldsymbol{Me = 1;}$	$Mo = 0.$

4563 Készítsünk rangsort.

2Z%	64	67	67	67	71	80	80	90	90	100
2K%	0	0	0	0	0	0	0	0	50	100
3P%	0	0	0	0	0	0	0	33	40	100
BD%	50	50	50	57	60	60	75	83	88	100



2Z%:	$\mathbf{A = 77,6\%}$;	$Me = 75,5\%$;	$Mo = 67\%$.
2K%:	$\mathbf{A = 15\%}$;	$Me = 0\%$;	$Mo = 0\%$.
3P%:	$\mathbf{A = 17,3\%}$;	$Me = 0\%$;	$Mo = 0\%$.
BD%:	$\mathbf{A = 67,3\%}$;	$Me = 60\%$;	$Mo = 50\%$.

Bármelyik dobószázalékot is tekintjük, a számtani átlagot érdemes közzétenni. Mindegyik esetben ez a legnagyobb érték, majd ennél kisebb a medián, végül a módusz.

4564 *a)* A számtani átlag $85,25$, ez kerekítve 85 pont.

b) A minta módusza a leggyakoribb elem: 83. A rangsorba rendezett minta mediánja a két középső elem átlaga, ez 84,5. A minta terjedelme: $94 - 76 = 18$.

c) Az osztályközt válasszuk $18:3 = 6$-nak. Így az ábrán látható gyakorisági táblát kapjuk.

A kategória felső határa nem tartozik a kategóriához, kivéve a C kategóriát.

***A* kategória**	(76–82)	2
***B* kategória**	(82–88)	3
***C* kategória**	(88–94)	3

d) A keresett diagram az ábrán látható.

4565 Alkossák az n elemű mintát az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatok. Ekkor a minta átlaga:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

a) Ha az elemeket kicseréljük $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$-re, akkor A' átlaguk:

$$A' = \frac{x_1 + b + x_2 + b + \ldots + x_n + b}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n \cdot b}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + b = A + b.$$

b) Ha az elemeket kicseréljük $c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n$-re, akkor A'' átlaguk:

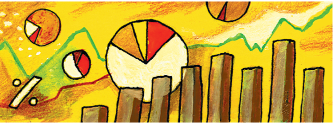
$$A'' = \frac{c \cdot x_1 + c \cdot x_2 + \ldots + c \cdot x_n}{n} = \frac{c \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} = c \cdot \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = c \cdot A.$$

4566 Tételezzük fel, hogy az eredeti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatokból álló n elemű rangsor módusza $Mo = x_m$ $(1 \le m \le n)$, mediánja Me.

Vegyük észre, hogy a módusz nem az elemek nagyságához, hanem az elemek előfordulásához kapcsolódik, a medián pedig az elem rangsorban elfoglalt helyzetéhez! A medián páratlan sok elem esetén $(n = 2k + 1)$ a „középső" elem $(Me = x_{k+1})$, páros sok szám esetén a „középső kettő" elem átlaga $\left(Me = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$.

a) Legyen az új minta $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$. Az elemekhez hozzáadott b valós szám sem a gyakoriságukon, sem a rangsorban elfoglalt helyzetükön nem változtat. Így az új módusz:

$$Mo' = x_m + b = Mo + b.$$



Páratlan elemszámú minta esetén $(n = 2k + 1)$ az eltolt minta Me' mediánja:

$$Me' = x_{k+1} + b = Me + b.$$

Páros elemszámú mintában $(n = 2k)$ az új minta Me' mediánja:

$$Me' = \frac{x_k + b + x_{k+1} + b}{2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + b = Me + b.$$

b) Hasonló a helyzet, ha c valós számmal szorozzuk a minta összes elemét:

$$Mo'' = c \cdot x_k = c \cdot Mo.$$

Páratlan elemszámú mintára:

$$Me'' = c \cdot x_{k+1} = c \cdot Me,$$

illetve páros elemszámú mintára:

$$Me'' = \frac{c \cdot x_k + c \cdot x_{k+1}}{2} = c \cdot \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = c \cdot Me.$$

Ez akkor is így van, ha $c = 0$ vagy $c < 0$. Utóbbi esetben a rangsor megfordul, a maximális elem a minimális lesz, és előre kerül.

