12.4. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Geometriai valószínűség – megoldások

4512 *a)* $p=\frac{4}{10}=0,4.$

b) Nem, a végpont nem befolyásolja az intervallum hosszát.

4513 –

4514 *a)* $p=\frac{4}{9}\approx 0,44;$ *b)* $p=\frac{5}{8}=0,625;$ *c)* $p=\frac{1+1}{6}\approx 0,33.$

4515 *a)* $p=\frac{4}{9}\approx 0,44;$ *b)* $p=\frac{5}{9}\approx 0,56.$

4516 $p=0,7=\frac{x}{7}$, így $x=4,9$. I-nek 4,9 hosszú intervallumnak kell lennie. Pl. $[8;\,12,9]$.

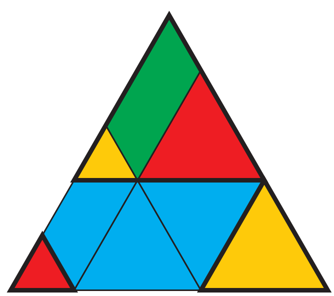
4517 $p=\frac{18}{19}-\frac{11}{20}=\frac{151}{380}\approx 0,3974.$

4518 $p=\frac{12-5\cdot 0,8}{12}=\frac{2}{3}\approx 0,67.$

4519 $p=\frac{5\cdot 15-2\cdot 3^2}{5\cdot 15}=\frac{57}{75}=0,76.$

4520 *a)* $P_{\text{bull}}=\frac{1,5^2\cdot\pi}{16,75^2\cdot\pi}\approx 0,008;$ *b)* $P_{\text{bull's eye}}=\frac{0,75^2\cdot\pi}{16,75^2\cdot\pi}\approx 0,002.$

4521 Tekintsük az ablak nyitott (kék) részén kívüli darabokat.



I. megoldás: Ezek három, az eredetihez hasonló háromszöget alkotnak. A szöveg alapján tudjuk, hogy a kis háromszögek oldalai feleakkorák, mint egy nagyobb háromszög oldala. Mivel két nagyobb és egy pici háromszög oldala kiadja az ablak alsó oldalát, így a kis piros háromszög oldala éppen $\frac{1}{5}$-e, a sárga nagyobb háromszög oldala $\frac{2}{5}$-e, míg a felső színes háromszög oldala $\frac{3}{5}$-e az ablak oldalának. A hasonlóságnál igazoltak alapján (hasonló alakzatok területei a hasonlósági arány négyzetével arányosak):

$$P_{(\text{betöri az ablakot})}=\frac{T_{\text{nem kék}}}{T_{\text{ablak}}}=\frac{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+\frac{9}{25}}{1}=\frac{14}{25}=0,56.$$

II. megoldás: A feladatot átdarabolással is megoldhatjuk. Számoljuk össze, hogy a bal alsó kis piros háromszöget hányszor mérhetjük fel az ábra többi alkotóelemére. (A hasonlóság miatt ezt megtehetjük.)

4522 Gyakorlatilag nyolc sávot látunk a táblán a középkört is beleértve, így a tábla sugara 16 cm. Bármely sáv területét megkapjuk, ha a külső határoló kör területéből kivonjuk a belső határoló kör területét.

a) $p = \dfrac{2^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}015625;$ *b)* $p = \dfrac{4^2 \cdot \pi - 2^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}046875;$

c) $p = \dfrac{8^2 \cdot \pi - 6^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}109375;$ *d)* $p = \dfrac{12^2 \cdot \pi - 10^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}171875;$

e) $p = \dfrac{6^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}140625;$ *f)* $p = 1 - \dfrac{10^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}609375;$

g) $p = \dfrac{12^2 \cdot \pi - 4^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}5.$

h) Két dobásból 15 pontot úgy érhetünk el, ha 9-et és 6-ot, vagy 6-ot és 9-et, vagy 8-at és 7-et, vagy 7-et és 8-at dobunk:

$$P(9 \text{ és } 6 \quad \text{vagy} \quad 6 \text{ és } 9) = 2 \cdot \frac{4^2 \cdot \pi - 2^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} \cdot \frac{10^2 \cdot \pi - 8^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} \approx 0{,}01318,$$

$$P(8 \text{ és } 7 \quad \text{vagy} \quad 7 \text{ és } 8) = 2 \cdot \frac{6^2 \cdot \pi - 4^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} \cdot \frac{8^2 \cdot \pi - 6^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} \approx 0{,}01708.$$

A két eredmény összege adja a kérdésre a választ: $p \approx 0{,}03$.

4523 Először számítsuk ki a dupla 20 és a tripla 20 pontszámot adó részek területeit:

$$T_{\mathrm{D20}} = \frac{16{,}75^2 \cdot \pi - 15{,}75^2 \cdot \pi}{20} \approx 5{,}105 \text{ cm}^2,$$

$$T_{\mathrm{T20}} = \frac{10{,}75^2 \cdot \pi - 9{,}75^2 \cdot \pi}{20} \approx 3{,}22 \text{ cm}^2.$$

Ezek után könnyebb kiszámítani a sima 20 pontot érő területet:

$$T_{20} = \frac{15{,}75^2 \cdot \pi - 1{,}5^2 \cdot \pi}{20} - T_{\mathrm{T20}} \approx 38{,}61 - 3{,}22 = 35{,}39 \text{ cm}^2.$$

Fel vagyunk vértezve a valószínűségek kiszámításához szükséges adatokkal.

a) $P(\mathrm{D20}) = \dfrac{T_{\mathrm{D20}}}{T_{20} + T_{\mathrm{D20}} + T_{\mathrm{T20}}} \approx 0{,}1168;$ *b)* $P(\mathrm{T20}) = \dfrac{T_{\mathrm{T20}}}{T_{20} + T_{\mathrm{D20}} + T_{\mathrm{T20}}} \approx 0{,}0737.$

c) Az előző pontból:

$$P(20) = 1 - P(\mathrm{D20}) - P(\mathrm{T20}) \approx 0{,}8096.$$

Két nyíllal 80 pontot úgy szerezhet Dávid, ha két dupla 20-at, vagy egy tripla és egy sima 20-at, vagy egy sima és egy tripla 20-at dob. Valószínűségeik összege:

$$P(80 \text{ pont}) = P(\mathrm{D20}) \cdot P(\mathrm{D20}) + 2 \cdot P(20) \cdot P(\mathrm{T20}) \approx 0{,}1328.$$

4524 Írjuk fel a valószínűséget. Jelölje a kis kör sugarát r, a nagy körét R. Ekkor:

$$P = \frac{r^2 \cdot \pi}{R^2 \cdot \pi} = 0{,}01,$$

innen $r = 0{,}1 \cdot R$.

Tehát a középkör sugara 10%-a kell, hogy legyen a tábla sugarának.

4525 Írjuk fel a másodfokú egyenlet megoldóképletét, egyszerűsítsünk 2-vel:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4c}}{2}=2\pm\sqrt{4-c}.$$

Természetesen akkor lesz mindkét megoldás 1-nél nagyobb, ha a kisebb gyök is nagyobb 1-nél:

$$2-\sqrt{4-c}>1.$$

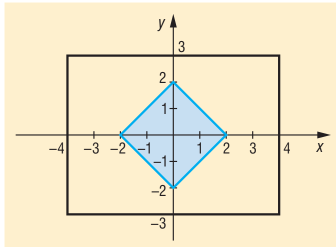
Megoldását a $c>3$ valós számok adják. Így a keresett valószínűség:

$$p=\frac{1}{6}.$$

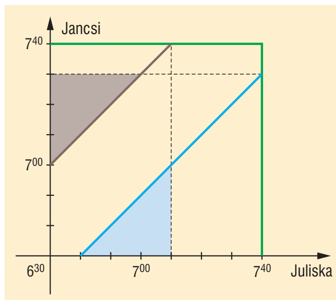
4526 Keressük meg azokat a pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek kielégítik az egyenlőtlenséget. Az ábrán ezeket a pontokat látjuk a téglalappal együtt.

A valószínűséget a területek mértékéből meghatározhatjuk:

$$p=\frac{4\cdot 2}{8\cdot 6}=\frac{1}{6}.$$



4527 Képzeljük el egy koordináta-rendszerben a fürdőbe lépések lehetséges időpontjait. Jancsi és Juliska 6^{30}-kor kelnek és 7^{40}-kor hagyják el a házat. Tehát e két időpont között tartózkodhatnak a fürdőszobában (ábrán zöld négyzet). Mivel Juliskának 30 perc szükséges, hogy elkészüljön, legkésőbb 7^{10}-kor meg kell kezdenie a szépítkezést (függőleges szaggatott vonal és attól balra). Jancsinál ez az idő 10 perc, így ő ráér akár még 7^{30}-kor is bemenni a fürdőbe (vízszintes szaggatott vonal és attól lefelé). Így az eseménytér a tengelyek és a szaggatott vonalak közé eső téglalap alakú terület.



