Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

MEGOLDÁSOK 11

Tizenötödik, a NAT2020 szerint átdolgozott kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2022

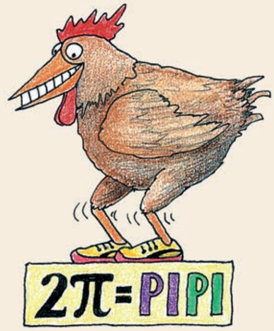
TARTALOMJEGYZÉK

Megoldások – 11. évfolyam

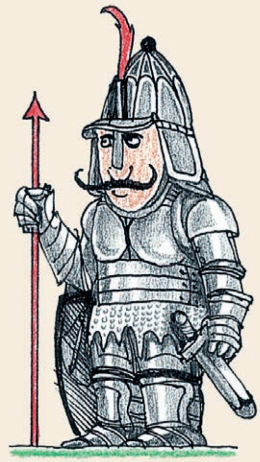
11.1. *Kombinatorika, gráfok* (3001–3160)

11.2. *Hatvány, gyök, logaritmus* (3161–3241)

11.3. *A trigonometria alkalmazásai* (3242–3459)



11.4. *Függvények* (3460–3554)



11.5. *Koordináta-geometria* (3555–3776)

11.6. *Valószínűség-számítás, statisztika* (3777–3892)

11.1. KOMBINATORIKA, GRÁFOK

Fibonacci-számok – megoldások

3001 $f_{15} = 610$, $f_{20} = 6765$.

3002 *a)* –1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13;

b) 1, –1, 0, –1, –1, –2, –3, –5, –8, –13.

3003 *a)* 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136.

b) Igen, a 13.

3004 A második tagot az első és az első előtt álló összegeként kapjuk: $x + 1 = 1$; innen $x = 0$. Az előtte levő tag: $y + 0 = 1$; innen $y = 1$. Majd $z + 1 = 0$; $z = -1$. Aztán $u + (-1) = 1$; $u = 2$. Hasonlóan kapjuk a többi számot:

$$34,\ \ -21,\ \ 13,\ \ -8,\ \ 5,\ \ -3,\ \ 2,\ \ -1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ \mathbf{1},\ \ \mathbf{1},\ \ 2,\ \ 3,\ \ 5,\ \ \ldots$$

Érdekes módon a Fibonacci-számokat látjuk, csak váltakozó előjellel.

3005 Érdemes először kísérletezni néhány értékkel. Hamar megtaláljuk a csupa 0 sorozatot, ami ismétlődést mutat. Azonban más sorozat nem, így megfogalmazhatjuk a sejtésünket: *általában* nem lehet a számok között ismétlődés. Sőt, egy idő után vagy szigorúan növekednek, vagy szigorúan csökkennek a számok – a már említett csupa 0 kivételével. Hogyan bizonyítsuk be?

Gyűjtsünk össze egyszerű megfigyeléseket.

A) Ha két pozitív szám van egymás után valahol a sorozatban, akkor az utánuk levők is pozitívak, sőt a számok szigorúan növekednek az összeadás miatt.

B) Ha van két szomszédos negatív szám a sorozatban, akkor az utánuk levők is negatívak, sőt a számok szigorúan csökkennek.

C) Ha találunk nullát, és előtte pozitív vagy negatív értéket, akkor az *A)* vagy *B)* esethez jutunk: a nulla megduplázza az előtte álló számot.

Jónak tűnik a gondolatmenet, folytassuk. Mi a helyzet, ha egy pozitív és egy negatív érték áll egymás mellett?

D) Ha a két szám abszolút értéke egyenlő, akkor megjelenik a nulla, *C)* esethez jutunk.

E) Ha a pozitív szám abszolút értéke nagyobb, akkor pozitív értéket kapunk. Ezen belül E_1*)*, ha a pozitív érték volt később, az *A)* esethez jutottunk.

F) Ha a negatív érték abszolút értéke nagyobb, akkor negatív számot kapunk. Ezen belül F_1*)*, ha a negatív érték volt később, a *B)* esethez jutottunk.

Az *E)* és *F)* esetben van egy-egy további eset is: E_2*)*, ha a negatív érték van később; illetve F_2*)*, ha a pozitív érték szerepel később. Mindkét helyzetben visszajutunk *D)*, *E)* vagy *F)* esethez.

Ráadásul a létrejövő szám abszolút értéke megegyezik az összeg abszolút értékével, ami szigorúan kisebb lesz, mint az előző kettő közül a nagyobb abszolút értékű. Ennek a csökkenésnek pedig előbb-utóbb vége szakad: *A)*, *B)* vagy *C)* esetekhez kanyarodunk vissza.

Néhány példa az E_2*)* és F_2*)* esetekre:

a) –10, 4, –6, –2, … *b)* –10, 8, –2, 6, 4, … *c)* 10, –5, 5, 0, …

Mivel minden esetet áttekintettünk, ezzel a bizonyítást befejeztük: a 0, 0, 0, … számok kivételével nincs más olyan Fibonacci-szerű sorozat, amiben lenne ismétlődés (sőt, előbb-utóbb mindig szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő számokat kapunk).

Permutációk, variációk – megoldások

3006 $86!$

3007 $27!$

3008 $\dfrac{21!}{6!\cdot 5!\cdot 10!} = 162\,954\,792.$

3009 *a)* $\dfrac{(3+2)!}{3!\cdot 2!} = 10;$ *b)* $\dfrac{(3+2+0)!}{3!\cdot 2!\cdot 0!} = 10;$ *c)* $0! = 1.$

3010 $\dfrac{18!}{(18-6)!} = 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13 = 13\,366\,080.$

3011 *a)* $\dfrac{10!}{(10-6)!} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 151\,200;$

b) $\dfrac{10!}{(10-4)!} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040.$

3012 10^7.

3013 $2^8 = 256$.

3014 Ebben a feladatban és a továbbiakban is nemnegatív (sőt elsősorban pozitív) egész megoldásokat keresünk. A legegyszerűbb, ha próbálkozunk.

A másik lehetőség, hogy kicsit gondolkodunk a próbálkozás előtt: $n! = 39\,916\,800$. A szám végén álló két 0 arra utal, hogy két ötös prímtényezőnek lennie kell a szorzatban. Az egyik maga az 5. A másikat a 10-ben találjuk, tehát legalább $10!$-ig el kell menni. Ez még kevés, a megoldás $n = 11$.

3015 Az első három számjegyet 6^3, a második hármat $\dfrac{10!}{(10-3)!}$-féleképpen kaphatjuk meg. Az eredmény a kettő szorzata: $216\cdot 720 = 155\,520$.

3016 *a)* Egyszerű permutációja 8 különböző elemnek: $8! = 40\,320$.

b) Válasszunk ki egy főt, tekintsük őt kiindulópontnak. A megadott körüljárás szerint ültessük sorba a maradék hét főt. Ez úgy történik, mintha egyszerűen permutálnánk őket: $7! = 5\,040$.

c) Most nem érdekes a körüljárási irány, ezért ugyanazt kapjuk, ha az asztal egy átmérőjére tükrözzük a résztvevőket. Így az előző pontban másik ültetést kaptunk volna, most azonban ez a kettő ugyanaz. A megoldás: $\dfrac{7!}{2} = 2520.$

3017 Számoljuk meg a növényeket, összesen 6-félét találunk a pulton. Mindegyikből minden helyen tehet egyet a kosarába, azaz a $6^n = 1\,679\,616$ egyenletet kell megoldanunk. A megoldást megkaphatjuk próbálkozással vagy az $1\,679\,616$ prímtényezős felbontásával. A megoldás: $n = 8$.

Megjegyzés: Pár lecke múlva mindkét oldal 6-os alapú logaritmusát véve is meg tudjuk oldani az egyenletet.

3018 A második dobozból az ismétlődés miatt a cédulákat $\dfrac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}$-féleképp húzhatjuk ki (permutáció, hiszen mindet kivesszük). Az első dobozból ugyancsak az ismétlődés miatt 10^4 lehetőségünk van kivenni a cédulákat (variáció, a kiválasztás miatt). Eredményünk a kettő szorzata: $12\,600\,000$.

3019 Egy n alapú számrendszerben 0-tól $(n-1)$-ig n különböző számjegy van, ezekből kell 7 helyre írni egyet-egyet. (A kevesebb jegyből álló számokat úgy kapjuk, hogy a szám elejére megfelelő számú 0-t írunk.) Vagyis az $n^7 = 2\,097\,152$ egyenletet kell megoldanunk, amit próbálkozással vagy hetedik gyökvonással teszünk meg. Az eredmény $n = 8$, a számrendszer tehát a nyolcas.

3020 *a)* Bármikor bármelyik csúcsra ugorhat, minden esetben négy lehetősége van: 4^{10}.

b) Elsőnek bárhova, utána viszont már csak 3-3 helyre ugorhat: $4 \cdot 3^9$.

c) Elsőnek bárhova ugorhat. A következő ugrása a mostani helyéről elviszi, az utána levőkben pedig mindig kizárunk kettő csúcsot: $4 \cdot 3 \cdot 2^8$.

3021 Legyen a műsor nézőszáma n. Ekkor az első játékost n, a másodikat $(n-1)$-féleképpen választhatják ki a nézők közül, vagyis

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1) = 1980.$$

Ezt az egyenletet négyféleképp: próbálkozással; a zárójelet felbontva másodfokú egyenletként; az 1980-at prímtényezőkre bontva vagy gyökvonásból kerekítve is megoldhatjuk. Az eredmény $n = 45$.

3022 *a)* A három említett miniszterelnököt vegyük egy „csomagnak”. Ekkor 8 főt kell leültetnünk, ezt 8!-féleképp tehetjük meg. Az angolnak és a franciának közre kell fognia a németet, őket ezért még kétféleképpen ültethetjük minden sorrenden belül. Az eredmény: $2 \cdot 8!$

b) Ismét csomagoljuk össze a hármast. 8 főt kör alakú asztal mellé 7!-féleképp ültethetünk le, ha figyelembe vesszük a körüljárási irányt is. Vegyük figyelembe a hármasban a szélsők sorrendjét is: $2 \cdot 7!$ Végül tekintsünk el a körüljárási iránytól: $\frac{2 \cdot 7!}{2} = 7!$

3023 Egyik lehetőségünk a próbálkozás. Másrészt viszont ha számolunk, ismétléses permutációt kell számolnunk. Jelöljük c-vel $(2 \le c < 12)$ a keresett színpadi művek számát:

$$\frac{(4+5+c)!}{4! \cdot 5! \cdot c!} = 27\,720.$$

Tüntessük el a törtet, a következő egyenletet kapjuk:

$$(9+c)! = 79\,833\,600 \cdot c!$$

Leosztva 11!-sal (figyelembe véve c lehetséges értékeit):

$$12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (9+c) = 2c!$$

$$6 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (9+c) = c!$$

A c értékétől függően több esetünk van. Ha $9 + c = 12$, akkor $c = 3$ és így $12 = 2 \cdot 3!$ Ez jó megoldás.

Ha $3 < c < 12$, akkor a bal oldalon szerepel 13, ezért a jobb oldalon is el kell menni legalább 13!-ig. Azonban ebben (jobb oldalon) szerepel 11 is, ami viszont a másik (bal) oldalon nem fog előfordulni, ellentmondásra jutottunk. Ezen esetekben nincs megoldás, Lacinak 3 színházi előadást tartalmazó lemeze van.

3024 Az öt gyermek megszülethet 5 lány; 4 lány és 1 fiú; 3 lány és 2 fiú; 2 lány és 3 fiú; 1 lány és 4 fiú; 5 fiú variációban.

Az első és az utolsó esetben egyszerű dolgunk van, mindkétszer 5! sorrendben adhatnak nevet a megszületendő gyerekeknek.

Vegyük bonyolultabb példának a harmadik esetet. Ekkor a gyerekek között a lányok-fiúk sorrendje ismétléses permutáció: $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$, azon belül a lányoknak $\frac{5!}{(5-3)!}$, a fiúknak $\frac{5!}{(5-2)!}$-féleképpen adhatnak nevet (ismétlés nélküli variáció).

Ez alapján minden esetet számba tudunk venni (a szimmetria miatt elég az egyes eseteket kettővel szorozni), a végeredmény:

$$2\cdot 5!+2\cdot\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot\frac{5!}{(5-4)!}\cdot\frac{5!}{(5-1)!}+2\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{(5-3)!}\cdot\frac{5!}{(5-2)!}=30\,240.$$

3025 Először is gondoljuk át a feltételeket. Az ismétléses esetben k-ra és n-re semmiféle megszorítás nincs azon kívül, hogy nemnegatív egészek. Az ismétlés nélküli esetben azonban $0\le k\le n$. Ez szigorúbb feltétel az előzőnél, így tartsuk magunkat az utóbbihoz. A kérdés: mely, a fenti feltételeknek megfelelő n, k-ra igaz:

$$n^k=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Feltételezhetjük, hogy $n\neq 0$, így nem kell a 0^0 hatvánnyal foglalkoznunk. Vizsgáljuk meg k néhány értékét! Ha $k=0$, akkor

$$1=n^0=\frac{n!}{n!}=1,$$

vagyis ekkor bármely n-re teljesül az egyenlőség. Ha $k=1$, akkor ugyanez a helyzet:

$$n=n^1=\frac{n!}{(n-1)!}=n.$$

Ha $k=2$, akkor $n^2=n\cdot(n-1)$ egyenlethez jutunk. Ennek egyetlen megoldása $n=0$, ami nem felel meg a $k\le n$ feltételnek. Ha k értékét tovább növeljük, akkor egyre magasabb fokú egyenletekhez jutunk, melyeket nem tudunk megvizsgálni. A megoldás azonban sokkal egyszerűbb.

Azt kell észrevennünk, hogy a kiinduló egyenlőség jobb és bal oldalán is k tényezőből álló szorzatokat találunk, azonban a bal oldalon csupa n tényezővel, a jobbon viszont n-től csökkenő tényezőkkel. Vagyis ha a szorzatoknak több tényezője is van, akkor nem lehetnek egyenlők.

A megoldás: $k=0$ és $k=1$ értékre bármely n-re megegyezik n elem k-tagú ismétléses és ismétlés nélküli variációinak száma, más értékekre viszont soha.

Ismétlés nélküli kombinációk, Pascal-háromszög – megoldások

3026 *a)* 6; *b)* 105; *c)* 462; *d)* 165; *e)* 55; *f)* 7381; *g)* 145; *h)* 1578; *i)* 1.

3027 *a)* 1; *b)* n; *c)* n^2-n; *d)* $\dfrac{n^2-n}{2}$; *e)* n; *f)* 1.

3028 *a)* $\binom{135}{44}$; *b)* $\binom{212}{101}$; *c)* $\binom{112}{55}$.

3029 *a)* Nincs.

b) Egy helyen: 2; kettő helyen: 3 és 4; három helyen: 6; négy helyen: 10. (Több helyen nem lehetnek, mert utoljára a szélső egyes mellett fordulhatnak elő.)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

3030 *a)* $\binom{6}{2}=15;$ *b)* $\binom{6}{3}=20;$ *c)* $\binom{6}{4}=15;$ *d)* $\binom{6}{5}=6;$

e) 6 elemből nem lehet 7-et kiválasztani.

3031 *a)* 6; *b)* 5.

3032 $\binom{7}{4}=35.$

3033 *a)* $\binom{45}{6}=8\,145\,060;$ *b)* $\dfrac{\binom{90}{5}}{\binom{45}{6}}=\dfrac{18\cdot 89\cdot 11\cdot 29\cdot 86}{15\cdot 44\cdot 43\cdot 7\cdot 41}=\dfrac{3\cdot 89\cdot 29}{5\cdot 7\cdot 41}\approx 5{,}4.$

3034 $\binom{9}{3}=84.$

3035 $\binom{7}{3}=35.$

3036 $\binom{60}{4}=487\,635.$

3037 A Pascal-háromszög előállításából adódóan szimmetrikus, és az értékek a sorok elején növekednek a szimmetriatengelyig. Így ha páros számról van szó, a felét kell aláírnunk. Páratlanokra két megoldást is kapunk: egyik a szám felének egészrésze, másik az ennél eggyel nagyobb egész. A konkrét példában:

a) $k=12,\ \binom{24}{12}=2\,704\,156;$ *b)* $k=6$ vagy $k=7,\ \binom{13}{6}=\binom{13}{7}=1716.$

3038 *a)* A törpök közül $\binom{12}{4}=495$-féleképp válogathat ebédre négyet Hókuszpók.

b) A maradék nyolc főből választanak először kettőt, majd a maradék hatból ismét kettőt. Mivel ezeket egymástól függetlenül meg tudják tenni, össze kell őket szoroznunk: $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}=420.$

3039 A lehetőségek száma: $\binom{9}{3}\cdot\binom{4}{2}=504.$

3040 *a)* A négykerekű autó mind a négy kerekére négy csavar kell, így a válasz: $\binom{60}{16}$.

b) Ha külön-külön vesz ki csavarokat a dobozból Sanyi, akkor a következő adagot mindig néggyel kevesebb közül választhatja, $\binom{60}{4}\cdot\binom{56}{4}\cdot\binom{52}{4}\cdot\binom{48}{4}$-féleképp.

c) Az *a)* eset kifejtve egyszerű: $\binom{60}{16}=\dfrac{60!}{16!\cdot 44!}$. Most *b)* esetet is fejtsük ki:

$$\binom{60}{4}\cdot\binom{56}{4}\cdot\binom{52}{4}\cdot\binom{48}{4}=\frac{60!}{4!\cdot 56!}\cdot\frac{56!}{4!\cdot 52!}\cdot\frac{52!}{4!\cdot 48!}\cdot\frac{48!}{4!\cdot 44!}=\frac{60!}{(4!)^4\cdot 44!}.$$

Az egyszerűsítések után maradt alakokból – mivel $16!>(4!)^4$ – már látható, hogy a *b)* esetben több lehetőségünk van a csavarok kiválasztására.

Végül osszuk el a *b)*-ben kapott eredményt az *a)*-ban kapottal. Így $\dfrac{16!}{4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!}$-hoz jutunk, ami megfelel 16 elem 4, 4, 4, 4-tagú ismétléses permutációinak. Azaz ha az *a)* esetben figyelembe vesszük ezt a sorrendet is (vagy a *b)* esetben eltekintünk tőle), akkor a két eset egyenlő lesz.

3041 *a)* Ha a piros király a leosztott lapok között van, akkor a maradék 31-ből kell még mellé tenni hármat: $\binom{31}{3} = 4495$.

b) Ez az eset három egymást kizáró alesetből áll össze: piros, de nem király; piros király; nem piros, de király. A három esetben összesen 11 lap van $(7 + 1 + 3)$, melyekből bele kell kerülnie egynek a leosztott négy lap közé. A többi három leosztott lap a maradék 21 lapból kerülhet ki. A megoldás: $\binom{11}{1} \cdot \binom{21}{3} = 14\,630$.

c) A „legalább" szó gyanús lehet, inkább számoljuk ki a kérdezett eset ellentétét (komplementerét). Ekkor arra kell válaszolnunk: hányféleképp fordulhat elő, hogy a leosztott négy lap között nincs sem piros, sem király lap? Azokból a lapokból, melyek nem pirosak és király sincs rajtuk, 21 van. A megoldást úgy kapjuk, ha kivonjuk az összes esetből az ellentettet: $\binom{32}{4} - \binom{21}{4} = 29\,975$.

3042 Az autószerelős feladathoz hasonló szorzatot kell felírnunk: $\binom{52}{3} \cdot \binom{49}{3} \cdot \binom{46}{3} \cdot \binom{43}{3}$. Az ottanihoz hasonlóan elvégezve az egyszerűsítéseket: $\dfrac{52!}{(3!)^4 \cdot 40!} \approx 7{,}6 \cdot 10^{16}$.

3043 **I. megoldás.** A „legalább egy ász" ellentéte, ha nincs ász a leosztásban. Mivel összesen négy ász van a pakliban, így az ellentétes eseteket az összes esetből kivonva a megoldás: $\binom{32}{4} - \binom{28}{4} = 15\,485$.

II. megoldás. A „legalább egy" jelent egy, kettő, három vagy négy ászt. Ez négy eset, lássuk részletesebben az egyiket, mondjuk a három ászt. Ekkor a csomagban levő négyből három bekerül a leosztásba, a maradék egyet pedig a nem ászok közül töltjük fel, $\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{1}$-féleképpen. A többi esetet is kiszámíthatjuk, összegük adja a megoldást:

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{3} + \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2} + \binom{4}{3} \cdot \binom{28}{1} + \binom{4}{4} \cdot \binom{28}{0} = 15\,485.$$

3044 A „legfeljebb egy" tök lehet egy vagy nulla darab. Ez csak két eset, nincs értelme áttérni az ellentett eseményre, hiszen ott hét alesetet kellene összeírni. Lássuk hát.
Ha nincs tök a leosztásban, akkor a pakliban levő nyolc lapból nulla darab kerül a négy lap közé, az összes többi piros, zöld vagy makk: $\binom{8}{0} \cdot \binom{24}{4} = 10\,626$. Ha egy tök van, akkor piros, zöld, makk lehet három: $\binom{8}{1} \cdot \binom{24}{3} = 16\,192$. A megoldás a kettő összege: $\binom{8}{0} \cdot \binom{24}{4} + \binom{8}{1} \cdot \binom{24}{3} = 26\,818$.

3045 Gondoljunk át részletesen egy esetet, például a három találatot. Hármasunk úgy lehet, ha az öt nyerőszámból megjelöltünk (kiválasztottunk) hármat, a maradék két tippünknek viszont a nem nyerő 85 számból kell kikerülnie. Ez alapján minden esetet számba vehetünk. Ha nincs találatunk, akkor minden megjelölt számunk a „nem nyert"-ek közül kerül ki. Ha pedig telitalálatunk van, akkor ott minden megjelölt tipp a nyerőszámok közül kerül ki.

a) $\binom{5}{0} \cdot \binom{85}{5} = 32\,801\,517$; *b)* $\binom{5}{1} \cdot \binom{85}{4} = 10\,123\,925$; *c)* $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} = 987\,700$;

d) $\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2} = 35\,700$; *e)* $\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} = 425$; *f)* $\binom{5}{5} \cdot \binom{85}{0} = 1$.

Figyeljük meg, hogy az összes lehetséges számötösök darabszáma $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$, ami a fentiek összege. Ez azért lehet, mert az összes esetet egymást kizáró alesetekre bontottuk.

3046 Egy kézfogás létrejöttéhez két ember kell. A kérdést módosíthatjuk így is: hány főből választhatunk ki összesen 45-féleképp kettőt? Vagy: határozzuk meg n természetes számot, amire $\binom{n}{2} = 45$. Ez nem bonyolult, csak írjuk fel „n alatt k" definícióját, és egyszerűsítsünk le $(n-2)!$-sal:

$$\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2} = 45.$$

Utóbbi egyenlőséget tekintsük önálló egyenletnek és tüntessük el a törteket, bontsuk fel a zárójelet, majd rendezzük egy oldalra. Így az $n^2 - n - 90 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, aminek megoldásai: $n_1 = 10$ és $n_2 = -9$. Nekünk a feladat szövege szerint csak a természetes számok jöhetnek szóba, így a tárgyaláson 10 fő volt jelen.

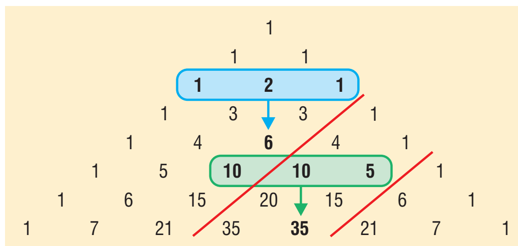
3047 Csak ki kell fejtenünk a bal oldalon álló kifejezéseket, majd közös nevezőre hozzuk őket:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot k + (n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

A végén kiemeltünk $(n-1)!$-t, és összevontunk a zárójelben. Így éppen $(n-1)!\cdot n = n!$ formát kapjuk, és készen is vagyunk.

3048 *a)* Az összefüggéshez egy soron belül kell három egymást követő számot találni (vagyis legalább a második sorból – lásd az ábrán), például:

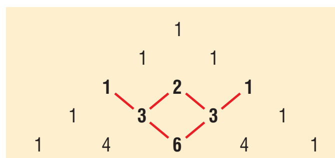
$$1 + 2\cdot 2 + 1 = 6,$$
$$10 + 2\cdot 10 + 5 = 35.$$



A kapott értékek két sorral lejjebb találhatók (innen az $n + 2$), és mivel a soron belül az azonos sorszámú tagok ferdén balra dőlve követik egymást (piros vonal), így az összeadandók közül az utolsó sorszámával egyezik meg az eredmény (innen a $k + 1$).

b) A bizonyítást elvégezhetnénk a definíció alapján is, azonban hosszadalmas és nem jelent újat az előző feladathoz képest. Ezért próbálkozzunk magával az ott tárgyalt összefüggéssel:

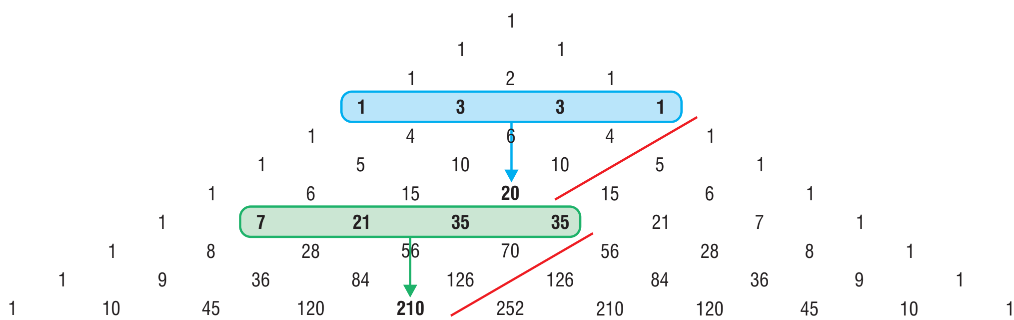
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}.$$



Érdemes az ábrán is követni a levezetést.

3049 *a)* A feladat az előző példához nagyon hasonlít, csak itt négy darab egy sorban, egymás után álló számot kell összeadnunk (ezért aztán leghamarabb a harmadik sorban tekinthetjük). Ott pedig

$$1 + 3\cdot 3 + 3\cdot 3 + 1 = 20 \quad \text{vagy később} \quad 7 + 3\cdot 21 + 3\cdot 35 + 35 = 210.$$



b) A 20 és 210 értékeket három sorral lejjebb, az utolsó értékkel azonos sorszámú helyen találjuk. Azaz a sejtésünk:

$$\binom{n}{k-2}+3\cdot\binom{n}{k-1}+3\cdot\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+3}{k+1}.$$

c) Az igazoláshoz használjuk fel hétszer az $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ összefüggést. A 3-as szorzó szükséges, ugyanis ha csak kétszer vennénk a középső elemeket, akkor például: $7+21=28$; $21+35=56$; $35+35=70$. Ezen három számból csak az egyik oldalon folytathatnánk, hiszen 56 egyszer szerepel. A középső elemet ezért meg kell dupláznunk, amihez három darab 21 és három darab 35 kell.

Megjegyzés: Az előző két feladatot természetesen lehet általánosítani, bővítve a számok sorát. Érdemes észrevennünk, hogy az együtthatók is a Pascal-háromszögből valók. Azonban most részletesebben egy további általánosításra hívjuk fel a figyelmet. Írjuk le az első sorokat, ahol az összefüggések előfordulhatnak így:

$$1^2+2^2+1^2=\binom{2}{0}^2+\binom{2}{1}^2+\binom{2}{2}^2=\binom{4}{2} \quad \text{és} \quad 1^2+3^2+3^2+1^2=\binom{3}{0}^2+\binom{3}{1}^2+\binom{3}{2}^2+\binom{3}{3}^2=\binom{6}{3}.$$

Általánosítva megfigyelésünket, új sejtéshez juthatunk. Próbáljuk meg bebizonyítani, hogy

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

3050 *a)* Az összefüggés az egymás utáni sorokban ugyanazon sorszámú helyeken álló számok összege, mindig a sorvégi szélső értéktől kezdve. Például:

$$1+3+6+10=20 \quad \text{vagy} \quad 1+5+15+35+70=126.$$

1

1 1

1 2 **1**

1 3 **3** 1

1 4 **6** 4 **1**

1 5 **10** 10 **5** 1

1 6 15 **20** **15** 6 1

1 7 21 35 **35** 21 7 1

1 8 28 56 **70** 56 28 8 1

1 9 36 84 126 **126** 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

b) Úgy tűnik, az összeg mindig az eggyel lejjebb levő sor eggyel hátrébb levő eleme. Sejtésünk:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

c) A bizonyítást elvégezhetjük rögzített k-ra n szerinti teljes indukcióval, de bevethetünk egy apró trükköt is. Igaz ugyanis, hogy

$$\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}, \quad \text{ahonnan} \quad \binom{k+1}{k+1}+\binom{k+1}{k}=\binom{k+2}{k+1}.$$

Így az első kéttagú összeg egybeolvad, majd a következő kettő újra és így tovább. Nem teszünk mást, mint újra és újra felhasználjuk az $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ összefüggést. Tulajdonképpen egy „teleszkopikus” összeghez jutunk.

d) Az összeg $k = 1$-re a következő alakot ölti:

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\ldots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2},$$

vagy ugyanez másképp írva:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Ez pedig nem más, mint az első n természetes szám összegére vonatkozó összefüggés.

Megjegyzés: Játsszunk még az összefüggéssel. Használjuk ki a Pascal-háromszög szimmetriáját, és tükrözzük a szimmetriatengelyre a szereplő tagokat. Felhasználva az $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ összefüggést, a következő alakhoz jutunk:

$$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1-k}+\binom{n}{n-k}=\binom{n+1}{n-k}.$$

A *c)* részben leírt trükkel ezt is igazolhatjuk, ha felhasználjuk, hogy $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}$.

3051 A kérdés kicsit másként fogalmazva: oldjuk meg a $\binom{13}{k}=715$ egyenletet. Ezt próbával vagy a definíció alapján tudjuk megtenni. Lássuk a „tudományosabb” módszert. Eltüntetve a törtet:

$$\frac{13!}{k!\cdot(13-k)!}=715,$$

$$8\,709\,120=k!\cdot(13-k)!$$

A jobb oldalon egy egész számokból álló szorzat – sőt két szorzat szerepel. Ráadásul mindkettő 1-től kezdve halad az egymás utáni egészeken, így tartalmaz sorozatban egyforma tényezőket is. Tehát várhatóan bizonyos értékek duplán szerepelnek a 8 709 120 szorzattá bontásában. Lássuk a prímtényezős felbontást:

$$8\,709\,120=2^{10}\cdot3^5\cdot5\cdot7.$$

A 7 és 5 prímtényező biztosan egyszer szerepel, így azok csak a hosszabb szorzat előállításában vehetnek részt. A köztük levő 6 is egyszer szerepel, előállításához egy 2 és egy 3 prímtényező szükséges. Az 5 előtt kell lennie az $1\cdot2\cdot3\cdot4$ szorzatnak, ami elvisz három 2 és egy 3 prímtényezőt. Eddig elfogyasztottunk négy darab 2, kettő darab 3, egy 5 és egy 7 prímet. Maradt $2^6\cdot3^3$. A három 3 prímből nem tehetünk kettőt a rövidebb szorzatba, mert akkor el kellene jutnunk 6-ig. Így kettő marad a hosszabban, azaz ott lesz 9 is és így 8 is. Ezzel újabb prímeket használunk el, marad $2^3\cdot3$. Ez pedig pont elég az $1\cdot2\cdot3\cdot4$ szorzathoz. Vagyis $8\,709\,120=4!\cdot9!$ és így $k=4$ vagy $k=9$.

Tehát 13 főből 4 vagy 9 főt tudunk 715-féleképpen kiválasztani.

3052 A kérdés átfogalmazva: oldjuk meg a természetes számokon az $\binom{n}{7}=77\,520$ egyenletet! Ennek is nekiláthatunk próbálgatással, ám abból nem sokat tanulunk. Az előző példához hasonlóan kezeljük a kérdést:

$$\frac{n!}{7!\cdot(n-7)!}=77\,520,$$

$$\frac{n!}{(n-7)!}=390\,700\,800.$$

Rutinosan prímtényezőkre bonthatjuk a jobb oldalt (rögtön válasszuk le a végéről a $100=2^2\cdot5^2$-t):

$$390\,700\,800=2^8\cdot3^3\cdot5^2\cdot7\cdot17\cdot19.$$

Figyeljük meg a másik oldalt is, itt n-től lefelé hét darab egymás után következő egyre kisebb szám szorzata szerepel. Mivel a 17 és 19 prímek, így valószínűleg szerepelnek a szorzatban. Köztük találjuk a $18 = 2 \cdot 3^2$-t is. Várhatóan 7-ig nem jut el 19-től a szorzat, ezért $14 = 2 \cdot 7$-et kell keresnünk vagy $21 = 3 \cdot 7$-et. Bármelyik is szerepel, a szorzat szélén kell állnia. Ugyanis van két 5-ös prímtényező is, egyik lehet a $15 = 3 \cdot 5$ építőköve, másik pedig a $20 = 2^2 \cdot 5$-é.

Gyűjtsük össze a felbontásból eddig elhasznált prímeket:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19.$$

Maradt még egy darab 2 és egy darab 7, tehát a megoldás:

$$390\,700\,800 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14.$$

Vagyis 20 főből választhatunk $77\,520$-féleképp 7-et. Másik megoldás nincs.

3053 A feladatra azonnal adhatunk két magától értetődő megoldást: a 8568. sor 1. eleme és a 8568. sor 8567. eleme is 8568. Igen ám, de található-e más lelőhelye a Pascal-háromszögben a jelzett számnak?

Most is fogalmazzuk meg másként a kérdést: mely n és k $(n \ge k \ge 0)$ természetes számra teljesül, hogy $\binom{n}{k} = 8568$?

Az előző pontban az $\binom{8568}{1} = \binom{8568}{8567} = 8568$ megoldást adtuk meg.

Próbálgatással most nem sokra megyünk, mert sok az ismeretlen. Vegyük hát a definíciót, bontsuk fel a 8568-at prímekre, és gondolkodjunk:

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17.$$

A bal oldalt tekintsük úgy, hogy a több tényezőből álló szorzattal leegyszerűsítettünk, legyen ez most az $(n-k)!$ (A szimmetria miatt nem fontos, melyiket tekintjük.)

A túloldalon van egy 17-es prímtényező, ami elég nagy ahhoz, hogy ne egyszerűsített alakból kapjuk. Feltehetjük, hogy a 17 szerepel a bal oldal számlálójában. Nézzük a 17 körüli számokat, például az előző feladathoz hasonlóan $18 = 2 \cdot 3^2$-t is ki tudjuk rakni a prímekből és $14 = 2 \cdot 7$-et is. 19 nem szerepel, így biztosan tudjuk, hogy legfeljebb $n = 18$. 13 sem szerepel, tehát vele már egyszerűsítettünk. A 18 és 14 között lennie kellett $15 = 3 \cdot 5$ és $16 = 2^4$-nek. Hat darab 2-es prímünk azonban nincs a felbontásban – ez azért lehet, mert a szorzatot egyszerűsítettük $k!$-sal. Most nézzük meg azt, mi hiányzik a teljes $14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18$ szorzatból, ennek árulkodnia kell az osztó $k!$-ról:

$$14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17) \cdot (2^3 \cdot 3 \cdot 5) =$$
$$= (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5) = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17) \cdot (5!).$$

Elkészültünk hát: $k = 5$ és $n = 18$ megoldást ad. Ugyanígy a szimmetria miatt megoldás $k = 13$ is.

Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció – megoldások

3054 *a)* $9 - 6b + b^2$;

b) $e^3 + 6e^2f + 12ef^2 + 8f^3$;

c) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$;

d) $32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$;

e) $1 - 3{,}5a + 5{,}25a^2 - 4{,}375a^3 + 2{,}1875a^4 - 0{,}65625a^5 + 0{,}109375a^6 - 0{,}0078125a^7$.

3055 *a)* $x^{12} + 12x^{11} + 60x^{10} + 160x^9 + 240x^8 + 192x^7 + 64x^6$;

b) $256a^8 - 512a^7b + 448a^6b^2 - 224a^5b^3 + 70a^4b^4 - 14a^3b^5 + \dfrac{7}{2^2}a^2b^6 - \dfrac{1}{2^3}ab^7 + \dfrac{1}{2^8}b^8$;

c) $x^3 + 9x^3 \cdot (\sqrt[3]{x})^2 + 36x^4 \cdot \sqrt[3]{x} + 84x^5 + 126x^5 \cdot (\sqrt[3]{x})^2 + 126x^6 \cdot \sqrt[3]{x} + 84x^7 +$
$+ 36x^7 \cdot (\sqrt[3]{x})^2 + 9x^8 \cdot \sqrt[3]{x} + x^9$;

d) $x^7 + 21x^6 \cdot \sqrt{x} + 189x^6 + 945x^5 \cdot \sqrt{x} + 2835x^5 + 5103x^4 \cdot \sqrt{x} + 5103x^4 + 2187x^3 \cdot \sqrt{x}$;

e) $64x^6 - 576x^8 + 2160x^{10} - 4320x^{12} + 4860x^{14} - 2916x^{16} + 729x^{18}$.

3056 *a)* $1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; *b)* $4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \sin x \cdot \cos x + 1$.

3057 *a)* $(2a + b)^3$; *b)* $(0{,}5x^2 - 2y)^3$; *c)* $(x^2 - x^3)^4$; *d)* $(\sqrt{x} + x)^4$.

3058 *a)* 2; *b)* 4; *c)* 32; *d)* 1.

3059 *a)* Üres halmaz. *b)* 1. *c)* Nincs ilyen halmaz. *d)* 4.
e) 8. *f)* Nincs ilyen halmaz.

3060 Minden bit értéke 0 vagy 1 lehet. Mivel a shortint és az integer egész számok, ezért lehetnek negatívok is: kell hagynunk az előjelnek egy bitet (az elsőt). A szám értékének rögzítéséhez így 7, illetve 15 bit marad. A legnagyobb érték ezért (a 0-t se feledjük el!):

a) shortint esetén: $2^7 - 1 = 127$; *b)* integer esetén: $2^{15} - 1 = 32\,767$.

A részhalmazok számát csak a halmazban levő elemek száma határozza meg, így shortint típusú számból $128 + 1 + 127 = 256$ darab lehet, integerből pedig $32\,768 + 1 + 32767 = 65\,536$. A válasz:

c) 2^{256}; *d)* 2^{65536}.

3061 A két megadott szám a lányok és a fiúk részhalmazainak száma. Vagyis kérdés, hogy 2-nek melyik hatványa az, aminek értéke 1024. Hamar kitaláljuk, $2^{10} = 1024$. A fiúknál ugyanez $2^{13} = 8192$. Ebből adódik, hogy a lányok tízen, a fiúk tizenhárman vannak az osztályban, tehát az osztálylétszám összesen huszonhárom. Tehát 2^{23}-féleképpen választható ki egy csoport az egész osztályból.

Megjegyzés: Hamarosan megtanuljuk általánosan is megoldani a $2^x = 1024$, ún. *exponenciális* egyenleteket.

3062 Képzeljük el a csapat összes tagját egymás mellett állva a bemutatáskor. A belőlük képezhető részhalmazokat jelölhetjük úgy is, hogy egy mínuszjelet képzelünk afölé, aki nem tagja; és egy plusz jelet afölé, aki tagja a részhalmaznak. Mind a tizenegy játékos felett vagy plusz, vagy mínusz jel állhat, így 2^{11} lehetőség van különböző részhalmazok képzésére.

a) Most ha az Enikő feletti jelet mínusznak rögzítjük, akkor csak a többiek jele változhat, tehát a megoldás 2^{10}.

b) Az előző részhalmazokat úgy kaptuk, hogy Enikő jelét mínusznak vettük. Hagyjuk hát ezt így, és most legyen Évike jele plusz. Ezt is rögzítettük, szabadon választható marad kilenc fő, a megoldás 2^9.

c) Ebben a kérdésben öt főt kell rögzítenünk (az mindegy, hogy plusz- vagy mínuszjelet rögzítünk a játékos felett képzeletben). Szabadon hat főt választhatunk, a képezhető részhalmazok száma 2^6, ami éppen $2^5 = 32$-ed része az összes lehetőségnek.

3063 *a)* A fociban semmi sem tiltja, hogy két vagy több szabadrúgást ne végezhessen el ugyanaz a játékos. Mivel ebben az esetben az időbeli sorrendet is figyelembe vesszük, így 8 fő közül kell kiválasztani az első, a második stb. szabadot rúgó játékost (ismétléses variáció):

$$8^{16} \approx 2{,}8 \cdot 10^{14}.$$

b) A sorrend most nem számít, ezért ismétléses kombinációt kell számolnunk. A tizenegy játékosból elhagyva a három csatárt, 8 elem 16 tagú ismétléses kombinációinak száma:

$$\binom{8+16-1}{16} = 245157.$$

c) Ebben a részfeladatban a csatárokat engedjük szabadrúgást lőni, de a kapust nem. Megint ismétléses variációt számolunk, az eredmény:

$$10^{13}.$$

d) A sorrendre való tekintet nélkül ismétléses kombinációhoz jutunk:

$$\binom{10+13-1}{13} = 497420.$$

Vegyes összeszámlálási feladatok (kiegészítő anyag) – megoldások

3064 *a)* $\binom{100}{4} = 3921225;$ *b)* $4! = 24;$

c) $\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$, n elem k tagú ismétlés nélküli variációinak száma.

3065 *a)* $\frac{32!}{(32-4)!} = 863040;$

b) $\frac{32!}{(32-4)!} : 4! = \binom{32}{4} = 35960$, 32 elem 4 tagú ismétlés nélküli kombinációinak száma.

3066 $\binom{30}{8} \cdot 7!$

3067 *a)* $3!;$ *b)* $12!;$

c) $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!} \cdot 3! = 166320;$ *d)* $3! \cdot (6 \cdot 5 + 4 \cdot 10 \cdot 3 + 10 \cdot 3) = 1080.$

3068 *a)* $\frac{9!}{(9-5)!} - \frac{8!}{(8-5)!} = 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 8400;$ *b)* $\binom{9}{5} - \binom{8}{5} = \binom{8}{4} = 70.$

3069 *a)* Kétféle megoldás is eszünkbe juthat. A „számolós" megoldáshoz fejtsük ki a két oldalt, majd amivel csak lehet, egyszerűsítsünk, és tüntessük el a törteket:

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!},$$
$$n-k+1 = k,$$
$$n = 2k-1.$$

Megoldáspárokat kapunk, ezeket egy táblázatba is foglalhatjuk:

k	1	2	3	4	5	…
n	1	3	5	7	9	…

Vagyis például hét elemből annyiféleképpen tudunk kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül négyet, mint hármat. Öt elemből pedig annyiféleképp tudunk kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül hármat, mint kettőt.

b) Az előző esethez hasonló átalakításokkal ebben az esetben

$$(n-k+1)\cdot(n-k+2)=(k-1)\cdot k$$

alakhoz jutunk. A zárójeleket kifejtve, és rendezve az egyenletet:

$$n^2+(3-2k)\cdot n+2-2k=0.$$

Tehát n ismeretlenben másodfokú egyenletet kaptunk k paraméterrel. Felírva és egyszerűsítve a megoldóképletben szereplő kifejezéseket:

$$n_{1,2}=\frac{2k-3\pm(2k-1)}{2}.$$

Az összeadással $n_1=2k-2$. A kivonással kapott, k-tól független $n_2=-1$ eredményt nem tudjuk értelmezni. A táblázat a megoldáspárokkal már ismerős lehet.

k	2	3	4	5	6	…
n	2	4	6	8	10	…

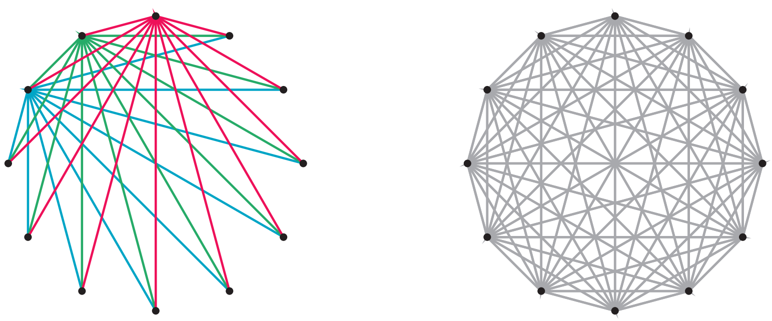
A kombinatorika nyelvére fordítva ez azt jelenti, hogy pl. hat elemből annyiféleképpen lehet négyet kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül, mint kettőt.

Megjegyzés: A feladat adja az általánosítás lehetőségét: mely n, k, r megfelelő pozitív egész értékekre igaz, hogy $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-r}$? Azonban az eddig alkalmazott módszerrel várhatóan n-ben r-edfokú egyenletet kapunk.

A fenti eljárás helyett sokkal egyszerűbb, ha felhasználjuk, hogy a binomiális együtthatók építik fel a Pascal-háromszöget. A kékkel jelölt értékek adják az *a)* részben feltett kérdésre a választ, a zöldek pedig a *b)* részfeladatra. Indoklásképpen elegendő a Pascal-háromszög szimmetriájára hivatkoznunk. Így az általánosított kérdést is meg tudjuk válaszolni minden lehetséges n, k és r értékre.

1
1 **1**
1 2 **1**
1 **3** **3** 1
1 **4** 6 **4** 1
1 5 **10** **10** 5 1
1 6 **15** 20 **15** 6 1
1 7 21 **35** **35** 21 7 1
1 8 28 **56** 70 **56** 28 8 1
1 9 36 84 **126** **126** 84 36 9 1
1 10 45 120 **210** 252 **210** 120 45 10 1

3070 Ábrázoljuk a csapatokat és a köztük lezajló mérkőzéseket.



a) Sorban haladva az első csapat 11 mérkőzést játszik (piros). A második már játszott az elsővel, így 10 új mérkőzést játszik (zöld). A harmadik már játszott az első kettővel (kék) stb.:

$$11 + 10 + 9 + \ldots + 1 = 66.$$

b) A másik ábrát tekintve minden csapat 11 mérkőzést játszik. Azonban figyelembe kell vennünk, hogy két csapat csupán egyetlen egyszer találkozik, mi viszont minden meccset kétszer számoltunk (egyszer az egyik, egyszer a másik csapatnál). A helyes eredmény:

$$\frac{11 \cdot 12}{2} = 66.$$

c) Bármely mérkőzés létrejöttéhez két csapat szükséges. A feladat átfogalmazható így: hányféleképp lehet kiválasztani 12 elemből kettőt ismétlés nélkül? A válasz pedig:

$$\binom{12}{2} = 66.$$

Megjegyzés: Ha a feladatot általánosítjuk, az *a)* és *b)* részből adódik az első n természetes szám összegére korábban már megismert képlet is:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

3071 *a)* A legalább kettő 8-as jelenthet kettőt, hármat, négyet vagy ötöt. Inkább számoljuk a komplementer eseményt, ha nincs vagy egy 8-as van. Az összes esetek száma (ismétléses variáció) 9^5. Nincs 8-as a számok között 8^5 esetben. Az egyetlen 8-as állhat öt helyen, a többi helyre a maradék nyolc érték valamelyikét írhatjuk: $5 \cdot 8^4$. Az eredmény a fenti értékek különbsége:

$$9^5 - 8^5 - 5 \cdot 8^4 = 5801.$$

b) Most is érdemes áttérni az ellentett esetek összeszámlálására, azonban itt ismétléses kombinációkat kell felírnunk (tankönyvben apró betűs rész). Az összes esetekben kilenc számból választunk ki ismétléssel ötöt: $\binom{9+5-1}{5}$. Ha nincs közöttük 8-as, akkor már csak nyolc számból választunk ötöt ismétléssel: $\binom{8+5-1}{5}$. Ha egy 8-as van a számok között, akkor a többi négyet a maradék nyolc értékből választhatjuk, szintén ismétléssel: $\binom{8+4-1}{4}$. A végeredmény:

$$\binom{13}{5} - \binom{12}{5} - \binom{11}{4} = 165.$$

3072 *a)* A fagylalt átvétele 20 elem 4 tagú ismétlés nélküli variációja, ezek száma $\frac{20!}{(20-4)!}$.

A pénz átadása 11 elem valamely 5, 3, 3 tagú ismétléses permutációja, számuk $\frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 5!}$.
Az eredmény a kettő szorzata:

$$\frac{20! \cdot 11!}{(20-4)! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 5!}.$$

b) A fagylaltot 20 elem 3 tagú ismétlés nélküli kombinációjaként kapjuk, számuk $\binom{20}{3}$.

A 2, 2, 1 darab érmét ki kell választanunk az 5, 3, 3 darab azonos közül, ezt $\binom{5}{2}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{1}$-féleképp tehetjük meg. Az eredmény:

$$\binom{20}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1}.$$

c) A fagylaltot 20 elem 5 tagú ismétléses variációjaként kapjuk, összesen 20^5-féleképpen. A fizetés az előző részkérdéshez hasonlóan zajlik. Az eredmény ekkor:

$$20^5 \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2}.$$

d) Utoljára 20 elem egy 7 tagú ismétléses kombinációját kell tekintenünk, erre $\binom{20+7-1}{7}$ különböző lehetőségünk van.
Az érmék kiválasztása most is $\binom{5}{2}$, $\binom{3}{3}$, $\binom{3}{1}$-féleképp történik, azonban mivel egyesével számoljuk le őket, sorrendjük is számít (6 elem 2, 3, 1 tagú ismétléses permutációja). Az eredmény:

$$\binom{20+7-1}{7} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!}.$$

3073 *a)* Az első játékos az eredeti 52 lapból kap 5-öt, ezt $\binom{52}{5}$-féleképp adhatja neki az osztó. A második játékosnak már csak a maradék 47 lapból jut 7 darab, $\binom{47}{7}$-féleképp. Ezt követően az első játékos $\binom{5}{2}$-féleképp dobhat 2 lapot a kezében levő 5-ből. A második játékosnak a dobásra $\binom{7}{4}$ lehetősége van. A ledobott hat lapot ezután 6!-féleképp tehetik egyenes sorba. Az eredmény a fentiek szorzata, hiszen egymástól nem függő eseményekről van szó:

$$\binom{52}{5} \cdot \binom{47}{7} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{4} \cdot 6!$$

b) A kör alakú elrendezés esetén csak a feladat vége változik:

$$\binom{52}{5} \cdot \binom{47}{7} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{4} \cdot 5!$$

Hatszor több lehetőségünk van a játékban egyenes sorban elhelyezni a lapokat, mint kör alakban.

3074 *a)* A lapok leosztásakor most sem vehetjük figyelembe a sorrendet, így a lehetséges leosztások száma:

$$\binom{52}{4} \cdot \binom{48}{6} \cdot \binom{42}{8}.$$

b) Az előbbihez hasonlóan:

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-1}}{k_r}.$$

c) Fejtsük ki elsőnek az *a)* részt. Két helyen is egyszerűsíthetünk:

$$\binom{52}{4} \cdot \binom{48}{6} \cdot \binom{42}{8} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} \cdot \frac{48!}{6! \cdot 42!} \cdot \frac{42!}{8! \cdot 34!} = \frac{52!}{4! \cdot 6! \cdot 8! \cdot 34!}.$$

A *b)* esetben is hasonlóan végezhetünk egyszerűsítéseket:

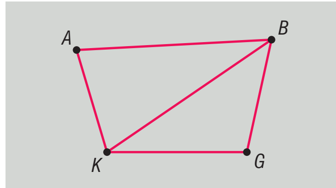
$$\frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! \cdot (n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{r-1})!}{k_r! \cdot (n-k_1-k_2-\ldots-k_r)!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r! \cdot (n-k_1-k_2-\ldots-k_r)!}.$$

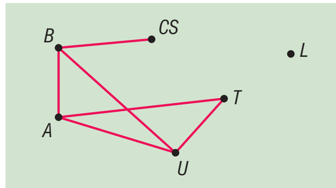
Mindkét esetben megfigyelhetjük, hogy a nevezőben levő faktoriálist kijelölő számok összege (pl. 4 + 6 + 8 + 34 = 52) kiadja a számlálóban szereplő számot. Ilyet korábban az ismétléses permutációnál láttunk (52 elem 4, 6, 8 és 34 tagú permutációinak száma ennyi).

GRÁFOK – pontok, élek, fokszám – megoldások

3075 A keresett gráf az ábrán látható.

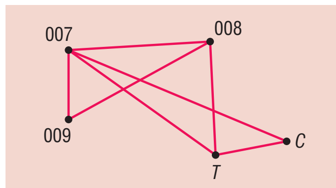


3076 A keresett gráf az ábrán látható.



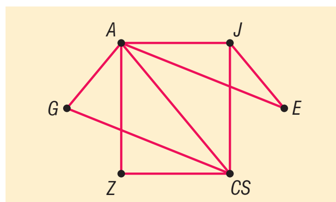
3077 *M–J*, *M–G*, *J–H*, *J–G*, *N–G*.

3078 A keresett gráf az ábrán látható.

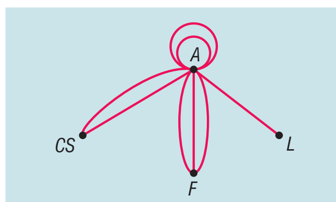


3079 *a)* 2–6–3; *b)* 5–3–6–4.

3080 *a)* A keresett gráf az ábrán látható.
b) Gábor és Zoli.



3081 A keresett gráf az ábrán látható.

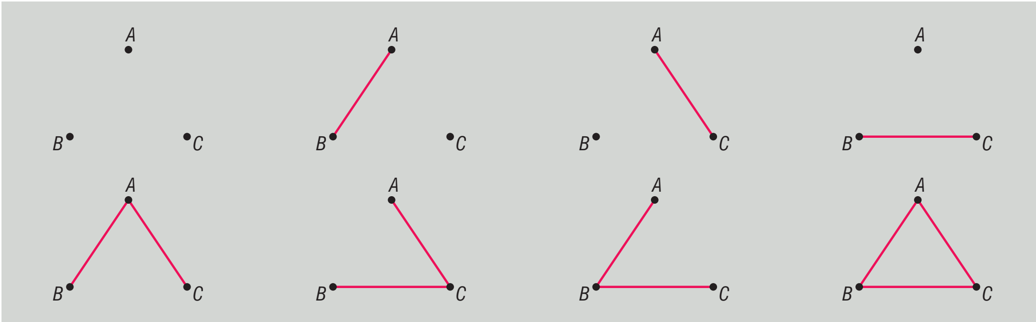


3082 *a)* Például: buszforduló, zsákutca.
b) Egy utcáról lakótelepre vezető út két bejárattal.

3083 Nem.

3084 *a)* A keresett négy gráf az ábrán látható.

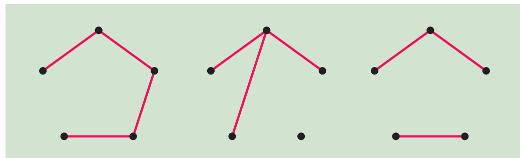
b) A keresett nyolc gráf az ábrán látható.



3085 *A*: 5, *H*: 4, *G*: 2, *N*: 4, *J*: 2, *M*: 3.

3086 A keresett gráfok az ábrán láthatók.

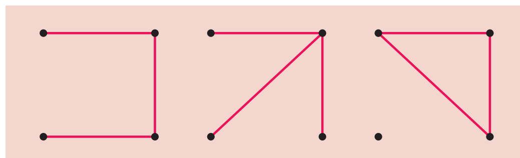
a) 4;
b) 3;
c) 3.



3087 Három lehetőség van:

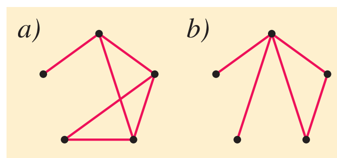
1, 1, 2, 2; 1, 1, 1, 3; 0, 2, 2, 2.

A keresett gráfok az ábrán láthatók.



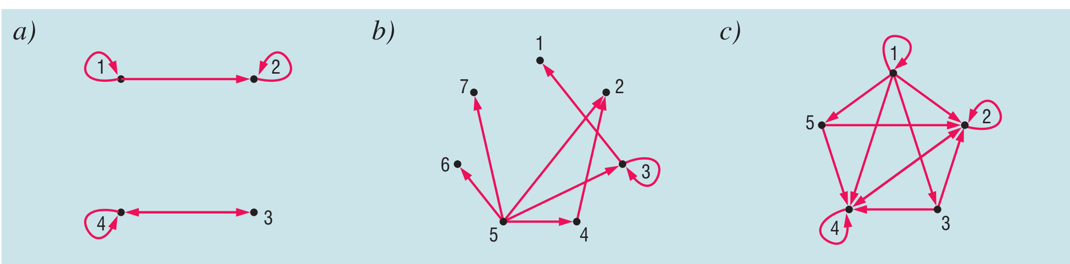
3088 Az *a)* és *b)* részfeladat megoldása az ábrán látható.

c) Ilyen gráf nem létezik.

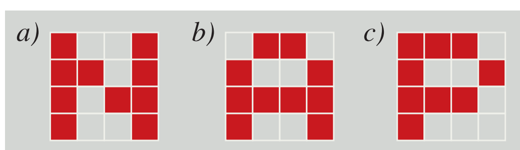


3089 *b)* Várhatóan a négyfokúakból.

3090 A keresett gráfok az ábrán láthatóak.

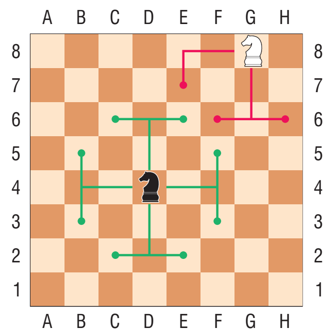


3091 A keresett betűk sorban:



3092 A huszár lépési szabálya alapján az ábrán látható helyekre juthat el a megjelölt pontokból. Így

a) G8 pont fokszáma 3; *b)* D4 pont fokszáma 8. (➡)



3093 Tekintsük végig a figurákat. A király nem ilyen, hiszen a sarokban (3) kevesebb lehetősége van lépésre, mint a tábla közepén (9). A vezérnek hasonlóan a királyhoz, a sarokban állva (21) kevesebb a lehetősége, mint a középső négy mezőben (27). A futónak a sarokból indulva 7, míg a középső négy mező valamelyikéből 13 lépési lehetősége van. A bástya azonban a sarokból (14) ugyanannyi lépést tehet, mint középen állva (14). Úgy tűnik, hasonló a helyzet a gyaloggal: az üres táblán mindig egyet léphet előre, így a köztes mezőket jelölő gráfpontok fokszáma 2 – azonban a tábla kiindulópontjáról csak előre léphet egyet, így ezen pontok fokszáma 1. Tehát az egyetlen megoldás a bástya.

3094 Tudjuk, hogy egy n csúcsú teljes gráfnak $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ éle van. Ha egy egyszerű gráfba már berajzoltunk n darabot, akkor még

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

élt kell megrajzolni, hogy teljessé váljon.

3095 Ha a berajzolható élek maximális számát keressük, akkor tekintsünk csak egyetlen izolált pontot a gráfban – ugyanis minél több izolált pontot képzelünk el, annál kevesebb élt rajzolhatunk meg. A maradék öt pont között akkor rajzoljuk a legtöbb élt, ha teljes gráfot készítünk. Ennek éleinek száma pedig

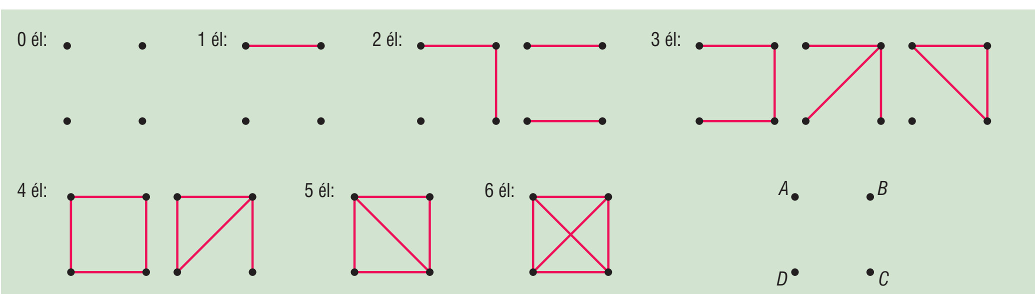
$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot (5-1)}{2} = 10.$$

3096 Akik 6-ot mondtak, azok összesen 7-en vannak egy nemzetből. Akik 4-et mondtak, azok 5-en. Azonban mivel 12 fő mondta a 4-et, legalább három ötfős különböző nemzet tagjai. Aki 2-t válaszolt, azok hárman vannak. Így mindkét kérdést megválaszolhatjuk:

a) Öt különböző nemzet tagjai dolgoznak a cégnél.

b) Összesen 18 főt kérdezett meg a főnök, maradt még 7 fő. 2 főnek kell még 6-ot, 3 főnek 5-öt, 2 főnek 2-t válaszolni a cégvezető kérdésére.

3097 *a)* Vigyünk rendszert az esetek összeszámlálásba. Vizsgáljuk meg, ha 0, aztán 1, majd 2, 3, 4, 5, 6 éle van az egyszerű gráfnak. A 11 megoldás az ábrákon látható.



Érdemes megfigyelni, hogy az egyes esetek szimmetrikusak: 0 élű eset annyi van, mint 6; 1 élű, mint 5; 2 élű eset pedig, mint 4. Ez abból adódik, hogy n élt berajzolni pontosan annyiféleképpen tudunk, mint n élt a teljes gráfból letörölni.

b) Az ábrán az üres *ABCD* gráfot tekintve hat különböző hely van. Ezek mindegyikére vagy rajzolunk élt, vagy nem. Ez élenként két lehetőség. Tehát az egyszerű gráfok száma $2^6 = 64$. (Ezzel biztosítottuk azt is, hogy a keletkező gráf valóban egyszerű lesz.)

3098 A 3097. feladat *b)* részét kell továbbgondolnunk. Tekintve az n pontú teljes gráf minden egyes élét, azt vagy hozzávesszük a kialakítandó egyszerű gráfunkhoz, vagy nem. Ez minden él esetében két lehetőség, az n pontú teljes gráf éleinek száma pedig $\binom{n}{2}$. A megoldás tehát $2^{\binom{n}{2}}$.

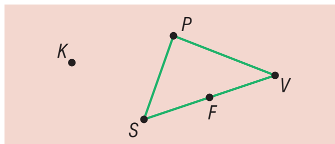
3099 Mivel a feladat egyszerű n pontú gráfokról szól, ezért a legnagyobb fokszámú pont fokszáma legfeljebb $n-1$. Tehát a feladatban kérdezett fokszámok csak $n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1, 0$ lehetnek. Ez n darab különböző érték. Lehetséges-e ilyen gráf? Nem, mert az $n-1$ és a 0 fokszámok kizárják egymást: ha van $n-1$ fokú pont, akkor nincs 0 fokú és fordítva.

Megjegyzés: Ugyanezen gondolatmenettel igazolhatjuk, hogy minden egyszerű gráfban van legalább két azonos fokszámú pont. Ha ezt megtettük, a feladat megválaszolásához elegendő erre hivatkoznunk.

3100 *a)* A pontok fokszámai rendre K: 4, P, S, F, V: 2.

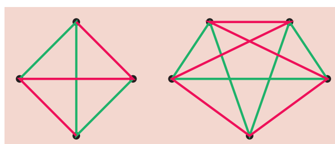
Összegük $4 + 4 \cdot 2 = 12$, azaz 6 élű a bejárt utak gráfja.

A teljes gráf $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ élű, vagyis 4 élű a komplementer.



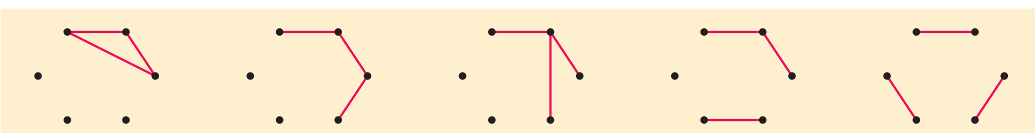
b) A gráfot és a komplementerét figyeljük úgy, mint egy teljes gráf két egymást kiegészítő része. Ha két gráf izomorf, akkor éleik száma egyenlő: csak páros sok éllel rendelkező teljes gráf jöhet szóba. Ilyenek az $n = 4k$ és az $n = 4k + 1$ pontú gráfok. Ez tehát egy szükséges feltétel.

A legkisebb ilyen gráf a 4 pontú, erre egy igen egyszerű megoldást találunk. Az 5 pontú esetben készíthetünk olyan részeket, amelyekben minden pont foka 2. Általában, $n = 4k + 1$ pont esetén $2k$ fokú pontokból felépíthetjük a gráfot, így a komplementer vele izomorf lesz.



Megjegyzés: az olyan gráfokat, amelyek izomorfak komplementerükkel, *önkomplementer gráfoknak* nevezzük.

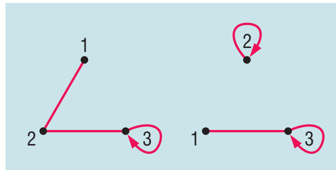
3101 *a)* Haladjunk sorban a gráf pontjainak száma szerint. Mivel a gráf egyszerű és van három éle, legalább három pontjának is lennie kell. Hárompontú, háromélű gráf egy van. A négypontú és háromélű gráfokat a 3087. feladatban gyűjtöttük össze, három darabot találtunk. Ötpontú és háromélű gráfokat gyárthatunk a négypontúakból, csak vegyünk hozzájuk még egy izolált pontot. Ezeken kívül még egy lehetőségünk van: ha egy pontpárt elkülönítünk a többi háromtól. Hatpontú gráfokat hasonlóan tudunk gyártani az ötpontú gráfokból. Itt is csak egy további lehetőség van: ha elkülönítünk három, éllel összekötött pontpárt (utolsó ábra).



Hat pont esetében öt különböző háromélű egyszerű gráfot készíthetünk el. Ha tovább szeretnénk növelni a pontok számát, hiába: nem lesz több lehetőségünk háromélű egyszerű gráfot előállítani.

b) Az előző rész alapján elmondhatjuk, hogy akkor érjük el a legnagyobb „szabadsági fokot” az élek elhelyezkedésében, ha minden egyes élt különálló gráfnak is tekinthetünk. Nem nehéz végiggondolni, hogy ehhez legalább $2n$ pontra van szükség.

3102 A feladat szerint nincs kikötve, hogy csak egyszerű gráfokkal dolgozhatunk, tehát a gráfban használhatunk többszörös és hurokéleket is. Tudjuk, hogy a fokszámok összege minden gráfban kétszerese az éleknek, ezért a fokszámok összegének páros számnak kell lennie. Páratlan sok páratlan fokú pontot tartalmazó gráf nem rajzolható. Pl. 2, 3, 4 fokszámú pontokból álló gráf nem készíthető. Sőt, a feltételeknek megfelelő hatpontú gráf sem: akár páros, akár páratlan számmal kezdjük a fokszámok felsorolását, mindig három darab páratlan számnak kellene lennie.



Az 1, 2, 3 fokú pontokból álló gráfot meg tudjuk rajzolni egy vagy két hurokél segítségével. Sőt, ha bármelyik gráf minden egyes pontjára rajzolunk még k darab hurokélt, akkor a pontok fokszámai:

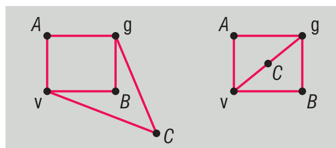
$$1 + 2k, \quad 2 + 2k, \quad 3 + 2k.$$

Ilyen gráfok tehát biztosan készíthetők.

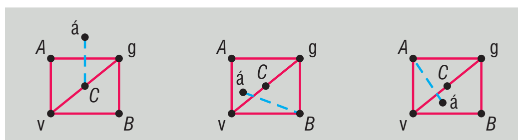
Gondolkodjunk tovább a második ábra alapján. Egyrészt páros ($2n$) fokú pontot mindig készíthetünk elegendő (n) hurokél segítségével. Másrészt páratlan ($2n + 1$) fokú pontból mindig páros soknak kell lennie. Állítsunk párba két ilyen pontot, és kössük össze őket egy éllel, majd illesszünk megfelelő számú hurokélt a pontokra. Így éppen a megfelelő gráfot készíthetjük el.

Összefoglalva: igen, lehetséges, egész pontosan *mindig rajzolható olyan gráf, melyben a pontok fokszámai egymást követő pozitív egész számok, ha a számok között páros sok páratlan van.*

3103 A feladatot lefordítva a gráfok nyelvére: Az A, B, C, g, v, $á$ pontokat akarjuk úgy élekkel összekötni, hogy minden nagybetűs pont össze legyen kötve minden kisbetűs ponttal, de ne legyenek metsző élek. Bizonyos számú próbálkozás után megsejtjük, hogy ez nem lehetséges.



A bizonyításhoz először azt kell észrevennünk, hogy a bekötések során mindig ki kell alakulnia egy zárt négyszögnek. (Négy darab 2 fokú pontnak, melyek egyszerű gráfot alkotnak – a rajzon $AvBg$.) A harmadik ház vagy a négyszög belsejébe, vagy kívülre esik. Ebbe is bekötve a két közművet, már három zárt négyszögünk lesz (a rajzon $BvCg$, $AvCg$). Mivel a két lehetőség a gráfok szempontjából megegyezik, elég az egyiket tekintenünk. Bárhogy is tettünk eddig, a harmadik közmű a nagy négyszögön kívülre, vagy az egyik belsejébe, vagy a másik belsejébe esik. Mindhárom esetben lesz egy olyan négyszög, amit tekintve a harmadik közmű azon kívül/belül van, azonban valamelyik ház meg belül/kívül. Ezt a kettőt így nem köthetjük össze korábbi él metszése nélkül (szaggatott élek).



Megjegyzés: Bár a feladatot gráfokkal ábrázoljuk, igazából a *topológia* témakörébe tartozik.

GRÁFOK – út, vonal, séta, kör, Euler-vonal – megoldások

3104 Például: *ABE*, *ABCBDBE*.

3105 Például: *ABFECD*, *ABFEDC*, *AFEDCB*, *ABCDEF*, *ADCBFE*.

3106 *DACBA*, *DABCA*, *ABCAD*, *ACBAD*.

3107 *a)* Például: *ABABDF*. *b)* Például: *ABCEBDF*. *c)* Például: *ABDF*.

3108 Igen, maga a gráf egy kör: *ABDFGHECA*.

3109 Nincs, a zárt és nyitott Euler-vonal kizárja egymást: a nyitott vonalhoz két páratlan fokú pont szükséges, zárt vonalhoz viszont minden pont fokszámának párosnak kell lennie.

3110 Nincs. Ha egy séta nem vonal, akkor legalább kétszer áthalad egy élen, így annak végpontjain is.

3111 *a)* Van zárt Euler-vonal, például: *ABCD*.

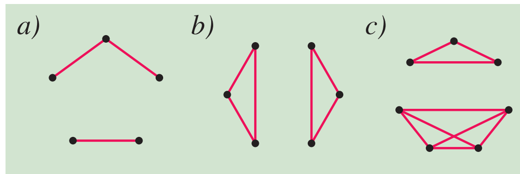
b) Van nyitott Euler-vonal, például: *BACDBC*.

c) Nincs.

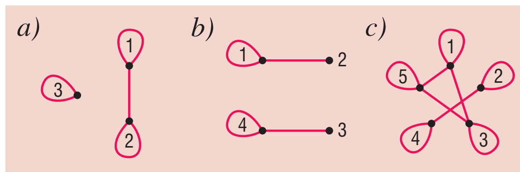
3112 Ahhoz, hogy a ceruza felemelése nélkül lerajzoljuk, az alakzatban nyitott vagy zárt Euler-vonalnak kell lennie. Így

a) lerajzolható (nyitott);
b) lerajzolható (nyitott);
c) nem rajzolható le;
d) lerajzolható (nyitott).

3113 A keresett gráfok az ábrákon láthatók.



3114 Az ábrákon már az irányítás nélküli gráfok láthatók. A gráfok nem összefüggőek, mindegyik két komponensre esik szét.



3115 A megoldásban két-két egyszerű feltételt adunk a fokszámok segítségével arra, hogy egy gráf nem összefüggő, illetve arra, hogy összefüggő.

a) Természetesen a gráf nem lehet összefüggő, ha van izolált pontja.

Ha egy gráfnak van 0 fokú pontja, akkor nem összefüggő.

Ha a gráf élei elég ritkák, akkor sem lesz összefüggő. Például ha 3 vagy több pontból álló gráfban minden pont foka maximum 1, akkor nem alakulhatnak ki „láncok”, amik összefűznék a pontokat. (Ha megengedjük 2 fokú pontok létezését is, akkor már létrejöhet egy olyan lánc, amely a gráf összes pontját tartalmazza.)

Ha egy $n > 2$ csúcsú gráfban nincs 1-nél nagyobb fokszámú pont, akkor nem összefüggő.

b) Ha találunk a gráfban egy olyan pontot, amelyhez az összes többi pont kapcsolódik, akkor ezen a ponton keresztül bármelyik pontból bármelyik pontba eljuthatunk.

Ha egy n pontú gráfnak van $n-1$ fokú pontja, akkor összefüggő.

Ha van olyan pont, amelyhez majdnem minden pont kapcsolódik, akkor a gráf összefüggőségéhez elegendő, hogy a lemaradó pont is kapcsolódjon a többihez.

Ha egy gráfnak van $n-2$ fokú pontja, de nincs 0 fokú pontja, akkor összefüggő.

3116 Ha az ábra gráfjának két pontja összeköttetésben van egymással, az azt jelenti, hogy a négyzetrács megfelelő sorának és oszlopának metszetében levő pixel ki van színezve. Amennyiben a gráfban egy ponthoz több másik kapcsolódik, úgy az adott sorban vagy oszlopban több pixel található (hogy oszlopról vagy sorról van szó, az él irányítása adja meg). Az összefüggő komponensek pontjai sorokat és oszlopokat jelölnek ki.

A gráf különböző komponensei tehát olyan részábrákat jelölnek, melyek különböző sorokban és oszlopokban helyezkednek el, vagyis az egyes részeknek nincs közös négyzetrács-oldaluk. (Ilyen kétkomponensű ábrákat láttunk a 3114. feladatban.)

3117 Először is írjuk fel a szövegben szereplő összefüggést jelekkel. Legyen a gráf n pontú, rendelkezzen e darab éllel, és a minimális fokú pont fokszáma legyen f, a maximális fokú pont foka F. Ekkor a feladat állítása:

$$\frac{f}{2} \le \frac{e}{n} \le \frac{F}{2}.$$

Tüntessük el a törteket a kifejezésből, szorozzuk végig az egyenlőtlenséget 2-vel és n-nel. Így az

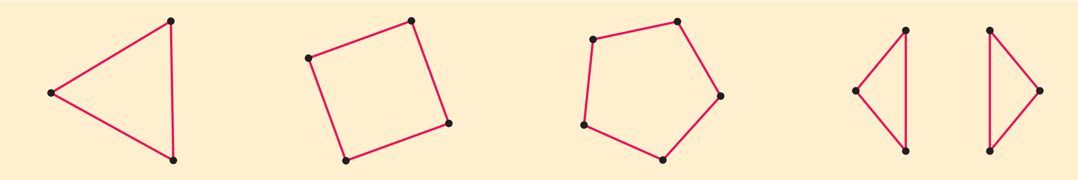
$$n \cdot f \le 2 \cdot e \le n \cdot F$$

összefüggést kapjuk. Ez természetesen teljesül, hiszen $2 \cdot e$ a gráf fokszámainak összege. A bal oldalon álló $n \cdot f$ akkor lenne a fokszámok összege, ha minden pont foka megegyezne a minimális fokú pont fokszámával (aminél természetesen lehetnek nagyobb fokú pontok is a gráfban). Hasonlót mondhatunk a másik egyenlőtlenségre is, sőt az egyenlőségek csak egyszerre teljesülhetnek.

3118 Tételezzük fel az állítás ellentétét. Tegyük fel, hogy van olyan gráf, amelynek $2n$ pontja van, és minden pont fokszáma legalább n, de legalább két komponensre esik szét. Mivel a gráfnak $2n$ csúcsa van, az egyik komponensbe biztosan n vagy annál kevesebb csúcs kerül. Mivel a gráf egyszerű, így komponensei is egyszerűek. Ellentmondáshoz jutunk, ugyanis egy legfeljebb n pontú egyszerű gráfban a legmagasabb fokú pont fokszáma legfeljebb $n-1$ lehet, ellentétben a feladat által említett n-nel. Vagyis a feltett állítás hamis, amiből adódik, hogy ellentéte igaz.

Megjegyzés: A feladat állítását indirekt úton igazoltuk.

3119 Tekintsünk először kevesebb pontú gráfokat. A legkisebb egyszerű gráfnak, mely tartalmazhat kört, három pontja van. A négy- és ötpontú egyszerű gráf pontjai is csak egy kört alkothatnak. A hatpontú egyszerű gráf pontjai alkothatnak egy kört vagy két hárompontú komponenst. Hétpontú gráf megint vagy egyetlen kör, vagy egy három- és egy négypontú komponens. Nyolcpontú gráf állhat egyetlen körből, vagy egy három- és egy ötpontú komponensből, vagy két négypontú komponensből. Kilencpontú gráf állhat három hárompontú komponensből, vagy egy négy- és egy ötpontú komponensből vagy egyetlen körből. Megfigyeléseinkből kitűnik, hogy csak a 3, 4 vagy 5 pontú gráfok alkothatnak egyetlen módon kört. A több pontból álló gráfokat már felbonthatjuk ilyen összetevőkre.



Az általános megoldáshoz fogalmazzuk át a kérdést: hányféleképpen bonthatjuk n-t 3, 4 vagy 5 többszöröseinek összegére? Mivel minket csak a lehetséges válaszok maximuma érdekel, elegendő a legrövidebb (hárompontú) körök számát megállapítani. Azt kell kiszámolnunk, hogy *n-ben hány egész számszor van meg a 3.*

Például az $n = 15$ pontú gráfban lehet öt darab három hosszú kör; $n = 16$ pontú gráfban lehet négy három- és egy négypontú kör; $n = 17$ pontú gráfban lehet négy három- és egy ötpontú kör. Így mindegyikük legfeljebb öt kört tartalmazhat.

Fagráfok – megoldások

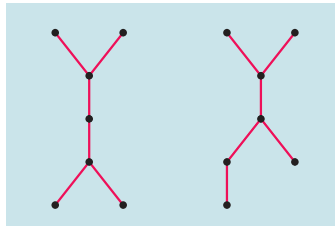
3120 Mindkettőből egy.

3121 Mivel két pont között pontosan egy út vezet, a gráf 13 élű fa. Így 14 pontja van.

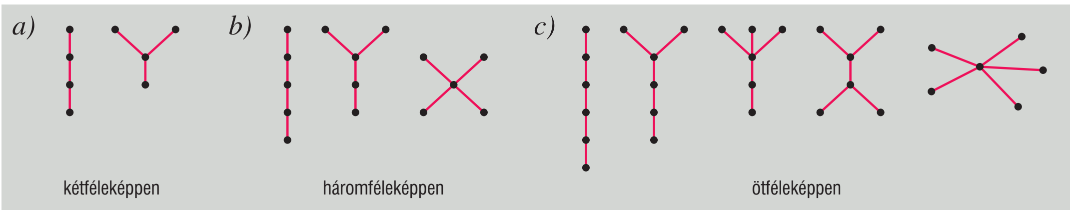
3122 *a)* Fa. Van 8 pontja, 7 éle, 4 levele, 2 három- és 2 kétfokú pontja.
b) Nem fa, mert kört tartalmaz.
c) Fa. Van 9 pontja, 8 éle, 5 levele, 3 három- és 1 kétfokú pontja.
d) Nem fa, mert nem összefüggő.

3123 *a)* Például *láncnak* vagy *fonalnak.* *b)* Kettő.

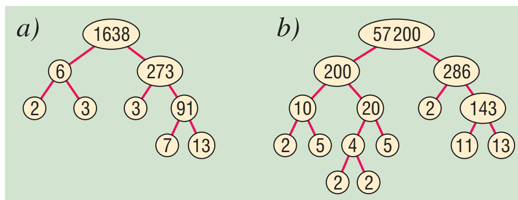
3124 Két különböző fagráf létezik.



3125



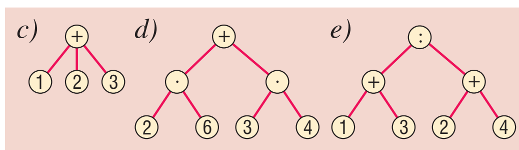
3126 A fákat más módon is felírhatjuk:
a) $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; *b)* $2^4 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$. (➡)



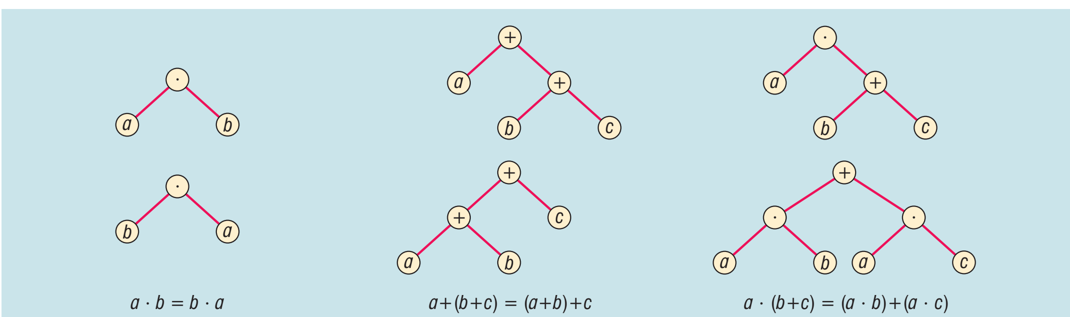
3127 Az élek száma a fokszámok összegének fele, tehát 8. Mivel fa, így eggyel több pontja van, mint éle: 9. A levelek száma:

2; 3; …; 8.

3128 *a)* $(8 - 2) : 2 = 3$;
b) $(1 + 2) \cdot (12 : 3) = 12$.
A *c)*, *d)* és *e)* alpontok megoldása az ábrán látható.



3129 A műveletek fagráfok segítségével:



Megjegyzés: A műveleti tulajdonságokat is lefordíthatjuk a gráfok nyelvére. Például a kommutativitás jelentése, hogy a művelet alatti két ágat felcseréljük.

3130 Igen, van. Egyrészt minden fában van legalább kettő elsőfokú pont, másrészt nyitott Euler-vonal létezésének szükséges feltétele pontosan kettő páratlan fokú pont létezése. Előbbi megjegyzésből adódóan a kettő páratlan fokú pont csak elsőfokú lehet. Olyan fa, amelyben pontosan kettő elsőfokú pont van, nem tartalmazhat elágazást, tehát csak egyetlen lánc lehet.

Megjegyzés: Pontosan ilyen gráfokról volt szó a 3123. feladatban.

3131 *a)* Furcsa, hogy a gráfban nem ismerjük pontosan a műveletek számát. Írjuk át a gráf alakot hagyományos formába:

$$2-(2+\ldots(2-(2+(2-1))))\ldots).$$

Fejtsük ki belülről, és próbáljunk meg valamiféle szabályszerűséget találni.

$$2-1=1;\quad 2+1=3;\quad 2-3=-1;\quad 2+(-1)=1;\quad 2-1=1;\quad \text{stb.}$$

Művelet száma	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$4\cdot(k+1)$
Eredmény	1	3	–1	1

Azt látjuk, hogy négy lépés után visszajutunk az első állapothoz. Az összeg a műveletek számától (egész pontosan a műveletek számának néggyel való osztási maradékától) függően változik ($k\geq 0$). Az 1 és 3 maradék jelöli a kivonás, a 2 és 0 maradék pedig az összeadás műveletet. Mivel a páratlan maradékok egyszer pozitív, egyszer negatív eredményt adnak, az összeg előjele a kivonások számának paritásától függ.

b) Tegyük ugyanazt, mint az előbb:

$$2:(2\cdot(2:(2\cdot\ldots(2\cdot(2:(2\cdot(2:2))))\ldots))).$$

Belülről kifejtve a zárójeleket:

$$2:2=1;\quad 2\cdot 1=2;\quad 2:2=1;\quad 2\cdot 1=2;\quad \text{stb.}$$

Ebben az esetben az osztás műveletek mindig 1-et adnak eredményül, függetlenül azok számától.

3132 Ha egy fagráfnak 15 pontja van és 12 levele, akkor még van 3 pontja, ami nem levél. Ezen pontok fokszáma nagyobb, mint 1, és egymáshoz kapcsolódnak. Három pont csak úgy alkothat fát, ha körmentesen egymáshoz kapcsolódnak, fokszámaik a leveleket nem tekintve 1, 2, 1. A levelek hozzájuk kapcsolódnak valamilyen módon, de a két szélső ponthoz legalább egy-egy (a középső ponthoz nem feltétlenül kell, hogy levél kapcsolódjon). Ezek után megválaszolhatjuk a kérdést.

a) A legkisebb fokú pont fokszáma 2, a legnagyobb 12.

b) A gráf leghosszabb útja egy levéltől indul, áthalad a három közbülső ponton, majd egy másik levélen végződik. Ez bármely, a feltételeknek megfelelő fa esetében így van. Az út hossza négy él.

3133 Keressünk szélsőséges eseteket! Ilyen eset például, ha az öt komponensből egy tartalmazza az összes élt (16 él, 17 pont), a másik négy komponens pedig egy-egy izolált pontból áll. Ekkor a gráf összesen $17+4=21$ pontot tartalmaz.

Ha kicsit változtatunk az erdőn, és eggyel növeljük az egyik komponens éleinek számát, akkor ez a komponens már eggyel több pontot tartalmaz, a legnagyobb komponens ezzel szemben eggyel kevesebbet. Tehát az összpontszám nem változik. A fenti gondolatot általánosíthatjuk.

Jelöljék a, b, c, d, e egész számok az egyes komponensek éleinek számát ($0\leq a;\ b,\ c,\ d,\ e\leq 16$). Ekkor:

$$a+b+c+d+e=16,$$

az egyes komponensek pontjainak száma pedig rendre:

$$a+1,\quad b+1,\quad c+1,\quad d+1,\quad e+1,$$

hiszen minden komponens fagráf.

Az összes pontok száma pedig valóban független a, b, c, d, e-től:

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)+(e+1)=$$
$$=a+b+c+d+e+5=16+5=21.$$

3134 A gráfban a pontok fokszámainak összege $2n$. Ebből adódik, hogy éleinek száma n.

a) Először tételezzük fel, hogy a feladatban említett gráf összefüggő. Mivel gráfunknak n pontja és n éle van, így nem lehet körmentes: az n pontú fának, ami maximális körmentes gráf, csak $n-1$ éle van. Mivel itt az élek száma eggyel több, már nem lehet körmentes, következésképpen a gráfban van kör.

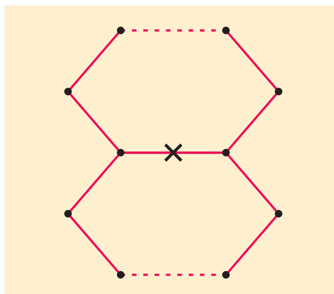
Amennyiben a gráf nem összefüggő, azaz több komponensből áll, akkor valamelyik összefüggő komponensben legalább annyi pontnak kell lenni, mint amennyi éle van. (Ugyanis ha minden komponensben kevesebb él lenne, mint amennyi pont, akkor az élek és pontok összege nem lenne egyenlő.) Erre a komponensre pedig alkalmazhatjuk az előző bekezdés gondolatmenetét.

Ezzel bizonyítottuk, hogy az n pontú, n élű gráfban van kör.

b) Tételezzük most fel, hogy az n pontú, n élű gráf egyszerű, összefüggő és legalább kettő kört tartalmaz. Ekkor két eset lehetséges: vagy van két különálló kör a körök között, melyeknek minden éle különböző; vagy van két kör, melyeknek van legalább egy közös éle.

Ha az első lehetőség áll fenn, akkor valamelyik körből egy élt törölve a kapott gráf még mindig összefüggő, n pontú, viszont $n-1$ éle van. Mivel több különálló kört tartalmazott, és csak az egyik kör egyik élét töröltük, így még mindig tartalmaz kört. Ez azonban nem lehetséges, mert az n pontú, $n-1$ élű egyszerű, összefüggő gráf fa, vagyis körmentes. Ebben az esetben ellentmondásra jutottunk.

Ha van két kör, melyeknek van közös éle, akkor ezt az élt törölve, ismét n pontú, $n-1$ élű, egyszerű, összefüggő gráfhoz jutunk. Azonban a feltevés alapján ez a gráf is tartalmaz kört, ugyanis a törölt él két végpontja között két különböző út vezet: egyik út az egyik kör visszamaradt élein át, másik út a másik kör visszamaradt élein át. (Amennyiben nem a közös élek közül törlünk egyet, akkor az egyik kör megmarad eredeti állapotában, vagyis visszakapjuk az első lehetőséget.) Tehát ebben az esetben is ellentmondásra vezetett a gondolatmenet.



Bárhogyan is okoskodtunk, feltevésünk mindig ellentmondásra vezetett. Tehát az ellentéte kell hogy igaz legyen: az n pontú, n élű, egyszerű és összefüggő gráf pontosan egy kört tartalmaz. (Emlékeztetőül: az *a)* pontban bizonyítottuk, hogy az n pontú, n élű gráf mindig tartalmaz kört.)

Megjegyzés: A feladat *b)* részében indirekt bizonyítást alkalmaztunk.

3135 *a)* Tételezzük fel, hogy p darab (p nemnegatív egész) legalább háromfokú pontja van a fának. Ezen pontok fokszámainak összege ekkor legalább $3n$.

Elsőnek töröljük a gráfból a kétfokú pontokat úgy, hogy a pontot elhagyva szomszédait egyetlen éllel kötjük össze. Ezekről egyrészt amúgy sem szól a feladat, másrészt csupán annyi szerepük van, hogy „nyújtják” a gráfot, az elágazásokat és a leveleket kötik össze. A gráf a törlés után is fa, hiszen egyszerű maradt, összefüggő és körmentes. Fontos megjegyeznünk, hogy a megmaradó pontok fokszámát nem változtatja meg a kétfokú pontok törlése.

Ezután töröljük a gráfból a leveleket is, a hozzájuk kapcsolódó élekkel együtt. A gráf a levelek törlése után is fa marad. A megmaradó pontok pontosan a p darab, eredetileg legalább harmadfokú pontok lesznek. Mivel fát alkotnak, összekötő éleik száma $p-1$. Fokszámaik összege ezért

$$2\cdot(p-1)=2p-2.$$

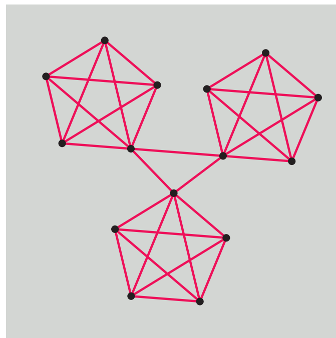
Mivel eredetileg a fokszámösszeg legalább $3p$ volt, így legalább $p+2$ darab él hiányzik. Mivel a kétfokú pontok nem változtattak a többi pont fokszámán, így a hiányzó fokszámot csak

az elsőfokú pontok pótolhatják, mégpedig egy fokszámot egy pont. Legalább háromfokú pont pontosan p darab volt, elsőfokú pont pedig legalább $p+2$, így az elsőfokú pontok száma legalább kettővel több a legalább háromfokú pontok számánál.

b) Az *a)* rész gondolatmenetéből világos, hogy akkor van pontosan 2 elsőfokú ponttal több a gráfban, mint legalább háromfokú pont, ha utóbbiak fokszámösszege pontosan $3p$. Ez pedig csak akkor lehetséges, ha minden legalább háromfokú pont foka pontosan három, nincs negyed vagy magasabb fokú pont a fagráfban.

A kombinatorika gyakorlati alkalmazásai – megoldások

3136 *a)* A feltételek szerint az első szoba egyik gépe össze van kötve a másik két szoba egy-egy gépével. Mivel a másik kettő szobában is pontosan egy gép van összeköttetésben a többi szobával, így ezek a gépek már meghatározottak. A gépeket nem különböztetjük meg. A hálózat az ábrán látható.



b) Ebben a hálózatban van három darab ötpontú teljes gráf (összesen tizenöt pont), illetve az ezeket összekötő három él. Tehát a 15 ponthoz kapcsolódik összesen $3 \cdot 10 + 3 = 33$ él. Világos, hogy a gráf összefüggő, így éleinek elhagyásával készíthető belőle fa. Azonban egy 15 pontú fában maximum 14 él lehet, így gráfunkból el kell hagyni pontosan $33 - 14 = 19$ élt.

c) Az eredeti feláláshoz képest annyi változott, hogy most nem feltétlenül ugyanaz a gép tartja a kapcsolatot a másik két szobával. Azaz az első szoba öt gépe közül valamelyik kapcsolatban áll a második szoba öt gépének valamelyikével. Ez $5 \cdot 5 = 25$ lehetőség. Ettől függetlenül ugyanez a helyzet a második és harmadik, illetve a harmadik és első szoba között is. A lehetőségek száma a helyiségek közötti kapcsolatok kiépítésére összesen:

$$\left(5^2\right)^3 = 5^6 = 15\,625.$$

d) Mivel minden helyiségből kettő gépet választanak ki, az összes lehetőségek száma a három független ismétlés nélküli kombináció szorzata:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = \left[\binom{5}{2}\right]^3 = 10^3 = 1000.$$

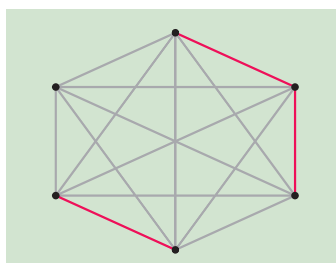
e) Természetesen három kábellel nem lehet minden gépet hálózatba kötni. Legfeljebb négyet lehet sorba vagy csillag alakzatba kötni, illetve a másik véglet, hogy kettő-kettő-kettő darabot három csoportba (a szöveg szerint felhasználjuk mind a három kábelt).

Tételezzük fel, hogy a hat gép 1-től 6-ig van sorszámozva.