4567 Legyen az n elemű $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatokból álló minta terjedelme R, szórása s, abszolút átlagos eltérése AE.

a) Legyenek az új minta elemei $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$. Ekkor a terjedelem nem változik:

$$R' = x_{max} + b - (x_{min} + b) = x_{max} - x_{min} = R.$$

A szórás esetén használjuk ki, hogy a számtani átlag $A + b$-re változik:

$$s' = \sqrt{\frac{\left(x_1 + b - (A + b)\right)^2 + \ldots + \left(x_n + b - (A + b)\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}} = s.$$

Az abszolút átlagos eltérésben is használjuk ki, hogy a medián $Me + b$-re változik:

$$AE' = \frac{\left|x_1 + b - (Me + b)\right| + \ldots + \left|x_n + b - (Me + b)\right|}{n} = \frac{\left|x_1 - Me\right| + \ldots + \left|x_n - Me\right|}{n} = AE.$$

b) Legyenek az új minta elemei $c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n$. Ekkor a terjedelem:

$$R' = c \cdot x_{max} - c \cdot x_{min} = |c| \cdot (x_{max} - x_{min}) = |c| \cdot R.$$

Az abszolút értéket használnunk kell, $c < 0$ esetben a mintában ugyanis a maximális és a minimális elem felcserélődik.

A szórás esetén használjuk ki, hogy a számtani átlag $c \cdot A$-ra változik:

$$s' = \sqrt{\frac{(c \cdot x_1 - c \cdot A)^2 + \ldots + (c \cdot x_n - c \cdot A)^2}{n}} = \sqrt{c^2 \cdot \frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}} = |c| \cdot s.$$

Az abszolút átlagos eltérésben is használjuk ki, hogy a medián $c \cdot Me$-re változik:

$$AE' = \frac{\left|c \cdot x_1 - c \cdot Me\right| + \ldots + \left|c \cdot x_n - c \cdot Me\right|}{n} = |c| \cdot \frac{\left|x_1 - Me\right| + \ldots + \left|x_n - Me\right|}{n} = |c| \cdot AE.$$

4568 Legyen a t elemű minta rangsorba rendezve $x_1, x_2, \ldots, x_t$. Csoportosítsuk őket n darab osztályba, legyen az osztályköz $\frac{x_{max} - x_{min}}{n} = d > 0$, és jelölje az osztályközepeket $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Essen az egyes osztályokba rendre $r_1, r_2, \ldots, r_n$ darab adat $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n = t)$.

Vizsgáljuk meg a minta elemeiből számított A és a gyakorisági táblázatból számított A' átlag eltérését:

$$|A - A'| = \left| \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_t}{t} - \frac{r_1 \cdot K_1 + r_2 \cdot K_2 + \ldots + r_n \cdot K_n}{t} \right| =$$

Párosítsuk a minta elemeit a megfelelő osztályközepekkel (az első r_1 darab elemet K_1-gyel stb.):

$$= \left| \frac{(x_1 - K_1) + \ldots + (x_{r_1} - K_1) + (x_{r_1+1} - K_2) + \ldots + (x_t - K_n)}{t} \right| \le$$

Kihasználjuk, hogy $|a + b| \le |a| + |b|$ háromszög-egyenlőtlenség teljesül akármennyi értékre:

$$\le \frac{|x_1 - K_1| + \ldots + |x_{r_1} - K_1| + |x_{r_1+1} - K_2| + \ldots + |x_t - K_n|}{t} \le$$

Kihasználjuk, hogy az adott kategóriába eső elemek maximum az osztályköz felével térhetnek el az osztályközéptől:

$$\le \frac{t \cdot \frac{d}{2}}{t} = \frac{d}{2}.$$

Tehát a gyakorisági táblázatból számított és a valódi átlag legfeljebb az osztályköz felével térhet el egymástól.

4569 Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ minta n elemű, számtani átlaga:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

szórása pedig

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}}.$$

Azt akarjuk bizonyítani, hogy ha s képletében bármely X-re cseréljük A-t, akkor nem kaphatunk kisebb számot az eredeti s-nél. Ehhez megvizsgáljuk az X-től függő (a többi adat rögzített)

$$\sqrt{\frac{(x_1 - X)^2 + \ldots + (x_n - X)^2}{n}}$$

kifejezést, hogy mely X-re van minimuma. Mivel nemnegatív mennyiség, ott van minimuma, ahol a négyzetének is minimuma van:

$$\frac{(x_1 - X)^2 + \ldots + (x_n - X)^2}{n}.$$

A nevezőt sem kell figyelembe vennünk, hiszen a minimumot csak a számláló befolyásolja. Így elegendő a négyzeteket megvizsgálni:

$$(x_1 - X)^2 + \ldots + (x_n - X)^2 = x_1^2 - 2x_1X + X^2 + \ldots + x_n^2 - 2x_nX + X^2 =$$
$$= nX^2 - 2X \cdot (x_1 + \ldots + x_n) + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

A kifejezés X-ben másodfokú, mégpedig egy felfelé nyíló parabola ($n > 0$).