Ha Jancsi 6^{30}-kor megy a fürdőbe, akkor Julisnak 6^{40}-től szabad a pálya. Ha Jancsi 6^{40}-kor lép be, akkor Julis 6^{50}-től mehet, stb. Ezeket a belépési pontokat a kék terület mutatja. Ha Julis lép be először rögtön ébredés után, akkor Jancsi csak 7^{00}-tól mehet be. Ha Julis csak 6^{40}-kor megy be, akkor Jancsinak várnia kell 7^{10}-ig stb. Ezt a barna részen látjuk.

Örömmel akkor vesznek búcsút, ha a fürdőre nem kellett várniuk. Ennek a valószínűségét a háromszögek területeinek összege és a téglalap területének aránya adja meg. A két háromszögből készíthetünk egy négyzetet:

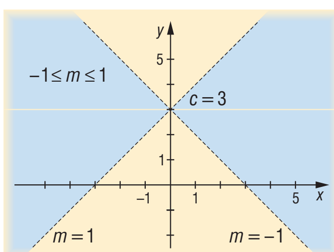
$$P(\text{öröm és boldogság})=\frac{3\cdot 3}{6\cdot 4}=0{,}375.$$

Hát ez bizony nem túl sok… Érdemes lenne valami rendszert vinniük a reggeli készülődésbe.

4528 Az egyenletben m jelöli az egyenes meredekségét, c pedig a függőleges eltolás mértékét.

Keressünk olyan egyeneseket, melyek kielégítik a metszésre kapott feltételt.

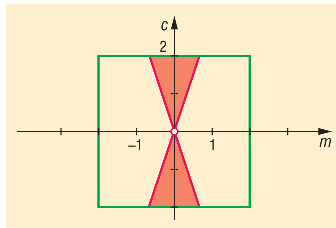
Például ha $c=3$ lenne, akkor m értékét a $[-1;\,1]$ intervallumból választhatnánk tetszőlegesen. (Ez azonban nem felel meg a feladat megoldásának, hiszen c értéke nem lehet 2-nél nagyobb.)



Ha $c = 2$, akkor m legalább $-\dfrac{2}{3}$, legfeljebb $\dfrac{2}{3}$ lehet.

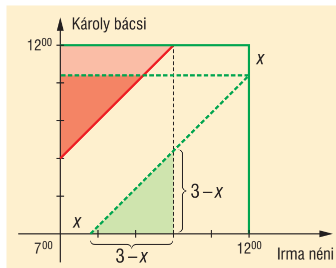
Ha $c = 1$, akkor m legalább $-\dfrac{1}{3}$, legfeljebb $\dfrac{1}{3}$ lehet. Hasonlóan kapjuk a negatív c-re adódó értékeket. Érdekes módon, ha $c = 0$, akkor m nem vehet fel értéket, hiszen bárhogy is adjuk meg, az egyenes metszeni fogja a $[-3; 3]$ intervallumon az x tengelyt.

Ábrázoljuk egy $m-c$ koordináta-rendszerben a lehetséges és a feltételeknek megfelelő paramétereket. Ezt látjuk a jobb oldali ábrán, a piros színű rész a számunkra kedvező. A kérdezett valószínűség:



$$p = \frac{4 \cdot \frac{2}{3}}{4 \cdot 4} = \frac{1}{6}.$$

4529 Képzeljük el a konyhába való belépési időpontokat egy derékszögű koordináta-rendszerben. Jelöljük az abszcisszatengelyen Irma néni, az ordinátatengelyen Károly bácsi belépésének idejét. A tengelyeken mérjük az egységet órában. Irma néniről ismert, hogy 2 órát tölt a konyhában, Károly bácsi ottlétének hosszát jelölje x. x nem lehet kisebb 0-nál és nem lehet nagyobb 3-nál, hiszen akkor már biztosan rányit egyikük a másikra. Azt is tudjuk, hogy Irma néninek legkésőbb 10^{00}-kor el kell kezdeni a főzést (függőleges szaggatott vonal).



A piros színű rész azokat a pontokat jelöli, amikor Károly bácsi beléphet a konyhába Irma néni után. Ezt biztosan ismerjük. Nem ismerjük x értékét. Annyit tudunk, hogy x befolyásolja az alsó zöld háromszög területét, illetve magát az eseményteret is (a tengelyek és a velük párhuzamos szaggatott vonalak által határolt téglalap). A zöld háromszögből és a piros háromszögnek az eseménytérbe eső részéből össze tudunk állítani egy $(3 - x)$ oldalú négyzetet. Az eseménytér egyik oldala biztosan 3 (Irma néni konyhában töltött ideje miatt). Írjuk fel a területegységek hányadosát x függvényében:

$$P(\text{nem zavarják egymást}) = \frac{(3-x)^2}{3 \cdot (5-x)}.$$

Most próbáljunk meg válaszolni a kérdésekre.

a) Ha azt szeretnénk, hogy az ebédfőzés megzavarásának valószínűsége 0,5 alatt maradjon, akkor 0,5-nél nagyobbá kell tenni az előző valószínűséget. Szorozzunk a nevezővel (mivel $0 \le x < 3$, az egyenlőtlenség iránya nem változik), majd rendezzünk egy oldalra:

$$\frac{(3-x)^2}{3 \cdot (5-x)} > 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad (3-x)^2 > 1{,}5 \cdot (5-x) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4{,}5x + 1{,}5 > 0.$$

Innen:

$$x_{1,2} = \frac{4{,}5 \pm \sqrt{4{,}5^2 - 4 \cdot 1{,}5}}{2}, \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 0{,}36 \quad \text{és} \quad x_2 \approx 4{,}14.$$

Feltételeinknek csak a kisebb érték felel meg. Mivel a másodfokú kifejezés egy felfelé nyíló parabola, így az egyenlőtlenség megoldása:

$$0 \le x < 0{,}36.$$

Azaz ha Károly bácsi 0,36 óránál (kb. 21 perc és 36 másodpercnél) kevesebb időt tölt el a konyhában, akkor 50%-nál nagyobb a valószínűsége, hogy nem akadályozza az ebédfőzést.

b) Annál kisebb a másik megzavarásának valószínűsége, minél nagyobb a $p=\dfrac{(3-x)^2}{3\cdot(5-x)}$ kifejezés értéke. Vizsgáljuk a kifejezést a $0\le x<3$ intervallumon. Néhány érték behelyettesítése után azt sejtjük, hogy $x=0$-ra kapjuk a legnagyobb értéket, mégpedig $p_{max}=\dfrac{3}{5}$. Hogyan igazolhatnánk ezt?

Azt mutatjuk meg, hogy p a p_{max} értéknél csak kisebb lehet minden $0<x<3$ esetén:

$$\frac{(3-x)^2}{3\cdot(5-x)}<\frac{3}{5}.$$

Tüntessük el a törteket, majd fejtsük ki a zárójelet, és rendezzük az egyenlőtlenséget egy oldalra (pozitív számmal szorzunk):

$$5\cdot(3-x)^2<9\cdot(5-x),$$
$$45-30x+5x^2<45-9x,$$
$$5x^2-21x<0,$$
$$x\cdot(5x-21)<0.$$

Megoldása:

$$0<x<4{,}2 \quad \text{(egyenes állású parabola).}$$

Mivel $]0;3[\,\subset\,]0;4{,}2[$, ezért valóban teljesülnek a fenti egyenlőtlenségek.

Végeztünk: Károly bácsi akkor akadályozza a legkisebb,

$$1-p_{max}=\frac{2}{5}$$

valószínűséggel az ebéd elkészítését, ha 0 órát tölt el a konyhában, azaz a közelébe sem megy.

Megjegyzés: Ezt Irma néni a fenti példa megoldása nélkül is nagyon jól tudja.

Várható érték (emelt szintű tananyag) – megoldások

4530 $M=0{,}1\cdot1+0{,}2\cdot(-2)+0{,}3\cdot3+0{,}4\cdot(-4)=-1.$ Nem érdemes a játékban részt venni.