Ekkor közöttük $\binom{6}{2} = 15$ lehetőség van kábel elhelyezésére.

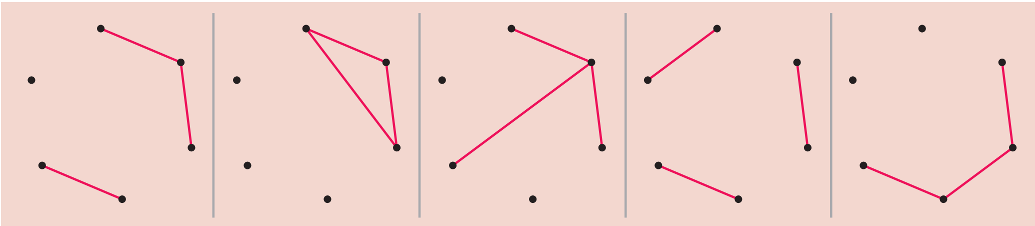
Ebből a 15 helyből választhatunk ki hármat, ahova ténylegesen kábelt helyezünk. Így a három kábellel összesen

$$\binom{\binom{6}{2}}{3} = \binom{15}{3} = 455$$



lehetőség van a hat számítógép összekapcsolására, ha azokat megkülönböztetjük. Az ábrán szürkével a lehetőségek, pirossal egy konkrét megvalósítás látható.

f) Ha nem különböztetjük meg a gépeket, akkor a három kábel elhelyezésére összesen öt lehetőségünk adódik. Az ábrákon látható, hogy az izolált pontok száma 0 és 3 között változik.

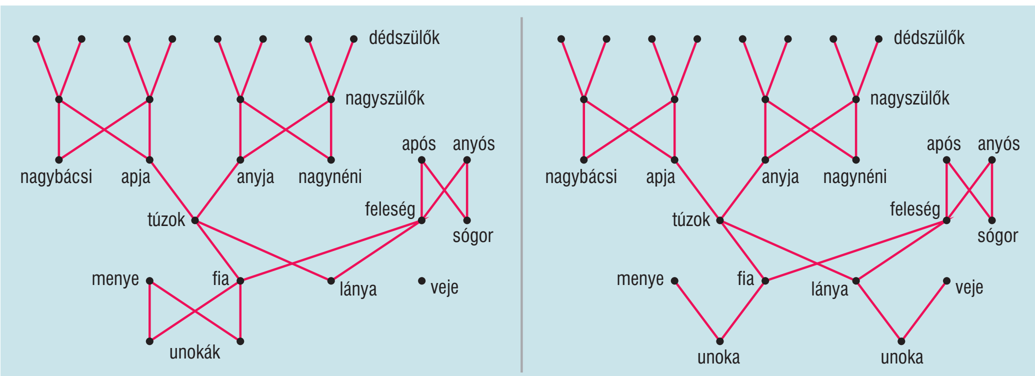


3137 *a)* Nincs.

b) Unokától dédszülőig hat generáció (unoka–gyerek–saját maga–szülő–nagyszülő–dédszülő).

c) Lássuk generáció szerint: unokák 2; gyerekek és házastársaik 4; a túzok, házastársa és az ő testvére 3; szüleik és a túzok szüleinek testvérei 6; a túzok nagyszülei 4; az ő szüleik 8. Összesen 27.

d) Az unokák miatt háromféle gráf lehetséges: vagy mindkét unoka a túzok fiának gyereke, vagy mindkettő a túzok lányának gyereke, vagy egyik unoka a fiúé, egyik pedig a lányé. Az az ábra hiányzik, amikor mindkét unoka a lánygyereké.



e) Az ábrán jól látható, nem fagráfot kaptunk. Amennyiben az unokák testvérek, öt kört és egy izolált pontot tartalmaz a gráf; ha pedig unokatestvérek, akkor négy kört és nulla izolált pontot tartalmaz a családfa gráfja.

f) A túzokok nem házasodnak családon belül, ezért minden madárnak két újabb szülője van. Mivel az ükszülőkig négy generáció van, összesen $2^4 = 16$ ükszülője van a túzoknak.

g) Az összes rokon ismétlés nélküli permutációinak száma: $27!$

h) Az egyes sorokban ismétlés nélküli permutációkat kell számítanunk. Az egyes sorok nem függnek a többitől, így szorzatukat kell tekintenünk: $2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 8!$

i) A 27 túzokot kell három csapdában elhelyeznünk, maximum tízesével.

Így a lehetséges esetek:

$$10 + 10 + 7\ (3), \qquad 10 + 9 + 8\ (6), \qquad 9 + 9 + 9\ (1).$$

Zárójelben a darabszámok lehetséges permutációinak számát adtuk meg. Mivel az egyes variációk minden esetben megegyeznek, így az összes esetek száma egy elég nagy érték:

$$3 \cdot \binom{27}{10} \cdot \binom{17}{10} \cdot \binom{7}{7} + 6 \cdot \binom{27}{10} \cdot \binom{17}{9} \cdot \binom{8}{8} + 1 \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9}.$$

Vegyes feladatok – megoldások

3138 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, 5, –8, 13, …

3139 $7! = 5040.$

3140 $\dfrac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!} = 60.$

3141 $\dfrac{12!}{(12-3)!} = 12\cdot 11\cdot 10 = 1320.$

3142 $7^{10} = 282\,475\,249.$

3143 *a)* $\dfrac{25!}{3!\cdot 22!} = \dfrac{25\cdot 24\cdot 23}{3\cdot 2\cdot 1} = 25\cdot 4\cdot 23 = 2300;$

b) $\dfrac{8!}{3!\cdot 5!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7 = 56 > \dfrac{11!}{2!\cdot 9!} = \dfrac{11\cdot 10}{2\cdot 1} = 55.$

3144 *a)* $\binom{10}{7} = 120;$ *b)* $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = 120.$

3145 *a)* $\binom{18}{6} = 18\,564;$ *b)* $\binom{4}{0}\cdot\binom{14}{6} = 3003;$ *c)* $\binom{4}{4}\cdot\binom{14}{2} = 91;$ *d)* $\binom{4}{2}\cdot\binom{14}{4} = 6006.$

3146 A megadott konvex sokszög átlóinak számára felírható:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n\cdot(n-1)}{2} - n = 170.$$

Az egyenlet rendezése után kapjuk:

$$n^2 - 3n - 340 = 0,$$

amiből $n_1 = 20$ és $n_2 = -17$. A sokszögnek tehát 20 csúcsa van.

3147 $\binom{90}{5} - \left[\binom{5}{0}\cdot\binom{85}{5} + \binom{5}{1}\cdot\binom{85}{4}\right] = 1023826.$

3148 *a)* $16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4;$

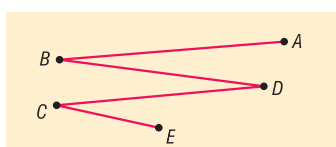
b) $a^9 + 18a^8b + 144a^7b^2 + 672a^6b^3 + 2016a^5b^4 + 4032a^4b^5 + 5376a^3b^6 + 4608a^2b^7 +$
$+ 2304ab^8 + 512b^9;$

c) $3363 + 2378\cdot\sqrt{2};$

d) $\dfrac{1}{2^8}x^8 + \dfrac{1}{2^3}x^7y + \dfrac{7}{2^2}x^6y^2 + 14x^5y^3 + 70x^4y^4 + 224x^3y^5 + 448x^2y^6 + 512xy^7 + 256y^8.$

3149 *a)* $2^8 = 256;$ *b)* $2^{16} = 65536;$ *c)* egyenlők; *d)* egyenlők.

3150 Először A felhívja B-t, aki megadja D telefonszámát.
Másodszor A felhívja D-t, aki megadja C számát.
Harmadszor A felhívja C-t, aki megadja E számát.
Negyedik lépésben A felhívhatja E-t: négy hívás szükséges.



3151 *a)* Igen, a teljes gráf.

b) Nem.

c) Képzeljünk el egy szabályos hatszöget, kössük össze éllel a szomszédos és a szemközti pontokat.

d) Nem.

e) Tegyük ugyanazt, mint *c)*-ben.

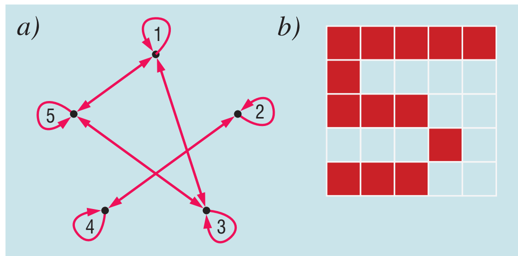
3152 Összesen $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ meghajlást fog látni a titkárnő. Az eddig látott meghajlások száma:

$$2 + 3 + 1 + 4 + 5 + 3 = 18,$$

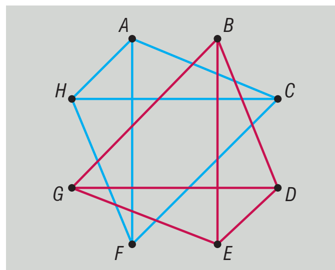
azaz $50 - 18 = 32$ még hátra van.

3153 *a)* A gráf szétesik két különálló részre: a páros és a páratlan sorszámú pontokra.

b) Jelest.



3154 Nem, a gráf szétesik egy $BGDE$ és egy $AHCF$ különálló részre.



3155 *a)* Séta: $AFAFG$. *b)* Vonal: $ACDAEG$. *c)* Út: ABG.

3156 *a)* A nyitott Euler-vonalhoz egy élt, a zárt Euler-vonalhoz kettő közös végpont nélküli élt kell berajzolni az A, B, D, F pontok között.

b) Az AB élt kell törölni.

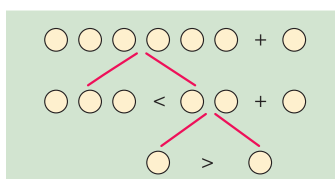
3157 Az ábra szimmetrikus a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba húzott átlóra.

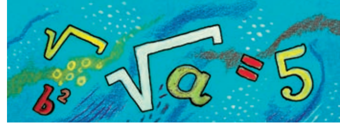
3158 *a)* Általában fagráfot kapunk.

b) Csak akkor nem fa a kapott gráf, ha tartalmaz kört. Ez pedig akkor van, ha vagy a szülők, vagy valamelyik nagyszülők testvérek vagy féltestvérek.

3159 Mivel hat helység van, a feltételnek megfelelően fagráfot kell létrehoznunk: pontosan öt útnak (élnek) kell lenni. Most három van, kettőt szükséges építeni. Például lehet Andalógiából Félnótába és onnan Butulba, vagy Celebből Félnótába és onnan Együgybe.

3160 Két mérés elegendő: először vegyünk el egyet, és szedjük szét három-három érmére a maradékot. Ezeket mérjük meg, ha a két rész egyenlő tömegű, kész vagyunk, az elvett érme a hamis. Ha az egyik rész nehezebb, ismételjük meg azon három érmére a fentieket. Mindez fagráffal ábrázolva a rajzon látható.





11.2. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

Hatványozás és gyökvonás (emlékeztető) – megoldások

3161 *a)* a^{11}; *b)* b^{-4}; *c)* x^{23}; *d)* y^{24}; *e)* $x^{18}\cdot y^{-2}$; *f)* $a^{24}\cdot b^{-4}$;
g) $a^{23}\cdot b^{12}$; *h)* $a^{-3}\cdot b^{-7}$; *i)* $a^{-24}\cdot b^{14}$; *j)* $a^{55}\cdot b^{25}$.

3162 *a)* $x>0,\ \sqrt{\dfrac{1}{x^3}}=\sqrt{x^{-3}}$; *b)* $y\in\mathbb{R},\ y\neq 0,\ \dfrac{1}{y}=y^{-1}$;

c) $a>0,\ a$; *d)* $a, b\in\mathbb{R},\ a, b\neq 0,\ \sqrt[3]{\dfrac{b^7}{a}}=b^2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$;

e) $a>0,\ \sqrt[12]{a^{29}}=a^2\cdot\sqrt[12]{a^5}$; *f)* $a, b>0,\ \sqrt[12]{\dfrac{b^{29}}{a^{27}}}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\sqrt[12]{\dfrac{b^5}{a^3}}$;

g) $a, b>0,\ \sqrt[24]{a^{17}\cdot b^{36}}=b\cdot\sqrt[24]{a^{17}\cdot b^{12}}$;

h) $a, b>0,\ \sqrt[60]{\dfrac{b^{159}}{a^{177}}}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\sqrt[60]{\dfrac{b^{39}}{a^{57}}}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\sqrt[20]{\dfrac{b^{13}}{a^{19}}}$.

3163 *a)* $6^9\cdot 9^3=2^9\cdot 3^{15}\quad>\quad 8\cdot 18^7=2^{10}\cdot 3^{14}$; *b)* $\sqrt[3]{7^{53}}=7^{17}\cdot\sqrt[3]{49}\quad<\quad 7^{18}=7^{17}\cdot\sqrt[3]{7^3}$;

c) $\sqrt[6]{60^{2010}}=\sqrt[6]{2^{4020}\cdot 3^{2010}\cdot 5^{2010}}\quad=\quad\sqrt[6]{\left[\left(2^{10}\right)^{201}\cdot 3^{1005}\cdot 5^{1005}\right]^2}=\sqrt[6]{2^{4020}\cdot 3^{2010}\cdot 5^{2010}}$;

d) $\sqrt[3]{100^{-4}}=\sqrt[3]{10^{-8}}=\sqrt[15]{10^{-40}}\quad<\quad\sqrt[5]{10^{-9}}=\sqrt[15]{10^{-27}}$;

e) $20^{-5}\cdot 16^{-8}=2^{-42}\cdot 5^{-5}\quad<\quad 2^{-14}\cdot 5^{-14}\cdot\dfrac{2^{-27}}{5^{-9}}=2^{-41}\cdot 5^{-5}$;

f) $\sqrt{45^{-7}\cdot 75^{-21}}=\sqrt{5^{-7}\cdot 3^{-14}\cdot 3^{-21}\cdot 5^{-42}}=\sqrt{3^{-35}\cdot 5^{-49}}=$
$=3^{-17}\cdot 5^{-24}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{15}}\quad>\quad 3^{-17}\cdot 5^{-25}=3^{-17}\cdot 5^{-24}\cdot\dfrac{1}{5}$.

3164 *a)* $\dfrac{3^{-5}\cdot 10^{-6}\cdot 21^{-5}\cdot 25^{-2}}{6^{-7}\cdot 15^{-5}\cdot 35^{-5}}=\dfrac{3^{-5}\cdot 2^{-6}\cdot 5^{-6}\cdot 3^{-5}\cdot 7^{-5}\cdot 5^{-4}}{2^{-7}\cdot 3^{-7}\cdot 3^{-5}\cdot 5^{-5}\cdot 5^{-5}\cdot 7^{-5}}=18$;

b) $\left(\dfrac{6^{-6}\cdot 10^{-2}}{9^{-3}\cdot 200^{-1}\cdot 32^{-1}}\right)^{100}=\left(\dfrac{2^{-6}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{-2}\cdot 5^{-2}}{3^{-6}\cdot 2^{-3}\cdot 5^{-2}\cdot 2^{-5}}\right)^{100}=1$;

c) $\sqrt{\dfrac{24^{-4}\cdot 36^{-3}}{18^{-4}\cdot 256^{-1}\cdot 72^{-2}}}=\sqrt{\dfrac{2^{-12}\cdot 3^{-4}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 2^{-8}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-4}}}=3$;

d) $\sqrt[15]{\dfrac{2000^{-20}\cdot 25^{11}}{(-800)^{-19}}}=\sqrt[15]{\dfrac{2^{-80}\cdot 5^{-60}\cdot 5^{22}}{-2^{-95}\cdot 5^{-38}}}=-2$;

e) $\sqrt[5]{45^{-12}} : \left(\sqrt[5]{15^{-7}} \cdot \sqrt[5]{27^{-4}}\right) = \sqrt[5]{\dfrac{3^{-24} \cdot 5^{-12}}{3^{-7} \cdot 5^{-7} \cdot 3^{-12}}} = \dfrac{1}{15};$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{100^{-5}} \cdot \sqrt[4]{20^{-3}} \cdot \sqrt[12]{5^{7}}}{\sqrt[6]{1000^{-5}} \cdot \sqrt[3]{2^{-7}}} = \sqrt[12]{\dfrac{100^{-20} \cdot 20^{-9} \cdot 5^{7}}{1000^{-10} \cdot 2^{-28}}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^{-40} \cdot 5^{-40} \cdot 2^{-18} \cdot 5^{-9} \cdot 5^{7}}{2^{-30} \cdot 5^{-30} \cdot 2^{-28}}} = \dfrac{1}{5}.$

3165 a) $\sqrt{7 + 4 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = 4;$

b) $\sqrt[4]{28 + 16 \cdot \sqrt{3}} - \sqrt[4]{28 - 16 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt[4]{\left(4 + 2 \cdot \sqrt{3}\right)^2} - \sqrt[4]{\left(4 - 2 \cdot \sqrt{3}\right)^2} =$

$= \sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = 2;$

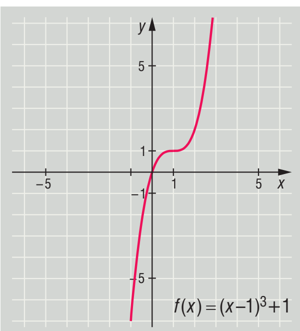
c) $\sqrt[3]{8 + 3 \cdot \sqrt[3]{49} + 3 \cdot \sqrt[3]{7}} - \sqrt[3]{15 + 6 \cdot \sqrt[3]{49} + 12 \cdot \sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{7} + 1\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{7} + 2\right)^3} = -1;$

d) $\sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} - 10} = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3} + 9 + 3 \cdot \sqrt{3} + 1} - \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3} - 9 + 3 \cdot \sqrt{3} - 1} =$

$= \sqrt[3]{\left(\sqrt{3} + 1\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\sqrt{3} - 1\right)^3} = 2.$

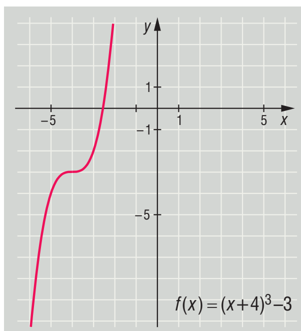
Hatványfüggvények és gyökfüggvények – megoldások

3166 a)



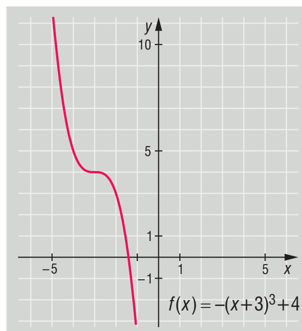
$x \in \mathbb{R};$

b)



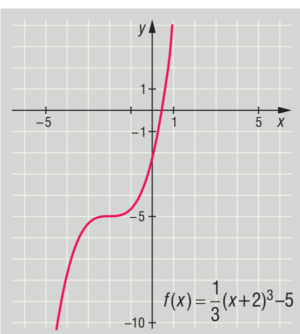
$x \in \mathbb{R};$

c)



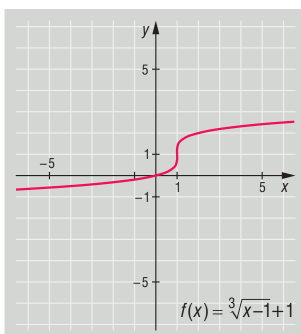
$x \in \mathbb{R};$

d)



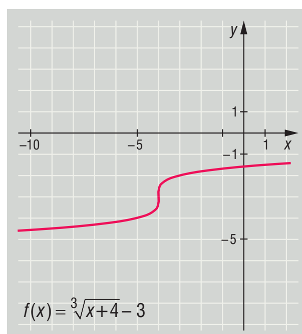
$x \in \mathbb{R};$

e)



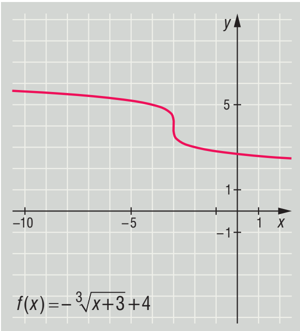
$x \in \mathbb{R};$

f)



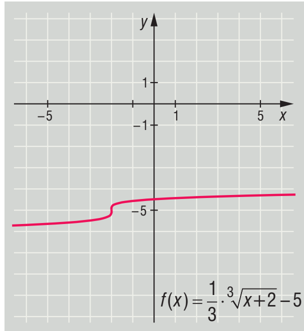
$x \in \mathbb{R};$

g)



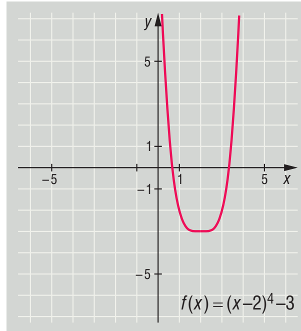
$x \in \mathbb{R}$;

h)



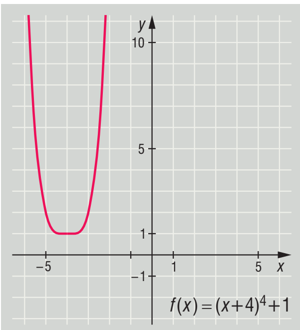
$x \in \mathbb{R}$;

i)



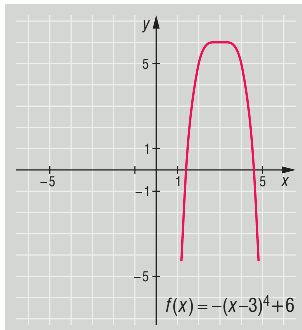
$x \in \mathbb{R}$;

j)



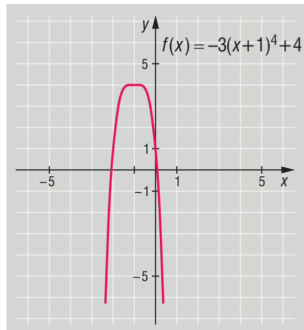
$x \in \mathbb{R}$;

k)



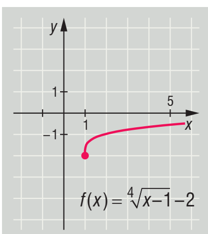
$x \in \mathbb{R}$;

l)



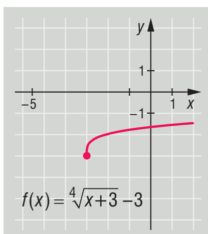
$x \in \mathbb{R}$;

m)



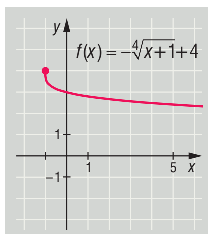
$x \geq 1,\ x \in \mathbb{R}$;

n)



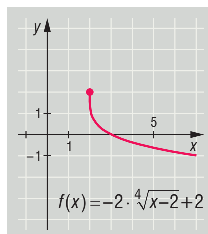
$x \geq -3,\ x \in \mathbb{R}$;

o)



$x \geq -1,\ x \in \mathbb{R}$;

p)



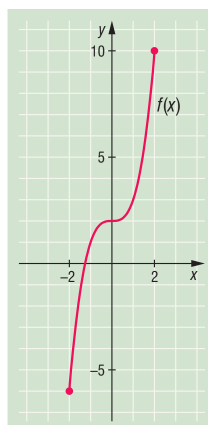
$x \geq 2,\ x \in \mathbb{R}$.

3167 *a)* Értékkészlete: $[-6; 10]$.

Menete: a függvény növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x=-2$, értéke: $y=-6$;
maximumának helye: $x=2$, értéke: $y=10$.

Zérushelye: $x=\sqrt[3]{-2}$.



b) Értékkészlete: $[-6; 10]$.

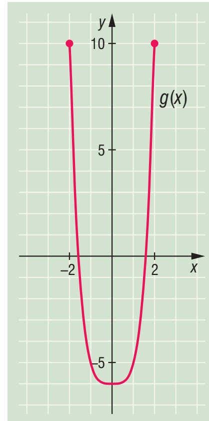
Menete: $[-2; 0]$-ban csökken,

$[0; 2]$-ban növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = -6$;

maximumának helye: $x = -2$ és $x = 2$, értéke: $y = 10$.

Zérushelyek: $x = \sqrt[4]{6}$ és $x = -\sqrt[4]{6}$.



c) Értékkészlete: $[-2; 2]$.

Menete: a függvény növekszik.

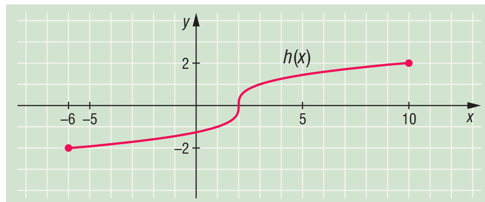
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -6$,

értéke: $y = -2$;

maximumának helye: $x = 10$,

értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $x = 2$.



d) Értékkészlete: $[0; 2]$.

Menete: a függvény növekszik.

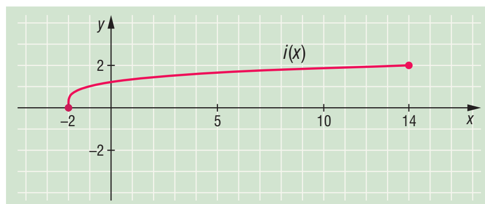
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -2$,

értéke: $y = 0$;

maximumának helye: $x = 14$,

értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $x = -2$.



e) Értékkészlete: $[1; 4]$.

Menete: a függvény növekszik.

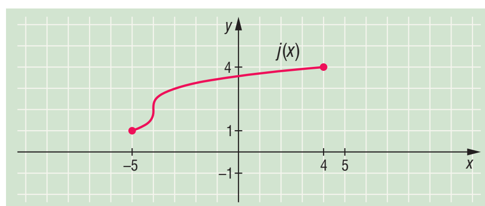
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -5$,

értéke: $y = 1$;

maximumának helye: $x = 4$,

értéke: $y = 4$.

Zérushelye: nincs.



f) Értékkészlete: $[1; 3]$.

Menete: a függvény csökken.

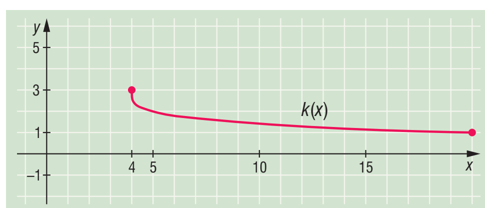
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 20$,

értéke: $y = 1$;

maximumának helye: $x = 4$,

értéke: $y = 3$.

Zérushelye: nincs.

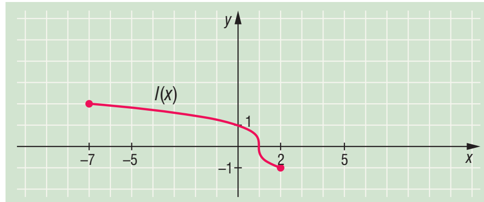


g) Értékkészlete: $[-1; 2]$.

Menete: a függvény csökken.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 2$,
értéke: $y = -1$;
maximumának helye: $x = -7$,
értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $x = 1$.

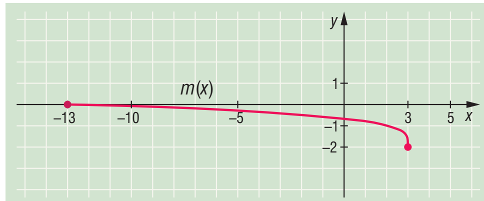


h) Értékkészlete: $[-2; 0]$.

Menete: a függvény csökken.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 3$,
értéke: $y = -2$;
maximumának helye: $x = -13$,
értéke: $y = 0$.

Zérushelye: $x = -13$.



3168 *a)* A függvény átalakítva:

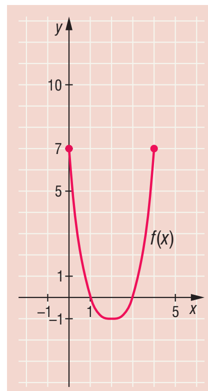
$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 - 1, & \text{ha} \quad x \geq 2, \\ -(x-2)^3 - 1, & \text{ha} \quad x < 2. \end{cases}$$

Értékkészlete: $[-1; 7]$.

Menete: $[0; 2]$-ban csökken,
$[2; 4]$-ban növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 2$,
értéke: $y = -1$;
maximumának helye: $x = 0$ és $x = 4$,
értéke: $y = 7$.

Zérushelyei: $x = 1$ és $x = 3$.



b) A függvény átalakítva:

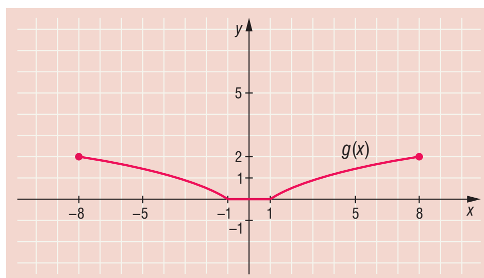
$$g(x) = \begin{cases} -2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2, & \text{ha} \quad x < -1, \\ 0, & \text{ha} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2, & \text{ha} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Értékkészlete: $[0; 2]$.

Menete: $[-8; -1]$-ban csökken,
$[-1; 1]$-ban konstans,
$[1; 8]$-ban növekszik.

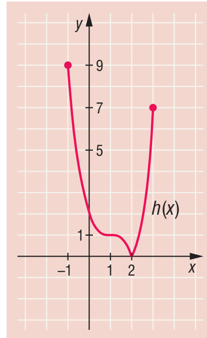
Szélsőértékei: minimumának helye: $-1 \leq x \leq 1$,
értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = -8$ és $x = 8$,
értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $-1 \leq x \leq 1$.



c) A függvény átalakítva:

$$h(x)=|(x-1)^3-1|=\begin{cases}(x-1)^3-1, & \text{ha} \quad x\ge 2,\\ -(x-1)^3+1, & \text{ha} \quad x<2.\end{cases}$$



Értékkészlete: $[0; 9]$.

Menete: $[-1; 2]$-ban csökken,

$[2; 3]$-ban növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x=2$,
értéke: $y=0$;
maximumának helye: $x=-1$,
értéke: $y=9$.

Zérushelye: $x=2$.

Törtkitevőjű hatvány – megoldások

3169 *a)* 8; *b)* 9; *c)* 4; *d)* 3; *e)* $\frac{1}{5}$; *f)* $\frac{1}{2}$;
g) $\frac{1}{1000}$; *h)* $\frac{1}{100}$; *i)* 25; *j)* 1000. *k)* $\frac{8}{27}$; *l)* $\frac{2}{3}$.

3170 *a)* $\sqrt[8]{5}$; *b)* $\sqrt[7]{13^2}$; *c)* $\sqrt[11]{10^3}$; *d)* $\sqrt[3]{11^7}$; *e)* $\sqrt[3]{15^{-2}}$; *f)* $\sqrt[9]{23^{-4}}$;
g) $\sqrt[7]{7^{-20}}$; *h)* $\sqrt[21]{41^{-2}}$; *i)* $\sqrt[10]{9^{-7}}$; *j)* $\sqrt[100]{10^{-23}}$; *k)* $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$; *l)* $\frac{2}{\sqrt[3]{b^2}}$.

3171 *a)* $5^{\frac{1}{10}}$; *b)* $5^{\frac{4}{7}}$; *c)* $5^{\frac{1}{6}}$; *d)* $5^{\frac{6}{11}}$;
e) $\sqrt[5]{5^{-1}}=5^{-\frac{1}{5}}$; *f)* $\sqrt[8]{5^{-3}}=5^{-\frac{3}{8}}$; *g)* $\sqrt[3]{5^{11}}=5^{\frac{11}{3}}$; *h)* $\sqrt[12]{5^3\cdot 5^2}=5^{\frac{5}{12}}$;
i) $\sqrt[12]{\dfrac{5^9}{5^4\cdot 5^2}}=\sqrt[12]{5^3}=5^{\frac{1}{4}}$; *j)* $\dfrac{\sqrt{\sqrt[12]{5^4\cdot 5^3}}}{5}=\sqrt[24]{5^7}\cdot 5^{-1}=5^{-\frac{17}{24}}$;
k) $\sqrt[20]{\dfrac{(5^2)^4\cdot(5^3)^{10}}{(5^5)^5}}=\sqrt[20]{5^{13}}=5^{\frac{13}{20}}$; *l)* $\dfrac{\sqrt[4]{5\cdot\sqrt[6]{5^3}}}{\sqrt[6]{5\cdot\sqrt[4]{5^3}}}=\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[6]{5^9}}}{\sqrt[6]{\sqrt[4]{5^7}}}=\sqrt[24]{5^2}=5^{\frac{1}{12}}$.

3172 *a)* $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{-\frac{5}{6}}}=\dfrac{a^{\frac{14}{12}}}{a^{-\frac{1}{12}}}=a^{\frac{15}{12}}=a^{\frac{5}{4}}$; *b)* $\dfrac{b^{-\frac{3}{5}}\cdot b^{-\frac{3}{10}}}{b^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{7}{10}}}=\dfrac{b^{-\frac{9}{10}}}{b^{-\frac{12}{10}}}=b^{\frac{3}{10}}$;

c) $\dfrac{c^{\frac{1}{12}}\cdot c^{-\frac{1}{6}}}{c^{-\frac{1}{6}}\cdot c^{-\frac{5}{12}}}=\dfrac{c^{\frac{1}{12}}}{c^{-\frac{5}{12}}}=c^{\frac{1}{2}}$; *d)* $\dfrac{\left(d^{-\frac{1}{2}}\cdot d^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{7}{5}}}{\left(d^{-\frac{2}{5}}\cdot d^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{d^{\frac{7}{10}}\cdot d^{-\frac{14}{15}}}{d^{\frac{4}{15}}\cdot d^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{d^{-\frac{7}{30}}}{d^{\frac{23}{30}}}=d^{-1}$.

3173 *a)* $4^{-\frac{4}{3}} = 2^{-\frac{8}{3}} < \sqrt[3]{32^{-1}} = 2^{-\frac{5}{3}} < \sqrt[5]{8^{-2}} = 2^{-\frac{6}{5}} < \sqrt[8]{8^{-3}} = 2^{-\frac{9}{8}} < 2^{-\frac{3}{5}}$;

b) $\sqrt{27^{-3}} = 3^{-\frac{9}{2}} < \sqrt[5]{81^{-3}} = 3^{-\frac{12}{5}} < \sqrt[7]{3^{-6}} = 3^{-\frac{6}{7}} < 3^{-\frac{5}{7}} < \sqrt[3]{9^{-1}} = 3^{-\frac{2}{3}}$;

c) $25^{-\frac{7}{5}} = 5^{-\frac{14}{5}} < \sqrt{125^{-1}} = 5^{-\frac{3}{2}} < \sqrt[4]{5^{-5}} = 5^{-\frac{5}{4}} < \sqrt[3]{25^{-1}} = 5^{-\frac{2}{3}} < 5^{-\frac{2}{5}}$;

d) $7^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[10]{7^6}} < 7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[10]{7^5}} < \sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{7^3} < \sqrt[3]{49} = \sqrt[12]{7^8} < \sqrt[3]{343} = \sqrt[12]{7^{12}}$.

3174 *a)* $2^{\frac{4}{5}} = \left(2^2\right)^{\frac{2}{5}} = a$;

b) $16^{\frac{2}{5}} = \left(4^2\right)^{\frac{2}{5}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^2 = a^2$;

c) $4^{\frac{1}{3}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{5}{6}}$;

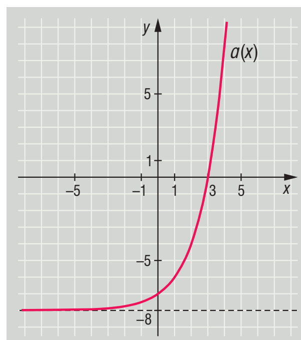
d) $8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{4}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{15}{8}} = a^{\frac{15}{8}}$;

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{4}} = 4^{-\frac{1}{8}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{5}{16}} = a^{-\frac{5}{16}}$;

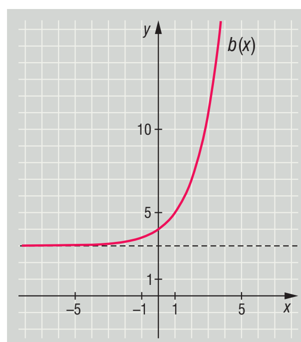
f) $32^{-\frac{2}{3}} = \left(2^5\right)^{-\frac{2}{3}} = 4^{-\frac{5}{3}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{25}{6}} = a^{-\frac{25}{6}}$.

Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális függvény – megoldások

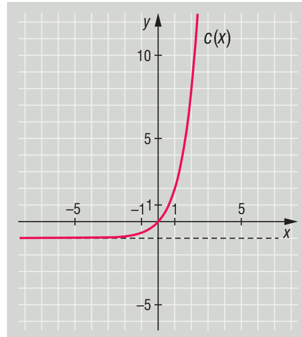
3175 *a)* Értékkészlete: $a(x) > -8$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 3$.



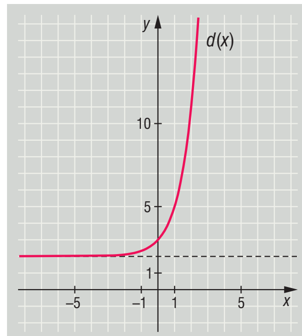
b) Értékkészlete: $b(x) > 3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: nincs.



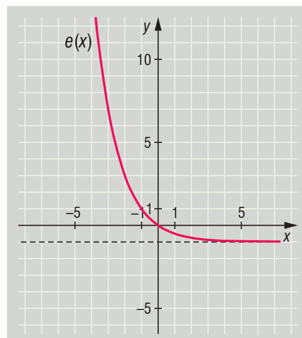
c) Értékkészlete: $c(x) > -1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 0$.



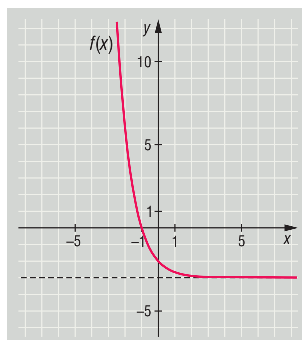
d) Értékkészlete: $d(x) > 2$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: nincs.



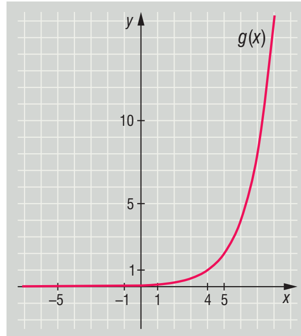
e) Értékkészlete: $e(x) > -1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 0$.



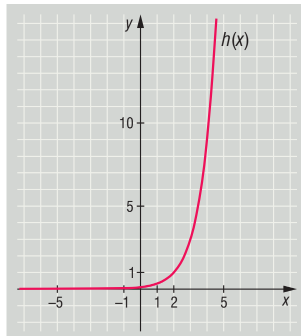
f) Értékkészlete: $f(x) > -3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = -1$.



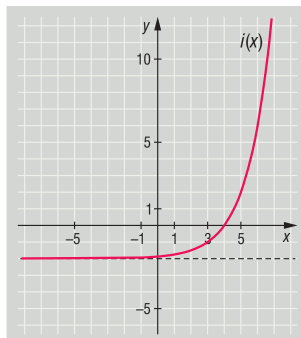
g) Értékkészlete: $g(x) > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: nincs.



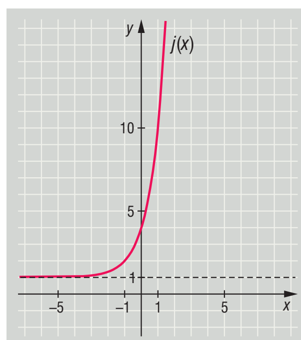
h) Értékkészlete: $h(x) > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: nincs.



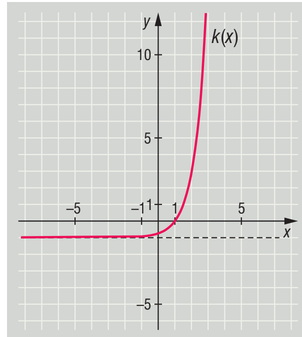
i) Értékkészlete: $i(x) > -2$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 4$.



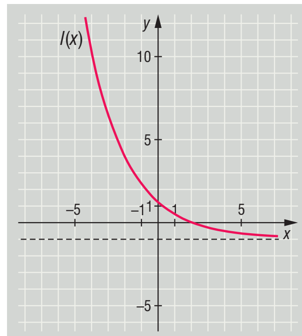
j) Értékkészlete: $j(x) > 1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: nincs.



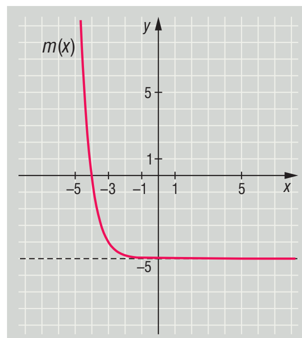
k) Értékkészlete: $k(x) > -1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 1$.



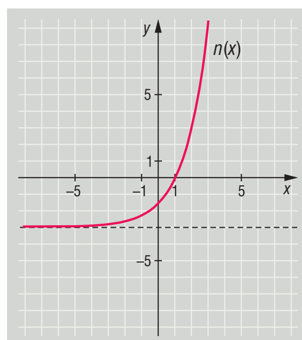
l) Értékkészlete: $l(x) > -1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 2$.

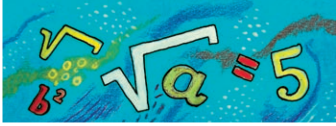


m) Értékkészlete: $m(x) > -5$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = -4$.



n) Értékkészlete: $n(x) > -3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 1$.





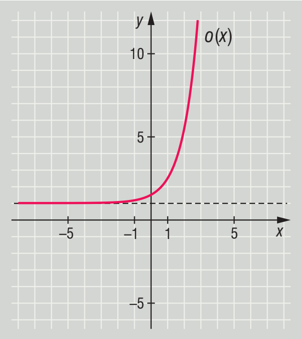
o) Az $o(x)$ függvény átalakítható a következőképpen:

$$o(x)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3^{x-1}+1=\frac{1}{2}\cdot 3^{x}+1.$$

Értékkészlete: $o(x)>1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

Zérushelye: nincs.



p) A $p(x)$ függvény átalakítható a következőképpen:

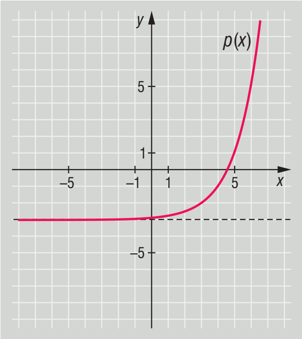
$$p(x)=\frac{2^{x-1}}{2^{2}}-3=2^{x-3}-3.$$

Értékkészlete: $p(x)>-3$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

Zérushelye: $x\approx 4{,}6$.

(Később, ha a logaritmust tanuljuk, ezt az értéket már ki tudjuk számítani.)



3176 *a)* $a(x)=2^{x}-2$; *b)* $b(x)=2^{x}-4$;

c) $c(x)=2^{x-1}$; *d)* $d(x)=2^{x+3}$;

e) $e(x)=2^{x+1}+1$; *f)* $f(x)=2^{x-2}-8$;

g) $g(x)=2^{-x}-2,\ g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2$; *h)* $h(x)=2^{-x-2}+1,\ h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}+1$;

i) $i(x)=2^{3-x}-4,\ i(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-4$; *j)* $j(x)=2^{-x-3}-8,\ j(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}-8$.

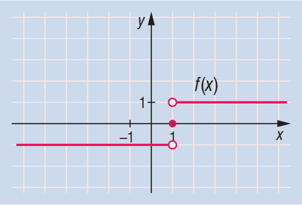
3177 *a)* $t(0)=22$ °C, $t(6)\approx 33$ °C.

b) $t(15)\approx 60{,}76$ °C, tehát túllépte a 60 °C-ot.

c) $t(8)\approx 37{,}82$ °C. $t(12)\approx 49{,}59$ °C, ami 31,1%-os növekedés.

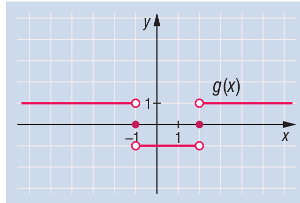
3178 *a)* A függvény átalakítva:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x>1,\\ 0, & \text{ha} \quad x=1,\\ -1, & \text{ha} \quad x<1.\end{cases}$$



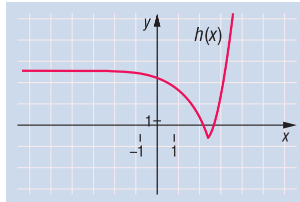
b) A függvény átalakítva:

$$g(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x<-1 \text{ vagy } x>2, \\ 0, & \text{ha} \quad x=-1 \text{ vagy } x=2, \\ -1, & \text{ha} \quad -1<x<2. \end{cases}$$



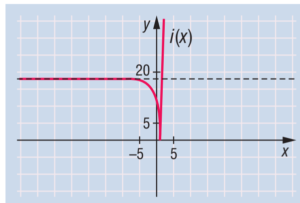
c) A függvény átalakítva:

$$h(x)=\begin{cases} 2^{x-1}-4, & \text{ha} \quad x\ge 3, \\ -2^{x-1}+4, & \text{ha} \quad x<3. \end{cases}$$



d) A függvény átalakítva:

$$i(x)=2\cdot|3^{x+1}-9|=\begin{cases} 2\cdot(3^{x+1}-9), & \text{ha} \quad x\ge 1, \\ -2\cdot(3^{x+1}-9), & \text{ha} \quad x<1. \end{cases}$$



3179 *a)* Ábrázolás előtt rendezve az egyenletet:

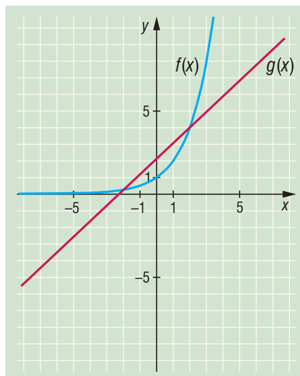
$$2^x=\frac{15}{16}\cdot x+\frac{34}{16}.$$

Legyen

$$f(x)=2^x \qquad \text{és} \qquad g(x)=\frac{15}{16}\cdot x+\frac{34}{16}.$$

Az ábráról leolvasott megoldások, ellenőrzés után:

$$x_1=2 \quad \text{és} \quad x_2=-2.$$



b) Ábrázolás előtt átalakítva:

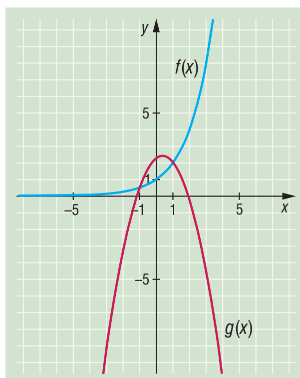
$$2^x=-x^2+\frac{3}{4}\cdot x+\frac{9}{4} \qquad \text{azaz} \qquad 2^x=-\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{153}{64}.$$

Legyen

$$f(x)=2^x \qquad \text{és} \qquad g(x)=-\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{153}{64}.$$

Az ábráról leolvasott megoldások, ellenőrzés után:

$$x_1=-1 \quad \text{és} \quad x_2=1.$$



Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek – megoldások

3180 *a)* $x=\frac{5}{4}$; *b)* $x=0$; *c)* $x=-\frac{1}{4}$; *d)* $x=\frac{1}{2}$; *e)* $x=\frac{7}{2}$; *f)* $x=1$;
g) $x=9$; *h)* $x=2$; *i)* $x=-4$; *j)* $x=-1$; *k)* $x=0$; *l)* $x=5$;
m) $x=3$; *n)* $x=-5$; *o)* $x=\frac{13}{2}$; *p)* $x=\frac{1}{5}$; *q)* $x=\frac{7}{2}$; *r)* $x=-\frac{5}{2}$;
s) $x=\frac{6}{5}$; *t)* $x=6$; *u)* $x=0$.

3181 *a)* $x=\frac{1}{2}$; *b)* $x_1=6$ vagy $x_2=0$; *c)* $x_1=5$ és $x_2=-7$;
d) $x_1=\frac{5}{2}$ és $x_2=-\frac{5}{2}$; *e)* $x=-\frac{1}{5}$; *f)* $x=-3$;
g) Nincs megoldás. *h)* $x=-4$; *i)* $x=-2$.

3182 *a)* $x=-1$; *b)* $x=\frac{1}{4}$; *c)* $x=2$; *d)* $x=-\frac{2}{3}$; *e)* $x=2$; *f)* $x=1$.

3183 *a)* $x=0$; *b)* $x=-2$; *c)* $x=1$; *d)* $x=4$; *e)* $x=3$; *f)* $x=2$;
g) $x=3$; *h)* $x=4$.

3184 *a)* $x_1=1,\ x_2=0$; *b)* $x_1=2,\ x_2=1$; *c)* $x_1=2,\ x_2=1$;
d) $x_1=3,\ x_2=-1$; *e)* $x_1=1,\ x_2=-2$; *f)* $x_1=1,\ x_2=-2$;
g) $x=5$; *h)* $x=-1$; *i)* $x_1\approx 1{,}305,\ x_2=1$;
j) $x=-1$; *k)* $x=0$; *l)* $x=-1$.

3185 *a)* $x=2,\ y=1$; *b)* $x=0,\ y=3$; *c)* $x=\frac{1}{2},\ y=2$;
d) $x=2,\ y=1$; *e)* $x=2,\ y=0$; *f)* $x=1,\ y=1$;
g) $x=5,\ y=-7$; *h)* $x=1,\ y=\frac{1}{2}$; *i)* $x=4,\ y=5$;
j) $x=3,\ y=1$.

3186 *a)* $x<5$; *b)* $x\ge\frac{1}{2}$; *c)* $x\ge\frac{3}{5}$; *d)* $x<-\frac{1}{3}$; *e)* $x>-\frac{8}{3}$; *f)* $x\le\frac{5}{9}$;
g) $x>\frac{25}{17}$; *h)* $x\le-2$; *i)* $x<2$; *j)* $x>\frac{32}{17}$.

3187 *a)* $x=3$; *b)* $x=4$; *c)* $x=1$; *d)* $x=-\frac{7}{11}$; *e)* $x=-4$; *f)* $x=3$;
g) $x=2$; *h)* $x=-3$; *i)* $x_1=1,\ x_2=-2$; *j)* $x_1=4,\ x_2=-2$;
k) $x=-1$; *l)* $x=\frac{2}{3}$; *m)* $x=-1$; *n)* $x=-\frac{1}{3}$; *o)* $x=2$; *p)* $x=4$.

3188 *a)* $x_1 = 7,\ x_2 = 2$; *b)* $x_1 = 5,\ x_2 = -3$; *c)* $x_1 = 3,\ x_2 = -3$;
d) $x_1 = 4,\ x_2 = 1$; *e)* $x_1 = 5,\ x_2 = -5$; *f)* $x = 64$;
g) $x = 2$; *h)* $x = 1$; *i)* $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
j) $x_1 = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \dfrac{11\pi}{6} + 2l\pi,\ k, l \in \mathbb{Z}$; *k)* $x = 5$.
l) $x = -17$; *m)* $x = 3$; *n)* $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$;
o) $x_1 = 1,\ x_2 = -4$; *p)* $x_1 = 1,\ x_2 = -3$.

3189 *a)* A hatványokat átírva:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 45\cdot 3^x - \dfrac{7}{2}\cdot 2^y = 17 \\ (2) & 12\cdot 3^x + \dfrac{5}{8}\cdot 2^y = 17 \end{array}\right\}, \quad \text{ahonnan} \quad 3^x = 1 \text{ és } 2^y = 8, \quad \text{a megoldás: } x = 0,\ y = 3.$$

b) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt a két egyenletből:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 2x - 2 + y = -\dfrac{2}{3} \\ (2) & x + 3y - 1 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}, \quad \text{a megoldás: } x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}.$$

c) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt a két egyenletből:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 2xy = 3 \\ (2) & 2xy + x = 1 + \dfrac{3}{y} \end{array}\right\}, \quad \text{a megoldás: } x = 2,\ y = \frac{3}{4}.$$

d) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt a két egyenletből:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x\cdot y = \dfrac{2}{3} \\ (2) & 2x - y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}, \quad \text{a megoldások: } x_1 = \frac{2}{3},\ y_1 = 1 \text{ és } x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = -\frac{4}{3}.$$

e) Jelölje $6^x = a$, és $5^y = b$. Így:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 5a + 8b = 13 \\ (2) & \dfrac{5}{a} + \dfrac{8}{b} = 13 \end{array}\right\}.$$

A (2)-es egyenletet beszorozva $a\cdot b$-vel, valamint az (1) egyenletből kifejezett $a = \dfrac{13-8b}{5}$-t helyettesítve (2)-be kapjuk:

$$5b + 8\cdot\frac{13-8b}{5} = 13b\cdot\frac{13-8b}{5},$$

amiből ered: $b^2 - 2b + 1 = 0$. Megoldásai: $x = 0,\ y = 0$.

f) A (2) egyenletben átrendezés után: $y^{x^2-7y-1} = 1$. Felhasználva, hogy $1 = y^0$ $(y > 0)$, valamint, hogy az exponenciális függvény szigorú monoton, kapjuk: $x^2 - 7y - 1 = 0$. Ebbe helyettesítve (1)-ből kifejezett $y = 1 - x$-et nyerjük az $x^2 + 7x - 8 = 0$ egyenletet, melynek gyökei: $x_1 = 1$, és $x^2 = -8$, melyhez tartozó y értékek: $y_1 = 0$, és $y_2 = 9$.

Az egyenletrendszer megoldása: $(-8\ ;\ 9)$ számpár.

3190 *a)* Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$\frac{x+3}{x+2} > 2, \quad \text{amiből} \quad \frac{-x-1}{x+2} > 0,$$

megoldása: $-2 < x < -1$.

b) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$\frac{4x-2}{3x+2} \geq -3, \quad \text{amiből} \quad \frac{13x+4}{3x+2} \geq 0,$$

megoldása: $x < -\frac{2}{3}$ vagy $-\frac{4}{13} \leq x$.

c) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$\frac{2x+3}{4x-1} < \frac{1}{2}, \quad \text{amiből} \quad \frac{10}{8x-2} < 0,$$

megoldása: $x < \frac{1}{4}$.

d) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$x^2 - 2x > 8,$$

megoldása: $x < -2$ vagy $4 < x$.

e) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$x^2 - 15 < -2x,$$

megoldása: $-5 < x < 3$.

f) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$x^2 + 3 \geq -6x - 6,$$

megoldása: $x \in \mathbb{R}$.

g) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$2 \cdot |x| \leq x + 2,$$

megoldása: $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$.

h) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$|x-3| > \frac{1}{2} \cdot x,$$

megoldása: $x < 2$ vagy $x > 6$.

i) A 2^x-re vonatkozóan másodfokú egyenlőtlenség, megoldása $2^x \leq 1$ vagy $2^x \geq 2$, amiből a megoldás: $x \leq 0$ vagy $x \geq 1$.

j) Az 5^x-re másodfokú egyenlőtlenség megoldása: $\frac{1}{5} \leq 5^x \leq 25$, amiből: $-1 \leq x \leq 2$.

k) Az $\frac{1}{2}$-es alapú exponenciális függvény szigorú csökkenése miatt:

$$4 > \frac{2}{x},$$

megoldása: $x > \frac{1}{2}$.

l) Az $\frac{1}{16}$-os alapú exponenciális függvény szigorú csökkenése miatt:

$$2 \cdot |x| - 1 < 2,$$

megoldása: $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$.

3191 *a)* Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x > 0,\ x \neq 1$.
A zárójelek felbontása után:

$$5^{\left(1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\cdot\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 5^2.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:

$$\left(1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\cdot\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-1} = 2,$$

ha új változót vezetünk be: $\sqrt{x} = t$, beszorzás után:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0,$$

melynek gyökei: $t_1 = 3,\ t_2 = -\frac{1}{2}$, csak az első felel meg, ebből $x = 9$.

b) A jobb oldali kifejezés a számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$5^{-x} + 5^{x+2} \geq 2\cdot\sqrt{5^{-x}\cdot 5^{x+2}} = 10.$$

A bal oldal:

$$1 - 6y - y^2 = 10 - (y+3)^2 \leq 10.$$

Akkor van megoldás, ha mindkét oldal 10-zel egyenlő, ekkor: $x = -1,\ y = -3$.

c) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Alakítsuk az egyik kitevőt:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1,$$

így az egyenletünk:

$$4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2\cdot 2^{\operatorname{tg}^2 x} - 80 = 0.$$

Az egyenlet $2^{\operatorname{tg}^2 x}$-re vonatkozóan másodfokú.
Megoldásai:

$2^{\operatorname{tg}^2 x} = -10$, aminek nincs megoldása, és
$2^{\operatorname{tg}^2 x} = 8$, amiből $\operatorname{tg}^2 x = 3$, azaz $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ vagy $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Ezek megoldásai: $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$ vagy $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l\pi,\ k, l \in \mathbb{Z}$.

3192 Az egyenlet $3^x = t$-re nézve másodfokú. Mivel $3^x > 0$, akkor lesz két különböző valós gyök, ha az egyenlet diszkriminánsa $D > 0$ (1) és a t-re másodfokú egyenlet mindkét megoldása pozitív (2).
Az (1) teljesül, ha:

$$4\cdot(p-3)^2 - 4\cdot(p^2-4) > 0,$$

ennek megoldása: $p < \frac{13}{6}$.

A (2) teljesül, ha $t_1 \cdot t_2 > 0$ (3) és $t_1 + t_2 > 0$ (4).
A (3) alapján: $p^2 - 4 > 0$, megoldása: $p < -2$ vagy $2 < p$.
A (4) alapján: $2\cdot(p-3) < 0$, megoldása: $p < 3$.
Az (1), (3) és (4) feltételek mindegyike teljesül, ha:

$$p < -2 \quad \text{vagy} \quad 2 < p < \frac{13}{6}.$$

3193 Az első egyenlet:

$$2^{6x} + 2^{6y} = 12.$$

A második egyenletből:

$$x + y = \frac{5}{6}, \quad \text{vagyis} \quad 6x + 6y = 5.$$

Az első egyenletbe helyettesítve:

$$2^{6x} + 2^{5-6x} = 12.$$

A 2^{6x}-re nézve másodfokú egyenlet megoldásai:

$$2^{6x} = 8 \quad \text{és} \quad 2^{6x} = 4.$$

Az egyenletrendszer megoldásai:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = \frac{1}{3} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{1}{3},\ y_2 = \frac{1}{2}.$$

3194 *a)* Válasszuk szét a különböző alapokhoz tartozó hatványokat:

$$4^{-x} - \frac{3^{-x}}{\sqrt{3}} > \sqrt{3} \cdot 3^{-x} - \frac{4^{-x}}{2},$$

$$4^{-x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) > 3^{-x} \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\frac{3}{2} \cdot 4^{-x} > \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3^{-x},$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x} > \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{3},$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x} > \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Az exponenciális függvény szigorú növekedése $\left(\frac{4}{3} > 1\right)$ miatt:

$$-x > \frac{3}{2}, \qquad \text{amiből} \qquad x < -\frac{3}{2}.$$

b) Írjuk fel mindegyik alapot 2 hatványaként:

$$\left(2^{-2}\right)^{3x} - \left(2^{-3}\right)^{x-1} - 128 \le 0,$$

$$2^{-6x} - 2^{-3x+3} - 128 \le 0.$$

Az egyenlőtlenség másodfokú a $2^{-3x} = y$-ra vonatkozóan:

$$y^2 - 8y - 128 \le 0.$$

A másodfokú kifejezés zérushelyei: $y_1 = 16$, $y_2 = -8$.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-8 \le y \le 16.$$

Visszahelyettesítve:

$$-8 \le 2^{-3x} \le 16.$$

A bal oldali egyenlőtlenség minden valós szám esetén igaz, a jobb oldali pedig teljesül, ha $x \ge -\frac{4}{3}$.

A logaritmus fogalma – megoldások

3195 *a)* 2; *b)* 3; *c)* 7; *d)* $-\frac{1}{2}$;
e) -2; *f)* $\frac{7}{3}$; *g)* $\frac{2}{5}$; *h)* $\frac{1}{7}$;
i) 3; *j)* -4; *k)* 0; *l)* 23;
m) -2; *n)* -4; *o)* -3; *p)* -2.

3196 *a)* 10; *b)* 57; *c)* 41; *d)* 11;
e) 49; *f)* 27; *g)* 25; *h)* 169;
i) 3; *j)* 8; *k)* 5; *l)* 81;
m) 0,1; *n)* $\frac{1}{5}$; *o)* $\frac{1}{25}$; *p)* $\frac{1}{17}$.

3197 *a)* $x = 64$; *b)* $x = 625$; *c)* $x = \frac{1}{3}$; *d)* $x = \frac{1}{16}$;
e) $x = 7$; *f)* $x = 5$; *g)* $x = 4$; *h)* $x = \frac{1}{2}$;
i) $x = \frac{1}{9}$; *j)* $x = \frac{1}{32}$; *k)* $x = \frac{1}{100\,000}$; *l)* $x = \frac{1}{128}$.

3198 *a)* $x = 2$; *b)* $x = 4$; *c)* $x = 2$; *d)* $x = 10$;
e) $x = 100$; *f)* $x = 1000$; *g)* $x = \sqrt{6}$; *h)* $x = 8$;
i) $x = \frac{1}{6}$; *j)* $x = \frac{1}{5}$; *k)* $x = 32$; *l)* $x = \frac{1}{27}$;
m) $x = \frac{8}{27}$; *n)* $x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ x \neq 1$; *o)* nincs megoldás; *p)* $x = 8$.

3199 *a)* $x > -1$; *b)* $x > \frac{6}{5}$; *c)* $x > \frac{3}{2}$; *d)* $-\frac{5}{7} < x < \frac{4}{5}$;
e) $x > \frac{1}{4}$; *f)* $x < -\frac{2}{3}$ vagy $x > \frac{1}{4}$; *g)* $x > \frac{8}{3}$; *h)* $-\frac{5}{7} < x < \frac{4}{5}$;
i) $x > \frac{3}{4};\ x \neq 1$; *j)* nincs megoldás.

3200 *a)* 4; *b)* $-\frac{2}{3}$; *c)* $\frac{1}{4}$; *d)* -10; *e)* $\frac{2}{7}$; *f)* $-\frac{8}{5}$;
g) $\frac{2}{5}$; *h)* $-\frac{5}{3}$; *i)* $-\frac{4}{3}$.

3201 *a)* $\log_2\left[\log_2\left(\log_2 16\right)\right] = \log_2\left(\log_2 4\right) = \log_2 2 = 1$;

b) $\log_5\left[\log_3\left(\log_{11} 11^3\right)\right] = \log_5\left(\log_3 3\right) = \log_5 1 = 0$;

c) $\lg\left[\lg\left(\lg 10^{(10^{10})}\right)\right] = \lg\left(\lg 10^{10}\right) \cdot \lg 10 = 1;$

d) $\log_5\left[\log_2\left(\log_6 \sqrt[32]{6}\right)\right] = \log_5\left(\log_2 \dfrac{1}{32}\right) = \log_5(-5)$, ami nem értelmezhető.

3202 *a)* $10 \cdot 10^{\lg 5} = 10 \cdot 5 = 50;$

b) $\dfrac{3^2}{3^{\log_3 6}} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2};$

c) $\dfrac{5}{5^{\log_5 3}} = \dfrac{5}{3};$

d) $4 \cdot 4^{\log_2 5} = 4 \cdot \left(2^{\log_2 5}\right)^2 = 4 \cdot 5^2 = 100;$

e) $\dfrac{2^3}{2^{\log_4 25}} = \dfrac{8}{\left(4^{\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{8}{5};$

f) $3 \cdot 3^{\log_9 4^3} = 3 \cdot \left(9^{\log_9 64}\right)^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \sqrt{64} = 3 \cdot 8 = 24;$

g) $7^{\log_7 5} \cdot \left(49^{\log_{49} 16}\right)^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 4 = 20;$

h) $\dfrac{5^{\log_{25} 9^3}}{5^{\log_5 4^2}} = \dfrac{\left(25^{\log_{25} 9^3}\right)^{\frac{1}{2}}}{4^2} = \dfrac{\left(3^6\right)^{\frac{1}{2}}}{16} = \dfrac{27}{16};$

i) $\dfrac{16^{\log_4 5}}{16^{\log_2 3}} = \dfrac{(4^{\log_4 5})^2}{(2^{\log_2 3})^4} = \dfrac{5^2}{3^4} = \dfrac{25}{81};$

j) $\dfrac{9^2}{9^{\log_3 2}} = \dfrac{81}{\left(3^{\log_3 2}\right)^2} = \dfrac{81}{4};$

k) $\sqrt{5^4 \cdot 5^{\log_5 4}} = 5^2 \cdot \sqrt{4} = 50;$

l) $\sqrt[3]{\dfrac{10^6}{10^{\lg 27}}} = \sqrt[3]{\dfrac{10^6}{27}} = \dfrac{100}{3};$

m) $\log_a \dfrac{a^{-2} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{-6} \cdot a^{\frac{3}{2}}} = \log_a a^{\frac{7}{2}} = \dfrac{7}{2};$

n) $\log_x\left(x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{8}}\right) = \log_x x^{-\frac{7}{8}} = -\dfrac{7}{8}.$

3203 *a)* Az $x^2 - 2x - 8 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < -2$ vagy $4 < x$.

b) Az $x^2 - 9 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < -3$ vagy $x > 3$.

Az $1 - 3x > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < \dfrac{1}{3}$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $x < -3$.

c) A $3x^2 - 16x + 5 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < \dfrac{1}{3}$ vagy $x > 5$.

A $7x + 5 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x > -\dfrac{5}{7}$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $-\dfrac{5}{7} < x < \dfrac{1}{3}$ vagy $x > 5$.

d) A $12x^2 + 5x - 3 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < -\dfrac{3}{4}$ vagy $\dfrac{1}{3} < x$.

A $x^2 + 2x > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < -3$ vagy $0 < x$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $x < -2$ vagy $\dfrac{1}{3} < x$.

e) A $3-|x|>0$ egyenlőtlenség megoldása: $-3<x<3$.

A $2x+3>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>-\frac{3}{2}$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $-\frac{3}{2}<x<3$.

f) Az $|x|-2>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<-2$ vagy $2<x$.

Az $x+5>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>-5$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $-5<x<-2$ vagy $2<x$.

g) A $2|x|-1>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<-\frac{1}{2}$ vagy $\frac{1}{2}<x$.

Az $x^2-x>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<0$ vagy $1<x$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $x<-\frac{1}{2}$ vagy $1<x$.

h) A $3^x-9>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>2$.

A $3x+2>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>-\frac{2}{3}$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $x>2$.

i) A $4x+5>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>-\frac{5}{4}$ vagy $x>0$, $x\neq 1$.

Az $1-3x>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<\frac{1}{3}$ vagy $x>-3$, $x\neq -2$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $0<x<\frac{1}{3}$.

j) A $17x-2>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>\frac{2}{17}$ vagy $x>1$, $x\neq 2$.

Az $6-2x>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<3$ vagy $x>0$, $x\neq 1$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $1<x<3$, $x\neq 2$.

3204 *a)* A $-4^{x+1}+33\cdot 2^x-8>0$ egyenlőtlenség 2^x-re másodfokú, megoldása: $\frac{1}{4}<2^x<8$, amiből: $-2<x<3$.

b) A $\sin x>0$, $\cos x>0$ és $\operatorname{tg} x>0$ egyenlőtlenségek együtt teljesülnek, ha:

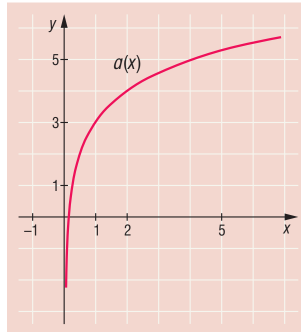
$$k\cdot 2\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

c) A $\sin x>0$ egyenlőtlenség megoldása: $l\cdot 2\pi<x<\pi+l\cdot 2\pi$, $l\in\mathbb{Z}$.
Az $x^2-3x+2>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<1$ vagy $2<x$.
A két egyenlőtlenség közös megoldása:

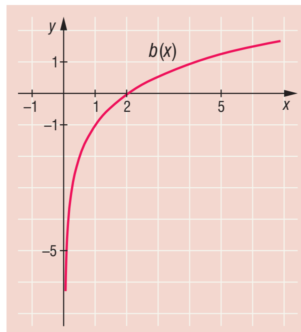
$$0<x<1 \quad\text{vagy}\quad 2<x<\pi \quad\text{vagy}\quad k\cdot 2\pi<x<\pi+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ |k|\geq 1.$$

A logaritmusfüggvény – megoldások

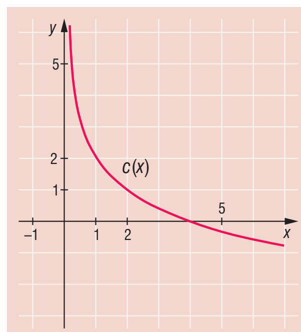
3205 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = \frac{1}{8}$.



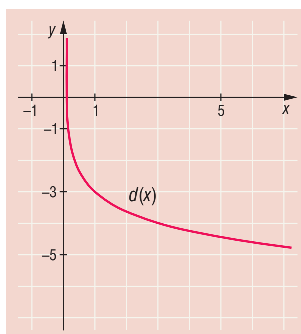
b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 2$.



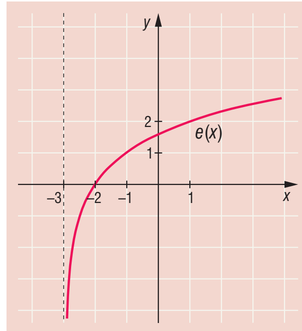
c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 4$.



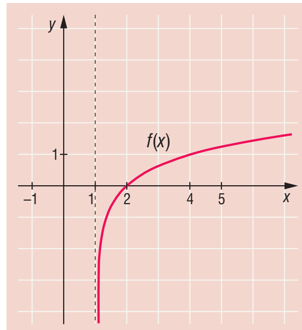
d) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = \frac{1}{27}$.



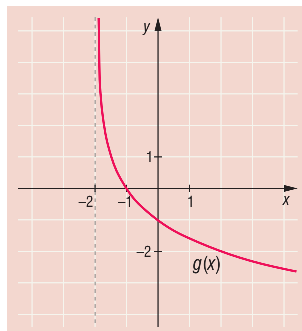
e) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x > -3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = -2$.



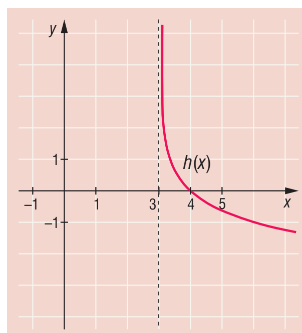
f) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 2$.



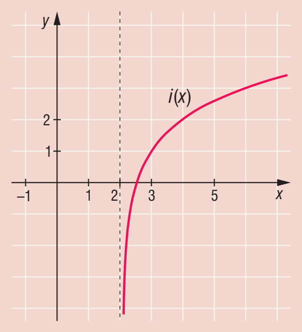
g) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x > -2$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = -1$.



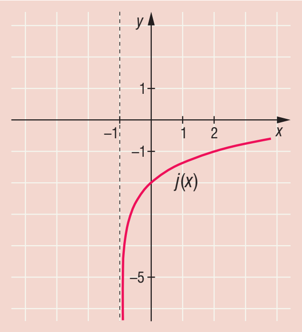
h) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x > 3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 4$.



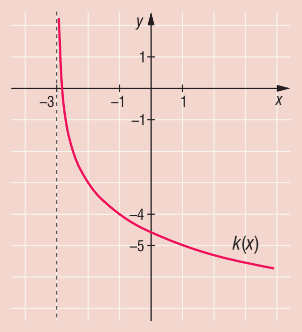
i) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 2$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = \frac{5}{2}$.



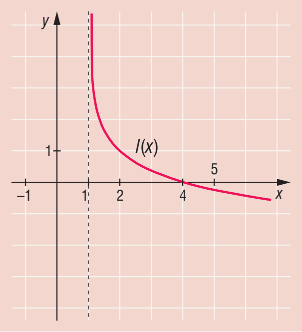
j) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > -1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 8$.



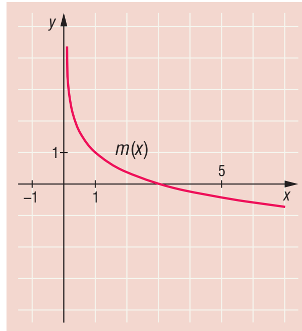
k) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > -3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = -\frac{23}{8}$.



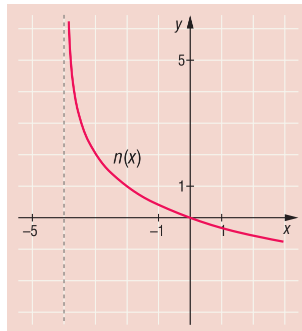
l) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 4$.



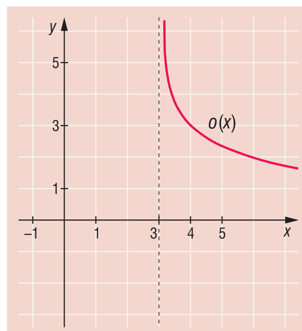
m) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 3$.



n) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > -4$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 0$.



o) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 30$.



3206 *a)* $a(x) = \log_2 x - 2$;
b) $b(x) = \log_2 x - 4$;
c) $c(x) = \log_2 (x-1)$;
d) $d(x) = \log_2 (x-3)$;
e) $e(x) = \log_2 (x+1) + 1$;
f) $f(x) = \log_2 (x-2) - 3$;
g) $g(x) = -\log_2 x$ vagy $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$;
h) $h(x) = 1 - \log_2 x$ vagy $h(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$;
i) $i(x) = -\log_2 (x+2) - 3$ vagy $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x+2) - 3$.

3207 *a)* A függvénybe behelyettesítve:

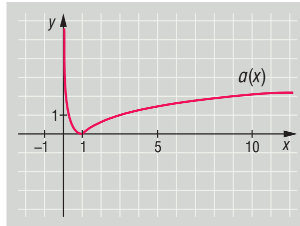
$$s(0) = 100, \qquad s(1) = 100 + 30 \cdot \lg 8 \approx 127{,}1,$$

tehát a megjelenéskor 100 000 db-ot, egy év múlva 127 000 darabot fognak eladni.

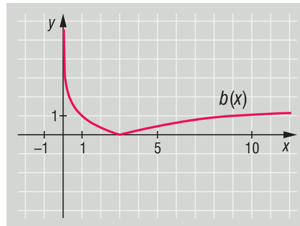
b) A $200 = 100 + 30 \cdot \lg(7t+1)$ egyenletből:

$$7t + 1 = 10^{\frac{10}{3}}, \qquad \text{amiből} \qquad t \approx 308 \text{ év.}$$

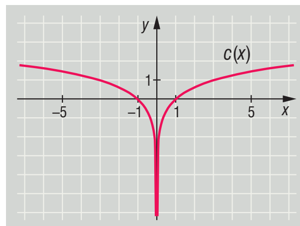
3208 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.



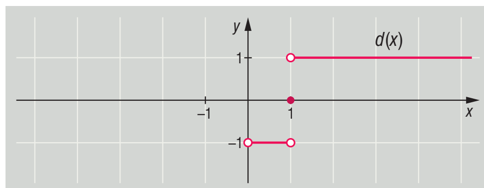
b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.



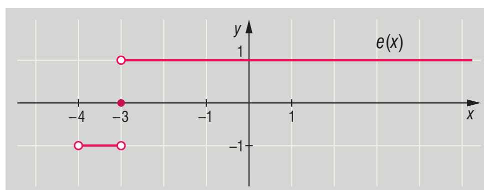
c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$.



d) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.

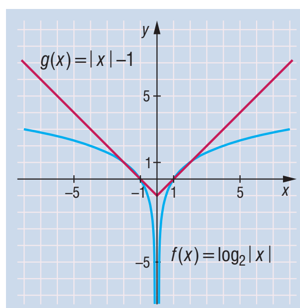


e) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > -4$.



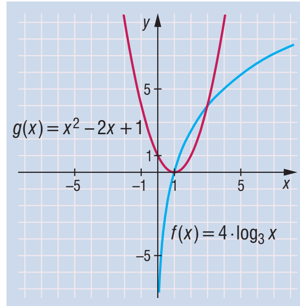
3209 *a)* Az ábráról leolvasott megoldásokat ellenőrizni kell.
Megoldások:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$



b) Az ábráról leolvasott megoldásokat ellenőrizni kell.
Megoldások:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 3.$$



A logaritmus azonosságai – megoldások

3210 *a)* $a = \dfrac{x \cdot z}{y}$; *b)* $b = x^2 \cdot y$; *c)* $c = 81 \cdot z^3$;

d) $d = \dfrac{y^2}{z^3}$; *e)* $e = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^2}}$; *f)* $f = \dfrac{10}{x}$;

g) $g = \dfrac{100 \cdot \sqrt{x}}{125} = \dfrac{4 \cdot \sqrt{x}}{5}$; *h)* $h = \dfrac{\sqrt[3]{z} \cdot \sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[5]{10}}$; *i)* $i = \dfrac{1}{10000 \cdot (x+1) \cdot y^3}$;

j) $j = 10^{x-y} \cdot z = \dfrac{z \cdot 10^x}{10^y}$.

3211 *a)* $a = 8$; *b)* $b = 5$; *c)* $c = 11$; *d)* $d = 10$;

e) $e = 12$; *f)* $f = \dfrac{13}{9}$; *g)* $g = 2 \cdot \sqrt{7}$; *h)* $h = \dfrac{1}{45}$.

3212 *a)* $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{9 \cdot 48}{6^3} = \log_{\sqrt{2}} \dfrac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^3} = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$;

b) $\log_6 \dfrac{12^5}{9^2 \cdot 4^4 \cdot 2} = \log_6 \dfrac{2^{10} \cdot 3^5}{2^9 \cdot 3^4} = \log_6 6 = 1$;

c) $\log_3 \dfrac{18^4 \cdot 256 \cdot 72^2}{36^3 \cdot 24^4} = \log_3 \dfrac{2^{12} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^6} = \log_3 9 = 2$;

d) $\log_5 \dfrac{6^6 \cdot 10^2}{32 \cdot 9^3 \cdot 200} = \log_5 \dfrac{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^2}{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^2} = \log_5 1 = 0$;

e) $\log_{\frac{1}{18}} \dfrac{6^7 \cdot 15^5 \cdot 35^5}{10^6 \cdot 21^5 \cdot 25^2 \cdot 3^5} = \log_{\frac{1}{18}} \dfrac{2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{10} \cdot 7^5}{2^6 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 7^5} = \log_{\frac{1}{18}} 18 = -1$;

f) $\log_8 \dfrac{\sqrt{2200} \cdot \sqrt{40}}{\sqrt{55} \cdot 10} = \log_8 \dfrac{10 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{11} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11} \cdot 10} = \log_8 4 = \dfrac{2}{3}$;

g) $\log_2 \dfrac{\operatorname{tg} 60° \cdot \cos 30° \cdot \sin 30°}{3} = \log_2 \dfrac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{3} = \log_2 \dfrac{1}{4} = -2$;

$h)$ $\log_4 \dfrac{\sin 45° \cdot \sqrt{2}}{\sin 60° \cdot \mathrm{tg} 30°} = \log_4 \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \log_4 2 = \dfrac{1}{2};$

$i)$ $\log_5 \dfrac{15 \cdot 25 \cdot \sqrt{63} \cdot \sqrt{28}}{126} = \log_5 \dfrac{3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 2}{3^2 \cdot 7 \cdot 2} = 3.$

3213 $a)$ Mivel az adott szorzatban a $\lg \mathrm{tg} 45°$ értéke 0, ezért a szorzat is 0.

$b)$ $\lg \dfrac{\cos 30° \cdot 4 \cdot \sin^2 30°}{\sin 60°} = \lg \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \lg 1 = 0;$

$c)$ $\lg\left[\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] = \lg\left[\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] = \lg 1 = 0;$

$d)$ $\log_6 \dfrac{9a - 6}{a^2 - a} = \log_6 \dfrac{12}{2} = \log_6 6 = 1;$

$e)$ $\log_{0,1}\left(10 \cdot \dfrac{2x+5}{5}\right) = \log_{0,1}[2 \cdot (2x+5)] = \log_{0,1} 10 = -1.$

3214 $a)$ $\lg(6 \cdot 10^{23}) = \lg 6 + 23 \;<\; \log_2 16^6 = \log_2 2^{24} = 24,$ mert $\lg 6 < 1;$

$b)$ $\lg(9{,}1 \cdot 10^{-31}) = \lg 9{,}1 - 31 \;<\; \log_5 \left(\dfrac{1}{125}\right)^{10} = \log_5 5^{-30} = -30,$ mert $\lg 9{,}1 < 1;$

$c)$ $\log_2 \left[5 \cdot \left(\dfrac{1}{32}\right)^{16}\right] = \log_2(5 \cdot 2^{-80}) = \log_2 5 - 80 \;>\; \log_3 \left[5 \cdot \left(\dfrac{1}{81}\right)^{20}\right] = \log_3(5 \cdot 3^{-80}) = \log_3 5 - 80,$

mert $\log_2 5 > \log_3 5.$

$d)$ Bal oldal: $\lg\left[\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_7 \sqrt[3]{49}\right)\right] = \lg\left[\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_7 7^{\frac{2}{3}}\right)\right] = \lg\left(\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{2}{3}\right) = \lg 1 = 0.$

Jobb oldal: $\log_2 \left[\log_{\frac{5}{6}}\left(\log_8 \sqrt{32}\right)\right] = \log_2 \left(\log_{\frac{5}{6}} \dfrac{5}{6}\right) = \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0.$

A két kifejezés egyenlő.

3215 $a)$ $\lg 2250 = \lg(15^2 \cdot 10) = 2b + 1.$

$b)$ $\lg 75 = \lg \dfrac{750}{10} = \lg \dfrac{50 \cdot 15}{10} = a + b - 1.$

$c)$ Az $a = 1 + \lg 5$ és $b = \lg 3 + \lg 5$ alapján $\lg 3 = b - \lg 5 = b - (a - 1) = b - a + 1.$

3216 A bal oldali tagokat átírva b alapú logaritmusra:

$$\log_b a + 6 \cdot \log_b a + 12 \cdot \log_b a - 20 \cdot \log_b a = -\log_b a.$$

A jobb oldal: $\log_b a^{-1} = -\log_b a.$

Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek – megoldások

3217 *a)* Értelmezés: $x > \frac{5}{7}$, megoldás: $x = 3$.

b) Értelmezés: $x > -\frac{1}{3}$, megoldás: $x = 5$.

c) Értelmezés: $x > -\frac{1}{8}$, megoldás: $x = \frac{1}{2}$.

d) Értelmezés: $x > \frac{10}{11}$, megoldás: $x = \frac{91}{100}$.

e) Értelmezés: $x > \frac{3}{10}$, megoldás: $x = \frac{7}{10}$.

f) Értelmezés: $x > \frac{10}{13}$, megoldás: $x = \frac{21}{26}$.

g) Értelmezés: $x < -8$ vagy $x > 8$, megoldások: $x_1 = 18$, $x_2 = -18$.

h) Értelmezés: $x < \frac{7-\sqrt{77}}{2}$ vagy $x > \frac{7+\sqrt{77}}{2}$, megoldások: $x_1 = 8$, $x_2 = -1$.

i) Értelmezés: $x \in \mathbb{R}$, megoldások: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

j) Értelmezés: $x < \frac{9-\sqrt{21}}{2}$ vagy $x > \frac{9+\sqrt{21}}{2}$, megoldások: $x_1 = 10$, $x_2 = -1$.

k) Értelmezés: $x > \frac{15}{4}$, megoldás: $x = 5$.

l) Értelmezés: $x > \frac{7}{3}$, megoldás: $x = 8$.

m) Értelmezés: $x > 0$, $x \neq 1$, megoldások: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Csak az első megoldás.

n) Értelmezés: $x > \frac{5}{6}$, $x \neq 1$, adódik: $x_1 = 5$, $x_2 = 1$. Csak az első megoldás.

o) Értelmezés: $x > \frac{10}{7}$, adódik: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$. A harmadik nem megoldás.

3218 *a)* Értelmezés: $x > -1$, megoldás: $x = 7$.

b) Értelmezés: $x > \frac{4}{3}$, adódik: $x = -7$, de nem megoldás.

c) Értelmezés: $x > \frac{3}{2}$, adódik: $x = -\frac{9}{10}$, de nem megoldás.

d) Értelmezés: $x > \frac{3}{5}$, megoldás: $x = 3$.

e) Értelmezés: $x > \frac{5}{3}$, adódik: $x = -\frac{3}{8}$, de nem megoldás.

f) Értelmezés: $-7 < x < 1$, megoldás: $x = -2$.

g) Értelmezés: $x > -\frac{7}{5}$, megoldás: $x = 4$.

h) Értelmezés: $x > -\frac{5}{3}$, megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{19}{13}$.

i) Értelmezés: $x > \frac{5}{43}$, megoldások: $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{5}{3}$.

j) Értelmezés: $x > \frac{1}{3}$, adódik: $x_1 = -3$, $x_2 = 27$. Csak a második megoldás.

k) Az értelmezési tartomány üres halmaz, nincs megoldás.

l) Értelmezés: $x > 8$, adódik: $x_1 = \frac{14}{3}$, $x_2 = 2$. Egyik sem megoldás.

m) Értelmezés: $x > 6$, adódik: $x_1 = 1$, $x_2 = 8$. Csak a második megoldás.

n) Értelmezés: $x > \frac{1}{5}$, adódik: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{17}{15}$. Csak az első megoldás.

3219 Értelmezés: $x > 0$, $y > 0$.

a) $x = 1024$, $y = 16$; *b)* $x = 81$, $y = 9$; *c)* $x = 25$, $y = \frac{1}{5}$; *d)* $x = 7$, $y = 49$;

e) $x = 1$, $y = 4$; *f)* $x = 4$, $y = 64$; *g)* $x = \frac{1}{4}$, $y = 8$; *h)* $x = \frac{1}{10}$, $y = 10$.

3220 *a)* Értelmezés: $x > \frac{3}{4}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x \le \frac{4}{3}$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{3}{4} < x \le \frac{4}{3}$.

b) Értelmezés: $x > \frac{1}{5}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $x \ge -3$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x > \frac{1}{5}$.

c) Értelmezés: $x > \frac{3}{4}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x > 7$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x > 7$.

d) Értelmezés: $x > \frac{5}{3}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x \le 3$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{5}{3} < x \le 3$.

e) Értelmezés: $x > \frac{3}{5}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $x > 6$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x > 6$.

f) Értelmezés: $x > -\frac{3}{4}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $x < -\frac{74}{100}$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{3}{4} < x < -\frac{74}{100}$.

3221 *a)* Értelmezés: $x > \frac{1}{7}$, megoldás: $x = \frac{3}{2}$.

b) Értelmezés: $x > \frac{1}{2}$, adódik: $x = -4$, de ez nem megoldás.

c) Értelmezés: $x > -1$. Érdemes beszorozni 2-vel, a $3x + 7 = (x + 1)^2$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Csak a második megoldás.

d) Értelmezés: $x > \frac{1}{3}$. Átszorzás után a $8x + 9 = (3x - 1)^2$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{4}{9}$. Csak az első megoldás.

e) Értelmezés: $x > 1000$. Átalakítva az egyenletet:

$$\lg(x - 1000) = \lg 10\,000 - \lg 25 = \lg 400.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt $x - 1000 = 400$, tehát: $x = 1400$.

f) Értelmezés: $x > -1$, $x \neq 0$. Átszorzás után, felhasználva a logaritmusfüggvény szigorú monotonitását, az $x^2 + 2x - 3 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Csak az $x_1 = 1$ a megoldás.

g) Értelmezés: $(x - 5) \cdot (x - 1) > 0$, $2x - 10 > 0$ és $\lg(2x - 10) \neq 0$ közös megoldása: $x > 5$, $x \neq 5{,}5$.

Az egyenletet átszorozva $\lg(2x - 10)$-zel, kapjuk: $\lg(x - 5) \cdot (x - 1) = \lg(2x - 10)$. A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt $x^2 - 8x + 15 = 0$, amely akkor teljesül, ha: $x_1=5$, $x_2=3$. Az értelmezési tartomány miatt az egyenletnek nincs megoldása.

h) Értelmezés: $x > 2$. Felhasználva a logaritmus azonosságait, kapjuk: $\lg[(x - 2) \cdot 8] = \lg(x^2 - 1)$, melyből a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt adódik: $8x - 16 = x^2 - 1$, vagyis $x^2 - 8x + 15 = 0$. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Mindkét gyök megfelel az adott értelmezési tartománynak.

i) A logaritmus definíciója alapján, sorban felbontva a zárójeleket:

$$\log_3[\log_4(\log_5 x)] = 1,$$

amiből $\log_4(\log_5 x) = 3$, ebből pedig $\log_5 x = 64$, amiből $x = 5^{64}$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

j) A logaritmus definíciója alapján felbontva a zárójeleket: $x = 25$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

k) Az előző módszerrel: $x = 128$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

l) Az előző módszerrel: $x = 16$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

3222 *a)* Értelmezés: $0 < x < 3$, $x \neq 1$ vagy $x > \frac{11}{3}$. A logaritmus definíciója alapján: $(3x^2 - 20x + 33) = 1$, amiből: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{8}{3}$. Mindkettő megoldás.

b) Értelmezés: $0 < x < \frac{7}{2} = 3{,}5$, $x \neq 1$ vagy $x > 6$. A logaritmus definíciójának segítségével kapjuk: $2x^2 - 19x + 42 = x$, amiből: $x_1 = 7$, $x_2 = 3$. Mindkettő megoldás.

c) Értelmezés: $x > 6$. A logaritmus definíciója alapján: $2x^2 - 7x - 30 = x^2$, amiből: $x_1 = 10$, $x_2 = -3$. Csak az első megoldás.

d) Értelmezés: $x > \frac{3}{4}$, $x \neq 1$. A logaritmus definíciója alapján $4x^2 - 3x = x^3$, amiből: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Csak az $x = 3$ megoldás.

e) Értelmezés: $x > 0$. A $\lg x$-re nézve másodfokú egyenlet megoldásaiból: $x_1 = 10^5$, $x_2 = \sqrt{10}$.

f) Értelmezés: $x > 0$. A $\log_3 x$-re nézve másodfokú $\log_3^2 x - 8 \cdot \log_3 x + 15 = 0$ egyenlet megoldásaiból adódik: $x_1 = 3^5 = 243$, $x_2 = 3^3 = 27$.

g) Értelmezés: $x > 0$. A $4 \cdot \log_5^2 x + 9 \cdot \log_5 x - 9 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásaiból adódik: $x_1 = 5^{\frac{3}{4}}$, $x_2 = 5^{-3} = \frac{1}{125}$.

h) Értelmezés: $x > \sqrt{2}$. A $\lg\left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right) = \lg 3$ egyenletet megoldásai: $x^2 = -1$ és $x^2 = 4$. Csak a másodikból adódik megoldás, és abból is csak az $x = 2$ felel meg.

i) Értelmezés: $\log_2 x \neq -1$ $\left(x \neq \frac{1}{2}\right)$ és $\log_2 x \neq 5$ $(x \neq 32)$.
Beszorozva az egyenletet a közös nevezővel, és $\log_2 x = a$-val jelölve, kapjuk:
$$2 \cdot (a - 5) - (a + 1) = (a + 1) \cdot (a - 5),$$
melyből $a^2 - 5a + 6 = 0$, amiből $a_1 = 3$ és $a_2 = 2$, amelynek megfelelő x értékek: $\log_2 x = 3$ $(x_1 = 8)$ és $\log_2 x = 2$ $(x_2 = 4)$.

j) Értelmezés: $x > 0, x \neq 1$. Alkalmazva a logaritmus definícióját: $x^5 = 16x$. Rendezés és kiemelés után: $x \cdot (x^4 - 16) = 0$. Mivel $x \neq 0$, ezért $x^4 - 16 = 0$. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$. Az értelmezési tartománynak csak az első gyök felel meg.

3223 *a)* Értelmezés: $x > 1$, $y > 4$. Megoldás: $x = 101$, $y = 5$.
b) Értelmezés: $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$. Megoldás: $x = 9$, $y = 2$.
c) Értelmezés: $x > -1$, $y < 5$. Megoldás: $x = 7$, $y = -4$.
d) Értelmezés: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$. Megoldás: $x = 8$, $y = 27$.
e) Értelmezés: $x > 0$, $y > 0$. Megoldás: $x = 100$, $y = 1$.
f) Értelmezés: $x - y > 0$, $x + y > 0$. Megoldás: $x = 13$, $y = 11$.
g) Értelmezés: $x, y > 0$ vagy $x, y < 0$. Megoldás: $x_1 = \frac{1}{3}$, $y_1 = \frac{1}{12}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = -\frac{1}{12}$.

3224 *a)* Értelmezés: $x > \frac{1}{2}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x < 0$ vagy $1 < x$. Megoldás: $1 < x$.

b) Értelmezés: $x > 2$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $-2 < x < 4$. Megoldás: $2 < x < 4$.

c) Értelmezés: $x > \frac{1}{2}$. Rendezés után, a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x \leq -3$. Nincs megoldás.

d) Értelmezés: $x > \frac{4}{5}$. Az $\frac{5x-4}{x+2} \geq 3$ egyenlőtlenségből: $x < -2$ vagy $5 \leq x$. Megoldás: $x \geq 5$.

e) Értelmezés: $x > \frac{7}{4}$. A $\frac{4x-7}{3x-1} \leq 25$ egyenlőtlenségből: $x \leq \frac{18}{71}$ vagy $x > \frac{1}{3}$. Megoldás: $x > \frac{7}{4}$.

f) Értelmezés: $x > \frac{3}{7}$. A $\frac{7x-3}{2x+1} \leq \frac{1}{4}$ egyenlőtlenségből: $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$. Megoldás: $\frac{3}{7} < x \leq \frac{1}{2}$.

g) Értelmezés: $x > 6$. Az $\frac{(x-2)^2}{x-6} \geq 16$ egyenlőtlenségből: $x > 6$. Megoldás: $x > 6$.

h) Értelmezés: $x > \frac{1}{3}$. A $\frac{15x+17}{(3x-1)^2} \geq 8$ egyenlőtlenségből: $-\frac{1}{8} \leq x \leq 1$. Megoldás: $\frac{1}{3} < x \leq 1$.

i) Értelmezés: $x > 3$. A $(4x-3)\cdot(x-3) \geq 100$ egyenlőtlenségből adódik: $x \leq -\frac{13}{4}$ vagy $7 \leq x$. Megoldás: $x \geq 7$.

j) Értelmezés: $x > 12$. A $(2x+1)\cdot(x-12) \leq 27$ egyenlőtlenségből adódik: $-\frac{3}{2} \leq x \leq 13$. Megoldás: $12 < x \leq 13$.

k) Értelmezés: $x < -\frac{4}{3}$ vagy $x > \frac{1}{2}$. A $\frac{3x+4}{2x-1} \leq 2$ egyenlőtlenségből adódik: $x < \frac{1}{2}$ vagy $x \geq 6$.