Tudjuk, hogy az $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) kifejezésnek $x_{\min} = -\frac{b}{2 \cdot a}$ helyen van minimuma. Jelen esetben $a = n$, $b = -2 \cdot (x_1 + \ldots + x_n)$. Így:

$$X_{\min} = -\frac{-2 \cdot (x_1 + \ldots + x_n)}{2 \cdot n} = A.$$

Azaz a szórás a számtani átlagra minimális.

4570 Legyen az n elemű rangsor $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mediánját jelölje Me, abszolút átlagos eltérését pedig

$$AE = \frac{|x_1 - Me| + \ldots + |x_n - Me|}{n}.$$

Két lépésben bizonyítjuk az állítást. Először megvizsgáljuk páratlan sok, majd páros sok elemű mintára. Mindkétszer belátjuk, hogy az abszolút átlagos eltérésben Me helyére más számot írva, nem kaphatunk AE-nél kisebb értéket.

I. eset: Ha n páratlan, akkor a medián a minta középső eleme:

$$Me = x_k, \quad \text{ahol} \quad k = \frac{n+1}{2}.$$

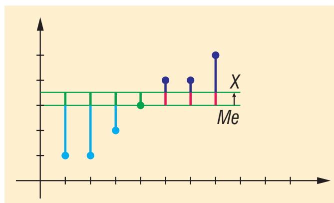
Lehetséges, hogy a mintának több eleme is megegyezik a mediánnal. Legyen az első ilyen elem indexe e, az utolsóé u. Így $(u - e + 1)$ darab elemre: $x_e = \ldots = x_k = \ldots = x_u = Me$. (Akár $e = k$ vagy $k = u$.)

A rangsorban az x_e előtti elemek kisebbek, az x_u után levők nagyobbak a mediánnál. Figyelembe véve a nagyságrendi viszonyokat, az abszolút átlagos eltérés abszolút érték nélküli alakban is írható:

$$AE = \frac{(Me - x_1) + \ldots + (Me - x_{e-1}) + (u - e + 1)\cdot(Me - x_k) + (x_{u+1} - Me) + \ldots + (x_n - Me)}{n}$$

Cseréljük ki a kifejezésben Me-t X-re. AE nagysága csak a számlálóban található X-től függ:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_{e-1}) + (u - e + 1)\cdot(X - x_k) + (x_{u+1} - X) + \ldots + (x_n - X).$$



Növeljük X értékét. Legyen kicsit nagyobb a mediánnál, de még $X < x_{u+1}$. Ekkor az első u tag növekedni fog pontosan $X - x_k$ értékkel, a maradék tagok pedig pontosan ennyivel csökkennek. Mivel $k = \frac{n+1}{2} < u + 1$, több tag fog növekedni, mint amennyi csökken. Így az összeg csak növekedhet, mégpedig $(2u - n)\cdot(X - x_k)$ értékkel. (Az ábrán $e = k = u$. A piros vonalak AE csökkenését, a vastag zöldek a növekedését jelzik.)

Ha X eléri x_{u+1} értékét, akkor az $(u + 1)$-edik zárójelben és mindazokban, ahol x_{u+1}-gyel egyenlő értékek állnak, meg kell fordítani a különbséget:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_{e-1}) + (u - e + 1)\cdot(X - x_k) + (X - x_{u+1}) + \ldots + (x_n - X).$$

Innentől kezdve ezek a tagok az eddigi csökkenés helyett már növekedni fognak. Tehát még több tag növekedik és kevesebb csökken, mint eddig. Így tovább, minél inkább $Me < X$, annál inkább $AE < AE(X)$.

II. eset: Ha n páros, akkor a medián a két középső elem átlaga:

$$Me = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad \text{ahol} \quad k = \frac{n}{2}.$$

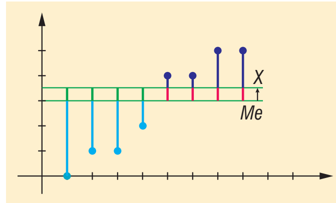
Ha a két középső elem egyenlő, akkor az I. esetnél leírtakat szóról szóra alkalmazhatjuk. Ha különbözőek, akkor a mintában nincs olyan elem, amely megegyezne a mediánnal. Sőt, az elemek pontosan fele kisebb és fele nagyobb Me-nél. Abszolút értékek nélkül írva:

$$AE = \frac{(Me - x_1) + \ldots + (Me - x_k) + (x_{k+1} - Me) + \ldots + (x_n - Me)}{n}.$$

Ismét cseréljük ki a kifejezésben Me-t X-re. AE nagysága csak a számlálótól függ:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_k) + (x_{k+1} - X) + \ldots + (x_n - X).$$

Változtassunk X értékén. Válasszuk nagyobbnak a mediánnál, de még $X < x_{k+1}$ legyen. Ekkor a tagok első fele növekedni, második fele csökkenni fog ugyanazon $X - Me$ értékkel, azaz az összeg nem változik.