4531 $M=0{,}4\cdot1+0{,}3\cdot(-2)+0{,}2\cdot3+0{,}1\cdot(-4)=0.$ Igazságos a játék.

4532 $M=\frac{1}{6}\cdot1+\frac{1}{6}\cdot2+\frac{1}{6}\cdot3+\frac{1}{6}\cdot4+\frac{1}{6}\cdot5+\frac{1}{6}\cdot6=\frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=3{,}5.$

4533 *a)* $M_A=\frac{1}{2}\cdot(-10)+\frac{1}{2}\cdot8=-1;$ *b)* $M_B=\frac{1}{2}\cdot10+\frac{1}{2}\cdot(-8)=1.$

4534 $M=\dfrac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}\cdot1145+\dfrac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\cdot17\,690+\dfrac{\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}\cdot2\,127\,600+\dfrac{\binom{5}{5}\cdot\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}\cdot675\,000\,000\approx75{,}5$ Ft.

$75{,}5-225=-149{,}5.$ Nem érte meg.

4535 *a)* Az első pörgetéskor akkor éri el a legnagyobb pontnövekedést, ha 3000-et forgat. Ezután viszont mindig kétszer a duplázót kell kiforgatnia, azaz maximum 20 000 pontot érhet el.

b) A keréken nyolc mező van és feltételezzük, hogy nem csalnak a játékban, azaz minden mezőnek ugyanakkora a valószínűsége. A duplázó 2000-rel növeli, a felező 1000-rel, a negyedelő 1500-zal, a nullázó 2000-rel csökkenti a pontszámot, ezért a pörgetéskor várhatóan kapható pontszám:

$$M=\frac{1}{8}\cdot(-2000)+\frac{1}{8}\cdot(-1500)+\frac{1}{8}\cdot(-1000)+\frac{1}{8}\cdot(-1000)+$$

$$+\frac{1}{8}\cdot 1000+\frac{1}{8}\cdot 2000+\frac{1}{8}\cdot 3000+\frac{1}{8}\cdot 2000=312{,}5.$$

A forgatás után a játékosnak sok ilyen helyzetet tekintve átlagosan

$$2000+312{,}5=2312{,}5$$

pontja lesz.

c) Ha lenullázta magát, akkor a számára negatív mezőket nem kell figyelembe venni, hiszen ennél kevesebb pontja nem lehet. Hasonló a helyzet a duplázóval is. Így:

$$M=\frac{1}{8}\cdot 1000+\frac{1}{8}\cdot 2000+\frac{1}{8}\cdot 3000=750.$$

Sok ilyen szituáció után körülbelül 750 pont lesz a pontjainak átlaga.

d) 10 000 pont esetén a duplázó ugyanennyivel növeli a pontok számát, illetve a felező 5000-rel, a negyedelő 7500-zal, a nullázó 10 000-rel csökkenti a pontokat. Tehát:

$$M=\frac{1}{8}\cdot(-10000)+\frac{1}{8}\cdot(-7500)+\frac{1}{8}\cdot(-5000)+\frac{1}{8}\cdot(-1000)+$$

$$+\frac{1}{8}\cdot 1000+\frac{1}{8}\cdot 2000+\frac{1}{8}\cdot 3000+\frac{1}{8}\cdot 10000=-937{,}5.$$

Ebben a szituációban (sok játék átlagát tekintve) a játékos pontszáma $10\,000-937{,}5=9062{,}5$ pontra csökken. Úgy tűnik, hogy minél több pontja van egy játékosnak, az arányosan csökkentő és a nullázó mezők annál jobban csökkentik a pontjait.

4536 A játékos nyereményét a játék árának kell egyensúlyba hozni. Azaz akár a játékos, akár a játékot szervező Dani várható nyereménye 0 kell, hogy legyen. Mivel a játékos nyereménye $\frac{1}{3}\cdot 6=2$ játék-euró, ezért a játék árának is 2 eurót kell választani. (Az egyiket minden fordulóban „megnyeri” valamelyik fél, a másikat „elveszíti”.)

4537 Tekintsük Balázs szempontjából a bevételeket és a kiadásokat. A játék ára (2 euró) Balázsnál marad, ha a játékra befizető veszít. Ha a játékos nyer, akkor 6 eurót fizet neki Balázs. Ez csak 4 euró veszteség Balázsnak, hiszen előtte 2 euróért a játékos megvette a játékot. A két esemény közül az egyik biztosan bekövetkezik: ha egyiknek x valószínűséget tulajdonítunk, akkor a másik $(1-x)$ valószínűséggel következik be.

A kérdés: hogyan válasszuk meg a valószínűségeket, hogy a játék várható értéke Balázs szempontjából 1 legyen?

Írjuk fel a várható értéket:

$$(1-x)\cdot 2+x\cdot(-4)=1,\quad \text{amiből}\quad x=\frac{1}{6}.$$

Tehát Balázsnak úgy kell meghirdetnie a játékot, hogy a játékos csak egy dobott szám esetén nyerjen. Például a hatos dobásra fizet nyereményt, a többire nem.

4538 Tegyük fel, hogy a kezdőcsapat 10 tagjából x fő rutinos. Ekkor $(10-x)$ fő tapasztalatlan. Azt szeretnénk, ha várhatóan legalább hat fő berúgná a tizenegyest:

$$\begin{aligned} 0{,}8x + 0{,}25\cdot(10-x) &\ge 6,\\ 0{,}55x &\ge 3{,}5,\\ x &\ge 6{,}36. \end{aligned}$$

Ezek szerint legalább hét tapasztalt játékosnak kell lennie a csapatban.

4539 *a)* Nyilván akkor éri meg a játékosnak, ha a játék várható értéke pozitív. A várható értéket növeljük, ha a játékos számára kedvezőtlen (negatív) nyereményeket a kisebb valószínűségű, a kedvező (pozitív) nyereményeket a nagyobb valószínűségű esetekhez rendeljük. Például:

$$P(-4)=0{,}2;\quad P(-2)=0{,}1;\quad P(3)=0{,}3;\quad P(1)=0{,}4$$

esetén a várható érték már pozitív:

$$M = 0{,}4\cdot 1 + 0{,}1\cdot(-2) + 0{,}3\cdot 3 + 0{,}2\cdot(-4) = 0{,}3.$$

b) A legnagyobb várható érték akkor lehetséges, ha a legkedvezőtlenebb esethez (-4) rendeljük a legkisebb valószínűséget, majd a következőhöz a következőt stb.:

$$P(-4)=0{,}1;\quad P(-2)=0{,}2 \quad \text{és} \quad P(3)=0{,}4;\quad P(1)=0{,}3.$$

Ekkor a várható nyeremény:

$$M = 0{,}3\cdot 1 + 0{,}2\cdot(-2) + 0{,}4\cdot 3 + 0{,}1\cdot(-4) = 0{,}7.$$

4540 *a)* Egy vaníliás krémtúrót a visszatevés nélküli esetet tekintve legalább elsőre vagy legfeljebb hetedikre vehetünk ki a dobozból. Annak a valószínűsége, hogy elsőre ilyen kerül a kezünkbe, 0,4. Tekintsünk egy közbülső esetet, például azt, ha negyedikre vesszük ki a vaníliást: ebben az esetben elsőre, másodikra, harmadikra meggyest vagy kekszest kell kivennünk:

$$P(\text{negyedik a vaníliás}) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} \approx 0{,}0952.$$

Összesen hét eset lehet, valószínűségeik az előzőhöz hasonlóan írhatók fel. A várható érték:

$$M = \frac{4}{10}\cdot 1 + \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot 2 + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot 3 + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot 4 + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot 5 +$$
$$+ \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot 6 + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}\cdot 7 \approx 2{,}2.$$

Ha a dobozban 4 vaníliás, 2 meggyes és 4 kekszes krémtúró van, akkor visszatevés nélkül várhatóan másodikra veszünk ki vaníliást.

b) Ha visszatesszük a kivett krémtúrókat, akkor a húzások között nem változnak a valószínűségek értékei. Vagyis a vaníliás kivételének valószínűsége 0,4; a nem vaníliásé minden esetben 0,6. Rossz hír, hogy húzhatunk folyamatosan nem vaníliásat, tehát akár végtelen sok esetünk is lehetséges. Annak a valószínűsége, hogy csak negyedikre vesszük ki kedvencünket:

$$P(\text{negyedik a vaníliás}) = 0{,}6^3\cdot 0{,}4 = 0{,}0864.$$

Az első 10 tagot kiszámítva a várható érték:

$$M = 0{,}4\cdot 1 + 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 2 + 0{,}6^2\cdot 0{,}4\cdot 3 + 0{,}6^3\cdot 0{,}4\cdot 4 + 0{,}6^4\cdot 0{,}4\cdot 5 +$$
$$+ 0{,}6^5\cdot 0{,}4\cdot 6 + \ldots + 0{,}6^9\cdot 0{,}4\cdot 10 \approx 2{,}42.$$

(Ha az első 200 tagot írjuk fel, a várható érték akkor is csak 2,5-nek adódik.) Várhatóan másodikra vagy harmadikra fogjuk kivenni kedvenc krémtúrónkat.