Megoldás: $x < -\frac{4}{3}$ vagy $x \geq 6$.

l) Értelmezés: $0 < x < 1$ vagy $x > 4$. A $\frac{4\cdot(x^2-4x)}{x-1} \leq 5$ egyenlőtlenségből adódik: $x \leq \frac{1}{4}$ vagy $1 < x \leq 5$. Megoldás: $0 < x \leq \frac{1}{4}$ vagy $4 < x \leq 5$.

m) Értelmezés: $x > 4$ vagy $x < 2$. Az $(x-2)\cdot(x-4) \leq 3$ egyenlőtlenségből adódik: $1 \leq x \leq 5$. Megoldás: $1 \leq x < 2$ vagy $4 < x \leq 5$.

n) Értelmezés: $x > 4$. A $(3+x)\cdot(x-4) > 2x+6$ egyenlőtlenségből adódik: $x < -3$ vagy $x > 6$. Megoldás: $x > 6$.

o) Értelmezés: $-4 < x < 4$. A $4-|x| \geq 8^{\frac{1}{3}}$ egyenlőtlenségből adódik: $-2 \leq x \leq 2$.

Megoldás: $-2 \leq x \leq 2$.

p) Értelmezés: $x < 0$. Az $x^2-2x-3 > 0$ egyenlőtlenségből adódik: $x < -1$ vagy $x > 3$.

Megoldás: $x < -1$.

3225 *a)* Értelmezés: $x > \frac{5}{3}$. Áttérve 2-es alapú logaritmusra az $\frac{(x+1)^2}{3x-5} = 4$ egyenlethez jutunk.

Megoldás: $x_1 = 3$, $x_2 = 7$.

b) Értelmezés: $x > 0$, $x \neq 1$. Áttérve 3-as alapú logaritmusra, a $\log_3 x + \frac{8}{\log_3 x} = 6$ másodfokú egyenletből: $x_1 = 9$, $x_2 = 81$.

c) Mivel $5^x > 0$, az egyenletnek minden valós szám esetén van értelme. Írjunk fel minden tagot logaritmussal, és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\lg\left[10^x \cdot (5^x + 1)\right] = \lg(2^x \cdot 30).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt, és 2^x-nel osztva, a másodfokú egyenlet megoldásai: $5^x = -6$, aminek nincs megoldása és $5^x = 5$, ahonnan $x = 1$.

d) Értelmezés: $x > 0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$(3 + \lg x) \cdot (\lg x - \lg 3) = \lg 3 + 4.$$

A $\lg x$-re másodfokú egyenlet:

$$(\lg x)^2 + (3 - \lg 3) \cdot \lg x - 4 \cdot (\lg 3 + 1) = 0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (3 - \lg 3)^2 + 16 \cdot (\lg 3 + 1) = 25 + 10 \cdot \lg 3 + (\lg 3)^2 = (5 + \lg 3)^2.$$

A megoldások: $\lg x = \lg 30$, amiből $x = 30$ és $\lg x = -4$, amiből $x = 10^{-4}$.

3226 Az értelmezésből ($x > 0$, $x \neq 1$, $px > 0$) következik, hogy csak pozitív p-k esetén van megoldás. A logaritmus definíciója szerint: $x^p = px$.

Ha $p = 1$, akkor a megoldás: $x > 0$, $x \neq 1$.

Ha $p \neq 1$ (de $p > 0$), vegyük mindkét oldal p alapú logaritmusát: $p \cdot \log_p x = 1 + \log_p x$.

Ebből $\log_p x = \dfrac{1}{p-1}$, a logaritmus definíciója alapján: $x = p^{\frac{1}{p-1}}$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

3227 *a)* Értelmezés: $x, y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Legyen $a = \dfrac{\lg x}{\lg y}$, ezzel a második egyenlet: $a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{13}{6}$, aminek megoldásai: $a_1 = \dfrac{3}{2}$, $a_2 = \dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{\lg x}{\lg y} = \dfrac{3}{2}$ az első egyenletbe beírva: $x_1 = 1000$, $y_1 = 100$.

$\dfrac{\lg x}{\lg y} = \dfrac{2}{3}$ az első egyenletbe helyettesítve: $x_2 = 100$, $y_2 = 1000$.

b) Értelmezés: $x > 4$, $y > 1$, $x - y + 5 > 0$. Az első egyenletből:

$$(x - 4)^2 = \frac{y^2 - 1}{6}. \qquad (1)$$

A második egyenletből:

$$\frac{x + 2y + 2}{x - y + 5} = 3,$$

ahonnan

$$y = \frac{2x + 13}{5},$$

ezt (1)-be helyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$73x^2 - 626x + 1128 = 0.$$

A megoldásai: $x_1 = 6$, $x_2 = \dfrac{188}{73}$, a második nem megoldás, mert $x > 4$, az elsőből $y = 5$.

Vegyes feladatok – megoldások

3228 Az egyes kifejezések értékei:

$$A=\frac{1}{8},\quad B=-2,\quad C=\frac{10}{32}=\frac{5}{16},\quad D=-3,\quad E=\frac{13}{6},\quad F=\frac{64}{25},\quad G=\frac{1}{2},\quad H=\frac{1}{2}.$$

A növekvő sorrend: $D<B<A<C<G=H<E<F$.

3229 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Igaz. *e)* Igaz. *f)* Igaz.

3230 *a)* $x_1=3,\ x_2=4$. *b)* $x=2$. *c)* $x=3$.

d) Értelmezés: $x>-\frac{1}{4}$, megoldás: $x_1=0,\ x_2=5$.

e) Értelmezés: $-\frac{1}{2}<x<\frac{2}{5}$, megoldás: $x_1=4,\ x_2=\frac{1}{5}$. Csak a második megoldás.

f) Értelmezés: $x>0$. Átalakítva az egyenletet $(\log_2 x)$-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$2\cdot(\log_2 x)^2-(\log_2 x)-1=0.$$

Legyen: $\log_2 x=a$. A $2a^2-a-1=0$ egyenlet gyökei: $a_1=1$ és $a_2=-\frac{1}{2}$, ennek megfelelően $x_1=2$ és $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Mindkét gyök megfelel az egyenlet értelmezési tartományának.

g) Értelmezés: $x\geq 0$. Jelölje $3^{\sqrt{x}}=a$-nak, s átrendezve az $a^2-3a+2=0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $a_1=2$ és $a_2=1$. Ebből a $3^{\sqrt{x}}=2$, ahol mindkét oldal 3-as alapú logaritmusát véve kapjuk:

$$\sqrt{x}\cdot\log_3 3=\log_3 2\ \Rightarrow\ x=\log_3^2 2,\quad \text{valamint}\quad 3^{\sqrt{x}}=1\ \Rightarrow\ 3^{\sqrt{x}}=3^0\ \Rightarrow\ x=0.$$

Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

Megjegyzés: Az előbbi gyök számolható úgy is, hogy mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve kapjuk:

$$\sqrt{x}\cdot\lg 3=\lg 2\ \Rightarrow\ \sqrt{x}=\frac{\lg 2}{\lg 3}\approx 0{,}63\ \Rightarrow\ x\approx 0{,}4.$$

h) Összevonva a 11^{2x} és 13^x együtthatóit, átrendezve az egyenletet kapjuk:

$$49\cdot 13^x=49\cdot 11^{2x},$$

melyből $x=0$. Az egyenletnek egy gyöke van, az $x=0$.

i) Értelmezés: $x<\frac{\lg 12}{\lg 2}\ \Rightarrow\ x<3{,}58$. Átrendezve az egyenletet:

$$\log_2\left(12-2^x\right)=5-x,$$

majd alkalmazva a logaritmus definícióját, kapjuk: $2^{5-x}=12-2^x$, amiből $\frac{32}{2^x}=12-2^x$.

Jelölje: $2^x=a$. Így $a^2-12a+32=0$, melynek gyökei $a_1=8$ és $a_2=4$. Ennek megfelelően $x_1=3$ és $x_2=2$. Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

j) Értelmezés: $x>0,\ x\neq 1$. Jelölje $a=2^{\log_x 16}$, így a következő egyenletet kapjuk:

$$a^2-17a+16=0,$$

melynek gyökei: $a_1=16$ és $a_2=1$. Behelyettesítve a $2^{\log_x 16}=a$ alakba:

$$2^{\log_x 16}=16,$$

melynek gyökei: $x_1=2$ és $x_2=-2$, de csak az első gyök felel meg az értelmezési tartománynak.

3231 *a)* $x = 2,\ y = 0.$

b) Értelmezés: $x > \frac{3}{2},\ y > 4.$ A logaritmus azonosságait és monotonitását felhasználva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned}(2x-3)\cdot 5 &= 4y+15\\ (3x-1)\cdot(y-4) &= 512\end{aligned}\right\}.$$

A feltételeknek megfelelő megoldások: $x = 11,\ y = 20.$

c) Értelmezés: $y > x.$ Az első egyenletből a logaritmus definíciója miatt:

$$\sqrt{3}^2 = y - x \quad \Leftrightarrow \quad 3 + x = y.$$

Ezt a kifejezést helyettesítve a második egyenletbe:

$$2x \cdot 3^{3+x} = 972, \quad \text{vagyis} \quad 2^x \cdot 3^3 \cdot 3^x = 972.$$

Osztva 3^3-nal, valamint felhasználva, hogy $2^x \cdot 3^x = 6^x$, kapjuk: $6^x = 36$, melynek gyöke $x = 2$, amiből $y = 5.$

Az egyenletrendszer megoldása a (2; 5) számpár.

d) Értelmezés: $x + y > 0,\ x - y > 0,\ x \neq y.$ Az első egyenletből ered: $x^2 - y^2 = 1000$, a második egyenletből pedig: $\frac{x+y}{x-y} = 2$, amelyből $x = 3y$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe, kapjuk, hogy $8y^2 = 1000$, vagyis: $y = \pm 5 \cdot \sqrt{5}$, melyből $x = \pm 15 \cdot \sqrt{5}.$

Az egyenletrendszer megoldása: $\left(15 \cdot \sqrt{5};\, 5 \cdot \sqrt{5}\right).$

e) Értelmezés: $x + y > 0,\ x - y > 0,\ x \neq y.$ Az első egyenletet átrendezve, azt kapjuk, hogy $x = 3y$. Ezt helyettesítve a második egyenletbe, melyből a logaritmus azonosságok felhasználása után: $x^2 - y^2 = 2$ egyenletet kaptuk, ered: $8y^2 = 2$, melynek gyöke: $y = \pm\frac{1}{2}$, amiből $x = \pm\frac{3}{2}.$

Az egyenletrendszer megoldása: $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$

f) Értelmezés: $x, y > 0$, vagy $x, y < 0.$ Az első egyenletet átrendezve, azt kapjuk, hogy $x = 6 + 3y$. A második egyenletben a logaritmus definíciója miatt az $xy = 9$, melybe helyettesítve az első egyenletből kifejezett $x = 6 + 3y$-t ered: $y^2 + 2y - 3 = 0.$ Ebből $y_1 = 1,\ y_2 = -3.$ Így $x_1 = 9$ és $x_2 = -3.$

Az egyenletrendszer megoldásai a (9; 1) és a (–3; –3) számpárok.

g) Értelmezés: $x, y > 0.$ Az első egyenletből a logaritmus azonosságainak felhasználása után, kapjuk, hogy $3x^2 = 8y$. A második egyenletből, felhasználva, hogy $1 = 0{,}5^0$, valamint, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton, ered: $y = x + 2$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk a $3x^2 - 8x - 16 = 0$ egyenletet, melynek gyökei: $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{4}{3}$, amiből $y_1 = 6,\ y_2 = \frac{2}{3}.$

Az egyenletrendszer megoldásai a (4; 6) és a $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ számpárok.

3232 *a)* Az $y = 2^x$ helyettesítés után az $1024y^2 - 80y + 1 \le 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, melynek megoldása: $\frac{1}{64} \le y \le \frac{1}{16}$. Ebből: $-6 \le x \le -4.$

b) Értelmezés: $x > -1.$ A logaritmus azonosságait felhasználva, a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $-6 \le x \le 1.$ Megoldás: $-1 < x \le 1.$

c) Értelmezés: $x < -4$. A 10-es alapú logaritmus szigorú monoton növekedése miatt:

$$-3x - 1 < x^2 - 5x - 36, \quad \text{vagyis} \quad 0 < x^2 - 2x - 35,$$

amelynek gyökei: $x < -5$ vagy $x > 7$.

Az egyenlőtlenség megoldása az értelmezési tartományon: $x < -5$.

d) Értelmezés: $x > 1$. Felhasználva, hogy $1 = \log_2 2$, valamint, hogy a 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton nő, kapjuk, hogy $\log 5(x-1) < 2$, majd $2 = \log_5 25$, és az 5-ös alapú logaritmusfüggvény szintén szigorúan monoton nő, ezért $x - 1 < 25$, amiből $x < 26$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $1 < x < 26$.

e) Felhasználva, hogy $1 = 3^0$, a megoldandó egyenlőtlenség: $(x+2)\cdot(x-1) < 0$. Ez akkor teljesül, ha a szorzat egyik tényezője negatív, másik pozitív, tehát itt akkor és csak akkor, ha $-2 < x < 1$.

f) Felhasználva, hogy $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, valamint, hogy az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus szigorúan monoton csökken, ezért: $x_2 - 8x + 18 = 3$ a megoldandó egyenlőtlenség. Ebből: $x_2 - 8x + 15 = 0$, amiből $3 \le x \le 5$.

3233 *a)* $8^{-\frac{2}{3}} + \log_4\left(\frac{1}{8}\right) + 7^{\log_7 3} = \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{7}{4}$;

b) $10^{\log_{\sqrt{10}} 6 - \lg 12} + 8^{\log_2 3 - \log_8 9} = \frac{36}{12} + \frac{27}{9} = 6.$

3234 *a)* Értelmezés: $x > 0$. Vegyük mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát, és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$(\log_2 x + 4)\cdot \log_2 x = \log_2 32.$$

$\log_2 x = a$-t helyettesítve kapjuk: $(a+4)\cdot a - 5 = 0$, melyből $a_2 + 4a - 5 = 0$, melynek gyökei $a_1 = 1$ és $a_2 = -5$. Visszahelyettesítve $\log_2 x = a$ kifejezésbe először $a_1 = 1$-et ered: $x_1 = 2$, majd $a_2 = -5$-ből kapjuk: $x_2 = 2^{-5} = \frac{1}{32}$. Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

b) Értelmezés: $x > 0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, ekkor:

$$8\cdot \lg x \cdot \lg x = \lg 100 \;\Rightarrow\; 8\cdot \lg^2 x = 2 \;\Rightarrow\; \lg^2 x = \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \lg x = \pm\frac{1}{2},$$

melynek gyökei: $x_1 = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ és $x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

3235 A feltételek szerint:

$$\left.\begin{aligned} -2 &= \lg(5-a) + b \\ -1 &= \lg(95-a) + b \end{aligned}\right\}.$$

A második egyenletből kivonva az elsőt:

$$1 = \lg(95-a) - \lg(5-a),$$

aminek megoldása: $a = -5$, visszahelyettesítve: $b = -3$.

A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = \lg(x+5) - 3.$$

3236 *a)* $1000 \cdot 2^8 = 256\,000$.

b) A $10^9 = 1000 \cdot 2^{\frac{x}{6}}$ egyenletből, mindkét oldal logaritmusát véve:

$$x = 6 \cdot \frac{\lg 10^6}{\lg 2} = \frac{36}{\lg 2} = 119{,}6 \text{ óra.}$$

A kísérlet 5 napig tart.

3237 *a)* $-\lg\left(10^{-7}\right) = 7$.

b) Az $5{,}5 = -\lg K$ egyenlőségből:

$$K = 10^{-5{,}5} \approx 3{,}16 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}.$$

c) Ha $p_1 = -\lg K$, akkor $p_2 = -\lg(100 \cdot K) = -\lg 100 - \lg K = -\lg K - 2$. A pH érték 2-vel csökken.

3238 *a)* $h(1) = 500 \cdot \log_3 5 \approx 732$.

b) Mivel $h(2) = 500 \cdot \log_3 7 \approx 886$ és $h(4) = 500 \cdot \log_3 11 \approx 1091$, ezért a növekedés 23,1%-os.

c) Az $1500 = 500 \cdot \log_3(2t + 3)$ egyenletből $t = 12$, tehát várhatóan 2017 márciusában éri el a halak száma az 1500-at.

3239 *a)* Értelmezés: $x, y > 0$; $y \neq 1$.

Az első egyenlet mindkét oldalának vegyük a 10-es alapú logaritmusát, majd rendezzük át, így kapjuk: $\frac{\lg x}{\lg y} = \frac{2}{3}$. Ezt a második egyenlet bal oldala helyett beírva ered: $\frac{2}{3} = \lg\frac{x}{y}$.

Tehát: $\frac{2}{3} = \lg x - \lg y$. Az első egyenletből kapott $\lg x = \frac{2}{3}\lg y$-t helyettesítve ebbe az egyenletbe kapjuk, hogy $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\lg y - \lg y$, amiből $-2 = \lg y$, tehát $y = 10^{-2}$, amiből $x = 10^{-\frac{4}{3}}$.

Az egyenletrendszer megoldása: $\left(10^{-\frac{4}{3}}; 10^{-2}\right)$ számpár.

b) Értelmezés: $x, y \neq 1$. Térjünk át 4-es alapú logaritmusra mindkét egyenlet esetén. Így:

$$\log_4 x + \frac{\log_4 y}{\log_4 16} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \log_4 x + \log_4 y = 3,$$

$$\frac{\log_4 4}{\log_4 x} + \frac{\log_4 16}{\log_4 y} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 y} = 3.$$

Jelölje: $a = \log_4 x$ és $b = \log_4 y$-t. Ekkor:

$$2a + b = 3$$

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 3$$

Az első egyenletből kapott $b = 3 - 2a$-t helyettesítve a második egyenletbe: $\frac{1}{a} + \frac{2}{3 - 2a} = 3$, amiből: $2a^2 - 3a + 1 = 0$, vagyis $a_1 = 1$ és $a_2 = \frac{1}{2}$, valamit: $b_1 = 1$ és $b_2 = 2$.

Az a és b értékeket visszahelyettesítve kapjuk x és y értékeit, mely szerint: $\log_4 x = 1$, amiből $x = 4$, és $\log_4 y = 1$, amiből $y = 4$, valamint: $\log_4 x = \frac{1}{2}$, amiből $x = 2$, és $\log_4 y = 2$, amiből $y = 16$.

Az egyenletrendszer megoldásai: (4; 4), és (2; 16) számpárok.

c) Értelmezés: $y > 0$ és $x > 0$. Mindkét egyenlet 10-es alapú logaritmusát véve:

$$(1)\quad \lg y \cdot \lg x = \lg 9, \qquad (= 2 \cdot \lg 3)$$
$$(2)\quad \lg x + \lg y = \lg 300. \quad (= \lg 3 + 2)$$

Az első egyenletből kifejezett $\lg x = \dfrac{2 \cdot \lg 3}{\lg y}$-t ($\lg y \neq 0$, egyébként (1)-es nem teljesülhetne) helyettesítjük a (2) egyenletbe, így kapjuk, hogy:

$$\frac{2 \cdot \lg 3}{\lg y} + \lg y = 2 + \lg 3,$$

melyből a $\lg^2 y - (2 + \lg 3) \cdot \lg y + 2 \cdot \lg 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei: $\lg y = 2$, valamint $\lg y = \lg 3$. Az $\lg y = 2$ megoldás esetén $y = 100$ és $x = 3$, az $\lg y = 3$ esetén $y = 3$ és $x = 100$.

Az egyenletrendszer megoldásai a (3; 100) és a (100; 3) számpárok.

Megjegyzés: Egyszerű helyettesítéssel belátható, hogy mindkét számpár igazzá teszi az egyenletrendszert.

3240 *a)* Az egyenlet jobb oldala:

$$\frac{\lg 4}{\lg 8} = \frac{2 \cdot \lg 2}{3 \cdot \lg 2} = \frac{2}{3}.$$

Az egyenlet bal oldalának átalakításával:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+3} = \frac{2}{3},$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} = \frac{2}{3}.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $x = 2$.

b) Értelmezés: $x > 3$. A logaritmus azonosságait alkalmazva, az

$$\lg[10 \cdot (3^{x-3} + 15)] = \lg[3 \cdot (9^{x-3} - 1)]$$

egyenletet kapjuk, amiből a

$$3 \cdot 9^{x-3} - 10 \cdot 3^{x-3} - 153 = 0$$

másodfokú egyenlet adódik, ennek megoldásai: $3^{x-3} = 9$ és $3^{x-3} = -\dfrac{17}{3}$.

Csak az elsőből kapunk megoldást: $x = 5$.

c) Értelmezés: $x > 0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\left[\left(\lg\sqrt{x}\right)^3 - \frac{5}{8} \cdot \lg x\right] \cdot \lg x = -\frac{1}{2},$$
$$\left[\left(\frac{1}{2} \cdot \lg x\right)^3 - \frac{5}{8} \cdot \lg x\right] \cdot \lg x = -\frac{1}{2}.$$

Beszorzás után a következő negyedfokú egyenlet adódik:

$$(\lg x)^4 - 5 \cdot (\lg x)^2 + 4 = 0.$$

Ennek a megoldásai: $(\lg x)^2 = 4$ és $(\lg x)^2 = 1$. Mindkettőből kapunk megoldást:

$$x_1 = 100, \qquad x_2 = \frac{1}{100}, \qquad x_3 = 10, \qquad x_4 = \frac{1}{10}.$$

Mind a négy eredmény megoldása az eredeti egyenletnek.

d) Vizsgáljuk az értelmezési tartományt, melyre: $3^x > 2$ és $3^x > 5$, vagyis az első esetben:

$$x > \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0{,}63,$$

a második esetben:

$$x > \frac{\lg 5}{\lg 3} \approx 1{,}46.$$

Tehát az egyenlet értelmezési tartománya: $x > \dfrac{\lg 5}{\lg 3}$.

Felhasználva a logaritmus azonosságait:

$$\log_2 (3^x - 2) \cdot (3^x - 5) = 2,$$

majd alkalmazva a logaritmus definícióját, és elvégezve a beszorzást, kapjuk:

$$\left(3^x\right)^2 - 7 \cdot \left(3^x\right) + 10 - 4 = 0,$$

vagyis $3^x = a$ esetén:

$$a^2 - 7a + 6 = 0,$$

melynek gyökei: $a_1 = 6$ és $a_2 = 1$. Helyettesítve a $3^x = a$ kifejezésbe, $3^x = 6$ esetén $x_2 = 0$. A második gyök nem felel meg az értelmezési tartománynak, az első kifejezhető 10-es alapú logaritmussal is, ahol $x_1 = \dfrac{\lg 6}{\lg 3} \approx 1{,}63$. Ez megfelelő gyöknek bizonyul.

3241 Értelmezés: $x > \dfrac{1}{2}$, $x \neq 1$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\log_7^2 (2x - 1) + \frac{16}{\log_7^2 (2x - 1)} \geq 2 \cdot \sqrt{\log_7^2 (2x - 1) \cdot \frac{16}{\log_7^2 (2x - 1)}} = 8.$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$\log_7^2 (2x - 1) = \frac{16}{\log_7^2 (2x - 1)}.$$

Megoldásai: $\log_7 (2x - 1) = 2$, amiből $x = 25$, és $\log_7 (2x - 1) = -2$, amiből $x = \dfrac{25}{49}$.

Tehát a kifejezés az $x = 25$ és $x = \dfrac{25}{49}$ esetén lesz a legkisebb, amelynek értéke 8.

11.3. A TRIGONOMETRIA ALKALMAZÁSAI

Vektorműveletek rendszerezése, alkalmazások (emlékeztető) – megoldások

3242 *a)* Egyenlő vektorok: $\vec{a}$ és $\vec{c}$. *b)* Ellentett vektorok: $\vec{b}$ és $\vec{d}$.
c) $\vec{a}+\vec{f}+\vec{d}=\vec{0}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{e}=\vec{0}$.

3243 *a)* $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{c}$; *b)* $\overrightarrow{AF}=-\vec{a}-\vec{c}$; *c)* $\overrightarrow{FD}=\vec{c}-\vec{a}$; *d)* $\overrightarrow{BD}=-2\cdot\vec{a}-\vec{c}$;
e) $\overrightarrow{EA}=2\cdot\vec{a}+\vec{c}$; *f)* $\overrightarrow{EC}=2\cdot\vec{c}+\vec{a}$; *g)* $\overrightarrow{FC}=2\cdot\vec{c}$.

3244 A vektorok által bezárt szög:
a) 0º; *b)* 180º.

3245 *a)* $\vec{a}+3\cdot\vec{b}$; *b)* $4\cdot\vec{a}-\vec{b}$.

3246 A vektor hossza:
a) $\sqrt{24^2+12^2}=12\cdot\sqrt{5}\approx 26{,}83$ cm; *b)* $\sqrt{6^2+16^2}=2\cdot\sqrt{73}\approx 17{,}09$ cm.

3247 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\cdot 10\cdot\cos 20^\circ\approx 18{,}79$; $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2\cdot 10\cdot\sin 20^\circ\approx 6{,}84$ egység.

3248 *a)* $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; *b)* $-\vec{b}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\dfrac{\vec{a}-2\cdot\vec{b}}{3}$; *c)* $\dfrac{2\cdot\vec{a}-\vec{b}}{3}$.

3249 *a)* Olyan vektorok felelnek meg a feltételnek, amelyek hegyesszöget zárnak be.
b) Olyan vektorok felelnek meg a feltételnek, amelyek hossza egyenlő.

3250 *a)* (12,5; –13,5); *b)* (0; –8); *c)* (2,05; –1,11).

3251 *a)* $\overrightarrow{AB}(2;8)$. *b)* A felezőpont helyvektora $\vec{f}(4;3)$.

3252 A háromszög belső szögfelezője a szemben levő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja: $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{10}{20}$, így a D pont az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja. A szakasz harmadolópontjába mutató helyvektorra vonatkozó összefüggés ismeretében: $\overrightarrow{CD}=\dfrac{\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{3}$.

3253 *a)* Az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektor bezárt szöge 90º.
b) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{12^2+\left(12\cdot\sqrt{3}\right)^2}=24$.

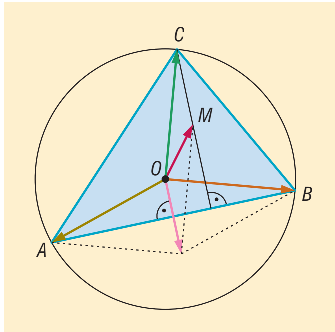
3254 *a)* $\overrightarrow{AI}=\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\cdot\vec{c}$; *b)* $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{3}\cdot\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; *c)* $\overrightarrow{IJ}=-\dfrac{2}{3}\cdot\vec{a}+\dfrac{1}{2}\cdot\vec{c}$.

3255 A $\vec{v}$ vektor előállítható az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként $\vec{v}=\alpha\cdot a+\beta\cdot\vec{b}$ alakban. A feladatunk az, hogy α és β értékét meghatározzuk. Ehhez meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}6&=4\alpha-2\beta\\5&=\alpha+3\beta\end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $\alpha=2$, $\beta=1$. Tehát a $\vec{v}$ vektor előállítása: $\vec{v}=2\cdot\vec{a}+\vec{b}$.

3256 Először megmutatjuk, hogy az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ vektort az O kezdőpontba eltolva a vektor végpontja rajta lesz a háromszög C csúcsából induló magasságának egyenesén.



Az O pont az ABC háromszög köré írt kör középpontja, tehát az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok egyenlő hosszúságúak. A paralelogrammaszabály alapján a két vektort összeadva egy rombuszt kapunk. Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért az összegvektor merőleges lesz AB egyenesére.

Ismét használva a paralelogrammaszabályt, az O kezdőpontból kiindulva adjuk hozzá az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektorhoz az $\overrightarrow{OC}$ vektort.

Mivel a háromszög C csúcsából induló magasságának egyenese és az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ egyaránt merőleges AB egyenesére, az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ végpontja rajta lesz az ABC háromszög C-ből kiinduló magasságvonalán.

Hasonlóan belátható, hogy ha az O kezdőpontból kiindulva az $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ vektorhoz hozzáadjuk az $\overrightarrow{OA}$ vektort, az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ végpontja rajta lesz az ABC háromszög A-ból kiinduló magasságvonalán is.

Azt kaptuk, hogy ha $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ kezdőpontja az O pont, akkor végpontja rajta van a háromszög két magasságvonalának egyenesén, tehát a vektor végpontja a háromszög M magasságpontja.

Ezzel beláttuk, hogy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$.

3257 Legyen az ABC háromszög magasságpontja M, a körülírható kör középpontja O, az AB oldal felezőpontja F. Mivel OF merőleges AB-re, elég belátnunk, hogy $\overrightarrow{CM}=2\cdot\overrightarrow{OF}$.

Ismert, hogy egy tetszőleges vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató két helyvektor számtani közepe. Ha a vonatkoztatási pont O, akkor

$$\overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

A 3256. feladat alapján:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM},$$

amiből következik, hogy:

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

Tehát $\overrightarrow{CM}=2\cdot\overrightarrow{OF}$, vagyis a feladat állítását bebizonyítottuk.

3258 Az ABC háromszög körülírható körének O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$.

Egy tetszőleges vonatkoztatási pontból az ABC háromszög súlypontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe. Ha a vonatkoztatási pont a háromszög körülírható körének O középpontja és az S pont a háromszög súlypontja, akkor:

$$\overrightarrow{OS}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

A 3256. feladat alapján:

$$\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

Ez utóbbi két egyenlőségből következik, hogy $\overrightarrow{OM}=3\cdot\overrightarrow{OS}$, ami azt jelenti, hogy O, M és S pontok egy egyenesen vannak, és S pont az OM szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja.

3259 *a)* Az ABC háromszög körülírható körének O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$, magasságpontja M.

A 3256. feladat alapján $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, tehát:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}.$$

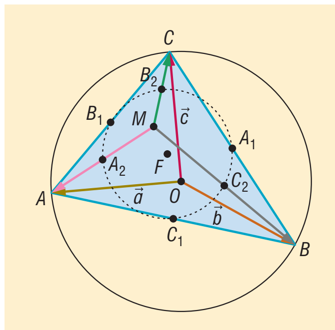
A háromszög AB oldalának C_1 felezőpontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{C_1F} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{c}}{2}.$$

Hasonló számolással adódik, hogy a BC oldal A_1, illetve az AC oldal B_1 felezőpontjába mutató vektorok $\frac{\vec{a}}{2}$, illetve $\frac{\vec{b}}{2}$.

Mivel az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok hossza a háromszög köré írható kör sugara, az F pont a háromszög minden oldalának felezőpontjától egyenlő távolságra van.

b) Az A csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz felezőpontja legyen A_2, ekkor $\overrightarrow{OA_2} = \frac{\overrightarrow{OM} + \vec{a}}{2}$.



A 3256. feladat alapján:

$$\overrightarrow{OA_2} = \frac{\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{a}}{2}.$$

Mivel $\overrightarrow{FA_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OF}$,

$$\overrightarrow{FA_2} = \frac{\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{a}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}}{2}.$$

Hasonlóan adódik, hogy az F pontból a B csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz B_2 felezőpontjába, illetve a C csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz C_2 felezőpontjába mutató vektorok $\frac{\vec{b}}{2}$, illetve $\frac{\vec{c}}{2}$.

Mivel az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok hossza a háromszög köré írható kör sugara, az F pont a háromszög minden csúcsát a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontjától egyenlő távol van.

A meggondolásainkból következik, hogy ha az ABC háromszög körülírható körének sugara R, akkor az F középpontú $\frac{R}{2}$ sugarú körön rajta van a háromszög három oldalának felezőpontja, és a háromszög minden csúcsát a háromszög magasságpontjával összekötő szakasz felezőpontja. Ezt a kört hívják a háromszög Feuerbach körének. Szokás még kilenc pont körének is nevezni, mivel az említett hat ponton kívül még rajta van a háromszög három magasságának talppontja is.

A skaláris szorzat – megoldások

3260	*a)* 16;	*b)* 0;	*c)* $-16 \cdot \sqrt{2}$;	*d)* -32.
3261	*a)* 60°;	*b)* 135°;	*c)* 90°;	*d)* $\approx 67{,}98°$.
3262	*a)* 9;	*b)* 4;	*c)* $\frac{12 \cdot \sqrt{2}}{7}$;	*d)* 0.

3263 A skaláris szorzat legkisebb értéke –84, a legnagyobb értéke 84.

3264 *a)* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; *b)* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$;

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AT} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 0^\circ = \frac{1}{2}$; *d)* $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{TC} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3}{4}$.

3265 A négyzet átlójának a hossza 2 egység.

a) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2 = 4$;

b) $\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 2$;

c) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = 0$, vagy

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 90^\circ = 0$;

d) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + 2 = 2$, vagy

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 2$.

3266 *a)* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$;

b) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 0$, mivel a két vektor merőleges egymásra.

c) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$;

d) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$;

e) $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - 3\vec{b}\right) = 2(\vec{a})^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\left(\vec{b}\right)^2 = 2 - \frac{5}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$.

3267 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{3}{2}$.

3268 *a)* Mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ és $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|$, ezért $|\vec{b}| = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Minden olyan $\vec{b}$ vektor megfelel, amelynek hossza az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által bezárt szög koszinuszának a reciproka.

b) Nincsenek ilyen vektorok, mert a skaláris szorzat értéke mindig egy valós szám.

c) Minden olyan $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor megfelel, amelyek nem egyirányúak.

d) Az egyenlőség igaz, ha a két vektor merőleges egymásra.

e) Az egyenlőséget olyan $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok teljesítik, amelyek skaláris szorzata 2.

3269 *a)* Mivel az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor merőleges a $\vec{c}$ vektorra, a skaláris szorzatuk 0.

b) Mivel az $\vec{a} + \vec{b}$ és $\vec{a} + \vec{c}$ hossza egyaránt $\sqrt{2}$, valamint a közbezárt szögük 60°:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{c}\right) = 1.$$

c) Az $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ testátló vektora $\sqrt{3}$, az $\vec{a} + \vec{c}$ lapátló vektora $\sqrt{2}$ hosszúságú, és a bezárt szögük koszinusza $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ezért:

$$\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{c}\right) = 2.$$

3270 Legyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által bezárt szög α. Mivel a $3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}$ vektor merőleges az $\vec{a}-2\cdot\vec{b}$ vektorra, a skaláris szorzatuk 0:

$$\left(3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\cdot\vec{b}\right)=3\cdot\vec{a}^2-4\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}-4\cdot\vec{b}^2=0.$$

Ebből következik, hogy:

$$4\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}=-1 \quad\Rightarrow\quad 4\cdot1\cdot1\cdot\cos\alpha=-1.$$

Így kapjuk, hogy $\cos\alpha=-0{,}25,$ amiből $\alpha\approx104{,}48°$.

3271 A két vektor merőleges egymásra, mert:

$$\left(\vec{a}-2\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(5\cdot\vec{a}+4\cdot\vec{b}\right)=5\cdot\vec{a}^2-6\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}-8\cdot\vec{b}^2=$$

$$=5\cdot|\vec{a}|^2-6\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos120°-8\cdot|\vec{b}|^2=$$

$$=5\cdot|\vec{a}|^2-6\cdot|\vec{a}|^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-8\cdot|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2\cdot(5+3-8)=0.$$

3272 Tekintsük a két vektor skaláris szorzatát, és alkalmazzuk a skaláris szorzás ismert műveleti tulajdonságait:

$$\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}-\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\right]\cdot\vec{a}=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)=0.$$

Mivel a szorzat 0, a két vektor merőleges egymásra.

3273 Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $ABCD$ tetraéder ABC lapjának oldalai között az $AB\ge BC\ge CA$ egyenlőtlenség áll fenn. Elég bizonyítanunk, hogy a $BCA\sphericalangle$ hegyesszög. Ehhez elég belátni, hogy $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ skaláris szorzat értéke pozitív valós szám:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\right)=$$

$$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}.$$

Mivel $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ és $\overrightarrow{DC}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra, ezért:

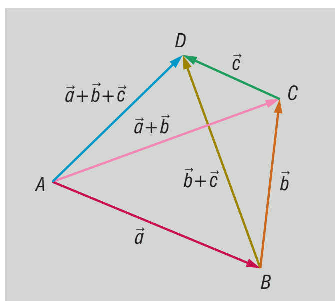
$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=0.$$

Így:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}=\left|\overrightarrow{DC}\right|^2>0,$$

ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

3274 Az ábrán látható $ABCD$ négyszög oldalainak vektorai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Elég belátni, hogy a szemközti oldalvektorok négyzetösszegének különbsége akkor és csak akkor nulla, ha az átlóvektorok merőlegesek egymásra. Vegyük a szemben lévő oldalvektorok négyzetösszegének a különbségét:



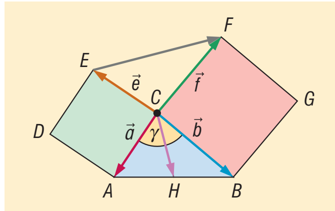
$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2+\vec{b}^2-\vec{a}^2-\vec{c}^2=$$

$$=2\cdot\vec{b}^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+2\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}=$$

$$=2\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Ez utóbbi szorzat akkor és csak akkor 0, ha $\vec{a}+\vec{b}$ átlóvektor merőleges $\vec{b}+\vec{c}$ átlóvektorra. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

3275 Irányítsuk az oldalakat az ábrán látható módon vektorokként. Egy szakasz felezőpontjába mutató vektor a végpontokba mutató vektorok számtani közepe:



$$\overrightarrow{CH}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

Az ábráról leolvasható, hogy $\overrightarrow{EF}=\vec{f}-\vec{e}$.

Tekintsük ez utóbbi két vektor skaláris szorzatát:

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\cdot\left(\vec{f}-\vec{e}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{f}-\vec{e}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{f}-\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{f}-\vec{b}\cdot\vec{e}\right).$$

Az $\vec{a}$ és $\vec{e}$, valamint a $\vec{b}$ és $\vec{f}$ vektorok merőlegesek egymásra, tehát skaláris szorzatuk 0, tehát:

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{f}-\vec{b}\cdot\vec{e}\right).$$

Legyen γ a háromszög C csúcsánál lévő szöge. Tekintsük az $\vec{a}\cdot\vec{f}$ és $\vec{b}\cdot\vec{e}$ skaláris szorzatokat:

$$\vec{a}\cdot\vec{f}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{f}\right|\cdot\cos(\gamma+90^\circ),$$

$$\vec{b}\cdot\vec{e}=\left|\vec{b}\right|\cdot|\vec{e}|\cdot\cos(\gamma+90^\circ).$$

Figyelembe véve, hogy $|\vec{a}|=|\vec{e}|$ és $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{f}\right|$, a két skaláris szorzat egyenlő, tehát

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{f}-\vec{b}\cdot\vec{e}\right)=0.$$

Ha két vektor skaláris szorzata 0, akkor merőlegesek egymásra, tehát CH egyenese merőleges EF egyenesére.

Az $EF=2\cdot CH$ összefüggés bizonyításához tekintsük a $(2\cdot CH)^2-EF^2$ különbséget:

$$(2\cdot CH)^2-EF^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{f}-\vec{e}\right)^2=\vec{a}^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2-\vec{e}^2+2\cdot\vec{e}\cdot\vec{f}-\vec{f}^2.$$

Az $|\vec{a}|=|\vec{e}|$ és $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{f}\right|\Rightarrow\vec{a}^2+\vec{b}^2-\vec{e}^2-\vec{f}^2=0$, valamint az $ACB\sphericalangle=\gamma$, illetve az $ECF\sphericalangle=180^\circ-\gamma$, tehát:

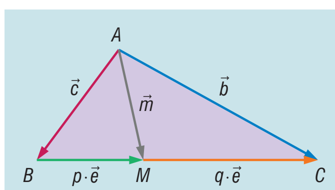
$$(2\cdot CH)^2-EF^2=2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+2\cdot\vec{e}\cdot\vec{f}=2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\gamma+2\cdot|\vec{e}|\cdot\left|\vec{f}\right|\cdot\cos(180^\circ-\gamma).$$

Ismert, hogy $\cos\gamma=-\cos(180^\circ-\gamma)$, tehát:

$$(2\cdot CH)^2-EF^2=2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\gamma-2\cdot|\vec{e}|\cdot\left|\vec{f}\right|\cdot\cos\gamma=0.$$

Azt kaptuk, hogy $(2\cdot CH)^2-EF^2=0$, vagyis $EF=2\cdot CH$.

3276 Vezessük be a következő jelöléseket: $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$.



Legyen a BC-vel párhuzamos egységvektor $\vec{e}$.

Ha $MC=q$ és $BM=p$, akkor $\overrightarrow{MC}=q\cdot\vec{e}$, illetve $\overrightarrow{BM}=p\cdot\vec{e}$.

A következő egyenlőségeket emeljük négyzetre:

$$\vec{c}=\vec{m}-p\cdot\vec{e}\qquad\text{és}\qquad\vec{b}=\vec{m}+q\cdot\vec{e}.$$

A skaláris szorzás tulajdonságai miatt ezeket négyzetre emelve kapjuk a következő egyenleteket:

$$AB^2=AM^2+p^2-2p\cdot\left(\vec{m}\cdot\vec{e}\right)\qquad\text{és}\qquad AC^2=AM^2+q^2+2q\cdot\left(\vec{m}\cdot\vec{e}\right).$$

Az első egyenletet q-val, a másodikat p-vel szorozva, majd összeadva, megkapjuk a következő összefüggést:

$$AB^2 \cdot q + AC^2 \cdot p = AM^2 \cdot (p+q) + pq^2 + qp^2,$$

$$AB^2 \cdot q + AC^2 \cdot p = AM^2 \cdot (p+q) + pq \cdot (p+q),$$

$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM = AM^2 \cdot BC + BM \cdot MC \cdot BC.$$

Ez utóbbi összefüggés éppen a bizonyítandó állítás.

3277 Az ABC háromszög S súlypontját tekintsük vonatkoztatási pontnak. Ekkor a súlypontba mutató képlet alapján az A, B és C csúcsok $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ helyvektoraira fennáll:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}.$$

Ha a P pont helyvektora $\vec{p}$, akkor $|\vec{p}| = r$, továbbá:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = (\vec{a}-\vec{p})^2 + (\vec{b}-\vec{p})^2 + (\vec{c}-\vec{p})^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p} + 3\cdot\vec{p}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3r^2.$$

Tehát az adott ABC háromszögben a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg az r sugarú kör kerületének bármely P pontjára nézve ugyanakkora.

3278 A 3277. feladat alapján adott ABC háromszög esetén a

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3r^2$$

összeg akkor minimális, ha $r = 0$, vagyis P pont éppen a háromszög súlypontja.

Vektor hossza, és skaláris szorzat a koordináta-rendszerben – megoldások

3279 *a)* $\sqrt{34}$; *b)* $\frac{\sqrt{37}}{2}$; *c)* $\frac{\sqrt{5}}{3}$; *d)* $\sqrt{20} = 2\cdot\sqrt{5}$;

e) $\sqrt{12} = 2\cdot\sqrt{3}$; *f)* 1.

3280 *a)* $\sqrt{290}$; *b)* $\sqrt{145}$.

3281 Az $\vec{a}$ vektorral egyirányú egységvektor: $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tehát koordinátái:

a) $\vec{a}_0(0,8; -0,6)$; *b)* $\vec{a}_0\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}; \frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)$;

c) $\vec{a}_0\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}; \frac{2mn}{m^2+n^2}\right)$.

3282 Az $\vec{a}$ vektorral megegyező irányú 5 egység hosszú vektor: $\vec{b} = 5\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tehát koordinátái:

a) $\vec{b}\left(-\frac{25}{13}; \frac{60}{13}\right)$; *b)* $\vec{b}\left(\frac{45\cdot\sqrt{130}}{130}; \frac{35\cdot\sqrt{130}}{130}\right)$;

c) $\vec{b}\left(-\sqrt{5}; 2\cdot\sqrt{5}\right)$.

3283 Az $\vec{a}$ vektorral ellentétes irányú 3 egység hosszú vektor: $\vec{b} = -3 \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tehát koordinátái:

a) $\vec{b}\left(\frac{15}{13}; -\frac{36}{13}\right)$; *b)* $\vec{b}\left(-\frac{27 \cdot \sqrt{130}}{130}; -\frac{21 \cdot \sqrt{130}}{130}\right)$;

c) $\vec{b}\left(\frac{3}{5} \cdot \sqrt{5}; -\frac{6}{5} \cdot \sqrt{5}\right)$.

3284 *a)* 9; *b)* 25,4; *c)* –3,8; *d)* –108,4; *e)* 254.

3285 *a)* 14,25°; *b)* 92,81°; *c)* 18,60°; *d)* 90°.

3286 Két vektor merőlegességének szükséges feltétele, hogy a két vektor skaláris szorzata 0 legyen.

a) $y = \frac{81}{7}$; *b)* $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$; *c)* $y = 5$ vagy $y = 11,5$.

3287 Az $\overrightarrow{AB}$ vektor:

$$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{b}{a^2 - b^2}; \frac{2b}{a^2 - b^2}\right).$$

A vektor hossza a koordinátáinak négyzetösszegéből vont négyzetgyök:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(-\frac{b}{a^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{2b}{a^2 - b^2}\right)^2} = \sqrt{5} \cdot \left|\frac{b}{a^2 - b^2}\right|.$$

3288 Az AOB háromszög OA oldalának hossza az A pont helyvektorának az abszolút értéke:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-12)^2 + 7^2} = \sqrt{193}.$$

A OB oldal hossza a B pont helyvektorának az abszolút értéke:

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}.$$

Az AB oldal hossza az $\overrightarrow{AB}(20; -5)$ vektor abszolút értéke:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{20^2 + (-5)^2} = 5 \cdot \sqrt{17}.$$

A háromszög kerülete:

$$\sqrt{193} + \sqrt{68} + 5 \cdot \sqrt{17} = 42,75 \text{ egység}.$$

3289 Mivel:

$$\sqrt{4 - 2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} - 1,$$

a két vektor skaláris szorzata:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} + \sqrt{3} = 0.$$

Tehát a két vektor 90°-os szöget zár be.

3290 *a)* $\vec{b}(3; 5)$; *b)* $\vec{b}\left(-\frac{2}{5}; \frac{4}{3}\right)$; *c)* $\vec{b}(1 - 2k; k)$.

3291 A $\vec{c}$ vektor koordinátái legyenek $\vec{c}(x; y)$. A skaláris szorzatokat a koordináták segítségével kiszámolva a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{c} = 7 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2y = 7 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad 4x - y = 1 \end{array}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = -1$ és $y = -5$. Tehát a $\vec{c}$ vektor: $\vec{c}(-1; -5)$.

3292 Legyen $\vec{b}(x; -7)$. A két vektor skaláris szorzatát számolhatjuk kétféleképpen, így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$4x + 21 = 5 \cdot \sqrt{x^2 + 49} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Négyzetre emelés után az

$$x^2 + 48x - 49 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek gyökei 1 és -49.

Ha $x = -49$, akkor a két vektor skaláris szorzata negatív, tehát nem zárhatnak be hegyesszöget. A $\vec{b}$ vektor első koordinátája 1, és ekkor a két vektor valóban $45°$-os szöget zár be.

3293 Az adott vektorokkal egyirányú egységnyi hosszú vektorok rombuszt feszítenek ki, így összegük a két vektor szögfelezőjének irányába mutat. A keresett vektor tehát így állítható elő:

$$\vec{v} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Mivel $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ koordinátái $\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$ és $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ koordinátái $\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$, ezért a két vektor szögfelezőjének irányába mutató vektor:

$$\vec{v}\left(\frac{112}{65}; -\frac{14}{65}\right).$$

3294 Mivel az $\overrightarrow{OA}$, illetve $\overrightarrow{OB}$ vektorok skaláris szorzata:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -12 \cdot 14 + 7 \cdot 24 = 0,$$

a két vektor merőleges egymásra, tehát az OAB háromszög derékszögű.

Egy derékszögű háromszög beírt körének sugarát kiszámíthatjuk az $r = \frac{a+b-c}{2}$ összefüggés alapján, ahol a, b a befogók, és c az átfogó hosszát jelöli.

A befogók hossza:

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{193} \quad \text{és} \quad \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{772} = 2 \cdot \sqrt{193}.$$

Az átfogó hossza:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5 \cdot 193} = \sqrt{965}.$$

A beírt kör sugara tehát:

$$r = \frac{\left(3 - \sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{193}}{2} \approx 5{,}31.$$

A háromszög köré írt kör sugara Thalész tételének értelmében az átfogó fele, vagyis:

$$\frac{\sqrt{965}}{2} \approx 15{,}53.$$

3295 Két vektor akkor és csak akkor zár be tompaszöget, ha a két vektor skaláris szorzata negatív:

$$(2 - 2p) \cdot (x + 1) + x^2 \cdot (5 - p) < 0.$$

Keressük p valós paraméter értékét úgy, hogy a

$$(5 - p) \cdot x^2 + (2 - 2p) \cdot x + (2 - 2p) < 0$$

egyenlőtlenség minden valós x-re fennálljon.

Ha az egyenlőtlenség elsőfokú, akkor $p = 5$, és vizsgálnunk kell a $-8x - 8 < 0$ egyenlőtlenséget. Ez csak $x > -1$ esetén teljesül, tehát $p = 5$ nem felel meg a feladat feltételeinek.

Ha az egyenlőtlenség másodfokú, akkor az

$$f(x) = (5 - p) \cdot x^2 + (2 - 2p) \cdot x + (2 - 2p)$$

másodfokú függvény csak negatív értékéket vehet fel. Ez akkor teljesül, ha a függvény főegyütthatója negatív, és a függvénynek nincs zérushelye. Mivel a függvényhez tartozó másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (2 - 2p)^2 - 4 \cdot (5 - p) \cdot (2 - 2p),$$

a következő egyenlőtlenségrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} (2 - 2p)^2 - 4 \cdot (5 - p) \cdot (2 - 2p) < 0 \\ 5 - p < 0 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenlőtlenség a következő alakra hozható:

$$-p^2 + 10p - 9 < 0,$$

amelynek megoldása: $p < 1$ vagy $p > 9$.

A második egyenlőtlenség $p > 5$ esetén teljesül.

A két megoldáshalmaz metszete: $p > 9$.

Tehát $p > 9$ esetén minden valós x értékére az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor tompaszöget zár be.

3296 Legyen $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$. Számítsuk ki a skaláris szorzatukat kétféleképpen:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \cos\alpha,$$

ahol α a két vektor által bezárt szög. Ismert, hogy $\cos\alpha \le 1$, így ebből közvetlenül adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\cos\alpha = 1$, vagyis a két vektor egyirányú. Tehát létezik olyan $\lambda \ge 0$ valós szám, hogy $a_1 = \lambda \cdot b_1$, és $a_2 = \lambda \cdot b_2$.

3297 *a)* Alkalmazzuk az $\vec{a}(12; 5)$ és $\vec{b}(a; b)$ vektorokra a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $12b = 5a \ge 0$.

b) Alkalmazzuk az $\vec{a}\left(\sqrt{7a + 1}; \sqrt{7b + 1}\right)$ és $\vec{b}(1; 1)$ vektorokra Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, és használjuk ki, hogy $a + b = 1$:

$$\sqrt{7a + 1} \cdot 1 + \sqrt{7b + 1} \cdot 1 \le \sqrt{\left(\sqrt{7a + 1}\right)^2 + \left(\sqrt{7b + 1}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = b = \dfrac{1}{2}$.

3298 Alkalmazzuk az $\vec{a}\left(\sqrt{\dfrac{2}{a}}; \sqrt{\dfrac{3}{b}}\right)$ és $\vec{b}\left(\sqrt{a}; \sqrt{b}\right)$ vektorokra a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, és végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{\frac{3}{b}} \cdot \sqrt{b} \le \sqrt{\frac{2}{a} + \frac{3}{b}} \cdot \sqrt{a + b},$$

felhasználva, hogy $a + b = 7$:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \le \sqrt{\frac{2}{a} + \frac{3}{b}} \cdot \sqrt{7}.$$

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív:

$$\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{7} \le \frac{2}{a}+\frac{3}{b}.$$

Tehát $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$ minimális értéke $\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{7}$.

A kifejezés a minimális értéket olyan a és b értékekre veszi fel, amelyre teljesül, hogy:

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{\frac{3}{b}}\cdot\sqrt{a} \quad \text{és} \quad a+b=7.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$a=\frac{7\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=7\cdot\left(\sqrt{6}-2\right) \quad \text{és} \quad b=\frac{7\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=7\cdot\left(3-\sqrt{6}\right).$$

A szinusztétel – megoldások

3299 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
5 cm	3,70 cm	4,62 cm	73°	45°	62°
1,88 m	8,67 m	9 m	12°	74°	94°
3,75 dm	4 dm	4,61 dm	51°	56°	73°

3300 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
9 cm	5 cm	9,39 cm	70°	31,47°	78,53°
7,43 m	12 m	8 m	37,30°	102°	40,70°
18 dm	19,42 dm	120 cm	65°	77,83°	37,17°

3301 *a)* A háromszögben két oldal és a kisebbikkel szemben levő szög adott, tehát a háromszög nem egyértelműen meghatározott. Legyen a szokásos jelöléseket használva $a=6$, $b=10$ és $\alpha=30°$. Felírva a szinusztételt:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 30°}=\frac{10}{6} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta\approx 0{,}8333.$$

Innen β értéke hegyes- és tompaszög is lehet:

$\beta_1=56{,}44°$, illetve $\beta_2=123{,}56°$.

A szinusztételt ismételten használva a háromszög szögei és oldalai lehetnek:

a	b	c	α	β	γ
6 cm	10 cm	11,98 cm	30°	56,44°	93,56°
6 cm	10 cm	5,34 cm	30°	123,56°	26,44°

b) Hasonlóan az előző részhez a háromszög szögei és oldalai lehetnek:

a	b	c	α	β	γ
6 cm	10 cm	14,33 cm	20°	34,75°	125,25°
6 cm	10 cm	4,47 cm	20°	145,25°	14,75°

3302 *a)* Az $a + b = 12$ cm összefüggésből $a = 12 - b$. A szinusztételt használva:

$$\frac{\sin 42{,}8^\circ}{\sin 72{,}5^\circ} = \frac{12 - b}{b}.$$

A b oldalra így adódik:

$$b = \frac{12 \cdot \sin 72{,}5^\circ}{\sin 42{,}8^\circ + \sin 72{,}5^\circ} \approx 7{,}00.$$

A szinusztételt ismételten használva a háromszög oldalai:

5,00 cm, 7,00 cm és 6,65 cm.

b) A háromszög oldalai:

17,28 cm, 30,72 cm és 24,89 cm.

3303 A szinusztételt használva a háromszög oldalai:

a) 146,86 cm, 92,86 cm és 160,57 cm;

b) 43,18 cm, 13,18 cm és 50,16 cm.

3304 A szinusztétel segítségével a háromszög oldalaira kapjuk:

38,5 cm, 32,0 cm és 29,5 cm.

3305 A háromszög oldalai:

12,89 cm, 17,36 cm és 19,75 cm.

3306 A $2a + b = c$ egyenlőség mindkét oldalát osztva c-vel, majd használva a szinusztételt adódik, hogy igaz az állítás.

3307 A paralelogramma oldalai: 10,59 cm és 8,23 cm.

3308 *a)* 116,63 N és 84,31 N;

b) 85,95 N és 26,47 N.

3309 *a)* 25,55 cm^2;

b) 4153,51 cm^2.

3310 Egy háromszög területét a szokásos jelöléssel számíthatjuk a következő képlettel:

$$T = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}.$$

a) A háromszög szögei 50°, 82° és 48°, így az egyes oldalak::

$$a = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin 50^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \sin 48^\circ}} \approx 14{,}64, \qquad b = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin 82^\circ}{\sin 50^\circ \cdot \sin 48^\circ}} \approx 18{,}93,$$

$$c = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin 48^\circ}{\sin 50^\circ \cdot \sin 82^\circ}} \approx 14{,}21.$$

A háromszög oldalai tehát:

14,64 cm, 18,93 cm és 14,21 cm.

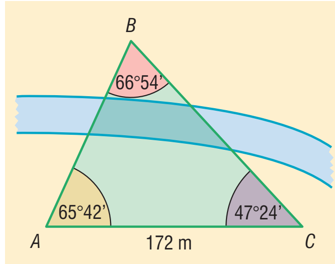
b) Hasonlóan a háromszög oldalaira kapjuk:

12,31 cm, 18,20 cm és 17,51 cm.

3311 Az ABC háromszög harmadik szöge 66°54'. A háromszög AB és AC oldalára felírva a szinusztételt:

$$\frac{AB}{172}=\frac{\sin 47°24'}{\sin 66°54'} \quad\Rightarrow\quad AB\approx 137{,}64.$$

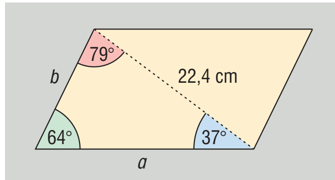
Az AB távolság 137,64 m.



3312 A paralelogramma 22,4 cm-es átlója a paralelogramma oldalaival olyan háromszöget határoz meg, amelynek szögei 37°, 79° és 64°. Ebben a háromszögben felírva a szinusztételt adódik, hogy $a = 24{,}46$ és $b = 15{,}00$.

A paralelogramma oldalai:

24,46 cm és 15,00 cm.

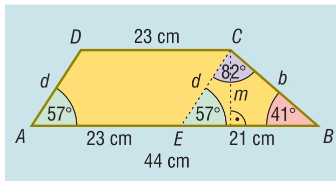


3313 Vegyük fel az $ABCD$ trapéz hosszabbik AB alapján az E pontot úgy, hogy az $AECD$ négyszög paralelogramma legyen. Ekkor:

$$EB = 44 - 23 = 21 \text{ cm},$$

$$CEB\sphericalangle = 57°,\quad EBC\sphericalangle = 41° \quad\text{és}\quad BCE\sphericalangle = 82°.$$

Az EBC háromszögnek ismerjük egy oldalát és a szögeit, így a szinusztétellel a b és d oldalak hosszát kiszámíthatjuk:



$$\frac{b}{21}=\frac{\sin 57°}{\sin 82°} \quad\Rightarrow\quad b = 21\cdot\frac{\sin 57°}{\sin 82°}\approx 17{,}79;$$

$$\frac{d}{21}=\frac{\sin 41°}{\sin 82°} \quad\Rightarrow\quad d = 21\cdot\frac{\sin 41°}{\sin 82°}\approx 13{,}91.$$

a) A trapéz szárainak hossza:

17,79 cm és 13,91 cm.

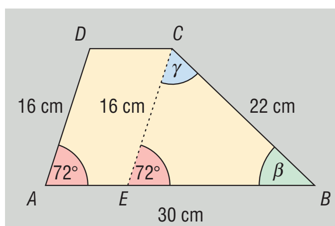
b) A terület meghatározásához számoljuk a trapéz magasságát:

$$m = b\cdot\sin 41°\approx 11{,}67.$$

A trapéz területe:

$$T=\frac{11{,}67\cdot(44+23)}{2}=390{,}95 \text{ cm}^2.$$

3314 A szóban forgó $ABCD$ trapéz hosszabbik AB alapján vegyük fel az E pontot úgy, hogy az $AECD$ négyszög paralelogramma legyen. Az EBC háromszögben így ismert két oldal, és a hosszabbikkal szemben levő szög. Szinusztétellel β és EB oldal számítható:



$$\frac{\sin\beta}{\sin 72°}=\frac{16}{22} \quad\Rightarrow\quad \beta\approx 43{,}76° \quad\Rightarrow\quad \gamma\approx 64{,}24°;$$

$$\frac{EB}{22}=\frac{\sin 64{,}24°}{\sin 72°} \quad\Rightarrow\quad EB\approx 20{,}83.$$

a) A trapéz rövidebb alapja:

$$AB - EB = 30 - 20{,}83 = 9{,}17 \text{ cm}.$$

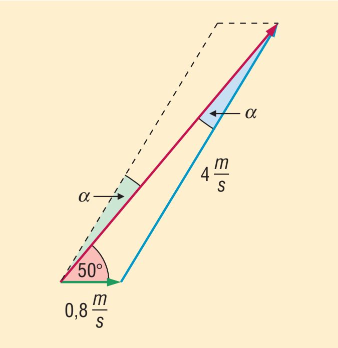
b) Mivel a trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180°, a trapéz szögei rendre:

72°, 43,76°, 136,24° és 108°.

3315 Ahhoz, hogy a csónak a kikötőbe érjen, a csónak és a folyó sebességvektorának összege a folyó partjával 50º-os szöget kell hogy bezárjon. A két vektort a háromszögszabály szerint összeadva, a vektorok egy olyan háromszöget alkotnak, amelynek két oldala 4, illetve 0,8 egység, és a 4 egységnyi oldallal szemben levő szög 50º. Feladatunk az, hogy szinusztétellel meghatározzuk a 0,8 egységnyi oldallal szemben levő α szöget:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 50^\circ}=\frac{0{,}8}{4} \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx 8{,}81^\circ.$$

Tehát a cél irányától 8,81º-kal kell eltérnünk a folyási iránnyal ellentétesen.



3316 Az $ABCDE$ szabályos ötszög minden szöge 108º. A beírt $IFGH$ négyzet oldala 25 cm.

A GFC háromszögben:

$$GFC\sphericalangle = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ.$$

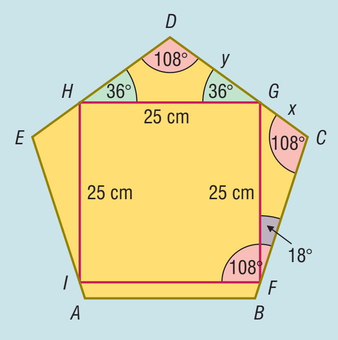
Felírva a szinusztételt:

$$\frac{x}{25}=\frac{\sin 18^\circ}{\sin 108^\circ} \quad\Rightarrow\quad x\approx 8{,}12.$$

A HGD egyenlő szárú háromszögből:

$$y=\frac{12{,}5}{\cos 36^\circ}\approx 15{,}45.$$

Az ötszög oldala: $x+y=23{,}57$ cm.



3317 Alakítsuk át a $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\gamma$ egyenlőséget:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma}+\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}=1.$$

(Háromszögről lévén szó, $\sin\gamma$ nem lehet 0.)

A szinusztétel értelmében ez utóbbi egyenlőség így is írható:

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1 \quad\Rightarrow\quad a^2+b^2=c^2.$$

Ha egy háromszögben két oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű.

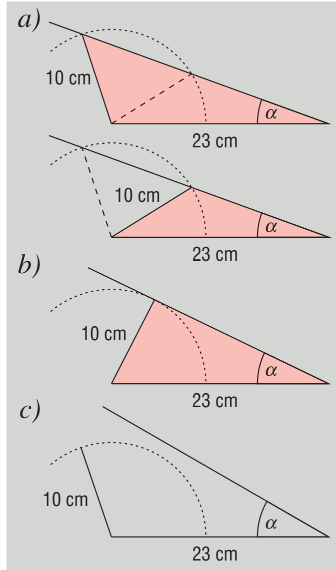
Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a Pitagorasz-tétel értelmében az állítás megfordítása is igaz.

3318 Tudjuk, hogy egy háromszögben tompaszög vagy derékszög csak a legnagyobb oldallal szemben lehet, ezért ha van a feltételeknek megfelelő háromszög, akkor a 10 cm-es oldallal szemben levő α szög csak hegyesszög lehet.

Legyen a 23 cm-es oldallal szemben levő szög β. Felírva a háromszögben a szinusztételt:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{23}{10} \quad\Rightarrow\quad \sin\beta=\frac{23}{10}\cdot\sin\alpha.$$

Mivel $\sin\beta$ értéke legfeljebb 1 lehet, ahhoz, hogy létezzen ilyen háromszög szükséges, hogy $\frac{23}{10}\cdot\sin\alpha\le 1$ teljesüljön.



a) Ha

$$\frac{23}{10}\cdot\sin\alpha<1 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha<\frac{10}{23},$$

amiből $\alpha < 25{,}77°$.

Ekkor a háromszögben két oldal és a kisebbikkel szemben levő szög adott, tehát két ilyen háromszög létezik.

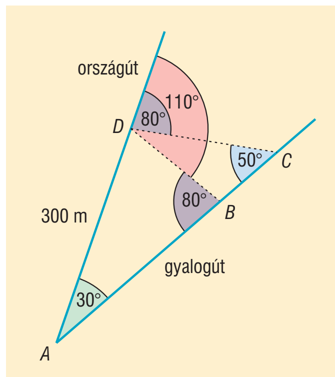
b) Ha

$$\frac{23}{10}\cdot\sin\alpha=1 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{10}{23},$$

amiből $\alpha = 25{,}77°$.

Ekkor egy, a feltételeknek megfelelő háromszög van.

c) Nincs a feltételeknek megfelelő háromszög, ha $\sin\beta$ értéke 1-nél nagyobb vagy α tompaszög, vagyis ha $\alpha > 25{,}77°$.



3319 *a)* Az országúton az *A* pont felől haladjunk a *D* pont felé. A gyalogút mentén lévő épületek helyét jelölje *B* és *C*.

Az *ABD* háromszögben:

$$ADB\sphericalangle = 180° - 110° = 70°,$$
$$ABD\sphericalangle = 180° - 70° - 30° = 80°.$$

A háromszögben felírva a szinusztételt:

$$\frac{AB}{300}=\frac{\sin 70°}{\sin 80°} \quad\Rightarrow\quad AB = 300\cdot\frac{\sin 70°}{\sin 80°}.$$

Az *ACD* háromszögben:

$$ADC\sphericalangle = 180° - 80° = 100°,$$
$$ACD\sphericalangle = 180° - 100° - 30° = 50°.$$

A háromszögben felírva a szinusztételt:

$$\frac{AC}{300}=\frac{\sin 100°}{\sin 50°} \quad\Rightarrow\quad AC = 300\cdot\frac{\sin 100°}{\sin 50°}.$$

A két épület

$$BC = 300\cdot\frac{\sin 100°}{\sin 50°} - 300\cdot\frac{\sin 70°}{\sin 80°} \approx 99{,}42\ \text{m}$$

távolságra van egymástól.

b) A gazda a megadott sebességgel

$$t=\frac{99{,}42}{1{,}5}=66{,}28$$

másodperc alatt teszi meg az utat.

Ez idő alatt a kutyája által megtett út:

$$s = 66{,}28\cdot 6 = 397{,}68\ \text{m}.$$

A koszinusztétel – megoldások

3320 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
9 cm	8 cm	9,79 cm	59,84°	50,16°	70°
17,12 m	12,4 m	8,3 m	110°	42,89°	27,11°
18 dm	17,7 dm	120 cm	71,70°	69°	39,30°

3321 *a)* A háromszög legnagyobb szöge: 102,64°.
b) A háromszög legkisebb szöge: 26,05°.

3322 A két mutató végpontja 12,49 cm távolságra van egymástól.

3323 A paralelogramma átlói 66,80 cm és 90,98 cm hosszúak.

3324 A két erő eredője 46,30 N.

3325 A paralelogramma oldalai 10,92 cm és 21,42 cm.

3326 *a)* A paralelogramma másik oldala 20 cm.
b) A paralelogramma átlói 14,32 cm és 26,89 cm hosszúak.

3327 3 óra 40 perc múlva a két hajó 208,03 km-re lesz egymástól.

3328 Koszinusztétellel számítható a PQ távolság: 2,33 km. A vitorlás átlagsebessége:

$$v = \frac{2{,}33\ \text{km}}{0{,}6\ \text{h}} \approx 3{,}88\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

3329 Az AC oldal hossza legyen x. Felírva a koszinusztételt:

$$100 = x^2 + (3x)^2 - 2 \cdot x \cdot (3x) \cdot \cos 54° \quad \Rightarrow \quad x \approx 3{,}93.$$

A háromszög hiányzó oldalainak hossza:

$$3{,}93\ \text{cm} \quad \text{és} \quad 11{,}79\ \text{cm}.$$

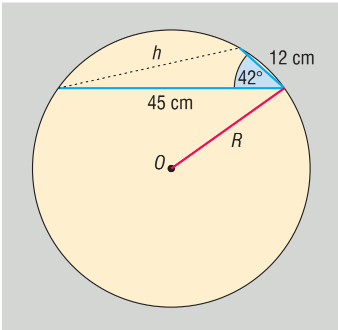
3330 Számítsuk ki a húrok másik végpontjait összekötő húr h hosszát koszinusztétellel:

$$h^2 = 45^2 + 12^2 - 2 \cdot 45 \cdot 12 \cdot \cos 42° \quad \Rightarrow \quad h \approx 36{,}96.$$

Egy kör sugara, húrjának hossza és a húrhoz tartozó kerületi szög közötti összefüggés alapján a kör R sugara:

$$R = \frac{h}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{36{,}96}{2 \cdot \sin 42°} \approx 27{,}62.$$

A kör sugara tehát 27,62 cm.



3331 A biliárdgolyó ütközésig megtett útja:

$$\frac{10}{\sin 33°} \approx 18{,}36\ \text{cm}.$$

Ütközés után a megállásig

$$\frac{15}{\sin 33°} \approx 27{,}54\ \text{cm}$$

utat tesz még meg, mivel a beesés szöge egyenlő a visszaverődés szögével.

A két út egymással bezárt szöge:

$$180° - 2 \cdot 33° = 114°.$$

A biliárdgolyó két helyzete közti d távolságot koszinusztétellel számolhatjuk:

$$d^2 = 18{,}36^2 + 27{,}54^2 - 2 \cdot 18{,}36 \cdot 27{,}54 \cdot \cos 114° \quad \Rightarrow \quad d \approx 38{,}82.$$

A golyó két helyzete közti távolság 38,82 cm.

3332 A kismutató hosszát jelölje k, a nagymutatóét n. Számoljunk deciméterekben.

9 órakor a mutatók derékszöget zárnak be, így hosszukra felírható a Pitagorasz-tétel:

$$10^2 = k^2 + n^2.$$

8 órakor a mutatók $120°$-os szöget zárnak be, így hosszukra felírható a koszinusztétel:

$$12^2 = k^2 + n^2 - 2 \cdot k \cdot n \cdot \cos 120°.$$

A második egyenletbe $k^2 + n^2$ értéket beírva:

$$12^2 = 10^2 - 2 \cdot k \cdot n \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad k \cdot n = 44 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{44}{n}.$$

Ez utóbbi eredményünket az első egyenletbe írjuk be, majd rendezzük az egyenletet:

$$10^2 = \left(\frac{44}{n}\right)^2 + n^2,$$

$$0 = n^4 - 100n^2 + 1936,$$

$$n_{1,2}^2 = \frac{100 \pm \sqrt{2256}}{2}.$$

A megoldások: $n_1 \approx 8{,}59$ és $n_2 \approx 5{,}12$, amiből $k_1 \approx 5{,}12$ és $k_2 \approx 8{,}59$.

(A megoldásnál figyelembe vettük, hogy a mutatók hossza csak pozitív szám lehet.)

A kismutató hossza 51,2 cm, a nagymutatóé 85,9 cm.

3333 Ismeretes, hogy egy háromszög belső szögfelezője a szemben lévő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. Ha $AB : AC = 3 : 4$, akkor a háromszög AB oldalának hossza legyen $3x$, az AC oldalának hossza $4x$.

A háromszög területét felírhatjuk:

$$24 = \frac{3x \cdot 4x \cdot \sin 70°}{2} \quad \Rightarrow \quad x \approx 2{,}06.$$

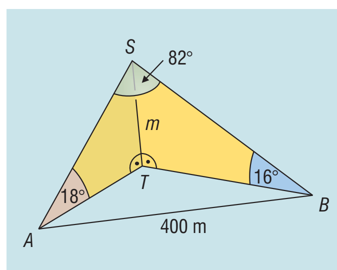
A háromszögben $AB \approx 6{,}18$ és $AC \approx 8{,}24$.

A háromszög BC oldalát koszinusztétellel számolhatjuk: $BC \approx 8{,}44$.

A háromszög oldalai:

$$6{,}18 \text{ cm}, \quad 8{,}24 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 8{,}44 \text{ cm}.$$

3334 A sasfészek síkra vonatkozó merőleges vetülete T. Jelöljük az ST távolságot m-mel.



Az ATS derékszögű háromszögből:

$$AS = \frac{m}{\sin 18°},$$

a BTS derékszögű háromszögből:

$$BS = \frac{m}{\sin 16°}.$$

Az ABS háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$400^2 = \left(\frac{m}{\sin 18^\circ}\right)^2 + \left(\frac{m}{\sin 16^\circ}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m}{\sin 18^\circ} \cdot \frac{m}{\sin 16^\circ} \cdot \cos 82^\circ.$$

Kifejezve m-et:

$$\frac{400 \cdot \sin 18^\circ \cdot \sin 16^\circ}{\sqrt{\sin^2 16^\circ + \sin^2 18^\circ - 2 \cdot \sin 18^\circ \cdot \sin 16^\circ \cdot \cos 82^\circ}} \approx 88{,}65.$$

A sasfészek megközelítőleg 89 m magasan van.

3335 A háromszög oldalai legyenek $n - 1$, n és $n + 1$ $(n > 4)$.

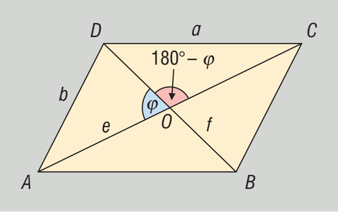
A koszinusztétel segítségével számoljuk ki a háromszög legnagyobb oldalával szemben levő α szög koszinuszát:

$$(n+1)^2 = n^2 + (n-1)^2 - 2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{n-4}{2 \cdot (n-1)}.$$

Az $\dfrac{n-4}{2 \cdot (n-1)}$ mindig pozitív $n > 4$ miatt, tehát a háromszög legnagyobb α szögének koszinusza pozitív szám. Ez pedig azt jelenti, hogy az α szög hegyesszög, vagyis a háromszög biztosan hegyesszögű.

3336 Az ábrán látható $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja O, az átlók által bezárt szög φ. Az oldalak hossza a, b, az átlóké pedig e, f.



Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, az AOD és a DOC háromszögekben az alábbi módon felírhatjuk a koszinusztételt:

$$b^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\varphi,$$

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos(180^\circ - \varphi).$$

Mivel $\cos\varphi = -\cos(180^\circ - \varphi)$, a két egyenletet összeadva adódik:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{f}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2.$$

Tehát egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalaik négyzetösszegével.

3337 Ismeretes, hogy egy háromszög területét a $T = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ képlet alapján is számolhatjuk.

A területből a két adott oldal által közbezárt γ szög szinuszára kapunk értéket:

$$\sin\gamma = \frac{2 \cdot 18000}{250 \cdot 180} = 0{,}8,$$

amiből $\gamma_1 \approx 53{,}13^\circ$ és $\gamma_2 \approx 126{,}87^\circ$.

Tehát a telek γ szöge lehet hegyesszög vagy tompaszög.

Ha γ hegyesszög, a telek harmadik oldala a koszinusztételből: 202,24 m.

Ha γ tompaszög, a telek harmadik oldala a koszinusztételből: 385,88 m.

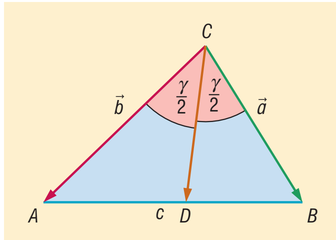
a) Győzőnek nincs igaza.

b) A háromszög területét számíthatjuk a beírt körének r sugarával:

$$T = r \cdot \frac{a+b+c}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2T}{a+b+c}.$$

A beírt kör sugara γ hegyesszög esetén: $r \approx 56{,}94$ m, γ tompaszög esetén: $r \approx 44{,}12$ m. Nem biztos, hogy elfér a telken egy 50 m sugarú kör alakú delfinárium.

3338 A háromszög oldalainak hossza a szokásos jelöléssel legyen a, b és c. A szögfelezőtétel alapján a C csúcsnál lévő szög szögfelezője a szemközti c oldalt egy olyan D pontban metszi, amelyre igaz, hogy:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}.$$

Legyen $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

Egy szakasz osztópontjába mutató vektor képlete alapján:

$$\overrightarrow{CD} = \frac{b \cdot \vec{a} + a \cdot \vec{b}}{a+b},$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \left(\frac{b \cdot \vec{a} + a \cdot \vec{b}}{a+b}\right)^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2b^2 \cdot \cos\gamma}{(a+b)^2}.$$

Mivel a koszinusztétel alapján:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

ezért:

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2b^2 \cdot \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{(a+b)^2} = \frac{ab \cdot \left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{ab \cdot \left((a+b)^2 - c^2\right)}{(a+b)^2}.$$

Szorzattá alakítva és használva az $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ jelölést adódik, hogy:

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \frac{ab \cdot \left((a+b)^2 - c^2\right)}{(a+b)^2} = \frac{4ab \cdot \dfrac{a+b+c}{2} \cdot \dfrac{a+b-c}{2}}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{4ab}{(a+b)^2} \cdot s \cdot (s-c).$$

Tehát a C csúcsból induló belső szögfelező hossza:

$$CD = \frac{2}{a+b} \cdot \sqrt{ab \cdot s \cdot (s-c)}.$$

Hasonlóan az A, illetve a B csúcsból induló szögfelezők hossza:

$$\frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{bc \cdot s \cdot (s-a)} \qquad \text{illetve} \qquad \frac{2}{a+c} \cdot \sqrt{ac \cdot s \cdot (s-b)}.$$

Trigonometrikus összefüggések alkalmazásai – megoldások

3339 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
6 cm	9 cm	12 cm	28,96°	46,57°	104,47°
12,5 dm	6,3 dm	9,8 dm	99,57°	29,80°	50,63°
51 dm	420 cm	2 m	105,08°	52,67°	22,25°

3340 A másik oldal 12 cm, a másik átló 25,25 cm hosszú.

3341 *a)* Az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor hossza: 9,06 cm.
b) Az $\vec{a}-\vec{b}$ vektor hossza: 8,23 cm.
c) Az eredő vektor az $\vec{a}$ vektorral 52,2°-ot, a $\vec{b}$ vektorral 31,8°-ot zár be.

3342 A súlyvonalak hossza: 9,18 cm, 13,89 cm és 13,20 cm.

3343 A háromszög hiányzó oldalainak hossza 9 cm és 12 cm, a velük szemben lévő szögek pedig 48°33' és 88°46'.

3344 A háromszög két hiányzó oldala legyen x és $x+6$. Felírva a koszinusztételt:

$$12^2 = x^2 + (x+6)^2 - 2x\cdot(x+6)\cdot\cos 60^\circ,$$
$$0 = x^2 + 6x - 108.$$

Az egyenlet pozitív megoldása: $x \approx 7{,}82$.
A háromszög hiányzó oldalai: 7,82 cm és 13,82 cm.
A háromszög többi szögeit szinusztétellel számolva: 34,36° és 85,64°.

3345 A paralelogramma oldalainak hossza legyen a és b, az általuk bezárt szög 60°. A szöggel szemben lévő átló hossza $e = 23$ cm, a másik átló hossza f.

a) Az a, b és e oldalú háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$23^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos 60^\circ.$$

A feladat szerint $a+b=30$, amiből $a = 30-b$. Ezek alapján b-re a következő egyenletet kapjuk:

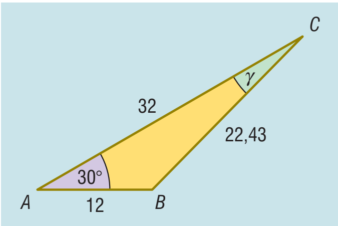
$$23^2 = (30-b)^2 + b^2 - 2\cdot(30-b)\cdot b\cdot\cos 60^\circ,$$
$$0 = 3b^2 - 90b + 371.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $b_1 = 25{,}07$ cm és $b_2 = 4{,}93$ cm. A hozzá tartozó a értékek: $a_1 = 4{,}93$ cm és $a_2 = 25{,}07$ cm.
A paralelogramma oldalainak hossza 25,07 cm és 4,93 cm.

b) A paralelogramma másik f átlójának hossza a koszinusztétel alapján:

$$f = \sqrt{25{,}07^2 + 4{,}93^2 - 2\cdot 25{,}07\cdot 4{,}93\cdot\cos 120^\circ} \approx 27{,}86 \text{ cm}.$$

3346 Az ABC háromszögben $AB = 12$, $BAC\sphericalangle = 30^\circ$.



a) Ismeretes, hogy egy háromszög területét a $T = \dfrac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2}$ képlet alapján is számolhatjuk. Ez alapján a háromszögben az AC oldal hossza:

$$AC = \frac{2\cdot 96}{12\cdot\sin 30^\circ} = 32.$$

A BC oldal hossza a koszinusztétellel határozható meg:

$$BC = \sqrt{12^2 + 32^2 - 2\cdot 12\cdot 32\cdot\cos 30^\circ} \approx 22{,}43.$$

A háromszög hiányzó két oldalának hossza 32 cm és 22,43 cm.

b) A háromszög C csúcsnál levő szögét a szinusztétellel számolhatjuk:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin 30°} = \frac{12}{22,43} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \sin 30° \cdot \frac{12}{22,43} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 15,52°.$$

(A háromszögben a legkisebb oldallal szemben levő szöget számoltuk, γ csak hegyesszög lehet.)

A háromszög hiányzó két szöge $15,52°$ és $134,48°$.

3347 Ismeretes, hogy egy háromszög területét a $T = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ képlet alapján számolhatjuk. A területből a két adott oldal által közbezárt γ szög szinuszára kapunk értéket:

$$\sin\gamma = \frac{2 \cdot 30,64}{8 \cdot 10} = 0,766 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 \approx 50° \text{ és } \gamma_2 \approx 130°.$$

Tehát két háromszög is megfelel a feladat feltételeinek. Két oldal és a közbezárt szög segítségével a koszinusztétellel számíthatjuk a háromszög harmadik oldalát, majd a szinusztételt használva egy másik szögét.

a	b	c	α	β	γ
8 cm	10 cm	7,82 cm	51,60°	78,40°	50°
8 cm	10 cm	16,34 cm	22,04°	27,96°	130°

A megoldásokat a táblázat tartalmazza.

3348 A háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölésekkel: $a = 43$ cm, $b = 52$ cm és a kettő által bezárt szög: $\gamma = 38°$.

A háromszög harmadik oldalának hosszát a koszinusztétellel számolhatjuk:

$$c = \sqrt{43^2 + 52^2 - 2 \cdot 43 \cdot 52 \cdot \cos 38°} \approx 32,08 \text{ cm}.$$

A háromszög c oldalához tartozó súlyvonal hossza:

$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 43^2 + 2 \cdot 52^2 - 32,08^2}}{2} \approx 44,94 \text{ cm}.$$

3349 A háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölésekkel: $a = 16$ cm, $b = 8$ cm, valamint $s_c = 9$ cm.

a) A súlyvonal kiszámítására vonatkozó összefüggés alapján:

$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2},$$

amiből:

$$c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - (2 \cdot s_c)^2} = \sqrt{2 \cdot 16^2 + 2 \cdot 8^2 - (2 \cdot 9)^2} \approx 17,78 \text{ cm}.$$

A harmadik oldal hossza 17,78 cm.

b) Az s_c, b és $\dfrac{c}{2}$ oldalú háromszögben a b oldallal szemben levő szöget kell kiszámítani. Felírva a koszinusztételt:

$$b^2 = s_c^{\,2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2s_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\delta,$$

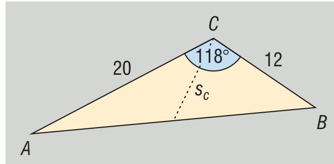
amiből:

$$\cos\delta = \frac{s_c^{\,2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - b^2}{2s_c \cdot \frac{c}{2}} = \frac{9^2 + (8,89)^2 - 8^2}{2 \cdot 9 \cdot 8,89} \approx 0,6001 \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 53,12°.$$

A súlyvonal és a harmadik oldal hajlásszöge $53,12°$.

3350 A mellékelt ábra szerint a kert az ABC háromszög, amelyben

$$BC = 12, \quad AC = 20 \quad \text{és} \quad ACB\sphericalangle = 118°.$$



Az AB oldalt a koszinusztétellel számolhatjuk:

$$AB^2 = 20^2 + 12^2 - 2\cdot 20\cdot 12\cdot \cos 118°,$$

amiből $AB \approx 27{,}74$.

a) A kertet $27{,}74 + 20 + 12 = 59{,}74$ m kerítéssel lehet körbekeríteni.

b) A kert területét a C csúcsból kiinduló súlyvonal felezi. Ennek hosszát az

$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

összefüggés alapján számolhatjuk: $s_c \approx 8{,}92$.

A kert területét felező út hossza 8,92 m.

3351 A háromszög oldalainak hossza legyen $6x$, $7x$ és $10x$.

a) Írjuk fel a koszinusztételt:

$$(6x)^2 = (7x)^2 + (10x)^2 - 2\cdot 7x\cdot 10x\cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = 0{,}8071 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36{,}18°.$$

A szinusztétellel számolható a $7x$ hosszúságú oldallal szemközti β hegyesszög: $\beta \approx 43{,}53°$.

A háromszög szögei:

$$36{,}18°, \quad 43{,}53° \quad \text{és} \quad 100{,}29°.$$

b) Egy kör sugara, húrjának hossza és a húrhoz tartozó kerületi szög közötti összefüggés alapján számíthatók a háromszög oldalai:

$$a = 2R\cdot \sin\alpha \approx 41{,}32, \quad b = 2R\cdot \sin\beta \approx 48{,}21 \quad \text{és} \quad c = 2R\cdot \sin\gamma \approx 68{,}87.$$

A háromszög oldalai:

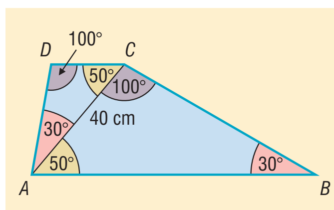
$$41{,}32 \text{ cm}, \quad 48{,}21 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 68{,}87 \text{ cm}.$$

c) Legyen a háromszög beírt körének sugara r. A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{2} = r\cdot \frac{a+b+c}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{a+b+c} \approx 12{,}37.$$

A beírt kör sugara 12,37 cm.

3352 Az $ABCD$ trapéz AC átlója 40 cm.



a) A megadott szögértékek alapján meghatározhatók az ABC háromszög szögei: 50°, 100° és 30°.

Írjuk fel az ABC háromszögben a szinusztételt az AB alap hosszának meghatározásához:

$$\frac{AB}{40} = \frac{\sin 100°}{\sin 30°} \quad \Rightarrow \quad AB \approx 78{,}78.$$

Hasonlóan BC oldal hossza is kiszámítható: $BC \approx 61{,}28$.

Az ACD háromszögben ugyanígy eljárva: $DC \approx 20{,}31$ és $AD \approx 31{,}11$.

A trapéz oldalai rendre:

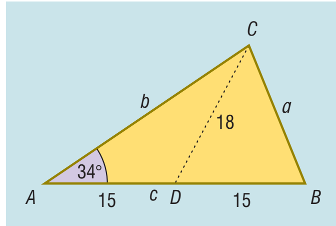
$$78{,}78 \text{ cm}, \quad 61{,}28 \text{ cm}, \quad 20{,}31 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 31{,}11 \text{ cm}.$$

b) A BD átló meghatározásához használjuk az ABD háromszögben a koszinusztételt:

$$BD^2 = 78{,}78^2 + 31{,}11^2 - 2\cdot 78{,}78\cdot 31{,}11\cdot \cos 80° \quad \Rightarrow \quad BD \approx 79{,}52.$$

A trapéz másik átlója 79,52 cm.

3353 Az ábra szerinti ABC háromszögben a szokásos jelölés mellett $\alpha = 34°$, $c = 30$ és $s_c = 18$.



Az ADC háromszögben a szinusztétellel meghatározhatjuk az ACD szöget:

$$\frac{\sin ACD\sphericalangle}{\sin 34°} = \frac{15}{18},$$

amiből $ACD\sphericalangle \approx 27{,}77°$.

(A háromszögben nem a legnagyobb oldallal szemben levő szöget számoltuk, így ACD szög csak hegyesszög lehet.)

Újabb szinusztétel segítségével a háromszög b oldalának hossza $28{,}36$.

Ezután az ABC háromszögben az oldal hosszát a koszinusztétellel számolhatjuk:

$$a^2 = 28{,}36^2 + 30^2 - 2 \cdot 28{,}36 \cdot 30 \cdot \cos 34° \quad \Rightarrow \quad a \approx 17{,}13.$$

A háromszög β szögét az ABC háromszögben felírt szinusztétellel kaphatjuk meg: $\beta \approx 67{,}79°$.

A háromszög oldalai tehát:

$$30 \text{ cm}, \quad 17{,}13 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 28{,}36 \text{ cm},$$

a velük szemben lévő szögek pedig:

$$78{,}21°, \quad 34° \quad \text{és} \quad 67{,}79°.$$

3354 A feltételek szerint a háromszögben

$$a^2 + b^2 = 296, \quad \text{valamint} \quad \frac{ab \cdot \sin 30°}{2} = 35.$$

Az a és b oldalak meghatározásához az

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 296 \\ \frac{ab}{4} &= 35 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A másodikból kifejezve b-t, majd beírva az elsőbe, a következő másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet kapjuk:

$$a^4 - 296a^2 + 19\,600 = 0.$$

Ennek pozitív megoldásai: 10 és 14.

Az egyenletrendszert $a_1 = 10$, $b_1 = 14$, illetve $a_2 = 14$, $b_2 = 10$ értékek elégítik ki.

A háromszög harmadik oldalának hossza a koszinusztétellel számítva $7{,}32$.

A 10 cm-es oldallal szemben levő szögre a szinusztétel alapján $43{,}08°$ adódik.

A háromszög oldalainak hossza tehát:

$$10 \text{ cm}, \quad 14 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 7{,}32 \text{ cm},$$

a velük szemben levő szögek pedig rendre:

$$43{,}08°, \quad 106{,}92° \quad \text{és} \quad 30°.$$

3355 A háromszögben a szokásos jelölések szerint legyen: $a^2 + b^2 = 244 \text{ dm}^2$, $c = 2 \cdot \sqrt{31}$ dm és a háromszög területe: $T = 30 \cdot \sqrt{3} \text{ dm}^2$.

A háromszög területéből kiindulva:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad a \cdot b = \frac{2 \cdot T}{\sin\gamma}.$$

A háromszög c oldalára felírjuk a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{2 \cdot T}{\sin\gamma} \cdot \cos\gamma,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{4 \cdot T}{\operatorname{tg}\gamma}. \qquad (\cos\gamma \neq 0)$$

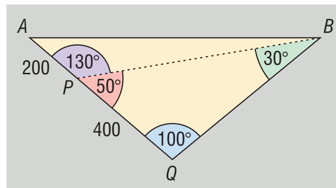
A feladat feltételeit figyelembe véve:

$$\left(2 \cdot \sqrt{31}\right)^2 = 244 - \frac{4 \cdot 30 \cdot \sqrt{3}}{\operatorname{tg}\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 60^\circ.$$

Innen a 3354. feladat gondolatmenetét követve a háromszög hiányzó oldalainak hossza és a velük szemben lévő szögek nagysága:

$$a = 10 \text{ dm}, \; b = 12 \text{ dm} \quad \text{és} \quad \alpha = 51{,}05^\circ, \; \beta = 68{,}95^\circ.$$

3356 A PBQ háromszög külső szöge 130°, ami egyenlő a nem mellette levő két belső szög összegével, ezért $PBQ\sphericalangle = 30^\circ$. Ebben a háromszögben a szinusztétel:



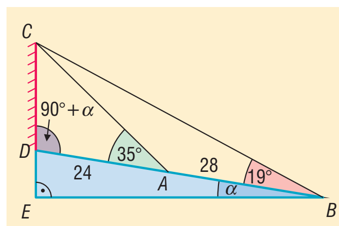
$$\frac{BQ}{400} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} \quad \Rightarrow \quad BQ \approx 612{,}84.$$

Az AQB háromszögben a koszinusztétel:

$$AB^2 = 600^2 + 612{,}84^2 - 2 \cdot 600 \cdot 612{,}84 \cdot \cos 100^\circ \quad \Rightarrow \quad AB \approx 929{,}13.$$

Az A és B pontok távolsága 929,13 m.

3357 Jelölje az épület tetejét C, a lábát D pont, $AD = 24$, $AB = 28$.



a) Az ABC háromszög ACB szöge 16°. A szinusztétel alapján:

$$\frac{AC}{28} = \frac{\sin 19^\circ}{\sin 16^\circ} \quad \Rightarrow \quad AC \approx 33{,}07.$$

Az ADC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$CD^2 = 24^2 + 33{,}07^2 - 2 \cdot 24 \cdot 33{,}07 \cdot \cos 35^\circ,$$

amiből $CD \approx 19{,}22$.

Az épület magassága tehát 19,22 m.

b) Az ADC háromszögben ADC tompaszög a szinusztétellel megadható: $ADC\sphericalangle = 99{,}29^\circ$.

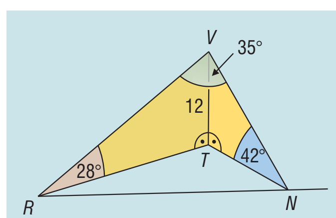
Mivel ADC szög a DEB háromszög külső szöge, a lejtő α hajlásszögére igaz, hogy:

$$90^\circ + \alpha = 99{,}29^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 9{,}29^\circ.$$

A lejtő hajlásszöge $9{,}29^\circ$.