Amint $X = x_{k+1}$, a $(k+1)$-edik zárójelben és mindazokban, ahol x_{k+1}-gyel egyenlő értékek állnak, megfordítjuk a különbséget:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_k) + (X - x_{k+1}) + \ldots + (x_n - X).$$

Tovább növelve X-et, az imént megfordított tagok már nem csökkenni, hanem növekedni fognak. Mivel így több tag nő, mint csökken, az összeg is növekedni fog. A gondolatmenet hasonlóan folytatódik, ha $X > x_{k+1}$.

Megjegyzés: Mindkét gondolatmenet hasonlóan végigvihető, ha X értékét csökkentjük Me-ről.

Vegyes feladatok – megoldások

4571 $|J| = 10$, $|I| = x$, $p = 0{,}5 = \dfrac{x}{10}$. Ebből $x = 5$, ezért csak $I = \,]1; 6[$ lehet.

4572 $P = \dfrac{5 \cdot 7}{15 \cdot 35} = \dfrac{1}{15}$.

4573 $M = 0{,}02 \cdot 1 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}24 \cdot 3 + 0{,}6 \cdot 4 + 0{,}11 \cdot 5 = 3{,}75$ év.

4574 *a)* A csoportba 12-en járnak.

b) $A_{\text{kiscs.}} = \dfrac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 17}{12} = 7;\qquad A_{\text{nagycs.}} = \dfrac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 12 + 3 \cdot 17}{12} = 10{,}75 \approx 11.$

4575 *a)* Igen, $Mo = 2$ és $Me = 3$.

b) Nem.

c) $A = \dfrac{4 \cdot 4{,}5 + 9 \cdot 12{,}5 + 6 \cdot 20{,}5 + 8 \cdot 28{,}5 + 3 \cdot 36{,}5}{30} = 19{,}7;$

$$s = \sqrt{\frac{4\cdot(4{,}5-19{,}7)^2 + 9\cdot(12{,}5-19{,}7)^2 + 6\cdot(20{,}5-19{,}7)^2 + 8\cdot(28{,}5-19{,}7)^2 + 3\cdot(36{,}5-19{,}7)^2}{30}} \approx 9{,}77;$$

$I = \,]9{,}93; 29{,}47[$.

d) $AE = \dfrac{4 \cdot |1-3| + 9 \cdot |2-3| + 6 \cdot |3-3| + 8 \cdot |4-3| + 3 \cdot |5-3|}{30} \approx 1;$

$I = \,]2; 4[$.

4576 Ha a korong ($r = 1{,}5$ cm) teljes egészében egy négyzetbe esik, akkor a riasztó csendben marad. Elég egy négyzetet tekintenünk. Ehhez a korong középpontjának egy $(10 - 2 \cdot 1{,}5)$ oldalú négyzetbe kell esnie. (Feltehetjük, hogy érintésre még nem riaszt.) Tehát annak a valószínűsége, hogy nem szólal meg a riasztó, illetve annak a valószínűsége, hogy megszólal:

$$P(\text{csend}) = \frac{49}{100}, \qquad \text{illetve} \qquad P(\text{riaszt}) = \frac{51}{100}.$$

A válasz a kérdésre igen, a riasztó nagyobb valószínűséggel kezd szirénázni.

4577 A várható érték:

$$M = \binom{7}{0} \cdot 0{,}36^0 \cdot 0{,}64^7 \cdot 0 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}36^1 \cdot 0{,}64^6 \cdot 1 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}36^2 \cdot 0{,}64^5 \cdot 2 +$$

$$+ \binom{7}{3} \cdot 0{,}36^3 \cdot 0{,}64^4 \cdot 3 + \binom{7}{4} \cdot 0{,}36^4 \cdot 0{,}64^3 \cdot 4 + \binom{7}{5} \cdot 0{,}36^5 \cdot 0{,}64^2 \cdot 5 +$$

$$+ \binom{7}{6} \cdot 0{,}36^6 \cdot 0{,}64^1 \cdot 6 + \binom{7}{7} \cdot 0{,}36^7 \cdot 0{,}64^0 \cdot 7 \approx 2{,}52.$$

Tehát várhatóan két vagy három saját számot fog hallani Zsófi.