Megjegyzés: Bizonyítható, hogy minden tagot számba véve az összeg 2,5-nek adódik.

4541 *a)* Jelölje x a játékos éppen aktuális pontszámát ($0 \le x$). Ekkor a duplázó x, a nullázó $-x$, a negyedelő $\left(-\dfrac{3x}{4}\right)$, a felező $\left(-\dfrac{x}{2}\right)$ „megnyert” pontot jelent. A várható érték x függvényében:

$$M(x) = \frac{1}{8}\cdot(-x) + \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{3\cdot x}{4}\right) + \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\cdot(-1000) + \frac{1}{8}\cdot 1000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 + \frac{1}{8}\cdot 3000 + \frac{1}{8}\cdot x =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left(5000 - \frac{5}{4}\cdot x\right) = 625 - \frac{5}{32}\cdot x.$$

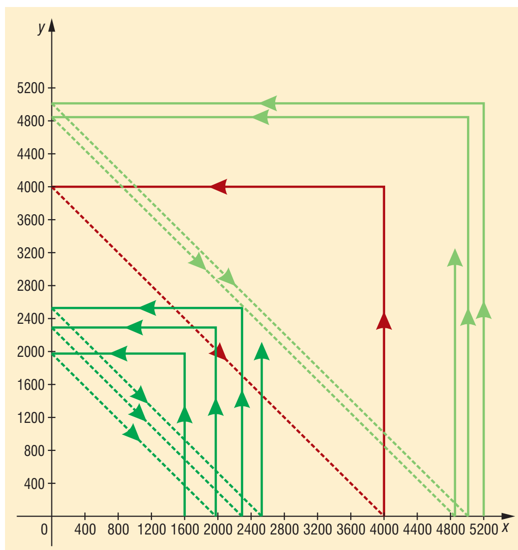
Ez a várható érték azonban csak akkor számítható, ha a játékosnak van pontja. Ugyanis 0 pont esetén az előző szerencsekerekes feladat *c)* pontjában kiszámított 750 pont várható.

A játékosnak eredetileg x pontja volt, ezt növelte/csökkentette a fenti értékkel. Így most pontjainak száma:

$$\text{összpontszám} = \begin{cases} x + 625 - \dfrac{5}{32}\cdot x = \dfrac{27}{32}\cdot x + 625, & \text{ha} \quad x > 0, \\ 750, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ez nem befolyásolja nagymértékben a játék kimenetelét, hiszen ha $x = 1$, akkor várhatóan 626 pont lesz a kerék megforgatása után.

b) Az előző pontban kiszámolt $M(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő lineáris függvény, zérushelye $x = 4000$. Ez az a pontszám, amellyel ha rendelkezik a játékos, akkor a játék igazságos.



Ha ennél több ponttal rendelkezik, akkor a játék a játékos számára kedvezőtlen, hiszen nagy átlagban levonnak tőle valamennyi pontot.

Ha 4000 pontnál kevesebbet gyűjt, akkor a játék kedvező a játékos számára, hiszen a várható érték pozitív. Sőt: minél jobban eltérünk ettől az értéktől, annál többet nyer vagy veszít.

Így már az is világos, hogy

– a legnagyobb várható nyereménye miért akkor van a játékosnak, amikor éppen lenullázta magát;

– ha elég sokáig játszik a játékos, akkor a nyereménye 4000 pont körül lesz. Ezt a várható értékből megállapított függvény alapján szemléltethetjük is. Az x tengelyen az aktuális pontszámot, az y tengelyen a forgatás utáni (várható) pontszámot jelöljük.

Ha például 1600 pontja van, akkor várhatóan 1975 pontja lesz. Az 1975 pontról újra forgatva 2291,4. Erről 2258,4 stb. Mindig közelebb kerül a 4000 ponthoz (sötétzöld töröttvonal, a haladási irányt a nyilak mutatják). Ha azonban 5200 pontja van, akkor várhatóan 5012,5 pontja lesz a kerék pörgetése után. Újra forgatva már csak 4854,3 stb. (világoszöld vonalak). Az egyetlen stabil helyzet az ábrán is 4000 pont (önmagába visszatérő bordó töröttvonal).

Statisztika – megoldások

4542 95 fő.

4543 Legalább az 5. helyre.

4544 A medián (Q_2) 5,5, $Q_1 = 3$, $Q_3 = 6$.

4545 *a)* 20 euró.
b) A medián (Q_2) 3, $Q_1 = 2$, $Q_3 = 4$ darab.

4546 A módusz 5.
A kvartilisek: $Q_1 = 3{,}5$, $Q_2 = 5$ (medián), $Q_3 = 7$.

4547 *a)* 50; *b)* 51.

4548 *a)* Jeles. *b)* Jó.

4549 65,4 m^3.

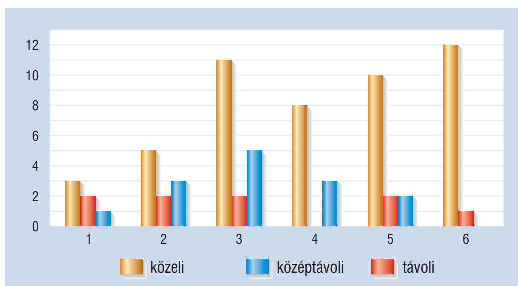
4550 *a)* 9 mm; *b)* 3 mm.

4551 9.

4552 $$\frac{4+4+7+x+11}{5} = 7, \text{ ahonnan } x = 9.$$

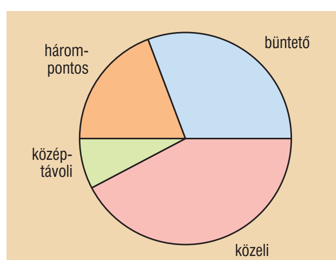
A keresett minta: 4, 4, 7, 9, 11.

4553 A keresett oszlopdiagram:



4554 Mivel $2ZK + 2KK + 3PK + BDK = 360°$, így:

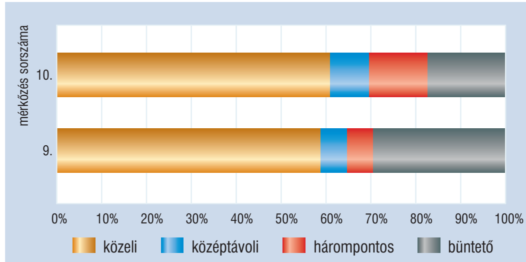
$$2ZK \approx 152{,}3°;$$
$$2KK \approx 27{,}7°;$$
$$3PK \approx 69{,}2°;$$
$$BDK \approx 110{,}8°.$$



4555 *a)* Mivel nincs kiugró adat, ezért a minimum $Q_0 = 1$, a maximum $Q_4 = 7$. Az alsó kvartilis $Q_1 = 2$, a medián $Q_2 = 3$, a felső kvartilis pedig $Q_3 = 4$. Ezekből $IQR = 4 - 2 = 2$.

b) A játékos mindig dobott legkevesebb 1 pontot büntetőből (mindig harcolt ki büntetődobásokat az ellenfél palánkja alatt). Legalább a mérkőzések felében 2 és 4 pont között ért el találatot a büntetővonalról ($IQR = 2$, tehát erre elég stabilan lehet számítani). A legjobb meccsén 7 pontot dobott a büntetővonalról.

4556 Roland a 10. mérkőzésen az előzőhöz viszonyítva bátrabban próbálkozott a középtávoli, és méginkább a távoli dobásokkal.



4557 *a)* A legnagyobb és legkisebb érték alapján az osztályköz:

$$\frac{27-9}{3} = 6.$$

Nagyon jó mérkőzés	(22–28)	3
Jó mérkőzés	(15–21)	3
Közepes mérkőzés	(8–14)	4

b) $$A = \frac{10+9+27+24\cdot 2+21\cdot 2+20+11+12}{10} = 17{,}9.$$

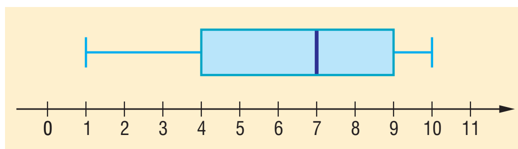
c) $$A_{\text{gyt}} = \frac{4\cdot 11+3\cdot 18+3\cdot 25}{10} = 17{,}3.$$

d) Az eltérés 0,6. Oka, hogy több érték is felső kategóriahatár közelébe esik (21, 27).