3358 A vadászlesen V pontban tartózkodunk, ennek a síkra vonatkozó merőleges vetülete T. A róka helyét jelölje R, a nyúl helyét N pont. $VT = 12$.

A VTR derékszögű háromszögből:



$$VR = \frac{12}{\sin 28^\circ},$$

a VTN derékszögű háromszögből:

$$VN = \frac{12}{\sin 42^\circ}.$$

Az RVN háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$RN^2 = \left(\frac{12}{\sin 28^\circ}\right)^2 + \left(\frac{12}{\sin 42^\circ}\right)^2 - 2 \cdot \frac{12}{\sin 28^\circ} \cdot \frac{12}{\sin 42^\circ} \cdot \cos 35^\circ \quad \Rightarrow \quad RN \approx 14{,}97.$$

A róka és a nyúl távolsága tehát 14,97 méter.

A nyúl a rekettyésig az 50 m távolságot

$$t = \frac{s}{v} = \frac{50}{8} \approx 6{,}25 \text{ másodperc},$$

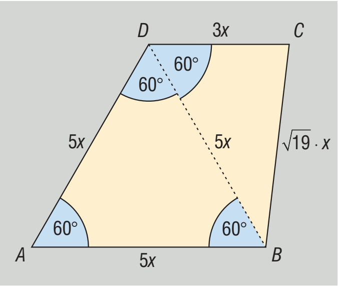
míg a róka a rekettyésig az $50 + 14{,}96 = 64{,}96$ m távolságot

$$t = \frac{s}{v} = \frac{64{,}96}{10} \approx 6{,}5 \text{ másodperc}$$

alatt teszi meg.

A rókának hosszabb idő kell a távolság megtételéig, tehát a róka a rekettyésig nem éri utol a nyulat.

3359 Az ABC háromszög AB oldalához és a BCD háromszög DC oldalához tartozó magasságok egyenlő hosszúak, tehát a háromszögek területének arányából következik, hogy $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}$.



Legyen a trapéz AB alapja $5x$, DC alapja $3x$ hosszúságú. Mivel az ABD háromszög szabályos, a BDC háromszögben $BD = 5x$ és $BDC\sphericalangle = 60^\circ$. Ez utóbbi háromszögben két oldal és a közbezárt szög segítségével felírhatjuk a koszinusztételt:

$$BC^2 = (5x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3x \cdot \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad BC = \sqrt{19} \cdot x.$$

A szinusztétel segítségével számítható $DBC\sphericalangle$:

$$\frac{\sin DBC\sphericalangle}{\sin 60^\circ} = \frac{3x}{\sqrt{19} \cdot x} \quad \Rightarrow \quad DBC\sphericalangle \approx 36{,}59^\circ.$$

A trapéz szögei rendre: 60°, $96{,}59^\circ$, $83{,}41^\circ$ és 120°.

A trapéz oldalait a területe segítségével határozhatjuk meg. A trapéz magassága a szabályos háromszög magassága: $\frac{5x \cdot \sqrt{3}}{2}$.

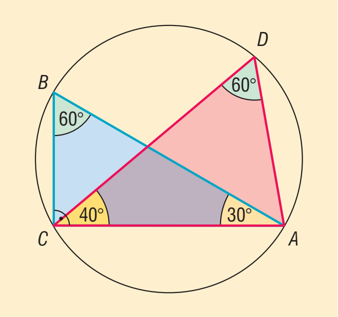
$$1000 = \frac{(5x + 3x) \cdot \frac{5x \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{100}{\sqrt{3}}} \approx 7{,}60.$$

A trapéz alapjai 22,80 cm és 38,00 cm, a szárai 33,13 cm és 38,00 cm hosszúak.

3360 *a)* Az ABC és ADC szögek ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek, tehát $ADC\sphericalangle = 60^\circ$.

Mivel $BCD\sphericalangle = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, és a BCD és BAD szögek ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek, $BAD\sphericalangle = 50^\circ$.

Az ADC háromszög szögei: 40°, 80° és 60°.



b) Az ABC háromszög egy fél szabályos háromszög, amelynek átfogója 20 cm, tehát hosszabb AC befogója:

$$\frac{20 \cdot \sqrt{3}}{2} = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17{,}32.$$

Az ADC háromszögben a szinusztétel:

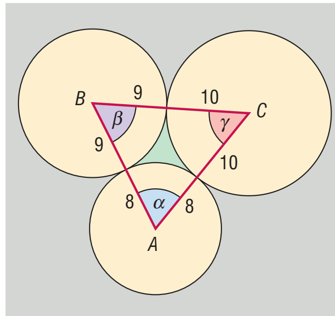
$$\frac{DA}{10\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ}\quad\Rightarrow\quad DA\approx 12{,}86.$$

Hasonlóan adódik, hogy $DC\approx 19{,}70$.

Az ADC háromszög oldalai: 17,32 cm, 12,86 cm és 19,70 cm.

3361 A virágágyások köreinek A, B és C középpontjait összekötő szakaszok hosszai a megfelelő körök sugarainak összege:

$AB=8+9=17,\quad BC=9+10=19\quad$ és $\quad AC=10+8=18.$



Ennek a háromszögnek az α szögét meghatározhatjuk a koszinusztétellel:

$$19^2=17^2+18^2-2\cdot 17\cdot 18\cdot\cos\alpha\quad\Rightarrow\quad\alpha\approx 65{,}68^\circ.$$

A szinusztétellel meghatározható a β szög:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 65{,}68^\circ}=\frac{18}{19}\quad\Rightarrow\quad\beta\approx 59{,}69^\circ\quad\Rightarrow\quad\gamma\approx 54{,}63^\circ.$$

(β tompaszög nem lehet, mert nem a legnagyobb oldallal szemben van.)

A zöld színű területet kell kiszámítanunk. Ehhez határozzuk meg a háromszög és a három körcikk területét:

$$T_{ABC\text{ háromszög}}=\frac{17\cdot 18\cdot\sin 65{,}68^\circ}{2}\approx 139{,}42,$$

$$T_{\alpha\text{ körcikk}}=\frac{8^2\cdot\pi\cdot 65{,}68^\circ}{360^\circ}\approx 36{,}66,$$

$$T_{\beta\text{ körcikk}}=\frac{9^2\cdot\pi\cdot 59{,}69^\circ}{360^\circ}\approx 42{,}17,$$

$$T_{\gamma\text{ körcikk}}=\frac{10^2\cdot\pi\cdot 54{,}63^\circ}{360^\circ}\approx 47{,}65.$$

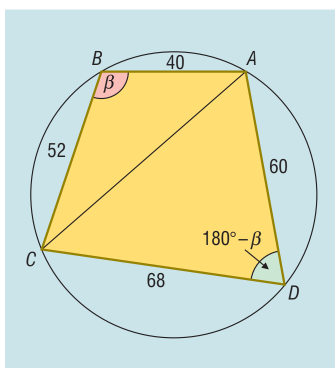
Vonjuk ki a háromszög területéből a három körcikk területét:

$$T=T_{ABC\text{ háromszög}}-T_{\alpha\text{ körcikk}}-T_{\beta\text{ körcikk}}-T_{\gamma\text{ körcikk}}=12{,}94.$$

12,94 m^2 területet bevetéséhez $12{,}94\cdot 8=103{,}52$ dkg fűmag kell.

Tehát a terület füvesítéséhez megközelítőleg 1035 g fűmag szükséges.

3362 Az $ABCD$ húrnégyszög oldalainak hossza $AB=40$, $BC=52$, $CD=68$ és $AD=60$.



A húrnégyszögek tétele alapján:

$$\text{ha } ABC\sphericalangle=\beta\quad\Rightarrow\quad CDA\sphericalangle=180^\circ-\beta.$$

Írjuk fel a koszinusztételt az ABC, illetve ACD háromszögekben:

$$AC^2=40^2+52^2-2\cdot 40\cdot 52\cdot\cos\beta,$$
$$AC^2=68^2+60^2-2\cdot 68\cdot 60\cdot\cos(180^\circ-\beta).$$

A műveleteket elvégezve:

$$AC^2=4304-4160\cdot\cos\beta,$$
$$AC^2=8224-8160\cdot\cos(180^\circ-\beta).$$

A két egyenlet bal oldalának egyenlőségéből:

$$4304 - 4160 \cdot \cos\beta = 8224 - 8160 \cdot \cos(180^\circ - \beta).$$

Mivel $\cos\beta = -\cos(180^\circ - \beta)$:

$$\cos\beta = \frac{4304 - 8224}{4160 + 8160} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 108{,}55^\circ.$$

Hasonlóan felírva az ABD, illetve BCD háromszögekben a koszinusztételt, azt kapjuk, hogy a négyszög C csúcsánál levő szöge $79{,}67^\circ$.

Mivel egy húrnégyszög szemben levő szögeinek összege 180°, az $ABCD$ négyszög szögei rendre:

$$100{,}33^\circ, \quad 108{,}55^\circ, \quad 79{,}67^\circ, \quad 71{,}45^\circ.$$

3363 A koszinusztétel alapján:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{és} \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ezt beírva a

$$\cos\beta + \cos\gamma = \frac{b + c}{a}$$

összefüggésbe, majd ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b + c}{a},$$

$$b \cdot \left(a^2 + c^2 - b^2\right) + c \cdot \left(a^2 + b^2 - c^2\right) = 2bc \cdot (b + c),$$

$$ba^2 + bc^2 - b^3 + ca^2 + cb^2 - c^3 = 2bc \cdot (b + c),$$

$$a^2 \cdot (b + c) + bc \cdot (b + c) - \left(b^3 + c^3\right) = 2bc \cdot (b + c),$$

$$a^2 \cdot (b + c) - (b + c) \cdot \left(b^2 - bc + c^2\right) = bc \cdot (b + c).$$

Ez utóbbi egyenletet $b + c \neq 0$-val osztva, majd rendezve, $a^2 = b^2 + c^2$ alakhoz jutunk.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű, és az „a” oldal a háromszög átfogója.

Összegzési képletek – megoldások

3364 Alkalmazzuk az addíciós tételeket:

a) $-\sin\alpha, \quad -\cos\alpha;$

b) $\cos\alpha, \quad -\sin\alpha;$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\alpha, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\alpha;$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha, \quad -\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha;$

e) $\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha.$

3365 Alkalmazzuk az addíciós tételeket:

a) $\sin 36° \cdot \cos 24° + \cos 36° \cdot \sin 24° = \sin(36° + 24°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sin 96° \cdot \cos 36° - \cos 96° \cdot \sin 36° = \sin(96° - 36°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\cos 125° \cdot \cos 25° - \sin 125° \cdot \sin 25° = \cos(125° + 25°) = \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\cos 104° \cdot \cos 44° + \sin 104° \cdot \sin 44° = \cos(104° - 44°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

3366 Alkalmazzuk az addíciós tételeket:

a) $\cos(150° + \alpha) + \cos(60° - \alpha) - \sin(30° + \alpha) - \sin(120° - \alpha) = -\sin\alpha - \sqrt{3} \cdot \cos\alpha$;

b) $\sin(45° + \alpha) - \cos(30° - \alpha) - \cos(45° - \alpha) + \sin(60° + \alpha) = 0$;

c) $\sin^2(\beta + \alpha) - \sin^2(\beta - \alpha) = 4 \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$;

$\cos^2(\beta + \alpha) - \cos^2(\beta - \alpha) = -4 \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha = -2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = -\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$;

d) -1.

3367 Az összegzési képleteket használjuk α és $\alpha + \beta$ szögekre:

a) $\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha =$
$= \cos\big((\alpha + \beta) - \alpha\big) = \cos\beta$.

A *b)*, *c)* és *d)* részeknél hasonlóan járhatunk el.

3368 *a)* $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos 15° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$;

b) $\sin 75° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;

c) $\sin 105° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\cos 105° = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$;

d) $\sin 165° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos 165° = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$;

e) $\sin 345° = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$, $\cos 345° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

3369 Alkalmazzuk a $\sin\alpha \pm \sin\beta$, illetve $\cos\alpha \pm \cos\beta$ szorzattá alakítására vonatkozó azonosságokat:

a) $\sin 105° - \sin 15° = 2 \cdot \cos\frac{105° + 15°}{2} \cdot \sin\frac{105° - 15°}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\sin 105° + \sin 15° = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

c) $\cos 105° - \cos 15° = -\frac{\sqrt{6}}{2}$;

d) $\cos 105° + \cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3370 $\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 10^\circ = \dfrac{\sin 40^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 40^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ} = \dfrac{\sin(40^\circ + 10^\circ)}{\cos 40^\circ} = \dfrac{\sin 50^\circ}{\cos 40^\circ} = 1.$

3371 Mivel a háromszög két szögének a számtani közepe a harmadik szögével egyenlő, a szögeit jelölhetjük így: $\alpha - \varphi,\ \alpha,\ \alpha + \varphi$.

A feladat feltétele szerint:

$$\sin(\alpha - \varphi) + \sin\alpha + \sin(\alpha + \varphi) = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}.$$

A háromszög belső szögeinek összege 180°, tehát $\alpha = 60^\circ$:

$$\sin 60^\circ \cdot \cos\varphi - \cos 60^\circ \cdot \sin\varphi + \sin 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos\varphi + \cos 60^\circ \cdot \sin\varphi = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2},$$

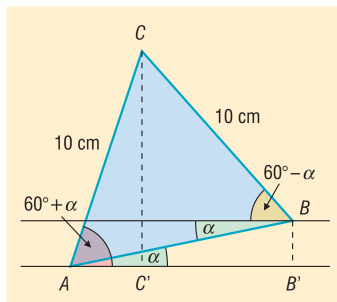
$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A φ szög hegyesszög, tehát $\varphi = 45^\circ$.

A háromszög szögei: 15°, 60° és 105°.

3372 A merőleges vetületek hossza nem változik, ha az egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk. A mellékelt ábrát tekintve az egyenes haladjon át az ABC háromszög A csúcsán, és az AB oldallal zárjon be α szöget.



A vetületek nagysága:

$$AB' = 10 \cdot \cos\alpha,$$
$$C'B' = 10 \cdot \cos(60^\circ - \alpha),$$
$$AC' = 10 \cdot \cos(60^\circ + \alpha).$$

Ezek négyzetösszege:

$$AB'^2 + B'C'^2 + C'A^2 = 10^2 \cdot \left(\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ - \alpha) + \cos^2(60^\circ + \alpha)\right).$$

Használva az addíciós tételt:

$$\cos^2(60^\circ - \alpha) = \left(\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \cos^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \frac{3}{4} \cdot \sin^2\alpha,$$

$$\cos^2(60^\circ + \alpha) = \left(\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \frac{3}{4} \cdot \sin^2\alpha.$$

Tehát:

$$AB'^2 + B'C'^2 + C'A^2 = 10^2 \cdot \left(\cos^2\alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos^2\alpha + \frac{3}{2} \cdot \sin^2\alpha\right) = \frac{300}{2} \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{300}{2}.$$

A vetületek négyzetösszege α szögtől függetlenül $\dfrac{300}{2} = 150\ \text{cm}^2$.

3373 Alakítsuk át az addíciós tétel segítségével a $\sin x + \cos x$ kifejezést:

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Mivel a $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ minimális értéke -1, maximális értéke 1:

$$-\sqrt{2} \le f(x) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}.$$

Az $f(x)$ függvény minimuma $-\sqrt{2}$, maximuma $\sqrt{2}$.
Minimális értékét azokon a helyeken veszi fel, ahol

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -1, \qquad \text{vagyis} \qquad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Maximális értékét azokon a helyeken veszi fel, ahol

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1, \qquad \text{vagyis} \qquad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

3374 Ha egy derékszögű háromszög átfogója 20 cm és egyik hegyesszöge α, akkor a befogói $20\cdot\sin\alpha$ és $20\cdot\cos\alpha$. A háromszög kerülete:

$$k = 20 + 20\cdot\sin\alpha + 20\cdot\cos\alpha = 20\cdot(1+\sin\alpha+\cos\alpha).$$

A 3373. feladat alapján a kerület maximális értéke: $20\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$.
Ezt a maximális értéket akkor veszi fel, ha $\alpha = 45°$, vagyis ha a háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

3375 Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x\right).$$

Mivel $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ és $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ négyzetösszege 1, létezik olyan φ szög, hogy:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \qquad \text{és} \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

Az addíciós tétel alapján:

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi).$$

Mivel a szinuszfüggvény minimális értéke -1, maximális értéke 1, az $f(x)$ függvény minimuma $-\sqrt{a^2+b^2}$, maximuma $\sqrt{a^2+b^2}$.
Minimális értékét ott veszi fel, ahol $\sin(x+\varphi) = -1$, maximális értékét pedig ott, ahol $\sin(x+\varphi) = 1$.

3376 Mivel $a^2+b^2 = 1$, létezik olyan x szög, hogy $a = \sin x$ és $b = \cos x$. Elég tehát a $\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x$ kifejezés szélsőértékeit keresni.
A 3373. feladat alapján:

$$\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x = \sin x\cdot(\sin x + \cos x) = \sin x\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\sin x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Két szög szinuszának szorzatát összeggé alakítva:

$$\sqrt{2}\cdot\sin x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}-x\right) - \cos\left(x+\frac{\pi}{4}+x\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Mivel a $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ minimális értéke -1, maximális értéke pedig 1:

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \le \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Az $a^2 + ab$ kifejezés minimuma $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, maximuma $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

A kifejezés a maximális értékét ott veszi fel, ahol

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor

$$a = \sin\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right), \quad b = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right).$$

Az a és b pontos értékének megadásához használjuk fel a $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ összefüggést:

$$\cos^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Ha k páros, akkor $\frac{3\pi}{8} + k\pi$ első negyedbeli szög:

$$b = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

valamint:

$$a = \sin\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right) = \sqrt{1-\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Ha k páratlan, akkor $\frac{3\pi}{8} + k\pi$ harmadik negyedbeli szög:

$$b = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

valamint:

$$a = \sin\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Az $a^2 + ab$ kifejezés maximumát a következő értékek esetén veszi fel:

$$a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ és } b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{vagy} \quad a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ és } b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

A kifejezés minimális értékét ott veszi fel, ahol

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{vagyis} \quad x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor:

$$a = \sin\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi\right), \quad b = \cos\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi\right).$$

Az előzőhöz hasonló módon:

$$\cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Ha k páros, akkor $-\frac{\pi}{8}+k\pi$ negyedik negyedbeli szög:

$$b=\cos\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

valamint:

$$a=\sin\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)=-\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Ha k páratlan, akkor $-\frac{\pi}{8}+k\pi$ második negyedbeli szög:

$$b=\cos\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

valamint:

$$a=\sin\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Az a^2+ab kifejezés minimumát a következő értékek esetén veszi fel:

$$a=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ és } b=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{vagy} \quad a=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ és } b=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

3377 Mivel háromszögről van szó:

$$\sin\alpha=\sin\big((180°-(\beta+\gamma)\big)=\sin(\beta+\gamma).$$

A $2\cdot\cos\gamma=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ egyenlőséget ennek figyelembevételével a következőképpen alakíthatjuk át:

$$2\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma=\sin(\beta+\gamma).$$

Alkalmazva az addíciós tételeket:

$$2\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma=\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta\cdot\sin\gamma,$$
$$\sin\beta\cdot\cos\gamma-\cos\beta\cdot\sin\gamma=0,$$
$$\sin(\beta-\gamma)=0.$$

Ez utóbbi egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\beta-\gamma=k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$. Mivel β és γ háromszög szögei, ezért $k=0$, ami azt jelenti, hogy $\gamma=\beta$. Tehát a háromszög egyenlő szárú.

3378 Két szög szinuszának és koszinuszának összegét alakítsuk szorzattá:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{és} \quad \cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ez alapján a feladatban szereplő egyenlőség a következőképpen alakítható át:

$$2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0.$$

Ez utóbbi szorzat kétféleképpen lehet 0.

I. Ha $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

Háromszögről lévén szó, ez egyetlen k értékre sem teljesülhet.

II. Ha $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0 \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

Mivel $0°<\alpha+\beta<180°$, $k=0$, vagyis $\alpha+\beta=90°$. Tehát a háromszög harmadik szöge 90°, vagyis derékszögű a háromszög.

Az összegzési képletek alkalmazásai – megoldások

3379 A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggések alapján:

a) $2\cdot\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg}x = 2\cdot\sin^2 x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x} = 2\cdot\sin x\cdot\cos x = \sin 2x;$

b) $2\cdot\cos^2 x\cdot\operatorname{tg}x = 2\cdot\cos^2 x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x} = \sin 2x;$

c) $\dfrac{\sin 2x}{\sin^2 x} = \dfrac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = 2\cdot\operatorname{ctg}x;$

d) $\dfrac{\cos 2x}{1+\cos 2x} = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2\cdot\cos^2 x} = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2\cdot\cos^2 x} =$

$= \dfrac{1}{\operatorname{tg}2x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x};$

e) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x\cdot\sin x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x\cdot\sin x}} = \dfrac{\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}x + \operatorname{tg}x}.$

f) $\operatorname{ctg}x - \sin 2x = \dfrac{\cos x}{\sin x} - 2\cdot\sin x\cdot\cos x = \dfrac{\cos x\cdot(1-2\cdot\sin^2 x)}{\sin x} = \operatorname{ctg}x\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x) =$

$= \operatorname{ctg}x\cdot\cos 2x;$

g) $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x} = \dfrac{2\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)}{2\cdot\sin x\cdot\cos x} = \dfrac{2}{\sin 2x};$

h) $4\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x = 2\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x = \sin 4x;$

i) $\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}} = \sqrt{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{2}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot\sin^2 x}{2}} = |\sin x|;$

j) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{2}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot\cos^2 x}{2}} = |\cos x|;$

k) $\operatorname{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2\cdot\cos^2 x} = \dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \dfrac{\sin 2x}{(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x)} =$

$= \dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x};$

l) $2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) = 2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x\right) =$

$= 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x) = 1 + \sin 2x;$

m) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cdot\sin x\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x+\frac{1}{2}\cdot\sin x\right)=\frac{3\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}{4}=$

$=\frac{3\cdot\cos^2 x\cdot\sin x-\sin^3 x}{4\cdot\sin x}=\frac{2\cdot\cos^2 x\cdot\sin x+\cos^2 x\cdot\sin x-\sin^3 x}{4\cdot\sin x}=$

$=\frac{\cos x\cdot(2\cdot\sin x\cdot\cos x)+\sin x\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)}{4\cdot\sin x}=\frac{\cos x\cdot\sin 2x+\sin x\cdot\cos 2x}{4\cdot\sin x}=\frac{\sin 3x}{4\cdot\sin x}.$

3380 A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggések alapján:

a) $\frac{\sin 2x}{2\cdot\cos x}=\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2\cdot\cos x}=\sin x;$

b) $2\cdot\sin^2 x+\cos 2x=2\cdot\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x=1;$

c) $\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}=\frac{(\cos x+\sin x)\cdot(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}=\cos x+\sin x;$

d) $\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x;$

e) $\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\cos 2x}=\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\cdot(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}=1;$

f) Mivel $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, a kifejezés egyszerűbb alakja:

$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin 2x=-\sin 2x;$

g) $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\sin^2 2x}=\frac{\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)}{4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{1}{4};$

h) $\frac{\sin 3x+\sin x}{2\cdot\cos x\cdot\sin 2x}=\frac{2\cdot\sin\frac{3x+x}{2}\cdot\cos\frac{3x-x}{2}}{2\cdot\cos x\cdot\sin 2x}=\frac{2\cdot\sin 2x\cdot\cos x}{2\cdot\cos x\cdot\sin 2x}=1;$

i) $\frac{\cos 3x-\cos x}{2\cdot\sin x\cdot\sin 2x}=\frac{-2\cdot\sin\frac{3x+x}{2}\cdot\sin\frac{3x-x}{2}}{2\cdot\sin x\cdot\sin 2x}=\frac{-2\cdot\sin 2x\cdot\sin x}{2\cdot\sin x\cdot\sin 2x}=-1.$

3381 Az addíciós tételeket használva:

a) $\operatorname{tg}15°=\operatorname{tg}(45°-30°)=\frac{\operatorname{tg}45°-\operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}30°}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$

$\operatorname{ctg}15°=\frac{1}{\operatorname{tg}15°}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3};$

b) $\operatorname{tg}75°=\operatorname{ctg}15°=2+\sqrt{3},$
$\operatorname{ctg}75°=\operatorname{tg}15°=2-\sqrt{3}.$

3382 Az addíciós tételeket használva:

$$a)\ \operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\right)^2=\left(\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}\right)^2=\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+1}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}\right)^2=\left(\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}\right)^2=$$

$$=\frac{\sin^2x+\cos^2x+2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin^2x+\cos^2x-2\cdot\sin x\cdot\cos x}=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x};$$

$$b)\ \operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{ctg}x-1}{\operatorname{ctg}x+1}=\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\sin x}}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)\cdot(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)\cdot(\cos x-\sin x)}=\frac{\sin^2x+\cos^2x-2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x};$$

$$c)\ \frac{1}{1+\operatorname{ctg}x}-\frac{1}{1-\operatorname{ctg}x}=\frac{1}{1+\frac{1}{\operatorname{tg}x}}-\frac{1}{1-\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+1}-\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x-1}=\frac{-2\cdot\operatorname{tg}x}{(\operatorname{tg}x+1)\cdot(\operatorname{tg}x-1)}=$$

$$=\frac{2\cdot\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\operatorname{tg}2x;$$

$$d)\ \operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=2\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=2\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=2\cdot\operatorname{ctg}x;$$

$$e)\ \frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1.$$

3383 Az addíciós tételeket használva:

$$a)\ \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{1-\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\right)^2}{1+\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\right)^2}=\frac{1-\left(\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^2}{1+\left(\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^2}=\frac{(1+\operatorname{tg}x)^2-(1-\operatorname{tg}x)^2}{(1+\operatorname{tg}x)^2+(1-\operatorname{tg}x)^2}=$$

$$=\frac{4\cdot\operatorname{tg}x}{2+2\cdot\operatorname{tg}^2x}=\frac{2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2x+\sin^2x}=\sin 2x;$$

$$b)\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\frac{2}{\cos 2x}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}-\frac{2}{\cos 2x}=$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}+\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}-\frac{2}{\cos 2x}=\frac{(1+\operatorname{tg} x)^2+(1-\operatorname{tg} x)^2}{1-\operatorname{tg}^2 x}-\frac{2}{\cos 2x}=$$

$$=\frac{2\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)}{1-\operatorname{tg}^2 x}-\frac{2}{\cos 2x}=-\frac{2\cdot(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}-\frac{2}{\cos^2 x-\sin^2 x}=0;$$

$$c)\ \operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1-2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=1.$$

3384 A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggések alapján:

$$a)\ \sin^4\frac{13\pi}{12}-\cos^4\frac{23\pi}{12}=\left(-\sin\frac{\pi}{12}\right)^4-\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^4=$$

$$=\left(\sin^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=-\cos 2\cdot\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$b)\ \cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{1}{2\cdot\sin 20^\circ}\cdot(2\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ)\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sin 20^\circ}\cdot\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{1}{4\cdot\sin 20^\circ}\cdot(2\cdot\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ)\cdot\cos 80^\circ=$$

$$=\frac{1}{4\cdot\sin 20^\circ}\cdot\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{1}{8\cdot\sin 20^\circ}\cdot\sin 160^\circ=\frac{1}{8}.$$

3385 A két adott kifejezést átírhatjuk:

$$A=\log_2 0{,}5^{\sin x}=\log_2 2^{-\sin x}=-\sin x,$$

$$B=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|.$$

a) $-1\le-\sin x\le 1$, tehát A minimális értéke –1, maximális értéke 1.

b) $0\le|\cos x|\le 1$, tehát B minimális értéke 0, maximális értéke 1.

c) $A + B = -\sin x + |\cos x|$ lehet:

$$A + B = -\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) = -\sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4} \right), \quad \text{ha} \quad \cos x \geq 0,$$

$$A + B = -\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) = -\sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4} \right), \quad \text{ha} \quad \cos x < 0.$$

Mivel a szinuszfüggvény minimális értéke –1, maximális értéke 1, mindkét esetben $A + B$ minimális értéke $-\sqrt{2}$, maximális értéke $\sqrt{2}$.

d) $A \cdot B = -\sin x \cdot |\cos x|$ lehet:

$$A \cdot B = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{2} \cdot \sin 2x, \quad \text{ha} \quad \cos x \geq 0,$$

$$A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x, \quad \text{ha} \quad \cos x < 0.$$

Mivel a szinuszfüggvény minimális értéke –1, maximális értéke 1, mindkét esetben $A \cdot B$ minimális értéke $-\frac{1}{2}$, maximális értéke $\frac{1}{2}$.

3386 A kétszeres szögek szinuszára vonatkozó összefüggés alapján tekintsük a következő egyenlőségeket:

$$\sin 12^\circ \cdot \cos 12^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 24^\circ, \qquad \sin 24^\circ \cdot \cos 24^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 48^\circ,$$

$$\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 72^\circ, \qquad \sin 48^\circ \cdot \cos 48^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 96^\circ,$$

$$\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 120^\circ, \qquad \sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 144^\circ,$$

$$\sin 84^\circ \cdot \cos 84^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 168^\circ.$$

Szorozzuk össze az egyenlőségek bal oldalait, illetve jobb oldalait, majd használjuk ki, hogy $\sin 96^\circ = \sin 84^\circ$, $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, $\sin 144^\circ = \sin 36^\circ$ és $\sin 168^\circ = \sin 12^\circ$. Ezek után éppen a bizonyítandó egyenlőséghez jutunk.

3387 *a)* Az addíciós tételeket használva:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\dfrac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

b) Az addíciós tételeket használva:

$$\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - 20^\circ) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + 20^\circ) =$$

$$= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} =$$

$$= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} = \sqrt{3} \cdot \frac{3 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg}^3 20^\circ}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 20^\circ}.$$

Ez utóbbi kifejezés az *a)* rész alapján:

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}(3 \cdot 20^\circ) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

3388 Legyen a háromszög 6,4 cm-es oldalával szemben levő szög α. A feladat feltétele szerint a 9,3 cm-es oldallal szemben levő szög 2α. Írjuk fel a háromszögben a szinusztételt:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{9{,}3}{6{,}4} \Rightarrow \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{9{,}3}{6{,}4} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{9{,}3}{12{,}8} \Rightarrow \alpha\approx 43{,}40^\circ \Rightarrow 2\alpha=86{,}80^\circ.$$

A harmadik, ismeretlen x hosszúságú oldallal szemben levő szög:

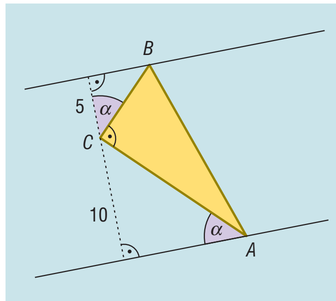
$$180^\circ-43{,}40^\circ-86{,}80^\circ=49{,}80^\circ.$$

Felírva a szinusztételelt:

$$\frac{x}{6{,}4}=\frac{\sin 49{,}8^\circ}{\sin 43{,}4^\circ} \qquad\Rightarrow\qquad x\approx 7{,}11.$$

A háromszög oldalainak hossza 6,4 cm, 9,3 cm és 7,11 cm, a velük szemben levő szögek rendre 43,40°, 86,80° és 49,80°.

3389 Az ábrán α-val jelölt szögek merőleges szárú hegyesszögek.



Az ABC derékszögű háromszög BC befogója $\frac{5}{\cos\alpha}$, az AC befogója $\frac{10}{\sin\alpha}$.

A háromszög területe:

$$T=\frac{\frac{5}{\cos\alpha}\cdot\frac{10}{\sin\alpha}}{2}=\frac{50}{2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=\frac{50}{\sin 2\alpha}.$$

Ez a pozitív előjelű kifejezés akkor minimális, ha $\sin 2\alpha$ maximális, vagyis 1. Mivel α csak hegyesszög lehet, ez csak $2\alpha=90^\circ$ esetén teljesül, azaz ha $\alpha=45^\circ$.

A háromszög területe akkor minimális, ha befogóinak hossza:

$$BC=\frac{5}{\cos 45^\circ}=5\cdot\sqrt{2}\text{ cm},\qquad\text{illetve}\qquad AC=\frac{10}{\cos 45^\circ}=10\cdot\sqrt{2}\text{ cm}.$$

Az átfogója Pitagorasz tétele alapján $5\cdot\sqrt{10}$ cm.

3390 A bizonyítandó egyenlőség bal oldalán álló törtet bővítsük $\sin(\alpha+\beta)$-val:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

A két szög szinuszának szorzatát összeggé alakítva:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\right]-\cos\left[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\right]\right)}{\sin^2(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

A kétszeres szög koszinuszára vonatkozó összefüggés ($\cos 2\alpha=1-2\cdot\sin^2\alpha$ és $\cos 2\beta=1-2\cdot\sin^2\beta$) alapján:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)}{\sin^2(\alpha+\beta)}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Mivel háromszögről van szó:

$$\sin\gamma = \sin\big((180° - (\alpha+\beta)\big) = \sin(\alpha+\beta),$$

így:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}.$$

A szinusztétel alapján:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

A bal oldalból kiindulva ekvivalens átalakítások során a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalához jutottunk, tehát bármely háromszögben igaz, hogy

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

3391 *a)* Alakítsuk át az $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}$ kifejezést a szinusztétel segítségével, majd használjuk ki, hogy mindkét oldal pozitív, a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}},$$

$$\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \sin^2\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\sin^2\alpha\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \sin^2\beta\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0,$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\beta\cdot\cos\beta) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség mivel $\sin\alpha$, illetve $\sin\beta$ nem lehet nulla, csak akkor teljesülhet, ha

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\beta\cdot\cos\beta,$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta.$$

Mivel háromszögről van szó, a 2α, illetve 2β szög szinusza csak abban a két esetben lehet egyenlő, ha

$$2\alpha = 2\beta \;\Rightarrow\; \alpha=\beta, \quad \text{vagy} \quad 2\alpha = 180° - 2\beta \;\Rightarrow\; \alpha+\beta = 90° \;\Rightarrow\; \gamma = 90°.$$

A háromszög tehát vagy egyenlő szárú, vagy derékszögű.

b) A háromszögben:

$$\sin\gamma = \sin\big((180° - (\alpha+\beta)\big) = \sin(\alpha+\beta) = \sin 2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$= 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Az ismert összefüggés alapján:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tehát a $\sin\gamma = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$ egyenlőséget a következő alakba írhatjuk:

$$2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2 \cdot \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}},$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \left(2 \cdot \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesülhet, ha:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \quad \text{vagy} \quad 2 \cdot \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1.$$

Az első esetben azt kapjuk, hogy $\alpha + \beta = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ez egyetlen háromszög esetén sem teljesülhet.

A második esetben:

$$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\left|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{vagy} \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Innen:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{vagy} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Mivel háromszögről van szó, csak az első eset jöhet szóba, ekkor $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Tehát a kérdéses háromszög derékszögű.

c) Alakítsuk szorzattá a $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$ összeget:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cdot \cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta).$$

Mivel α, β és γ háromszög szögei, az ismert trigonometrikus összefüggések alapján írjuk át $\cos 2\gamma$-t:

$$\cos 2\gamma = \cos 2 \cdot \left(180^\circ - (\alpha+\beta)\right) = \cos 2 \cdot (\alpha+\beta) = \cos^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha+\beta).$$

Az eredeti egyenlet jobb oldalán szereplő $-1 = -\cos^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha+\beta)$.

Ezek alapján az eredeti $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$ egyenlet a következőképpen alakul:

$$2 \cdot \cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha+\beta) = -\cos^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha+\beta),$$

$$2 \cdot \cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) + 2 \cdot \cos^2(\alpha+\beta) = 0,$$

$$2 \cdot \cos(\alpha+\beta) \cdot \left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right) = 0.$$

A $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$ összeget szorzattá alakítva:

$$2 \cdot \cos(\alpha+\beta) \cdot 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = 0,$$

$$2 \cdot \cos\gamma \cdot 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha vagy $\cos\gamma$, vagy $\cos\alpha$, vagy $\cos\beta$ nulla értéket vesz fel.

Mivel α és β háromszög szögei, ez csak akkor teljesülhet, ha a háromszög valamelyik szöge 90°, tehát a háromszög derékszögű.

Trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek – megoldások

3392 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x_1 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 \approx 1{,}18 + 2k\pi,\ x_2 \approx \pi - 1{,}18 + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

d) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

e) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

f) $x \approx \pm 1{,}00 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

g) $x \approx \pm 2{,}50 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

h) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

i) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

j) $x \approx 1{,}50 + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

k) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

l) $x \approx 0{,}75 + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

3393 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{6} + l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{17\pi}{12} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{7\pi}{12} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

d) $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

e) $x = \frac{\pi}{4} + 3k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

f) $x = \frac{1}{2} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

g) $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

h) $x = \frac{7\pi}{60} + \frac{1}{5} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

3394 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cdot k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi,\ x_2 = 3l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z})$, ami felírható $x = \frac{3}{2} k\pi\ (k, \in \mathbb{Z})$ alakban.

d) $x_1 = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{12} + l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

e) $x_1 = 2k\pi,\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

f) $x_1 = \frac{1}{2} \cdot k\pi,\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z}).$

3395 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = 2k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x_1 = -\frac{7\pi}{12} - 2k\pi,\ x_2 = \frac{11\pi}{36} + \frac{2}{3} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 = -\frac{4}{7} \cdot k\pi,\ x_2 = \frac{4}{9} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

d) $x_1 = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

e) $x = \frac{1}{4} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

f) $x = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

3396 *a)* Használjuk ki, hogy a szinuszfüggvény páratlan:

$$x_1 = -\frac{\pi}{21} + \frac{2}{7} \cdot k\pi, \quad x_2 = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Használjuk ki, hogy $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$:

$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} - 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}),$ ami felírható $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ alakban.

c) Használjuk ki, hogy $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-x)$, és hogy a szinuszfüggvény páratlan:

$$x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

d) Használjuk ki, hogy $\cos(x + \pi) = -\cos x$. A megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{32} + \frac{1}{4} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

e) A megoldások:

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{6} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

f) Használjuk ki, hogy $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. A megoldások:

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3397 Hozzuk $\operatorname{tg} x = c$ alakra az egyenleteket.

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

b) $x \approx -0{,}32 + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

c) $x \approx 0{,}30 + \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

d) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

3398 Használjuk ki, hogy $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, valamint azt, hogy a szinuszfüggvény páratlan.

a) $x = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z});$ *b)* $x_1 = \frac{19\pi}{72} - \frac{1}{3} \cdot k\pi,\ x_2 = \frac{13\pi}{24} + l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z});$

3399 Másodfokú egyenletre visszavezethetők a trigonometrikus egyenletek.

a) A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = -6, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások közül a $[0;\, 2\pi]$ intervallumba az $x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{5\pi}{6}$ gyökök esnek.

b) A megoldóképlet alapján:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\cos x = 3, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások közül a $[0;\, 2\pi]$ intervallumba az $x_1 = \frac{2\pi}{3},\ x_2 = \frac{4\pi}{3}$ gyökök esnek.

c) A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = -\sqrt{3}, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások közül a $[0;\, 2\pi]$ intervallumba az $x_1 = \frac{\pi}{3},\ x_2 = \frac{2\pi}{3}$ gyökök esnek.

d) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A megoldóképlet alapján:

$$\operatorname{tg} x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \approx 1{,}25 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások közül a $[0;\, 2\pi]$ intervallumba az $x_1 \approx 1{,}25,\ x_2 \approx 1{,}25 + \pi,\ x_3 = \frac{\pi}{4},\ x_4 = \frac{5\pi}{4}$ gyökök esnek.

3400 A feladatokban használjuk a trigonometrikus összefüggéseket.

a) Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet ilyen alakba is írható: $\sin^2 x + 2 \cdot \sin x - 3 = 0.$

A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = -3, \text{ ami nem lehet.}$$

b) Mivel $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, az egyenlet ilyen alakba is írható: $2 \cdot \cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$

A megoldóképlet alapján:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \pi + 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

c) A tangensfüggvény értelmezési tartományából $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Mivel $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, valamint $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet ilyen alakra is hozható: $\sin^2 x + 2 \cdot \sin x - 1 = 0$.
A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = -1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \approx 0{,}43 + 2k\pi,\ x_2 \approx \pi - 0{,}43 + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = -1 - \sqrt{2} < 1, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldás beletartozik a tangensfüggvény értelmezési tartományába.

d) Az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ekvivalens átalakítások után az egyenlet a következő alakra hozható: $2 \cdot \cos^2 x = 1$.
Innen a megoldás:

$$|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

A megoldás az értelmezési tartománynak megfelel.

e) A tangensfüggvény értelmezési tartományából $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ekvivalens átalakítások után az egyenlet $6 \cdot \cos^2 x + \sqrt{3} \cdot \cos x - 6 = 0$ alakra hozható.
Innen a megoldás:

$$\cos x = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} < -1, \text{ ami nem lehet,} \quad \text{vagy}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezek a megoldások a az értelmezési tartománynak nem mondanak ellent.

f) Az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ Ekvivalens átalakítások után az egyenlet a következő alakra hozható: $\operatorname{tg}^2 x - 2 \cdot \operatorname{tg} x - 1 = 0$.
Innen a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$\operatorname{tg} x = 1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \approx 1{,}18 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \approx -0{,}39 + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

g) Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\cos^2 x$-szel (a $\cos x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, mert $\sin x$ és $\cos x$ egyszerre nem lehet 0):

$$2 \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 1 = 0,$$

$$2 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 3 \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \approx 0{,}46 + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

h) A *g)* rész gondolatmenete alapján:

$$2 \cdot \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 1 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$\mathrm{tg}\, x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \approx -0{,}46 + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

3401 *a)* Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Ekvivalens átalakítások után a $\sin x \cdot \left(2 \cdot \cos x - \sqrt{3}\right) = 0$ egyenletet kapjuk. Innen:

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

b) Az egyenletet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon oldjuk meg. Átalakítások után a következő alakhoz jutunk: $\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ahonnan az $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ megoldásokhoz jutunk.
A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

c) Egy tört akkor nulla, ha:

$$\text{a számlálója } 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\, x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx -1{,}11 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Bontsuk fel az abszolút értéket, és osszuk el $\cos x$-szel ($\cos x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, mert $\sin x$ és $\cos x$ egyszerre nem vehet fel 0 értéket).

Ha $\cos x > 0$, akkor az egyenlet $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ alakba írható. Ennek megoldása $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, de $\cos x > 0$ miatt csak az első negyedbeli szög megoldás: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\cos x < 0$, akkor az egyenlet $\mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ alakba írható. Ennek megoldása $x = \frac{5\pi}{6} + l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$, de $\cos x < 0$ miatt csak a második negyedbeli szög megoldás: $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$.

3402 *a)* Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Átszorzás után:

$$\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1,$$

$$\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesülhet, ha

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \approx 0{,}46 + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

Az egyenlet pozitív megoldásai: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right)$ és $x_2 \approx 0{,}46 + l\pi \left(l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right)$.

b) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Redukáljuk nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá:

$$\sin x - \cos x + 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0,$$

$$(\sin x - \cos x) + 2 \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} = 0,$$

$$(\sin x - \cos x) \cdot \left(1 + \frac{2}{\cos x}\right) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség csak akkor teljesül, ha a szorzótényezők valamelyike 0.
Ha az első tényező 0:

$$\sin x - \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

A második tényező akkor 0, ha $\cos x$ értéke -2, ez nem lehet.
A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.
Az egyenlet pozitív megoldásai: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}\right)$.

3403 Vizsgáljuk az adott egyenletek jobb és bal oldalának értékkészletét.

a) Az egyenletnek nincs megoldása, mivel a bal oldal csak 8-nál kisebb értéket vehet fel.

b) A bal oldal értéke legalább 1, mivel:

$$-1 \le \sin x \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \sin^2 x \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le 2^{\sin^2 x} \le 2.$$

A jobb oldal a koszinuszfüggvény értékkészlete miatt legfeljebb 1.
Így az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldal 1 értéket vesz fel, azaz ha:

$$\cos x = 1 \quad \text{és} \quad 2^{\sin^2 x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = 0.$$

Az egyenlet megoldása: $x = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

3404 *a)* Az addíciós tétel alapján az egyenlet a következő alakba írható:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x\right) = \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot \sin x, \qquad \text{amiből} \qquad \cos x = \sin x.$$

Az utóbbi egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Használjuk az addíciós tételeket:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 3x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \cos 3x \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 3x,$$

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin 3x \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 3x.$$

Ezek alapján a megoldandó egyenlet:

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 3x + \frac{1}{2} \cdot \cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 3x = 0.$$

Mivel $\cos 3x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, az egyenletet $\operatorname{tg} 3x$-re rendezve kapjuk, hogy:

$$\operatorname{tg} 3x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A bal oldalon álló kifejezéseket írjuk át az addíciós tételek segítségével, majd végezzük el az összevonásokat:

$$\sqrt{2} \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x},$$
$$\sqrt{2} \cdot \cos^2 x = \sin x,$$
$$\sqrt{2} \cdot \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0.$$

Innen a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$
$$\sin x = -\sqrt{2}, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

d) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A bal oldalon álló kifejezéseket írjuk át az addíciós tételek segítségével, majd végezzük el az összevonásokat:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin^2 x = \cos x,$$
$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos^2 x + \cos x - 2 \cdot \sqrt{3} = 0.$$

Innen a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$
$$\sin x = -\frac{2}{\sqrt{3}} < -1, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

3405 Alkalmazzuk az $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ típusú egyenletek megoldási módszerét: osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{a^2 + b^2}$-tel, majd használjunk addíciós tételt.

a) Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$-vel:

$$\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az addíciós tételt használva:

$$\sin x \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

amelynek megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$$

b) A megoldások:

$$x_1 \approx -0{,}44 + 2k\pi, \quad x_2 \approx 2{,}30 + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3406 Az egyenlet megoldási lépései:

$$\sin(\pi \cdot \cos x) = \cos(\pi \cdot \sin x),$$

$$\sin(\pi \cdot \cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin x\right).$$

I. eset:

$$\pi \cdot \cos x = \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin x + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos x + \sin x = \frac{1}{2} + 2k, \qquad /\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot k,$$

$$-1 \le \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}k \le 1.$$

$$\Downarrow$$

Az egyenlőtlenségek csak $k = 0$ esetén teljesülnek:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$x_1 \approx \pm 1{,}21 + \frac{\pi}{4} + 2n\pi \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\pi \cdot \cos x = \pi - \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \sin x + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{2} + 2l, \qquad /\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot l,$$

$$-1 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot l \le 1.$$

$$\Downarrow$$

Az egyenlőtlenségek csak $l = 0$ esetén teljesülnek:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$x_2 \approx \pm 1{,}21 - \frac{\pi}{4} + 2m\pi \ \ (m \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 \approx \pm 1{,}21 + \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{és} \quad x_2 \approx \pm 1{,}21 - \frac{\pi}{4} + 2m\pi \quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

3407 *a)* Használjuk a kétszeres szögekre vonatkozó összefüggéseket, illetve a szögfüggvényekre érvényes pitagoraszi összefüggést:

$$\sin^2 x - \cos 2x = 2 - \sin 2x,$$
$$2\cdot\sin^2 x - \cos^2 x = 2\cdot\sin^2 x + 2\cdot\cos^2 x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x,$$
$$0 = 3\cdot\cos^2 x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x,$$
$$0 = \cos x\cdot(3\cdot\cos x - 2\cdot\sin x).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$\cos x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z}),\qquad \text{vagy}$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x_2 \approx 0{,}98 + l\pi\ (l\in\mathbb{Z}).$$

b) Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\cos^2 x$-szel (megtehetjük, mert $\cos x = 0$ nem megoldása az egyenletnek).

A $\operatorname{tg}^2 x + \left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ egyenletet megoldva:

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z}),\qquad \text{vagy}$$
$$\operatorname{tg} x = -1 \quad\Leftrightarrow\quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + l\pi\ (l\in\mathbb{Z}).$$

c) Az egyenlet jobb oldalán álló 2-t írjuk fel $2\cdot\sin^2 x + 2\cdot\cos^2 x$ alakban, majd redukáljuk 0-ra az egyenletet. Így a *b)* részben alkalmazott módszert alkalmazva $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$ egyenlethez jutunk.

Az egyenlet megoldásai:

$$\operatorname{tg} x = -2 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 \approx -1{,}11 + k\pi\ (k\in\mathbb{Z}),\qquad \text{vagy}$$
$$\operatorname{tg} x = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi\ (l\in\mathbb{Z}).$$

d) A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggés alapján az egyenlet:

$$12\cdot\sin^4 x + 4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x = \cos^4 x.$$

A *b)* részben alkalmazott módszert alkalmazva: $12\cdot\operatorname{tg}^4 x + 4\cdot\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0.$

A másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet megoldva adódik, hogy:

$$\operatorname{tg}^2 x = -\frac{1}{2},\ \text{ami nem lehet,}\quad \text{vagy}$$
$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{6} \quad\Leftrightarrow\quad x \approx \pm 0{,}39 + l\pi\ (l\in\mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldása: $x \approx \pm 0{,}39 + l\pi\ (l\in\mathbb{Z})$.

e) Mivel

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2},$$

a $\sin^2 2x = 1$ egyenletet kell megoldanunk.

A megoldás:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

f) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\sin x + \cos x = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \cos x, \quad / : \sqrt{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x.$$

Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

g) Az egyenlet mindkét oldalát 2-vel osztva, majd alkalmazva a $\sin(\alpha + \beta)$-ra vonatkozó addíciós tételt:

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 4x = \sin 3x,$$

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 3x.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha:

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{21} + \frac{2}{7} \cdot l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z}).$$

h) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A bal oldalt alakítva:

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

A jobb oldalt $16 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)$ alakba írva a megoldandó egyenlet:

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 16 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x),$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - 16\right) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha:

$$\operatorname{tg}^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \qquad \text{vagy}$$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

i) Az egyenletet 2-vel osztva, majd használva a $\sin(\alpha - \beta)$-ra vonatkozó addíciós tételt, a következő egyenlethez jutunk:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 3x = 1.$$

Mivel a szinuszfüggvény 1-nél nagyobb értéket, illetve –1-nél kisebb értéket nem vehet fel, ez utóbbi egyenlőség két esetben teljesül.

I. eset: $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ és $\sin 3x=1.$

Az első összefüggésből:

$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}),$$

a másodikból:

$$3x=\frac{\pi}{2}+2l\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\cdot l\pi \ (l\in\mathbb{Z}).$$

Ezek alapján k és l egész számokra teljesülnie kell az alábbi egyenlőségnek:

$$\frac{5\pi}{6}+2k\pi=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\cdot l\pi.$$

Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $l = 1 + 3k$, tehát az eredeti egyenletünk megoldása:

$$x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\cdot(1+3k)\cdot\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$$

II. eset: $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ és $\sin 3x=-1.$

Az első összefüggésből:

$$x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{\pi}{6}+2n\pi \ (n\in\mathbb{Z}),$$

a másodikból:

$$3x=\frac{3\pi}{2}+2m\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\cdot m\pi \ (m\in\mathbb{Z}).$$

Ezek alapján n és m egész számokra teljesülnie kell az alábbi egyenlőségnek:

$$-\frac{\pi}{6}+2n\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\cdot m\pi.$$

Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $m = 3n - 1$, tehát az eredeti egyenletünk megoldása:

$$x_2=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\cdot(3n-1)\cdot\pi=-\frac{\pi}{6}+2n\pi \ (n\in\mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad\text{és}\quad x_2=-\frac{\pi}{6}+2n\pi \ (k,n\in\mathbb{Z}),\text{ ami } x=\frac{5\pi}{6}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \text{ alakban is írható.}$$

j) Az egyenlet az $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$ $(k\in\mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A nullától különböző valós szám és reciproka összegére ismert egyenlőtlenség miatt:

$$|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|=\left|\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right|\ge 2,$$

tehát az egyenlet jobb oldalának értékészlete $]-\infty; -10] \cup [10; \infty[$.

A szinuszfüggvény alapján az egyenlet bal oldalának értékkészlete a $[-2; 2]$ intervallum.

Mivel a jobb és bal oldal értékkészlet halmazának a metszete üres halmaz, az egyenletnek nincs megoldása.

3408 *a)* Alakítsuk szorzattá az egyenlet mindkét oldalát:

$$\sin 2x - \sin x = 2\cdot\cos\frac{2x+x}{2}\cdot\sin\frac{2x-x}{2} = 2\cdot\cos\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2},$$

$$\cos 2x - \cos x = -2\cdot\sin\frac{2x+x}{2}\cdot\sin\frac{2x-x}{2} = -2\cdot\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}.$$

Az egyenletet nullára redukálva, majd szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)=0.$$

Innen vagy $\sin\frac{x}{2}=0$, vagy $\operatorname{tg}\frac{3x}{2}=-1$. Az egyenlet megoldásai a $[0;\,2\pi]$ intervallumon:

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{\pi}{2},\quad x_3=\frac{7\pi}{6},\quad x_4=\frac{11\pi}{6}\quad \text{és}\quad x_5=2\pi.$$

b) Alakítsunk alkalmasan szorzattá:

$$\cos x+\cos 3x = 2\cdot\cos\frac{x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2} = 2\cdot\cos 2x\cdot\cos(-x) = 2\cdot\cos 2x\cdot\cos x,$$

$$\cos 2x+\cos 4x = 2\cdot\cos\frac{2x+4x}{2}\cdot\cos\frac{2x-4x}{2} = 2\cdot\cos 3x\cdot\cos(-x) = 2\cdot\cos 3x\cdot\cos x.$$

Ezeket felhasználva, az egyenletet nullára redukálva, majd szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$2\cdot\cos x\cdot(\cos 2x+\cos 3x)=0.$$

Újabb szorzattá alakítás után:

$$2\cdot\cos x\cdot 2\cdot\cos\frac{2x+3x}{2}\cdot\cos\frac{2x-3x}{2}=0,$$

$$4\cdot\cos x\cdot\cos\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0.$$

Az egyenlet megoldásai a valós számok halmazán:

$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad x_2=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\cdot l\pi,\quad x_3=\pi+2m\pi\quad (k, l, m\in\mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai a $[0;\,2\pi]$ intervallumon:

$$x_1=\frac{\pi}{5},\quad x_2=\frac{\pi}{2},\quad x_3=\frac{3\pi}{5},\quad x_4=\pi,\quad x_5=\frac{3\pi}{2},\quad x_6=\frac{7\pi}{5}\quad\text{és}\quad x_7=\frac{9\pi}{5}.$$

3409 *a)* Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést átalakítva az $|\sin x| = 1-\sin|x|$ egyenletet kell megoldanunk.

Mivel mind a bal, mind a jobb oldalon álló függvény páros, ha egy valós szám megoldása az egyenletnek, akkor az ellentettje is megoldás lesz.

Elég a megoldásokat $x\ge 0$ esetén keresnünk. Ekkor $|\sin x| = 1-\sin x$.

Ha $\sin x\ge 0$, akkor az egyenlet:

$$2\cdot\sin x=1\quad\Leftrightarrow\quad x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ x_2=\frac{5\pi}{6}+2l\pi\ \left(k, l\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\right).$$

Ha $\sin x<0$, akkor ellentmondásra jutunk.

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\quad x_2=\frac{5\pi}{6}+2l\pi,\quad x_3=-\frac{\pi}{6}-2k\pi,\quad x_4=-\frac{5\pi}{6}-2l\pi\quad\left(k, l\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\right).$$

b) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.
Bontsuk fel a jobb oldalon álló abszolútértéket tartalmazó kifejezést:

$$\left|x-\frac{\pi}{2}\right|-\left|x+\frac{\pi}{2}\right|=\begin{cases}\pi, & \text{ha} \quad x<-\dfrac{\pi}{2},\\ -2x, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ -\pi, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2}\le x.\end{cases}$$

Ez alapján:
Ha $x<-\frac{\pi}{2}$, akkor

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_1=\frac{\pi}{3}+k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z}^-).$$

Ha $-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}$, akkor

$$\operatorname{ctg} x=-\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\pi}\cdot x,$$

amelynek az adott intervallumon nem lehet megoldása, mert a jobb és bal oldal előjele különböző.

Ha $\frac{\pi}{2}\le x$, akkor

$$\operatorname{ctg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_2=-\frac{\pi}{3}+l\pi \ \ (l\in\mathbb{Z}^+).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1=\frac{\pi}{3}+k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z}^-) \quad \text{és} \quad x_2=-\frac{\pi}{3}+l\pi \ \ (l\in\mathbb{Z}^+).$$

Ezek a megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

3410 *a)* Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Ekvivalens átalakítások után:

$$16^{\operatorname{tg}^2 x}-4^{\operatorname{tg}^2 x+1}=192,$$
$$\left(4^{\operatorname{tg}^2 x}\right)^2-4\cdot 4^{\operatorname{tg}^2 x}-192=0.$$

A kapott másodfokúra visszavezethető egyenletet megoldva:

$4^{\operatorname{tg}^2 x}=-12$, ami nem lehet, vagy

$4^{\operatorname{tg}^2 x}=16 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2 x=2 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x=\pm\sqrt{2}$, amiből $x\approx\pm 0{,}96+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Az $x\approx\pm 0{,}96+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

b) A bal oldalon álló logaritmikus kifejezések akkor vannak értelmezve, ha $\sin x$ és $\cos x$ pozitív értéket vesz fel, és egyik sem 1. Az egyenlet megoldásait tehát az $\left]2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$ intervallumokon kell keresnünk.
A logaritmusra vonatkozó azonosságok alapján:

$$\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2,$$
$$\frac{1}{\log_{\sin x}\cos x}+\log_{\sin x}\cos x=2.$$

Ismert, hogy nullától különböző valós szám és reciproka összegének abszolút értéke nagyobb egyenlő mint 2, valamint az összeg csak abban az esetben lehet 2, ha a valós szám éppen 1.

Az egyenlet megoldását tehát a $\log_{\sin x} \cos x = 1$ egyenlet szolgáltatja.

Innen $\sin x = \cos x$ adódik, amelyet az alaphalmaz elemei közül csak az $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ valós számok elégítenek ki.

Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

3411 Először adjuk meg azt az alaphalmazt, amelyen a megadott egyenlőség értelmezve van:

$$x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \Rightarrow \ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{illetve} \quad \frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \ \Rightarrow \ x \neq -l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Az addíciós tétel alapján az egyenlet bal oldala $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$, de ezt csak akkor írhatjuk fel, ha $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ismert, hogy $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, tehát az adott egyenlet a következő alakba is írható:

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 1 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \ \Rightarrow \ x \approx 0{,}32 + m\pi \ (m \in \mathbb{Z}).$$

Ha $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, akkor ez megoldása az egyenletnek, mivel a bal oldal:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

és a jobb oldal:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - n\pi\right) - 1 = -1.$$

Az egyenlet megoldásai az alaphalmazon:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x_2 \approx 0{,}32 + m\pi \ (m \in \mathbb{Z}).$$

3412 A másodfokúra visszavezethető egyenlet diszkriminánsa:

$$D = 4 \cdot (p + 1)^2 - 16p = 4 \cdot p^2 - 8p + 4 = 4 \cdot (p - 1)^2.$$

A megoldóképletet használva:

$$\sin x_{1,2} = \frac{2 \cdot (p + 1) \pm 2 \cdot |p - 1|}{2} = \frac{2 \cdot (p + 1) \pm 2 \cdot (p - 1)}{2},$$

ahonnan

$\sin x = 2$, ami egyetlen x-re sem teljesülhet, vagy

$\sin x = 2p$.

Figyelembe véve, hogy

$$-1 \leq \sin x = 2p \leq 1,$$

az egyenletnek akkor lesz megoldása, ha:

$$-\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{1}{2}.$$

3413 Az adott intervallumon az $x = 0$ helyen az egyenlet nincs értelmezve.
Mivel

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\cdot\sin^2 x + 2\cdot\cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x =$$
$$= \operatorname{tg}^2 x + 2\cdot\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2,$$

az egyenlet $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$-re nézve másodfokú. Legyen $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = a.$

Az egyenlet a következő alakba írható:

$$a^2 - 4ma + 3m^2 = 0.$$

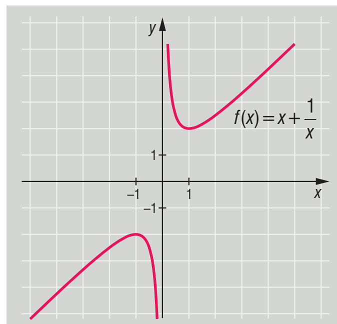
Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = 16m^2 - 12m^2 = 4m^2 \quad\Leftrightarrow\quad a_{1,2} = \frac{4m \pm 2|m|}{2} = \frac{4m \pm 2m}{2} \quad\Rightarrow\quad a_1 = 3m,\ a_2 = m.$$

Ez alapján $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = m$ és $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = 3m$ egyenletek megoldásainak számát kell vizsgálnunk m függvényében a $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ intervallumon.

A $\operatorname{tg} x$ függvény kölcsönösen egyértelmű a $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ intervallumon, és értékkészlete a valós számok halmaza.

Ezeket figyelembe véve az $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ függvény grafikonja alapján a következő megállapításokat tehetjük.



Az adott intervallumon a $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$ egyenletnek

- két megoldása van, ha $|m| > 2$,
- egy megoldása van, ha $|m| = 2$,
- nincs megoldása, ha $|m| < 2$.

Az adott intervallumon a $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3m$ egyenletnek

- két megoldása van, ha $|3m| > 2 \Leftrightarrow |m| > \dfrac{2}{3}$,
- egy megoldása van, ha $|3m| = 2 \Leftrightarrow |m| = \dfrac{2}{3}$,
- nincs megoldása, ha $|3m| < 2 \Leftrightarrow |m| < \dfrac{2}{3}$.

Tehát az egyenletnek

- nincs megoldása, ha $|m| < \dfrac{2}{3}$,
- egy megoldása van, ha $|m| = \dfrac{2}{3}$,
- két megoldása van, ha $\dfrac{2}{3} < |m| < 2$,
- három megoldása van, ha $|m| = 2$,
- négy megoldása van, ha $|m| > 2$.

3414 *a)* Az első egyenletből y-t kifejezve, majd beírva a másodikba:

$$\sin x = \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$
$$\sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x.$$

Mivel a $\cos x \neq 0$, ezért $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Ez alapján az egyenletrendszer megoldásai:

$$\left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} - k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Az első egyenletből $\sin x = -\cos y$, ezt beírva a második egyenletbe kapjuk, hogy:

$$\cos y \cdot \sin y = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{4} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt visszaírva az első összefüggésbe, ha

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + 2l\pi, \quad \text{akkor} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{vagy} \quad x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2m\pi,$$
$$y_2 = \frac{5\pi}{4} + 2l\pi, \quad \text{akkor} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{vagy} \quad x_4 = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi.$$

Az egyenletrendszer megoldásai a valós számok halmazán a következő számpárok $(l, m, n \in \mathbb{Z})$:

$$\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi; \frac{\pi}{4} + 2l\pi\right), \quad \left(\frac{7\pi}{4} + 2m\pi; \frac{\pi}{4} + 2l\pi\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \frac{5\pi}{4} + 2l\pi\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4} + 2m\pi; \frac{5\pi}{4} + 2l\pi\right).$$

c) Kihasználva, hogy az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű:

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x + \cos 2y &= 0 \\ 2 \cdot \cos x \cdot \cos y &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenlet bal oldalát alakítsunk szorzattá:

$$\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = 0.$$

A második egyenlet bal oldalát alakítsuk összeggé:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 1.$$

Az első egyenlet bal oldalán lévő szorzat két esetben lehet 0.

I. eset:

$$\cos(x + y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$0 + \cos(x - y) = 1 \quad \Rightarrow \quad x - y = 2n\pi \;\; (n \in \mathbb{Z}).$$

Így az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - y &= 2n\pi \end{aligned}\right\}.$$

Innen:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{k}{2} + n\right) \cdot \pi, \qquad y_1 = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{k}{2} - n\right) \cdot \pi.$$

II. eset:

$$\cos(x-y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-y=\frac{\pi}{2}+l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$\cos(x+y)+0=1 \quad \Rightarrow \quad x+y=2m\pi \ (m \in \mathbb{Z}).$$

Így az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\frac{\pi}{2}+l\pi \\ x+y&=2m\pi \end{aligned}\right\}.$$

Innen:

$$x_2=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{l}{2}+m\right)\cdot\pi, \qquad y_2=-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{l}{2}-m\right)\cdot\pi.$$

A feladat megoldásai (k, l, m, $n \in \mathbb{Z}$):

$$x_1=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{k}{2}+n\right)\cdot\pi, \qquad y_1=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{k}{2}-n\right)\cdot\pi,$$

$$x_2=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{l}{2}+m\right)\cdot\pi, \qquad y_2=-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{l}{2}-m\right)\cdot\pi.$$

3415 *a)* Az x-re másodfokúnak tekinthető egyenletnek csak akkor van valós megoldása, ha diszkriminánsa nem negatív:

$$D=4\cdot\sin^2 xy-4=4\cdot(\sin^2 xy-1)\ge 0.$$

Mivel $\sin^2 xy$ legfeljebb 1 értéket vehet fel, a diszkrimináns pozitív nem lehet.

Tehát, hogy legyen megoldás, a diszkriminánsnak 0-nak kell lennie. Ebben az esetben $\sin xy=1$ vagy $\sin xy=-1$.

Ha $\sin xy=1$, akkor az egyenlet megoldása:

$$x^2+2x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \quad \Rightarrow \quad \sin xy=\sin(-y)=1 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ha $\sin xy=-1$, akkor az egyenlet megoldása:

$$x^2-2x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \quad \Rightarrow \quad \sin xy=\sin y=-1 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{3\pi}{2}+2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai az $\left(1;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$ és $\left(-1;\frac{3\pi}{2}+2l\pi\right)$ számpárok, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.

b) Ismert, hogy egy 0-tól különböző valós szám és reciproka összegének abszolút értéke legalább 2. Az összeg 2 értéket csak akkor vesz fel, ha a valós szám 1, illetve –2 értéket akkor, ha a valós szám –1.

Figyelembe véve a koszinuszfüggvény értékkészletét, $\cos y$ értéke 1 vagy –1 lehet.

Ha $\cos y=1$, akkor

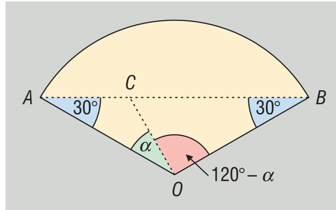
$$y=2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x=1.$$

Ha $\cos y=-1$, akkor

$$y=\pi+2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x=-1.$$

Az egyenlet megoldásai az $(1;\,2k\pi)$ vagy $(-1;\,\pi+2l\pi)$ számpárok, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.

3416 A körcikkhez tartozó kör középpontja legyen O, az AB húrt a C pont ossza két részre úgy, hogy $AC:CB = 1:2$.



Mivel az AOB háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárszöge 120°, $OAB\sphericalangle = OBA\sphericalangle = 30°$.

Legyen $AOC\sphericalangle = \alpha$, ekkor $BOC\sphericalangle = 120° - \alpha$.

Írjuk fel az AOC, illetve BOC háromszögekben a szinusztételt:

$$\frac{AC}{CO} = \frac{\sin\alpha}{\sin 30°}, \quad \text{illetve} \quad \frac{CB}{CO} = \frac{\sin(120° - \alpha)}{\sin 30°}.$$

A két egyenletet egymással elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\sin\alpha}{\sin(120° - \alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sin(120° - \alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\alpha = \sin(120° - \alpha).$$

Az addíciós tételt használva:

$$2\sin\alpha = \sin 120° \cdot \cos\alpha - \cos 120° \cdot \sin\alpha,$$

$$2\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$\frac{3}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha.$$

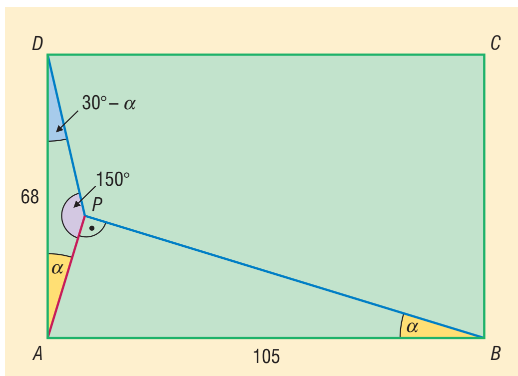
Mivel $\cos\alpha = 0$ nem megoldása az egyenletnek:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Az egyenlőség megoldása a 120°-nál kisebb pozitív szögeket tekintve: $\alpha = 30°$.

A két részszög nagysága 30° és 90°.

3417 A focista tartózkodjon a P pontban, és a pálya AB oldala legyen 105 m, az AD oldala 68 m hosszú.



Jelölje az ABP szöget α. Ekkor a P-nél lévő szögek nagyságát figyelembe véve:

$$PAD\sphericalangle = \alpha \quad \text{és} \quad PDA\sphericalangle = 30° - \alpha.$$

Az ABP derékszögű háromszögben:

$$\frac{PA}{105} = \sin\alpha,$$

amiből

$$PA = 105 \cdot \sin\alpha.$$

Az APD háromszögben felírva a szinusztételt:

$$\frac{PA}{68} = \frac{\sin(30° - \alpha)}{\sin 150°}.$$

Behelyettesítve az ismert értékeket:

$$\frac{PA}{68} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad PA = 68 \cdot \cos\alpha - 68 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\alpha.$$

A két összefüggésből a következő trigonometrikus egyenlethez jutunk:

$$105 \cdot \sin\alpha = 68 \cdot \cos\alpha - 68 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\alpha.$$

Ezt megoldva:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{68}{105 + 68 \cdot \sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 16{,}97^\circ.$$

Az APD háromszög A csúcsánál lévő szög $16{,}97^\circ$, a D csúcsnál lévő szög $30^\circ - 16{,}97^\circ = 13{,}03^\circ$, ezért $PA < PD$, tehát a PA távolságot kell meghatároznunk.

A focistának a P ponttól az A csúcsig $105 \cdot \sin 16{,}97^\circ \approx 30{,}6$ m távolságot kell megtennie.

Trigonometrikus egyenlőtlenségek – megoldások

3418 *a)* $2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

b) $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

c) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

d) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

e) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

f) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

g) $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

h) $\frac{\pi}{6} + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

i) $\frac{3\pi}{4} + k\pi \le x < \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

3419 *a)* $-\frac{3\pi}{8} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{8} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

b) $\frac{7\pi}{3} + 4k\pi \le x \le 5\pi + 4k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

c) $\frac{7\pi}{36} + \frac{1}{3} \cdot k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

d) $k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

e) $\frac{7\pi}{12} + k\pi \le x \le \frac{4\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} \ (k \in \mathbb{Z})$;

g) $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

h) Az egyenlőtlenség $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ alakba írható. Megoldása: $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

3420 *a)* Az egyenlőtlenséget azok a valós x számok elégítik ki, amelyekre $\operatorname{tg} x > 1$ vagy $\operatorname{tg} x < -1$. Az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{vagy} \quad \frac{\pi}{2} + l\pi < x < \frac{3\pi}{4} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

b) Az egyenlőtlenség minden valós számra igaz, mert $\frac{\pi}{3} > 1$.

c) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \ (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

Legyen $\operatorname{tg} x = a$, és ekkor az $a^2 + a - 2 > 0$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Ennek megoldásai: $a < -2$ vagy $a > 1$.

Az eredeti egyenlőtlenséget azok az x valós számok elégítik ki, amelyekre $\operatorname{tg} x < -2$ vagy $\operatorname{tg} x > 1$.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -1{,}11 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{vagy} \quad \frac{\pi}{4} + l\pi < x < \frac{\pi}{2} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

d) A *c)* részhez hasonló gondolatmenet alapján az egyenlőtlenséget azok a valós x számok elégítik ki, amelyre $-2 \le \cos x \le \frac{1}{2}$.

A bal oldali egyenlőtlenséget minden valós szám kielégíti, a jobb oldali és egyben a teljes egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

e) Felhasználva, hogy $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, a következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$2 \cdot \cos^2 x - \cos x - 1 < 0.$$

Ebből a $-\frac{1}{2} < \cos x < 1$ feltételt kapjuk $\cos x$-re.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x \ne 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

3421 *a)* A logaritmus után álló kifejezés csak pozitív értéket vehet fel, tehát a $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

Megoldás:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt a $\operatorname{ctg} x \ge \sqrt{3}$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

Megoldás:

$$k\pi < x \le \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) A logaritmusfüggvény értelmezési tartományából adódóan $\sin x > 0$.

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $\lg(\sin x) \ge 0$, amiből a tízes alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt $\sin x \ge 1$.

Elég tehát a $\sin x \ge 1$ egyenlőtlenséget megoldanunk.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) A $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$ kifejezés értelmezési tartománya $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \ (k \in \mathbb{Z})$

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} - 1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos x} \ge 1.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha:

$$0 < \cos x \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + 2l\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A kifejezés értelmezési tartománya:

$$-\frac{\pi}{2} + 2m\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \ x \ne 2k\pi \ \ (k, m \in \mathbb{Z}).$$

3422 *a)* Alakítsuk szorzattá a bal oldalt:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x,$$

$$\cos 2x \ge \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Használjuk a $\sin 2x$-re vonatkozó azonosságot, majd nullára redukálás után alakítsuk szorzattá az egyenlőtlenség bal oldalát:

$$\sin x \cdot (2 \cdot \cos x - 1) < 0.$$

A szorzat negatív értéket vesz fel, ha a tényezők különböző előjelűek.

I. eset:

$$\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$2 \cdot \cos x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + 2l\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\sin x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\pi + 2k\pi < x < 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$2 \cdot \cos x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3} + 2l\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$-\frac{\pi}{3} + 2m\pi < x < 2m\pi \ \ (m \in \mathbb{Z}).$$

Összefoglalva az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi \ \ (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{vagy} \quad -\frac{\pi}{3} + 2m\pi < x < 2m\pi \ \ (m \in \mathbb{Z}).$$

c) Az egyenlőtlenség mindkét oldalát osszuk el $\sqrt{2}$-vel, redukáljuk 0-ra, és alkalmazzuk a két szög különbségének szinuszára vonatkozó addíciós képletet.

Így a megoldandó egyenlet:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < 0.$$

A megoldás:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) A bal oldalon levő tört akkor van értelmezve, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Az egyenlőtlenség bal oldala átalakítható az addíciós tételek segítségével:

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} > 0.$$

A tört pozitív értéket vesz fel, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

I. eset:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + 2l\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5\pi}{4} + 2l\pi < x < \frac{9\pi}{4} + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$\frac{5\pi}{4} + 2m\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2m\pi \ \ (m \in \mathbb{Z}).$$

Összefoglalva az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + p\pi < x < \frac{3\pi}{4} + p\pi \ \ (p \in \mathbb{Z}).$$

3423 *a)* Kétszeres szögekre vonatkozó összefüggés alapján:

$$4 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \sin 2x.$$

A logaritmusfüggvény értelmezési tartományából adódóan:

$$2 \cdot \sin 2x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin 2x > -\frac{1}{2}.$$

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $\log_2(2 \cdot \sin 2x + 1) \geq 0$, amiből a kettes alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt:

$$2 \cdot \sin 2x + 1 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x \geq 0.$$

Elég tehát az értelmezési tartomány meghatározásához a $\sin 2x \geq 0$ egyenlőtlenséget megoldani.

A kifejezés értelmezési tartománya:

$$l\pi < x < \frac{\pi}{2} + l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

b) A logaritmus után álló kifejezés csak pozitív értéket vehet fel:

$$\sin x + \cos x + 1 > 0,$$
$$\sin x + \cos x > -1.$$

Osszuk le az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\sqrt{2}$-vel, majd használjuk a $\sin(\alpha+\beta)$-ra vonatkozó addíciós összefüggést:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

3424 Az egyenlet másodfokú, ha $\sin 2p \neq 0$, vagyis $p \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Egy másodfokú egyenletnek akkor van két különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív:

$$D = (4\cdot\cos p)^2 - 8\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 2p = 16\cdot\left(\cos^2 p - \sqrt{3}\cdot\sin p\cdot\cos p\right) =$$

$$= 32\cdot\cos p\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\cos p - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin p\right) = 32\cdot\cos p\cdot\cos\left(p+\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 16\cdot\left[\cos\left(2p+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}\right] = 16\cdot\left[\cos\left(2p+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\right].$$

Ez alapján a $\cos\left(2p+\frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk, amely pontosan akkor teljesül, ha:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2p + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$
$$-\pi + 2k\pi < 2p < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$
$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < p < \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenletnek két különböző valós megoldása van, ha:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < p < \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{és} \quad p \neq l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3425 *a)* Írjuk fel $\cos\alpha$-t $1 - 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$ alakban.

A $\cos\beta + \cos\gamma$ összeget alakítsuk szorzattá, és vegyük figyelembe, hogy $\beta + \gamma = 180° - \alpha$:

$$\cos\beta + \cos\gamma = 2\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2} =$$

$$= 2\cdot\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Ezek alapján:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 - 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Mivel $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ maximális értéke 1:

$$1 - 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \le 1 - 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2} - 2\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Egy valós szám négyzete nem lehet negatív, vagyis:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}.$$

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha:

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 1 \qquad \text{és} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mivel α, β és γ háromszög szögei, ez csak akkor lehet, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, vagyis ha a háromszög szabályos.

b) Mivel α, β és γ háromszög szögei, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ és $\cos\gamma$ pozitív valós számok.

Írjuk fel a számtani és mértani közép közti összefüggést erre a három számra, és használjuk fel az *a)* részben bizonyított egyenlőtlenséget:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \le \left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\right)^3 \le \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma \qquad \text{és} \qquad \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = \frac{3}{2}.$$

Ezen feltételek csak szabályos háromszög esetén teljesülnek.

Vegyes feladatok – megoldások

3426 *a)* $-\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{3}{2}$; *c)* $-\frac{1}{2}$; *d)* -1.

3427 *a)* A két vektor merőleges egymásra.
b) A két vektor 30°-os szöget zár be.
c) A két vektor 120°-os szöget zár be.

3428 A paralelogramma oldalainak hossza 9,54 cm és 13,45 cm.

3429 *a)* A háromszög tompaszögű.
b) A háromszög tompaszögű.

3430 A háromszög másik két oldala 10,78 cm és 12,26 cm.

3431 A kert harmadik oldala a koszinusztétellel számítható:

$$c^2 = 15^2 + 20^2 - 2\cdot 15\cdot 20\cdot\cos 76{,}41^\circ \quad\Rightarrow\quad c = 22.$$

A kert kerülete: $15 + 20 + 22 = 57$ m.
A bekerítéshez $57\cdot 1{,}85 = 105{,}45\ \text{m}^2$ dróthálóra van szükség.

3432 A háromszög szögei: $149{,}15^\circ$, $11{,}19^\circ$ és $19{,}66^\circ$.

3433 A háromszög hiányzó oldalainak hossza $4\cdot\sqrt{21} \approx 18{,}33$ cm, $5\cdot\sqrt{21} \approx 22{,}91$ cm, a velük szemben levő szögek rendre $49{,}11^\circ$ és $70{,}89^\circ$.

3434 *a)* Az egyenletet redukáljuk nullára, majd alakítsunk szorzattá. A megoldások:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Az egyenlet alaphalmaza minden olyan valós szám, amelyre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Szorzattá alakítás után a megoldások:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

c) Használjuk fel, hogy $\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$. A megoldások:

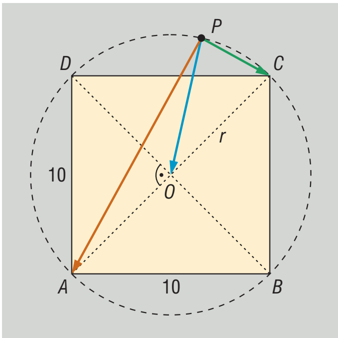
$$x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\cdot k\pi, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} - 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3435 *a)* $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z})$; *b)* $x = \frac{\pi}{12} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

3436 *a)* $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. *b)* Az értelmezési tartomány az üres halmaz.

c) $\frac{\pi}{4} + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

3437 *a)* Az *ABCD* négyzet körülírható körének *r* sugara az átló hosszának fele, $5\cdot\sqrt{2}$ egység. A kör középpontja a négyzet átlóinak *O* metszéspontja.



Ismert, hogy egy szakasz felezőpontjába mutató vektor a végpontokba mutató vektorok számtani közepe, tehát:

$$\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}\right) =$$
$$= 4\cdot\frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}}{2} = 4\cdot\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO} =$$
$$= 4r^2 = 4\cdot\left(5\cdot\sqrt{2}\right)^2 = 200.$$

b) Mivel a négyzet átlói merőlegesek egymásra, vektoraik skaláris szorzata 0:

$$\left(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PD}\right) = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB} = 0.$$

3438 *a)* Ha egy 7 egység hosszú vektor merőleges az $\vec{a}(-3; 4)$ vektorra, akkor *x*, *y* koordinátáira fennáll a következő két összefüggés:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 49 \\ -3x + 4y &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai, és így az $\vec{a}(-3; 4)$ vektorra merőleges 7 egység hosszú vektor koordinátái:

$$\left(\frac{28}{5}; \frac{21}{5}\right) \quad \text{vagy} \quad \left(-\frac{28}{5}; -\frac{21}{5}\right).$$

b) Az előző részben leírt gondolatmenet alapján az $\vec{a}(-5; 12)$ vektorra merőleges 7 egység hosszú vektor koordinátái lehetnek:

$$\left(\frac{84}{13}; \frac{35}{13}\right) \quad \text{vagy} \quad \left(-\frac{84}{13}; -\frac{35}{13}\right).$$

3439 Ha $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, akkor $\operatorname{ctg} x = \frac{4}{3}$, $|\sin x| = \frac{3}{5}$ és $|\cos x| = \frac{4}{5}$.

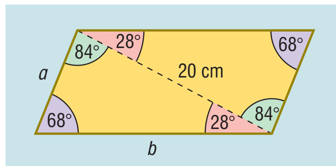
a) Mivel $\operatorname{tg} x$ értéke pozitív, az x szög az első vagy a harmadik negyedben lehet. Ezekben a negyedekben $\sin x$ és $\cos x$ előjele azonos, tehát:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{12}{25}.$$

b) A kifejezés értéke:

$$\frac{1}{\sin^2 x + \operatorname{ctg} x} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{4}{3}} = \frac{75}{127}.$$

3440 A paralelogramma másik két szöge $112°$, és ezeket a szögeket az átló egy $28°$-os és egy $84°$-os szögre osztja. Így ez az átló a paralelogrammát két olyan háromszögre bontja, amelynek szögei $68°$, $28°$ és $84°$. A háromszög $68°$-os szöggel szemben levő oldala 20 cm hosszú, a háromszög másik két oldala pedig a paralelogramma két oldala.



A szinusztétellel kiszámítható a háromszög hiányzó két oldalának hossza:

$$\frac{a}{20} = \frac{\sin 28°}{\sin 68°} \quad \Rightarrow \quad a = 20 \cdot \frac{\sin 28°}{\sin 68°} \quad \Rightarrow \quad a \approx 10{,}13,$$

$$\frac{b}{20} = \frac{\sin 84°}{\sin 68°} \quad \Rightarrow \quad b = 20 \cdot \frac{\sin 84°}{\sin 68°} \quad \Rightarrow \quad b \approx 21{,}45.$$

A paralelogramma oldalainak hossza $10{,}13$ cm és $21{,}45$ cm.

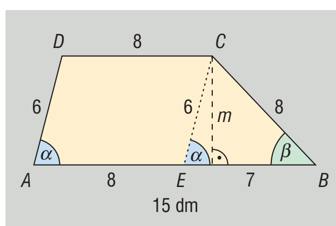
3441 A feladatban szereplő terítő legyen az ABC háromszög. Egy háromszög területét egy csúcsából kiindulva pontosan a súlyvonal felezi. Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $c = 18$ cm, a másik két oldalhoz tartozó súlyvonal hossza $s_a = 15$ cm és $s_b = 21$ cm.

Ismert a háromszög súlyvonalára vonatkozó $s_a = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}$ és $s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$ összefüggés.

Az ismert adatokat beírva, és az egyenletrendszert megoldva: $a \approx 28{,}77$ és $b \approx 23{,}24$.

A terítő másik két oldalának hossza $28{,}77$ cm és $23{,}24$ cm hosszú.

3442 Vegyük fel az $ABCD$ trapéz hosszabbik AB alapján az E pontot úgy, hogy az $AECD$ négyszög paralelogramma legyen. Ekkor $EB = 15 - 8 = 7$ dm, $BC = 8$ dm és $EC = 6$ dm.



Az EBC háromszögben ismerjük három oldal hosszát, így a koszinusztétellel kiszámíthatjuk β szögét:

$$6^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 46{,}57°.$$

Az EBC háromszög E csúcsánál levő α szögét a szinusztétellel határozhatjuk meg:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 46{,}57°} = \frac{8}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 75{,}53°.$$

($180° - 75{,}53° = 104{,}47°$ nem lehet, mert ekkor a háromszög harmadik szöge $28{,}96°$ lenne, ami nem tesz annak eleget, hogy egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.)

a) A trapéz szögei: $46{,}57°$, $75{,}53°$, $104{,}47°$ és $133{,}43°$.

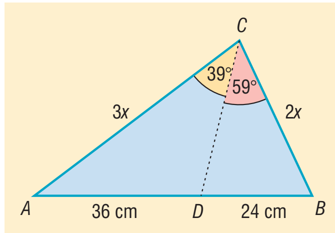
b) A trapéz magassága az EBC háromszög EB oldalához tartozó magassága:

$$m = 8 \cdot \sin 46{,}57° \approx 5{,}81 \text{ dm}.$$

A trapéz területe:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(15+8)\cdot 5{,}81}{2} = 66{,}82 \text{ dm}^2.$$

3443 Az ABC háromszög $AB = 24 + 36 = 60$ cm hosszú oldalát a belső szögfelező a D pontban metszi. Ismeretes, hogy egy háromszög belső szögfelezője a szemben lévő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. A háromszög AC oldalának hossza legyen $3x$, a BC oldalának hossza $2x$.



Az ABC háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$60^2 = (3x)^2 + (2x)^2 - 2\cdot 3x \cdot 2x \cdot \cos 78° \quad\Rightarrow\quad x \approx 18{,}51.$$

a) A háromszög oldalainak hossza: $AC = 55{,}53$ cm és $BC = 37{,}02$ cm.

b) A háromszög α szögét a szinusztétellel számolhatjuk ki:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 78°} = \frac{37{,}02}{60} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 37{,}12°.$$

(Az α biztosan hegyesszög, mert nem a leghosszabb oldallal szemben lévő szög.)

A háromszög szögei: $37{,}12°$, $64{,}88°$ és $78°$.

c) Legyen a háromszög beírt körének sugara r. A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2} = r\cdot\frac{a+b+c}{2} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{a+b+c} \approx 13{,}18.$$

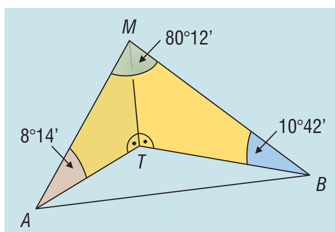
A háromszög beírt körének sugara $13{,}18$ cm.

d) Legyen a háromszög köré írható körének sugara R. Egy kör sugara, húrjának hossza és a húrhoz tartozó kerületi szög közötti $c = 2R\cdot\sin\gamma$ összefüggés alapján:

$$R = \frac{c}{2\cdot\sin\gamma} \approx 30{,}67.$$

A háromszög köré írható körének sugara $30{,}67$ cm.

3444 A hegycsúcs helyét az M, annak merőleges vetületét a T pont jelöli. A kikötők az A és a B pontban vannak.



Az ATM derékszögű háromszögből:

$$AM = \frac{400}{\sin 8°14'},$$

a BTM derékszögű háromszögből:

$$BM = \frac{400}{\sin 10°42'}.$$

Az ABM háromszögre felírva a koszinusztételt:

$$AB^2 = \left(\frac{400}{\sin 8°14'}\right)^2 + \left(\frac{400}{\sin 10°42'}\right)^2 - 2\cdot\frac{400}{\sin 8°14'}\cdot\frac{400}{\sin 10°42'}\cdot\cos 80°12'.$$

Innen $AB \approx 3224$.

A két kikötő távolsága 3224 m.

3445 *a)* Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet $2 \cdot \sin^2 x + 5 \cdot \sin x - 3 = 0$ alakba írható.
A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján vagy $\sin x = -3$, ami nem lehet, vagy $\sin x = \frac{1}{2}$.
A megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Az egyenlet alaphalmaza $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Legyen $\operatorname{tg}^2 x = y$, ekkor az egyenlet:

$$y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3y^2 - 8y - 3 = 0.$$

A megoldások:

$$y_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}^2 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

$$y_2 = -\frac{1}{3}, \text{ nem lehet.}$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

c) Az egyenlet a következő alakba írható:

$$\cos^2 x + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Szorzattá alakítás után:

$$\cos x \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

A megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

d) Az egyenlet alaphalmaza $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ekvivalens átalakítások után a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$2 \cdot \cos^2 x + 5 \cdot \cos x + 2 = 0.$$

Ennek megoldásai:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos x = -2 < -1, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

e) Az egyenlet alaphalmaza $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Az egyenlet mindkét oldalát $\sin x$-szel szorozva, majd felhasználva, hogy $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\sin^2 x + \cos x \cdot \sin x = 1,$$

$$\sin^2 x + \cos x \cdot \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$\cos x \cdot (\sin x - \cos x) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, tehát:

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = \cos x \ (\cos x = 0 \text{ esetet már vizsgáltuk}) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

f) Használjuk a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ összefüggést, és nullára redukálás után alakítsuk szorzattá:

$$\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x),$$
$$\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x - \sin^4 x,$$
$$\sin^4 x + \sin^3 x - 2 \cdot \sin^2 x = 0,$$
$$\sin^2 x \cdot (\sin^2 x + \sin x - 2) = 0,$$
$$\sin^2 x \cdot (\sin x + 2) \cdot (\sin x - 1) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, tehát

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$
$$\sin x = -2 < -1, \text{ ami nem lehet,} \quad \text{vagy}$$
$$\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = k\pi \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3446 *a)* A számlálóban $\operatorname{tg} x$ miatt $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

A nevezőben négyzetgyökös kifejezés áll, tehát:

$$1 - 2 \cdot \cos^2 x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} > |\cos x| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + l\pi < x < \frac{3\pi}{4} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A kifejezés értelmezési tartománya:

$$\left]\frac{\pi}{4} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + m\pi; \frac{3\pi}{4} + n\pi\right[\quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

b) A logaritmus alapja pozitív és nem lehet egyenlő 1-gyel:

$$\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$
$$\sin x \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A logaritmus után álló kifejezés csak pozitív értéket vehet fel:

$$2 \cdot \cos x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}).$$

A három halmaz metszete adja az értelmezési tartományt:

$$x \in \left]2m\pi; \frac{\pi}{3} + 2m\pi\right[\quad (m \in \mathbb{Z}).$$

3447 Ha két vektor merőleges egymásra, akkor skaláris szorzatuk 0, tehát:

$$\left(7\vec{a}-5\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=0, \quad \text{valamint} \quad \left(7\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-4\vec{b}\right)=0.$$

A két egyenletből fejezzük ki az $\vec{a}\cdot\vec{b}$ szorzatot:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{15\cdot\left|\vec{b}\right|^2-7\cdot\left|\vec{a}\right|^2}{16}, \quad \text{valamint} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{7\cdot\left|\vec{a}\right|^2+8\cdot\left|\vec{b}\right|^2}{30},$$

amiből adódik, hogy:

$$\frac{15\cdot\left|\vec{b}\right|^2-7\cdot\left|\vec{a}\right|^2}{16}=\frac{7\cdot\left|\vec{a}\right|^2+8\cdot\left|\vec{b}\right|^2}{30},$$

$$\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2.$$

Ezen eredményünket felhasználva:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{15\cdot\left|\vec{b}\right|^2-7\cdot\left|\vec{a}\right|^2}{16}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right|^2.$$

Az $\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2$ és $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right|^2$ egyenlőségek akkor teljesülnek egyszerre, ha a két vektor nullvektor, vagy ha a két vektor egyenlő hosszú és egymással 60º-os szöget zárnak be.

3448 Alkalmazzuk az $\vec{a}(2;\,3)$ és $\vec{b}(a;\,b)$ vektorokra a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget:

$$2a+3b\le\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve és kihasználva, hogy $2a+3b=9$:

$$9\le\sqrt{13}\cdot\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\frac{9}{\sqrt{13}}\le\sqrt{a^2+b^2}.$$

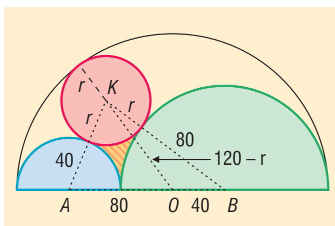
Az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, tehát:

$$\frac{81}{13}\le a^2+b^2.$$

Az a^2+b^2 minimuma $\frac{81}{13}$. A kifejezés a minimális értékét akkor veszi fel, ha $3a=2b\ge0$ és és $2a+3b=9$. Az egyenletrendszert megoldva ez $a=\frac{18}{13}$ és $b=\frac{27}{13}$ esetén teljesül.

Megjegyzés: A feladat másodfokú függvény szélsőértékének meghatározására is visszavezethető.

3449 Jelölje az érintő kör keresett sugarának hosszát r. A kisebb félkörök középpontjai legyenek A és B, a nagy félkör középpontja O, az érintőkör középpontja K.



Használjuk ki, hogy ha két kör érinti egymást, akkor a körök középpontjait összekötő egyenesen rajta van az érintési pont.

Az ABK háromszögben $BK=r+80$, $AK=r+40$, $AB=120$ és $OK=120-r$, valamint $AO=80$ és $BO=40$.

Írjuk fel az AOK és BOK háromszögekre a koszinusztételt:

$$(40+r)^2=80^2+(120-r)^2-2\cdot80\cdot(120-r)\cdot\cos AOK\sphericalangle,$$

$$(80+r)^2=40^2+(120-r)^2-2\cdot40\cdot(120-r)\cdot\cos BOK\sphericalangle.$$

Vegyük figyelembe, hogy $AOK\sphericalangle=180^\circ-BOK\sphericalangle$, tehát $\cos AOK\sphericalangle=-\cos BOK\sphericalangle$.