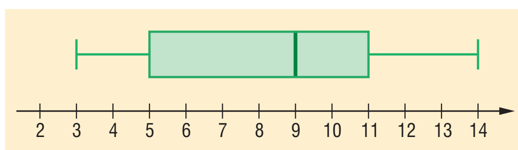
4558 A rangsorba rendezett tíz adatra (1, 3, 4, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 10) a következőket kapjuk:

$Q_0 = 1$ (minimum), $Q_1 = 4$ (alsó kvartilis), $Q_2 = 7$ (medián),
$Q_3 = 9$ (felső kvartilis), $Q_4 = 10$ (maximum).

Megállapítjuk, hogy a lefelé kissé kilógó minimum nem esik távolabb Q_1 alsó kvartilistől az interkvartilis terjedelem ($IQR = Q_3 - Q_1 = 9 - 4 = 5$) másfélszeresénél ($Q_1 - 1{,}5\cdot IQR = 4 - 7{,}5 < 1 = Q_0$). Ez alapján a dobozdiagram:



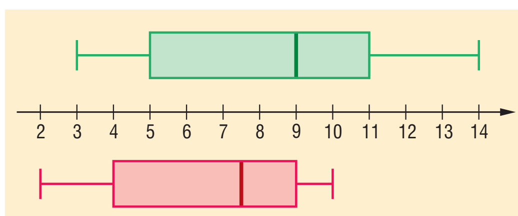
4559 *a)* A zóna kísérletek számait rangsorba állítva (3, 5, 5, 6, 8, 10, 10, 11, 12, 14) a medián (Q_2) 9, az alsó kvartilis (Q_1) 5, a felső (Q_3) 11. Se a legnagyobb (14), se a legkisebb (3) érték nem kiugró ($IQR = 9$). A diagram:



b) Ábrázoljuk együtt a diagramokat! A felsőn a kísérletek (2ZK), az alsón a sikeres dobások (2ZS) számát látjuk.

A minimumok és az alsó kvartilisek eggyel, a mediánok másféllel, a felső kvartilisek kettővel térnek el egymástól:

$IQR_{2ZK} = 11 - 5 = 6$, $IQR_{2ZS} = 9 - 4 = 5$.



A diagramok hasonló felépítéséből, eltoltságából arra következtethetünk, hogy a játékos nagy valószínűséggel *meccsei jó részén hasonló megbízhatósággal dob közelről* pontokat. A százalékot pontosan megadni nem tudjuk. Valószínűleg amikor a legtöbbet dobta rá, akkor szerezte a legtöbb pontját (14 dobásból 10 sikeres, 71%) és amikor a legkevesebbet, akkor a legkevesebbet (3-ból 2, 67%).

A valódi statisztikákat tekintve megállapításaink helyesek: a 10-ből 5 meccsen volt a sikeres dobások aránya körülbelül 2/3 (64% és 71% között). A legkevesebb pontot az első meccsen szerezte (3-ból 2), a legtöbbet az utolsó, tizedik meccsen érte el (14-ből 10).

4560 *a)* $A_{\text{idő}} = \dfrac{18+27+29+31+40+30+23+22+35+36}{10} = 29{,}1$ perc.

b) $s_{\text{idő}} = \sqrt{\dfrac{(18-A)^2+(27-A)^2+(29-A)^2+(31-A)^2+(40-A)^2+(30-A)^2+(23-A)^2+(22-A)^2+(35-A)^2+(36-A)^2}{10}} \approx 6{,}49.$

c) $I = \,]29{,}1-6{,}49;\ 29{,}1+6{,}49[\, = \,]22{,}61;\ 35{,}59[.$ Az intervallumba hat érték esik.

4561 *a)* A rangsorba rendezett adatok:

9, 10, 11, 12, 20, 21, 21, 24, 24, 27.

$Me_{\text{Pt}} = 20{,}5.$

b) $AE_{\text{Pt}} = \dfrac{|9-Me|+|10-Me|+|11-Me|+|12-Me|+|20-Me|+2\cdot|21-Me|+2\cdot|24-Me|+|27-Me|}{10} = 5{,}5.$

c) $I = \,]20{,}5-5{,}5;\ 20{,}5+5{,}5[\, = \,]15;\ 26[.$

Az adatok közül öt esik a megadott intervallumba.

4562 *a)* A diagramok közül *nagy valószínűséggel A)* mutatja a támadó, *B)* pedig a védő lepattanók számát. Ugyanis *B)* minden jellemző értéke (minimuma, alsó- és felső kvartilise, mediánja 1-gyel, maximuma pedig 3-mal) nagyobb, mint *A)* megfelelő értékei. Ez abból adódik, hogy *majdnem mindig* a védőjátékos van a palánkhoz közelebb, a támadót kiszorítva várja a lepattanó labdát, így könnyebben eléri, mint az ellenfele.

b) Rangsorba rendezve az adatokat: 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7. Mivel a diagramon $Q_0 = 2$, $Q_1 = 3$ és $Q_3 = 5$, $Q_4 = 7$, ezért a hiányzó adat 3-nál nem lehet kisebb és 5-nél nem lehet nagyobb. A szóba jövő 3, 4, 5 értékek mindegyike megfelelő.

c) Az ismert elemek rangsora: 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7. A hiányzó két adat $Q_0 = 2$, $Q_1 = 3$ és $Q_3 = 5$, $Q_4 = 7$ miatt ismét csak a 3, 4, 5 közül kerülhet ki. Azonban 5 sem lehet, mert akkor a medián már 5 lenne, így marad 3 és 4. Egyikből sem lehet kettő darab (akkor két módusz lenne): így a két hiányzó adat a 3 és a 4.

d) Képzeljük el a rangsort: első eleme 2, az utolsó 7. Mivel a minta 12 elemű, így $Q_1 = 3$, $Q_2 = 4$ és $Q_3 = 5$ is két adat „közé” esik, ezért a 3. és 4. elem csak 2 és 4 (I.), vagy két darab 3-as (II.) lehet. Hasonlóan a 6. és 7. elem csak 4 és 6 lehet: egyrészt mert 5 adat nincs, másrészt 3 és 7 nem lehet a medián (4) miatt.

(I.) A rangsor: 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 6, X, 7. Az X értéke csak 6 vagy 7 lehet, tehát 2 megoldás van.

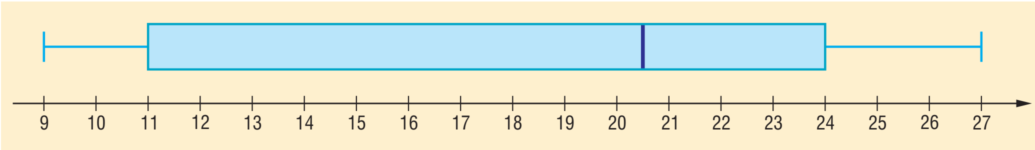
(II.) A rangsor: 2, X, 3, 3, Y, 4, 4, 4, 4, 6, Z, 7. Minden betű helyén kétféle érték állhat (X lehet 2 vagy 3; Y lehet 3 vagy 4; Z lehet 6 vagy 7), ebben az esetben $2^3 = 8$ megoldás van.

Összesen $2 + 8 = 10$ darab különböző 12 elemű, egészekből álló minta van, aminek értékeiből a megadott dobozdiagram áll elő.

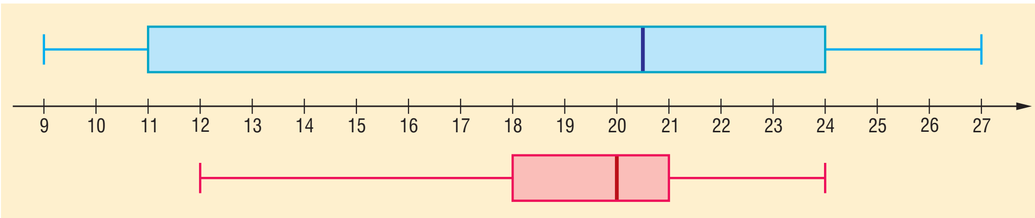
4563 *a)* A rangsorból (9, 10, 11, 12, 20, 21, 21, 24, 24, 27) leolvasható, hogy

$$Q_0 = 9,\ Q_1 = 11,\ Q_2 = 20{,}5,\ Q_3 = 24,\ Q_4 = 27.$$

Így a keresett diagram:



b) Közös rendszerben ábrázolva könnyebb összehasonlítani a diagramokat. A felső mutatja az őszi fordulókat:



A szurkoló általában a jó meccsekre emlékszik. A diagramok jobb oldalát vizsgálva szerinte a játékos teljesítménye romlott: legtöbb dobott pontja, pontjainak felső kvartilise és mediánja is alacsonyabb volt a tavaszi fordulókban (sorban 27-ről 24-re, 24-ről 21-re, 20,5-ről 20-ra csökkentek).

A statisztikákat jobban böngésző szurkoló ehhez hozzáteszi, hogy a diagramok bal oldalán viszont javulást látunk: a minimum és az alsó kvartilis értéke nőtt (előbbi 3 ponttal, utóbbi viszont 7-tel!).

Mit gondolhat az edző? Hasonlítsuk össze az interkvartilis terjedelmeket is:

$$IQR_{ősz} = 24 - 11 = 13,$$
$$IQR_{tavasz} = 21 - 18 = 3.$$

A medián változása gyakorlatilag elhanyagolható (fél pont). Ezekből azt állapíthatjuk meg, hogy a játékos teljesítménye tavaszra sokkal kiegyensúlyozottabb lett, ráadásul az őszi idény felső kvartiliséhez közel: tavasszal a meccsei legalább felén 18 és 21 pont között dobott, ami nagyon jó eredmény.

c) A keresett Q_0 és Q_4 értéke egyszerűen leolvasható: $Q_0 = 9$, $Q_4 = 27$ (mindkettő őszi adat). A kvartilisek esetén figyelembe kell vennünk, hogy 20 adatból dolgozunk, vagyis a medián, az alsó és felső kvartilis is két adat (5. és 6., illetve 10. és 11., végül 15. és 16. érték) számtani közepe.

A mediánt pontosan meg tudjuk adni. Tekintsük a rangsorba rendezett őszi és tavaszi mintát. Tudjuk, hogy az őszi első öt mintaelem utolsó tagja 20, a második öt elem első tagja 21. Tavaszról nincs pontos adatunk, lehetne ez a két érték 20 és 20, 19 és 21 vagy 18 és 22. Azonban tavasszal $Q_3 = 21$, ezért 22 nem lehet Q_3 előtt, vagyis tavasszal a két középső elem csak 20 és 20 vagy 19 és 20 lehet. Így a két mintát egyesítve a középső négy elem 20, 20, 20, 21 vagy 19, 20, 20, 21, azaz a teljes évre vonatkozó medián értéke 20.

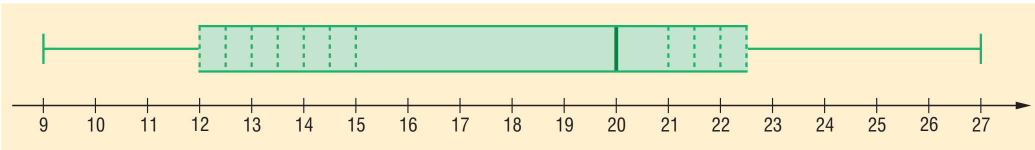
A tavaszi mintában $Q_2 = 20$, $Q_3 = 21$, tehát a tavaszi rangsor 5., 6., 7. elemét ezek a számok adják. Mivel 21 szerepelt kétszer az őszi mintában is, így a teljes éves rangsorban a 11.-től a 15. elemig csak 20 és 21 fordul elő. Az őszi minta 24, 24, 27 értéke, illetve a tavaszi minta maximuma (24) az éves rangsorban az utolsó helyekre (17.–20.) kerül. Az egyetlen, amit nem tudunk, az az éves rangsor 16. tagja, ami 21 és 24 között bármi lehet. Így a teljes évre vonatkozó Q_3 értéke négy féle lehet: 21, 21,5, 22 vagy 22,5.

Az alsó kvartilist még kevésbé pontosan tudjuk meghatározni. Annyi biztos, hogy az őszi adatok és a tavaszi diagram minimuma (12) alapján a teljes évi rangsor első öt tagja 9, 10, 11, 12, 12. Azonban a következő érték 18-ig bármi lehet (a tavaszi mintában van 18), tehát a teljes évre vonatkozó Q_1 érték 12, 12,5, …, 15 közül kerül ki.

A teljes minta ismert értékei:

9, 10, 11, 12, 12, □, □, □, □, 20, 20, □, 21, 21, 21, □, 24, 24, 24, 27.

A négy egymást követő ismeretlen hely közül az első három egyikére kerül a 18. Ezekből a dobozdiagram:



4564 *a)* A számtani átlag 85,25, ez kerekítve 85 pont.

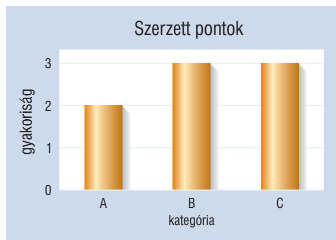
b) A minta módusza a leggyakoribb elem: 83. A rangsorba rendezett minta mediánja a két középső elem átlaga, ez 84,5. A minta terjedelme: $94 - 76 = 18$.

c) Az osztályközt válasszuk $18 : 3 = 6$-nak. Így az ábrán látható gyakorisági táblát kapjuk.

A kategória felső határa nem tartozik a kategóriához, kivéve a *C* kategóriát.

***A* kategória**	(76–82)	2
***B* kategória**	(82–88)	3
***C* kategória**	(88–94)	3

d) A keresett diagram az ábrán látható.



4565 Alkossák az n elemű mintát az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatok. Ekkor a minta átlaga:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

a) Ha az elemeket kicseréljük $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$-re, akkor A' átlaguk:

$$A' = \frac{x_1 + b + x_2 + b + \ldots + x_n + b}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n \cdot b}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + b = A + b.$$

b) Ha az elemeket kicseréljük $c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n$-re, akkor A'' átlaguk:

$$A'' = \frac{c \cdot x_1 + c \cdot x_2 + \ldots + c \cdot x_n}{n} = \frac{c \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} =$$

$$= c \cdot \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = c \cdot A.$$

4566 Tételezzük fel, hogy az eredeti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatokból álló n elemű rangsor módusza $Mo = x_m$ $(1 \le m \le n)$, mediánja Me. Az alsó és felső kvartilisek kiszámítása megegyezik a mediánnal.

Vegyük észre, hogy a módusz nem az elemek nagyságához, hanem az elemek előfordulásához kapcsolódik, a medián pedig az elem rangsorban elfoglalt helyzetéhez! A medián páratlan sok elem esetén $(n = 2k + 1)$ a „középső" elem $(Me = x_{k+1})$, páros sok szám esetén a „középső kettő" elem átlaga $\left(Me = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$.

a) Legyen az új minta $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$. Az elemekhez hozzáadott b valós szám sem a gyakoriságukon, sem a rangsorban elfoglalt helyzetükön nem változtat. Így az új módusz:

$$Mo' = x_m + b = Mo + b.$$

Páratlan elemszámú minta esetén $(n = 2k + 1)$ az eltolt minta Me' mediánja:

$$Me' = x_{k+1} + b = Me + b.$$

Páros elemszámú mintában $(n = 2k)$ az új minta Me' mediánja:

$$Me' = \frac{x_k + b + x_{k+1} + b}{2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + b = Me + b.$$

b) Hasonló a helyzet, ha c valós számmal szorozzuk a minta összes elemét:

$$Mo'' = c \cdot x_k = c \cdot Mo.$$

Páratlan elemszámú mintára:

$$Me'' = c \cdot x_{k+1} = c \cdot Me,$$

illetve páros elemszámú mintára:

$$Me'' = \frac{c \cdot x_k + c \cdot x_{k+1}}{2} = c \cdot \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = c \cdot Me.$$

Ez akkor is így van, ha $c = 0$ vagy $c < 0$. Utóbbi esetben a rangsor megfordul, a maximális elem a minimális lesz, és előre kerül.