A második egyenlet kétszereséhez hozzáadva az elsőt:

$$(40+r)^2+2\cdot(80+r)^2=80^2+2\cdot 40^2+3\cdot(120-r)^2,$$
$$1120r=38\,400,$$
$$r\approx 34{,}29.$$

a) A három félkört érintő kör sugara $34{,}29$ cm.

b) A besatírozott terület kiszámításához az ABK háromszög területéből vonjuk ki a megfelelő körcikkek területét.

Az ABK háromszög oldalai:

$$AB=120,\quad AK=40+34{,}29=74{,}29\quad \text{és}\quad BK=80+34{,}29=114{,}29.$$

A koszinusztétellel számítsuk ki az AKB szöget:

$$120^2=74{,}29^2+114{,}29^2-2\cdot 74{,}29\cdot 114{,}29\cdot\cos AKB\sphericalangle \;\Rightarrow\; AKB\sphericalangle\approx 75{,}75^\circ.$$

A szinusztétellel határozzuk meg az ABK szöget, ami nem lehet tompaszög:

$$\frac{\sin ABK\sphericalangle}{\sin 75{,}75^\circ}=\frac{74{,}29}{120}\quad\Rightarrow\quad ABK\sphericalangle\approx 36{,}87^\circ.$$

A háromszög harmadik szöge: $67{,}38^\circ$.

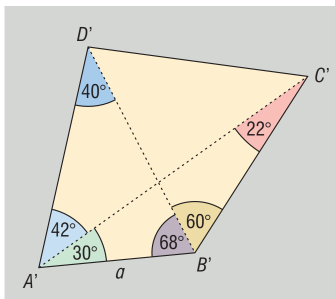
A körcikkek sugarai és középponti szögei rendre:

$$r_1=34{,}29,\ \alpha_1=75{,}75^\circ;\quad r_2=40,\ \alpha_2=67{,}38^\circ;\quad r_3=80,\ \alpha_3=36{,}87^\circ.$$

A besatírozott terület:

$$T=\frac{74{,}29\cdot 114{,}29\cdot\sin 75{,}75^\circ}{2}-$$
$$-34{,}29^2\cdot\pi\cdot\frac{75{,}75^\circ}{360^\circ}-40^2\cdot\pi\cdot\frac{67{,}38^\circ}{360^\circ}-80^2\cdot\pi\cdot\frac{36{,}87^\circ}{360^\circ}\approx 337{,}43\ \text{cm}^2.$$

3450 Vegyünk fel a négy tereppont által meghatározott négyszöghöz hasonló négyszöget, amelyben az $A'B'$ oldal a hosszúságú.



Az $A'B'C'$ háromszögnek ismert egy oldala és három szöge, így a szinusztétel segítségével megadható az $A'C'$ oldal:

$$\frac{A'C'}{a}=\frac{\sin 128^\circ}{\sin 22^\circ}\quad\Rightarrow\quad A'C'=a\cdot\frac{\sin 128^\circ}{\sin 22^\circ}.$$

Az $A'B'D'$ háromszögnek is ismert egy oldala és három szöge, így hasonlóan a szinusztétel segítségével megadható az $A'D'$ oldal:

$$\frac{A'D'}{a}=\frac{\sin 68^\circ}{\sin 40^\circ}\quad\Rightarrow\quad A'D'=a\cdot\frac{\sin 68^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

Az $A'D'C'$ háromszögben írjuk fel a koszinusztételt:

$$C'D'^2=A'C'^2+A'D'^2-2\cdot A'C'\cdot A'D'\cdot\cos 42^\circ,$$

$$C'D'=\sqrt{\left(a\cdot\frac{\sin 128^\circ}{\sin 22^\circ}\right)^2+\left(a\cdot\frac{\sin 68^\circ}{\sin 40^\circ}\right)^2-2\cdot a\cdot\frac{\sin 128^\circ}{\sin 22^\circ}\cdot a\cdot\frac{\sin 68^\circ}{\sin 40^\circ}\cdot\cos 42^\circ}.$$

A számítások elvégzése után kapjuk: $C'D'\approx 1{,}41a$, amiből $a\approx\dfrac{C'D'}{1{,}41}$.

Mivel feladatunkban $CD=2$ km, a keresett AB távolság: $\dfrac{2}{1{,}41}\approx 1{,}42$ km.

3451 A háromszög oldalainak hossza legyen $x-2$, x és $x+2$, valamint az $x+2$ hosszúságú oldallal szemben lévő szöget jelölje α.

A háromszög területét felírva:

$$\frac{x\cdot(x-2)\cdot\sin\alpha}{2}=24 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{48}{x\cdot(x-2)}.$$

A háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$(x+2)^2=x^2+(x-2)^2-2x\cdot(x-2)\cdot\cos\alpha,$$

amiből

$$\cos\alpha=\frac{x^2+(x-2)^2-(x+2)^2}{2x\cdot(x-2)}=\frac{x^2-8x}{2x\cdot(x-2)}.$$

Használjuk ki, hogy $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$:

$$\left(\frac{48}{x\cdot(x-2)}\right)^2+\left(\frac{x^2-8x}{2x\cdot(x-2)}\right)^2=1.$$

Az egyenletet rendezve az

$$x^4-16x^2-3072=0$$

másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet kell megoldanunk.

A megoldóképlet alapján adódik:

$$x^2=-48 \quad\text{vagy}\quad x^2=64.$$

Megoldást csak ez utóbbiból kapunk.

Mivel x egy háromszög oldalát jelöli: $x=8$.

A háromszög oldalainak hossza tehát 6, 8 és 10 hosszegység.

Pitagorasz tételének megfordítása alapján ez a háromszög derékszögű, szögeit szögfüggvénnyel számolhatjuk ki.

A háromszög szögei: $90°$, $36{,}87°$ és $53{,}13°$.

3452 Használjuk a következő összefüggéseket:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad\text{és}\quad 1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha.$$

Innen:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad\text{és}\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Ez alapján a szögfüggvények lehetséges értékei:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{3};$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4},\quad \sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{4},\quad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{5},\quad \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{3};$$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{4},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4},\quad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{5},\quad \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{3};$$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{4},\quad \sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{4},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

3453 Trigonometrikus összefüggések felhasználása után:

a) $$\frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)\cdot(\sin x-\cos x)}=$$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+1}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}=\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1}=\frac{2+1}{2-1}=3.$$

b) $$\frac{1-\sin^4 x-\cos^4 x}{\cos^4 x}=\frac{1-\left(1-\cos^2 x\right)^2-\cos^4 x}{\cos^4 x}=\frac{1-1+2\cdot\cos^2 x-\cos^4 x-\cos^4 x}{\cos^4 x}=$$

$$=\frac{2\cdot\cos^2 x\cdot(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}=\frac{2\cdot\sin^2 x}{\cos^2 x}=2\cdot\operatorname{tg}^2 x=8.$$

3454 *a)* Alakítsuk át a $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ egyenlőséget az addíciós tétel alapján:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$
$$0=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$0=\cos(\alpha+\beta).$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

Mivel α és β háromszög szögei, $k=0$, tehát $\alpha+\beta=90°$, vagyis a háromszög derékszögű, és $\gamma=90°$.

b) Az egyenlet rendezése után alkalmazzuk a $\cos 2x$-re vonatkozó addíciós tételt:

$$\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta,$$
$$\cos 4\alpha=\cos 4\beta.$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $4\alpha=4\beta+2k\pi$, vagy ha $4\alpha=-4\beta+2l\pi$, ahol $k, l\in\mathbb{Z}$.

I. eset: $4\alpha=4\beta+2k\pi \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\beta+\frac{1}{2}\cdot k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Mivel α és β háromszög szögei, k értéke 0 vagy 1 lehet.
Ha $k=0$, akkor $\alpha=\beta$.
Ha $k=1$, akkor $\alpha=\beta+90°$.

II. eset: $4\alpha=-4\beta+2l\pi \quad\Leftrightarrow\quad \alpha+\beta=\frac{1}{2}\cdot l\pi\ (l\in\mathbb{Z})$.

Mivel α és β háromszög szögei, l értéke csak 1 lehet, és ekkor $\alpha+\beta=90°$.

A feladat feltételének megfelelő háromszög α és β szögére a következő összefüggések közül teljesül valamelyik:

(1) $\alpha=\beta$, vagyis a háromszög egyenlő szárú;
(2) $\alpha=\beta+90°$, vagyis a háromszög α szöge tompaszög, és 90°-kal nagyobb β-nál;
(3) $\alpha+\beta=90°$, vagyis a háromszög derékszögű, és $\gamma=90°$.

3455 A szinusztétel értelmében $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$. Elég tehát a szögek szinuszainak arányát megadnunk. (Ezek biztosan pozitív értékek, hiszen tangenseik is pozitívak.)

Ismert, hogy

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}},\qquad \sin\beta = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta}},\qquad \sin\gamma = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\gamma}{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}.$$

A feladatunk az, hogy megadjuk $\mathrm{tg}^2\alpha$, $\mathrm{tg}^2\beta$ és $\mathrm{tg}^2\gamma$ pontos értékét.

Mivel a háromszög szögeinek összege 180º, így

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}(180° - \alpha - \beta) = -\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}.$$

A $\mathrm{tg}\,\alpha : \mathrm{tg}\,\beta : \mathrm{tg}\,\gamma = 2:3:4$ arányból:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{3}{2}\mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{és} \quad \mathrm{tg}\,\gamma = 2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Az előző egyenletben ezeket felhasználva $\mathrm{tg}\,\alpha$-ra a következő összefüggést kapjuk:

$$2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{3}{2}\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\frac{3}{2}\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{5\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2-3\,\mathrm{tg}^2\alpha},$$

$$4\cdot\mathrm{tg}\,\alpha - 6\,\mathrm{tg}^3\alpha = -5\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$9\cdot\mathrm{tg}\,\alpha - 6\,\mathrm{tg}^3\alpha = 0,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot(3-2\,\mathrm{tg}^2\alpha) = 0.$$

A szorzat első tényezője nyilvánvalóan nem lehet 0, tehát $\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{3}{2}$.

Ez alapján β és γ tangenseinek négyzetét is kiszámolhatjuk:

$$\mathrm{tg}^2\beta = \left(\frac{3}{2}\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2 = \frac{9}{4}\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{27}{8}, \text{ és}$$

$$\mathrm{tg}^2\gamma = (2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha)^2 = 4\cdot\mathrm{tg}^2\alpha = 6.$$

A háromszög szögeinek szinuszai:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{5}},\qquad \sin\beta = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{27}{8}}{1+\frac{27}{8}}} = \sqrt{\frac{27}{35}},$$

$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\gamma}{1+\mathrm{tg}^2\gamma}} = \sqrt{\frac{6}{1+6}} = \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Ez alapján:

$$a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{27}{35}} : \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Az arányt $\sqrt{\frac{35}{3}}$-dal bővítve kapjuk, hogy a háromszög oldalai hosszának aránya: $\sqrt{7} : 3 : \sqrt{10}$.

3456 Mivel

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2},$$

valamint

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 2x,$$

az egyenlet a következő alakba írható:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x,$$

$$1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - 2 \cdot \sin^2 2x,$$

$$2 - \sin^2 2x = 2 - 4 \cdot \sin^2 2x,$$

$$\sin^2 2x = 0.$$

Az egyenlet megoldása:

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3457 *a)* Az egyenlet jobb oldalát alakítsuk át a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ összefüggés segítségével, majd alakítsunk szorzattá, és redukáljuk nullára az egyenletet:

$$\sin x - \cos x = \sin x \cdot \cos 2x,$$

$$\sin x - \cos x = \sin x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x),$$

$$\sin x - \cos x = \sin x \cdot (\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x),$$

$$(\sin x - \cos x) \cdot \left[1 + \sin x \cdot (\sin x + \cos x)\right] = 0,$$

$$(\sin x - \cos x) \cdot (1 + \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x) = 0.$$

A szorzat pontosan akkor nulla, ha

I. eset:

$$\sin x - \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$1 + \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0,$$

$$\cos^2 x + 2 \cdot \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0, \quad /: \cos^2 x \neq 0$$

$$2 \cdot \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa negatív, tehát nincs olyan valós x, amely kielégítené ezt az egyenletet.

Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) A szinusz- és koszinuszfüggvény periódusa 2π, tehát elegendő a következő egyenletet megoldanunk:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 3 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + 2 \cdot \sin x.$$

Az addíciós tételek alapján:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 3 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + 2 \cdot \sin x,$$

$$\cos 2x + 3 \cdot \sin x = 1 + 2 \cdot \sin x,$$

$$1 - 2 \cdot \sin^2 x + \sin x = 1,$$

$$\sin x \cdot (1 - 2 \cdot \sin x) = 0.$$

A szorzat akkor nulla, ha

I. eset:

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2l\pi, \; x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \;\; (l, n \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2l\pi, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \quad (k, l, n \in \mathbb{Z}).$$

3458 Alakítsuk át a kifejezést:

$$\cos^4 x \cdot \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \sin^4 x = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2x.$$

Mivel $-1 \le \sin 2x \le 1$, a kifejezés minimális értéke 0, maximális értéke $\frac{1}{4}$.

A kifejezés a minimumát ott veszi fel, ahol $\sin 2x = 0$, vagyis $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

A kifejezés a maximumát ott veszi fel, ahol $\sin 2x = \pm 1$, vagyis $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$.

3459 Ha $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, vagyis $\alpha = 120°$, akkor az egyenlet elsőfokú:

$$-4x + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1.$$

Ekkor az egyenletnek egy valós gyöke van.

Ha az egyenlet másodfokú $(\alpha \ne 120°)$, akkor van két valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív:

$$D = 16 - 4 \cdot (2 \cdot \cos\alpha + 1) \cdot (4 \cdot \cos\alpha - 2) = 16 - 8 \cdot (4 \cdot \cos^2\alpha - 1) = 24 - 32 \cdot \cos^2\alpha.$$

A következő egyenlőtlenség megoldásait keressük, ha α konvex szög:

$$24 - 32 \cdot \cos^2\alpha > 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} > |\cos\alpha|.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség megoldása:

$$30° + k \cdot 180° \le \alpha \le 150° + k \cdot 180° \;\; (k \in \mathbb{Z}).$$

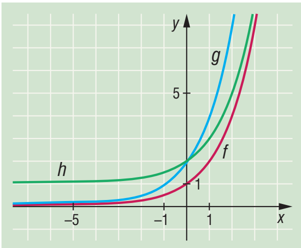
Összefoglalva: az egyenletnek két valós megoldása van azokra a konvex α szögekre, amelyre

$$30° < \alpha < 150° \quad \text{és} \quad \alpha \ne 120°.$$

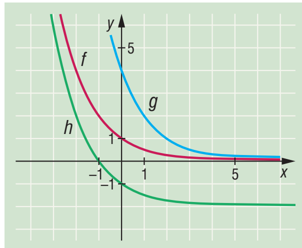
11.4. FÜGGVÉNYEK

Az exponenciális és logaritmusfüggvény – megoldások

3460 *a)*



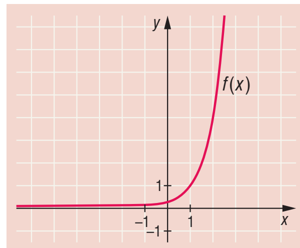
b)



3461 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

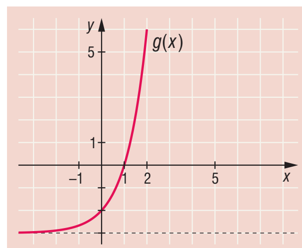
Az x tengelyt nem metszi, az y tengelyt az $y = \frac{1}{4}$ helyen metszi.



b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y > -3$.

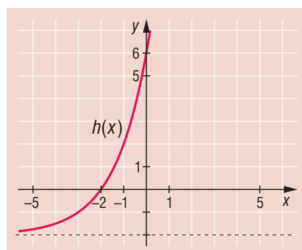
Az x tengelyt az $x = 1$ helyen, az y tengelyt az $y = -2$ helyen metszi.



c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y > -2$.

Az x tengelyt az $x = -2$ helyen, az y tengelyt az $y = 6$ helyen metszi.



3462 $f(11) = \log_3 9 + 3 = 5, \quad f(3) = \log_3 1 + 3 = 3, \quad f(11) + f(3) = 8.$

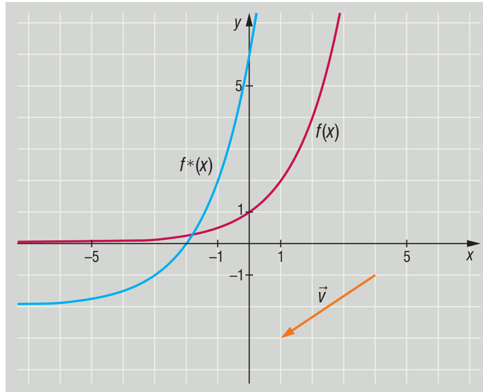
3463 $f(a+1) - f(a-1) = 2^{a+1} - 2^{a-1} = 2 \cdot 2^a - \frac{2^a}{2} = 2^a \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot 2^a = 3 \cdot 2^{a-1}.$

3464 *a)* $f^*(x) = 2^{x+3} - 2$

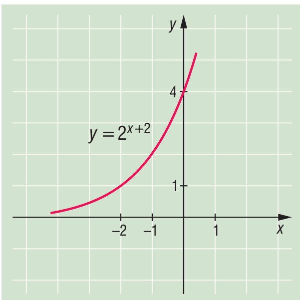
b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, nem változott.

Értékkészlet: $y > -2$.

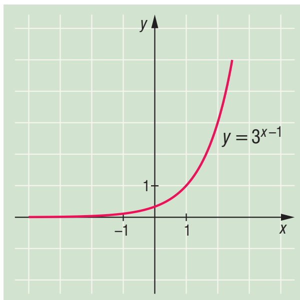
Zérushely: $x = -2$.



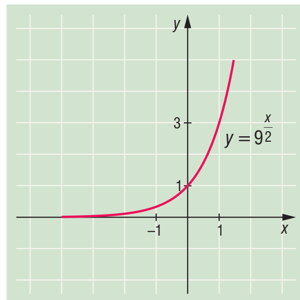
3465 *a)*



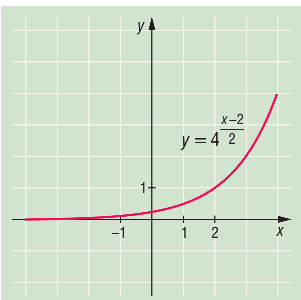
b)



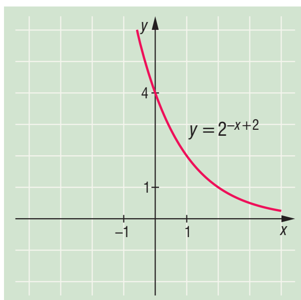
c)



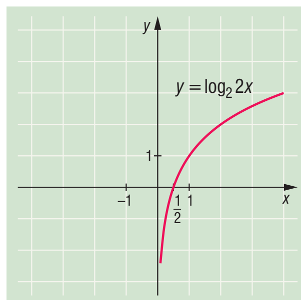
d)



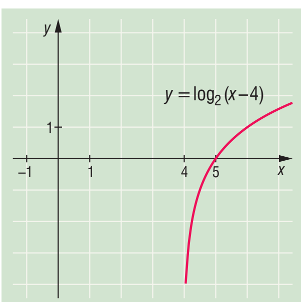
e)



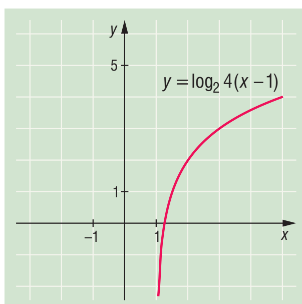
f)



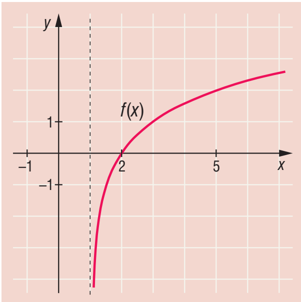
g)



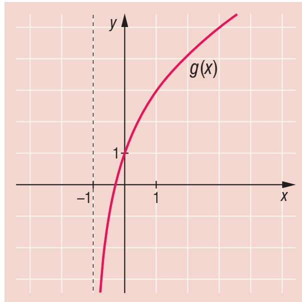
h)



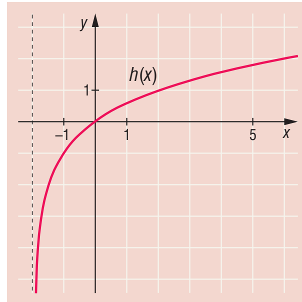
3466 *a)*



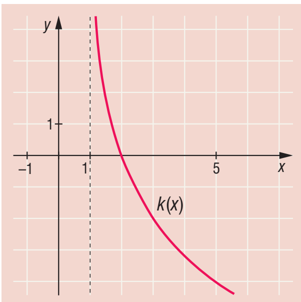
b)



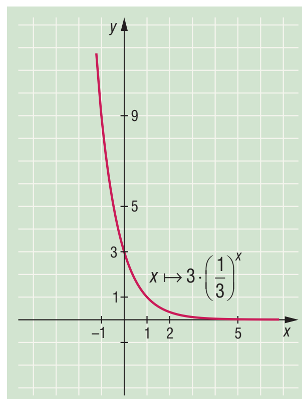
c)



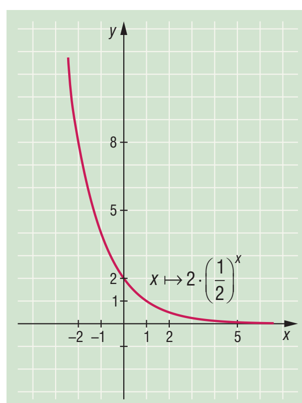
d)



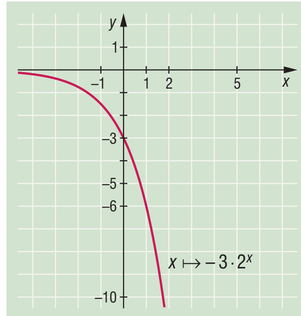
3467 *a)* $x \mapsto \sqrt[3]{3^{3\cdot(1-x)}} = 3^{1-x} = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$;



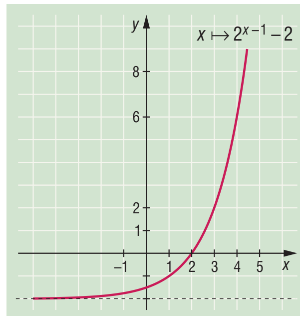
b) $x \mapsto 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$;



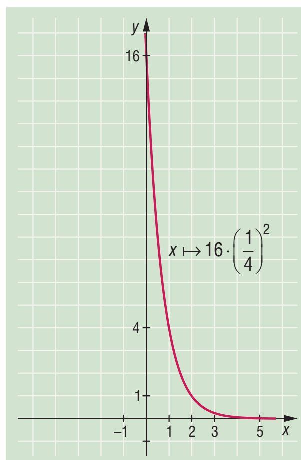
c) $x \mapsto -3 \cdot 2^{x}$;



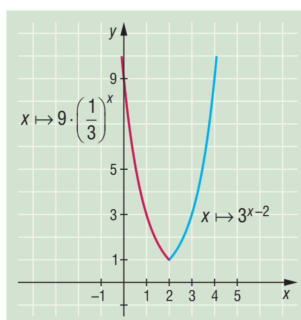
d) $x \mapsto \sqrt{2^{2\cdot(x-1)}} - 2 = 2^{x-1} - 2$;



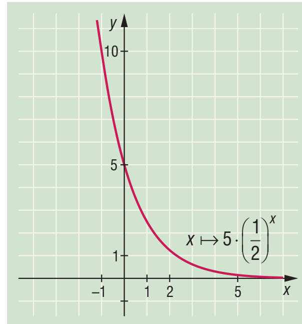
e) $x \mapsto 4^{1-x+1} = 4^{2-x} = 16 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}$;



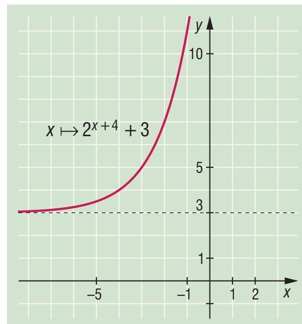
f) $x \mapsto 3^{|2-x|} = \begin{cases} 3^{2-x} = 9 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}, & \text{ha} \quad x \le 2, \\ 3^{-2+x} = 3^{x-2}, & \text{ha} \quad x > 2. \end{cases}$



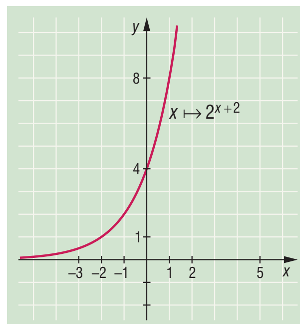
g) $x \mapsto \dfrac{2}{2^x} + \dfrac{3}{2^x} = \dfrac{5}{2^x} = 5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x;$



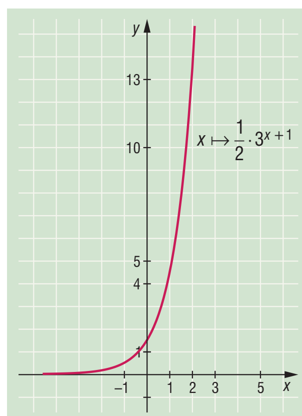
h) $x \mapsto 2^{-2} \cdot 2^{x+6} + 3 = 2^{x+4} + 3;$



i) $x \mapsto 16^{\frac{1}{4}x} \cdot 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{16^x} \cdot \sqrt{16} = 4 \cdot \sqrt[4]{\left(2^x\right)^4} = 4 \cdot |2^x| = 2^{x+2};$



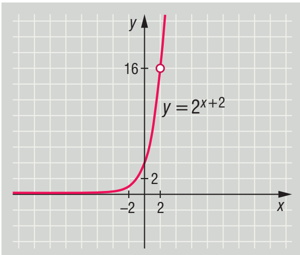
j) $x \mapsto \dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x} = \dfrac{3}{2} \cdot 3^x = \dfrac{1}{2} \cdot 3^{x+1}.$



3468 *a)* $f(x)=\begin{cases}-x-4, & \text{ha} \quad -5\le x<0,\\ 5^x-5, & \text{ha} \quad 0\le x<1,\\ \log_3 x, & \text{ha} \quad 1\le x\le 9;\end{cases}$ *b)* $f(x)\in[-4;\,2]$;

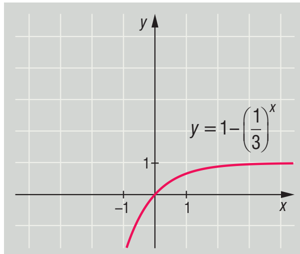
c) $x\in\,]-4;\,1[$; *d)* $x\in[-5;\,3]$; *e)* $x_1=-4$ és $x_2=1$.

3469 *a)*



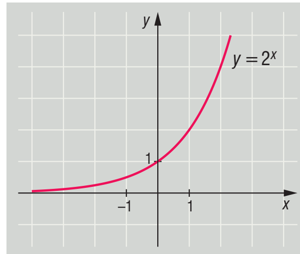
$2^{\frac{x^2-4}{x-2}}=2^{x+2},\ x\neq 2;$

b)



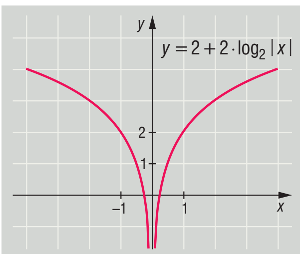
$1-3^{-x}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^x;$

c)



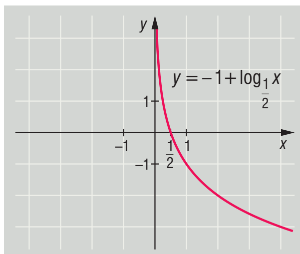
$\dfrac{1}{4^{-\frac{x}{2}}}=4^{\frac{x}{2}}=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x=2^x;$

d)



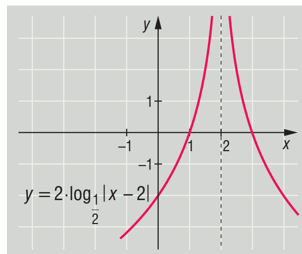
$\log_2 4x^2=2+2\cdot\log_2|x|;$

e)



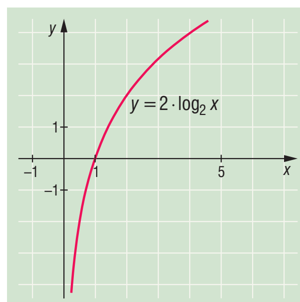
$\log_{\frac{1}{2}}2x=-1+\log_{\frac{1}{2}}x;$

f)

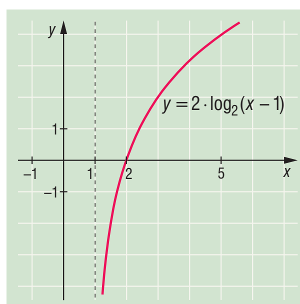


$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2=2\cdot\log_{\frac{1}{2}}|x-2|.$

3470 *a)* Értelmezési tartomány: $x>0$.
Értékkészlet: $y\in\mathbb{R}$.
Zérushely: $x=1$.
Értelmezési tartományán szigorúan monoton növő.



b) Értelmezési tartomány: $x>1$.
Értékkészlet: $y\in\mathbb{R}$.
Zérushely: $x=2$.
Értelmezési tartományán szigorúan monoton növő.



c) Nevezetes azonosságot alkalmazva:

$$\log_2(x^2-2x+1)=\log_2(x-1)^2.$$

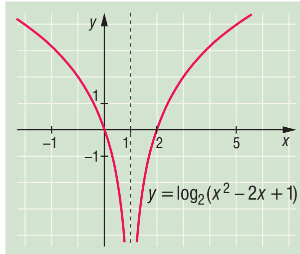
A logaritmus azonosságai alapján a függvény hozzárendelési szabálya:

$$x\mapsto 2\cdot\log_2|x-1|.$$

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, értékkészlet: $y\in\mathbb{R}$.

Zérushelyek: $x=0$ és $x=2$.

A függvény a $]-\infty;1[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, az $]1;+\infty[$ intervallumon szigorúan monoton növő.

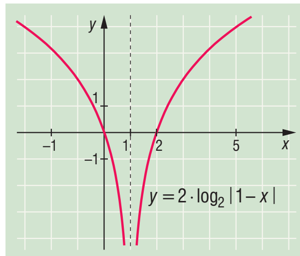


d) Mivel $|1-x|=|x-1|$, ezért a függvény megegyezik a *c)* feladatban megadott függvénnyel.

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, értékkészlet: $y\in\mathbb{R}$.

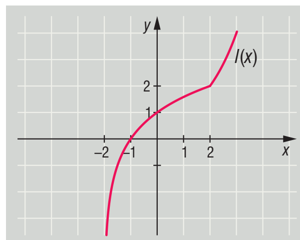
Zérushelyek: $x=0$ és $x=2$.

A függvény a $]-\infty;1[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, az $]1;+\infty[$ intervallumon szigorúan monoton növő.



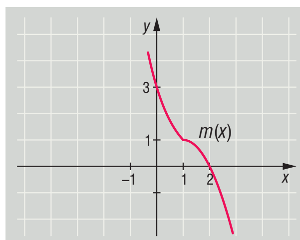
3471 *a)* A függvény $]-2;+\infty[$-ban szigorúan nő, zérushelye -1.

$$f(x)=\begin{cases}\log_2(x+2), & \text{ha} \quad -2<x\le 2,\\ 2^{x-1}, & \text{ha} \quad 2<x.\end{cases}$$



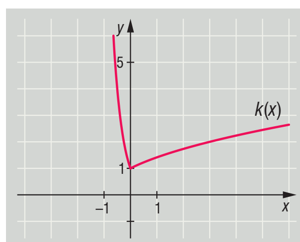
b) A függvény csökken, zérushelye $x=2$.

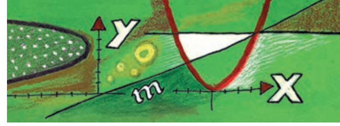
$$g(x)=\begin{cases}3^{-x+1}, & \text{ha} \quad x\le 1,\\ -(x-1)^2+1, & \text{ha} \quad x>1.\end{cases}$$



c) A függvény $]-\infty;0]$-ban csökken, $[0;+\infty[$-ban nő, zérushelye nincs.

$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & \text{ha} \quad x\ge 0,\\ 4^{-2x}, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$





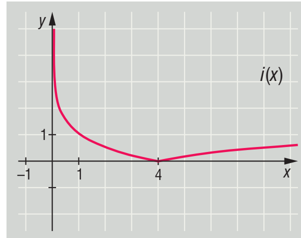
d) A logaritmus tulajdonságait felhasználva:

$$i(x)=\left|\log_{\frac{1}{4}}x-\log_{\frac{1}{4}}4\right|=\left|\log_{\frac{1}{4}}x+1\right|.$$

Értelmezési tartomány: $x>0$.

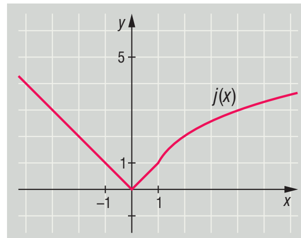
Zérushely: $x=4$.

A függvény a $]0;4[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $]4;+\infty[$ intervallumon szigorúan monoton nő.



e) Zérushely: $x=0$.

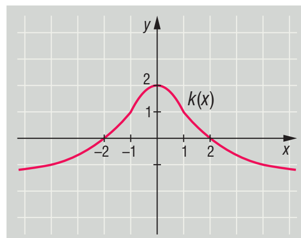
A $]-\infty;0[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $]0;+\infty[$ intervallumon szigorúan monoton nő.



f) Zérushelyek: $x=-2$ és $x=2$.

A $]-\infty;0[$ intervallumon szigorúan monoton nő, a $]0;+\infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökken.

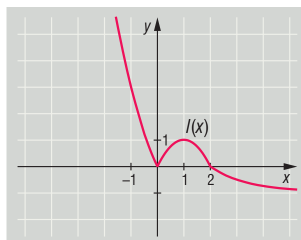
A függvény páros, grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre vonatkozóan.



g) Zérushelyek: $x=0$ és $x=2$.

A $]-\infty;0[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $]0;1[$ intervallumon szigorúan monoton nő, az $]1;+\infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökken.

Értékkészlete: $y>-1$.



3472 *a)* A másodfokú kifejezések gyöktényezős alakja alapján:

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3).$$

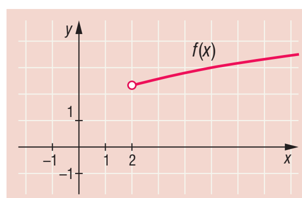
A függvény értelmezési tartományára:

$$(x-2)(x+3)>0 \quad \text{és} \quad (x-2)>0,$$

amiből $x>2$ adódik.

A logaritmus azonosságai alapján:

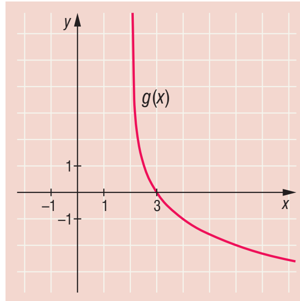
$$f(x)=\log_2\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\log_2(x+3).$$



b) A logaritmus és a négyzetgyök értelmezése miatt $x^2 - 4 > 0$ és $x + 2 > 0$. A két feltétel együtt akkor teljesül, ha $x > 2$.

A logaritmus azonosságai, majd nevezetes azonosság felhasználása alapján:

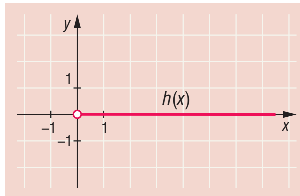
$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2).$$



c) A függvény értelmezési tartománya: $x > 0$.

A logaritmus azonosságai alapján:

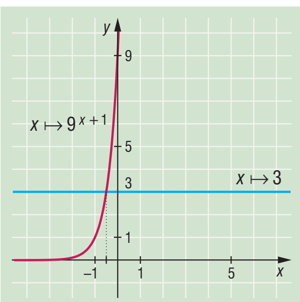
$$h(x) = \lg x - \log_{0,1}\frac{1}{x} = \lg x - \frac{\lg\frac{1}{x}}{\lg 0{,}1} =$$
$$= \lg x + (\lg 1 - \lg x) = 0.$$



Egyenletek és függvények – megoldások

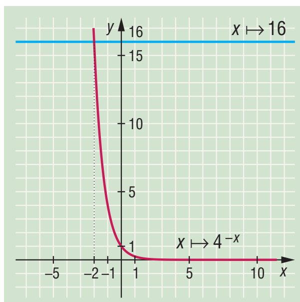
3473 Az egyenletek bal és jobb oldalát külön függvényként ábrázolva kapjuk:

a)



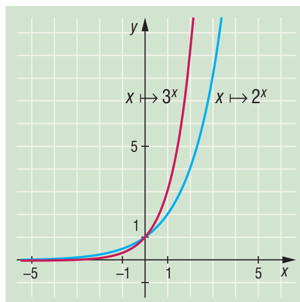
$x = -\dfrac{1}{2}$;

b)



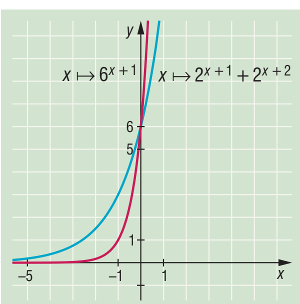
$x = -2$;

c)



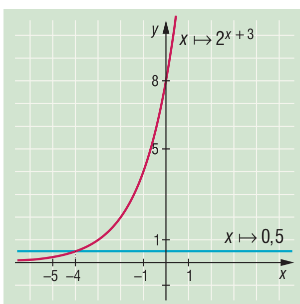
$x = 0$;

d)



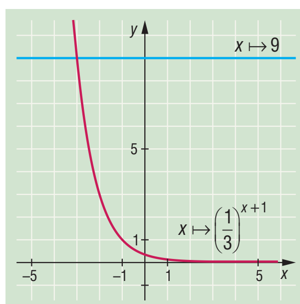
$x = 0$;

e)



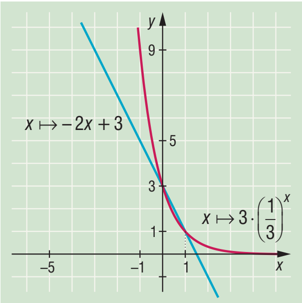
$x = -4$;

f)



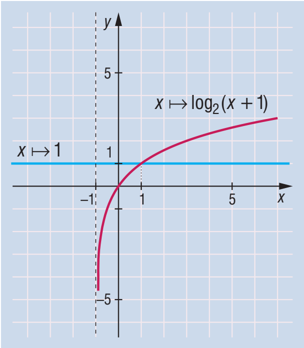
$x = -3$;

g)

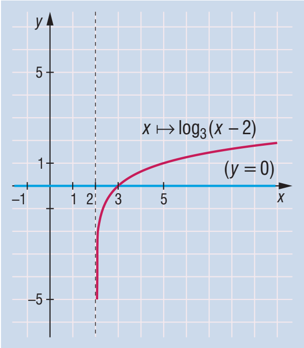


$x_1 = 0$ és $x_2 = 1$.

3474 *a)* $x = 1$ (értelmezési tartomány: $x > -1$).

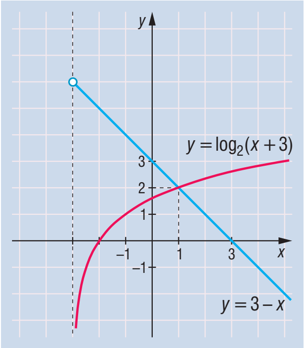


b) $x = 3$ (értelmezési tartomány: $x > 2$).

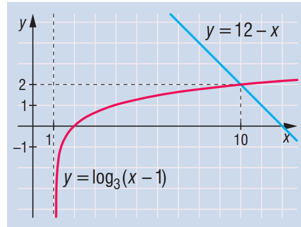


c) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a bal oldalon és a jobb oldalon álló kifejezésekkel értelmezhető függvények grafikonját $x > -3$ esetén.

Mivel az $x \mapsto \log_2(x+3)$ függvény nő, az $x \mapsto 3-x$ függvény csökken az értelmezési tartományon, és $x = 1$-re mindkettő értéke 2, az egyenlet egyetlen gyöke: $x = 1$.



d) Az előzőhöz hasonlóan oldható meg, itt is egyetlen gyököt kapunk az értelmezési tartományon ($x > 1$): $x = 10$.

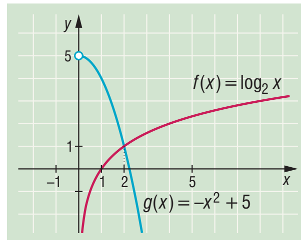


3475 *a)* Értelmezési tartomány: $x > 0$.

Átalakítás után:

$$\log_2 x = -x^2 + 5.$$

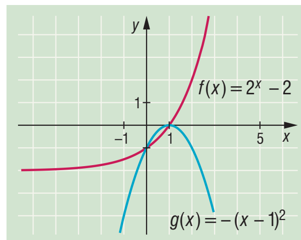
Az egyenletnek egy gyöke van, az $x = 2$.



b) Átrendezés után:

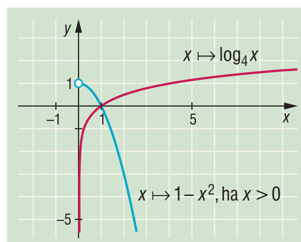
$$2^x - 2 = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2.$$

Az egyenletnek 2 gyöke van, az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 1$.



c) Értelmezési tartomány: $x > 0$.

Az egyenletnek egy gyöke van, $x = 1$.



3476 *a)* Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a bal és jobb oldalon álló függvények grafikonját, és olvassuk le az eredményt a grafikonról. Ellenőrizzük algebrai úton.

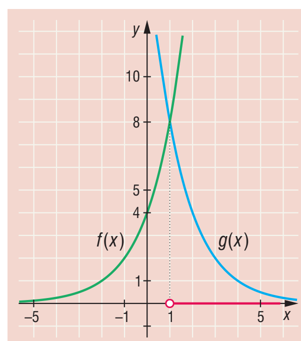
$$f(x) = 2^{x+2}, \qquad g(x) = 2^{-x+4} = 2^{-1\cdot(x-4)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4};$$

$$f(x) > g(x).$$

Megoldás: $x > 1$.

Ellenőrzés:

$$2^{x+2} > 2^{4-x}, \qquad 4 \cdot 2^x > \frac{16}{2^x}, \qquad 2^{2x} > 4, \qquad x > 1.$$



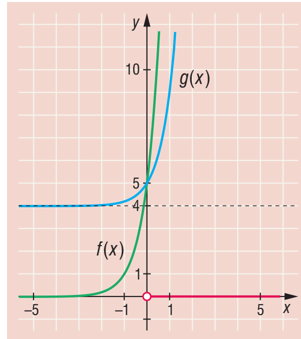
b) Ábrázoljuk:

$$f(x) = 5^{x+1}, \qquad g(x) = 5^x + 4;$$
$$f(x) > g(x).$$

Megoldás: $x > 0$.

Ellenőrzés:

$$5 \cdot 5^x > 5^x + 4, \qquad 5^x > 1, \qquad x > 0.$$



c) Értelmezési tartomány: $x > \dfrac{1}{3}$.

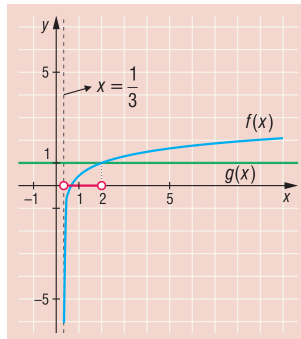
Ábrázoljuk:

$$f(x) = \log_5(3x-1), \qquad g(x) = 1;$$
$$f(x) < g(x).$$

Megoldás: $\dfrac{1}{3} < x < 2$.

Ellenőrzés:

$$\log_5(3x-1) < 1, \qquad 0 < 3x-1 < 5, \qquad 1 < 3x < 6, \qquad \frac{1}{3} < x < 2.$$



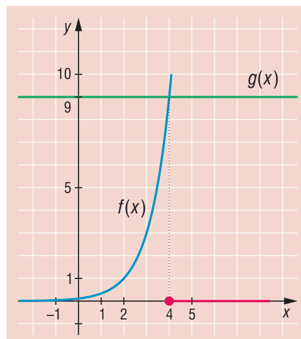
d) Ábrázoljuk:

$$f(x) = 3^{x-2}, \qquad g(x) = 9;$$
$$f(x) \geq g(x).$$

Megoldás: $x \geq 4$.

Ellenőrzés:

$$3^{x-2} \geq 3^2, \qquad x - 2 \geq 2, \qquad x \geq 4.$$



e) Értelmezési tartomány: $1 > x$.

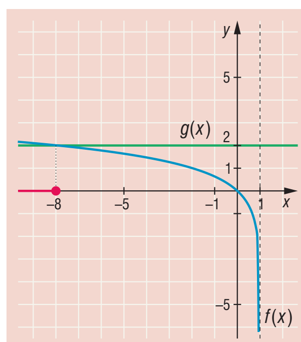
Ábrázoljuk:

$$f(x) = \log_3(1-x), \qquad g(x) = 2;$$
$$f(x) \geq g(x).$$

Megoldás: $x \leq -8$.

Ellenőrzés:

$$\log_3(1-x) \geq 2, \qquad 1 - x \geq 3^2 = 9, \qquad -8 \geq x.$$



f) Ábrázoljuk:

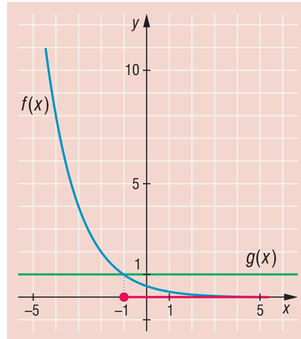
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, \qquad g(x) = 1;$$

$$f(x) \le g(x).$$

Megoldás: $x \ge -1$.

Ellenőrzés:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \le 1, \qquad x+1 \ge 0, \qquad x \ge -1.$$



g) Ábrázoljuk:

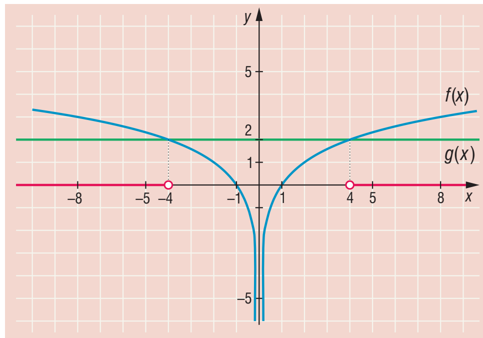
$$f(x) = \log_2|x|, \qquad g(x) = 2,$$

$$f(x) > g(x).$$

Megoldás: $x < -4$ vagy $x > 4$; összefoglalva: $|x| > 4$.

Ellenőrzés:

$$\log_2|x| > 2, \qquad |x| > 2^2 = 4.$$



h) Ábrázoljuk:

$$f(x) = 2^{|x|}, \qquad g(x) = 2,$$

$$f(x) < g(x).$$

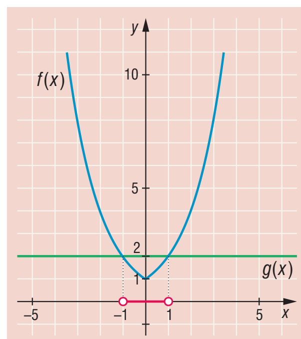
Mivel

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \ge 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x, & \text{ha } x \ge 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Megoldás: $-1 < x < 1$, vagyis $|x| < 1$.

Ellenőrzés:

$$2^{|x|} < 2, \qquad |x| < 1.$$

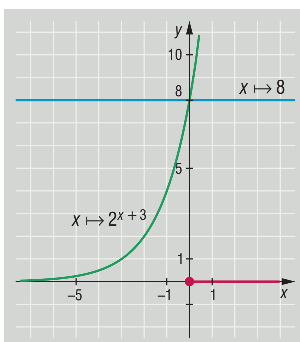


3477 Megoldás:

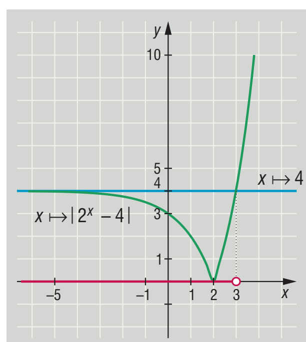
A: $x \in [0; \infty[$, vagyis $x \ge 0$;

B: $x \in]-\infty; 3[$, vagyis $x < 3$.

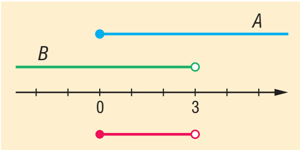
(1)



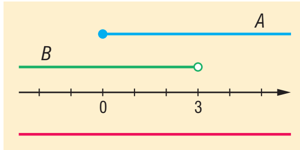
(2)



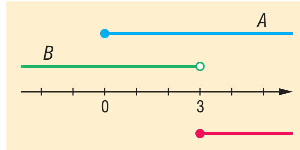
a) $x \in [0;\, 3[$;



b) $x \in \mathbb{R}$;



c) $x \in [3;\, \infty[$.



3478 *a)* Az $\frac{1}{5}$ alapú logaritmus csökkenő, így:

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{4x+6}{x} \leq 1.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség átalakítva:

$$0 < 4 + \frac{6}{x} \leq 1,$$
$$-4 < \frac{6}{x} \leq -3,$$
$$-1{,}5 > x \geq -2.$$

b) A szorzat logaritmusára vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1 \;\; (x > -1) \quad \Rightarrow \quad \log_3(x^2 + 4x + 3) = 1.$$

A logaritmusfüggvény szigorúan monoton, ezért:

$$x^2 + 4x + 3 = 3, \quad \text{amiből} \quad x \cdot (x+4) = 0.$$

A megoldások: $x = 0$ jó, $x = -4$ nem jó gyök.

c) Átalakítással:

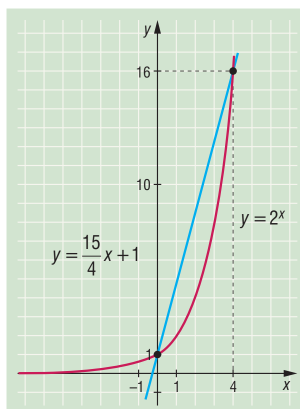
$$x^2 \cdot 5^x - 5^{x+2} < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot 5^x < 25 \cdot 5^x.$$

Az exponenciális függvény miatt $5^x \neq 0$, ezért:

$$x^2 < 25, \quad \text{amiből} \quad |x| < 5.$$

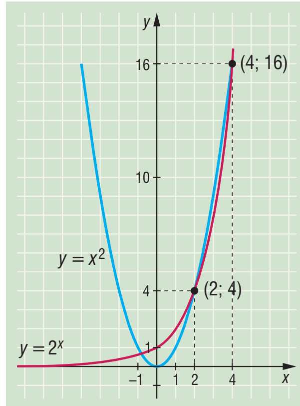
A megoldás: $-5 < x < 5$.

3479 *a)* Az $x \mapsto 2^x$ és $x \mapsto \frac{15}{4}x + 1$ függvény grafikonját egy koordinátarendszerben ábrázolva látszik, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ gyöke az egyenletnek. Más gyök nincs, hiszen a 2^x függvény konvex, tehát az egyenesnek és a görbének több közös pontja nincs.

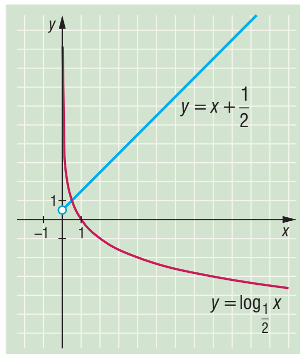


b) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az $x \mapsto 2^x$ és $x \mapsto x^2$ függvények grafikonját.

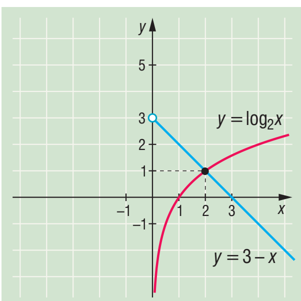
Ha $x > 0$, akkor $x_1 = 2$ és $x_2 = 4$ jó gyök, mert a két függvény képének (2; 4) és (4; 16) közös pontja. Más közös pont itt nincs. Ha $x < 0$, akkor az $x \mapsto x^2$ függvény csökken, az $x \mapsto 2^x$ függvény nő, így legfeljebb egy közös pont van. Ez –1 és 0 között lesz, $x_0 \approx -0{,}7$.



c) Az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ és $x \mapsto x + \frac{1}{2}$, $x > 0$ függvények grafikonját egy koordináta-rendszerben ábrázolva világos, hogy $x = \frac{1}{2}$ az egyetlen gyöke az egyenletnek, hiszen itt a két függvény értéke egyenlő, és $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ csökken, $x \mapsto x + \frac{1}{2}$ nő, tehát legfeljebb egy közös pontja van a két grafikonnak.

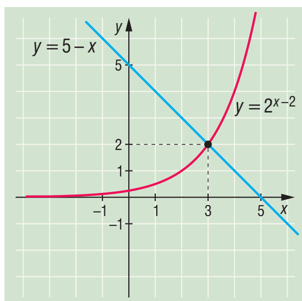


d)



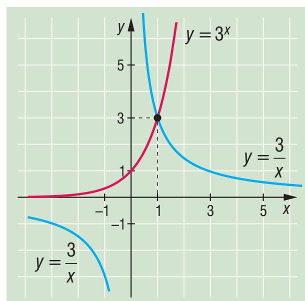
$x = 2$ (ÉT: $x > 0$);

e)



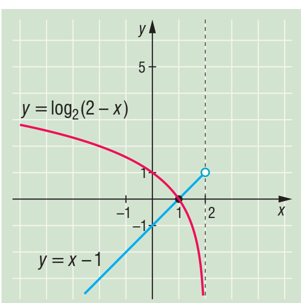
$x = 3$;

f)



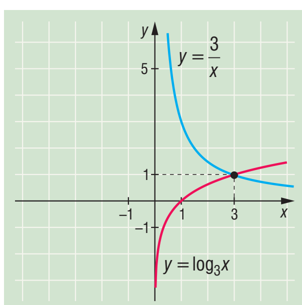
$x = 1$ (ÉT: $x \neq 0$);

g)



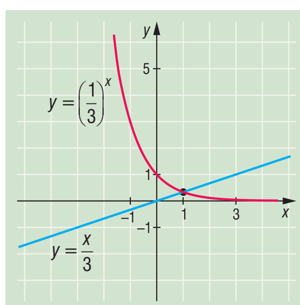
$x = 1$ (ÉT: $x < 2$);

h)



$x = 3$ (ÉT: $x > 0$);

i)

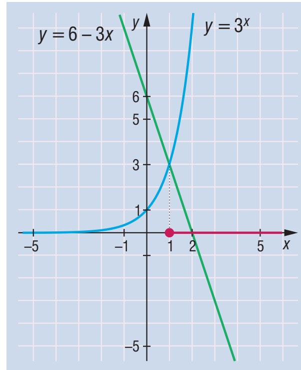


$x = 1$.

3480 *a)* Átrendezve az egyenlőtlenséget:

$$3^x \geq 6 - 3x.$$

Ábrázolva külön a bal és jobb oldalon álló függvény grafikonját, leolvasható a megoldás: $x \geq 1$.

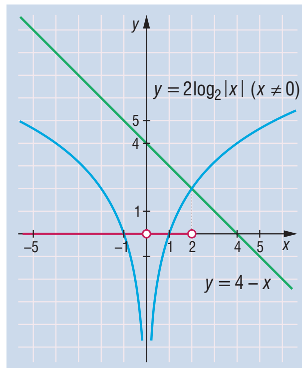


b) Az *a)*-hoz hasonló eljárással:

$$\frac{1}{2}\log_2 x^4 < 4 - x, \qquad (x^4 > 0,\ \text{vagyis}\ x \neq 0)$$

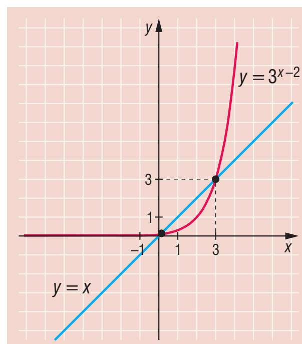
$$2\log_2|x| < 4 - x.$$

Megoldás: $x < 2$, $x \neq 0$.



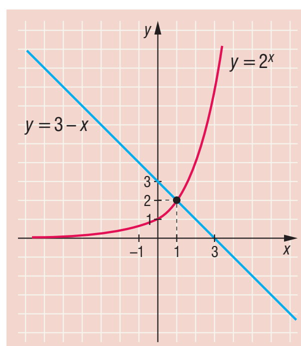
3481 *a)* Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az $x \mapsto x$ és $x \mapsto 3^{x-2}$ függvények grafikonját.

Mivel az $x \mapsto 3^{x-2}$ függvény konvex, ezért az $y = x$ egyenletű egyenesnek és az exponenciális függvény grafikonjának legfeljebb két közös pontja van. Az ábráról leolvasható, hogy az egyik közös pont $(3; 3)$, tehát az egyenlet egyik gyöke: $x_1 = 3$, a másiknak az x koordinátája 0 és 1 között van, pontosabb számolással ez adódik: $x_2 \approx 0{,}3$.



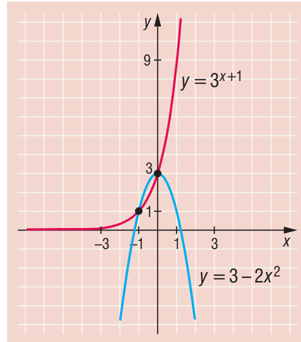
b) Az $x \mapsto 2^x$ és $x \mapsto 3 - x$ függvények közül az első nő, a második csökken, így a grafikonjaiknak legfeljebb egy metszéspontja lehet.

Az egyenlet egyetlen gyöke: $x = 1$.

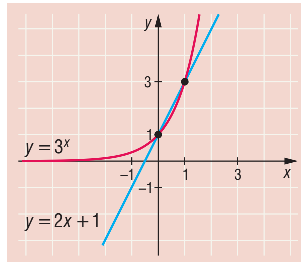


c) Ábrázoljuk itt is az $x \mapsto 3^{x+1}$ és $x \mapsto 3 - 2x^2$ függvény grafikonját egy koordináta-rendszerben.

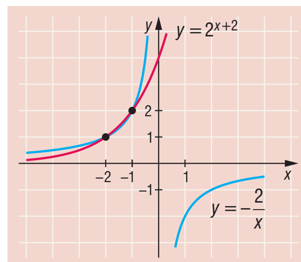
A függvények tulajdonságai alapján látható, hogy két gyök van: $x_1 = -1$ és $x_2 = 0$.



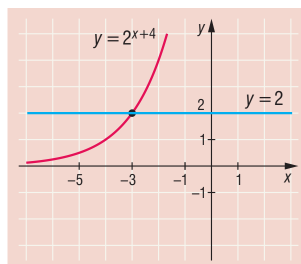
d) Az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenes két helyen metszi az exponenciális függvény grafikonját: az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 1$ helyen. Mivel az $y = 3^x$ egyenletű függvénygörbe konvex, csak ez a két metszéspont van.



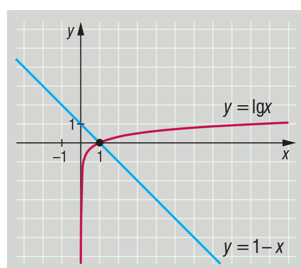
e) Értelmezési tartomány: $x \neq 0$. Két metszéspontja van a két függvény grafikonjának, az $x_1 = -2$ helyen és az $x_2 = -1$ helyen.



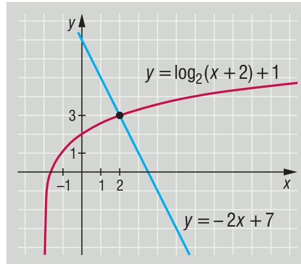
f) Átalakítva az egyenletet kapjuk, hogy $2^{x+4} = 2$. Egy metszéspontja van a két függvény grafikonjának, az $x = -3$ helyen. Ellenőrizve algebrai úton kapjuk, hogy $4 \cdot 2^{x+4} = 8$, amiből $2^{2+x+4} = 2^3$, $x + 6 = 3$, $x = -3$.



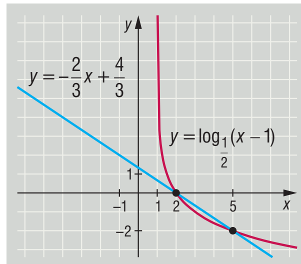
3482 *a)* Az $x \mapsto \lg x$ $(x > 0)$ és $x \mapsto 1 - x$ függvények grafikonja alapján világos, hogy az egyenlet egyetlen gyöke: $x = 1$, hiszen az első függvény nő, a második csökken, így legfeljebb egy közös pont van.



b) Értelmezési tartomány: $x > -2$. A megfelelő függvények grafikonja alapján az egyenlet megoldása $x = 2$. Több megoldás nem lehet, mivel az egyik függvény szigorúan monoton nő, a másik szigorúan monoton csökken.



c) Értelmezési tartomány: $x > 1$. A grafikonok alapján az egyenlet megoldásai: $x_1 = 2$ és $x_2 = 5$. Több megoldás nem lehet, mivel egy egyenesnek és egy konkáv függvény grafikonjának legfeljebb két metszéspontja lehet.



3483 *a)* Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$\left(2^{-1}\right)^{x^2-x-6} > 2^{x^2-x-6},$$

vagyis

$$-x^2 + x + 6 > x^2 - x - 6,$$

azaz, akkor és csak akkor igaz, ha

$$x^2 - x - 6 < 0,$$

ennek megoldása: $-2 < x < 3$.

b) Az adott egyenlet így írható:

$$(3^x + 2)\cdot(2^x - 9) = 0.$$

Mivel $3^x > 0$, ez csak akkor teljesül, ha $2^x = 9$, azaz $x = \log_2 9$.

c) Használjuk fel, hogy

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) = -\log_3(x+1),$$

így a megadott egyenlőtlenség:

$$0 > \log_3(x+1) + \log_3(2-x) = \log_3(x+1)\cdot(2-x),$$

ahol $x + 1 > 0$ és $2 - x > 0$, azaz $-1 < x < 2$.

A $0 > \log_3(x+1)\cdot(2-x)$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$0 < (x+1)\cdot(2-x) < 1, \quad \text{azaz} \quad 0 < 2 + x - x^2 < 1.$$

A bal oldali egyenlőtlenség akkor igaz, ha

$$-1 < x < 2.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség:

$$1 + x - x^2 < 0,$$
$$x^2 - x - 1 > 0.$$

Ez akkor és csak akkor igaz, ha

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{vagy} \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tehát az eredeti egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

$$-1 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{vagy} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2.$$

d) Két esetet érdemes külön vizsgálni: ha az alap 0 és 1 közé esik (I. eset), illetve, ha az alap nagyobb 1-nél (II. eset).

I. eset:

$$0 < 2x < 1,$$
$$0 < x < 0{,}5.$$

Ekkor a logaritmusfüggvény csökken, tehát az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következőkkel:

$$x^2 - 5x + 6 > 2x.$$

Azaz

$$(x-6)\cdot(x-1) > 0,$$

amiből:

$$x < 1 \text{ vagy } x > 6.$$

Eredményünket az I. eset alaphalmazával összevetve: $0 < x < 0{,}5$.

II. eset: Mivel $0{,}5 < x$, ekkor a logaritmusfüggvény nő, tehát az eredeti egyenlőtlenség a következővel ekvivalens:

$$0 < x^2 - 5x + 6 < 2x.$$

A bal oldali egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x < 2 \quad \text{vagy} \quad x > 3,$$

a jobb oldali pedig akkor, ha

$$1 < x < 6.$$

Tehát mindkettő teljesül, ha

$$1 < x < 2 \quad \text{vagy} \quad 3 < x < 6.$$

Az egyenlőtlenség megoldása:

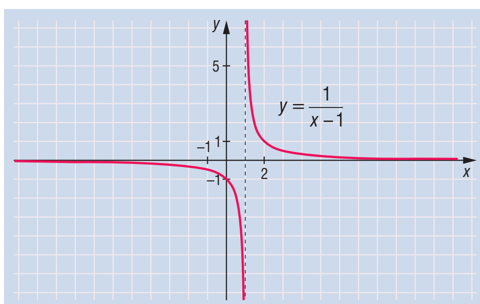
$$0 < x < 0{,}5, \quad \text{vagy} \quad 1 < x < 2, \quad \text{vagy} \quad 3 < x < 6.$$

3484 *a)* Az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmusfüggvény csökken, ezért az egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$0 < \log_3 \frac{x+1}{x-1} \le 1.$$

A 3-as alapú logaritmusfüggvény nő, így a kapott egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$1 < \frac{x+1}{x-1} \le 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{x-1} \le 1.$$



Az ábra alapján a megoldás: $2 \le x$.

b) Az előző feladat megoldásához hasonlóan az adott egyenlőtlenség a következő alakra hozható:

$$0 < \log_5(x^2 - 4) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x^2 - 4 < 5.$$

A megoldás: $\sqrt{5} < |x| < 3$, azaz $-3 < x < -\sqrt{5}$, vagy $\sqrt{5} < x < 3$.

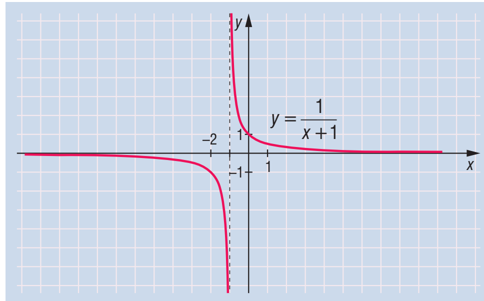
c) Itt is az előzőhöz hasonló gondolatmenet szerint:

$$0 < \log_2 \frac{x}{1+x} < 1.$$

A kapott egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$1 < \frac{x}{1+x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > \frac{1}{x+1} > -1.$$

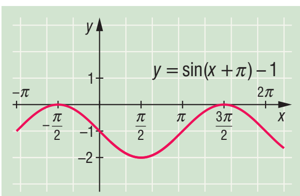
Az ábra alapján a megoldás: $x < -2$.



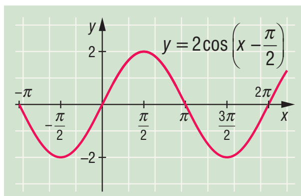
Trigonometrikus függvények – megoldások

3485 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Hamis. *e)* Hamis.

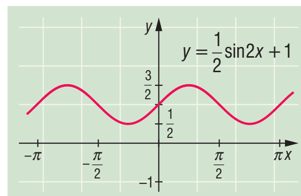
3486 *a)*



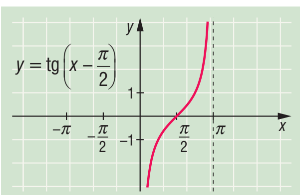
b)



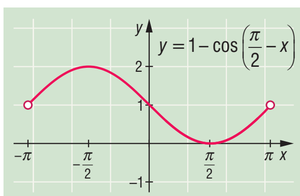
c)



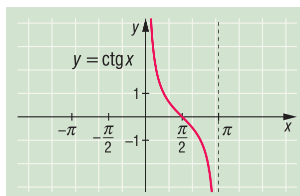
d)



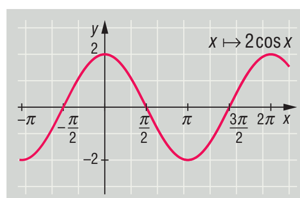
e)



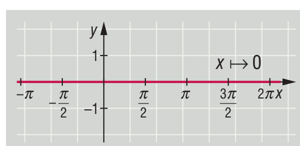
f)



3487 *a)* $x \mapsto 2\cos x$.



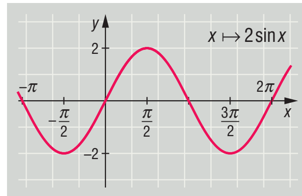
b) $x \mapsto -\sin x + \sin x = 0$.



c) $x \mapsto \cos x + \cos x = 2\cos x$. (lásd *a)* ábra)

d) $x \mapsto \sin x - \sin x = 0$. (lásd *b)* ábra)

e) $x \mapsto 2\sin x$.



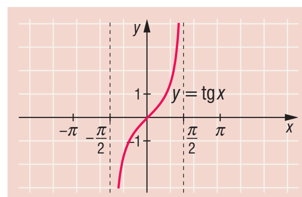
3488 Megoldás:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0.$$

3489 A függvény hozzárendelési szabálya: $f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

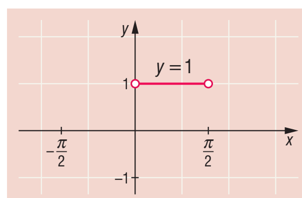
a) $\sqrt{3}+3$; *b)* $\frac{1}{6}$; *c)* -2.

3490 *a)* Mivel $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$, ezért valójában a tangensfüggvényt kell ábrázolni a megfelelő intervallumon.



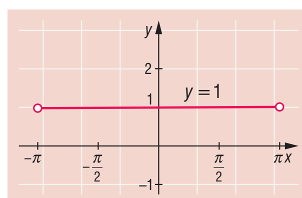
b) Mivel $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg} x=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, ezért:

$$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1.$$

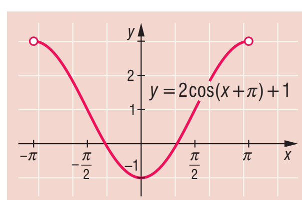


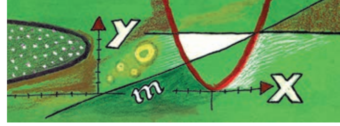
c) Mivel $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, ezért:

$$\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

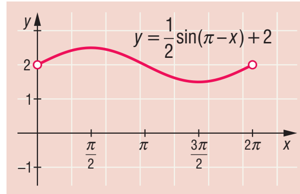


d) A függvény grafikonja az ábrán látható.





e) A függvény grafikonja az ábrán látható.



3491 *a)* $y(2) = 2 \cdot \sin(4 \cdot 2) = 2 \cdot \sin 8 \approx 1{,}98.$

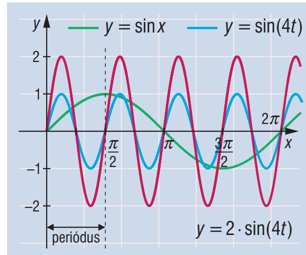
b) $2 = 2 \cdot \sin(4t)$, amiből:

$$1 = \sin(4t),$$

$$4t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$t \approx 0{,}39 + \frac{k\pi}{2}.$$



c) $t \mapsto 2 \cdot \sin(4t)$ függvény periodikus, periódusa $\frac{\pi}{2}$, ez egyben egy teljes rezgés periódusa.

d) A test pályája az ábrán látható.

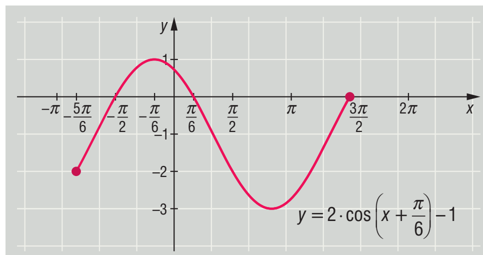
3492 *a)* $f(0) = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1;$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} - 1 = 0;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = -2;$$

$$f(\pi) = 2 \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1 = -\sqrt{3} - 1.$$

b)

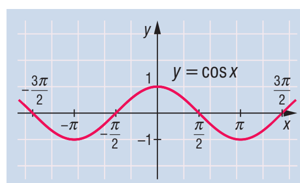


c) Értékkészlet: $y \in [-3; 1]$; zérushely: $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$.

Menete: $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$-on és $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$-on nő, $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$-on csökken.

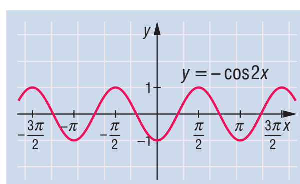
3493 *a)* A tanult azonosság szerint:

$$f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



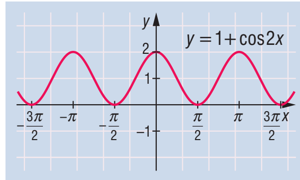
b) Alkalmazzuk a megismert azonosságokat:

$$g(x) = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



c) Itt is az azonosságok segítenek:

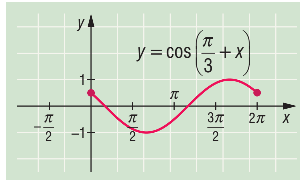
$$h(x) = 2 \cdot \cos^2 x = 1 - \sin^2 x + \cos^2 x = 1 + \cos 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



3494 *a)* Vegyük észre, hogy az együtthatók nevezetes szögek szögfüggvényei, így

$$\frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin x =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$



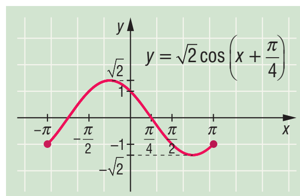
A függvény grafikonját az ábra mutatja.

A függvény minimuma –1, amit az $x = \frac{2\pi}{3}$ helyen vesz el. A függvény maximuma 1, amit az $x = \frac{5\pi}{3}$ helyen vesz fel. A függvény szigorúan monoton csökkenő a $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, valamint az $\left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$ intervallumokon, és szigorúan monoton növekvő a $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ intervallumon.

b) Alakítsuk át a függvényt definiáló kifejezést:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cdot \left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

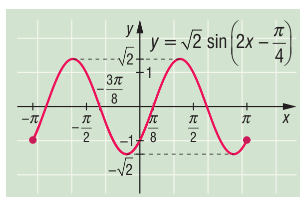


A függvény $\left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right]$-ban és $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$-ban nő, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$-ban csökken.

A maximuma $\sqrt{2}$, az $x = -\frac{\pi}{4}$ helyen, minimuma $-\sqrt{2}$, az $x = \frac{3\pi}{4}$ helyen.

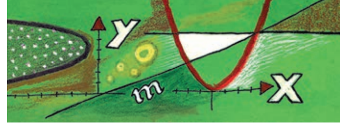
c) A kifejezést átalakítva:

$$h(x) = \sqrt{2} \cdot \left(\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$



A függvény $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{8}\right]$-ban, $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$-ban és $\left[\frac{7\pi}{8}; \pi\right]$-ban nő, $\left[-\frac{5\pi}{8}; -\frac{\pi}{8}\right]$-ban és $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$-ban pedig csökken.

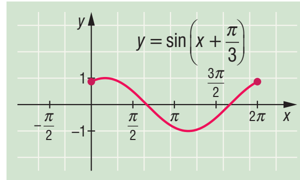
Minimuma $-\sqrt{2}$, az $x = -\frac{\pi}{8}$ és $x = \frac{7\pi}{8}$ helyeken, maximuma $\sqrt{2}$, az $x = -\frac{5\pi}{8}$ és $x = \frac{3\pi}{8}$ helyeken.



d) Addíciós összefüggés alapján:

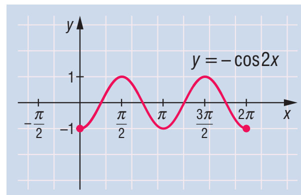
$$\frac{1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x=$$

$$=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$



A függvény az $x=\frac{\pi}{6}$ helyen veszi fel maximumát, amelynek értéke 1. Minimumának értéke –1, amelyet az $x=\frac{7\pi}{6}$ helyen vesz fel. A függvény szigorúan monoton nő a $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$, valamint a $\left[\frac{7\pi}{6};2\pi\right]$ intervallumokon, és szigorúan monoton csökkenő a $\left[\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right]$ intervallumon.

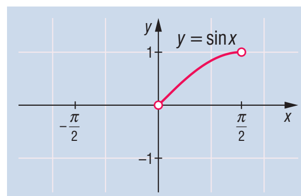
3495 *a)* Alkalmazzunk azonosságokat $(0\le x\le 2\pi)$:
$\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\cos 2x.$



b) Trigonometrikus összefüggéseket felhasználva:

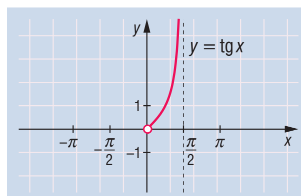
$$g(x)=\frac{1-\cos 2x}{2\cdot\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{2\cdot\sin x}=$$

$$=\frac{2\cdot\sin^2 x}{2\cdot\sin x}=\sin x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$



c) Alakítsuk át a törtet:

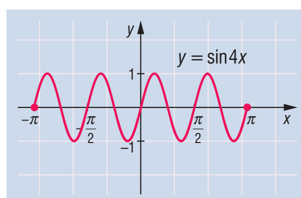
$$h(x)=\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{2\cdot\sin^2 x}{2\cdot\sin x\cdot\cos x}=\operatorname{tg} x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$



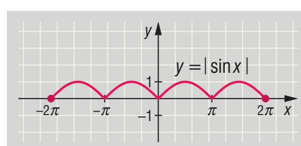
d) Az addíciós tételek alkalmazásával kapjuk, hogy:

$$k(x)=4\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)=$$

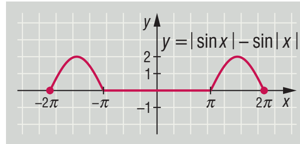
$$=2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x=\sin 4x.$$



3496 *a)* $x\mapsto|\sin x|,\ -2\pi\le x\le 2\pi$



b) $x \mapsto |\sin x| - \sin|x|,\ -2\pi \le x \le 2\pi$:



Ha $-2\pi \le x < -\pi$, akkor
$$|\sin x| - \sin|x| = |\sin x| - \sin(-x) = \sin x + \sin x = 2\cdot\sin x.$$

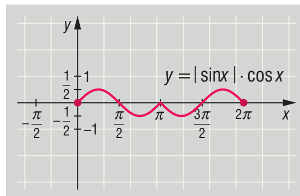
Ha $-\pi \le x < 0$, akkor
$$|\sin x| - \sin|x| = |\sin x| - \sin(-x) = -\sin x + \sin x = 0.$$

Ha $0 \le x < \pi$, akkor
$$|\sin x| - \sin|x| = |\sin x| - \sin x = \sin x - \sin x = 0.$$

És végül ha $\pi \le x \le 2\pi$, akkor
$$|\sin x| - \sin|x| = |\sin x| - \sin x = -\sin x - \sin x = -2\cdot\sin x.$$

A függvény grafikonját az ábra mutatja.

c) Mivel $0 \le x \le \pi$-ben $\sin x \ge 0$, és $\pi \le x \le 2\pi$-ben $\sin x \le 0$, így:

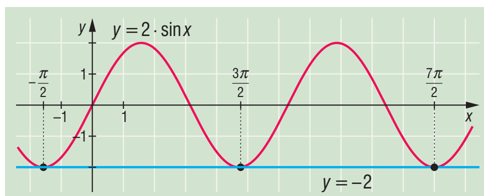


$$|\sin x|\cdot\cos x = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x, & \text{ha} \quad 0 \le x \le \pi, \\ -\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x, & \text{ha} \quad \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

A függvény grafikonja az $x = \pi$ egyenletű egyenesre szimmetrikus.

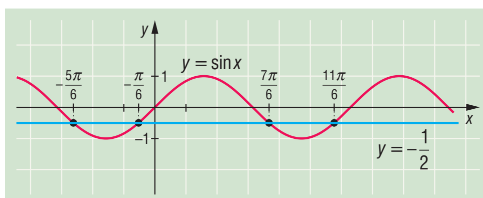
Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (kiegészítő anyag) – megoldások

3497 *a)* A megfelelő függvény grafikonja alapján:
$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



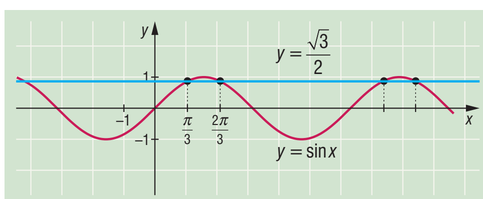
b) Az egyenletből adódik, hogy $\sin x = -\dfrac{1}{2}$.

A szinuszfüggvény grafikonja alapján:
$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{és} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



c) Az egyenletből adódik, hogy $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

A szinuszfüggvény grafikonja alapján:
$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{és} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



d) Mivel $\sin x \leq 1$ és $\cos x \leq 1$, ezért

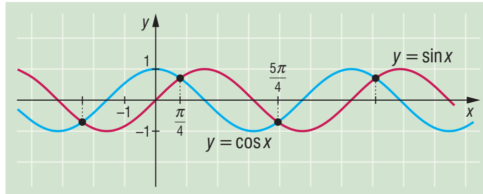
$$2 \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x \leq 5$$

és itt az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\sin x = 1$ és $\cos x = 1$.

Mivel az utóbbi két egyenlőség egyidejűleg nem teljesülhet, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

e) A szinuszfüggvény és a koszinuszfüggvény grafikonja alapján:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{és} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



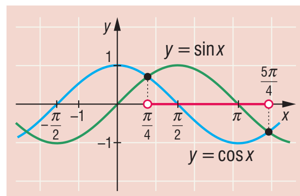
3498 *a)* A koszinuszfüggvény értékkészlete $[-1; 1]$, ezért $\cos x < 1$ minden olyan x-re teljesül, amelyre $\cos x \neq 1$.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

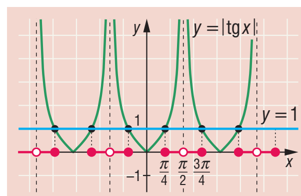
b) A szinusz- és koszinuszfüggvény grafikonjáról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



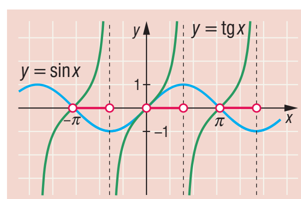
c) A függvénygrafikonok alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



d) A tangens- és szinuszfüggvények grafikonját közös koordinátarendszerben felrajzolva látható, hogy az egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

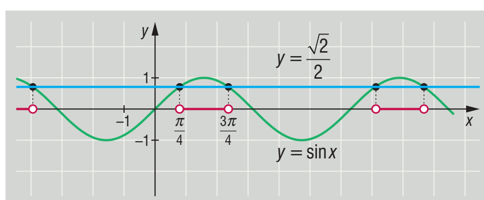
$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



3499 *a)* A szinuszfüggvény értékkészlete $[-1; 1]$, ezért az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

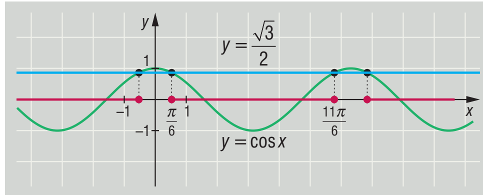
b) A szinuszfüggvény grafikonja alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



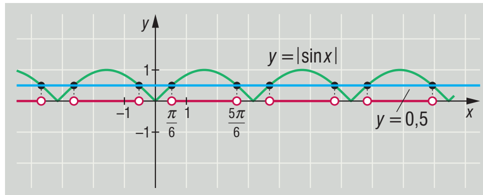
c) A koszinuszfüggvény grafikonja alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{11\pi}{6}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



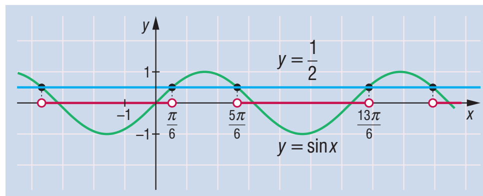
d) Az $f(x)=|\sin x|$ függvény grafikonja alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{6}+k\pi < x < \frac{5\pi}{6}+k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



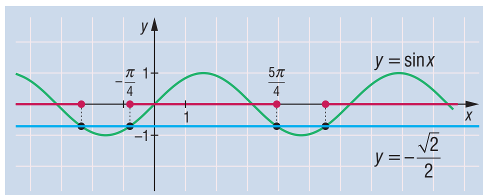
3500 *a)* A függvénygrafikon alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{5\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{13\pi}{6}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



b) Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{4}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

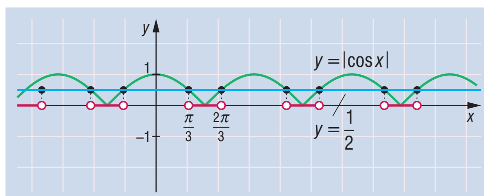


c) Mindkét oldal négyzetgyökét véve az egyenlőtlenség a következő alakban írható:

$$|\cos x| \le \frac{1}{2}.$$

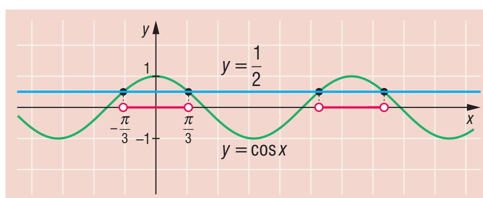
Az $f(x)=|\cos x|$ függvény ábrázolása után az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{3}+k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3}+k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



3501 *a)* A koszinuszfüggvény értékkészlete $[-1;\,1]$, ezért $\cos x+3>0$ minden x-re teljesül. Ebből következik, hogy a szorzat másik tényezőjének is pozitívnak kell lennie, azaz

$$\cos x > \frac{1}{2}.$$



A függvénygrafikonok alapján az egyenlőtlenség megoldása:

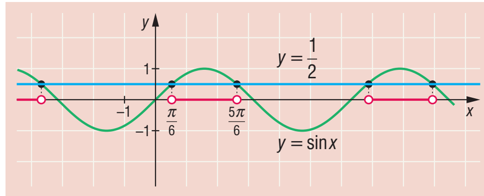
$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{\pi}{3}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Az $y = \sin x$ helyettesítés után az egyenlőtlenség a következő alakban írható:

$$2y^2 + y - 1 > 0.$$

A bal oldalon álló másodfokú függvény zérushelyei:

$$y_1 = -1 \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$



A másodfokú függvény grafikonja „felfelé nyíló” parabola, ezért az egyenlőtlenség megoldása:

$$y < -1 \quad \text{vagy} \quad y > \frac{1}{2}.$$

A $\sin x < -1$ egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

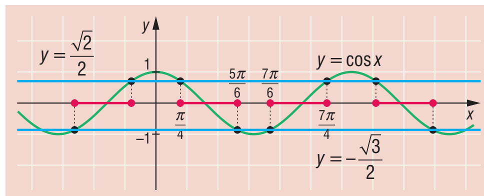
A $\sin x > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldása a függvénygrafikonok alapján:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Az $y = \cos x$ helyettesítés után az egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$4 \cdot y^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \cdot y - \sqrt{6} \le 0.$$

A bal oldalon álló másodfokú függvény zérushelyeire:



$$y_{1,2} = \frac{-2 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \pm \sqrt{4 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 + 16 \cdot \sqrt{6}}}{8} = \frac{-2 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \pm \sqrt{20 + 8 \cdot \sqrt{6}}}{8} =$$

$$= \frac{-2 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \pm \sqrt{4 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2}}{8} = \frac{-2 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \pm 2 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{8},$$

így $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mivel a másodfokú függvény grafikonja „felfelé nyíló” parabola, ezért a függvény a két zérushelye között vesz fel negatív értéket, amiből következik, hogy

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{azaz} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A függvénygrafikonok alapján az egyenlőtlenség megoldása:

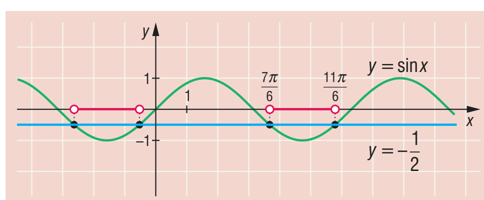
$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

d) Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ezért az egyenlőtlenség

$$2 \cdot \sin^2 x - 9 \cdot \sin x - 5 > 0$$

alakban írható. A bal oldalon álló, $y = \sin x$-ben másodfokú függvény zérushelyei:

$$y_1 = 5 \quad \text{és} \quad y_2 = -\frac{1}{2}.$$



A másodfokú függvény grafikonja „felfelé nyíló” parabola, ezért értéke akkor pozitív, ha

$$y < -\frac{1}{2}, \quad \text{vagy} \quad y > 5, \qquad \text{azaz} \qquad \sin x < -\frac{1}{2}, \quad \text{vagy} \quad \sin x > 5,$$

Az utóbbi egyenlőtlenség egyetlen számra sem teljesül, ezért $\sin x < -\frac{1}{2}$.

A szinuszfüggvény grafikonja alapján az egyenlőtlenség megoldása:

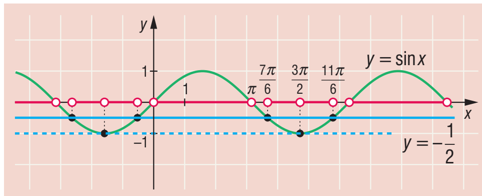
$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

e) Az egyenlőtlenség bal oldalán kiemelve $\sin x$-et:

$$\sin x \cdot (2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \sin x + 1) > 0,$$

majd a zárójelen belüli kifejezést is szorzattá alakíthatjuk, így azt kapjuk, hogy

$$\sin x \cdot (2 \cdot \sin x + 1) \cdot (\sin x + 1) > 0.$$



Mivel a bal oldalon álló szorzat pozitív, ezért egyetlen tényezője sem lehet 0, így $\sin x \neq 0$, $\sin x \neq -\frac{1}{2}$ és $\sin x \neq -1$. Az utóbbi feltétel mellett viszont $\sin x + 1 > 0$, ezért az egyenlőtlenség mindkét oldalát eloszthatjuk az utolsó tényezővel, így

$$\sin x \cdot (2 \cdot \sin x + 1) > 0.$$

A kapott szorzat akkor pozitív, ha $\sin x > 0$ vagy $-1 < \sin x < -\frac{1}{2}$.

A függvénygrafikonok alapján az egyenlőtlenség megoldása:

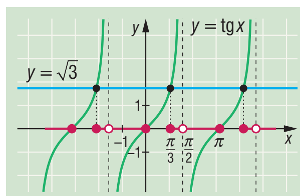
$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \quad \text{vagy} \quad \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \; x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3502 *a)* Rendezés és szorzattá alakítás után:

$$\operatorname{tg} x \cdot \left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right) \geq 0.$$

A bal oldalon álló szorzat pontosan akkor nemnegatív, ha $\operatorname{tg} x \leq 0$ vagy $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$. A tangensfüggvény grafikonja alapján az egyenlőtlenség megoldása:

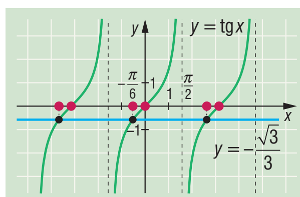
$$\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \pi + k\pi, \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



b) A bal oldal szorzattá alakítva:

$$\operatorname{tg} x \cdot \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

így $\operatorname{tg} x = 0$ vagy $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

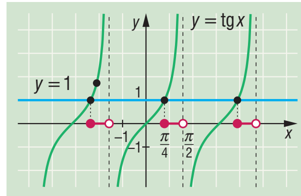


A tangensfüggvény grafikonja alapján:

$$x = k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Az egyenlőtlenség ekvivalens alakja: $\operatorname{tg} x \geq 1$.
A tangensfüggvény tulajdonságai alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



d) Ha $\operatorname{tg} x \neq 0$, akkor mindkét oldalt szorozhatjuk a jobb oldal nevezőjével, így

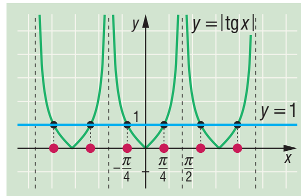
$$\operatorname{tg}^2 x = 1,$$

majd mindkét oldalból négyzetgyököt vonva

$$|\operatorname{tg} x| = 1.$$

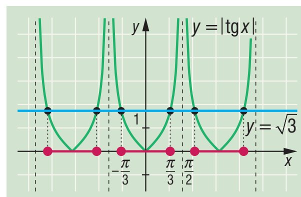
Az $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ függvény grafikonja alapján az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

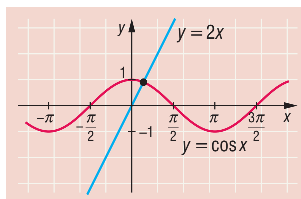


e) Az $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ függvény grafikonja alapján az egyenlet megoldása:

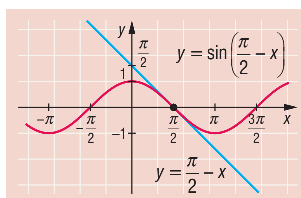
$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



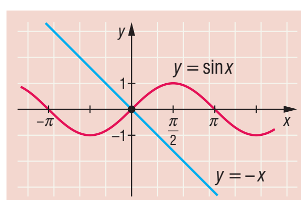
3503 *a)* Ábrázoljuk az egyenlőség két oldalán álló kifejezéssel megadható függvények grafikonját.
Erről leolvasható, hogy 0 és $\frac{\pi}{2}$ között van egy gyöke az egyenletnek.



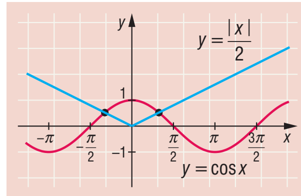
b) Az ábráról leolvasható, hogy egy gyöke van az egyenletnek, ez az $x = \frac{\pi}{2}$.



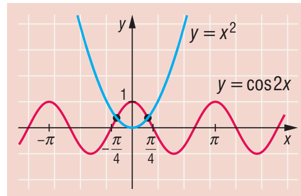
c) Látható, hogy az egyetlen gyök $x = 0$.



d) Az ábra alapján az egyenletnek két gyöke van.



e) Az egyenletnek két gyöke van.



3504 *a)* Ha $|\sin x| < 1$ és $|\cos x| < 1$, akkor $\sin^6 x < \sin^2 x$ és $\cos^6 x < \cos^2 x$, tehát

$$\sin^6 x + \cos^6 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Így az egyenlet csak akkor teljesülhet, ha vagy $|\sin x| = 1$ és akkor $\cos x = 0$, vagy $|\cos x| = 1$ és akkor $\sin x = 0$. Az egyenlet gyökei tehát:

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Az *a)* feladat megoldásához hasonlóan itt is azt kapjuk, hogy az egyetlen gyöksorozat:

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Az egyenlet ekvivalens a következővel:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin 2x} \quad \left(\text{ahol } x \neq k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right), \qquad \text{azaz} \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin 2x = 1.$$

Mivel mindkét tényező abszolút értéke legfeljebb 1, tehát az egyenlőség csak akkor teljesül, ha

$$\text{vagy} \quad (1)\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ és } \sin 2x = 1, \quad \text{vagy} \quad (2)\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ és } \sin 2x = -1.$$

(1) Mindkét feltételt az $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k, \in \mathbb{Z}$ szögek elégítik ki.

(2) Nincs olyan szög, amely egyszerre mindkét feltételt kielégíti.

d) Az előzőhöz hasonló egyenlethez jutunk, ha mindkét oldalt 2-vel osztjuk, és alkalmazzuk az összegzési tételt:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 4x = 1.$$

Itt vagy $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ és $\sin 4x = 1$ (I. eset), vagy $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ és $\sin 4x = -1$ (II. eset).

I. eset:

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{tehát} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

és

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad \text{tehát} \quad x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ezek egyszerre nem teljesülhetnek.

II. eset: Hasonlóan adódik, hogy ez sem lehet egyetlen valós x-re sem.

3505 *a)* A nevezőt vizsgáljuk:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha:

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mivel a nevező nem lehet 0, ezért:

$$x \ne \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Minden, az értelmezési tartományban lévő x-re a nevező pozitív, tehát a tört értéke akkor pozitív, ha a számláló is pozitív:

$$\sin^2 x > \frac{1}{4},$$

$$|\sin x| > 0{,}5.$$

Innen kapjuk a megoldást:

$$\frac{\pi}{6} + n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + n\pi, \quad x \ne \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

b) A tangensfüggvény értelmezése alapján:

$$x \ne \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{azaz} \quad x \ne \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$3x \ne \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad \text{azaz} \quad x \ne \frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{\pi}{3}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Az utóbbi két kikötést elég feltenni, az első benne van az utolsóban.

Alkalmazzuk a tangensfüggvényre megismert azonosságot:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{tg} 3x = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x}.$$

Ezeket behelyettesítve, majd elvégezve a műveleteket az egyenlőtlenség bal oldalán, azt kapjuk, hogy:

$$\operatorname{tg}^4 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x + 1 = (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 > 0.$$

Ez minden olyan $x \in \mathbb{R}$-re érvényes, amire az eredeti kifejezésnek értelme van.

c) Használjuk fel a következő azonosságokat:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\big)$$

úgy, hogy a $\sin x \cdot \sin 3x$ szorzatot alakítjuk át:

$$\sin 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = \frac{4}{5},$$

$$2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x - 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = \frac{16}{5},$$

$$\sin 4x - 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = \frac{16}{5}.$$

A jobb oldal nagyobb mint 3, a bal oldal viszont 3-nál nagyobb nem lehet, mert $\sin 4x \le 1$ és $-2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x \le 2.$ Így nincs olyan $x \in \mathbb{R}$, amire az egyenlőség teljesülne.

3506 *a)* Alkalmazzuk a megfelelő azonosságokat:

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x.$$

Mivel $0 \le \sin^2 2x \le 1$, nyilván teljesül, hogy

$$\frac{1}{4} \le f(x) \le 1.$$

b) Használjuk fel a $2 \cdot \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ és $2 \cdot \cos^2 x = 1 + \cos 2x$, valamint a $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ ismert azonosságot. Ezek alapján:

$$g(x) = 3 + 3 \cdot \sin 2x + \cos 2x = 3 + \sqrt{10} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \cos 2x\right).$$

Mivel $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1$, van olyan α valós szám, hogy $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ és $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ezek alapján $g(x)$ így írható:

$$g(x) = 3 + \sqrt{10} \cdot \sin(2x + \alpha).$$

Innen következik, hogy:

$$3 - \sqrt{10} \le g(x) \le 3 + \sqrt{10}.$$

c) A megfelelő azonosságok alapján:

$$h(x) = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3 + \sin 2x},$$

tehát

$$\frac{7}{2} \cdot \sqrt{2} \le h(x) \le 7.$$

3507 Tegyük fel, hogy $n > 0$ egész és az f függvény 3π szerint periodikus. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$-re:

$$f(x + 3\pi) = \cos n(x + 3\pi) \cdot \sin\frac{5}{n}(x + 3\pi) = \cos nx \cdot \sin\frac{5}{n}x = f(x).$$

Legyen $x = 0$, ekkor:

$$\cos n3\pi \cdot \sin\frac{15\pi}{n} = 0.$$

Mivel $|\cos n3\pi| = 1$, így $\sin\frac{15\pi}{n} = 0$, ami akkor és csak akkor igaz, ha $\frac{15}{n}$ egész szám, azaz n osztója 15-nek, tehát (tekintettel arra, hogy n pozitív) $n = 1, 3, 5, 15$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott n értékek mindegyike megfelelő.

3508 Az addíciós tétel szerint az egyenlet így írható:

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5,$$

amiből:

$$(1) \quad 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

illetve

$$(2) \quad 3x + \frac{\pi}{4} = 5 \cdot \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Az (1)-ből:

$$x = -\frac{\pi}{36} + 2k\cdot\frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

a (2)-ből pedig:

$$x = \frac{7\pi}{36} + 2n\cdot\frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Az első sorozat legkisebb pozitív eleme $k = 1$-hez tartozik, ekkor $x = \frac{23\pi}{36}$.

A második sorozat legkisebb pozitív eleme pedig $n = 0$-hoz tartozik, ekkor $x = \frac{7\pi}{36}$.

Tehát egy egyenlet legkisebb pozitív gyöke $\frac{7\pi}{36}$.

3509 Használjuk fel, hogy $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, az egyenlet így írható:

$$\cos x\,(1 + \cos^2 x) = (2 + \sin^2 3x)\cdot\sqrt{1 + \sin^2 3x}.$$

A bal oldal értéke legfeljebb 2, ez akkor teljesül, ha $\cos x = 1$. A jobb oldal értéke legalább 2, ez akkor teljesül, ha $\sin 3x = 0$. Az egyenlőség tehát csak akkor lehet igaz, ha $\cos x = 1$ és $\sin 3x = 0$, azaz $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3510 Az egyenlet értelmezési tartománya: $0 \le x \le a$. Az egyenlet gyökei azok a valós számok, amelyekre teljesül, hogy

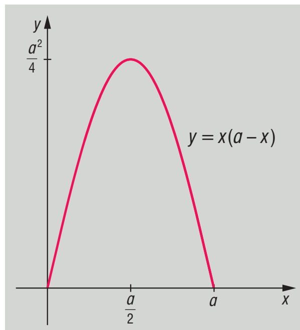
$$\pi\cdot\sqrt{x\cdot(a-x)} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

azaz

$$\sqrt{x\cdot(a-x)} = 2k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ és } k \ge 0.$$

Ebből adódik, hogy:

$$x\cdot(a-x) = (2k+0{,}5)^2, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ és } k \ge 0.$$



Ha felvázoljuk az $x \mapsto x\cdot(a-x)$ függvény grafikonját, akkor láthatjuk, hogy az egyenletnek $(2k+0{,}5)^2 < \frac{a^2}{4}$ esetén kettő, ha pedig $(2k+0{,}5)^2 = \frac{a^2}{4}$, akkor csak egy gyöke van. Ahhoz tehát, hogy összesen 2001 gyöke legyen az egyenletnek, az kell, hogy $(2\cdot 1000 + 0{,}5)^2 = \frac{a^2}{4}$ teljesüljön, amiből

$$a = 4001$$

adódik. Ekkor $k = 0, 1, 2, \ldots, 999$ esetén két-két megoldás, $k = 1000$ esetén pedig egy megoldás adódik, azaz a megoldások száma valóban 2001.

3511 A négyzetgyök értelmezése miatt teljesülnie kell, hogy $0 \le \pi^2 - x^2$, azaz $|x| \le \pi$, tehát:

$$-\pi \le x \le \pi.$$

Ennek megfelelően:

$$-\frac{\pi}{3} \le \sqrt{\pi^2 - x^2} - \frac{\pi}{3} \le \frac{2\pi}{3},$$

és a szinuszfüggvény értékkészlete alapján:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le f(x) \le 1.$$

3512 Alakítsuk át a $\sin x$-et tartalmazó törtet:

$$\frac{5\cdot \sin x - 3}{\sin x + 1} = 5 - \frac{8}{\sin x + 1}.$$

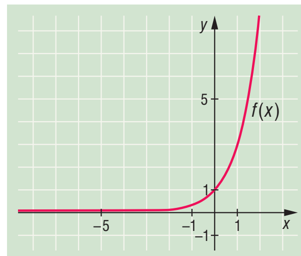
Mivel $0 < \sin x + 1 \le 2$ ezért $\frac{8}{\sin x + 1} \ge 4$, és így $5 - \frac{8}{\sin x + 1} \le 1$, tehát:

$$g(x) = 0{,}1\cdot \frac{5\cdot \sin x - 3}{\sin x + 1} \le 0{,}1.$$

A függvény értékkészlete tehát a $\left]-\infty;\, 0{,}1\right]$ intervallum.

Vegyes feladatok – megoldások

3513 *a)* Az $f(3) = 27$ feltétel miatt $a^3 = 27$, amiből $a = 3$. Az $f(x) = 3^x$ függvény grafikonját az ábra mutatja.

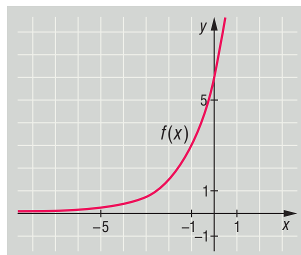


b) A $3^x = \frac{1}{3}$ egyenlet megoldása $x = -1$, azaz a függvény az $\frac{1}{3}$ értéket -1-ben veszi fel.

A függvény a $\sqrt{3}$ értéket az $x = \frac{1}{2}$-ben veszi fel.

3514 Az f függvény grafikonját az ábra mutatja.

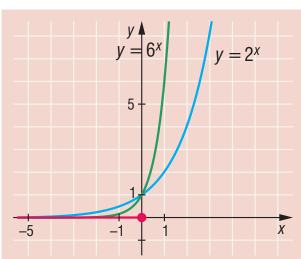
x	2	–1	–2	3
$f(x)$	24	3	$\frac{3}{2}$	48



3515 A függvény hozzárendelési szabálya:

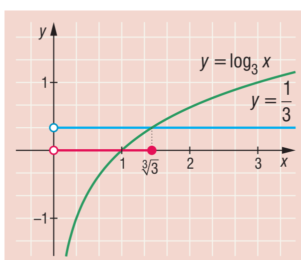
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2.$$

3516 *a)*



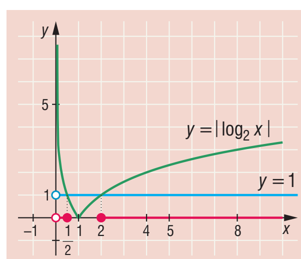
$x \le 0$;

b)



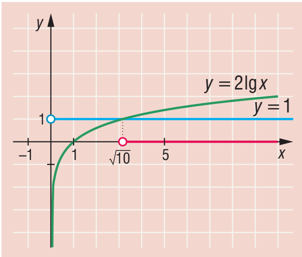
$0 < x \le \sqrt[3]{3}$;

c)



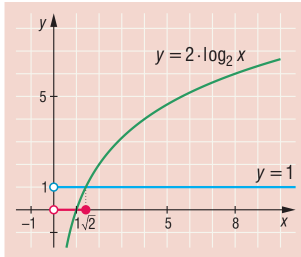
$0 < x \le \frac{1}{2}$, vagy $x \ge 2$;

d)



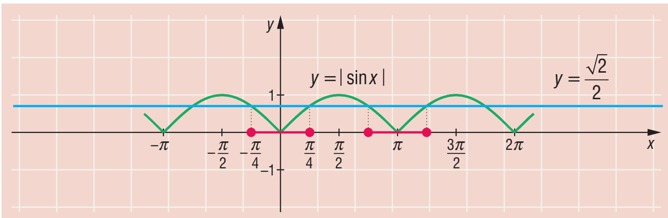
$x > \sqrt{10}$;

e)



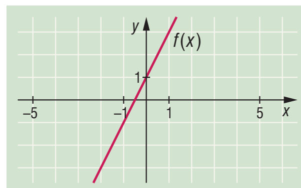
$0 < x \leq \sqrt{2}$;

f)

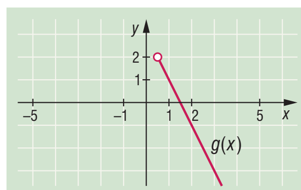


$-\dfrac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

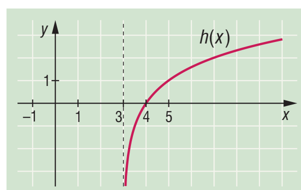
3517 *a)* $f(x) = \log_3 3^{2x} + 1 = 2x + 1, \quad (x \in \mathbb{R});$



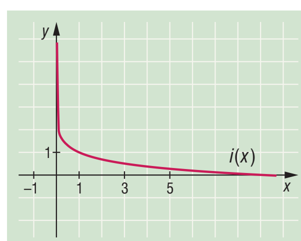
b) $g(x) = 2 - 3^{\log_3(2x-1)} = 2 - (2x - 1) = -2x + 3, \quad \left(x > \dfrac{1}{2}\right);$



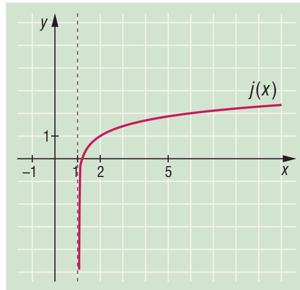
c) $h(x) = \log_2 \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \log_2 (x - 3), \quad (x > 3);$



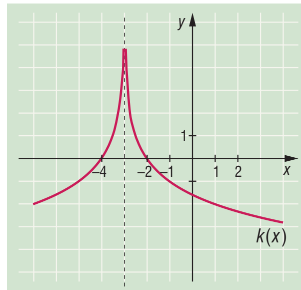
d) $i(x) = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot \log_3 x = -\dfrac{1}{2} \cdot \log_3 x + 1, \quad (x > 0);$



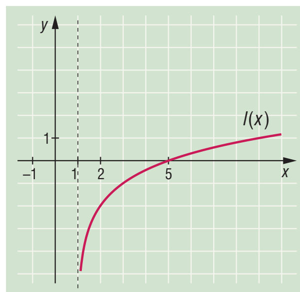
e) $j(x)=\log_5\left[\frac{1}{3}\cdot(3x-3)\right]+1=\log_5(x-1)+1,\quad (x>1);$



f) $k(x)=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{(x+3)^2}=\log_{\frac{1}{2}}|x+3|,\quad (x\neq-3);$



g) $l(x)=\log_2\frac{1}{2}\cdot(2x-2)-2=\log_2(x-1)-2,\quad (x>1).$



3518 A függvény hozzárendelési szabálya: $f(x)=-2\cdot\sin 2x-1$.

3519 *a)* A megadott adatokból felírható a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & -1=\log_a 1+b\\ (2) & 0=\log_a 2+b\end{array}\right\}\quad a>0,\ a\neq 1.$$

(1)-ből kivonva a (2)-t:

$$-1=\log_a 1-\log_a 2,$$

$$-1=\log_a\frac{1}{2},$$

$$\Updownarrow$$

$$a^{-1}=2^{-1},$$

$$a=2.$$

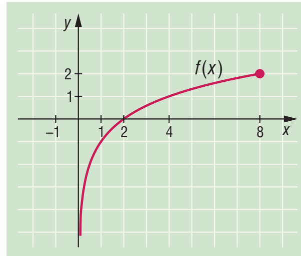
(1)-be visszaírva a kapott a értéket:

$$-1=\log_2 1+b\ \Rightarrow\ b=-1.$$

A kapott függvény:

$$g(x)=\log_2 x-1\ \ (x\in\,]0;\,8]).$$

b) A függvény görbéje az ábrán látható.



c) Értékkészlet: $g(x) \leq 2$, vagy másként: $y \in]-\infty; 2]$.

d) $A(5; 1)$ pont esetén: $y = 1$ és $x = 5$, tehát:

$$1 = \log_2 5 - 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = \log_2 5 \quad \Rightarrow \quad 4 \neq 5.$$

Az A pont nem illeszkedik a grafikonra.

$B(2; 0)$ esetén: $y = 0$ és $x = 2$, tehát:

$$0 = \log_2 2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \log_2 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1.$$

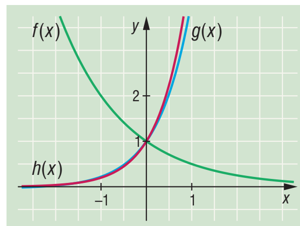
A B pont illeszkedik a grafikonra.

$C(16; 3)$ esetén: $y = 3$ és $x = 16$, tehát:

$$3 = \log_2 16 - 1 \quad \Rightarrow \quad 4 - 1 = 3.$$

De a függvény értelmezési tartománya $]0; 8]$, ezért nem illeszkedik C az adott függvény grafikonjára.

3520 *a)* $f(x)$ esetén:



$$f(-1) = 2, \quad \text{ekkor} \quad 2 = a^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

A hozzárendelési szabály:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

$g(x)$ esetén:

$$g(2) = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 16 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4, \text{ mivel } a > 0.$$

A hozzárendelési szabály:

$$g(x) = 4^x.$$

$h(x)$ esetén:

$$h(2) = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 25 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 5, \text{ mivel } a > 0.$$

A hozzárendelési szabály:

$$h(x) = 5^x.$$

c) Az értékkészletek:

$$f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 4\right], \qquad g(x) \in \left[\frac{1}{16}; 4\right], \qquad h(x) \in \left[\frac{1}{25}; 5\right].$$

d) Igen, a függvények mindkét esetében az $y = 2$ értéket veszik fel:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \qquad \text{és} \qquad f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2.$$

3521 *a)* Az A pont akkor és csak akkor illeszkedik az adott függvény grafikonjára, ha $p^2 = 9$, $p > 0$, azaz $p = 3$.

b) A logaritmus alapja csak 1-től különböző pozitív szám lehet, tehát $p > 0$, $p \neq 1$, és $\log_p 0{,}5 = 1$, azaz $p = 0{,}5$.

c) A függvény értelmezési tartománya miatt $-\pi < x + p < \pi$, tehát $x = 0$-ra $-\pi < p < \pi$, és $\sin p = 1$. Ebből következik, hogy $p = \dfrac{\pi}{2}$.

d) Az értelmezési tartomány miatt $p > 0$ és $\log_2 p = 0$, tehát $p = 1$.

3522 *a)* A négyzetgyök miatt $4 - x \geq 0 \iff 4 \geq x$.

A tört nevezője nem lehet 0, ezért $\lg(x-3) \neq 0 \iff x - 3 \neq 1,\ x \neq 4$.

A logaritmus miatt $x - 3 > 0 \iff x > 3$. Tehát : $x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4$, vagyis: $x \in \,]3; 4[$.

b) A logaritmus miatt:

$$x^2 + 4x - 5 > 0 \iff x < -5 \text{ vagy } x > 1.$$

A négyzetgyök miatt:

$$\lg(x^2 + 4x - 5) \geq 0 \iff x^2 + 4x - 5 \geq 1 \iff x^2 + 4x - 6 \geq 0 \iff$$

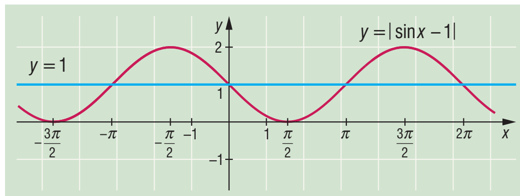
$$\iff x < -\sqrt{10} - 2 \quad \text{vagy} \quad x > \sqrt{10} - 2.$$

Értelmezési tartomány:

$$x \in \,]-\infty; -\sqrt{10} - 2[\quad \text{vagy} \quad x \in \,]\sqrt{10} - 2; \infty[.$$

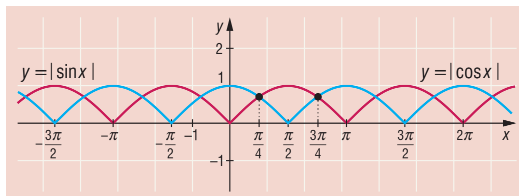
3523 Az ábráról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha:

$$(2k+1) \cdot \pi \leq x \leq (2k+2) \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



3524 Az ábráról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



3525 *a)* Mivel $\sin x \leq 1$, és a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan nő:

$$2^{\sin x} \leq 2,$$

és a 2 értéket ott veszi fel, ahol $\sin x = 1$, azaz az $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ helyeken.

b) A $|\cos x| \leq 1$, és az egyenlőség csak az $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ helyeken teljesül. Ezért a 3-as alapú exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$3 \cdot 3^{|\cos x|} \leq 3^2 = 9.$$

A 9 értéket csak az $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ helyeken veszi fel a függvény.

c) A szinuszfüggvény tulajdonsága miatt $1 - \sin x \leq 2$, és itt az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\sin x = -1$, azaz $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Az 5 alapú exponenciális függvény szigorúan nő, ezért:

$$5^{1 - \sin x} \leq 5^2 = 25.$$

Az egyenlőség csak az $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ helyeken teljesül.

3526 Az f függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 1, & \text{ha} \quad x < 0, \\ -1 \cdot (x-2)^2 + 6, & \text{ha} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

azaz $a = \dfrac{1}{3}$, $b = 1$, $p = -1$, $u = 2$ és $v = 6$.

3527 *a)* Az f függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(n) = 500\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

b) A feltételek szerint:

$$500\,000 \cdot 1{,}05^n \geq 500\,000 \cdot 1{,}5, \qquad \text{azaz} \qquad 1{,}05^n \geq 1{,}5.$$

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve:

$$n \cdot \lg 1{,}05 \geq \lg 1{,}5,$$

aminek megoldása $n \geq 8{,}31$, azaz Gézának legalább 9 teljes évet kell várnia.

3528 *a)* Ha az éves szaporodás mértéke p százalék, akkor

$$10^7 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = 12{,}5 \cdot 10^6,$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = 1{,}25,$$

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[20]{1{,}25} \approx 1{,}0112,$$

amiből $p \approx 1{,}12\%$. Az éves természetes szaporodás mértéke körülbelül $1{,}12\%$.

b) Az ország népessége 1990. január 1-én:

$$10^7 \cdot 1{,}0112^{10} \approx 11\,178\,167,$$

körülbelül 11 178 000 fő volt.

3529 *a)* Az egyenlet ekvivalens átalakításokkal

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$$

alakra hozható. A bal oldalon 1-nél kisebb alapú exponenciális függvények összege áll, ezért a bal oldalon álló függvény szigorúan monoton csökkenő. Mivel a jobb oldal konstans, ezért az egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet. Az egyenletnek $x = 2$ megoldása, ezért több megoldás nincsen.

b) Vezessük be az $a = 2^x$ helyettesítést. Ekkor az egyenlet

$$a^2 + (x - 7) \cdot a + 6 - x = 0$$

alakban írható. A kapott másodfokú egyenletre felírva a megoldóképletet, majd elvégezve a kijelölt műveleteket azt kapjuk, hogy

$$a_{1,2} = \frac{7 - x \pm \sqrt{(x-7)^2 - 4(6-x)}}{2} = \frac{7 - x \pm \sqrt{x^2 - 10x + 25}}{2} =$$

$$= \frac{7 - x \pm \sqrt{(x-5)^2}}{2} = \frac{7 - x \pm (x-5)}{2}.$$

Az egyenlet két megoldása:

$$a = 1, \qquad \text{vagy} \qquad a = 6 - x.$$

Az első esetben $2^x = 1$, aminek megoldása $x = 0$.

A második esetben $2^x = 6 - x$. Az egyenlet bal oldalán álló függvény szigorúan monoton növő, a jobb oldalon álló függvény pedig szigorúan monoton csökkenő. Ebből adódik, hogy az egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet. Mivel $x = 2$ kielégíti az egyenletet, ezért nincs több megoldás.

c) Az $f(x) = 3^x + x$ függvény két szigorúan monoton növő függvény összege, így f maga is szigorúan monoton növő. Ebből adódóan minden értékét egyszer veszi fel, azaz ha $f(x) = f(y)$, akkor $x = y$.

Mivel egyenletünk alapján $f\left(x^2\right) = f(x)$, ezért $x^2 = x$. Az egyenlet megoldásai: $x = 0$ és $x = 1$.

3530 *a)* A logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján az adott egyenlőtlenségből a következő ekvivalens egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_5 (x^2 - 11) > 0,$$

$$0 < \log_5 (x^2 - 11) < 1,$$

$$1 < (x^2 - 11) < 5,$$

$$12 < x^2 < 16,$$

$$2 \cdot \sqrt{3} < |x| < 4,$$

$$-4 < x < -2 \cdot \sqrt{3}, \quad \text{vagy} \quad 2 \cdot \sqrt{3} < x < 4.$$

b) A hatványazonosságok alkalmazásával ekvivalens átalakításokat végezhetünk:

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1},$$

$$4^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = \sqrt{3} \cdot 3^x + \frac{3^x}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{3}{2} \cdot 4^x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3^x, \quad \text{mivel } 3^x \neq 0, \text{ ezért:}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{az exp. fv. szig. monotonitása miatt:}$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

c) Átalakításokkal:

$$(0,4)^{\lg^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \lg x^3}, \quad x > 0$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x + 1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2 - 3 \cdot \lg x},$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x + 1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{6 \cdot \lg x - 4}, \quad \text{a logaritmus fv. szig. monotonitása miatt:}$$

$$\lg^2 x + 1 = 6 \cdot \lg x - 4,$$

$$\lg^2 x - 6 \cdot \lg x + 5 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei:

$$\lg x_1 = 1 \quad \text{és} \quad \lg x_2 = 5,$$

amiből:

$$x_1 = 10 \quad \text{és} \quad x_2 = 10^5.$$

A kapott gyökök jók, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.

3531 Ekvivalens átalakítással 2-es alapú logaritmusra áttérve így írhatjuk az egyenlőtlenséget:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \le -2 \cdot \cos\alpha.$$

Nyilván $0 < x$, $x \ne 1$ jöhet szóba csak.

Ha $0 < x < 1$, akkor $\log_2 x < 0$ és így:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \le -2.$$

A $-2 \le -2 \cdot \cos\alpha$ egyenlőtlenség minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén igaz, tehát az egyenlőtlenség teljesül, ha:

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad 0 < x < 1.$$

Ha $x > 1$, akkor $\log_2 x > 0$, így:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \ge 2,$$

és itt egyenlőség csak $\log_2 x = 1$, azaz $x = 2$ esetén teljesül. Másrészt $-2 \cdot \cos\alpha \ge 2$ csak $\cos\alpha = -1$ esetén teljesül, ekkor az egyenlőség igaz, tehát:

$$\alpha = (2k + 1) \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3532 A logaritmus azonosságait felhasználva ekvivalens átalakítással $f(x)$ értékét a következő alakra hozhatjuk:

$$f(x) = \log_2^2 x \cdot \left(\log_2^2 x + 12 \cdot (3 - \log_2 x)\right) = \log_2^2 x \cdot (\log_2^2 x - 12 \cdot \log_2 x + 36) =$$
$$= \left(\log_2 x \cdot (6 - \log_2 x)\right)^2.$$

Mivel $1 \le x \le 64$, ezért $0 \le \log_2 x \le 6$, tehát ha a $\log_2 x = z$ jelölést használjuk, a $\left(z \cdot (6 - z)\right)^2$ legnagyobb értékét keressük, ha $0 \le z \le 6$.

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján:

$$z \cdot (6 - z) \le \left(\frac{z + 6 - z}{2}\right)^2 = 9,$$

és egyenlőség csak akkor teljesül, ha $z = 6 - z$, azaz $z = 3$.

Ezek szerint $f(x) \le 9^2 = 81$, és az egyenlőség $\log_2 x = 3$, azaz $x = 8$ esetén teljesül.

3533 Nyilván $x > 0$ jöhet szóba megoldásként. A 2-es alapú logaritmusfüggvény az értelmezési tartományában szigorúan nő, így mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát véve, és felhasználva a logaritmus azonosságait, a következő, az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(3 - \log_2^2 x - 2 \cdot \log_2 x) \cdot \log_2 x > 0.$$

Az első tényezőt további szorzattá alakítva, és -1-gyel szorozva ezt kapjuk:

$$(\log_2 x - 1) \cdot (\log_2 x + 3) \cdot \log_2 x < 0.$$

A három tényező szorzata akkor lehet negatív, ha mindhárom tényező negatív, azaz a legnagyobb tényező negatív:

$$\log_2 x + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x < -3, \quad \text{amiből} \quad 0 < x < \frac{1}{8},$$

vagy ha egy tényező negatív, kettő pozitív, azaz a legkisebb tényező negatív, a középső pozitív:

$$\log_2 x - 1 < 0 < \log_2 x \quad \Rightarrow \quad 0 < \log_2 x < 1, \quad \text{amiből} \quad 1 < x < 2.$$

3534 A következőket kell tudni x-ről: $|x| \ne 0$, $|x| \ne 1$, $x + 2 > 0$, azaz $x > -2$.

Ha $0 < |x| < 1$, akkor a logaritmusfüggvény csökken, így az adott egyenlőtlenség a következővé alakul:

$$x + 2 > x^2, \quad \text{azaz} \quad 0 > x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1), \quad \text{amiből} \quad -1 < x < 2.$$

Ekkor tehát a megoldás:

$$-1 < x < 0 \quad \text{és} \quad 0 < x < 1.$$

Ha $|x| > 1$, akkor a logaritmusfüggvény nő, tehát az adott egyenlőtlenség a következővel ekvivalens:

$$x + 2 < x^2, \quad \text{azaz} \quad 0 < x^2 - x - 2 = (x-2)\cdot(x+1), \quad \text{amiből} \quad x < -1 \text{ vagy } x > 2.$$

Az értelmezési tartományt is figyelembe véve ekkor a következő számok elégítik ki az egyenlőtlenséget:

$$x > 2 \quad \text{és} \quad -2 < x < -1.$$

3535 Fejezzük ki $\operatorname{tg} x$-et $\sin x$ és $\cos x$ segítségével, majd ezeket $\frac{x}{2}$ szögfüggvényeivel:

$$\frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2 \cdot \sin x}{1 + \cos x} = 2 \cdot \frac{2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}{2 \cdot \cos^2\frac{x}{2}} = 2 \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Igazoltuk 10. osztályban, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $x < \operatorname{tg} x$, tehát az állítást igazoltuk.

3536 *a)* Az exponenciális függvény tulajdonságai alapján a hatvány értéke akkor és csak akkor nagyobb mint 1, ha vagy az alap 1-nél nagyobb és a kitevő pozitív (I. eset), vagy az alap 0 és 1 között van és a kitevő negatív (II. eset).

I. eset:

$$4x^2 + 2x + 1 > 1 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot (2x+1) > 0,$$

amiből

$$x > 0 \quad \text{vagy} \quad x < -0{,}5,$$

valamint:

$$x^2 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x-1) > 0,$$

amiből

$$x > 1 \quad \text{vagy} \quad x < 0.$$

Tehát ebben az esetben az $x > 1$, illetve $x < -0{,}5$ valós számokra igaz az egyenlőtlenség.

II. eset:

$$0 < 4x^2 + 2x + 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot (2x+1) < 0,$$

amiből

$$-0{,}5 < x < 0,$$

illetve

$$x^2 - x < 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x-1) < 0,$$

amiből

$$0 < x < 1.$$

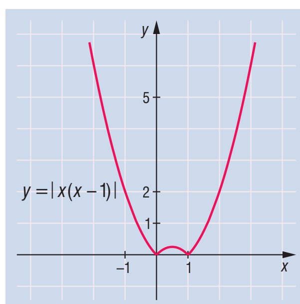
Mindkét kikötést egyetlen valós szám sem elégíti ki, tehát itt nincs megoldás.

b) Az exponenciális függvény tulajdonságai alapján az eredeti egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$0 < |x \cdot (x-1)| < 2.$$

Ábrázolva az $x \mapsto |x \cdot (x-1)|$ függvény grafikonját, az ábráról leolvasható, de számolással is könnyen ellenőrizhető, hogy a megoldások:

$$-1 < x < 0, \quad 0 < x < 1 \quad \text{és} \quad 1 < x < 2.$$



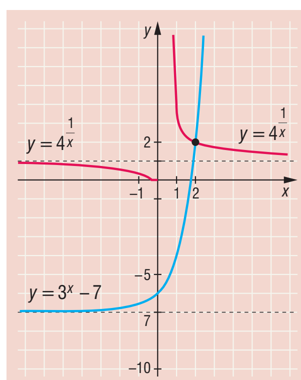
c) A logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján 2 eset lehetséges.
I. eset: $0 < x^2 < 1$ és $0 < 3 - 2x < x^2$ teljesül.
Az első egyenlőtlenségből
$$-1 < x < 0 \quad \text{vagy} \quad 0 < x < 1,$$
a másodikból
$$1 < x < 1{,}5 \quad \text{vagy} \quad x < -3,$$
tehát ezeket kielégítő valós szám nincs.

II. eset: $1 < x^2$ és $3 - 2x > x^2$ teljesül.
Ebből
$$x < -1 \quad \text{vagy} \quad x > 1,$$
illetve
$$0 > x^2 + 2x - 3 = (x-1)\cdot(x+3), \quad \text{azaz} \quad -3 < x < 1.$$
Mindkét feltételt a $-3 < x < -1$ számok elégítik ki, ezek az egyenlőtlenség megoldásai.

3537 Indirekt bizonyítást célszerű választani. Tegyük fel, hogy az f függvénynek van egy $p > 0$ periódusa, azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re $f(x+p) = f(x)$. Használjuk a szorzattá alakító azonosságokat:
$$f(x+p) - f(x) = 2\cdot\sin\frac{p}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{p}{2}\right) + 2\cdot\sin\frac{p\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x + \frac{p\cdot\sqrt{2}}{2}\right)$$
minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ez csak akkor teljesülhet, ha $\sin\frac{p}{2} = 0$, azaz $p = 2k\pi$, valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén és $\sin\frac{p\cdot\sqrt{2}}{2} = 0$, azaz $p = \sqrt{2}\cdot 2n\pi$, valamely $n \in \mathbb{Z}$ esetén. Ebből az következik, hogy van olyan $k, n \in \mathbb{Z}$, hogy $\sqrt{2}\cdot n = k$, $n \neq 0$ miatt $\sqrt{2} = \frac{k}{n}$, ami ellentmondás, mert $\sqrt{2}$ irracionális.

3538 A $\sin\sqrt{3}\cdot x$ értéke $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ szerint periodikus, $\cos\frac{x}{\sqrt{3}}$ értéke $2\pi\cdot\sqrt{3}$ szerint periodikus.
Akkor lesz $f(x)$ periodikus, ha van olyan k és n egész, hogy:
$$k\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = l\cdot 2\pi\cdot\sqrt{3}, \quad l \neq 0.$$
Ebből $\frac{k}{l} = 3$ adódik, $k = 3$, $l = 1$ esetén ez teljesül. Tehát az f függvény $2\pi\cdot\sqrt{3}$ szerint periodikus.
Valóban:
$$f\left(x + 2\pi\cdot\sqrt{3}\right) = \sin\left(\sqrt{3}\cdot x + 6\pi\right) - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + 2\pi\right) = f(x).$$

3539 Ábrázoljuk az $x \mapsto 3^x - 7$, $x \in \mathbb{R}$ és $x \mapsto 4^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ függvényeket.
Az $x \mapsto 3^x - 7$, $x \in \mathbb{R}$ függvény végig nő, az $x \mapsto 4^{\frac{1}{x}}$ függvény $]-\infty; 0[$-ban csökken és $]0; +\infty[$-ban is csökken, de mindenütt pozitív. Így legfeljebb egy gyök lehet. Az $x = 2$ jó gyöknek, itt mindkét függvény értéke 2.



3540 *a)* Ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, akkor $0 < \sin x < x$, és

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\cdot\sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\cdot\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Ha $0 < x < 2$, akkor $x^2 < 2x$, azaz $\dfrac{x^2}{2} < x$, tehát:

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} > 1 - x.$$

b) Mivel $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, akkor $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$, ebből következik, hogy:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x > 1 - x.$$

Tehát az *a)*-ban igazolt azonosság felhasználásával:

$$x > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0.$$

3541 Ismert azonosságok alapján:

$$(1)\ \ \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (2)\ \ 1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

(1) és (2) összegéből:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

és mivel $\cos\dfrac{\alpha}{2} \ge 0$, ezért:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

(1) és (2) különbségéből:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

és mivel $\sin\dfrac{\alpha}{2} \ge 0$, ezért:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

3542 A pontos értékek:

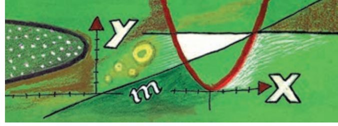
$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}; \qquad \sin\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$$

3543 Szorozzuk meg a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalát $16\cdot\sin\dfrac{x}{16}$-tal:

$$16\cdot\sin\frac{x}{16}\cdot\cos\frac{x}{16}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2} = \sin x.$$

A $\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ azonosságot négyszer alkalmazva a bal oldalon, éppen a jobb oldalt kapjuk.



3544 Azonosságok alkalmazásával $f(x)$ így írható:

$$f(x) = \sin 5x \cdot \sin 2x.$$

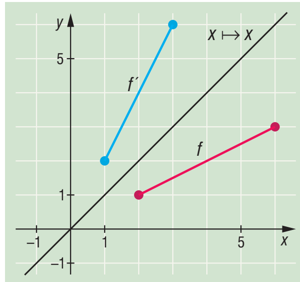
Mivel $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\sin 2x > 0$, így $f(x) > 0$ akkor és csak akkor, ha $\sin 5x > 0$. Ez pedig akkor teljesül, ha:

$$0 < x < \frac{\pi}{5} \quad \text{és} \quad \frac{2\pi}{5} < x < \frac{\pi}{2}.$$

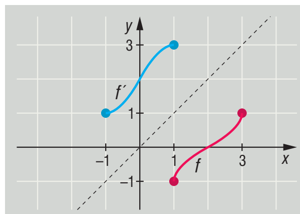
Inverz függvények – megoldások

3545 Az f függvény értelmezési tartománya: $[2; 6]$, értékkészlete $[1; 3]$, hozzárendelési szabálya: $x \mapsto \frac{1}{2}x$.

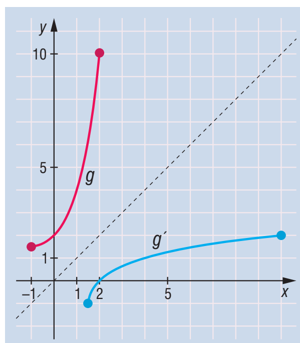
Az f függvény grafikonjának tükörképét f' jelöli az ábrán. Az f' függvény értelmezési tartománya: $[1; 3]$, értékkészlete: $[2; 6]$, hozzárendelési szabálya: $x \mapsto 2x$.



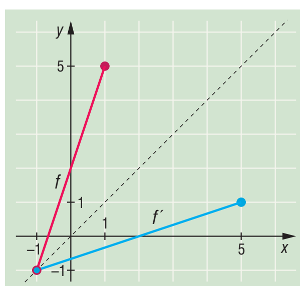
3546 Az f függvény inverzének értelmezési tartománya: $[-1; 1]$, értékkészlete $[1; 3]$. Az inverz függvénynek nincs zérushelye.



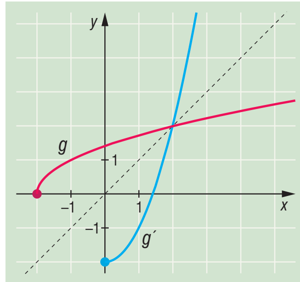
3547 A g' inverz függvény értelmezési tartománya: $\left[\frac{3}{2}; 10\right]$, értékkészlete: $[-1; 2]$, zérushelye: $x = 2$. A g és inverz függvénye szigorúan monoton növő függvények.



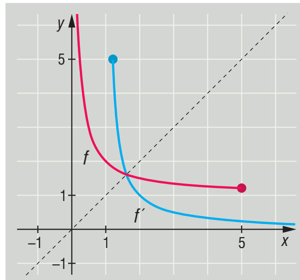
3548 *a)* Az inverz függvény értelmezési tartománya: $[-1; 5]$, hozzárendelési szabálya: $f'(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.



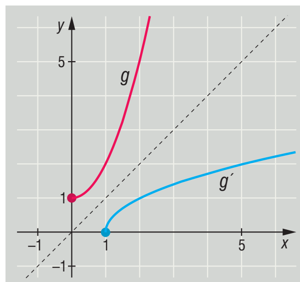
b) Az inverz függvény értelmezési tartománya: $[0; +\infty[$, továbbá $g'(x) = x^2 - 2$.



3549 *a)* Az inverz függvény értelmezési tartománya: $\left[\frac{6}{5}; +\infty\right[$, hozzárendelési szabálya: $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$.



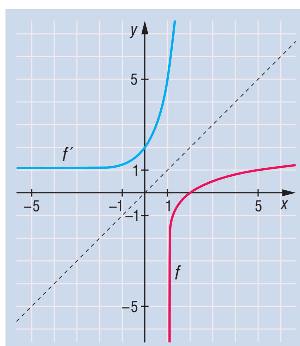
b) Az inverz függvény értelmezési tartománya: $[1; +\infty[$, hozzárendelési szabálya: $g'(x) = \sqrt{x-1}$.



3550 *a)* $f_1\colon \mathbb{R} \to \left]-\infty; 0\right[,\ x \mapsto -2^x$; *b)* $f_2\colon \mathbb{R} \to \left]0; +\infty\right[,\ x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

c) $f_3\colon \left]0; +\infty\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \log_2 x$; *d)* $f_4\colon \left]-\infty; 0\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto -\log_2(-x)$.

3551 A logaritmus azonosságai alapján $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \log_2(x-1)$. Az inverz függvény hozzárendelési szabálya: $f'(x) = 4^x + 1$, értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete: $]1; +\infty[$.



3552 Teljes négyzetté alakítás után $f(x) = (x-3)^2 - 5$, így $g(x) = \sqrt{x+5} + 3$. Ekkor

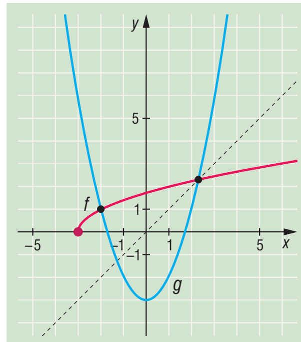
$$g(4) + f(4) = \sqrt{4+5} + 3 + (4-3)^2 - 5 = 2.$$

3553 Az f függvény értékkészlete: $[-4; +\infty[$, ez egyben a g függvény értelmezési tartománya is. Az f függvény inverz függvényének hozzárendelési szabálya: $g(y) = \sqrt{y+4}$. Ekkor

$$f(g(y)) = (g(y))^2 - 4 = \left(\sqrt{y+4}\right)^2 - 4 = y + 4 - 4 = y,$$

és pontosan ezt kellett igazolni.

3554 Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \geq -3$. Legyen $f(x) = \sqrt{x+3}$ és $g(x) = x^2 - 3$. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a két függvény grafikonját. Az ábra alapján láthatjuk, hogy az egyenletnek két megoldása van, továbbá az egyik gyök $x = -2$. Keressük az egyenlet másik, pozitív előjelű gyökét.



Ehhez vegyük észre, hogy az f függvény inverze épp a g függvény nemnegatív számok halmazára való leszűkítésével egyezik meg. Ez azt is jelenti, hogy ha az f függvény grafikonját tükrözzük az $y = x$ egyenletű egyenesre, akkor a tükörkép illeszkedik a g függvény grafikonjára. Ebből adódóan a két függvény grafikonjának (pozitív abszcisszájú) metszéspontja illeszkedik a két grafikon szimmetriatengelyére, vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre.

Az eredeti egyenlet pozitív megoldása így kielégíti az $x^2 - 3 = x$ egyenletet is. Az $x^2 - x - 3 = 0$ egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Mivel csak x_2 pozitív, ezért az egyenlet megoldásai:

$$x = -2 \quad \text{és} \quad x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

11.5. KOORDINÁTA-GEOMETRIA

Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal (emlékeztető) – megoldások

3555 $\vec{a} = 1 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{a}(1; 4)$; $\vec{b} = -5 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{b}(-5; 2)$; $\vec{c} = -3 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{c}(-3; -2)$;
$\vec{d} = -2 \cdot \mathbf{i} + 5 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{d}(-2; 5)$; $\vec{e} = 4 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{e}(4; 0)$; $\vec{f} = 3 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{f}(3; -2)$.

3556 *a)* $(-1; 2)$; *b)* $(3; -8)$; *c)* $(2; -6)$; *d)* $(6; -15)$;
e) $(8; -21)$; *f)* $\left(-\frac{7}{2}; 9\right)$; *g)* $(15; -40)$; *h)* $\left(\frac{23}{2}; -31\right)$.

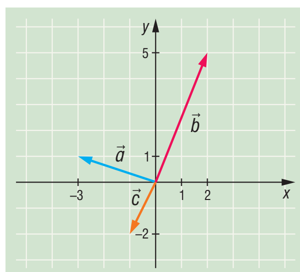
3557 *a)* $6 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$; *b)* $2 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$; *c)* $-4 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$; *d)* $0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$.

3558 *a)* $\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{13}$; *c)* 5; *d)* $\frac{\sqrt{26}}{2}$;
e) 1; *f)* $\sqrt{a^2 + b^2}$; *g)* $\sqrt{5}$; *h)* $\sqrt{6}$;
i) $\sqrt{2 \cdot (a + b)}$.

3559 *a)* $|\vec{a}| = 85$; *b)* $|\vec{b}| = 97$; *c)* $|\vec{c}| = 89$; *d)* $|\vec{d}| = 29$; *e)* $|\vec{e}| = 34$.
Mindegyik vektor koordinátáinak abszolút értéke egy-egy pitagoraszi számhármas két tagja, a harmadik tag éppen a vektor abszolút értéke.

3560 *a)* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; *b)* $\left(\frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13}; \frac{3 \cdot \sqrt{13}}{13}\right)$;
c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}\right)$; *d)* $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

3561 A helyvektorok az ábrán láthatók.
A vektorok koordinátái a +90°-os, illetve a –90°-os forgatások után:
a) $(-1; -3)$, $(1; 3)$;
b) $(-5; 2)$, $(5; -2)$;
c) $(2; -1)$, $(-2; 1)$.



3562 *a)* -5; *b)* 5; *c)* -5;
d) -10; *e)* -45; *f)* 85.

3563 *a)* Mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, ezért a vektorok derékszöget zárnak be egymással.
b) A két vektor hegyesszöget zár be, mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 > 0$.
c) A vektorok tompaszöget zárnak be egymással, mivel skaláris szorzatuk $-\frac{5}{2}$.
d) A két vektor derékszöget zár be, mivel skaláris szorzatuk 0.

3564 *a)* Mivel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ezért az AB és az AC szakaszok merőlegesek egymásra, így az ABC háromszög derékszögű. A derékszög az A csúcsnál található.

b) A derékszög a C csúcsnál van.

c) A derékszög a C csúcsnál van.

3565 *a)* A C pont helyvektorára:

$$\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a} = 3(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - 2(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = -5\mathbf{i} + 16\mathbf{j}.$$

Ezek alapján a pontok koordinátái:

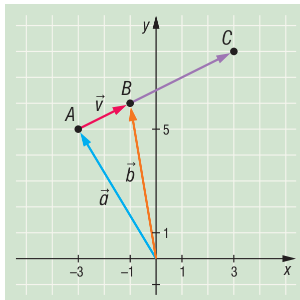
$$A(1; -2), \quad B(-1; 4), \quad C(-5; 16).$$

b) Mivel $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, valamint $\overrightarrow{AC} = -6\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$, ezért $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, ami igazolja, hogy a három pont egy egyenesre illeszkedik.

3566 *a)* Ha a mozgó pont helyvektora a megfigyelés kezdetekor $\vec{a}$, a következő másodpercben pedig $\vec{b}$, akkor a sebességvektor:

$$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j},$$

így a sebességvektor koordinátái $\vec{v}(2; 1)$.



b) A megfigyelés kezdetét követő harmadik másodpercben a test helyvektora:

$$\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{v}.$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy a test a $C(3; 8)$ pontban tartózkodik.

c) A $D(11; 12)$ pontra teljesül, hogy

$$\overrightarrow{AD} = 14\mathbf{i} + 7\mathbf{j} = 7\vec{v},$$

ami azt jelenti, hogy az adott ponton a test a megfigyelés kezdetét követő 7. másodpercben halad át.

3567 A két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. A két vektor skaláris szorzata a koordinátáik segítségével:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\left(\sqrt{2} + 2\right) + \sqrt{2} \cdot \alpha = 0,$$

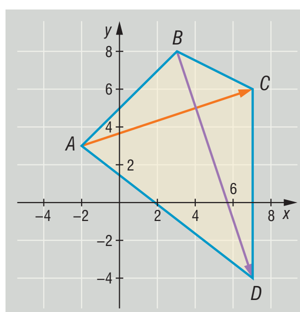
amiből α-t kifejezve:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

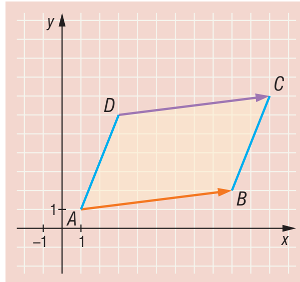
3568 Számítsuk ki a négyszög átlóvektorainak koordinátáit: $\overrightarrow{AC}(9; 3)$, illetve $\overrightarrow{BD}(4; -12)$. Mivel a két vektor skaláris szorzata:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 9 \cdot 4 + 3 \cdot (-12) = 0,$$

ezért a két átló valóban merőleges egymásra.

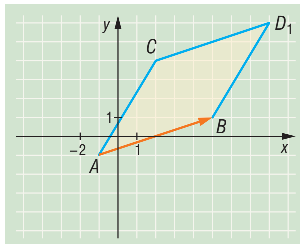


3569 A négyszög $\overrightarrow{AB}$, illetve $\overrightarrow{DC}$ oldalvektorainak koordinátáit kiszámolva láthatjuk, hogy mindkét vektor koordinátái $(8;\,1)$. Eredményünk azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszögben két szemközti oldal ugyanolyan hosszú és párhuzamos, ezért a négyszög valóban paralelogramma.

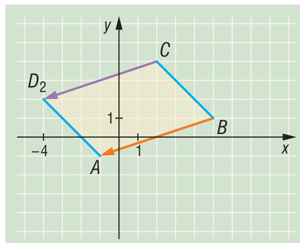


3570 A megadott pontokat jelölje rendre A, B és C. A feladatnak három megoldása van. Két olyan megoldást kapunk, amelyekben az AB szakasz a paralelogrammának egyik oldala. Ezekben a paralelogrammákban az egyik oldalvektor $\overrightarrow{AB}(6;\,2)$.

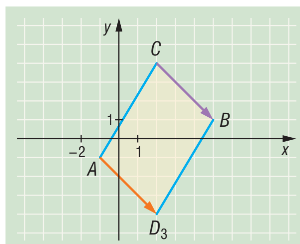
Az ábra azt az esetet mutatja, amelyben a BC szakasz átló. Ekkor $\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AB}$, amiből $D_1(8;\,6)$.



A következő ábra azt a paralelogrammát mutatja, amelyben az AB, valamint a BC szakaszok is a paralelogramma egy-egy oldalát alkotják. Ekkor $\overrightarrow{CD_2} = \overrightarrow{BA}$, és ezért $D_2(-4;\,2)$.



Végül még egy megoldás adódik, amelyben az AB szakasz a paralelogrammának átlója. Ekkor $\overrightarrow{AD_3} = \overrightarrow{CB}(3;\,-3)$, amiből egyszerű számolással kapjuk, hogy $D_3(2;\,-4)$.



3571 *a)* A keresett összegvektor első koordinátája:

$$\sqrt{1}+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2008}-\sqrt{2007}\right)+\left(\sqrt{2009}-\sqrt{2008}\right).$$

Ha alaposabban szemügyre vesszük az összeg tagjait, akkor láthatjuk, hogy az első helyen álló $\sqrt{1}$, valamint az első zárójelben szereplő második tag „kiejti egymást”, csakúgy mint az első, illetve a második zárójelekben szereplő $\sqrt{2}$, illetve $-\sqrt{2}$. Ha a többi tagot is párba állítjuk, akkor igazából csak a $\sqrt{2009}$-nek nem találunk párt, az összes többi tag „kiesik” az összegből. Ebből adódóan az összegvektor első koordinátája $\sqrt{2009}$.

A második koordinátát illetően hasonlóan járhatunk el. A megfelelő koordináta „hosszú alakja”:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2008}}+\frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2009}}.$$

Ha a fenti összegben minden egyes tag nevezőjét gyöktelenítjük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}=\sqrt{2}-\sqrt{1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2009}}=\frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2009}}\cdot\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}=\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}{2010-2009}=\sqrt{2010}-\sqrt{2009}.$$

Eredményeink alapján a keresett vektor második koordinátája tehát a következő alakban írható fel:

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2009}-\sqrt{2008}\right)+\left(\sqrt{2010}-\sqrt{2009}\right).$$

Az összeg feltűnő hasonlóságot mutat a vektor első koordinátájánál szereplő összeggel, csak itt most az első zárójelben szereplő $-\sqrt{1}$-nek, valamint az utolsó zárójelben található $\sqrt{2010}$-nek nincs párja, így az összegvektor második koordinátája $\sqrt{2010}-1$.

A keresett összeg koordinátái tehát:

$$\left(\sqrt{2009};\ \sqrt{2010}-1\right).$$

b) Mivel $\sqrt{2009}>\sqrt{2010}-1$, ezért a megfelelő pont az x tengelyhez van közelebb.

Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge. Területszámítási alkalmazások – megoldások

3572 *a)* 3; *b)* 5; *c)* 5; *d)* 13; *e)* $\frac{\sqrt{29}}{3}$; *f)* 2.

3573 *a)* 3; *b)* 5; *c)* 13; *d)* $2\cdot\sqrt{34}$; *e)* $\sqrt{6}$; *f)* $2\cdot\sqrt{3}$; *g)* $\frac{7\cdot\sqrt{2}}{2}$; *h)* $\frac{\sqrt{26}}{6}$.

3574 *a)* $AB=AC=\sqrt{50}$; *b)* $AB=AC=\sqrt{34}$; *c)* $AB=AC=\sqrt{20}$.

A *c)* feladatban szereplő háromszög derékszögű, mert $\overrightarrow{AB}(4;\ 2)$ és $\overrightarrow{AC}(2;\ -4)$.

3575 *a)* A pont illeszkedik a körre. *b)* A pont illeszkedik a körre.
c) A pont nem illeszkedik a körre. *d)* A pont illeszkedik a körre.

3576 *a)* $AB=2$, $BC=3{,}6$, $AC=3$, a háromszög kerülete 8,6.
b) $AB=23{,}7$, $BC=13{,}3$, $AC=16{,}1$, a háromszög kerülete 53,1.

3577 *a)* Az ilyen tulajdonságú pontok két, az x tengellyel párhuzamos egyenesen helyezkednek el, attól 3 egység távolságra. A megfelelő $(x;\ y)$ pontokra $y=3$ vagy $y=-3$ teljesül.
b) Ezúttal az y tengellyel párhuzamos egyeneseken találhatók a feltételnek megfelelő pontok. A koordinátáikra $x=3$ vagy $x=-3$ teljesül.

3578 A megfelelő $(x;\ y)$ pontokra $x=y$ vagy $x=-y$ teljesül. A pontok a két tengely szögfelező egyeneseire illeszkednek.

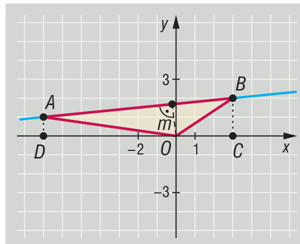
3579 *a)* $\alpha = 90{,}0°$; *b)* $\alpha = 90{,}0°$; *c)* $\alpha = 180{,}0°$;
d) $\alpha \approx 126{,}5°$; *e)* $\alpha = 45{,}0°$; *f)* $\alpha \approx 93{,}4°$.

3580 *a)* $\alpha \approx 53{,}97°$, $\beta \approx 79{,}70°$, $\gamma \approx 46{,}33°$;
a háromszög területe 11.

b) $\alpha \approx 32{,}70°$, $\beta \approx 61{,}70°$, $\gamma \approx 85{,}60°$;
a háromszög területe 26.

c) $\alpha \approx 103{,}32°$, $\beta \approx 48{,}18°$, $\gamma \approx 28{,}50°$;
a háromszög területe 38.

3581 Használjuk az ábra jelöléseit: legyen $A(–7; 1)$, $B(3; 2)$ a két pont, melyeken a test a mozgás során áthaladt, továbbá $C(3; 0)$, $D(–7; 0)$, illetve $O(0; 0)$. A feladat kérdése alapján az ABO háromszög AB oldalához tartozó m magasságát kell kiszámolnunk.



Ehhez kiszámoljuk az AB szakasz hosszát, valamint az ABO háromszög területét. A két számolt értékből már könnyen megkaphatjuk a keresett magasságot.

Az ABO háromszög területét pl. úgy kaphatjuk meg, hogy az $ABCD$ trapéz területéből kivonjuk az AOD, valamint a BOC háromszögek területét. A számolásokat elvégezve kapjuk, hogy

$$T_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CD = \frac{1+2}{2} \cdot 10 = 15;$$

$$T_{AOD} = \frac{AD \cdot OD}{2} = 3{,}5;$$

$$T_{BOC} = \frac{BC \cdot OC}{2} = 3;$$

$$T_{ABO} = T_{ABCD} - T_{AOD} - T_{BOC} = 15 - 3{,}5 - 3 = 8{,}5.$$

Az AB távolság:

$$AB = \sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101}.$$

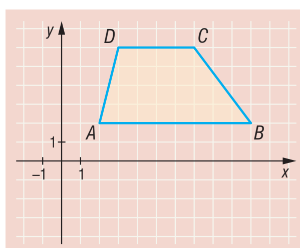
Ha most az ABO háromszög területét az AB oldal, valamint a hozzá tartozó m magasság segítségével írjuk fel, akkor

$$8{,}5 = \frac{\sqrt{101} \cdot m}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{17}{\sqrt{101}} \approx 1{,}69.$$

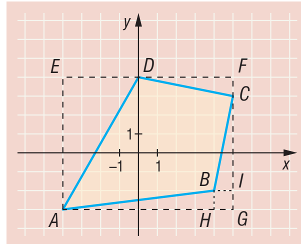
A mozgó test tehát 1,69 egység távolságra volt az origótól, amikor ahhoz legközelebb tartózkodott.

3582 *a)* A kapott négyszög trapéz, melynek alapjai párhuzamosak az x tengellyel. A négyszög területe:

$$T = \frac{8+4}{2} \cdot 4 = 24.$$



b) Az ábra jelöléseivel $AB = AD = \sqrt{65}$, illetve $CB = CD = \sqrt{26}$, ezért az $ABCD$ négyszögben két-két szomszédos oldal megegyezik, így a négyszög deltoid.



Az $ABCD$ deltoid területének kiszámolásához érdemes a négyszöget egy olyan téglalapba foglalni, amelynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. A szóban forgó téglalap csúcsait az ábrán A, E, F, illetve G jelöli. A területszámítást megkönnyíti, ha az $AEFG$ téglalap területéből kivonjuk a deltoid körül „kimaradó” AED, DFC, CIB és AHB derékszögű háromszögek, valamint az $IGHB$ négyzet területét. Az egyes síkidomok területe:

$$T_{AEFG} = 7 \cdot 9 = 63; \qquad T_{AED} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14;$$

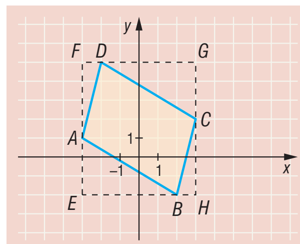
$$T_{DFC} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2{,}5; \qquad T_{CIB} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2{,}5;$$

$$T_{AHB} = \frac{8 \cdot 1}{2} = 4; \qquad T_{IGHB} = 1.$$

Az elmondottakból azonnal következik, hogy

$$T_{ABCD} = 63 - 14 - 2{,}5 - 2{,}5 - 4 - 1 = 39.$$

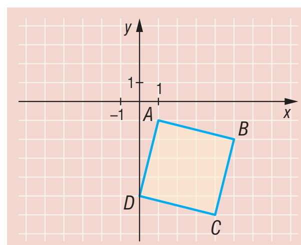
c) A kapott négyszög paralelogramma, hiszen (az ábra jelöléseit használva) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}(1; 4)$, ami mutatja, hogy a négyszög BC és AD oldala párhuzamos egymással, valamint hosszuk is megegyezik.



Az $ABCD$ paralelogramma területe a *b)* feladatban látott módszerrel számolható. A paralelogrammát ezúttal az $EFGH$ téglalapba „foglalhatjuk bele”, és a téglalap kimaradó részei háromszögek. A számításokat elvégezve az $ABCD$ paralelogramma területére 23 egység adódik.

d) A kapott négyszög ezúttal négyzet. Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}(4; -1)$, amiből látható, hogy a négyszög paralelogramma (van két párhuzamos és egyenlő hosszúságú oldala). Mivel $\overrightarrow{AD}(-1; -4)$, ezért

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-4) = 0,$$



ezért a négyszög A csúcsánál (és ebből kifolyólag a többi csúcsnál is) derékszög található, így az $ABCD$ négyszög valóban négyzet.

Mivel $AB = \sqrt{17}$, ezért az $ABCD$ négyzet területe 17 egység.

3583 Ha $PA = PB$, akkor

$$\sqrt{(3-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(-2-x)^2 + (5-y)^2}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kijelölt műveleteket, végül a lehetséges összevonásokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$10x - 8y + 19 = 0.$$

Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a fenti összefüggést csak a feltételeknek megfelelő P pont elégítheti ki.

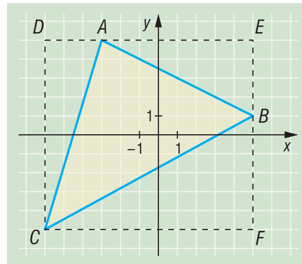
3584 Mivel a feltételek alapján $PO = 5$, ezért

$$\sqrt{(2-x)^2 + (-1-y)^2} = 5.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kijelölt műveleteket elvégezve kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0.$$

3585 *a)* Foglaljuk az ABC háromszöget az ábrán látható módon a tengelyekkel párhuzamos oldalakkal rendelkező $CDEF$ téglalapba. Mivel a téglalap oldalai 10 és 11 cm hosszúak, ezért



$$T_{CDEF} = 110 \text{ cm}^2.$$

Könnyen kiszámolható az ACD, ABE, BCF derékszögű háromszögek területe is:

$$T_{ACD} = 15 \text{ cm}^2, \quad T_{ABE} = 16 \text{ cm}^2 \quad \text{és} \quad T_{BCF} = 33 \text{ cm}^2.$$

Az ABC háromszög területe:

$$T_{ABC} = T_{CDEF} - T_{ACD} - T_{ABE} - T_{BCF} = 110 - 15 - 16 - 33 = 46 \text{ cm}^2.$$

b) A háromszög a legrövidebb oldalára állítva a legmagasabb. Mivel

$$\overrightarrow{AB}(8;-4), \quad \overrightarrow{BC}(-11;-6) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CA}(3;10),$$

ezért az AB oldal a legrövidebb és

$$AB = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} \approx 8{,}94 \text{ cm}.$$

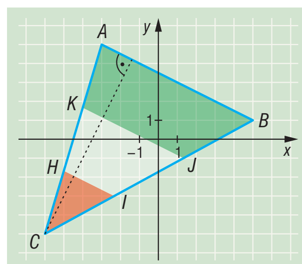
c) A leghosszabb magasságot az ABC háromszög területéből számolhatjuk ki. Mivel

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot m_c}{2},$$

ezért

$$46 = \frac{\sqrt{80} \cdot m_c}{2}, \quad \text{amiből} \quad m_c = \frac{92}{\sqrt{80}} \approx 10{,}29 \text{ cm}.$$

d) Tegyük fel, hogy az AB-vel párhuzamos szakaszok az ábrának megfelelően az I, H, valamint a J és K pontokat metszik ki az ABC háromszög oldalaiból. Ekkor a CIH háromszög hasonló a CBA háromszöghöz, továbbá a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{1}{3}$. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért a CIH háromszög, vagyis a piros sáv területe $\lambda^2 = \frac{1}{9}$-szerese a CBA háromszög területének, ezért:



$$T_{CIH} = \frac{1}{9} \cdot 46 \approx 5{,}11 \text{ cm}^2.$$

A fentihez hasonló gondolatmenettel számíthatjuk ki a zöld sáv területét: a CJK háromszög hasonló a CBA háromszöghöz, a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, amiből következik, hogy

$$T_{CJK} = \frac{4}{9} \cdot 46 \approx 20{,}44 \text{ cm}^2.$$

Így a zöld sáv területe:

$$46 - 20{,}44 = 25{,}56 \text{ cm}^2.$$

3586 *a)* A térképen kialakuló távolságokat a távolságképlettel számolhatjuk ki.
Az eredmények:

Veszprém–Győr: $\sqrt{37}$, Veszprém–Szeged: 17, Veszprém–Debrecen: $\sqrt{641}$,
Győr–Szeged: $2\cdot\sqrt{113}$, Győr–Debrecen: $2\cdot\sqrt{170}$, Szeged–Debrecen: $2\cdot\sqrt{61}$.

A városok közti, kilométerben megadott távolságokat megkapjuk, ha a térképen mért távolságokat megszorozzuk 11-gyel.

Ezek alapján a távolságok egészre kerekített értékei:

Veszprém–Győr: 67 km, Veszprém–Szeged: 187 km, Veszprém–Debrecen: 278 km,
Győr–Szeged: 234 km, Győr–Debrecen: 287 km, Szeged–Debrecen: 172 km.

b) A koordinátákból észrevehető, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontja a Győr–Szeged szakasz felezőpontjában van. Ez azt jelenti, hogy az origó körülbelül Dunaújvárosban lehet.

3587 *a)* Ha a P pont illeszkedik az x tengelyre, akkor koordinátáira $P(x; 0)$ teljesül. Ekkor

$$PA^2 + PB^2 = (x+3)^2 + (0-2)^2 + (x-5)^2 + (0-3)^2.$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy

$$PA^2 + PB^2 = 2x^2 - 4x + 47,$$

majd teljes négyzetté alakítás után

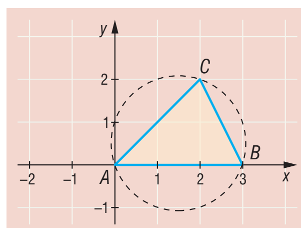
$$PA^2 + PB^2 = 2(x-1)^2 + 45.$$

Mivel a négyzetes tag nemnegatív, ezért a kifejezés akkor lesz a lehető legkisebb, ha $x = 1$.

b) A $PA^2 + PB^2$ összeg legkisebb értéke 45.

3588 *a)* Az asztal kicsinyített képének csúcspontjait az ábrának megfelelően A-val, B-vel és C-vel jelöltük:

$$A(0; 0),\quad B(3; 0)\quad \text{és}\quad C(2; 2).$$



Az ABC háromszög oldalai:

$$AB = 3,\quad BC = \sqrt{5}\quad \text{és}\quad AC = 2\cdot\sqrt{2}.$$

Mivel 1 egység a valóságban 50 cm, ezért:

$$AB = 150 \text{ cm},\quad BC = 50\cdot\sqrt{5} \approx 111{,}8 \text{ cm}\quad \text{és}\quad AC = 100\cdot\sqrt{2} \approx 141{,}4 \text{ cm}.$$

b) A feladat arra kérdez rá, hogy mekkora az asztallap köré írt kör sugara. Az ABC háromszög köré írt kör sugarát könnyen kiszámolhatjuk az $R = \dfrac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot T}$ képlet segítségével, ahol T a háromszög területét, a, b és c a háromszög oldalainak hosszát jelöli. A háromszög AB oldalát választva alapnak, a területre adódik:

$$T = \frac{3\cdot 2}{2} = 3 \text{ egység}.$$

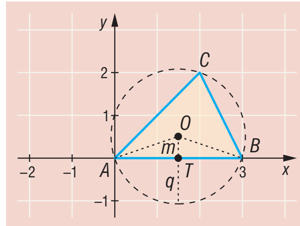
Az *a)* feladat eredményeit felhasználva az ABC háromszög köré írható kör sugara:

$$R = \frac{3\cdot\sqrt{5}\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Figyelembe véve a kicsinyítés arányát, a kerek asztal sugara:

$$25\cdot\sqrt{10} \approx 79{,}1 \text{ cm}.$$

c) Az ABC háromszög leghosszabb oldala AB, ezért az AB oldalhoz illesztett körszelet (az ábrán q-val jelölt) magasságára kíváncsi a feladat. A keresett magasságot megkaphatjuk, ha az ABC háromszög köré írt kör sugarából kivonjuk az ABO egyenlő szárú háromszög AB oldalához tartozó m magasságát, ahol O a háromszög köré írt kör középpontját jelöli. Ha az ABO háromszög szóban forgó magasságának talppontját T jelöli, akkor az ATO derékszögű háromszögben $AO = R$, továbbá $AT = 1{,}5$, így Pitagorasz tételének alkalmazásával:



$$m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

amiből

$$q = R - m = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10}-1}{2}.$$

A megfelelő toldalék magassága ezek alapján:

$$50 \cdot \frac{\sqrt{10}-1}{2} \approx 54{,}1 \text{ cm}.$$

d) Az asztallapon elhelyezhető legnagyobb kör alakú abrosz egybeesik az asztallapba írható körrel, így a feladat gyakorlatilag a beírt kör sugarát kérdezi. Az ABC háromszög beírható körének sugarát az $r = \dfrac{T}{s}$ képlettel számolhatjuk, ahol s a háromszög kerületének a felét jelöli.

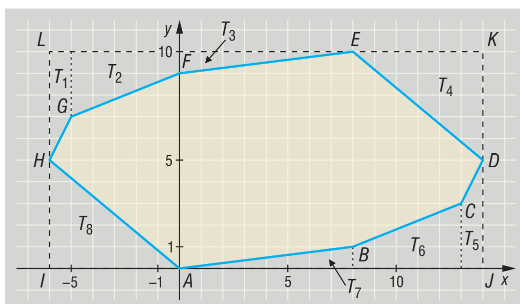
Az eredményeket behelyettesítve:

$$r = \frac{3 \cdot 2}{3+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}} = \frac{6}{3+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}}.$$

Az abrosz sugara így:

$$50 \cdot \frac{6}{3+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}} \approx 37{,}2 \text{ cm}.$$

3589 *a)* Az erdő csúcspontjait jelöljük a megadás sorrendjében az A, B, C, D, E, F, G, H betűkkel. Foglaljuk bele a nyolcszöget abba a minimális területű téglalapba, amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel: az ábrán ennek a téglalapnak a csúcsait I, J, K és L jelöli. Látható, hogy a téglalap területe $20 \cdot 10 = 200$. A nyolcszög területét megkapjuk, ha az $IJKL$ téglalap területéből levonjuk azoknak a derékszögű háromszögeknek, illetve trapézoknak a területét, amelyek a nyolcszög egy-egy oldala mentén találhatók, és a nyolcszöggel együtt kitöltik az $IJKL$ téglalapot. Ezeknek a síkidomoknak a területét az ábrán $T_1, \ldots, T_8$ jelöli. Egy-egy ilyen háromszög, illetve trapéz területe könnyedén kiszámolható.



Az eredmények:

$$T_1 = 4, \quad T_2 = 10, \quad T_3 = 4, \quad T_4 = 15, \quad T_5 = 4, \quad T_6 = 10, \quad T_7 = 4, \quad T_8 = 15.$$

Végül a nyolcszög területe:

$$T = 200 - 2 \cdot (4 + 10 + 4 + 15) = 134.$$

Az erdő és az ábrázolt nyolcszög hasonló egymáshoz, a hasonlóság aránya 5000. Mivel a hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért az erdő területe:

$$134 \cdot 5000^2\ \text{cm}^2.$$

Mivel $1\ \text{ha} = 10^4\ \text{m}^2 = 10^8\ \text{cm}^2$, ezért az erdő területe:

$$\frac{134 \cdot 5000^2}{10^8} = 33{,}5\ \text{ha}.$$

b) A számítások során felfigyelhettünk arra, hogy a nyolcszög szemközti oldalaihoz illeszkedő háromszögek, illetve trapézok egybevágók egymással. Ebből arra következtethetünk, hogy a nyolcszög középpontosan szimmetrikus. A szimmetria középpontja például az AE szakasz felezőpontja, vagyis a $(4;\,5)$ pont. Egyszerű számolások mutatják, hogy ez a pont valóban megfelezi a szemközti csúcsokat összekötő szakaszokat.

3590 *a)* $A(R;\,0)$, $B(-R;\,0)$, esetleg fordítva.

b) $\overrightarrow{CA}(R - c_1;\,-c_2)$, $\overrightarrow{CB}(-R - c_1;\,-c_2)$.

c) A $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok skaláris szorzatára:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (R - c_1) \cdot (-R - c_1) + (-c_2) \cdot (-c_2).$$

A kijelölt műveletek elvégzése után adódik:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -R^2 + c_1^2 + c_2^2.$$

Mivel a feltételek szerint a C pont az AB átmérőjű kör egy pontja, továbbá a kör középpontja az origó, ezért a C pont az origótól éppen R távolságra van, amit a C koordinátái segítségével úgy is megfogalmazhatunk, hogy

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = R, \quad \text{azaz} \quad c_1^2 + c_2^2 = R^2.$$

Eredményünket összehasonlítva a skaláris szorzat értékével láthatjuk, hogy

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -R^2 + c_1^2 + c_2^2 = -R^2 + R^2 = 0.$$

d) A *c)* feladat eredményéből következik, hogy a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok merőlegesek egymásra, ami egyben azt is jelenti, hogy az ABC háromszög derékszögű. Ezzel beláttuk, hogy ha az AB átmérőjű kör egy (A-tól és B-től különböző) C pontját összekötjük az átmérő két végpontjával, akkor derékszögű háromszög keletkezik, amelyben a derékszög a C csúcsnál található. Megadtuk tehát Thalész tételének egy koordináta-geometriai bizonyítását.

Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái – megoldások

3591 *a)* $(1;\,3)$; *b)* $(-1;\,-1)$; *c)* $\left(-\frac{5}{6};\,\frac{8}{15}\right)$; *d)* $\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right)$; *e)* $\left(a^2 + b^2;\,\frac{a}{a^2 - b^2}\right)$.

3592 *a)* $A(4;\,8)$; *b)* $A\left(-\frac{2}{3};\,\frac{3}{5}\right)$; *c)* $A(2e - 1;\,2f - 4)$.

3593 *a)* $(5;\,5)$, $\left(\frac{13}{2};\,\frac{13}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2};\,\frac{7}{2}\right)$; *b)* $(3;\,1)$, $\left(6;\,\frac{11}{2}\right)$, $\left(0;\,-\frac{7}{2}\right)$.

3594 *a)* $(4;\,-7)$; *b)* $(14;\,-11)$.

3595 *a)* (2013; 2005); *b)* (2027; 1997).

3596 *a)* $\left(6;\frac{8}{3}\right)$ és $\left(9;\frac{10}{3}\right)$; *b)* $\left(\frac{8}{3};-7\right)$ és $\left(\frac{1}{3};-6\right)$;

c) $\left(\frac{31}{135};-\frac{22}{9}\right)$ és $\left(\frac{2}{135};-\frac{8}{9}\right)$.

3597 *a)* $B(14; 9)$; *b)* $B(5; -17)$.

3598 *a)* (1; 2); *b)* (9; 4); *c)* (13; 5); *d)* (37; 11).

3599 A paralelogramma két hiányzó csúcsának koordinátái: (8; 3) és (–1; 2).

3600 A két hiányzó csúcs koordinátái: $B(4; 2)$ és $D(-5; 4)$.

3601 *a)* A feltételeknek két négyzet tesz eleget. A hiányzó csúcsok koordinátái az egyes esetekben:

$$(7;9) \text{ és } (-1;11), \quad \text{illetve} \quad (3;-7) \text{ és } (-5;-5).$$

Az első négyzet középpontja (2; 6), a másodiké pedig (0; –2).

b) A feladatnak egyetlen megoldása van. A hiányzó csúcsok (0; –2) és (2; 6). A négyzet középpontja (1; 2).

3602 *a)* Az oldalfelező pontok:

$$E(0;1),\quad F\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right) \quad \text{és} \quad G\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right).$$

b) A háromszög oldalvektorai:

$$\overrightarrow{AB}(2;4),\ \overrightarrow{BC}(1;-5) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CA}(-3;1).$$

A középvonalvektorok:

$$\overrightarrow{FE}\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),\quad \overrightarrow{GF}(1;2) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{EG}\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right).$$

c) Látható, hogy

$$\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},\quad \overrightarrow{GF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{EG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

ami mutatja, hogy a megfelelő középvonal és oldalvektor egymással valóban párhuzamos.

3603 *a)* (2; 3); *b)* (0; 0); *c)* $\left(\frac{19}{45};\frac{5}{36}\right)$.

3604 *a)* $A(0; 2)$; *b)* $A(0; 6)$;

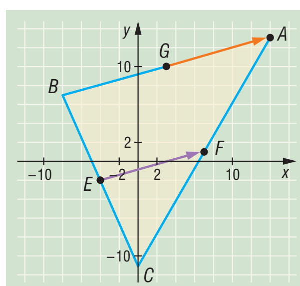
3605 *a)* Az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög súlypontja: (2; 3).

b) Ha az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$, valamint oldalfelező pontjai $E(-4; -2)$, $F(7; 1)$ és $G(3; 10)$, akkor az első koordinátákra a következő egyenletek írhatók fel:

$$\frac{a_1+b_1}{2}=3,\quad \frac{b_1+c_1}{2}=-4,\quad \frac{a_1+c_1}{2}=7.$$

Az egyenletek megfelelő oldalait összeadva:

$$a_1+b_1+c_1=6,\quad \text{amiből}\quad a_1+b_1=6-c_1.$$



Az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{6-c_1}{2}=3, \quad \text{azaz} \quad c_1=0.$$

Hasonló módszerrel kaphatjuk meg, hogy

$$a_1=14 \quad \text{és} \quad b_1=-8.$$

A második koordinátákra felírható egyenletek:

$$\frac{a_2+b_2}{2}=10, \qquad \frac{b_2+c_2}{2}=-2, \qquad \frac{a_2+c_2}{2}=1.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a_2=13, \quad b_2=7 \quad \text{és} \quad c_2=-11.$$

Az Alex által berajzolt háromszög csúcspontjai tehát:

$$A(14;\,13), \quad B(-8;\,7) \quad \text{és} \quad C(0;\,-11).$$

Az ABC háromszög súlypontjának koordinátái: $S(2;\,3)$.

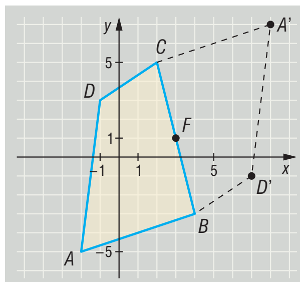
Megjegyzés: Az ABC háromszög csúcspontjait a következő észrevétel alapján is meghatározhatjuk. Az EF szakasz középvonal az ABC háromszögben, ezért EF párhuzamos AB-vel, továbbá hossza az AB hosszának fele. Ebből az is következik, hogy $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{EF}$. Mivel az $\overrightarrow{EF}$ koordinátáira $\overrightarrow{EF}(11;\,3)$, ezért az A pont helyvektora: $\vec{a}=\vec{g}+\overrightarrow{EF}$, ahol $\vec{g}$ a G pont helyvektorát jelöli. A számítások elvégzése után $A(14;\,13)$ adódik. A többi csúcs koordinátái hasonlóan számíthatók.

c) A két háromszög súlypontja egybeesik. Indoklásként említhetjük, hogy az ABC háromszög S súlypontjára vonatkozó, $\lambda=-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság az ABC háromszöget az EFG háromszögbe viszi át. Mivel az S pont a transzformáció fixpontja, ezért a két háromszög súlypontja valóban egybeesik.

3606 *a)* Az $ABCD$ négyszög BC oldalának felezőpontja $F(3;\,1)$. A tükrözés után a B pont képe C és a C pont képe B. Ha az A pont A' tükörképének koordinátái $A'(x;\,y)$, akkor felhasználva, hogy az AA' szakasznak F a felezőpontja, azt kapjuk, hogy

$$\frac{x+(-2)}{2}=3, \qquad \frac{y+(-5)}{2}=1.$$

Az egyenletrendszer megoldásaként $A'(8;\,7)$. Hasonló számolásokkal a D pont tükörképeként $D'(7;\,-1)$ adódik.



b) Az $ABD'A'CD$ hatszög származtatásából adódóan középpontosan szimmetrikus, amiből azonnal következik, hogy a szemközti oldalai párhuzamosak. Utóbbi állítás természetesen koordinátageometriai eszközökkel is igazolható. Példaként: $\overrightarrow{AB}(6;\,2)$ és $\overrightarrow{CA'}(6;\,2)$, ami azt jelenti, hogy a két vektor megegyezik, így természetesen párhuzamosak is egymással.

3607 *a)* Az A, B és C pontok képe az OA, OB, OC szakaszt $1:1$ arányban osztó pontok lesznek. A képpontok koordinátái:

$$A'(1;1), \quad B'\left(-\frac{3}{2};-4\right), \quad C'\left(-3;\frac{1}{2}\right).$$

Az $A'B'C'$ háromszög O pontra vonatkozó tükörképe is megoldása a feladatnak. E pontok koordinátái:

$$A''(-9;-9), \quad B''\left(-\frac{13}{2};-4\right), \quad C''\left(-5;-\frac{17}{2}\right).$$

b) Ebben az esetben a képpontok az OA, OB, OC szakaszt $1:2$ arányban osztják. A képpontok koordinátái:

$$A'\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right),\quad B'\left(-\frac{7}{3};-4\right),\quad C'\left(-\frac{10}{3};-1\right).$$

Az $A'B'C'$ háromszög O pontra vonatkozó tükörképe is megoldása a feladatnak. E pontok koordinátái:

$$A''\left(-\frac{22}{3};-\frac{22}{3}\right),\quad B''\left(-\frac{17}{3};-4\right),\quad C''\left(-\frac{14}{3};-7\right).$$

3608 *a)* Ha az A pont képe $A'(x;\,y)$, akkor az OA' szakasznak a felezőpontja A, azaz

$$\frac{x+(-4)}{2}=6,\quad \frac{y+(-4)}{2}=6,$$

amiből $A'(16;\,16)$. Hasonló módszerrel: $B'(6;\,-4)$, illetve $C'(0;\,14)$.

b) Ebben az esetben az A pont $1:2$ arányban osztja az OA' szakaszt, azaz

$$\frac{2\cdot(-4)+x}{3}=6,\quad \frac{2\cdot(-4)+y}{3}=6,$$

és így $A'(26;\,26)$. A másik két pontra $B'(11;\,-4)$, illetve $C'(2;\,23)$ adódik.

3609 *a)* Az AB oldal felezőpontja: $E\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

A BC oldal felezőpontja: $F\left(\frac{b_1+c_1}{2};\frac{b_2+c_2}{2}\right)$.

Az AC oldal felezőpontja: $G\left(\frac{a_1+c_1}{2};\frac{a_2+c_2}{2}\right)$.

b) Példaként bemutatjuk, hogy EF párhuzamos az AC oldallal. Ehhez kiszámoljuk az $\overrightarrow{EF}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok koordinátáit. Látható, hogy

$$\overrightarrow{EF}\left(\frac{c_1-a_1}{2};\frac{c_2-a_2}{2}\right),\quad \text{míg}\quad \overrightarrow{AC}(c_1-a_1;\,c_2-a_2).$$

A koordináták összehasonlítása után vegyük észre, hogy

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

ami egyben mutatja, hogy a két vektor, és így persze a nekik megfelelő szakaszok is párhuzamosak egymással.

c) Az állítás az $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ összefüggésből azonnal következik.

3610 *a)* A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az AC szakasz és a BD szakasz felezőpontja egybeesik. Az AC szakasz felezőpontjának koordinátái:

$$\left(\frac{a_1+c_1}{2};\frac{a_2+c_2}{2}\right),$$

míg ha a D pont koordinátái x, illetve y, akkor a BD szakasz felezőpontja

$$\left(\frac{b_1+x}{2};\frac{b_2+y}{2}\right).$$

A két felezőpont megfelelő koordinátái egyenlők, ezért

$$\frac{a_1+c_1}{2}=\frac{b_1+x}{2}, \qquad \frac{a_2+c_2}{2}=\frac{b_2+y}{2}.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik:

$$D(a_1+c_1-b_1;\, a_2+c_2-b_2).$$

b) Paralelogramma középvonala alatt két szemközti oldal felezőpontját összekötő szakaszt értjük. Példaként megmutatjuk, hogy az AD és BC oldalak felezőpontját összekötő középvonal párhuzamos az AB oldallal. Az AD oldal felezőpontja:

$$E\left(\frac{2a_1+c_1-b_1}{2}; \frac{2a_2+c_2-b_2}{2}\right),$$

míg a BC oldalé:

$$F\left(\frac{b_1+c_1}{2}; \frac{b_2+c_2}{2}\right).$$

Az $\overrightarrow{EF}$ koordinátáira $\overrightarrow{EF}(b_1-a_1;\, b_2-a_2)$ teljesül, amiről azonnal kiderül, hogy megegyezik az $\overrightarrow{AB}$ koordinátáival. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az EF és AB szakaszok párhuzamosak egymással.

c) A *b)* feladatban beláttuk, hogy $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$, amiből a feladat állítása nyilvánvaló módon következik.

3611 *a)* Példaként néhány szükséges és elegendő feltétel: egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha

I. szemközti oldalai egyenlő hosszúak;

II. van két szemközti oldala, amelyek párhuzamosak és hosszuk egyenlő;

III. átlói felezik egymást;

IV. középpontosan szimmetrikus;

V. szemközti szögei megegyeznek.

b) Az I. feltétel alapján:

$$AB=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}, \qquad BC=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20},$$

$$CD=\sqrt{(-7)^2+(-3)^2}=\sqrt{58}, \qquad DA=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}.$$

A szemközti oldalak valóban egyenlők.

A II. feltétel alapján:

$\overrightarrow{AB}(7;3)$, továbbá $\overrightarrow{DC}(7;3)$. Mivel a két oldalvektor koordinátái megegyeznek, ezért AB és CD párhuzamos és egyenlő hosszúságúak.

A III. feltétel alapján:

Az AC átló felezőpontja: $\left(\frac{4009}{2}; \frac{4021}{2}\right)$. Látható, hogy ez egyben a BD átló felezőpontja is, ezért az átlók valóban felezik egymást.

A IV. feltétel alapján:

A négyszög középpontosan szimmetrikus a $\left(\frac{4009}{2}; \frac{4021}{2}\right)$ pontra vonatkozóan.

Az V. feltétel alapján:

$\overrightarrow{AB}(7;\,3)$, $\overrightarrow{AD}(2;\,4)$. A két vektor skaláris szorzatára:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=7\cdot 2+3\cdot 4=26.$$

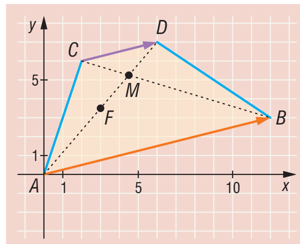
A skaláris szorzat definíciója alapján (α a két vektor hajlásszögét jelöli):

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\alpha=26,\quad \text{amiből}\quad \cos\alpha=\frac{26}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{20}}.$$

Hasonló számolással ugyanezt az értéket kapjuk a $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok hajlásszögének koszinuszára is, ami igazolja, hogy a négyszög két szemközti szöge megegyezik. Ugyanilyen számolással ellenőrizhető, hogy a másik két szemközti szög is egyenlő.

3612 *a)* Az ábra alapján valószínűsíthető, hogy az AB és CD oldalak párhuzamosak. A megfelelő vektorok koordinátáira: $\overrightarrow{AB}(12;\,3)$ és $\overrightarrow{CD}(4;\,1)$, ami mutatja, hogy $\overrightarrow{AB}=3\cdot\overrightarrow{CD}$.

Eredményünkből következik, hogy AB és CD valóban párhuzamos, ezért az $ABDC$ négyszög trapéz, amelyben a hosszabb alap háromszor akkora, mint a rövidebb.



b) Az átlók hossza a koordináta-rendszerben:

$$AD=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{85},\quad \text{illetve}\quad BC=\sqrt{(-10)^2+3^2}=\sqrt{109}.$$

A két út hossza a valóságban:

$$1000\cdot\left(\sqrt{85}+\sqrt{109}\right)\approx 19\,660 \text{ méter, vagyis } 19{,}66 \text{ km}.$$

c) Ismert elemi geometriai összefüggés alapján a trapéz átlói az alapok hosszának arányában osztják egymást. Az *a)* feladat eredménye alapján ez az arány 1 : 3, ezért az átlók M metszéspontja egybeesik az AD átló D-hez legközelebbi negyedelőpontjával. Az AD szakasz felezőpontja:

$$F\left(3;\,\frac{7}{2}\right),$$

így az FD szakasz M felezőpontja:

$$M\left(\frac{3+6}{2};\,\frac{3{,}5+7}{2}\right),\quad \text{vagyis}\quad M(4{,}5;\,5{,}25).$$

3613 Alkalmazzuk az adott szakaszt adott arányban osztó pont koordinátáira vonatkozó összefüggéseket! Az eredmények az egyes esetekben:

a) $P\left(\frac{1}{3};\,-\frac{2}{3}\right)$; *b)* $P\left(\frac{4}{5};\,\frac{1}{5}\right)$; *c)* $P\left(\frac{10}{9};\,\frac{7}{9}\right)$.

3614 Ha a B pont koordinátáira $B(x;\,y)$ teljesül, akkor a feltételek szerint a P pont koordinátái:

$$P\left(\frac{3\cdot(-3)+2x}{5};\,\frac{3\cdot 0+2y}{5}\right).$$

Mivel a P pont adott, így

$$\frac{3\cdot(-3)+2x}{5}=1\quad \text{és}\quad \frac{3\cdot 0+2y}{5}=-2.$$

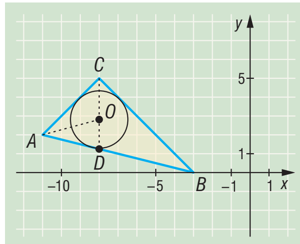
Az egyenletrendszer megoldása után azt kapjuk, hogy a B pont koordinátái: $B(7;\,-5)$.

3615 *a)* Az ABC háromszög oldalainak hossza:

$$AC = 3\cdot\sqrt{2},\ BC = 5\cdot\sqrt{2} \quad \text{és} \quad AB = \sqrt{68} = 2\cdot\sqrt{17}.$$

Vegyük észre, hogy $AC^2 + BC^2 = AB^2$ teljesül, ezért Pitagorasz tételének megfordítása alapján az ABC háromszög derékszögű, mégpedig a derékszög a C csúcsnál található.

b) A Pista bácsi által tervezett ösvény éppen a C csúcsból induló szögfelező mentén húzódik. Eszerint az átfogóhoz tartozó szögfelező és az átfogó D metszéspontjának koordinátáit kell kiszámolnunk. A szögfelezőtétel alapján:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{5\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{5},$$

vagyis a D pont az AB átfogót $3:5$ arányban osztja. Az osztópont koordinátái alapján a D pont koordinátái:

$$D\left(-8;\ \frac{5}{4}\right).$$

c) A mindhárom úttól ugyanolyan távolságra található pont egybeesik az ABC háromszög beírt körének középpontjával, ezért a feladat gyakorlatilag a beírt kör sugarára kérdez rá. A kör sugarát az $r = \dfrac{T}{s}$ összefüggésből számíthatjuk ki, ahol T az ABC háromszög területe, s pedig a háromszög kerületének fele. Mivel

$$T = \frac{AC\cdot BC}{2} = \frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot 5\cdot\sqrt{2}}{2} = 15,$$

továbbá

$$s = \frac{3\cdot\sqrt{2} + 5\cdot\sqrt{2} + \sqrt{68}}{2} = 4\cdot\sqrt{2} + \sqrt{17},$$

ezért a beírt kör sugara

$$r = \frac{15}{4\cdot\sqrt{2} + \sqrt{17}} = 4\cdot\sqrt{2} - \sqrt{17} \approx 1{,}53 \text{ egység}.$$

d) A beírt kör O középpontját az ABC háromszög szögfelezőinek metszéspontjaként kapjuk. Az A csúcsból induló szögfelező az ADC háromszögnek is szögfelezője, ezért az O pont koordinátáit a *b)* feladatban már megismert módszerrel számolhatjuk ki. Mivel az *a)* feladat alapján $AC = 3\cdot\sqrt{2}$, továbbá

$$AD = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{17},$$

ezért az O pont $\left(3\cdot\sqrt{2}\right) : \left(\dfrac{3}{4}\cdot\sqrt{17}\right)$ arányban osztja a CD szakaszt. Az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggések alapján:

$$O\left(\frac{-8\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{17} + (-8)\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2} + \frac{3}{4}\cdot\sqrt{17}};\ \frac{5\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{17} + \frac{5}{4}\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2} + \frac{3}{4}\cdot\sqrt{17}}\right),$$

amit kicsit „barátságosabb” alakban is felírhatunk:

$$O\left(-8;\ \frac{\left(\sqrt{17} + \sqrt{2}\right)\cdot\left(4\cdot\sqrt{2} - \sqrt{17}\right)}{3}\right).$$

3616 *a)* Az $ABCD$ négyszög csúcspontjai legyenek $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ és $D(d_1; d_2)$. Ha az AB oldal felezőpontja a $(-3; 1)$ pont, akkor

$$\frac{a_1 + b_1}{2} = -3 \quad \text{és} \quad \frac{a_2 + b_2}{2} = 1,$$

amiből $b_1 = -6 - a_1$ és $b_2 = 2 - a_2$, tehát $B(-6 - a_1; 2 - a_2)$. Mivel a BC oldal felezőpontja is ismert, ezért

$$\frac{-6 - a_1 + c_1}{2} = 2 \quad \text{és} \quad \frac{2 - a_2 + c_2}{2} = -2,$$

amiből a C pont koordinátái: $C(10 + a_1; -6 + a_2)$. Végül a CD oldal felezőpontjának koordinátáira

$$\frac{10 + a_1 + d_1}{2} = 3 \quad \text{és} \quad \frac{-6 + a_2 + d_2}{2} = 2,$$

és így $D(-4 - a_1; 10 - a_2)$. Eredményeink alapján az AD oldal H felezőpontjának koordinátáira:

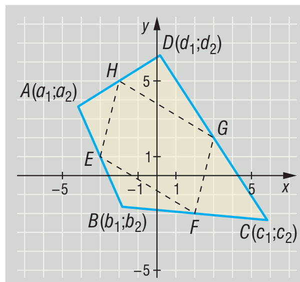
$$H\left(\frac{a_1 + (-4 - a_1)}{2}; \frac{a_2 + (10 - a_2)}{2}\right) = (-2; 5).$$

Megjegyzés: a számításokból az is kiderül, hogy végtelen sok olyan négyszög van, amelynek oldalfelező pontjai a megadott pontok; a négyszög csúcsait az A pont már egyértelműen meghatározza.

b) Az $EFGH$ négyszög EG átlója felezőpontjának koordinátái:

$$\left(\frac{-3 + 3}{2}; \frac{1 + 2}{2}\right) = \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

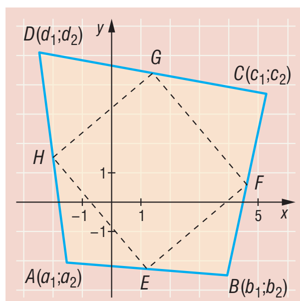
Egyszerű számolás mutatja, hogy az FH átló felezőpontja szintén ugyanez a pont. Ez azt jelenti, hogy az $EFGH$ négyszög átlói felezik egymást, így a négyszög paralelogramma.