4567 Legyen az n elemű $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatokból álló minta terjedelme R, szórása s, abszolút átlagos eltérése AE.

a) Legyenek az új minta elemei $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$. Ekkor a terjedelem nem változik:

$$R' = x_{\max} + b - (x_{\min} + b) = x_{\max} - x_{\min} = R.$$

A szórás esetén használjuk ki, hogy a számtani átlag $A + b$-re változik:

$$s' = \sqrt{\frac{\left(x_1 + b - (A + b)\right)^2 + \ldots + \left(x_n + b - (A + b)\right)^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}} = s.$$

Az abszolút átlagos eltérésben is használjuk ki, hogy a medián $Me + b$-re változik:

$$AE' = \frac{\left|x_1 + b - (Me + b)\right| + \ldots + \left|x_n + b - (Me + b)\right|}{n} =$$

$$= \frac{\left|x_1 - Me\right| + \ldots + \left|x_n - Me\right|}{n} = AE.$$

b) Legyenek az új minta elemei $c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n$. Ekkor a terjedelem:

$$R' = c \cdot x_{\max} - c \cdot x_{\min} = |c| \cdot (x_{\max} - x_{\min}) = |c| \cdot R.$$

Az abszolút értéket használnunk kell, $c < 0$ esetben a mintában ugyanis a maximális és a minimális elem felcserélődik.

A szórás esetén használjuk ki, hogy a számtani átlag $c \cdot A$-ra változik:

$$s' = \sqrt{\frac{(c \cdot x_1 - c \cdot A)^2 + \ldots + (c \cdot x_n - c \cdot A)^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{c^2 \cdot \frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}} = |c| \cdot s.$$

Az abszolút átlagos eltérésben is használjuk ki, hogy a medián $c \cdot Me$-re változik:

$$AE' = \frac{|c \cdot x_1 - c \cdot Me| + \ldots + |c \cdot x_n - c \cdot Me|}{n} =$$

$$= |c| \cdot \frac{|x_1 - Me| + \ldots + |x_n - Me|}{n} = |c| \cdot AE.$$

4568 Legyen a t elemű minta rangsorba rendezve $x_1, x_2, \ldots, x_t$. Csoportosítsuk őket n darab osztályba, legyen az osztályköz $\frac{x_{\max} - x_{\min}}{n} = d > 0$, és jelölje az osztályközepeket $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Essen az egyes osztályokba rendre $r_1, r_2, \ldots, r_n$ darab adat $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n = t)$.

Vizsgáljuk meg a minta elemeiből számított A és a gyakorisági táblázatból számított A' átlag eltérését:

$$|A - A'| = \left| \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_t}{t} - \frac{r_1 \cdot K_1 + r_2 \cdot K_2 + \ldots + r_n \cdot K_n}{t} \right| =$$

Párosítsuk a minta elemeit a megfelelő osztályközepekkel (az első r_1 darab elemet K_1-gyel stb.):

$$= \left| \frac{(x_1 - K_1) + \ldots + (x_{r_1} - K_1) + (x_{r_1+1} - K_2) + \ldots + (x_t - K_n)}{t} \right| \le$$

Kihasználjuk, hogy $|a + b| \le |a| + |b|$ háromszög-egyenlőtlenség teljesül akármennyi értékre:

$$\le \frac{|x_1 - K_1| + \ldots + |x_{r_1} - K_1| + |x_{r_1+1} - K_2| + \ldots + |x_t - K_n|}{t} \le$$

Kihasználjuk, hogy az adott kategóriába eső elemek maximum az osztályköz felével térhetnek el az osztályközéptől:

$$\le \frac{t \cdot \frac{d}{2}}{t} = \frac{d}{2}.$$

Tehát a gyakorisági táblázatból számított és a valódi átlag legfeljebb az osztályköz felével térhet el egymástól.

4569 Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ minta n elemű, számtani átlaga:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

szórása pedig

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}}.$$

Azt akarjuk bizonyítani, hogy ha s képletében bármely X-re cseréljük A-t, akkor nem kaphatunk kisebb számot az eredeti s-nél. Ehhez megvizsgáljuk az X-től függő (a többi adat rögzített)

$$\sqrt{\frac{(x_1 - X)^2 + \ldots + (x_n - X)^2}{n}}$$

kifejezést, hogy mely X-re van minimuma. Mivel nemnegatív mennyiség, ott van minimuma, ahol a négyzetének is minimuma van:

$$\frac{(x_1 - X)^2 + \ldots + (x_n - X)^2}{n}.$$

A nevezőt sem kell figyelembe vennünk, hiszen a minimumot csak a számláló befolyásolja. Így elegendő a négyzeteket megvizsgálni:

$$(x_1 - X)^2 + \ldots + (x_n - X)^2 = x_1^2 - 2x_1X + X^2 + \ldots + x_n^2 - 2x_nX + X^2 =$$

$$= nX^2 - 2X \cdot (x_1 + \ldots + x_n) + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

A kifejezés X-ben másodfokú, mégpedig egy felfelé nyíló parabola ($n > 0$).

Tudjuk, hogy az $ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ kifejezésnek $x_{\min} = -\frac{b}{2 \cdot a}$ helyen van minimuma. Jelen esetben $a = n$, $b = -2 \cdot (x_1 + \ldots + x_n)$. Így:

$$X_{\min} = -\frac{-2 \cdot (x_1 + \ldots + x_n)}{2 \cdot n} = A.$$

Azaz a szórás a számtani átlagra minimális.

4570 Legyen az n elemű rangsor $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mediánját jelölje Me, abszolút átlagos eltérését pedig

$$AE = \frac{|x_1 - Me| + \ldots + |x_n - Me|}{n}.$$

Két lépésben bizonyítjuk az állítást. Először megvizsgáljuk páratlan sok, majd páros sok elemű mintára. Mindkétszer belátjuk, hogy az abszolút átlagos eltérésben Me helyére más számot írva, nem kaphatunk AE-nél kisebb értéket.

I. eset: Ha n páratlan, akkor a medián a minta középső eleme:

$$Me = x_k, \quad \text{ahol} \quad k = \frac{n+1}{2}.$$

Lehetséges, hogy a mintának több eleme is megegyezik a mediánnal. Legyen az első ilyen elem indexe e, az utolsóé u.

Így $(u - e + 1)$ darab elemre (akár $e = k$ vagy $k = u$):

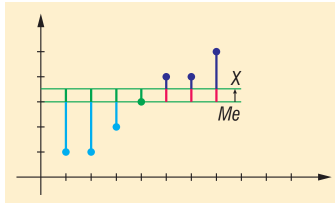
$$x_e = \ldots = x_k = \ldots = x_u = Me.$$

A rangsorban az x_e előtti elemek kisebbek, az x_u után levők nagyobbak a mediánnál. Figyelembe véve a nagyságrendi viszonyokat, az abszolút átlagos eltérés abszolút érték nélküli alakban is írható:

$$AE = \frac{(Me - x_1) + \ldots + (Me - x_{e-1}) + (u - e + 1) \cdot (Me - x_k) + (x_{u+1} - Me) + \ldots + (x_n - Me)}{n}$$

Cseréljük ki a kifejezésben Me-t X-re. AE nagysága csak a számlálóban található X-től függ:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_{e-1}) + (u - e + 1) \cdot (X - x_k) + (x_{u+1} - X) + \ldots + (x_n - X).$$



Növeljük X értékét. Legyen kicsit nagyobb a mediánnál, de még $X < x_{u+1}$. Ekkor az első u tag növekedni fog pontosan $X - x_k$ értékkel, a maradék tagok pedig pontosan ennyivel csökkennek. Mivel $k = \frac{n+1}{2} < u + 1$, több tag fog növekedni, mint amennyi csökken. Így az összeg csak növekedhet, mégpedig $(2u - n) \cdot (X - x_k)$ értékkel. (Az ábrán $e = k = u$. A piros vonalak AE csökkenését, a vastag zöldek a növekedését jelzik.)

Ha X eléri x_{u+1} értékét, akkor az $(u + 1)$-edik zárójelben és mindazokban, ahol x_{u+1}-gyel egyenlő értékek állnak, meg kell fordítani a különbséget:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_{e-1}) + (u - e + 1) \cdot (X - x_k) + (X - x_{u+1}) + \ldots + (x_n - X).$$

Innentől kezdve ezek a tagok az eddigi csökkenés helyett már növekedni fognak. Tehát még több tag növekedik és kevesebb csökken, mint eddig. Így tovább, minél inkább $Me < X$, annál inkább $AE < AE(X)$.

II. eset: Ha n páros, akkor a medián a két középső elem átlaga:

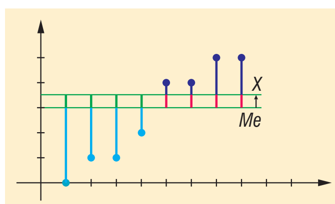
$$Me = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad \text{ahol} \quad k = \frac{n}{2}.$$

Ha a két középső elem egyenlő, akkor az I. esetnél leírtakat szóról szóra alkalmazhatjuk. Ha különbözőek, akkor a mintában nincs olyan elem, amely megegyezne a mediánnal. Sőt, az elemek pontosan fele kisebb és fele nagyobb Me-nél. Abszolút értékek nélkül írva:

$$AE = \frac{(Me - x_1) + \ldots + (Me - x_k) + (x_{k+1} - Me) + \ldots + (x_n - Me)}{n}.$$

Ismét cseréljük ki a kifejezésben Me-t X-re. AE nagysága csak a számlálótól függ:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_k) + (x_{k+1} - X) + \ldots + (x_n - X).$$



Változtassunk X értékén. Válasszuk nagyobbnak a mediánnál, de még $X < x_{k+1}$ legyen. Ekkor a tagok első fele növekedni, második fele csökkenni fog ugyanazon $X - Me$ értékkel, azaz az összeg nem változik.

Amint $X = x_{k+1}$, a $(k + 1)$-edik zárójelben és mindazokban, ahol x_{k+1}-gyel egyenlő értékek állnak, megfordítjuk a különbséget:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_k) + (X - x_{k+1}) + \ldots + (x_n - X).$$

Tovább növelve X-et, az imént megfordított tagok már nem csökkenni, hanem növekedni fognak. Mivel így több tag nő, mint csökken, az összeg is növekedni fog. A gondolatmenet hasonlóan folytatódik, ha $X > x_{k+1}$.

Megjegyzés: Mindkét gondolatmenet hasonlóan végigvihető, ha X értékét csökkentjük Me-ről.

Vegyes feladatok – megoldások

4571 $|J| = 10,\ |I| = x,\ p = 0{,}5 = \dfrac{x}{10}$. Ebből $x = 5$, ezért csak $I = \left]1;\, 6\right[$ lehet.

4572 $P = \dfrac{5 \cdot 7}{15 \cdot 35} = \dfrac{1}{15}$.

4573 $M = 0{,}02 \cdot 1 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}24 \cdot 3 + 0{,}6 \cdot 4 + 0{,}11 \cdot 5 = 3{,}75$ év.

4574 *a)* A csoportba 12-en járnak.

b) $A_{\text{kiscs.}} = \dfrac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 17}{12} = 7;$

$$A_{\text{nagycs.}} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 12 + 3 \cdot 17}{12} = 10{,}75 \approx 11.$$

4575 *a)* Igen, $Mo = 2,\ Q_1 = 2,\ Me = Q_2 = 3$ és $Q_3 = 4$.

b) Nem.

c) $A = \dfrac{4 \cdot 4{,}5 + 9 \cdot 12{,}5 + 6 \cdot 20{,}5 + 8 \cdot 28{,}5 + 3 \cdot 36{,}5}{30} = 19{,}7;$

$$s = \sqrt{\frac{4\cdot(4{,}5-19{,}7)^2+9\cdot(12{,}5-19{,}7)^2+6\cdot(20{,}5-19{,}7)^2+8\cdot(28{,}5-19{,}7)^2+3\cdot(36{,}5-19{,}7)^2}{30}} \approx 9{,}77;$$

$I = \left]9{,}93;\, 29{,}47\right[$.

d) $AE = \dfrac{4 \cdot |1-3| + 9 \cdot |2-3| + 6 \cdot |3-3| + 8 \cdot |4-3| + 3 \cdot |5-3|}{30} \approx 1;$

$I = \left]2;\, 4\right[$.

4576 Ha a korong ($r = 1{,}5$ cm) teljes egészében egy négyzetbe esik, akkor a riasztó csendben marad. Elég egy négyzetet tekintenünk. Ehhez a korong középpontjának egy $(10 - 2 \cdot 1{,}5)$ oldalú négyzetbe kell esnie. (Feltehetjük, hogy érintésre még nem riaszt.) Tehát annak a valószínűsége, hogy nem szólal meg a riasztó, illetve annak a valószínűsége, hogy megszólal:

$$P(\text{csend}) = \frac{49}{100}, \qquad \text{illetve} \qquad P(\text{riaszt}) = \frac{51}{100}.$$

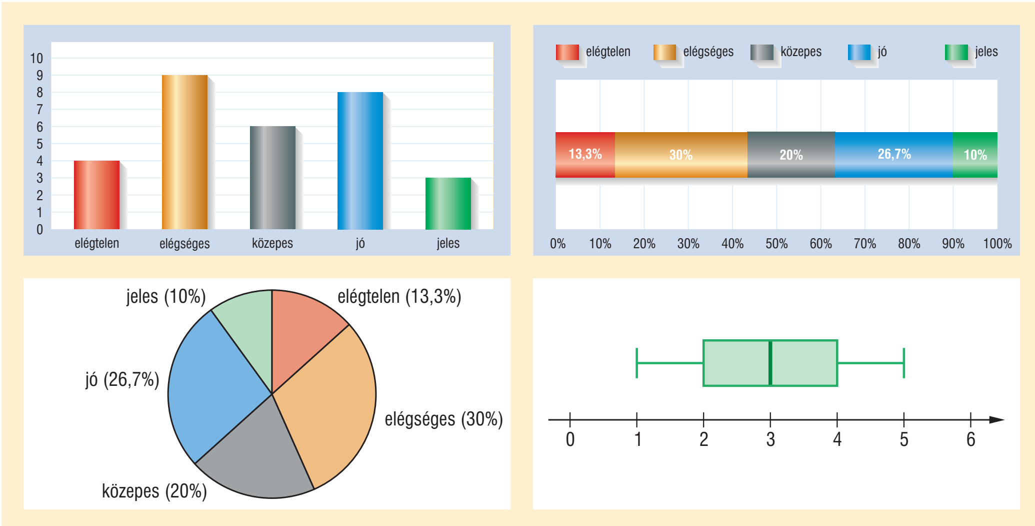
A válasz a kérdésre igen, a riasztó nagyobb valószínűséggel kezd szirénázni.

4577 A várható érték:

$$M = \binom{7}{0} \cdot 0{,}36^0 \cdot 0{,}64^7 \cdot 0 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}36^1 \cdot 0{,}64^6 \cdot 1 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}36^2 \cdot 0{,}64^5 \cdot 2 +$$
$$+ \binom{7}{3} \cdot 0{,}36^3 \cdot 0{,}64^4 \cdot 3 + \binom{7}{4} \cdot 0{,}36^4 \cdot 0{,}64^3 \cdot 4 + \binom{7}{5} \cdot 0{,}36^5 \cdot 0{,}64^2 \cdot 5 +$$
$$+ \binom{7}{6} \cdot 0{,}36^6 \cdot 0{,}64^1 \cdot 6 + \binom{7}{7} \cdot 0{,}36^7 \cdot 0{,}64^0 \cdot 7 \approx 2{,}52.$$

Tehát várhatóan két vagy három saját számot fog hallani Zsófi.

4578 *a)* A sávdiagram százalékai: elégtelen 13,3%, elégséges 30%, közepes 20%, jó 26,7%, jeles 10%. A kördiagram középponti szögei: elégtelen 48°, elégséges 108°, közepes 72°, jó 96°, jeles 36°. A dobozdiagramnál $Q_0 = 1$, $Q_1 = 2$ (a 8. adat), $Q_2 = 3$ (a 15. és 16. számtani átlaga), $Q_3 = 4$ (a 23. adat), $Q_4 = 5$.



b) Az első három diagramról leolvasható, hogy a módusz az elégséges. A sáv és a kördiagramon azt is láthatjuk, hogy a teljes mintához hogyan viszonyulnak az egyes kategóriák, például jó jegyet az osztály negyede kapott. A dobozdiagramról ebben az esetben nagyon kevés információ olvasható le: biztosan volt egy-egy elégtelen és jeles, illetve az elemszám miatt a rangsor 8. eleme elégséges, a 23. eleme pedig jó. De az sem biztos, hogy valaki szerzett közepes érdemjegyet.

c) A legjobb átlagot akkor kapjuk, ha a rangsorban az utolsó hét jegy 5-ös, az előtte levő hét jegy 4-es, aztán nyolc jegy 3-as, hét jegy 2-es és csak az első jegy 1-es. Ekkor az átlag 3,4. A legrosszabb átlagot ugyanígy felírva, csak az 1-estől indulva kapjuk, értéke 2,6.