3617 *a)* Az $ABCD$ négyszög csúcspontjai legyenek $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ és $D(d_1; d_2)$. Ekkor az oldalfelező pontok:

$$E\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right), \quad F\left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}\right),$$

$$G\left(\frac{c_1 + d_1}{2}; \frac{c_2 + d_2}{2}\right), \quad H\left(\frac{a_1 + d_1}{2}; \frac{a_2 + d_2}{2}\right).$$



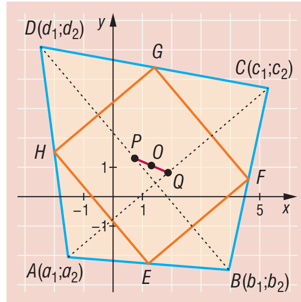
Többféleképpen igazolható, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma. Például megmutathatjuk, hogy az EF és HG oldalak párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

A megfelelő vektorok koordinátái:

$$\overrightarrow{EF}\left(\frac{c_1 - a_1}{2}; \frac{c_2 - a_2}{2}\right) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{HG}\left(\frac{c_1 - a_1}{2}; \frac{c_2 - a_2}{2}\right).$$

A két vektor koordinátái megegyeznek, ami igazolja, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma.

b) Az *a)* feladat jelöléseit fogjuk használni.



Az oldalfelező pontok által közrefogott paralelogramma középpontja egybeesik az EG szakasz O felezőpontjával.

Ezek alapján a paralelogramma középpontjának koordinátái felírhatók:

$$O\left(\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4};\frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}\right).$$

A BD, illetve az AC átló felezőpontja:

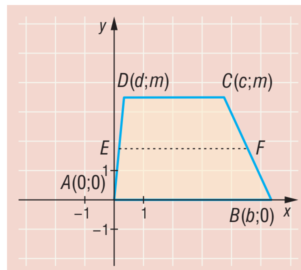
$$P\left(\frac{b_1+d_1}{2};\frac{b_2+d_2}{2}\right)\quad \text{illetve}\quad Q\left(\frac{a_1+c_1}{2};\frac{a_2+c_2}{2}\right).$$

A két átló felezőpontját összekötő PQ szakasz felezőpontja pedig:

$$\left(\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4};\frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}\right).$$

Mivel a kapott pont koordinátái szemlátomást megegyeznek az $EFGH$ paralelogramma O középpontjának koordinátáival, ezért a feladatban szereplő két pont valóban egybeesik.

c) Vegyük fel a koordináta-rendszerben a trapézt úgy, hogy az $ABCD$ trapéz AB alapja illeszkedjen az x tengelyre, A csúcsa pedig az origóba essen.



Ekkor a trapéz csúcsainak koordinátái a következő alakúak:

$$A(0;\,0),\quad B(b;\,0),\quad C(c;\,m)\quad \text{és}\quad D(d;\,m),$$

ahol m a trapéz magasságát jelöli.

A szárak felezőpontja:

$$E\left(\frac{d}{2};\frac{m}{2}\right)\quad \text{és}\quad F\left(\frac{b+c}{2};\frac{m}{2}\right).$$

A koordináta-rendszerben az adatok (pontok) választásából adódóan a trapéz alapjai párhuzamosak az x tengellyel. Tudjuk továbbá, hogy E és F második koordinátája megegyezik, ezért EF is párhuzamos az x tengellyel. Ezzel beláttuk, hogy a trapéz szárait összekötő középvonala párhuzamos az alapokkal.

Az alapok, valamint az EF középvonal hossza könnyen kiszámítható:

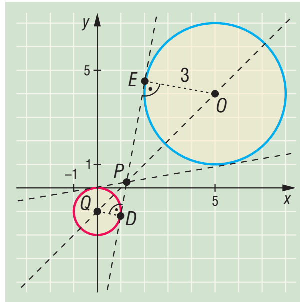
$$AB=|b|,\quad DC=|c-d|,$$

illetve

$$EF=\sqrt{\left(\frac{b+c-d}{2}\right)^2}=\left|\frac{b+c-d}{2}\right|.$$

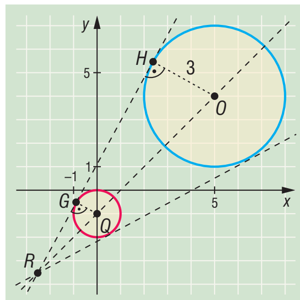
Vegyük észre, hogy ha $b>0$, akkor $c>d$, és ha $b<0$, akkor $c<d$ (máskülönben az $ABCD$ négyszög hurkolt lenne), ezért b és $c-d$ előjele mindenképpen megegyezik, és így valóban teljesül, hogy

$$EF=\frac{AB+DC}{2}.$$



3618 *a)* A két közös belső érintő természetesen az OQ szakaszon metszi egymást. Tegyük fel, hogy az ábrának megfelelően az egyik közös belső érintő a köröket az E, illetve D pontokban érinti, míg a belső érintők metszéspontja P. Ekkor az OEP háromszög hasonló a QDP háromszöghöz, hiszen mindkettő derékszögű (az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra), illetve a P csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek, így szintén egyenlők egymással. A hasonlóság aránya megegyezik a körök sugarainak arányával, azaz $\lambda = \dfrac{OE}{QD} = 3$. Természetesen a két háromszög átfogóinak arányára is érvényes, hogy $\dfrac{OP}{QP} = \lambda = 3$. Eredményünket másként is megfogalmazhatjuk; a P pont az OQ szakasz Q-hoz legközelebbi negyedelőpontja. Így a P pont koordinátái:

$$P\left(\frac{3\cdot 0+1\cdot 5}{4};\ \frac{3\cdot(-1)+1\cdot 4}{4}\right)=\left(\frac{5}{4};\ \frac{1}{4}\right).$$



b) Az *a)* feladathoz hasonló módszerrel járhatunk el. Jelöljük R-rel a két közös külső érintő metszéspontját, az egyik érintő érintési pontjait pedig G-vel, illetve H-val. Az RHO háromszög hasonló az RGQ háromszöghöz, a hasonlóság aránya 3. Az elmondottak alapján $\dfrac{RO}{RQ} = 3$, ami azt is jelenti, hogy a Q pont $1:2$ arányban osztja az RO szakaszt. Ha az ismeretlen R pont koordinátái x és y, akkor

$$\frac{2\cdot x+1\cdot 5}{3}=0 \quad \text{és} \quad \frac{2\cdot y+1\cdot 4}{3}=-1.$$

Az egyenleteket megoldva kapjuk, hogy $R\left(-\dfrac{5}{2};\ -\dfrac{7}{2}\right)$.

Az egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben – megoldások

3619 *a)* Például: $(1;\ 0)$, $(2;\ 0)$, $(-3;\ 0)$. *b)* Például: $(0;\ 1)$, $(0;\ 2)$, $(0;\ 3)$.

c) Például: $(4;\ 5)$; $\left(2;\ \dfrac{5}{2}\right)$; $(40;\ 50)$. *d)* Például: $(-5;\ -7)$, $(5;\ 7)$, $(0{,}5;\ 0{,}7)$.

e) Például: $(9;\ -4)$, $(-9;\ 4)$, $(18;\ -8)$. *f)* Például: $(1;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(2010;\ 0)$.

3620 *a)* $(5;\ -9)$; *b)* $(-6;\ 5)$; *c)* $(5;\ -3)$.

3621 *a)* $(1;\ 0)$; *b)* $(0;\ 1)$; *c)* $(8;\ 3)$; *d)* $(17;\ 50)$; *e)* $(1;\ 3)$.

3622 *a)* $\alpha = 90^\circ$, meredekség nem létezik; *b)* $\alpha = 0^\circ$, $m = 0$;

c) $\alpha = 45^\circ$, $m = 1$; *d)* $\alpha \approx 51{,}34^\circ$, $m = \dfrac{5}{4}$;

e) $\alpha = -45^\circ$, $m = -1$.

3623 *a)* $\vec{v}(5;\ -3)$, $\vec{n}(3;\ 5)$, $\alpha \approx -30{,}96^\circ$, $m = -\dfrac{3}{5}$; *b)* $\vec{v}(2;\ 1)$, $\vec{n}(1;\ -2)$, $\alpha \approx 26{,}57^\circ$, $m = \dfrac{1}{2}$;

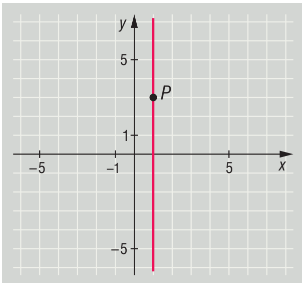
c) $\vec{v}(1;\ 0)$, $\vec{n}(0;\ 1)$, $\alpha = 0^\circ$, $m = 0$;

d) $\vec{v}(0;\,1)$, $\vec{n}(1;\,0)$, $\alpha = 90°$, meredekség nem létezik;

e) $\vec{v}(3;\,-1)$, $\vec{n}(1;\,3)$, $\alpha \approx -18{,}43°$, $m = -\dfrac{1}{3}$;

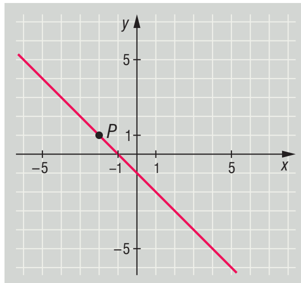
f) $\vec{v}(1;\,5)$, $\vec{n}(5;\,-1)$, $\alpha \approx 78{,}69°$, $m = 5$.

3624 *a)*



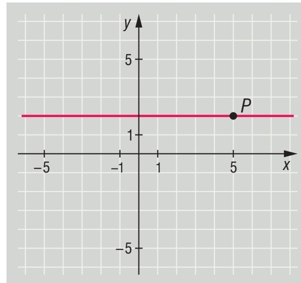
$\vec{n}(1;\,0)$, $\alpha = 90°$, m nincs;

b)



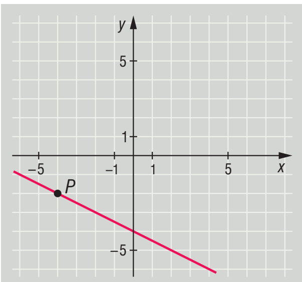
$\vec{n}(1;\,1)$, $\alpha = -45°$, $m = -1$;

c)



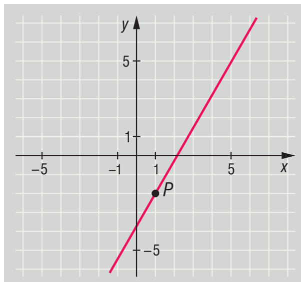
$\vec{n}(0;\,1)$, $\alpha = 0°$, $m = 0$;

d)



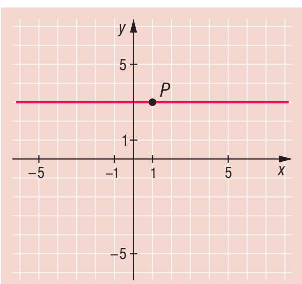
$\vec{n}(1;\,2)$, $\alpha \approx -26{,}57°$, $m = -\dfrac{1}{2}$;

e)



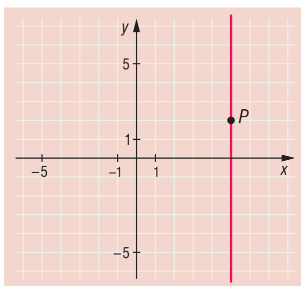
$\vec{n}\left(\sqrt{3};\,-1\right)$, $\alpha = 60°$, $m = \sqrt{3}$.

3625 *a)*



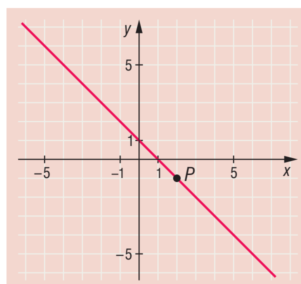
$\vec{v}(1;\,0)$, $\alpha = 0°$, $m = 0$;

b)



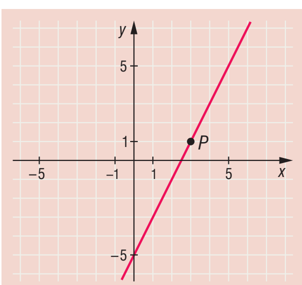
$\vec{v}(0;\,1)$, $\alpha = 90°$, m nincs;

c)



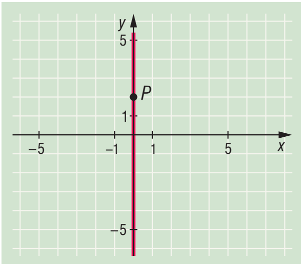
$\vec{v}(1;\,-1)$, $\alpha = -45°$, $m = -1$;

d)



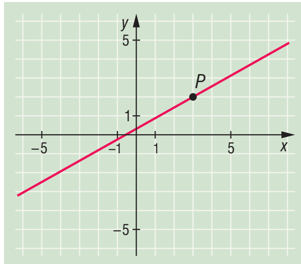
$\vec{v}(1;\,2)$, $\alpha \approx 63{,}43°$, $m = 2$.

3626 *a)*



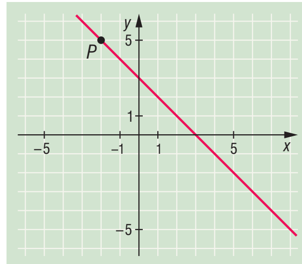
$\vec{v}(0;\,1)$, $\vec{n}(1;\,0)$, m nincs;

b)



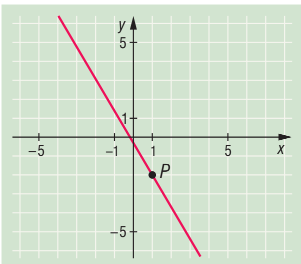
$\vec{v}\left(3;\,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}\left(\sqrt{3};-3\right)$, $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

c)



$\vec{v}(1;\,-1)$, $\vec{n}(1;\,1)$, $m=-1$;

d)



$\vec{v}\left(-1;\,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}\left(\sqrt{3};1\right)$, $m=-\sqrt{3}$.

3627 *a)* 0°; *b)* –45°; *c)* 18,43°; *d)* –30°; *e)* 89,97°.

3628 *a)* $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\vec{v}\left(3;\,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}\left(\sqrt{3};-3\right)$; *b)* $m=-1$, $\vec{v}(1;\,-1)$, $\vec{n}(1;\,1)$;

c) $m=0$, $\vec{v}(1;\,0)$, $\vec{n}(0;\,1)$; *d)* $m\approx 3{,}73$, $\vec{v}(1;\,3{,}73)$, $\vec{n}(3{,}73;\,-1)$;

e) $m=-\sqrt{3}$; $\vec{v}\left(-1;\,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}\left(\sqrt{3};1\right)$.

3629 *a)* $m_e=\dfrac{1}{2}$, $m_f=-2$; *b)* $m_e=\dfrac{1}{5}$, $m_f=-5$; *c)* $m_e=1$, $m_f=-1$; *d)* $m_e=\dfrac{2}{3}$, $m_f=-\dfrac{3}{2}$.

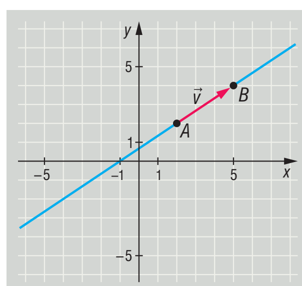
A két egyenes meredekségének szorzata minden esetben –1, ami mutatja, hogy az egyenesek merőlegesek egymásra.

3630 *a)* $m_e=m_f=3$; *b)* $m_e=m_f=-\dfrac{3}{10}$; *c)* $m_e=m_f=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; *d)* $m_e=m_f=\dfrac{a+b}{a-b}$.

Mivel a két egyenes meredeksége minden esetben megegyezik, ezért az egyenesek valóban párhuzamosak egymással.

3631 Az ábra alapján az egyenes egy irányvektora a $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ vektor, melynek koordinátái $\vec{v}(3;\,2)$. Ha a C pont koordinátái $C(2007;\,y)$, akkor az $\overrightarrow{AC}(2005;\,y-2)$ vektor szintén irányvektora az egyenesnek, ezért valamely α valós számra $\overrightarrow{AC}=\alpha\cdot\vec{v}$. Ezek alapján a vektorok első koordinátáira $2005=\alpha\cdot 3$, amiből $\alpha=\dfrac{2005}{3}$, és így

$$y-2=\frac{2005}{3}\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{4016}{3}.$$



A C pont koordinátái tehát $C\left(2007;\,\dfrac{4016}{3}\right)$.

a) Mivel $\overrightarrow{AP}(33;\,22)$, ezért $\overrightarrow{AP} = 11\vec{v}$, ami azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{AP}$ szintén irányvektora az egyenesnek, tehát a P pont illeszkedik az egyenesre.

b) Mivel $\overrightarrow{AQ}(-15;\,-10)$, ezért $\overrightarrow{AQ} = -5\vec{v}$, ezért a Q pont szintén illeszkedik az egyenesre.

c) Az $\overrightarrow{AR}$ koordinátái $\overrightarrow{AR}(-18;\,-11)$. Mivel az $\overrightarrow{AR}$ nem írható fel a $\vec{v}$ valahányszorosaként, ezért a két vektor nem párhuzamos, így az R pont nem illeszkedik az egyenesre.

3632 *a)* Ha az autópálya két ismert pontját A és B jelöli (megadásuk sorrendjében), akkor a pálya egy irányvektorának koordinátái $\overrightarrow{AB}(5;\,3)$. Az A pontot a koordináta-rendszer O kezdőpontjával összekötő vektor koordinátáira: $\overrightarrow{AO}(2;\,1)$. Mivel a két vektor nem párhuzamos egymással, ezért az autópálya nem halad keresztül az origón.

b) Ha a keresett C pont koordinátáit $C(1;\,y)$ jelöli, akkor $\overrightarrow{AC}(3;\,y+1)$. A C pont pontosan akkor illeszkedik az autópálya nyomvonalára, ha valamely α valós számra teljesül, hogy $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$.

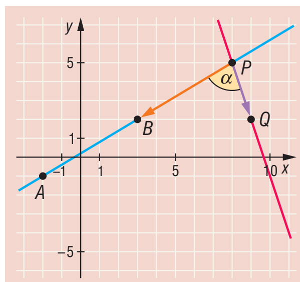
A vektorok első koordinátáinak összehasonlításából $\alpha = \dfrac{3}{5}$, így a második koordinátákra:

$$y + 1 = \frac{3}{5} \cdot 3, \quad \text{amiből} \quad y = \frac{4}{5}.$$

A C pont koordinátái: $C\left(1;\,\dfrac{4}{5}\right)$.

c) Elegendő megmutatni, hogy a P pont illeszkedik az autópálya nyomvonalára. Mivel $\overrightarrow{AP}(10;\,6)$, ezért $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$, ami mutatja, hogy a két vektor párhuzamos egymással. Ebből adódik, hogy a P pont valóban az autópályán található.

d) A két útszakasz által bezárt szöget az ábrának megfelelően jelöljük α-val. Ekkor α megegyezik a $\overrightarrow{PB}$ és $\overrightarrow{PQ}$ vektorok hajlásszögével. A vektorok koordinátái: $\overrightarrow{PB}(-5;\,-3)$, $\overrightarrow{PQ}(1;\,-3)$. A két vektor skaláris szorzatára:



$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PQ} = (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) = 4,$$

hosszukra pedig

$$\left|\overrightarrow{PB}\right| = \sqrt{34} \quad \text{és} \quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{10}$$

teljesül. A skaláris szorzat definíciója alapján:

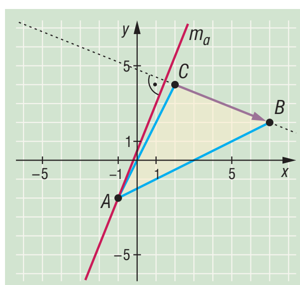
$$\sqrt{34} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha = 4,$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{10}},$$

$$\alpha \approx 77{,}47°.$$

A két útszakasz 77,47°-os szögben metszi majd egymást.

3633 Az A csúcsból induló m_a magasságvonalnak a $\overrightarrow{CB}(5;\,-2)$ vektor egy normálvektora, ezért a magasságvonal egy irányvektora: $\vec{v}(2;\,5)$.



A magasságvonal meredeksége $m = \dfrac{5}{2}$, irányszöge pedig 68,20°.

Hasonló számításokkal kaphatjuk a B csúcsból induló magasságvonal adatait: irányvektorának koordinátái $(2;\,-1)$, meredeksége $-\dfrac{1}{2}$, irányszöge $-26{,}57°$.

A C csúcsból induló magasságvonal adatai: irányvektorának koordinátái $(1;\,-2)$, meredeksége -2, irányszöge $-63{,}43°$.

3634 A háromszög súlypontja $S\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Az AS súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{AS}\left(\frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$, egy normálvektora pedig a $\left(\frac{10}{3}; -\frac{11}{3}\right)$ koordinátájú vektor.

A BS súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{BS}\left(-\frac{13}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, egy normálvektorának koordinátái $\left(\frac{2}{3}; -\frac{13}{3}\right)$.

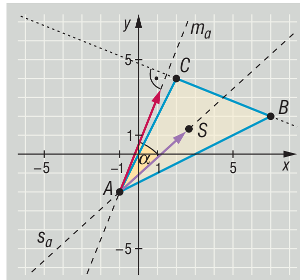
Végül a CS súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{CS}\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$, egy normálvektorának koordinátái $\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

3635 *a)* A 3633. feladat eredménye alapján az A csúcsból induló magasságvonal egy irányvektora $\vec{v}(2; 5)$, míg a 3634. feladat alapján az A csúcsból induló súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{AS}\left(\frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$. A két vektor skaláris szorzata 24, a vektorok hossza:

$$|\vec{v}| = \sqrt{29} \quad \text{és} \quad |\overrightarrow{AS}| = \frac{\sqrt{221}}{3}.$$

Ha a két vektor által bezárt szöget α jelöli, akkor a skaláris szorzatból:

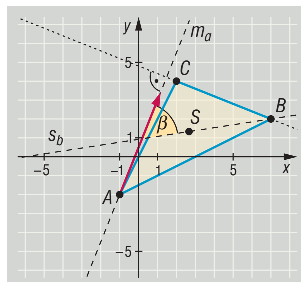
$$24 = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{221}}{3} \cdot \cos\alpha, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 25{,}92°.$$



b) A keresett β szög megegyezik az A csúcsból induló magasságvonal $\vec{v}(2; 5)$ irányvektora, és az s_b súlyvonal $\overrightarrow{SB}$ irányvektora által bezárt szöggel. A 3634. feladat eredménye alapján $\overrightarrow{SB}\left(\frac{13}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Az *a)* feladathoz hasonló számítással:

$$12 = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{173}}{3} \cdot \cos\beta, \quad \text{amiből} \quad \beta \approx 59{,}45°.$$



3636 *a)* Két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha irányvektoraik merőlegesek egymásra, ez pedig pontosan akkor következik be, ha az irányvektorok skaláris szorzata 0. Ezek alapján

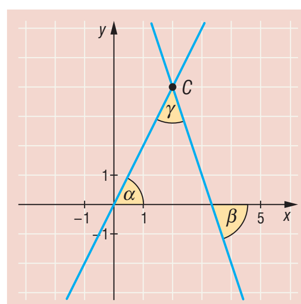
$$\vec{v}_e \cdot \vec{v}_f = 2 \cdot 5 + 1 \cdot p = 0, \quad \text{amiből} \quad p = -10.$$

b) $p = 0$.

c) $p = 2 \cdot \sqrt{2}$ vagy $p = -2 \cdot \sqrt{2}$.

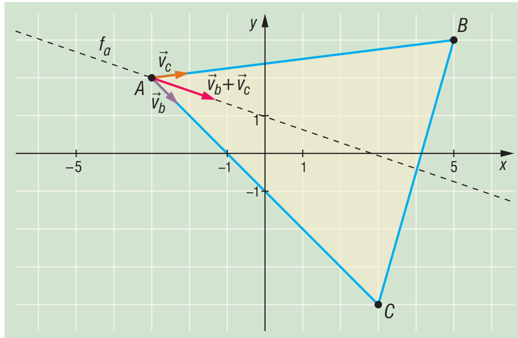
3637 Tegyük fel, hogy a 2 meredekséggel rendelkező egyenes irányszöge α, ekkor $\alpha \approx 63{,}43°$, a -3 meredekséggel rendelkezőé pedig β, ekkor $\beta \approx -71{,}57°$. A két egyenes által bezárt γ szög az ábrán a C metszéspontnál alakul ki. Az egyenesek, valamint az x tengely által közrefogott háromszögből:

$$\gamma = 180° - \alpha + \beta = 180° - 63{,}43° - 71{,}57° = 45{,}00°.$$



3638 *a)* Az AB oldalegyenes egy irányvektora: $\overrightarrow{AB}(8;\,1)$, az AC egyenesé $\overrightarrow{AC}(6;\,-6)$, vagy $\vec{v}_{AC}(1;\,-1)$, és a BC oldalegyenesé $\overrightarrow{BC}(-2;\,-7)$.

b) Az ábrán $\vec{v}_c$, illetve $\vec{v}_b$ az AB, illetve AC oldalegyenesek egy-egy egységnyi hosszúságú irányvektorát jelöli. A $\vec{v}_b+\vec{v}_c$ vektor a két vektor által kifeszített paralelogramma megfelelő átlóvektora. Mivel a két vektor rombuszt feszít ki, ezért átlója illeszkedik a két oldal által közrefogott szögfelezőre, így a $\vec{v}_b+\vec{v}_c$ vektor az A csúcsnál lévő f_a szögfelező egy irányvektora. Feladatunk tehát a $\vec{v}_c$, illetve $\vec{v}_b$ vektorok koordinátáinak meghatározása.



Mivel $\overrightarrow{AB}(8;\,1)$, ezért $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{65}$, így az $\overrightarrow{AB}$-ral egyállású egységvektor koordinátái:

$$\vec{v}_c\left(\frac{8}{\sqrt{65}};\,\frac{1}{\sqrt{65}}\right).$$

Hasonlóan $\vec{v}_{AC}(1;\,-1)$ és $\left|\vec{v}_{AC}\right|=\sqrt{2}$, ezért az AC egyenes egységhosszú irányvektora:

$$\vec{v}_b\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Az f_a szögfelező egy irányvektorának koordinátái:

$$\vec{v}_b+\vec{v}_c\left(\frac{8}{\sqrt{65}}+\frac{1}{\sqrt{2}};\,\frac{1}{\sqrt{65}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

c) Az f_a egyenes irányvektorából a meredeksége már könnyen számolható:

$$m=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{65}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{8}{\sqrt{65}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$m=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{65}}{8\cdot\sqrt{2}+\sqrt{65}}.$$

Az egyenes irányszöge $\approx -18{,}94°$.

3639 Ha a két egyenest e és f jelöli, továbbá m_1 az e, m_2 az f egyenes iránytangense, akkor az egyenesek egy-egy irányvektora $\vec{v}_e(1;\,m_1)$, $\vec{v}_f(1;\,m_2)$. A két irányvektor skaláris szorzatára teljesül, hogy:

$$\vec{v}_e\cdot\vec{v}_f=1+m_1\cdot m_2.$$

A két vektor által közrefogott szög éppen a két egyenes által bezárt φ szöggel egyenlő, ezért a skaláris szorzat más alakban is felírható:

$$\vec{v}_e\cdot\vec{v}_f=\left|\vec{v}_e\right|\cdot\left|\vec{v}_f\right|\cdot\cos\varphi.$$

Mivel

$$\left|\vec{v}_e\right|=\sqrt{1+m_1^2}\quad\text{és}\quad\left|\vec{v}_f\right|=\sqrt{1+m_2^2},$$

ezért

$$\vec{v}_e\cdot\vec{v}_f=\sqrt{1+m_1^2}\cdot\sqrt{1+m_2^2}\cdot\cos\varphi.$$

A skaláris szorzatra kapott két eredmény összevetéséből:

$$1+m_1\cdot m_2=\sqrt{1+m_1^2}\cdot\sqrt{1+m_2^2}\cdot\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi=\frac{1+m_1\cdot m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\cdot\sqrt{1+m_2^2}}. \qquad (1)$$

Jól ismert, de amúgy nem túlságosan bonyolultan igazolható, addíciós összefüggés alapján:

$$1+\mathrm{tg}^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi},$$

ezért ha az (1) egyenlőség mindkét oldalának reciprokát vesszük, majd négyzetre emeljük, akkor adódik, hogy:

$$1+\mathrm{tg}^2\varphi=\frac{(1+m_1^2)\cdot(1+m_2^2)}{(1+m_1\cdot m_2)^2},$$

$$\mathrm{tg}^2\varphi=\frac{(1+m_1^2)\cdot(1+m_2^2)}{(1+m_1\cdot m_2)^2}-1,$$

$$\mathrm{tg}^2\varphi=\frac{(1+m_1^2)\cdot(1+m_2^2)-(1+m_1\cdot m_2)^2}{(1+m_1\cdot m_2)^2}.$$

A kijelölt műveletek és összevonások elvégzése után:

$$\mathrm{tg}^2\varphi=\frac{m_1^2-2\cdot m_1\cdot m_2+m_2^2}{(1+m_1\cdot m_2)^2},$$

$$\mathrm{tg}^2\varphi=\frac{(m_1-m_2)^2}{(1+m_1\cdot m_2)^2}.$$

Mindkét oldalból négyzetgyököt vonva kapjuk, hogy:

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}\right|,$$

amit éppen bizonyítani kellett.

Az egyenes egyenletei – megoldások

3640 *a)* $y=3$; *b)* $x=3$; *c)* $x+y=5$; *d)* $-2x+y=0$;
e) $x-3y=-14$; *f)* $x+2y=-4$; *g)* $x-2y=5$; *h)* $x+2y=8$.

3641 *a)* $x=1005$; *b)* $y=\frac{3}{2}$; *c)* $x+3y=0$; *d)* $-6x+20y=37$.

3642 $8x-3y=6{,}5$.

3643 *a)* $x=2$; *b)* $y=-5$; *c)* $x-y=2$; *d)* $x+2y=-4$;
e) $x+2y=7$; *f)* $x-3y=0$; *g)* $x-y=-6$; *h)* $3x+2y=16$.

3644 *a)* $y=0$; *b)* $x=-2$; *c)* $y=3x$; *d)* $10x+3y=11$;
e) $x+y=\frac{1}{15}$; *f)* $2x-y=5\cdot\sqrt{3}$.

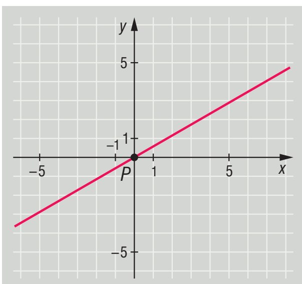
3645 *a)* A pontok mindegyike illeszkedik az $y = -2x + 1$ egyenletű egyenesre.
b) Mindhárom pont illeszkedik a $3x - 2y = 2005$ egyenletű egyenesre.
c) Mindhárom pont illeszkedik a $3x - 2y = 15$ egyenletű egyenesre.
d) A három pont nem illeszkedik egy egyenesre.

3646 *a)* $y = 4x$, illetve $y = -\frac{1}{4}x$; *b)* $3x + 4y = 10$, illetve $4x - 3y = -20$;
c) $y = 4x + 10$, illetve $x + 4y = -11$; *d)* $6x - 7y = 41$, illetve $7x + 6y = -23$.

3647 *a)* $3x + 2y = 5$; *b)* $y = 2x + 8$; *c)* $y = x$;
d) $2x + 3y = -19$.

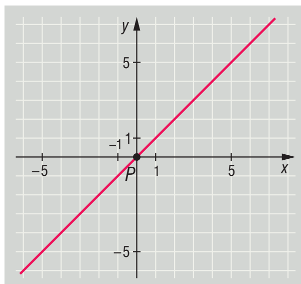
3648 *a)* $y = -x$; *b)* $x + 2y = 2$; *c)* $x + 3y = 10$;
d) $y = x + 1$.

3649 *a)*



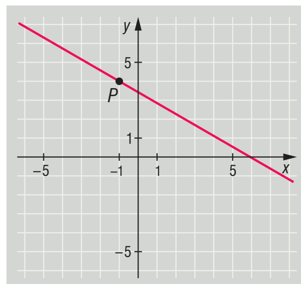
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

b)



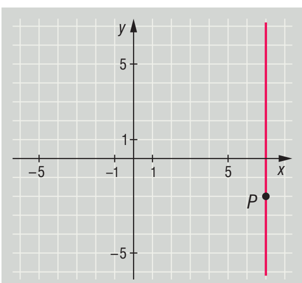
$y = x$;

c)



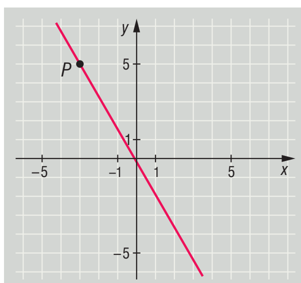
$y - 4 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x + 1)$;

d)



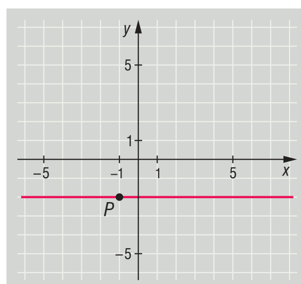
$x = 7$;

e)



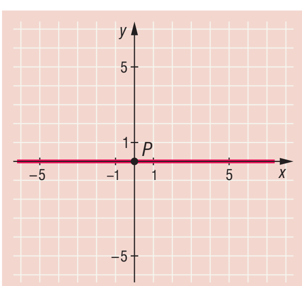
$y - 5 = -\sqrt{3} \cdot (x + 3)$;

f)



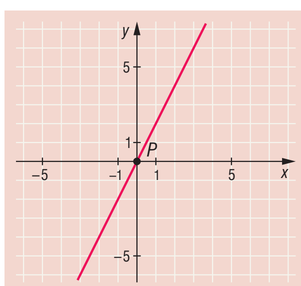
$y = -2$.

3650 *a)*



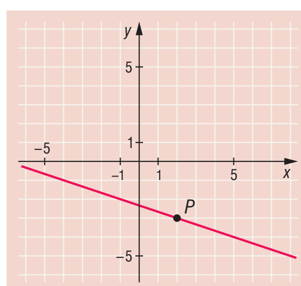
$y = 0$;

b)



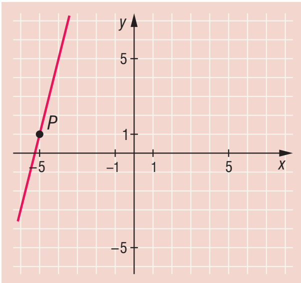
$y = 2x$;

c)



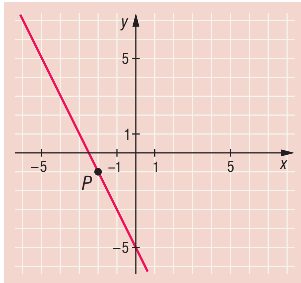
$x + 3y = -7$;

d)



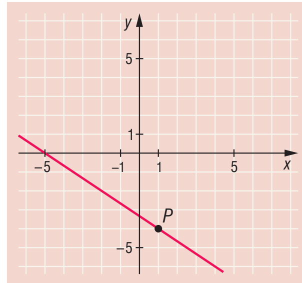
$4x - y = -21;$

e)



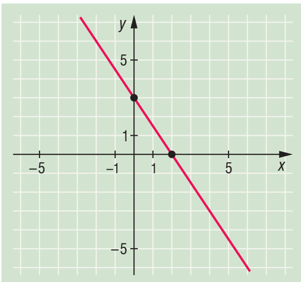
$2x + y = -5;$

f)



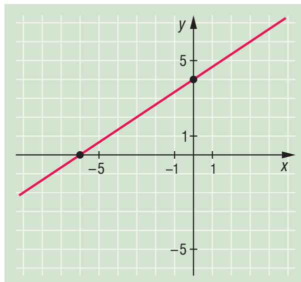
$2x + 3y = -10.$

3651 *a)*



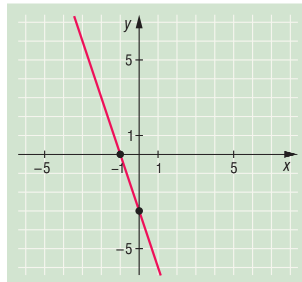
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1;$

b)



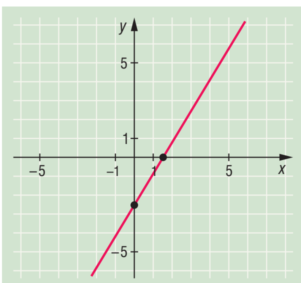
$-\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1;$

c)



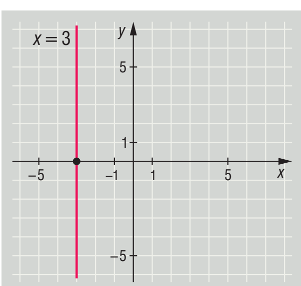
$-x - \frac{y}{3} = 1;$

d)



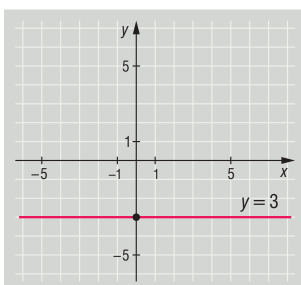
$\frac{2x}{3} - \frac{2y}{5} = 1.$

3652 *a)*



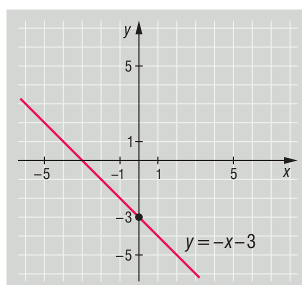
$\vec{v}(0;\, 1)$, $\vec{n}(1;\, 0)$,
m nem létezik, $\alpha = 90°$;

b)



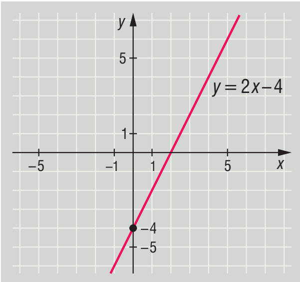
$\vec{v}(1;\, 0)$, $\vec{n}(0;\, 1)$,
$m = 0$, $\alpha = 0°$;

c)



$\vec{v}(1;\, -1)$, $\vec{n}(1;\, 1)$,
$m = -1$, $\alpha = -45°$;

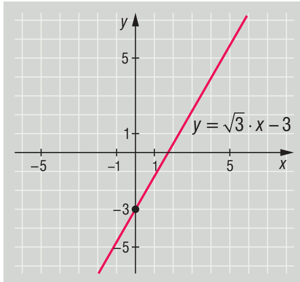
d)



$\vec{v}(1;\,2)$, $\vec{n}(2;\,-1)$,

$m = 2$, $\alpha \approx 63{,}43°$;

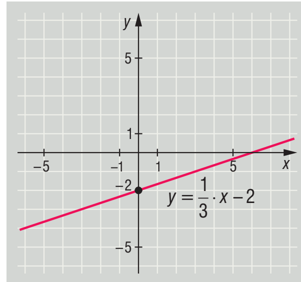
e)



$\vec{v}\left(1;\,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}\left(\sqrt{3};\,-1\right)$,

$m = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$;

f)



$\vec{v}(3;\,1)$, $\vec{n}(-1;\,3)$,

$m = \dfrac{1}{3}$, $\alpha \approx 18{,}43°$.

3653 *a)* $x + y = 3$, $\vec{n}(1;\,1)$, $\vec{v}(1;\,-1)$, $m = -1$, $\alpha = -45°$;

b) $-2x + y = 4$, $\vec{n}(-2;\,1)$, $\vec{v}(1;\,2)$, $m = 2$, $\alpha \approx 63{,}43°$;

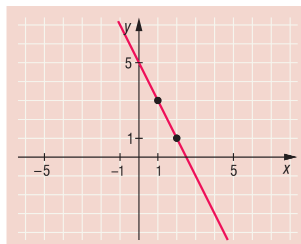
c) $x + 2y = -2$, $\vec{n}(1;\,2)$, $\vec{v}(2;\,-1)$, $m = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha \approx -26{,}57°$;

d) $x - 6y = 6$, $\vec{n}(1;\,-6)$, $\vec{v}(6;\,1)$, $m = \dfrac{1}{6}$, $\alpha \approx 9{,}46°$.

3654 *a)* A P pont illeszkedik az egyenesre, ezért az egyenes és tükörképe egybeesik. Így a tükörkép egyenlete: $2x + y = 5$.

b) $2x + y = -3$.

c) $2x + y = -5$.



3655 *a)* Az egyenes a háromszög BC oldalegyenese.

b) Nem oldalegyenes.

c) Nem oldalegyenes.

d) Nem oldalegyenes.

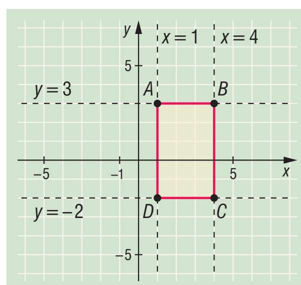
e) Az egyenes a háromszög AC oldalegyenese.

f) Az egyenes a háromszög AB oldalegyenese.

g) Az egyenes a háromszög BC oldalegyenese.

3656 *a)* $A(1;\,3)$, $B(4;\,3)$, $C(4;\,-2)$, $D(1;\,-2)$.

b) Az egyenesek téglalapot fognak közre.

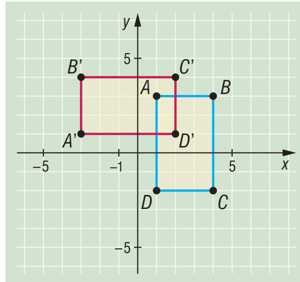


c) $A'(-3;\,1)$, $B'(-3;\,4)$, $C'(2;\,4)$, $D(2;\,1)$.

d) Az oldalegyenesek egyenlete:

$$x=-3,\quad y=4,\quad x=2,\quad y=1.$$

e) A két négyszög közös részének kerülete 6, területe 2; egyesítésük kerülete 26, területe pedig 28.



3657 *a)* Az AB egyenes egy irányvektora az $\overrightarrow{AB}(5;\,-5)$ vektor, így egy normálvektora az $\vec{n}_{AB}(1;\,1)$ vektor. Az egyenes egyenlete: $x+y=0$. A BC egyenes egy irányvektora: $\overrightarrow{BC}(2;\,6)$, normálvektora $\vec{n}_{BC}(-3;\,1)$, egyenlete: $3x-y=12$. Végül az AC egyenes egyenlete: $x-7y=-16$.

b) Az A csúcsból induló m_a magasságvonal merőleges a BC egyenesre, ezért egy normálvektora az $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}(1;3)$ vektor. Az A pont illeszkedik a magasságvonalra, ezért m_a egyenlete: $x+3y=4$. Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk a másik két magasságvonal egyenletét is: m_b egyenlete $7x+y=18$ és m_c egyenlete $x-y=2$.

c) Mivel $2{,}5+3\cdot 0{,}5=4$, ezért az M pont illeszkedik az m_a egyenesre. Hasonlóan: $7\cdot 2{,}5+0{,}5=18$, illetve $2{,}5-0{,}5=2$, ezért az M pont a másik két magasságvonalnak is pontja. Az M pont épp az ABC háromszög magasságpontja.

3658 *a)* Az AB oldal felezőpontja az $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ koordinátájú pont. Mivel az AB oldalfelező merőlegesének az $\overrightarrow{AB}(5;\,-5)$ vektor normálvektora, ezért az egyenes egyenlete:

$$5x-5y=5\cdot\frac{1}{2}-5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),\quad \text{vagyis}\quad x-y=1.$$

A BC oldal felezőpontja $(4;\,0)$, az oldalfelező merőleges normálvektora $(1;\,3)$, ezért annak egyenlete $x+3y=4$. Végül az AC oldalfelező merőlegesének egyenlete: $7x+y=13$.

b) Mivel

$$\frac{7}{4}-\frac{3}{4}=1,\qquad \frac{7}{4}+3\cdot\frac{3}{4}=4,\qquad 7\cdot\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=13,$$

ezért az O pont valóban illeszkedik mindhárom oldalfelező merőlegesre.

c) Az O pont és az ABC háromszög csúcsainak távolsága:

$$OA=\sqrt{\left(-2-\frac{7}{4}\right)^2+\left(2-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{225}{16}+\frac{25}{16}}=\frac{5\cdot\sqrt{10}}{4},$$

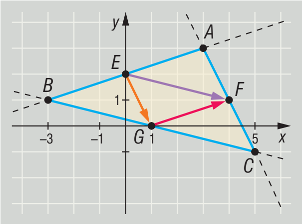
$$OB=\sqrt{\left(3-\frac{7}{4}\right)^2+\left(-3-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{225}{16}}=\frac{5\cdot\sqrt{10}}{4},$$

$$OC=\sqrt{\left(5-\frac{7}{4}\right)^2+\left(3-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{16}+\frac{81}{16}}=\frac{5\cdot\sqrt{10}}{4}.$$

Eredményeink igazolják, hogy az O pont a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra található.

d) Az O pont az ABC háromszög köré írható kör középpontja.

3659 Az adott pontokat a megadás sorrendjében E, F és G, a háromszög csúcspontjait A, B és C jelöli az ábrán. Az EF szakasz középvonal az ABC háromszögben, ezért párhuzamos a háromszög BC oldalával. Ezt a tényt a koordináta-geometriában úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $\overrightarrow{EF}(4; -1)$ vektor a BC egyenes egy irányvektora. A BC egyenes átmegy a G ponton, ezért az egyenes irányvektoros egyenletének alkalmazása után a BC egyenes egyenlete:



$$-x - 4y = -1 \cdot 1 - 4 \cdot 0, \quad \text{azaz} \quad x + 4y = 1.$$

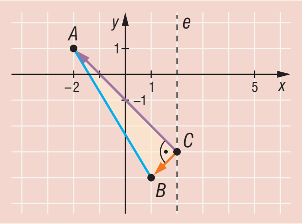
Hasonló megfontolások után az AB egyenes egyenlete:

$$x - 3y = -6,$$

az AC egyenesé:

$$2x + y = 9.$$

3660 *a)* Jelöljük C-vel az e egyenes egy olyan pontját, amellyel az ABC háromszög derékszögű, a derékszög pedig a C csúcsnál van. Mivel C illeszkedik az e egyenesre, ezért koordinátáit $C(2; y)$ alakban kereshetjük. A feltételek szerint $ACB\sphericalangle = 90°$, ezért a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok skaláris szorzata 0. Mivel $\overrightarrow{CA}(-4; 1-y)$ és $\overrightarrow{CB}(-1; -4-y)$, ezért



$$-4 \cdot (-1) + (1-y) \cdot (-4-y) = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $y = 0$ és $y = -3$. Az e egyenesen tehát valóban két olyan C pont található, amely az AB átfogóval derékszögű háromszöget alkot, ezek koordinátái $C(2; -3)$ és $C(2; 0)$.

b) Az *a)* feladat eredményei alapján $C(2; -3)$. Az AC befogó egy irányvektora a $\overrightarrow{CA}(-4; 4)$ vektor, és egy pontja a C pont. Ezek alapján az AC egyenes egyenlete:

$$x + y = -1.$$

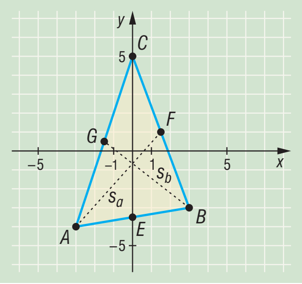
A BC egyenes egyenlete:

$$x - y = 5.$$

c) Az AC egyenes meredeksége -1, a BC egyenesé 1.

d) Az ABC háromszög derékszögű, ezért körülírt körének középpontja egybeesik az AB átfogó felezőpontjával, a kör sugara pedig az átfogó hosszának fele. Az AB átfogó hossza $\sqrt{34}$, így a körülírt kör sugara $\dfrac{\sqrt{34}}{2} \approx 2{,}92$.

3661 A háromszöglap egyensúlyban marad, ha a súlyvonalai mentén támasztjuk alá. A háromszög AB oldalának felezőpontja $E\left(0; -\dfrac{7}{2}\right)$. Mivel e pont illeszkedik az y tengelyre, csakúgy mint a C csúcs, ezért az s_c súlyvonal egyenlete: $x = 0$.



A BC oldal felezőpontja $F\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)$, ezért az AB súlyvonal egy irányvektora $\overrightarrow{AF}\left(\dfrac{9}{2}; 5\right)$, így egyenlete: $10x - 9y = 6$.

Az AC oldal felezőpontja $G\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, az s_b súlyvonal egyenlete: $7x + 9y = -6$.

3662 *a)* Az egyenes x tengellyel való metszete:

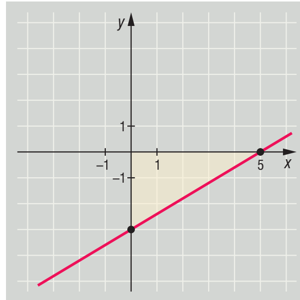
$$a = 5,$$

y tengellyel való metszete:

$$b = -3.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = 7{,}5.$$



b) Az egyenes x tengellyel való metszete:

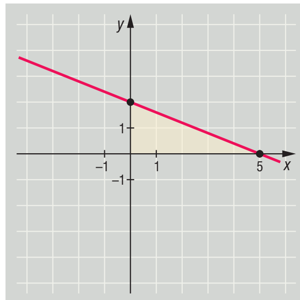
$$a = 5,$$

y tengellyel való metszete:

$$b = 2.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = 5.$$



c) Az egyenes x tengellyel való metszete:

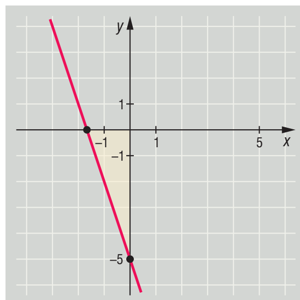
$$a = -\frac{5}{3},$$

y tengellyel való metszete:

$$b = -5.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = \frac{25}{6}.$$



d) Az egyenes x tengellyel való metszete:

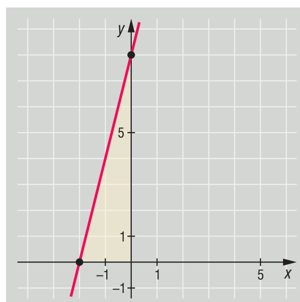
$$a = -2,$$

y tengellyel való metszete:

$$b = 8.$$

A tengelyekből kimetszett háromszög területe:

$$T = 8.$$



3663 *a)* Az e egyenes meredeksége $\frac{2}{3}$, az f egyenesé $-\frac{a}{2}$. A két egyenes merőlegességének szükséges és elegendő feltétele, hogy a meredekségek szorzata -1 legyen. Ezek alapján:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) = -1, \quad \text{amiből} \quad a = 3.$$

b) $a = \frac{5}{4}.$

c) Az e egyenes párhuzamos az y tengellyel, ezért az f egyenesnek az x tengellyel kell párhuzamosnak lennie. Ekkor az f egyenes egyenletében x-et tartalmazó tag nem szerepelhet, ezért a feltételeknek megfelelő a nem létezik.

d) $a = 5$ vagy $a = -5$.

3664 *a)* $b = \frac{1}{2}$ és a tetszőleges valós szám. *b)* $b = -8$ és a tetszőleges valós szám.

c) $b = \frac{1}{2}$ és $a = -2$.

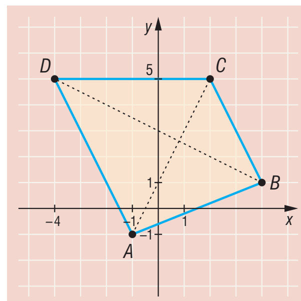
3665 A P és Q pontok koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét, ezért:

$$\left.\begin{aligned} 4a + 6b &= 4 \\ -6a + 21b &= 4 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = \frac{1}{2}$ és $b = \frac{1}{3}$.

3666 *a)* Az $\overrightarrow{AC}$ vektor koordinátái: $\overrightarrow{AC}(3; 6)$, ezért az AC egyenes egy irányvektora:

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}(1; 2).$$



Mivel az AC egyenes átmegy az A ponton, ezért az irányvektoros egyenlet alkalmazásával kapjuk, hogy egyenlete:

$$2x - y = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1), \quad \text{azaz} \quad 2x - y = -1.$$

Hasonló számításokkal a BD átló egyenesének egyenlete:

$$x + 2y = 6.$$

b) Az átlóegyenesek egyenletéből az AC egyenes meredeksége 2, a BD egyenesé $-\frac{1}{2}$. Mivel a két egyenes meredekségének szorzata -1, ezért a két egyenes valóban merőleges egymásra.

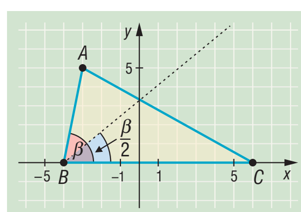
c) Mivel az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, ezért területe $T = \frac{AC \cdot BD}{2}$. Egyszerű számolásokkal: $AC = \sqrt{45}$, illetve $BD = \sqrt{80}$, így az $ABCD$ négyszög területe:

$$T = \frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{80}}{2} = \frac{\left(3 \cdot \sqrt{5}\right) \cdot \left(4 \cdot \sqrt{5}\right)}{2} = 30.$$

Mivel 1 egység 50 méternek felel meg a valóságban, ezért a birtok tényleges területe:

$$30 \cdot 50 \cdot 50 = 75\,000 \text{ m}^2, \quad \text{ami} \quad 7{,}5 \text{ hektár}.$$

3667 *a)* Az AB egyenes egy irányvektorának koordinátái: $\overrightarrow{BA}(1; 5)$, ezért meredeksége 5, azaz $\operatorname{tg}\beta = 5$.



A B csúcshoz tartozó belső szögfelező irányszöge $\frac{\beta}{2}$, ezért meredeksége:

$$m = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Ismert addíciós összefüggés alapján:

$$5 = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\beta}{2}\right) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} = \frac{2m}{1-m^2},$$

amiből kapjuk, hogy

$$5m^2 + 2m - 5 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$m_1 = \frac{-2 + 2 \cdot \sqrt{26}}{10} = \frac{-1+\sqrt{26}}{5}, \quad \text{illetve} \quad m_2 = \frac{-1-\sqrt{26}}{5}.$$

Az ábra alapján látható, hogy a B csúcshoz tartozó belső szögfelező meredeksége pozitív, így csak m_1 jöhet szóba. A B csúcsnál lévő szögfelező meredekségének pontos értéke:

$$m = \frac{-1+\sqrt{26}}{5}.$$

A külső szögfelező merőleges a belső szögfelezőre, ezért ha meredekségét m' jelöli, akkor $m' \cdot m = -1$, azaz

$$m' \cdot \frac{-1+\sqrt{26}}{5} = -1, \quad \text{amiből} \quad m' = \frac{-5}{-1+\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{26}+1}{5}.$$

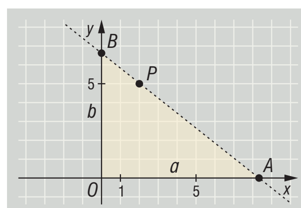
A külső szögfelező meredekségének pontos értéke:

$$m' = -\frac{\sqrt{26}+1}{5}.$$

b) Az egyenes iránytényezős egyenlete alapján a B csúcshoz tartozó belső szögfelező egyenlete:

$$y = \frac{\sqrt{26}-1}{5} \cdot (x+4).$$

3668 Ha a P ponton átmenő egyenes tengelymetszetei az ábrának megfelelően a és b, akkor egyenlete $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ alakban írható (a és b pozitív számok). Mivel a P pont illeszkedik az egyenesre, ezért koordinátái kielégítik az egyenletet, azaz:



$$\frac{2}{a} + \frac{5}{b} = 1. \qquad (1)$$

Az egyenes a koordináta-rendszer tengelyeivel az AOB derékszögű háromszöget fogja közre, amelynek befogói a és b, ezért területe $T = \frac{a \cdot b}{2}$. Feladatunk a terület minimumának megállapítása az (1) feltétel teljesülése mellett. Az (1) összeg tagjai kis ügyeskedéssel megjeleníthetők a területet leíró képletben:

$$\sqrt{2 \cdot T} = \sqrt{a \cdot b},$$

majd 10-zel bővítve az $a \cdot b$ szorzatot, kapjuk hogy:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{5}}.$$

Mivel a terület nyilván pozitív értékű, ezért helyette a kapott kifejezés minimumát is kereshetjük.

Használjuk fel, hogy két pozitív szám – esetünkben az $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{5}$ számok – mértani közepe nem kisebb a két szám harmonikus közepénél:

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{5}}\geq\sqrt{10}\cdot\frac{2}{\frac{1}{\frac{a}{2}}+\frac{1}{\frac{b}{5}}}=\sqrt{10}\cdot\frac{2}{\frac{2}{a}+\frac{5}{b}}=\sqrt{10}\cdot\frac{2}{1}=2\cdot\sqrt{10}.$$

A harmadik egyenlőségnél felhasználtuk az (1) összefüggést. Eredményeink alapján:

$$\sqrt{2\cdot T}=\sqrt{a\cdot b}\geq 2\cdot\sqrt{10},$$

amiből következik, hogy

$$T\geq 20.$$

Ez azt jelenti, hogy a P ponton átmenő egyenesek a koordináta-rendszer tengelyeivel legalább 20 egység területű háromszöget fognak közre. A terület a minimumát akkor éri el, amikor a mértani és harmonikus közepek között egyenlőség teljesül, ami pontosan akkor következik be, amikor a két tag megegyezik egymással, azaz

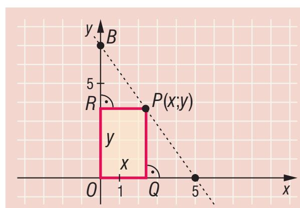
$$\frac{a}{2}=\frac{b}{5}. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása $a=4$ és $b=10$, ezért a keresett egyenes egyenlete:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{10}=1.$$

Megjegyzés: A P pont éppen felezi a kapott egyenesnek a koordináta-rendszer tengelyei közé eső szakaszát.

3669 A P pont koordinátáit az ábrán $P(x;\,y)$, a befogókra eső merőleges vetületeit pedig Q, illetve R jelöli. Ekkor Béla bácsi az $OQPR$ téglalapba tervez epret ültetni, melynek oldalai x, illetve y, területe ebből kifolyólag pedig $T=x\cdot y$ (x és y pozitív számok). Feladatunk a maximális területű téglalap megtalálása.



Mivel a P pont a telek átfogójára illeszkedik, ezért koordinátái kielégítik az átfogó egyenesének egyenletét, azaz:

$$7x+5y=35. \qquad (1)$$

A fenti összeg tagjai kis ügyeskedés után megjeleníthetők az $OQPR$ téglalap területét leíró képletben:

$$T=x\cdot y=\frac{1}{35}\cdot(7x)\cdot(5y).$$

Használjuk fel, hogy két pozitív szám mértani közepe nem lehet nagyobb, mint számtani közepük, ezért

$$T=\frac{1}{35}\cdot\left(\sqrt{(7x)\cdot(5y)}\right)^2\leq\frac{1}{35}\cdot\left(\frac{7x+5y}{2}\right)^2=\frac{1}{35}\cdot\left(\frac{35}{2}\right)^2=\frac{35}{4}.$$

A második egyenlőségnél felhasználtuk az (1) összefüggést. Azt kaptuk tehát, hogy az $OQPR$ téglalap területére $T\leq\frac{35}{4}$. A terület a maximumát akkor veszi fel, amikor a mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenségben egyenlőség teljesül, azaz amikor a két szám megegyezik egymással. Ez akkor következik be, ha

$$7x=5y. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása:

$$x=\frac{5}{2}\quad \text{és}\quad y=\frac{7}{2}.$$

A maximális területű téglalap tehát a $P\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ ponthoz tartozik.

3670 *a)* Jelöljük a P pont koordinátáit $P(x;\,y)$-nal. Ekkor

$$PA^2=(x+3)^2+(y-5)^2,\quad \text{illetve}\quad PB^2=(x-1)^2+(y+4)^2,$$

így a kijelölt műveleteket elvégezve kapjuk, hogy

$$PA^2-PB^2=8x-18y+17.$$

Az adott feltételnek pontosan azok a P pontok tesznek eleget, amelyek koordinátái kielégítik a

$$8x-18y+17=\lambda\qquad (1)$$

egyenletet. Mivel a fenti egyenlet a λ értékétől függetlenül egy egyenes egyenlete, ezért a feltételt kielégítő P pontok valóban egy egyenesre illeszkednek.

b) Az (1) egyenletű egyenes meredeksége λ-tól függetlenül $m=\frac{4}{9}$, ezért a λ különböző értékeihez tartozó egyenesek valóban párhuzamosak egymással.

c) Ha az origó illeszkedik az egyenesre, akkor koordinátái kielégítik az (1) egyenletet, azaz

$$8\cdot 0-18\cdot 0+17=\lambda,\quad \text{azaz}\quad \lambda=17.$$

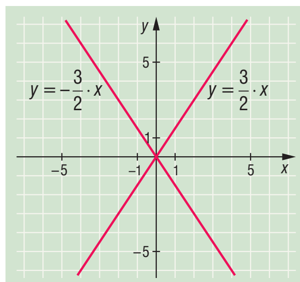
3671 *a)* Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$(3x-2y)\cdot(3x+2y)=0.$$

Mivel egy szorzat akkor és csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért:

$$y=\frac{3}{2}x\quad \text{vagy}\quad y=-\frac{3}{2}x.$$

A feltételt kielégítő pontok tehát két, az origón áthaladó egyenes valamelyikére illeszkednek.



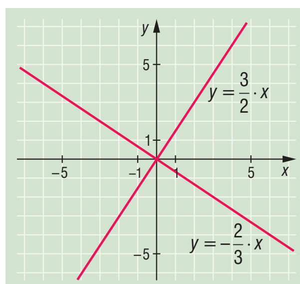
b) Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést ezúttal is szorzattá alakíthatjuk:

$$6x^2-6y^2+5xy=6x^2-4xy+9xy-6y^2=$$
$$=2x\cdot(3x-2y)+3y\cdot(3x-2y)=(3x-2y)\cdot(2x+3y)=0.$$

A feltételnek az

$$y=\frac{3}{2}x\quad \text{vagy}\quad y=-\frac{2}{3}x$$

egyenletű, egymásra merőleges egyenesek pontjai tesznek eleget.



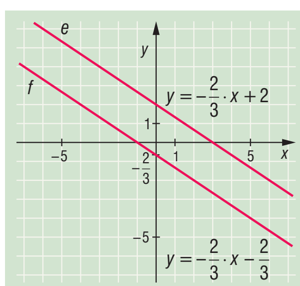
c) Az abszolút érték értelmezése alapján:

$$2x+3y-2=4\quad \text{vagy}\quad 2x+3y-2=-4.$$

A feltételnek az

$$e\colon\ 2x+3y=6,\quad \text{illetve}\quad f\colon\ 2x+3y=-2$$

egyenletű, egymással párhuzamos egyenesek pontjai tesznek eleget.



Két egyenes metszéspontja, távolsága, hajlásszöge – megoldások

3672 *a)* (1; 1); *b)* (3; –3); *c)* (5; 2); *d)* $\left(\frac{745}{168}; \frac{35}{24}\right)$.

3673 *a)* (–2; 5), (5; 3), (–1; –2); *b)* (0; 0), (3; 5), (1; –4);
c) (–4; 2), (8; 3), (–1; –5); *d)* (–3; 6), (5; 0), (–2; –1).

3674 *a)* Az átlók metszéspontjának koordinátái (2; 1).
b) Az átlókat tartalmazó egyenesek egyenlete: $y = x - 1$, illetve $y = -x + 3$. A két egyenes meredekségének szorzata –1, ami igazolja, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra.
c) Az *ABCD* négyszög deltoid.

3675 *a)* $O(3; -2)$, $r = 5$; *b)* $O(0; 0)$, $r = \sqrt{20}$;
c) $O(-5; -3)$, $r = \sqrt{20}$; *d)* $O(-7; 0)$, $r = \sqrt{17}$.

3676 *a)* $\left(\frac{38}{61}; \frac{20}{61}\right)$; *b)* (1; 1); *c)* $\left(\frac{1}{3}; \frac{19}{3}\right)$.

3677 (1; 0).

3678 *a)* $\sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2}$ $[M(2; 0)]$; *b)* $\sqrt{5}$ $[M(1; -2)]$;
c) $2 \cdot \sqrt{5}$ $[M(1; 3)]$; *d)* $2 \cdot \sqrt{5}$ $[M(3; 1)]$.

3679 *a)* (6; –4); *b)* (2; –4); *c)* (3; 7); *d)* (5; 5).

3680 *a)* Ha az $x - y = 4$ egyenletű egyenesen adott a $P(4; 0)$ pont, akkor az $x - y = -1$ egyenletű egyenesnek a P ponton áthaladó, rá merőleges egyenessel való metszéspontja $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Ekkor $d_{PM} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$.

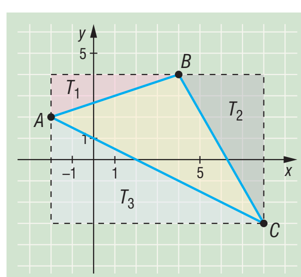
b) Ha a $-2x + y = 5$ egyenletű egyenesen adott a $P(0; 5)$ pont, akkor a $-2x + y = -5$ egyenletű egyenesnek a P ponton áthaladó, rá merőleges egyenessel való metszéspontja $M(4; 3)$. Ekkor $d_{PM} = 2 \cdot \sqrt{5}$.

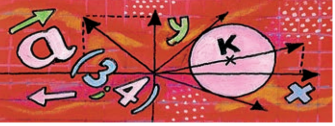
c) Ha az $x + y = 1$ egyenletű egyenesen adott a $P(0; 1)$ pont, akkor az $y = 2 - x$ egyenletű egyenesnek a P ponton áthaladó, rá merőleges egyenessel való metszéspontja $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Ekkor $d_{PM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3681 A háromszög területét könnyen kiszámolhatjuk, ha egy, a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos oldalú téglalapba foglaljuk. A téglalap területe $T = 10 \cdot 7 = 70$. A téglalap csúcsainál lévő háromszögek területe:

$$T_1 = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6, \quad T_2 = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14, \quad T_3 = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25.$$

A háromszög területe ezért $T_\triangle = 70 - (6 + 14 + 25) = 25$.

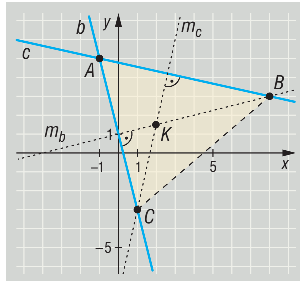




A magasságok hosszát a $T=\dfrac{c\cdot m_c}{2}$ képlettel számolhatjuk ki. Mivel $c=d_{AB}=\sqrt{40}=2\cdot\sqrt{10}$, és $T=25$, ezért $m_c=\dfrac{5\cdot\sqrt{10}}{2}$.

A háromszög másik két magassága $2\cdot\sqrt{5}$, és $\dfrac{10\cdot\sqrt{65}}{13}$.

3682 Az A-val jelölt templom koordinátáit az adott egyenesek metszéspontjaként kaphatjuk. A két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása $x=-1$ és $y=5$, azaz az A pont koordinátái: $A(-1; 5)$.

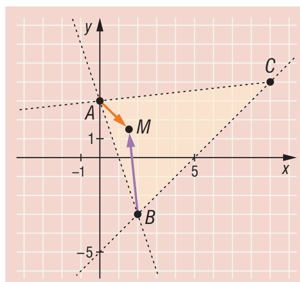


A tervek szerint a K pont a három templom által meghatározott ABC háromszög magasságpontja, ezért a b-re merőleges, K-t tartalmazó egyenes éppen az ABC háromszög m_b magasságvonala. A magasságvonal egy normálvektora megegyezik a b egyenes egy irányvektorával. A b egyenes egyenletéből leolvasható annak egy irányvektora: $\vec{v}_b=\vec{n}_{m_b}(-1; 4)$, ezért az m_b egyenes egyenlete: $-x+4y=4$. A B pont koordinátáit az m_b, valamint a c egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{aligned}-x+4y&=4\\2x+9y&=43\end{aligned}\right\},$$

amiből $B(8; 3)$. Hasonló megfontolással juthatunk el a C pont koordinátáihoz. Az m_c egyenes egyenlete: $9x-2y=15$, a C pont koordinátái: $C(1; -3)$.

3683 A rajzlapon megmaradt két csúcspontot az ábrán A és B, a magasságpontot M, a hiányzó csúcspontot C jelöli. Mivel az $\overrightarrow{AM}\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$ vektor a BC egyenesnek egy normálvektora, továbbá a $B(2; -3)$ pont illeszkedik az egyenesre, ezért a BC egyenes egyenlete:

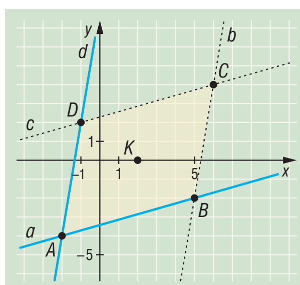


$$\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y=\frac{3}{2}\cdot 2-\frac{3}{2}\cdot(-3),\qquad \text{azaz}\qquad x-y=5.$$

Hasonló számolással az AC egyenes egyenlete: $x-9y=-27$.

A C csúcs koordinátáit a BC és az AC egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása után $C(9; 4)$ adódik.

3684 A két adott egyenest megadásuk sorrendjében a és d, a paralelogramma középpontját K, csúcsait A, B, C és D jelöli az ábrán. Mivel az a és d egyenesek nem párhuzamosak egymással, ezért az egyenleteikből álló egyenletrendszer megoldása adja a paralelogramma A csúcsának koordinátáit: $A(-2; -4)$. A paralelogramma középpontja egybeesik az átlók felezőpontjával, ezért a K pont az AC szakasz felezőpontja is egyben. Ha a C pont koordinátáit $C(x; y)$ jelöli, akkor



$$\frac{x+(-2)}{2}=2,\qquad \text{illetve}\qquad \frac{y+(-4)}{2}=0,$$

amiből $C(6; 4)$.

A BC egyenes egyenletét a C pont koordinátáinak ismeretében már könnyen felírhatjuk. Mivel BC párhuzamos az ismert d egyenessel, ezért a BC egyenes egy normálvektora $\vec{n}_{BC}=\vec{n}_d(-6; 1)$, így egyenlete:

$$-6x+y=-32.$$

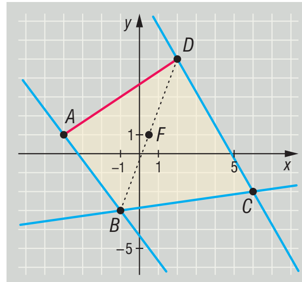
Hasonló megfontolások után a CD egyenes egyenletére adódik:

$$-2x + 7y = 16.$$

A B pont koordinátáit a BC, valamint az a egyenesek egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk: $B(5; -2)$.

Végül a CD és a d egyenesek D metszéspontja: $D(-1; 2)$.

3685 *a)* A B csúcs koordinátáit az AB és BC egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk: $B(-1; -3)$.



A BC és CD egyenesek metszéspontja: $C(6; -2)$.

Ha a D pont koordinátái $D(x; y)$, és a BD átló felezőpontja F, akkor a felezőpontra vonatkozó összefüggések alapján:

$$\frac{(-1)+x}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{(-3)+y}{2} = 1,$$

amiből $x = 2$ és $y = 5$, így $D(2; 5)$.

Végül az A pont első koordinátája -4, továbbá illeszkedik az AB egyenesre, ezért ha második koordinátáját a_2 jelöli, akkor

$$4 \cdot (-4) + 3a_2 = -13, \quad \text{amiből} \quad a_2 = 1,$$

végül $A(-4; 1)$.

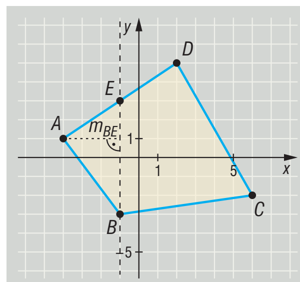
b) Az $\overrightarrow{AD}(6; 4)$ vektor az AD egyenesnek egy irányvektora, ezért annak egyenlete:

$$4x - 6y = 4 \cdot 2 - 6 \cdot 5,$$

aminek egyszerűbb alakja:

$$2x - 3y = -11.$$

c) Az e: $x = -1$ egyenletű egyenes párhuzamos az y tengellyel, továbbá tartalmazza az $ABCD$ négyszög B csúcsát. Az AD egyenessel való E metszéspontjának koordinátáit az



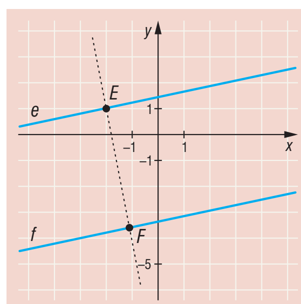
$$\left.\begin{aligned} x &= -1 \\ 2x - 3y &= -11 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja: $E(-1; 3)$.

Eredményeink alapján az e egyenes az $ABCD$ négyszögből az ABE háromszöget vágja le. Az ABE háromszög területe:

$$T_{ABE} = \frac{BE \cdot m_{BE}}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9.$$

3686 *a)* Jelöljük a két adott oldalegyenest megadásuk sorrendjében e-vel és f-fel. Az egyenletekből leolvasható, hogy a két egyenes párhuzamos egymással, ezért csakis a rombusz két szemközti oldalegyenesei lehetnek. Az elmondottak alapján a rombusz magassága az e és az f egyenes távolságával egyenlő. Ezt a távolságot megkaphatjuk például úgy, hogy az e egyenes egy tetszőleges E pontjának az f egyenestől való távolságát kiszámítjuk. Az e egyenes egy pontja az $E(-2; 1)$ pont.



Az f-re merőleges egyenesek egy normálvektora az $\vec{n}(5; 1)$ vektor, ezért az E-re illeszkedő, f-re merőleges egyenes egyenlete:

$$5x + y = 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 1, \quad \text{azaz} \quad 5x + y = -9.$$

Ennek az egyenesnek az f egyenessel való F metszéspontjának koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned} 5x + y &= -9 \\ x - 5y &= 17 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása:

$$F\left(-\frac{14}{13}; -\frac{47}{13}\right).$$

Az e és f egyenesek távolságát – így a rombusz magasságát is – az EF távolság adja meg:

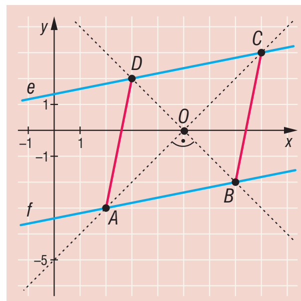
$$EF = \sqrt{\left(-\frac{14}{13}+2\right)^2 + \left(-\frac{47}{13}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}+\frac{3600}{169}} = \frac{12\cdot\sqrt{26}}{13}.$$

A rombusz területe ezek után már könnyen kiszámolható:

$$T = a \cdot m = \sqrt{26}\cdot\frac{12\cdot\sqrt{26}}{13} = 24.$$

b) Egyszerű számolás mutatja, hogy az $A(2; -3)$ pont illeszkedik az f egyenesre. Ismert, hogy a rombusz átlói felezik egymást, ezért ha az A-val szemközti C csúcs koordinátái $C(x; y)$, akkor az AC szakasz felezőpontja az $O(5; 0)$ pont, és így

$$\frac{2+x}{2} = 5 \quad \text{és} \quad \frac{-3+y}{2} = 0.$$



Az egyenletrendszer megoldásaként a C pont koordinátái: $C(8; 3)$.

A rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért az $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}(1;1)$ vektor normálvektora a másik átlót tartalmazó egyenesnek. Mivel az O pont ennek az egyenesnek is pontja, ezért a BD átlót tartalmazó egyenes egyenlete: $x + y = 5$. A rombusz B csúcsát az

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 5y &= 17 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása után kapjuk: $B(7; -2)$. Hasonló számolások eredményeként: $D(3; 2)$.
A $\overrightarrow{BC}(1; 5)$ vektor irányvektora a BC és az AD egyenesnek is. Ezek alapján a BC egyenes egyenlete:

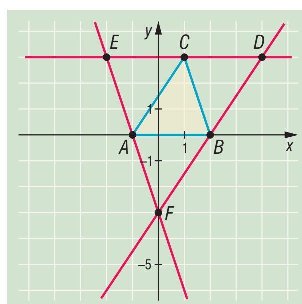
$$5x - y = 5\cdot 7 - 1\cdot(-2), \quad \text{azaz} \quad 5x - y = 37.$$

Az AD egyenes egyenlete:

$$5x - y = 5\cdot 2 - 1\cdot(-3), \quad \text{azaz} \quad 5x - y = 13.$$

3687 *a)* Az ábra jelöléseit használva az ED egyenes egyenlete:

$$y = 3.$$

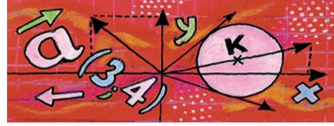


Az EF egyenesnek a $\overrightarrow{BC}(-1; 3)$ vektor irányvektora, az A csúcs pedig egy pontja, ezért EF egyenlete:

$$3x + y = -3.$$

Az FD egyenesnek az $\overrightarrow{AC}(2; 3)$ vektor irányvektora, B pedig egy pontja, így FD egyenlete:

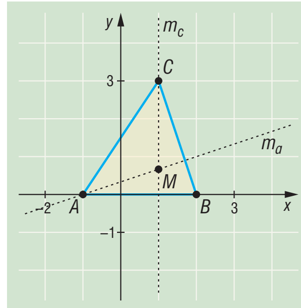
$$3x - 2y = 6.$$



b) A megfelelő egyenletrendszerek megoldása után kapjuk a DEF háromszög csúcspontjainak koordinátáit:

$$D(4;\,3),\quad E(-2;\,3)\quad \text{és}\quad F(0;\,-3).$$

c) Az ABC háromszög C csúcsán átmenő m_c magasságvonalának egyenlete: $x = 1$.



Az A csúcshoz tartozó m_a magasságvonalnak a $\overrightarrow{BC}(-1;\,3)$ vektor normálvektora, ezért m_a egyenlete: $-x + 3y = 1$.

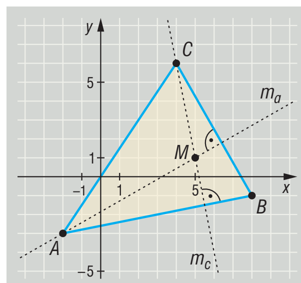
Az M magasságpont koordinátáit az m_a és m_c egyenleteiből álló egyenletrendszerből számíthatjuk:

$$M\left(1;\,\frac{2}{3}\right).$$

d) A háromszög köré írható kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Vegyük észre, hogy az m_c egyenes egyben a DEF háromszög ED oldalának, míg az m_a egyenes az EF oldalnak a felezőmerőlegese, ezért az M pont egybeesik a DEF háromszög köré írható kör középpontjával. A DEF háromszög köré írható kör középpontja így:

$$M\left(1;\,\frac{2}{3}\right).$$

3688 *a)* Az A csúcshoz tartozó m_a magasságvonalnak a $\overrightarrow{BC}(-4;\,7)$ vektor normálvektora, ezért m_a egyenlete: $-4x + 7y = -13$.

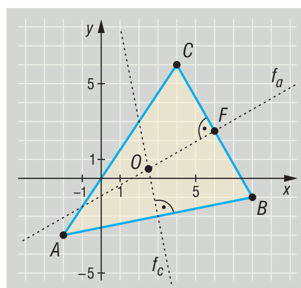


Hasonló megfontolások után a C csúcshoz tartozó m_c magasságvonal egyenlete: $5x + y = 26$.

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása szolgáltatja az ABC háromszög M magasságpontjának koordinátáit:

$$M(5;\,1).$$

b) Az ABC háromszög köré írt kör O középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontjával esik egybe. A BC oldal f_a oldalfelező merőlegese egyrészt tartalmazza a BC oldal $F\left(6;\,\frac{5}{2}\right)$ felezőpontját, másrészt egy normálvektora a $\overrightarrow{BC}(-4;\,7)$ vektor. Ezek alapján az f_a egyenes egyenlete:



$$-4x + 7y = -\frac{13}{2}.$$

Hasonló módszerrel kapjuk, hogy az AB oldal f_c oldalfelező merőlegesének egyenlete:

$$5x + y = 13.$$

Az egyenletrendszer megoldása után adódik:

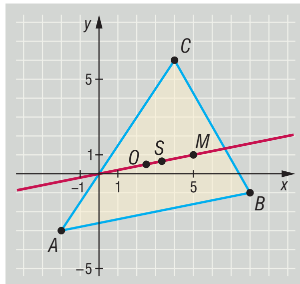
$$O\left(\frac{5}{2};\,\frac{1}{2}\right).$$

c) Az OM egyenes egy irányvektora az $2\overrightarrow{OM}(5;1)$ vektor, egy pontja az $M(5;\,1)$ pont. Ezek alapján az Euler-egyenes egyenlete:

$$x - 5y = 0.$$

d) Az ABC háromszög súlypontja: $S\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Mivel $\frac{10}{3} - 5 \cdot \frac{2}{3} = 0$, ezért az S pont koordinátái kielégítik az Euler-egyenes egyenletét, amiből következik, hogy S illeszkedik az OM Euler-egyenesre.

e) Mivel $\overrightarrow{OS}\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$, továbbá $\overrightarrow{SM}\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$, ezért $\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{OS}$. Ezek alapján láthatjuk, hogy az S súlypont $1:2$ arányban osztja fel az OM szakaszt.

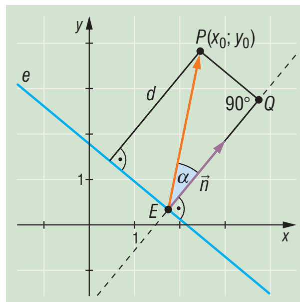


3689 Az egyenes egyenletéből könnyen leolvasható, hogy az e egyenes egy egységnyi hosszúságú normálvektora:

$$\vec{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right).$$

Vegyünk fel egy tetszőleges E pontot az e egyenesen, koordinátáit jelöljük $E(x; y)$-nal. Ekkor:

$$\overrightarrow{EP}(x_0 - x; y_0 - y).$$



Mivel az E pont koordinátái biztosan kielégítik az e egyenes egyenletét, ezért teljesül:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Ezután indítsuk az $\vec{n}$ normálvektor kezdőpontját az E pontból, és jelöljük az $\overrightarrow{EP}$ és az $\vec{n}$ vektorok által bezárt szöget α-val. Jelölje továbbá Q a P pontnak az E ponton átmenő, e-re merőleges egyenesre eső vetületét. Ekkor az EQ szakasz hossza éppen megegyezik a P pont és az e egyenes d távolságával.

Ha az $\overrightarrow{EP}$ és az $\vec{n}$ vektorok az e egyenesnek ugyanabba a félsíkjába mutatnak, akkor $\alpha \le 90º$. Kiszámoljuk a két vektor skaláris szorzatát:

$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = \left|\overrightarrow{EP}\right| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\alpha = \left|\overrightarrow{EP}\right| \cdot 1 \cdot \cos\alpha = EQ = d. \qquad (2)$$

A fenti eredmények alapján a két vektor skaláris szorzata éppen az e egyenes és a P pont távolságával egyenlő. A skaláris szorzatot a koordináták segítségével felírva azt kapjuk, hogy

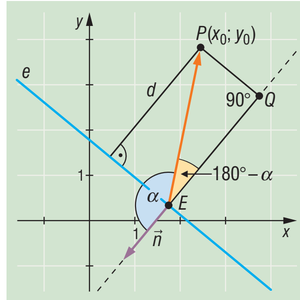
$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = (x_0 - x) \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + (y_0 - y) \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C - (Ax + By + C)}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Az utolsó zárójelben található összeg (1) miatt 0-val egyenlő, azaz:

$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3)$$

A (2) és (3) egyenlőségek összevetése után azt kapjuk, hogy:

$$d(P, e) = d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (4)$$



Amennyiben az $\overrightarrow{EP}$ és az $\vec{n}$ vektorok az e egyenesnek különböző félsíkjaiba mutatnak (ld. a jobb oldalon lévő ábrát), akkor $\alpha > 90°$, így a (2) egyenlőség a következőképpen módosul:

$$\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n} = \left|\overrightarrow{EP}\right| \cdot 1 \cdot \cos\alpha = -EP \cdot \cos(180° - \alpha) = -EQ = -d. \qquad (2')$$

A bizonyítás további lépései nem változnak, így (2') és (3) összevetéséből azt kapjuk, hogy:

$$d(P, e) = d = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4')$$

A (4) és (4') összefüggéseket egyetlen egyenlőségben is felírhatjuk:

$$d(P, e) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

3690 *a)* Két egyenes hajlásszögét többféle módszerrel is kiszámolhatjuk. Egyik lehetőség, hogy irányvektoraik skaláris szorzatából számoljuk ki a keresett szöget. Az egyenesek egyenletéből leolvasható egy-egy irányvektoruk:

$$\vec{v}_1(0; 1) \quad \text{és} \quad \vec{v}_2(1; -2).$$

A két vektor skaláris szorzata:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -2.$$

A skaláris szorzat definíciója alapján:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\alpha,$$

ahol α a két vektor hajlásszöge. A skaláris szorzatra kapott értékek összehasonlításából:

$$-2 = \sqrt{5} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

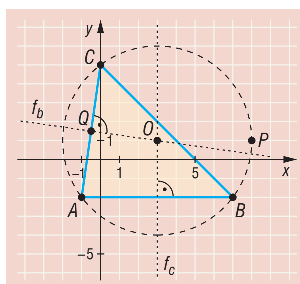
amiből $\alpha \approx 153{,}43°$. A két egyenes hajlásszöge így $180° - 153{,}43° = 26{,}57°$.

b) Amennyiben a két egyenes nem merőleges egymásra és iránytangenssel rendelkeznek, akkor a 3639. feladat eredménye alapján a két egyenes α hajlásszögére

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|.$$

Az egyenletekből $m_1 = 2$ és $m_2 = 3$, ezért $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, amiből $\alpha \approx 8{,}13°$.

c) Ebben az esetben $m_1 = -2$ és $m_2 = 3$, ezért $\operatorname{tg}\alpha = 1$, amiből $\alpha = 45°$.

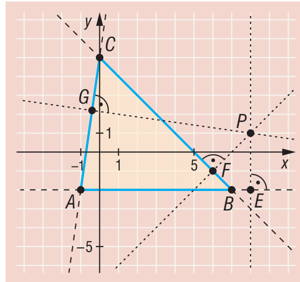


3691 *a)* Az ABC háromszög köré írható körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontjával esik egybe. Az AB oldal f_c felezőmerőlegesének egyenlete: $x = 3$. Az AC oldal f_b felezőmerőlegese tartalmazza az AC szakasz $Q\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ felezőpontját, továbbá a normálvektora az $\overrightarrow{AC}(1; 7)$ vektor, ezért f_b egyenlete: $x + 7y = 10$.

A körülírt kör O középpontja mindkét egyenletet kielégíti, ezért az egyenletrendszer megoldása után $O(3; 1)$ adódik.

Az ABC háromszög köré írható kör sugara: $r = \left|\overrightarrow{OA}\right| = 5$. Mivel $\left|\overrightarrow{OP}\right| = 5$ szintén teljesül, ezért a P pont valóban illeszkedik az ABC háromszög köré írható körre.

b) Az E pont koordinátái akár az ábráról is leolvashatók: $E(8; -2)$.

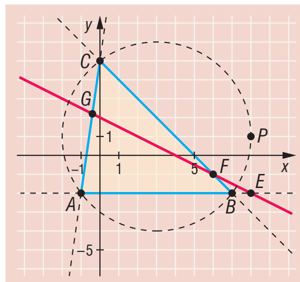


Az F pontot a BC egyenes, valamint a P-re illeszkedő, BC-re merőleges egyenes metszéspontjaként kapjuk. A BC egyenes két pontja ismert, ezért egyenlete könnyen felírható: $x + y = 5$. A BC-re merőleges, P-t tartalmazó egyenesnek a $\vec{v}(1; 1)$ vektor irányvektora, ezért egyenlete: $x - y = 7$. A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként $F(6; -1)$ adódik.

A G pont koordinátái hasonló módszerrel számolhatók ki. Az AC egyenes egyenlete: $-7x + y = 5$, a rá merőleges, P-t tartalmazó egyenesé: $x + 7y = 15$. Az egyenletrendszer megoldása után:

$$G\left(-\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right).$$

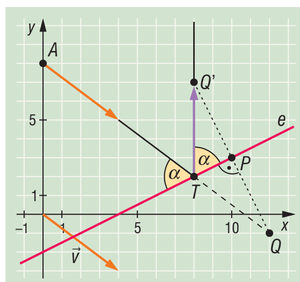
c) Megmutatjuk, hogy a G pont illeszkedik az EF egyenesre. Ehhez felírjuk az EF egyenes egyenletét. Mivel az egyenesnek az $\overrightarrow{FE}(2; -1)$ vektor irányvektora, E pedig egy pontja, ezért az egyenlet: $x + 2y = 4$. Az egyenletbe a G pont koordinátáit behelyettesítve teljesül, hogy:



$$-\frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{11}{5} = 4,$$

ami igazolja, hogy a G pont illeszkedik az EF egyenesre. Ezzel beláttuk, hogy a P pont oldalegyenesekre vonatkozó merőleges vetületei egy egyenesre illeszkednek (Simson-egyenes).

3692 A golyó kezdeti helyét jelöljük A-val, az egyenest, amelyről visszapattan e-vel. A megoldás során feltételezzük, hogy a visszapattanás előtt a golyó útja ugyanakkora szöget zár be az e egyenessel, mint a visszapattanás utáni útja, azaz az ábrán α-val megjelölt szögek egyenlő nagyságúak. Ezt persze a következőképp is megfogalmazhatjuk: ha a golyó visszapattanás előtti útját meghosszabbítanánk (az ábrán ezt a TQ szakasz szemlélteti), akkor a visszapattanás utáni útja (az ábrán TQ' félegyenes) egybeesne a TQ félegyenes e egyenesre vonatkozó tükörképével. Ezek után a feladat megoldásához a következő lépések vezetnek.



1. Kiszámoljuk, hogy a golyó mely T pontban éri el az e egyenest. A golyó a $3x + 4y = 32$ egyenletű egyenesen halad. A T pont koordinátáit a
$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 32 \\ x - 2y &= 4 \end{aligned}\right\}$$
egyenletrendszer megoldása adja. Megoldva a felírt egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy a T pont koordinátái: $T(8; 2)$.
2. Keresünk egy Q pontot az AT félegyenes T ponton túli meghosszabbításán. Könnyen látható, hogy a $Q(12; -1)$ pont kielégíti az AT egyenes egyenletét, és így a feltételeknek megfelel.
3. A Q pontból merőlegest állítunk az e egyenesre. Az e egyenes $\vec{n}(1; -2)$ normálvektora a keresett egyenesnek irányvektora, ezért az e-re merőleges, Q-t tartalmazó egyenes egyenlete: $2x + y = 23$.
4. Megkeressük az iménti merőleges és az e egyenes P metszéspontját. A megfelelő egyenletrendszer megoldása után: $P(10; 3)$.

5. A Q pontot tükrözzük a P pontra, így kapjuk a Q' pontot. Ha a Q' pont koordinátái $Q'(x; y)$, akkor felhasználva, hogy a QQ' szakasznak éppen P a felezőpontja, azt kapjuk, hogy
$$\frac{12+x}{2}=10 \quad \text{és} \quad \frac{-1+y}{2}=3.$$
Az egyenleteket megoldva: $Q'(8; 7)$.
6. A golyó a visszapattanás után a TQ' egyenesen halad, ezért felírjuk annak egyenletét. Mivel a T és a Q' pontnak is 8 az első koordinátája, ezért a biliárdgolyó a visszapattanás után az $x = 8$ egyenletű egyenesen halad tovább.

A kör egyenlete – megoldások

3693 *a)* $x^2+y^2-\frac{1}{4}=0$; *b)* $x^2+y^2-5-2\cdot\sqrt{6}=0$;
c) $x^2+y^2+2x-4y+\frac{24}{5}=0$; *d)* $x^2+y^2+2\cdot\sqrt{3}x+2\cdot\sqrt{6}y+5=0$;
e) $x^2+y^2+10x+10y+25=0$; *f)* $x^2+y^2+4x-10y+4=0$.

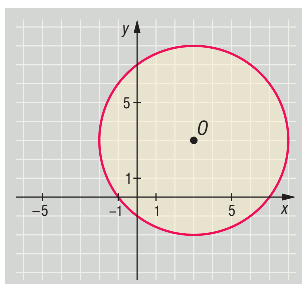
3694 *a)* $x^2+y^2-4y+2=0$; *b)* $x^2+y^2+4x+6y+3=0$;
c) $x^2+y^2-2x+8y-65=0$; *d)* $x^2+y^2-4x-4y=0$.

3695 *a)* $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$; *b)* $(x-1)^2+(y+1)^2=25$;
c) $(x-2)^2+(y-2)^2=\frac{29}{2}$; *d)* $(x-1)^2+y^2=29$.

3696 *a)* $(5; 3)$, illetve $(5; -5)$; *b)* $(-2; 2)$, illetve $(6; 2)$.

3697 *a)* $O(0; 0)$, $r=\sqrt{30}$; *b)* $O(0; 3)$, $r=2\cdot\sqrt{3}$;
c) $O(2; -4)$, $r=6$; *d)* $O\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $r=\sqrt{\frac{67}{2}}$;
e) $O\left(\frac{7}{2}; -1\right)$, $r=\frac{\sqrt{373}}{2}$; *f)* $O\left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$, $r=\sqrt{5}$;
g) $O\left(1; -\frac{3}{2}\right)$, $r=\frac{\sqrt{53}}{2}$.

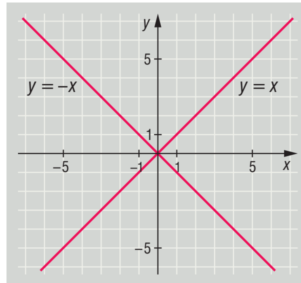
3698 *a)* $O(3; 3)$, $r=5$.



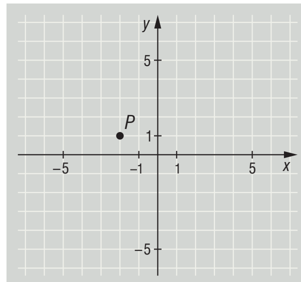
b) Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$(x+y)\cdot(x-y)=0.$$

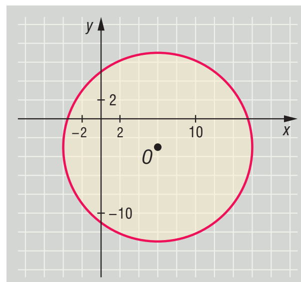
Az egyenlet két egyenest határoz meg.



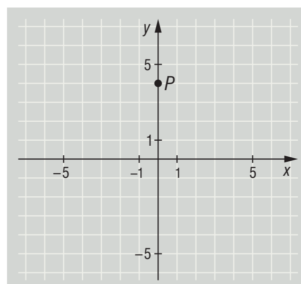
c) Az egyenletet csak a $P(-2;\,1)$ pont koordinátái elégítik ki.



d) $O(6;\,-3)$, $r=10$.



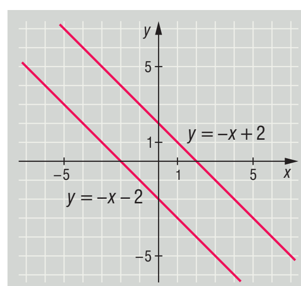
e) Az egyenletet csak a $P(0;\,4)$ pont koordinátái elégítik ki.



f) Az egyenlet átalakítása után az

$$(x+y+2)\cdot(x+y-2)=0$$

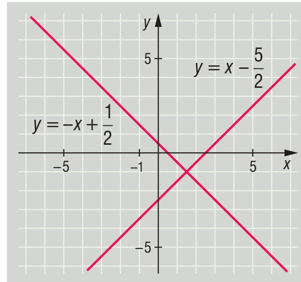
alakhoz juthatunk. Az egyenlet két egyenest határoz meg.



g) Az egyenlet átalakítása után az

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=(y+1)^2$$

alakhoz juthatunk. Az egyenlet két egyenest határoz meg.



3699 *a)* $(x-2)^2+(y+2)^2=13$; *b)* $(x-3)^2+y^2=34$.

3700 *a)* A kör egyenlete: $(x-3)^2+(y+1)^2=20$.
b) A kör egyenlete: $(x-1)^2+(y-2)^2=29$.

3701 *a)* $(x-1)^2+(y+2)^2=1$; *b)* $(x+3)^2+(y-5)^2=49$;
c) $(x-1)^2+(y-4)^2=12{,}5$; *d)* $(x+1)^2+(y+2)^2=5$.

3702 *a)* $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$; *b)* $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$;
c) $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$; *d)* $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$.

3703 Tegyük fel, hogy az ismeretlen csúcsok koordinátái $C(c_1; c_2)$ és $B(0; b_2)$. Mivel ismert a BC szakasz felezőpontja, ezért

$$\frac{0+c_1}{2}=2 \quad \text{és} \quad \frac{b_2+c_2}{2}=4.$$

Az első egyenletből $c_1=4$.
A feltételek alapján a C pont illeszkedik az $y=\frac{3}{2}x-4$ egyenletű egyenesre, ezért

$$c_2=\frac{3}{2}\cdot 4-4=2,$$

így $C(4; 2)$. A BC szakasz felezőpontjára felírt második egyenletből $B(0; 6)$.

Az AB oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $y=3$.

A BC oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $x-y=-2$.

A két egyenes metszéspontja az $O(1; 3)$ pont, ami egyben az ABC háromszög köré írható körének középpontja is.

A kör sugara: $OA=\sqrt{10}$, ezért a keresett kör egyenlete:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=10.$$

3704 *a)* A háromszög köré írható kör középpontja az AB átfogó $O\left(2; \frac{1}{2}\right)$ pontja. A kör sugara:

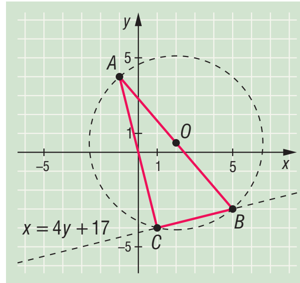
$$r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{85}}{2},$$

egyenlete:

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{4}.$$

b) A BC befogó meredeksége ismert, ezért a BC egyenes iránytényezős egyenlete felírható:

$$y+3=\frac{1}{4}(x-5), \qquad \text{amiből} \qquad x=4y+17.$$



Ha ezt a kör egyenletébe helyettesítjük, akkor:

$$(4y+15)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{4},$$

$$17y^2+119y+204=0,$$

$$y^2+7y+12=0.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $y=-3$, illetve $y=-4$.
Ebből a kör és a BC egyenes két metszéspontja: $B(5;-3)$, illetve $C(1;-4)$.

3705 A kör egyenlete felírható a következő alakban is:

$$(x-7)^2+(y-3)^2=4,$$

így a kör középpontja $O(7;3)$, sugara pedig 2. A kör legkisebb ordinátájú pontja ebből adódóan a $Q(7;1)$ pont. A Q középpontú, origót tartalmazó kör sugara $\sqrt{50}$, ezért a keresett kör egyenlete:

$$(x-7)^2+(y-1)^2=50.$$

A kapott kör y tengellyel való metszéspontjait megkapjuk, ha x helyére nullát írunk, ekkor

$$(y-1)^2=1,$$

amiből $y=0$, vagy $y=2$.

Ez azt jelenti, hogy a kör az ordinátatengelyt az origón kívül még a $(0;2)$ pontban metszi.

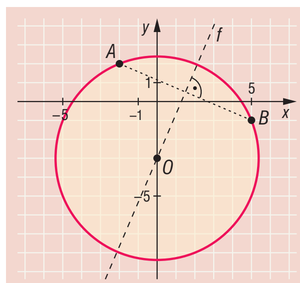
3706 Az adott pontokat jelöljük A-val és B-vel. Mivel az AB szakasz a keresett körnek egy húrja, ezért a kör O középpontja illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére. Az AB szakasz f felezőmerőlegesének egyenlete: $7x-3y=9$.

a) Mivel az O pont illeszkedik az y tengelyre, ezért koordinátáira $O(0;-3)$ teljesül. A kör sugara ebben az esetben

$$r=OA=\sqrt{29},$$

egyenlete:

$$x^2+(y+3)^2=29.$$



b) A kör középpontja az adott h, és az f egyenesek metszéspontja, ezért koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

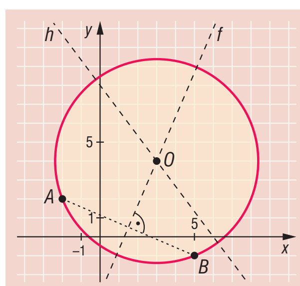
$$\left.\begin{aligned}7x-3y&=9\\4x+3y&=24\end{aligned}\right\}.$$

Az O középpont koordinátái: $O(3;4)$, a kör sugara:

$$r=OA=\sqrt{29},$$

végül egyenlete:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=29.$$

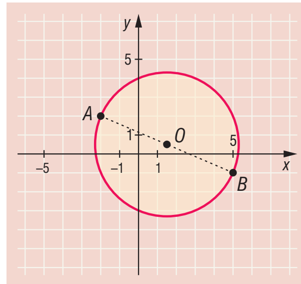


c) A kör középpontja az AB szakasz $O\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ felezőpontja, sugara:

$$r = OA = \sqrt{\frac{29}{2}},$$

egyenlete:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{2}.$$



3707 *a)* A tervezett kijáratot K-val, az autópálya nyomvonalát a-val jelöltük az ábrán. A feltételek szerint $AK = BK$, ezért a K pont illeszkedik az AB szakasz f felezőmerőlegesére. Az f egyenes egyenlete: $y = 2x + 11$. A tervezett kijárat helyére a megfelelő egyenletrendszer megoldása után $K(-3; 5)$ adódik.

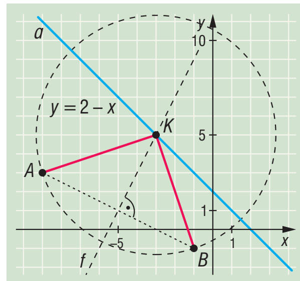
b) A kör sugara:

$$r = AK = \sqrt{40},$$

egyenlete:

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 40.$$

c) A tervezett útszakaszok hossza egy tized pontossággal 6,3 km.



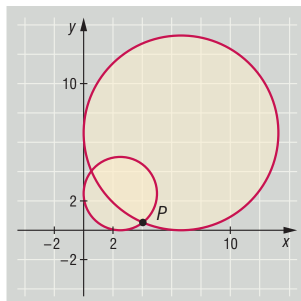
3708 *a)* A keresett kör az első síknegyedben található, és ha sugarát r jelöli, akkor középpontjának koordinátái $O(r; r)$, így egyenlete:

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

alakú. Mivel a $P\left(4; \frac{1}{2}\right)$ pont kielégíti a kör egyenletét, ezért:

$$(4 - r)^2 + \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 = r^2,$$

$$r^2 - 9r + \frac{65}{4} = 0.$$



Az egyenlet megoldásai: $r = \frac{5}{2}$, illetve $r = \frac{13}{2}$. A feltételeknek két kör tesz eleget, egyenletük:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}, \quad \text{illetve} \quad \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}.$$

b) A kör a második síknegyedben található, így középpontja ezúttal $O(-r; r)$, egyenlete:

$$(x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

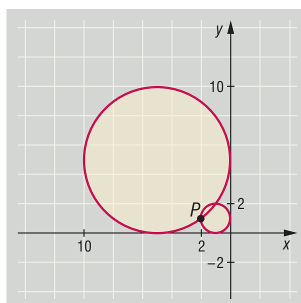
A $(-2; 1)$ pont koordinátáit az egyenletbe helyettesítve:

$$(-2 + r)^2 + (1 - r)^2 = r^2,$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $r = 5$ és $r = 1$. A feltételeknek a következő egyenletű körök felelnek meg:

$$(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25 \quad \text{és} \quad (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$



c) A kör egyenletét az alábbi alakban kereshetjük:

$$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2.$$

Az adott pont koordinátáit behelyettesítve:

$$(-1+r)^2+(-8+r)^2=r^2,$$
$$r^2-18r+65=0.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$r=13 \quad \text{és} \quad r=5.$$

A kapott két kör egyenlete:

$$(x+13)^2+(y+13)^2=169, \quad \text{illetve} \quad (x+5)^2+(y+5)^2=25.$$

d) A kör egyenletének alakja ezúttal:

$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2.$$

Az adott pont koordinátáit a kör egyenletébe helyettesítve a következő egyenlethez jutunk:

$$r^2-22r+85=0,$$

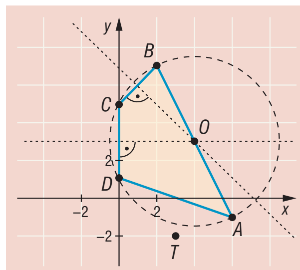
amelynek megoldásai:

$$r=17 \quad \text{és} \quad r=5.$$

A feltételeket kielégítő körök egyenlete:

$$(x-17)^2+(y+17)^2=289, \quad \text{illetve} \quad (x-5)^2+(y+5)^2=25.$$

3709 *a)* A fákat megadásuk sorrendjében A, B, C és D jelöli az ábrán. Célunk annak igazolása, hogy az $ABCD$ négyszög csúcsai egy körön találhatók, vagyis hogy $ABCD$ húrnégyszög.



A húrnégyszög körülírt körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, ezért eljárhatunk úgy is, hogy kiszámítjuk valamely két oldal felezőmerőlegesének O metszéspontját, majd megmutatjuk, hogy az a csúcsoktól ugyanakkora távolságra van.

A CD oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $y=3$.

A BC oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $x+y=7$.

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása után $O(4;\,3)$ adódik. Az O pont származtatása alapján $OB=OC=OD$ nyilvánvalóan teljesül, és ez a közös távolság: $\sqrt{20}$.

Elegendő kimutatni, hogy az OA távolság szintén ugyanekkora. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=d_{AO}=\sqrt{(4-6)^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{20}$$

valóban teljesül. Eredményeink alapján az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, azaz valóban található olyan pont, amelybe a locsoló berendezést elhelyezve, az képes meglocsolni mind a négy díszfát. Ez a pont a koordináta-rendszer $O(4;\,3)$ pontja. Látható, hogy az O pont egybeesik az AB szakasz felezőpontjával.

b) A locsoló berendezést $\sqrt{20}\approx 4{,}47$ egység távolságra kell beállítani.

c) A tuja (T) az O ponttól

$$\sqrt{(4-3)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{26}$$

egység távolságra van, ezért a locsoló berendezés a tuját nem éri el.

3710 *a)* Az oldalfelező pontok: $E(2; -2)$, $F(4; 2)$ és $G(-1; 2)$. Az EFG háromszög köré írt körének O középpontjának koordinátái például az FG és a GE oldalak felezőmerőlegesének metszéspontjaként számíthatók. Az FG felezőmerőlegesének (az ábrán f_1 jelöli) egyenlete:

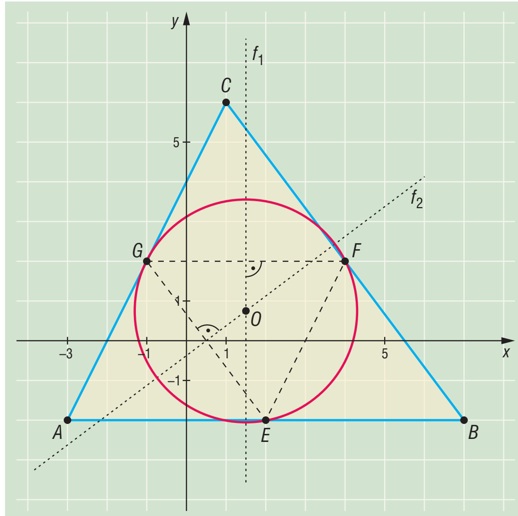
$$x = \frac{3}{2}.$$

A GE szakaszfelező merőlegesének (f_2) egyenlete:

$$3x - 4y = \frac{3}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása után adódik:

$$O\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right).$$



Az EFG háromszög körülírt körének sugara:

$$r = \left|\overrightarrow{OG}\right| = \sqrt{\frac{125}{16}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{4}.$$

Az ABC háromszög Feuerbach-körének egyenlete:

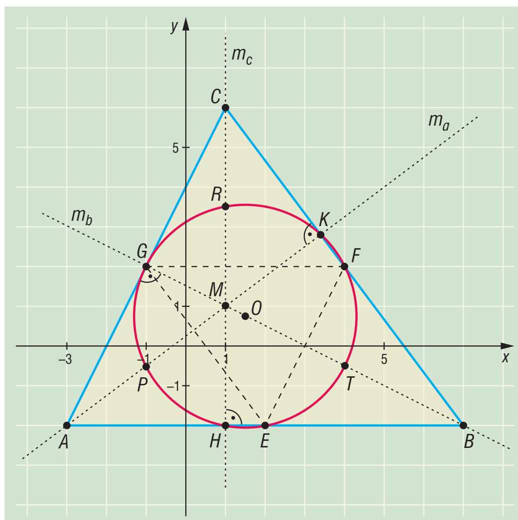
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}.$$

b) Vegyük észre, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú, hiszen $AB = BC = 10$. Ebből következően az AC alap G felezőpontja egybeesik az m_b magasságvonal talppontjával, ezért az állítás az m_b magasságvonalra teljesül.

Az ABC háromszög m_c magasságvonala párhuzamos az y tengellyel és egyenlete: $x = 1$, így m_c talppontja a $H(1; -2)$ pont. Mivel teljesül, hogy

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-2 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{125}{16},$$

ezért H koordinátái kielégítik a Feuerbach-kör egyenletét, amiből már következik, hogy illeszkedik a körre.



Az m_a magasságvonal egyenlete:

$$-3x + 4y = 1,$$

a BC egyenesé:

$$4x + 3y = 22.$$

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása adja az m_a magasságvonal K talppontjának koordinátáit:

$$K\left(\frac{17}{5}; \frac{14}{5}\right).$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\left(\frac{17}{5}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{14}{5}-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{125}{16},$$

így K is illeszkedik az ABC háromszög Feuerbach-körére.

c) Az ABC háromszög M magasságpontja az m_a és m_c magasságvonalak metszéspontja. Ebből következően koordinátáit a

$$\left.\begin{aligned}-3x+4y&=1\\ x&=1\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldásaként $M(1;\,1)$ adódik. Ezek után könnyen kiszámolhatjuk a magasságpont és az ABC háromszög csúcsai közötti szakaszok felezőpontjainak koordinátáit (ld. ábra):

$$P\left(-1;-\frac{1}{2}\right),\quad T\left(4;-\frac{1}{2}\right)\quad \text{és}\quad R\left(1;\frac{7}{2}\right).$$

Nem kis fáradságot igénylő, de nem is túlságosan bonyolult számításokkal meggyőződhetünk arról, hogy mindhárom kapott pont valóban kielégíti az ABC háromszög Feuerbach-körének egyenletét.

d) Az ABC háromszög körülírt körének sugarát az $R=\dfrac{abc}{4T}$ összefüggés alapján számolhatjuk, ahol a, b, c a háromszög oldalainak hosszát, T a területét jelöli. Mivel

$$b=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{80}=4\cdot\sqrt{5}$$

és a *b)* feladatban már utaltunk rá, hogy $a=c=10$, továbbá $T=\dfrac{c\cdot m_c}{2}=40$, ezért a háromszög köré írt kör sugara:

$$R=\frac{4\cdot\sqrt{5}\cdot 10\cdot 10}{4\cdot 40}=\frac{5\cdot\sqrt{5}}{2}.$$

Eredményünket az *a)* feladatban kapottakkal összevetve kapjuk, hogy

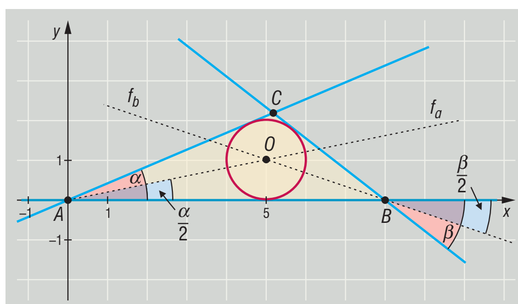
$$\frac{r}{R}=\frac{\dfrac{5\cdot\sqrt{5}}{4}}{\dfrac{5\cdot\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2},$$

és így a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés: A körülírt kör sugarát úgy is kiszámíthatjuk, hogy meghatározzuk annak középpontját két oldalfelező merőleges metszéspontjaként, majd a két pont távolságára vonatkozó összefüggéssel megadjuk a sugarát. Ezzel a módszerrel a körülírt kör középpontjaként a $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$ pontot kapjuk.

3711 *a)* Az oldalegyenesek egyenleteiből a háromszög csúcspontjai: $A(0;\,0)$, $B(8;\,0)$ és $C\left(\dfrac{36}{7};\dfrac{15}{7}\right)$.

A háromszögbe írható kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. Vegyük észre, hogy az AB oldal illeszkedik az x tengelyre, ezért „célszerű” az A, valamint a B csúcsokhoz tartozó szögfelezők egyenletét felírni. Ekkor ugyanis a háromszög α szöge megegyezik az AC egyenes irányszögével.



Az AC egyenes egyenletéből látható, hogy az egyenes meredeksége $\frac{5}{12}$, ezért $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$.
Az f_a szögfelező irányszöge $\frac{\alpha}{2}$, így meredeksége $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Ismert addíciós összefüggés alapján:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

ezért

$$\frac{5}{12} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$0 = -5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 24\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 5.$$

A kapott egyenlet $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-re nézve másodfokú, megoldásai: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -5$, illetve $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$.

Az ábrából is látható, hogy az f_a szögfelező meredeksége pozitív, ezért $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$. Végül az f_a szögfelező átmegy az origón, ezért egyenlete:

$$f_a\colon\ y = \frac{1}{5}x.$$

Hasonló számítások vezetnek el az f_b szögfelező egyenletéhez. Mivel a BC egyenes meredeksége $-\frac{3}{4}$, azaz $\operatorname{tg}\beta = -\frac{3}{4}$, így

$$-\frac{3}{4} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}},$$

$$0 = 3\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} - 8\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - 3.$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai: $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 3$, illetve $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = -\frac{1}{3}$.

Mivel az f_b szögfelező meredeksége negatív, ezért $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = -\frac{1}{3}$. A szögfelező átmegy a B ponton, ezért egyenlete:

$$f_b\colon\ y = -\frac{1}{3}(x-8).$$

Az O pont koordinátáit az f_a és f_b egyenesek egyenletéből álló

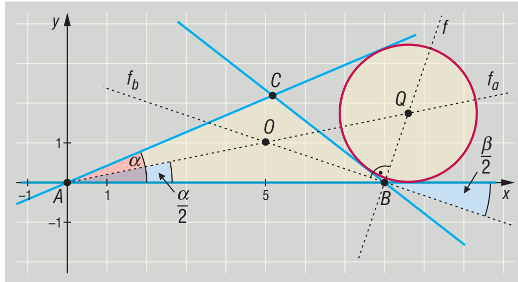
$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}(x-8) \\ y &= \frac{1}{5}x \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja:

$$\frac{1}{5}x = -\frac{1}{3}(x-8).$$

Az egyenlet megoldása: $x = 5$. Ekkor viszont $y = 1$, így a beírt kör középpontjának koordinátái:

$$O(5;\ 1).$$



A BC oldalhoz írt kör középpontja az f_a szögfelezőn, valamint a háromszög B csúcsánál lévő külső szög szögfelezőjén található. Ez utóbbi szögfelezőt az ábrán f-fel jelöltük. Elemi geometriai megfontolások alapján az f egyenes merőleges az f_b belső szögfelezőre, ezért e két egyenes meredekségének szorzata –1. Ha az f egyenes meredekségét m jelöli, akkor:

$$m = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3.$$

Az f szögfelező egyenlete: $y = 3(x - 8)$. A BC oldalhoz írt kör Q középpontjának koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned} y &= 3(x-8) \\ y &= \frac{1}{5}x \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldásaként a Q pont koordinátái:

$$Q\left(\frac{60}{7}; \frac{12}{7}\right).$$

b) Az *a)* feladatban szereplő körök érintik az x tengelyt, ezért sugaruk hossza megegyezik középpontjuk második koordinátájával. Ennek megfelelően a beírt kör egyenlete:

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 1,$$

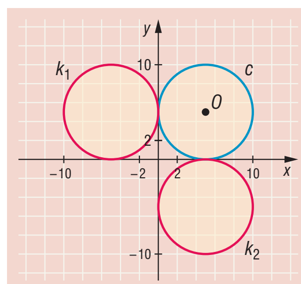
illetve a BC oldalhoz írt kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{60}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{7}\right)^2 = \frac{144}{49}.$$

3712 Egy-egy ilyen kört találhatunk a második, illetve a negyedik síknegyedben. Ezek egyenlete:

$$k_1\colon\ (x+5)^2 + (y-5)^2 = 25,$$
$$k_2\colon\ (x-5)^2 + (y+5)^2 = 25.$$

A fenti köröket, valamint a feladatban szereplő, c-vel jelölt kört az ábra mutatja.



A feltételeknek eleget tevő további köröket az első síknegyedben kereshetünk; ha egy ilyen kör sugarát r jelöli, akkor középpontjának koordinátái $Q(r; r)$ alakúak. Mivel az $O(5; 5)$ középpontú, 5 egység sugarú c kört érinti, ezért az OQ távolság éppen a két kör sugarának összege, azaz $OQ = r + 5$. Az OQ távolságot a Q pont koordinátáival felírva kapjuk, hogy

$$\sqrt{(r-5)^2 + (r-5)^2} = r + 5.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve és a lehetséges összevonásokat elvégezve:

$$r^2 - 30r + 25 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$r_1 = 15 + 10 \cdot \sqrt{2}, \qquad \text{illetve} \qquad r_2 = 15 - 10 \cdot \sqrt{2}.$$

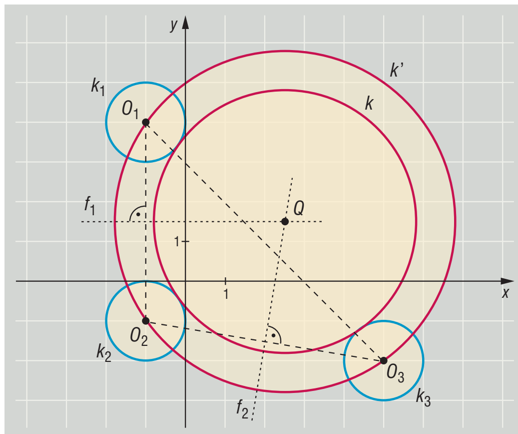
A feltételeknek mindkét kör eleget tesz (ezeket az ábrán pirossal jelöltük). A körök egyenletei:

$$\left(x - \left(15 + 10 \cdot \sqrt{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(15 + 10 \cdot \sqrt{2}\right)\right)^2 = \left(15 + 10 \cdot \sqrt{2}\right)^2,$$

$$\left(x - \left(15 - 10 \cdot \sqrt{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(15 - 10 \cdot \sqrt{2}\right)\right)^2 = \left(15 - 10 \cdot \sqrt{2}\right)^2.$$

3713 Átalakítva a megadott egyenleteket:

$$k_1:\ (x+1)^2 + (y-4)^2 = 1,$$
$$k_2:\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1,$$
$$k_3:\ (x-5)^2 + (y+2)^2 = 1.$$



Az egyenletekből látható, hogy mindhárom kör sugara 1 egység, továbbá a középpontjaik:

$$O_1(-1; 4), \quad O_2(-1; -1) \quad \text{és} \quad O_3(5; -2).$$

A feladat szerint olyan k kört keresünk, amely a k_1, k_2 és k_3 köröket kívülről érinti. Ha a megfelelő k kör középpontját nem változtatjuk, de a sugarát 1 egységgel megnöveljük, akkor olyan k' kört kapunk eredményül, amely átmegy az O_1, O_2, O_3 pontok mindegyikén. A megnövelt sugarú kör éppen az $O_1O_2O_3$ háromszög köré írható kör. A továbbiakban ennek a körnek a középpontját keressük. Ez a pont az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

Az O_1O_2 oldal f_1 felezőmerőlegesének egyenlete:

$$y = \frac{3}{2}.$$

Az O_2O_3 oldal f_2 felezőmerőlegesének egyenlete:

$$6x - y = \frac{27}{2}.$$

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként a Q pont koordinátái:

$$Q\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Az $O_1O_2O_3$ háromszög köré írt körének sugara:

$$\left|\overrightarrow{QO_1}\right| = \sqrt{\left(-1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{2}}.$$

Korábbi észrevételeink alapján a k_1, k_2 és k_3 köröket érintő kör középpontja Q, sugara:

$$r = \left|\overrightarrow{QO_1}\right| - 1 = \sqrt{\frac{37}{2}} - 1,$$

ezért egyenlete

$$k:\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{37}{2}} - 1\right)^2.$$

3714 *a)* A Q pont koordinátáit jelölje $Q(x;\, y)$. Ekkor

$$QA^2 + QB^2 = x^2 + (3 - y)^2 + (6 - x)^2 + (1 - y)^2.$$

A műveletek elvégzése után:

$$QA^2 + QB^2 = 2x^2 - 12x + 2y^2 - 8y + 46.$$

Az x-et, valamint az y-t tartalmazó tagokból külön-külön teljes négyzeteket alakíthatunk ki:

$$QA^2 + QB^2 = 2(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 4y + 4) + 20 = 2(x - 3)^2 + 2(y - 2)^2 + 20.$$

Látható, hogy az első két tag mindig nemnegatív, továbbá a $QA^2 + QB^2$ összeg akkor a legkisebb, ha $x = 3$ és $y = 2$, ekkor értéke 20. A legkisebb összeg a $Q(3;\, 2)$ ponthoz tartozik.

b) Ha $QA^2 + QB^2 = \lambda$ teljesül, akkor az *a)* feladat eredményei alapján:

$$2(x - 3)^2 + 2(y - 2)^2 + 20 = \lambda,$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{\lambda - 20}{2}.$$

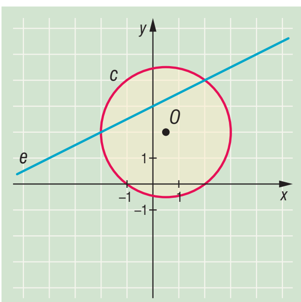
Ha $\lambda > 20$, akkor a feltételt kielégítő Q pontok a $(3;\, 2)$ középpontú, $r = \sqrt{\dfrac{\lambda - 20}{2}}$ sugarú körvonalon helyezkednek el.

Ha $\lambda = 20$, akkor a fenti egyenlet jobb oldalán 0 áll, így egyedül a $Q(3;\, 2)$ pont tesz eleget a feltételnek.

Ha $\lambda < 20$, akkor nincs a feltételnek megfelelő pont a síkon.

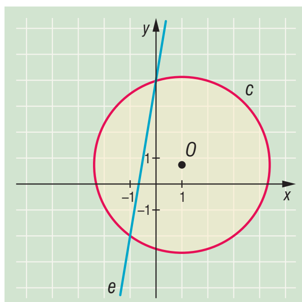
A kör és az egyenes kölcsönös helyzete; két kör közös pontjai – megoldások

3715 *a)*



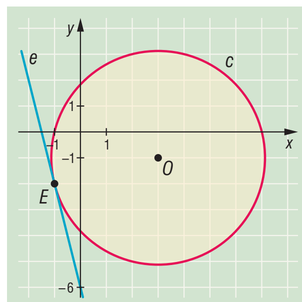
metszéspontok:
$(-2;\, 2)$ és $(2;\, 4)$;

b)



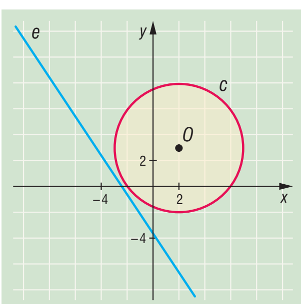
metszéspontok:
$(-1;\, -2)$ és $(0;\, 4)$;

c)



érintési pont:
$(-1;\, -2)$;

d)



nincs közös pont.

3716 *a)* A két alakzat metsző helyzetű.

b) Az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja ($D < 0$).

c) Az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja ($D < 0$).

d) Az egyenes érinti a kört.

3717 A kör középpontja $O(4; 2)$, sugara $\sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$. Mivel az O pont illeszkedik az adott egyenesre, ezért a kimetszett húr a körnek átmérője, amelynek hossza $4 \cdot \sqrt{5} \approx 8{,}94$.

3718 Két ilyen pont van: $(-1; 2)$, illetve $(4; -3)$.

3719 Két ilyen háromszög van. Az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó felezőmerőlegesének és az adott körnek az egyenletrendszeréből adódnak a megoldások.

Az ismeretlen csúcs koordinátái: $(7; 4)$, illetve $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

3720 A leghosszabb húr egyben átmérő is, ezért a leghosszabb húrt tartalmazó egyenes az OP egyenes, amelynek egyenlete: $y = 2x + 1$. A legrövidebb húrt tartalmazó egyenes merőleges az OP egyenesre, így egyenlete:

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

3721 A téglalap csúcsai: $(1; 2)$, $(2; -2)$, $(10; 0)$ és $(9; 4)$.

3722 Az egyenes és kör érintésének feltétele, hogy az egyenleteikből álló egyenletrendszerből kapott másodfokú paraméteres egyenlet diszkriminánsa 0 legyen.

a) A kapott egyenlet:
$$5x^2 + (2 - 4p) \cdot x + p^2 - 2p - 3 = 0,$$
diszkriminánsa:
$$p^2 - 6p - 16 = 0,$$
így a megoldások:
$$p_1 = 8 \quad \text{és} \quad p_2 = -2.$$

b) A kapott egyenlet:
$$(p^2 + 1) \cdot x^2 + (4 - 4p) \cdot x = 0,$$
diszkriminánsa:
$$4 - 4p = 0,$$
így a megoldás:
$$p = 1.$$

c) A kapott egyenlet:
$$2x^2 + (2p - 2) \cdot x + p^2 + 4p + 9 = 0,$$
diszkriminánsa:
$$p^2 + 10p + 17 = 0,$$
így a megoldások:
$$p_1 = -5 + 2 \cdot \sqrt{2} \quad \text{és} \quad p_2 = -5 - 2 \cdot \sqrt{2}.$$

3723 Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, így a P ponton áthaladó érintő egyenletéhez minden esetben felhasználhatjuk, hogy az $\overrightarrow{OP}$ a keresett érintőnek egy normálvektora, ahol O az adott kör középpontja.

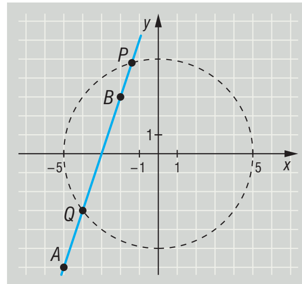
a) $\overrightarrow{OP}(3; 3)$, amiből $\vec{n}_e(1; 1)$, így az egyenlet: $x + y = 6$.

b) $\overrightarrow{OP}(1; -3)$, így az egyenlet: $x - 3y = -5$.

c) $\overrightarrow{OP}(0; 4)$, így az egyenlet: $y = 1$.

d) $\overrightarrow{OP}\left(-\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$, így az egyenlet: $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = -5$.

3724 *a)* Jelöljük a fa helyét A-val, a sziklát B-vel. Az AB egyenes egyenlete $-3x + y = 9$. Az origó középpontú 5 egység sugarú kör egyenlete: $x^2 + y^2 = 25$. A kincs helyét a két egyenletből álló



$$\left.\begin{aligned} -3x + y &= 9 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az első egyenletből y-t kifejezve, majd a második egyenletbe beírva kapjuk, hogy:

$$x^2 + (3x + 9)^2 = 25,$$
$$10x^2 + 54x + 56 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai: $x_1 = -\dfrac{7}{5}$, valamint $x_2 = -4$, ebből adódóan a kör és az egyenes metszéspontjai:

$$P\left(-\frac{7}{5}; \frac{24}{5}\right) \quad \text{és} \quad Q(-4; -3).$$

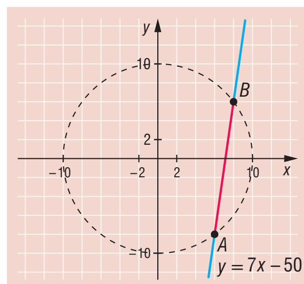
Az ábráról leolvasható, hogy a P pont nem illeszkedik az AB szakaszra, ezért a kincset a $Q(-4; -3)$ pontban rejtették el.

b) Mivel

$$AQ = \sqrt{10} \quad \text{és} \quad QB = \sqrt{40} = 2 \cdot \sqrt{10},$$

ezért a kincs az AB szakaszt $1:2$ arányban osztja.

3725 A radar az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű kört, és annak belső pontjait felügyeli. Ha az utasszállító az A, illetve a B pontokban metszi a radar által vizsgált légteret, akkor a metszéspontok koordinátáit az



$$\left.\begin{aligned} y &= 7x - 50 \\ x^2 + y^2 &= 100 \end{aligned}\right\}$$

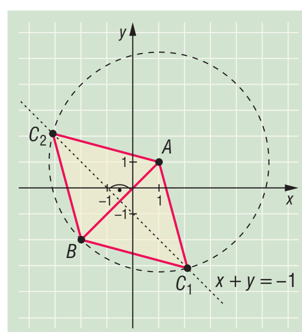
egyenletrendszer megoldásai adják. Az y értékét a második egyenletbe helyettesítve:

$$x^2 + (7x - 50)^2 = 100,$$
$$50x^2 - 700x + 2400 = 0,$$
$$x^2 - 14x + 48 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 6$ és $x_2 = 8$. A kör és az egyenes metszéspontjai: $A(6; -8)$, $B(8; 6)$.

Az AB szakasz hossza $AB = 10 \cdot \sqrt{2}$. Az utasszállító körülbelül 141,4 km utat tesz meg a radar által felügyelt légtérben.

3726 *a)* Az ABC szabályos háromszög C csúcsa illeszkedik az AB oldal felezőmerőlegesére, és az A középpontú, $AB = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$ egység sugarú körre. Az AB szakaszfelező merőlegesének egyenlete:



$$x + y = -1,$$

az A középpontú, AB sugarú kör egyenlete:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 18.$$

A C pont koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -1 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= 18 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből $x = -1 - y$, amit a második egyenletbe helyettesítve:

$$(-2 - y)^2 + (y - 1)^2 = 18,$$
$$4 + 4y + y^2 + y^2 - 2y + 1 = 18,$$
$$2y^2 + 2y - 13 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{27}}{2}, \quad \text{illetve} \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{27}}{2}.$$

Eredményünk (valamint az ábra is) mutatja, hogy a feltételeknek két pont is eleget tesz, ezek koordinátái:

$$C_1\left(\frac{-1 + \sqrt{27}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{27}}{2}\right) \quad \text{és} \quad C_2\left(\frac{-1 - \sqrt{27}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{27}}{2}\right).$$

b) Az ABC_1 és az ABC_2 szabályos háromszögek AB oldala közös, ezért a két háromszög köré írható kör sugara is megegyezik. Ismert, hogy a szabályos háromszög magassága az oldalának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szöröse, és mivel mindkét háromszög oldala $AB = 3 \cdot \sqrt{2}$, ezért magasságuk:

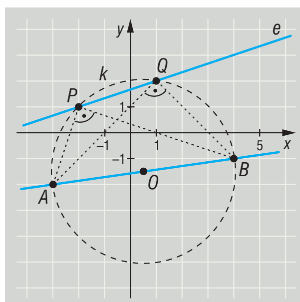
$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(3 \cdot \sqrt{2}\right) = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2}.$$

A szabályos háromszögben a magasságpont, a súlypont és a körülírt kör középpontja egybeesnek, továbbá a súlypont 2 : 1 arányban osztja a súlyvonalakat, ezért a körülírt kör sugara a súlyvonalnak (egyben magasságvonalnak) a $\frac{2}{3}$-szorosa.

Ebből adódóan a háromszögek körülírt köreinek sugara:

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}.$$

3727 *a)* Thalész tételének megfordítása alapján, ha a P pontból az AB szakasz derékszög alatt látszik, akkor a P pont az AB szakasz mint átmérő fölé emelt körvonal egy pontja. Ennek megfelelően a keresett pontok illeszkednek az AB szakasz Thalész-körére (az ábrán k jelöli). E kör középpontja az AB szakasz $O\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$ felezőpontja, sugara pedig:



$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Az AB szakasz Thalész-körének egyenlete:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Az adott egyenletű (e-vel jelölt) egyenes feltételnek megfelelő pontjainak koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= -5 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{25}{2} \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből $x = 3y - 5$, amit a második egyenletbe helyettesítve:

$$\left(3y - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2},$$

$$9y^2 - 33y + \frac{121}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = \frac{25}{2},$$

$$10y^2 - 30y + 20 = 0,$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $y_1 = 2$ és $y_2 = 1$. Eredményünk mutatja, hogy az AB szakasz az e egyenes két pontjából is 90°-os szög alatt látszik; ezek koordinátái:

$$Q(1;\, 2) \quad \text{és} \quad P(-2;\, 1).$$

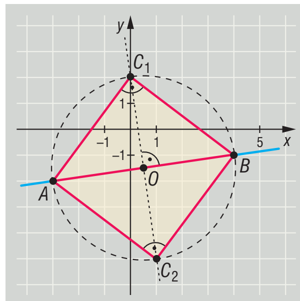
b) A C pont illeszkedik AB Thalész-körére, továbbá az AB szakasz felezőmerőlegesére. A felezőmerőleges egyenlete: $7x + y = 2$.

A C pont koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldásaiból kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} 7x + y &= 2 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{25}{2} \end{aligned}\right\}.$$

A metszéspontok:

$$C_1(0;\, 2) \quad \text{és} \quad C_2(1;\, -5).$$



3728 Az adott kör egyenlete:

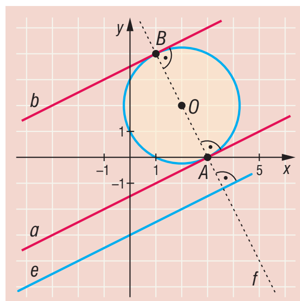
$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

A szintén adott (ábránkon e-vel jelölt) egyenessel párhuzamos érintők merőlegesek az érintési ponthoz húzott sugárra, ezért az érintési pontokat a kör középpontján átmenő, e-re merőleges (f-fel jelölt) egyenes metszi ki a körből. Az f egyenes egyenlete:

$$y = -2x + 6.$$

Az f egyenes és a kör metszéspontjainak meghatározásához a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} y &= -2x + 6 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= 5 \end{aligned}\right\}.$$



Az egyenletrendszer megoldása után a metszéspontokra $A(3;\, 0)$ és $B(1;\, 4)$ adódik. Mivel az érintők párhuzamosak az e egyenessel, ezért meredekségük $\frac{1}{2}$, egyenletük pedig:

$$a\colon\ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad b\colon\ y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2},$$

$$a\colon\ x - 2y = 3 \quad \text{és} \quad b\colon\ x - 2y = 7.$$

3729 **I. megoldás.** A kör egyenletét átalakítva:

$$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 25,$$

így középpontja $O(-2;\, -4)$, sugara 5 egység. Az érintési ponthoz húzott sugár merőleges az érintőre, amelynek meredeksége ezúttal $-\frac{4}{3}$, ezért az O pontot, valamint az érintési pontot is tartalmazó egyenes meredeksége $\frac{3}{4}$. Ez egyszerűen következik abból a tényből, hogy ha két egyenes merőleges egymásra, akkor meredekségeik szorzata -1. Eszerint az érintők érintési pontját az O ponton átmenő, $\frac{3}{4}$ meredekségű egyenes metszi ki az adott körből. A szóban forgó egyenes egyenlete:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}.$$

Az érintési pontokat meghatározó

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{3}{4}x - \frac{5}{2} \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása után az érintési pontokra $A(2; -1)$, valamint $B(-6; -7)$ adódik. A keresett érintők egyenlete:

$$a\colon\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{és} \quad b\colon\ y = -\frac{4}{3}x - 15,$$

$$a\colon\ 4x + 3y = 5 \quad \text{és} \quad b\colon\ 4x + 3y = -45.$$

II. megoldás. A feladatra mutatunk egy másik, inkább algebrai megfontolásokat használó, első nekifutásra kissé talán rémisztő megoldást is. A keresett érintők meredeksége $-\frac{4}{3}$, ezért egyenletük $y = -\frac{4}{3}x + c$ alakban írható, ahol a c paraméter értékét úgy kell meghatároznunk, hogy az egyenes érintse a kört. Ekkor viszont az

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{4}{3}x + c \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van. Az első egyenlet felhasználásával a második a következő alakban írható:

$$(x+2)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + c + 4\right)^2 = 25,$$

$$\frac{25}{9}x^2 - \left(\frac{20}{3} + \frac{8}{3}c\right) \cdot x + c^2 + 8c - 5 = 0.$$

Mivel a fenti egyenletnek is csak egy megoldása lehet, ezért az egyenlet diszkriminánsa biztosan 0, azaz

$$\left(\frac{20}{3} + \frac{8}{3}c\right)^2 - 4 \cdot \frac{25}{9} \cdot (c^2 + 8c - 5) = 0.$$

A műveletek elvégzése után:

$$-4c^2 - \frac{160}{3}c + 100 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $c_1 = -15$ és $c_2 = \frac{5}{3}$. A keresett érintők egyenlete ennek megfelelően:

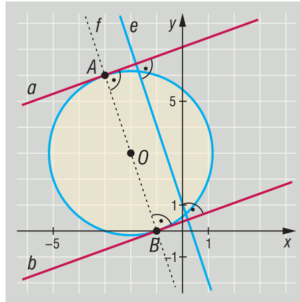
$$a\colon\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{és} \quad b\colon\ y = -\frac{4}{3}x - 15.$$

Bízunk benne, hogy nem vettük el érdeklődő Olvasóink kedvét a paraméteres kifejezésekkel való számolásoktól.

3730 **I. megoldás.** A kör egyenlete

$$(x+2)^2+(y-3)^2=10$$

alakban írható, ahonnan leolvasható, hogy középpontja $O(-2;\,3)$. Az adott (az ábrán e-vel jelölt) egyenesre merőleges érintők érintési pontjait az O ponton átmenő, e-vel párhuzamos egyenes (f) metszi ki a körből.



Az f egyenes egyenlete:

$$y=-3x-3.$$

Az érintési pontok koordinátáit adó egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} y&=-3x-3\\ (x+2)^2+(y-3)^2&=10 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldásaiból az érintési pontok: $A(-3;\,6)$ és $B(-1;\,0)$. A megfelelő érintők egyenlete:

$$a\colon\ y=\frac{1}{3}x+7 \qquad \text{és} \qquad b\colon\ y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}.$$

II. megoldás. A 3729. feladat második megoldásához hasonló módszerrel is célt érhetünk. Az érintők egyenletét $y=\frac{1}{3}x+c$ alakban keressük, ahol a c paraméter értékét úgy kell meghatároznunk, hogy az egyenes érintse a kört. Az

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{3}x+c\\ (x+2)^2+(y-3)^2&=10 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek ennek megfelelően csak egyetlen megoldása van. Az x változót kiküszöbölve:

$$(x+2)^2+\left(\frac{1}{3}x+c-3\right)^2=10,$$

$$\frac{10}{9}x^2-\left(2+\frac{2}{3}c\right)\cdot x+c^2-6c+3=0.$$

A fenti egyenlet diszkriminánsa 0, azaz

$$\left(2+\frac{2}{3}c\right)^2-4\cdot\frac{10}{9}\cdot(c^2-6c+3)=0,$$

$$-4c^2+\frac{88}{3}c-\frac{28}{3}=0.$$

A kapott egyenlet megoldásai:

$$c_1=7 \quad \text{és} \quad c_2=\frac{1}{3}.$$

Ugyanazokat az egyeneseket kaptuk, mint az első megoldásban.

3731 *a)* Az első egyenletből a második egyenletet kivonva:

$$\begin{aligned} 10x-10y+20&=0,\\ x-y+2&=0,\\ x&=y-2. \end{aligned}$$

A kapott összefüggést a második egyenletbe helyettesítve:

$$(y-2)^2 + y^2 - 4\cdot(y-2) - 6 = 0,$$
$$2y^2 - 8y + 6 = 0,$$
$$y^2 - 4y + 3 = 0.$$

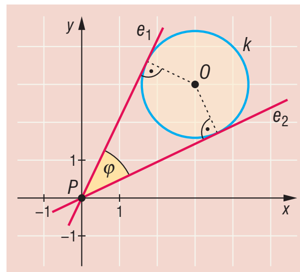
A fenti egyenlet megoldásai: $y_1 = 3$ és $y_2 = 1$. A két körnek két metszéspontja van, ezek koordinátái: $(1;\,3)$ és $(-1;\,1)$.

b) A két egyenlet különbsége: $6x - 12y - 30 = 0$, amiből $x = 2y + 5$. Az első egyenletbe visszahelyettesítve: $5y^2 + 10y + 5 = 0$. A kapott egyenlet diszkriminánsa 0, ezért a két kör érinti egymást. A közös pont: $(3;\,-1)$.

c) Az adott köröknek két metszéspontja van. Ezek koordinátái: $(3;\,3)$ és $(1;\,5)$.

d) Az adott köröknek nincs közös pontja.

3732 *a)* Mivel a keresett érintők az origón áthaladnak, ezért egyenletüket $Ax + By = 0$ alakban kereshetjük. Az ábra alapján is meggyőződhetünk arról, hogy egyik érintő sem párhuzamos az x tengellyel, ezért $A \neq 0$, sőt feltehetjük, hogy $A = 1$, azaz az érintők egyenletének alakja:



$$e\colon\; x + By = 0.$$

Az adott kör középpontjának koordinátái $O(3;\,3)$, sugara $r = \sqrt{2}$. Mivel az érintő az O ponttól éppen r távolságra halad, azaz $d(O,\,e) = \sqrt{2}$, így a 3689. feladat eredményeit felhasználva:

$$\left|\frac{3+3B}{\sqrt{1+B^2}}\right| = \sqrt{2}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$\frac{9+18B+9B^2}{1+B^2} = 2,$$
$$7B^2 + 18B + 7 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei:

$$B_1 = \frac{-9+4\cdot\sqrt{2}}{7}, \quad \text{illetve} \quad B_2 = \frac{-9-4\cdot\sqrt{2}}{7}.$$

Könnyen végiggondolhatjuk, hogy mindkét érték kielégíti a felírt egyenletet. A P pontot tartalmazó érintők egyenlete:

$$e_1\colon\; x + \frac{-9+4\cdot\sqrt{2}}{7}\cdot y = 0 \quad \text{és} \quad e_2\colon\; x + \frac{-9-4\cdot\sqrt{2}}{7}\cdot y = 0.$$

A két érintő φ hajlásszögének kiszámítása a 3639. alapján a

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1\cdot m_2}\right|$$

összefüggés alapján történhet, ahol m_1 és m_2 a két érintő meredekségét jelöli. Az egyenes egyenletéből a meredekségek:

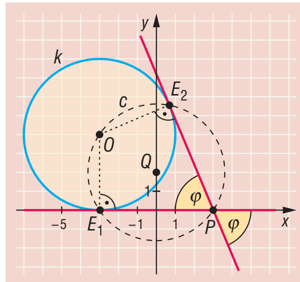
$$m_1 = -\frac{7}{-9+4\cdot\sqrt{2}} = -\frac{7\cdot\left(4\cdot\sqrt{2}+9\right)}{-49} = \frac{4\cdot\sqrt{2}+9}{7}, \quad \text{illetve} \quad m_2 = \frac{7}{9+4\cdot\sqrt{2}} = \frac{9-4\cdot\sqrt{2}}{7}.$$

A két érintő hajlásszögére:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{\dfrac{4\cdot\sqrt{2}+9}{7} - \dfrac{9-4\cdot\sqrt{2}}{7}}{1+\dfrac{4\cdot\sqrt{2}+9}{7}\cdot\dfrac{9-4\cdot\sqrt{2}}{7}} \right| = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{7}.$$

A két érintő hajlásszöge: $\varphi \approx 38{,}94^\circ$.

b) Eljárhatunk az *a)* feladatban ismertetett módszerrel is, de ezúttal inkább egy elemi geometriai ismereteket alkalmazó megoldást mutatunk be.



Az adott k kör középpontja $O(-3;\,4)$, sugara 4 egység.

Az érintők érintési pontját az OP szakasz fölé emelt Thalész-kör metszi ki a k körből. Az OP szakasz felezőpontja $Q(0;\,2)$, a c-vel jelölt Thalész-kör sugara $QP = \sqrt{13}$, így egyenlete:

$$x^2 + (y-2)^2 = 13.$$

Az érintési pontok koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldásai adják:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+6x-8y+9=0 \\ x^2+(y-2)^2-13=0 \end{aligned}\right\}.$$

A két egyenlet megfelelő oldalainak különbségéből:

$$3x - 2y + 9 = 0,$$

amiből y-t kifejezve, majd a második egyenletbe visszaírva kapjuk az alábbi egyenletet:

$$13x^2 + 30x - 27 = 0.$$

A kapott egyenlet megoldásai: $x_1 = -3$ és $x_2 = \dfrac{9}{13}$.

Ennek megfelelően a keresett érintési pontok: $E_1(-3;\,0)$, illetve $E_2\left(\dfrac{9}{13};\,\dfrac{72}{13}\right)$.

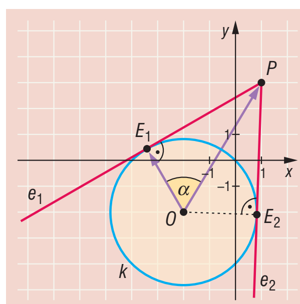
A PE_1 érintő egyenlete: $y = 0$ (éppen az x tengely). A PE_2 érintő egyenlete:

$$y = -\frac{12}{5}x + \frac{36}{5}.$$

Mivel az egyik érintő éppen az x tengely, ezért a két érintő hajlásszöge:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{12}{5}, \qquad \text{amiből} \qquad \varphi \approx 67{,}38^\circ.$$

c) Egy harmadik megoldási módszert is bemutatunk az érintő egyenletének felírására.



Az adott kör középpontja $O(-2;\,-2)$, sugara $r = \sqrt{8}$ egység.

Tegyük fel, hogy a P pontból húzott egyik érintő az E_1 pontban érinti a kört, továbbá az $\overrightarrow{OE_1}$ vektor koordinátái $\overrightarrow{OE_1}(a;\,b)$. Mivel e vektor hossza éppen a kör sugarával egyenlő, ezért:

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8},$$

$$a^2 + b^2 = 8. \qquad (1)$$

A továbbiakban kiszámítjuk az $\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OP}$ skaláris szorzatot. Mivel $\overrightarrow{OP}(3;\,5)$, ezért

$$\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OP} = 3a + 5b.$$

Másrészt a skaláris szorzat definíciója, valamint az OE_1P derékszögű háromszög alapján:

$$\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OP} = \left|\overrightarrow{OE_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP}\right| \cdot \cos\alpha = \sqrt{8} \cdot \left|\overrightarrow{OP}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{OE_1}\right|}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \sqrt{8} \cdot \left|\overrightarrow{OE_1}\right| = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 8,$$

ahol $POE_1\sphericalangle = \alpha$.

A skaláris szorzatra kapott két eredmény összevetéséből:

$$3a + 5b = 8. \qquad (2)$$

A (2) egyenletből $a = \dfrac{8-5b}{3}$, amit az (1) egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\left(\frac{8-5b}{3}\right)^2 + b^2 = 8.$$

A kijelölt műveletek elvégzése után az alábbi egyenlethez jutunk:

$$34b^2 - 80b - 8 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai:

$$b_1 = \frac{20 + 6\cdot\sqrt{13}}{17} \qquad \text{és} \qquad b_2 = \frac{20 - 6\cdot\sqrt{13}}{17}.$$

Az egyenletrendszer megoldásaiként a következő két vektort kapjuk:

$$\overrightarrow{OE_1}\left(\frac{12 - 10\cdot\sqrt{13}}{17};\,\frac{20 + 6\cdot\sqrt{13}}{17}\right) \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{OE_2}\left(\frac{12 + 10\cdot\sqrt{13}}{17};\,\frac{20 - 6\cdot\sqrt{13}}{17}\right).$$

Mivel a két kapott vektor egyben a megfelelő érintő egy-egy normálvektora, ezért az érintők egyenlete:

$$e_1\colon\ \left(12 - 10\cdot\sqrt{13}\right)\cdot x + \left(20 + 6\cdot\sqrt{13}\right)\cdot y = 72 + 8\cdot\sqrt{13},$$

$$e_2\colon\ \left(12 + 10\cdot\sqrt{13}\right)\cdot x + \left(20 - 6\cdot\sqrt{13}\right)\cdot y = 72 - 8\cdot\sqrt{13}.$$

A két érintő hajlásszöge: $\varphi \approx 58{,}03°$.

3733 *a)* A c kör egyenlete:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10,$$

a k köré:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

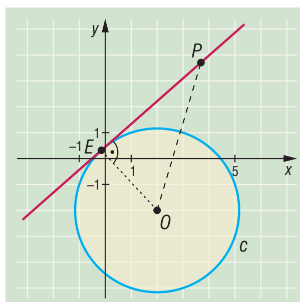
A két egyenlet megfelelő oldalainak különbségéből: $-x + y = 0$, azaz $y = x$. A kapott összefüggést a c kör egyenletébe visszahelyettesítve:

$$(x-2)^2 + (x+2)^2 = 10,$$

amiből $x^2 = 1$, így $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$. A két kör közös pontjai: $A(1;\,1)$, $B(-1;\,-1)$.

b) Ha a $P(x;\,y)$ pontból a c körhöz húzott érintő az E pontban érinti a kört, akkor az OEP derékszögű háromszögben:

$$PE^2 = OP^2 - OE^2.$$



Mivel a c kör középpontja $O(2;\,-2)$, továbbá $OE = \sqrt{10}$, ezért:

$$PE^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 - 10.$$

Hasonló gondolatmenet mutatja, hogy a k körhöz a P pontból húzott érintőszakasz négyzete:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 - 4.$$

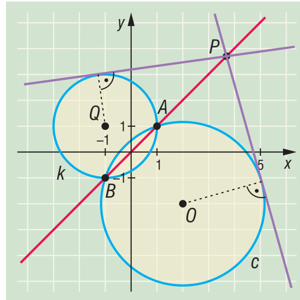
A feltételek alapján a két érintőszakasz hossza, így persze azok négyzete is megegyezik, azaz

$$(x-2)^2+(y+2)^2-10=(x+1)^2+(y-1)^2-4.$$

A műveletek elvégzése után:

$$y=x.$$

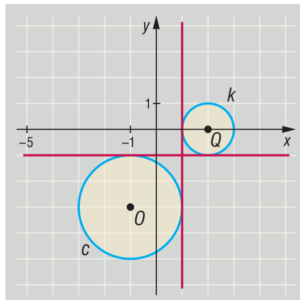
Eredményünk mutatja, hogy ha a P pontból a két körhöz ugyanakkora érintőszakasz húzható, akkor a pont koordinátái kielégítik a fenti egyenletet. Mivel a kapott egyenlet egyenes egyenlete, ezért a feladat állítását igazoltuk.



c) Az A és B pontok koordinátái kielégítik a kapott egyenes egyenletét, így mindkét pont illeszkedik az egyenesre.

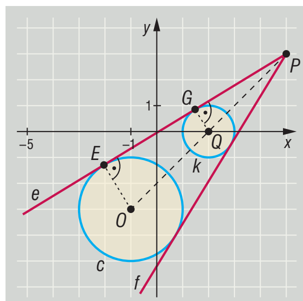
3734 A c kör középpontja $O(-1; -3)$, sugara 2 egység, a k köré $Q(2; 0)$, sugara 1 egység. Az ábra is mutatja, hogy a közös belső érintők egyike az x tengellyel, a másik az y tengellyel párhuzamos. A közös belső érintők egyenlete:

$$y=-1, \quad \text{illetve} \quad x=1.$$



A közös külső érintők egyenletének meghatározása nehezebb feladatnak bizonyul. Ha ezek az érintők a P pontban metszik egymást, akkor P nyilván az OQ egyenes egy pontja. Tegyük fel, hogy az egyik közös érintő (az ábrán az e-vel jelölt) a c kört az E, a k kört a G pontban érinti. Ekkor az OEP és a QGP derékszögű háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{OP}{QP}=\frac{OE}{QG}=\frac{2}{1}, \qquad \text{azaz} \qquad OP=2QP.$$



Ez egyben azt is jelenti, hogy a Q pont egybeesik az OP szakasz felezőpontjával.

Ha a P pont koordinátáit $P(x; y)$ jelöli, akkor:

$$\frac{-1+x}{2}=2 \quad \text{és} \quad \frac{-3+y}{2}=0,$$

amiből $x=5$ és $y=3$, végül $P(5; 3)$.

Ezután a feladatot visszavezettük a következő problémára:

Adott a $P(5; 3)$ pont, valamint a k: $x^2+y^2-4x+3=0$ kör. Írjuk fel a P ponton átmenő, a k kört pedig érintő egyenesek egyenletét.

A 3732. feladat *a)* pontjának módszerét követve – az egyenes normálvektoros egyenletét felhasználva, ahol $\vec{n}_e(1; B)$ és P_0: $P(5; 3)$ – az érintő egyenletét $x+By=5+3B$ alakban kereshetjük.

Az érintő és a Q középpont távolsága:

$$\left|\frac{2-5-3B}{\sqrt{1+B^2}}\right|=1.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve:

$$\frac{9+18B+9B^2}{1+B^2}=1,$$

$$4B^2+9B+4=0.$$

Az egyenlet megoldásai:

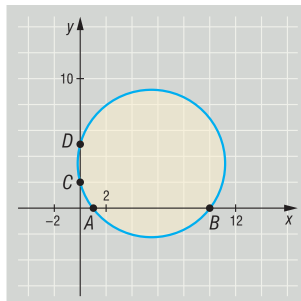
$$B_1=\frac{-9-\sqrt{17}}{8} \quad \text{és} \quad B_2=\frac{-9+\sqrt{17}}{8}.$$

A két kör közös külső érintőinek egyenlete:

$$e\colon\; x-\frac{9+\sqrt{17}}{8}\cdot y=\frac{13-3\cdot\sqrt{17}}{8},$$

$$f\colon\; x+\frac{-9+\sqrt{17}}{8}\cdot y=\frac{13+3\cdot\sqrt{17}}{8}.$$

3735 Ha a kör egyenletébe az $y=0$ értéket helyettesítjük, akkor megkaphatjuk az x tengelyből kimetszett szakasz végpontjainak koordinátáit. Ekkor



$$x^2-11x+c=0,$$

amiből:

$$x_1=\frac{11-\sqrt{121-4c}}{2} \quad \text{és} \quad x_2=\frac{11+\sqrt{121-4c}}{2},$$

és az ábra jelöléseinek megfelelően:

$$A\left(\frac{11-\sqrt{121-4c}}{2};0\right) \quad \text{és} \quad B\left(\frac{11+\sqrt{121-4c}}{2};0\right).$$

Az AB szakasz hossza:

$$AB=\sqrt{121-4c}.$$

A kör y tengelyből kimetszett húrjának végpontjait az

$$y^2-7y+c=0$$

egyenlet megoldásai adják.

A megfelelő pontok:

$$C\left(\frac{7-\sqrt{49-4c}}{2};0\right) \quad \text{és} \quad D\left(\frac{7+\sqrt{49-4c}}{2};0\right).$$

A CD szakasz hossza:

$$CD=\sqrt{49-4c}.$$

A feltételek szerint $AB=3CD$, azaz:

$$\sqrt{121-4c}=3\cdot\sqrt{49-4c}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kapott egyenletet megoldva:

$$121-4c=9\cdot(49-4c),$$

$$c=10.$$

Ellenőrzéssel is meggyőződhetünk arról, hogy a kapott érték megfelel a feltételeknek.

A parabola – megoldások

3736 *a)* A parabola paramétere:

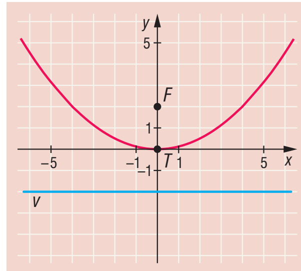
$$p = 4.$$

A parabola tengelypontja:

$$T(0;\,0).$$

A parabola egyenlete:

$$x^2 = 8y.$$



b) A parabola paramétere:

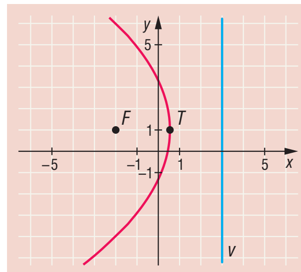
$$p = 5.$$

A parabola tengelypontja:

$$T\left(\frac{1}{2};\,1\right).$$

A parabola egyenlete:

$$x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}(y-1)^2.$$



c) A parabola paramétere:

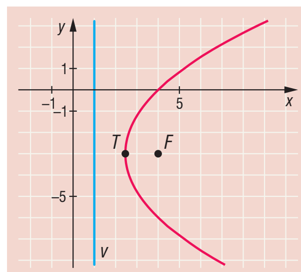
$$p = 3.$$

A parabola tengelypontja:

$$T\left(\frac{5}{2};\,-3\right).$$

A parabola egyenlete:

$$x - \frac{5}{2} = \frac{1}{6}(y+3)^2.$$



d) A parabola paramétere:

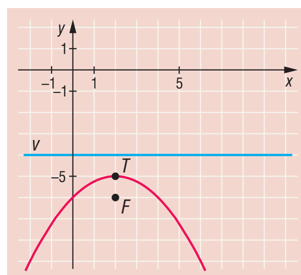
$$p = 2.$$

A parabola fókuszpontja:

$$F(2;\,-6).$$

A parabola egyenlete:

$$y + 5 = -\frac{1}{4}(x-2)^2.$$



e) A parabola paramétere:

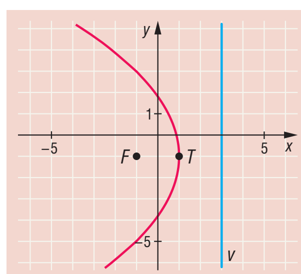
$$p = 4.$$

A parabola fókuszpontja:

$$F(-1;\,-1).$$

A parabola egyenlete:

$$x - 1 = -\frac{1}{8}(y+1)^2.$$



f) A parabola paramétere:

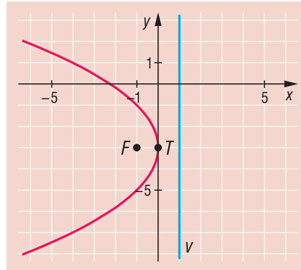
$$p = 2.$$

A parabola vezéregyenesének egyenlete:

$$v\colon\ x = 1.$$

A parabola egyenlete:

$$x = -\frac{1}{4}(y+3)^2.$$



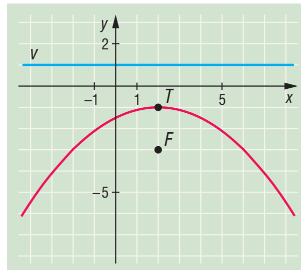
3737 A paramétert p, a fókuszpontot F, a tengelypontot T, a vezéregyenest v jelöli.

a) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$-\frac{1}{8}(x-2)^2 = y+1.$$

A parabola adatai:

$$p = 4,\quad T(2; -1),\quad F(2; -3),\quad v\colon\ y = 1.$$

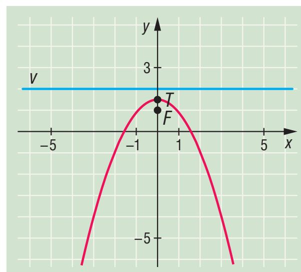


b) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$-\frac{1}{2}x^2 = y - \frac{3}{2}.$$

A parabola adatai:

$$p = 1,\quad T\left(0; \frac{3}{2}\right),\quad F(0; 1),\quad v\colon\ y = 2.$$

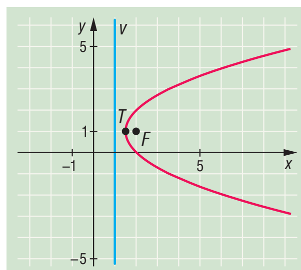


c) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$\frac{1}{2}(y-1)^2 = x - \frac{3}{2}.$$

A parabola adatai:

$$p = 1,\quad T\left(\frac{3}{2}; 1\right),\quad F(2; 1),\quad v\colon\ x = 1.$$

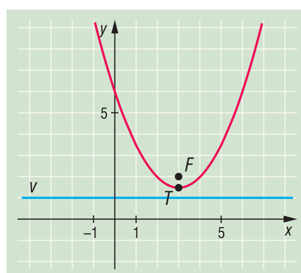


d) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x-3)^2.$$

A parabola adatai:

$$p = 1,\quad T\left(3; \frac{3}{2}\right),\quad F(3; 2),\quad v\colon\ y = 1.$$

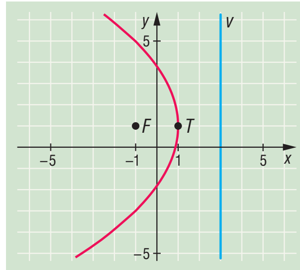


e) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$x-1=-\frac{1}{8}(y-1)^2.$$

A parabola adatai:

$$p=4,\quad T(1;\,1),\quad F(-1;\,1),\quad v\colon\; x=3.$$

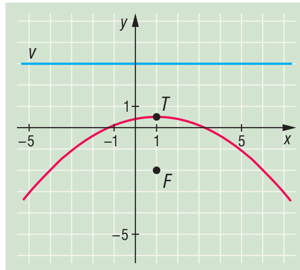


f) Az egyenlet a következő alakra hozható:

$$-\frac{1}{10}(x-1)^2=y-\frac{1}{2}.$$

A parabola adatai:

$$p=5,\quad T\left(1;\,\frac{1}{2}\right),\quad F(1;\,-2),\quad v\colon\; y=3.$$

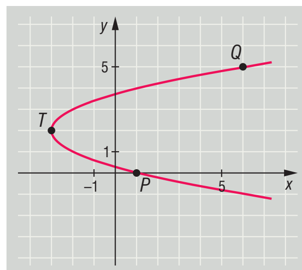


3738 A parabola tengelypontját jelölje $T(u;\,v)$. Mivel a parabola paramétere 0,5, továbbá tengelye az x tengellyel párhuzamos, ezért egyenletét a következő alakban kereshetjük:

$$x-u=(y-v)^2\quad\text{vagy}\quad x-u=-(y-v)^2.$$

Az első esetben az adott pontok koordinátáit az egyenletbe beírva az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned}1-u&=v^2\\ 6-u&=(5-v)^2\end{aligned}\right\}.$$



Az első egyenletből a második egyenletet kivonva:

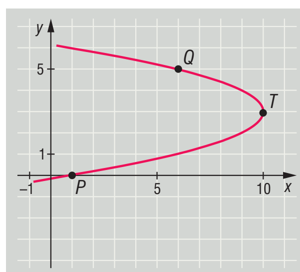
$$\begin{aligned}-5&=v^2-(5-v)^2,\\ -5&=-25+10v,\\ v&=2.\end{aligned}$$

Ekkor $u=-3$, a parabola tengelypontja $T(-3;\,2)$, egyenlete pedig:

$$x+3=(y-2)^2.$$

Amennyiben a parabola egyenlete $x-u=-(y-v)^2$ alakú, akkor az adott pontok koordinátáit az egyenletbe helyettesítve az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned}1-u&=-v^2\\ 6-u&=-(5-v)^2\end{aligned}\right\}.$$



A megfelelő oldalak különbsége:

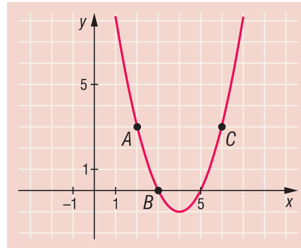
$$\begin{aligned}-5&=-v^2+(5-v)^2,\\ -5&=25-10v,\\ v&=3.\end{aligned}$$

Ekkor $u=10$, a tengelypont $T(10;\,3)$, a parabola egyenlete:

$$x-10=-(y-3)^2.$$

3739 *a)* Mivel a parabola tengelye az y tengellyel párhuzamos, ezért egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban kereshetjük.

Az adott pontok koordinátáit az egyenletbe beírva a következő egyenletrendszerhez jutunk:



$$\left.\begin{aligned} 3 &= 4a + 2b + c \\ 0 &= 9a + 3b + c \\ 3 &= 36a + 6b + c \end{aligned}\right\}.$$

Ha a második, illetve a harmadik egyenletből kivonjuk az első egyenlet megfelelő oldalát, akkor a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} -3 &= 5a + b \\ 0 &= 32a + 4b \end{aligned}\right\}.$$

A kapott kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása: $a = 1$ és $b = -8$. A kapott értékeket az első egyenletrendszer első egyenletébe visszaírva kapjuk, hogy $c = 15$. A feltételeknek megfelelő parabola egyenlete:

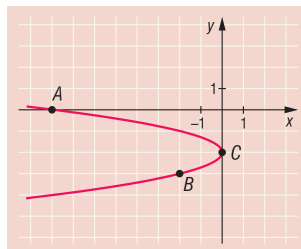
$$y = x^2 - 8x + 15.$$

Megjegyzés: Ha az egyenletet átírjuk $y = (x - 4)^2 - 1$ alakba, akkor a parabolát könnyen ábrázolhatjuk is.

b) Az x tengellyel párhuzamos tengelyű parabolák egyenletét felírhatjuk

$$x = ay^2 + by + c$$

alakban. Az ismert pontok koordinátáit behelyettesítve adódik a következő egyenletrendszer:



$$\left.\begin{aligned} -8 &= c \\ -2 &= 9a - 3b + c \\ 0 &= 4a - 2b + c \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = -2$, $b = -8$ és $c = -8$. A kapott parabola egyenlete:

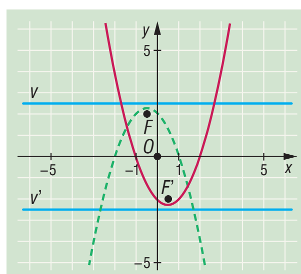
$$x = -2y^2 - 8y - 8.$$

3740 A parabola egyenletét átalakítva:

$$y - \frac{9}{4} = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

így a parabola tengelypontja $T\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$, paramétere $p = \frac{1}{2}$, fókuszpontja $F\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$, vezéregyenesének egyenlete v: $y = \frac{5}{2}$. Az ábrákon ezt a parabolát zöld szaggatott vonallal jelöltük.

a) A tengelypont origóra vonatkozó tükörképe $T'\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, a fókuszponté $F'\left(\frac{1}{2}; -2\right)$, a vezéregyenes v' tükörképe: $y = -\frac{5}{2}$.



A parabola tükörképének egyenlete:

$$y + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

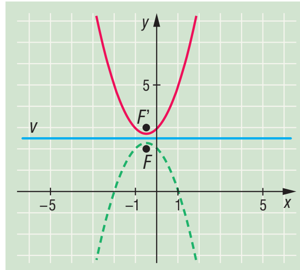
A tükörképet az ábrán pirossal jelöltük.

b) Ha a parabolát a vezéregyenesére tükrözzük, akkor a tükörkép fókuszpontja $F'\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$, tengelypontja $T'\left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{4}\right)$.

A tükörkép egyenlete:

$$y - \frac{11}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

A tükörképet az ábrán pirossal jelöltük.

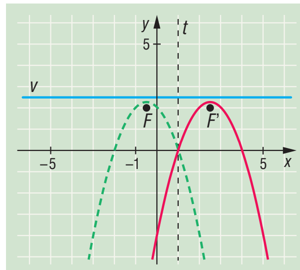


c) A tükörkép tengelypontja $T'\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{4}\right)$, fókuszpontja pedig $F'\left(\frac{5}{2}; 2\right)$, vezéregyenese v.

A tükörkép egyenlete:

$$y - \frac{9}{4} = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2.$$

A tükörképet az ábrán pirossal jelöltük.

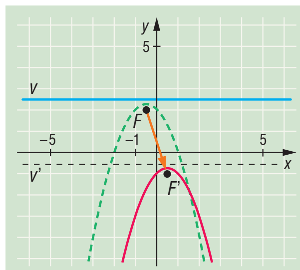


d) A $\vec{v}$ vektorral eltolt parabola tengelypontja $T'\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$, fókuszpontja $F'\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, v' vezéregyenese $y = -\frac{1}{2}$.

A kapott parabola egyenlete:

$$y + \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

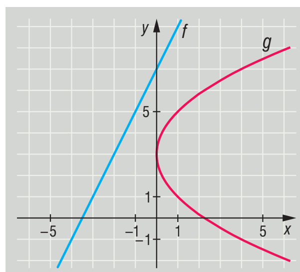
Az eltolt parabolát az ábrán pirossal jelöltük.



3741 *a)* Az első egyenletből kifejezett y értékét a második egyenletbe helyettesítve:

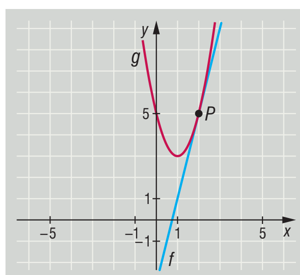
$$(2x + 7)^2 - 6(2x + 7) + 9 = 4x,$$
$$4x^2 + 12x + 16 = 0,$$
$$x^2 + 3x + 4 = 0.$$

A kapott egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért a két alakzatnak nincsen közös pontja.



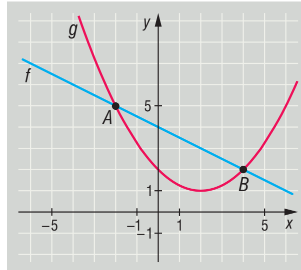
b) Az egyenes érinti a parabolát. A két alakzat közös pontja:

$$P(2; 5).$$



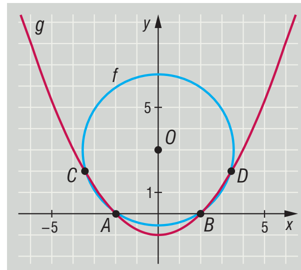
c) A metszéspontok:

$$A(-2;\,5) \quad \text{és} \quad B(4;\,2).$$



d) Az f kör egyenletét átalakítva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} x^2+(y-3)^2&=13\\ x^2-4y&=4 \end{aligned}\right\}.$$



A két egyenlet megfelelő oldalainak különbsége:

$$\begin{aligned} (y-3)^2+4y&=9,\\ y^2-2y&=0,\\ y\cdot(y-2)&=0. \end{aligned}$$

A fenti egyenlet megoldásai: $y_1=0$ és $y_2=2$. Ha y_1 értékét a g egyenletébe helyettesítjük, akkor $x^2=4$ adódik, amiből a két alakzat alábbi metszéspontjait kapjuk:

$$A(-2;\,0) \quad \text{és} \quad B(2;\,0).$$

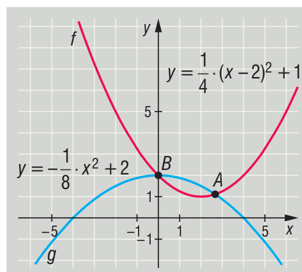
Ha $y_2=2$ értékével számolunk, akkor $x^2=12$, amiből a további metszéspontok:

$$C\left(-2\cdot\sqrt{3};\,2\right), \quad \text{illetve} \quad D\left(2\cdot\sqrt{3};\,2\right).$$

Megjegyzés: Ha a parabola egyenletét $y=\frac{1}{4}x^2-1$ alakban írjuk, akkor könnyen ábrázolható.

e) Az f és g egyenletének különbsége:

$$-4x-12y+24=0, \qquad \text{amiből} \qquad y=\frac{-x+6}{3}.$$



A kapott összefüggést a g egyenletébe visszahelyettesítve:

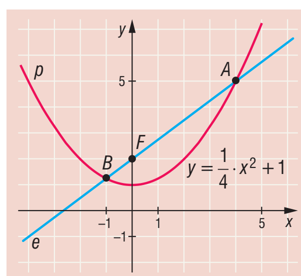
$$\begin{aligned} x^2+8\cdot\frac{-x+6}{3}-16&=0,\\ 3x^2-8x&=0,\\ x\cdot(3x-8)&=0. \end{aligned}$$

A fenti egyenlet megoldásai: $x_1=0$ és $x_2=\frac{8}{3}$. A két alakzat metszéspontjai:

$$A\left(\frac{8}{3};\,\frac{10}{9}\right) \qquad \text{és} \qquad B(0;\,2).$$

3742 Az adott parabola fókuszpontja $F(0;\,2)$. Az F ponton áthaladó, $\vec{v}(4;\,3)$ irányvektorú e egyenes egyenlete: $3x-4y=-8$. A parabola és az egyenes metszéspontjait az alábbi egyenletrendszer megoldásaiból kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}x^2+1\\ 3x-4y&=-8 \end{aligned}\right\}.$$



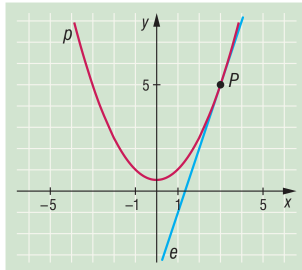
Az y értékét a második egyenletbe helyettesítve:

$$3x - 4\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) = -8,$$
$$-x^2 + 3x + 4 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldásai: $x_1 = 4$ és $x_2 = -1$.
Az egyenes a parabolát a következő pontokban metszi:

$$A(4; 5) \quad \text{és} \quad B\left(-1; \frac{5}{4}\right).$$

3743 *a)* Az érintő egyenletének iránytényezős egyenlete:



$$y - 5 = m(x - 3).$$

Mivel a feltétel szerint az egyenes érinti a parabolát, ezért az

$$\left.\begin{aligned} y - 5 &= m(x - 3) \\ y &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - 5 = m(x - 3),$$
$$\frac{1}{2}x^2 - mx + 3m - \frac{9}{2} = 0.$$

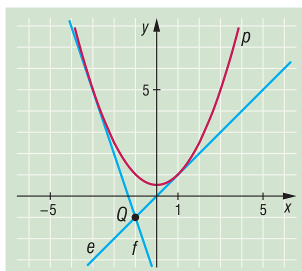
Mivel a fenti egyenletnek is csak egy megoldása van, ezért diszkriminánsa 0, így:

$$m^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(3m - \frac{9}{2}\right) = 0,$$
$$m^2 - 6m + 9 = 0,$$
$$(m - 3)^2 = 0.$$

A fenti egyenlet megoldása $m = 3$, ezért a keresett érintő egyenlete:

$$y - 5 = 3(x - 3), \quad \text{azaz} \quad y = 3x - 4.$$

b) Az érintő egyenletét ezúttal a következő alakban keressük:



$$y + 1 = m(x + 1).$$

Mivel a feltétel szerint az egyenes érinti a parabolát, ezért az

$$\left.\begin{aligned} y + 1 &= m(x + 1) \\ y &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}.$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} = m(x + 1),$$
$$\frac{1}{2}x^2 - mx - m + \frac{3}{2} = 0.$$

A kapott egyenletnek csak egy megoldása van, így diszkriminánsa 0, azaz:

$$m^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-m + \frac{3}{2}\right) = 0,$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $m_1 = 1$ és $m_2 = -3$. Az adott ponton át két érintő is húzható a parabolához, ezek egyenlete:

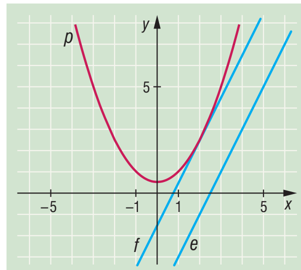
$$e\colon\ y = x,$$

illetve

$$f\colon\ y + 1 = -3 \cdot (x + 1), \quad \text{azaz} \quad y = -3x - 4.$$

c) Az adott (az ábrán e-vel jelölt) egyenessel párhuzamos érintő egyenletének alakja:

$$f\colon\ y = 2x + c.$$



Mivel az

$$\left.\begin{aligned} f\colon\ & y = 2x + c \\ p\colon\ & y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek egy megoldása van, ezért az

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 2x + c$$

egyenlet diszkriminánsa 0. Az egyenlet 0-ra redukált alakja:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - c = 0,$$

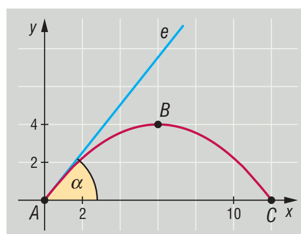
amelynek diszkriminánsa:

$$4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - c\right) = 0, \qquad \text{amiből} \qquad c = -\frac{3}{2}.$$

A keresett f érintő egyenlete:

$$y = 2x - \frac{3}{2}.$$

3744 Az eldobott kavics parabolapályán mozog. A parabola síkjában helyezzünk el egy koordináta-rendszert, amelynek kezdőpontjában Barnabás található (A), a vízbe érkezés helye pedig az x tengely pozitív felére illeszkedik.



Ekkor a kavics mozgása során áthalad a következő pontokon:

$$A(0;\,0), \quad B(6;\,4) \quad \text{és} \quad C(12;\,0).$$

Mivel a feltételek szerint B a parabola tengelypontja, ezért egyenletét a következő alakban kereshetjük:

$$y = -a(x - 6)^2 + 4.$$

Az A pont koordinátáit az egyenletbe helyettesítve:

$$0 = -36a + 4, \qquad \text{amiből} \qquad a = \frac{1}{9},$$

a parabola egyenlete pedig:

$$y = -\frac{1}{9}(x - 6)^2 + 4.$$

Barnabás a kavicsot a parabola e érintője mentén indította útnak. Az A ponton átmenő érintő egyenlete $y = mx$ alakú, továbbá az

$$\left.\begin{aligned} y &= mx \\ y &= -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

Az y változó kiküszöbölése után:

$$mx = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4,$$

$$\frac{1}{9}x^2 + \left(m - \frac{4}{3}\right) \cdot x = 0,$$

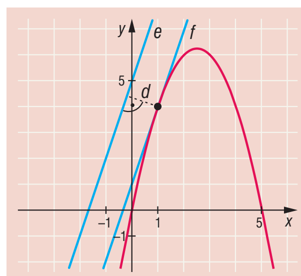
$$x\left(\frac{1}{9}x + m - \frac{4}{3}\right) = 0.$$

A kapott egyenletnek csak egy megoldása lehet, amiből következik, hogy $m = \frac{4}{3}$, az érintő egyenlete pedig $y = \frac{4}{3}x$.

Ha Barnabás a kavicsot a vízszinteshez képest α szögben hajította el, akkor:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha \approx 53{,}1°.$$

3745 A parabola adott (e-vel jelölt) egyeneshez legközelebb eső pontja éppen az egyenessel párhuzamos érintő érintési pontjával esik egybe. Az érintő egyenlete a következő alakú:



$$y = 3x + c,$$

továbbá az

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x + c \\ y &= -x^2 + 5x \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

Ebből következik, hogy a

$$-x^2 + 5x = 3x + c,$$

$$-x^2 + 2x - c = 0,$$

egyenlet diszkriminánsa 0, azaz

$$4 - 4c = 0, \qquad \text{így} \qquad c = 1.$$

A keresett érintő (amit az ábrán f-fel jelöltünk) egyenlete:

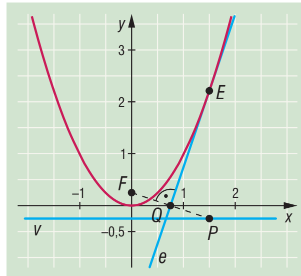
$$y = 3x + 1,$$

az érintési pont, egyben az e-hez legközelebbi parabolapont koordinátái: $E(1; 4)$.

A parabola és az e egyenes távolsága megegyezik az E pont e egyenestől mért távolságával. A 3689. feladat eredménye alapján a távolság:

$$d = \left|\frac{3 \cdot 1 - 4 + 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{5} \approx 1{,}26.$$

3746 A parabola egyenlete alapján a fókuszpontja $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, v-vel jelölt vezéregyenesének egyenlete $y = -\frac{1}{4}$. A vezéregyenesen felvett P pont koordinátáit jelölje $P\left(p; -\frac{1}{4}\right)$, ahol p valós szám. A továbbiakban felírjuk a PF szakasz felezőmerőlegesének (e) egyenletét. A szakasz felezőpontja $Q\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, a felezőmerőleges egy normálvektora pedig $\overrightarrow{FP}\left(p; -\frac{1}{2}\right)$. Az e egyenes egyenlete:



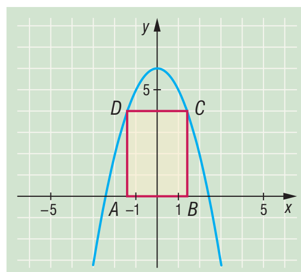
$$px - \frac{1}{2}y = \frac{p^2}{2}. \qquad (1)$$

Megmutatjuk, hogy az (1) egyenletű egyenes valóban érinti az $y = x^2$ egyenletű parabolát. Az y értékét az (1) egyenletbe helyettesítve:

$$px - \frac{1}{2}x^2 = \frac{p^2}{2},$$
$$x^2 - 2px + p^2 = 0,$$
$$(x - p)^2 = 0.$$

A kapott egyenlet megoldása $x = p$, amiből következik, hogy az (1) egyenletű egyenesnek a parabolával egy közös pontja van, amelynek koordinátái $E\left(p; p^2\right)$. Mivel az e egyenes nyilvánvaló módon nem lehet párhuzamos a parabola tengelyével, ezért csakis a parabola érintője lehet.

3747 Az y tengely a parabolának, és így a beírt téglalapnak is szimmetriatengelye, ezért a téglalap csúcsainak koordinátái $A(-b; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; -b^2 + 6)$, illetve $D(-b; -b^2 + 6)$, ahol $0 < b < \sqrt{6}$.



Az $ABCD$ téglalap területe:

$$T = AB \cdot BC = 2b \cdot (-b^2 + 6).$$

Feladatunk a $T(b) = 2b \cdot (-b^2 + 6)$ függvény maximumának megtalálása a $0 < b < \sqrt{6}$ feltétel mellett. Mivel a szóban forgó függvény pozitív értékű, ezért pontosan akkor lesz maximális, amikor négyzete, vagyis elegendő a $T^2(b) = 4b^2 \cdot (-b^2 + 6)^2$ függvény maximumhelyét keresnünk. A kapott függvényt tovább alakítva:

$$T^2(b) = 2 \cdot \left(2b^2\right) \cdot (-b^2 + 6) \cdot (-b^2 + 6).$$

A zárójelben álló számok szorzatáról eszünkbe juthat azok mértani közepe, amely közismerten nem lehet nagyobb a számtani közepüknél, azaz:

$$\sqrt[3]{(2b^2) \cdot (-b^2 + 6) \cdot (-b^2 + 6)} \le \frac{2b^2 + (-b^2 + 6) + (-b^2 + 6)}{3} = 4,$$

majd mindkét oldal harmadik hatványát véve:

$$\left(2b^2\right) \cdot (-b^2 + 6) \cdot (-b^2 + 6) \le 64.$$

A kapott egyenlőtlenségből közvetlenül következik, hogy

$$T^2(b) \le 128,$$

amiből a $0 < b < \sqrt{6}$ feltétel figyelembevételével kapjuk, hogy

$$T(b) \le 8 \cdot \sqrt{2}.$$

Eredményünk mutatja, hogy a beírt $ABCD$ téglalap területe nem lehet nagyobb, mint $8 \cdot \sqrt{2}$. A terület a maximumát akkor éri el, amikor a mértani és számtani közép közötti összefüggésben egyenlőség teljesül, azaz amikor a három szám, amelyre az egyenlőtlenséget alkalmaztuk, egymással megegyezik. Ez pontosan akkor fordul elő, amikor:

$$2b^2 = -b^2 + 6,$$
$$b = \sqrt{2}.$$

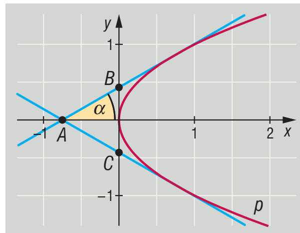
Összefoglalva: a maximális területű beírt téglalap csúcsai:

$$A\left(-\sqrt{2}; 0\right), \quad B\left(\sqrt{2}; 0\right), \quad C\left(\sqrt{2}; 4\right) \quad \text{és} \quad D\left(-\sqrt{2}; 4\right).$$

A maximális terület:

$$8 \cdot \sqrt{2}.$$

3748 A keresett pontot jelölje $A(a; 0)$, a szabályos háromszög további, az y tengelyre illeszkedő csúcsait B, illetve C.



Mivel az x tengely a parabolának és az ABC háromszögnek is szimmetriatengelye, ezért az AB egyenes irányszöge $\alpha = 30°$, iránytangense pedig:

$$m = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ebből adódóan az AB egyenes iránytényezős egyenlete:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - a).$$

Mivel az egyenes a parabolát érinti, ezért az

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - a) \\ x &= y^2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Az x változó kiküszöbölése után azt kapjuk, hogy

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (y^2 - a),$$
$$\sqrt{3} \cdot y^2 - 3y - a \cdot \sqrt{3} = 0.$$

Természetesen a fenti egyenletnek is csak egy megoldása van, tehát az egyenlet diszkriminánsa 0:

$$9 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-a \cdot \sqrt{3}\right) = 0, \quad \text{amiből} \quad a = -\frac{3}{4}, \quad \text{így} \quad A\left(-\frac{3}{4}; 0\right).$$

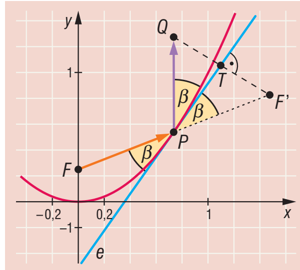
Ha a B csúcs koordinátái $B(0; b)$, és $C(0; -b)$, akkor az ABC háromszög oldala $2b$, és magassága az A pont első koordinátájának ismeretében $\frac{3}{4}$, ezért:

$$\frac{3}{4} = 2b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$b = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

A háromszög további csúcsai:

$$B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \text{és} \quad C\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

3749 A parabola fókuszpontja $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$. Tegyük fel, hogy az F pontból kiinduló fénysugár a $P(p; p^2)$ pontban éri el a parabolát. Ekkor a fénysugár visszaverődés előtti FP „útja” ugyanakkora szöget zár be a parabola P pontbeli érintőjével, mint a visszaverődés utáni „útja”. Ezt a közös szöget az ábrán β jelöli.



A β szög azonban még egy helyen megjelenik az ábrában; ha a fénysugár nem verődne vissza a tükörről, hanem útja egyenesen folytatódna tovább, akkor a kapott (ábrán PF'-vel jelölt) szakasz szintén ezt a szöget zárja be a P pontbeli érintővel. Ezt könnyen beláthatjuk, ha arra gondolunk, hogy így a P pontnál csúcsszögek alakulnak ki.

Megállapításaink lehetővé teszik, hogy felírjuk annak az egyenesnek az egyenletét, amelyen a fénysugár a visszaverődés után halad. Ehhez például a következő lépések vezethetnek el:

1. Az F pont P-re vonatkozó F' tükörképének meghatározása. A fénysugár az FF' egyenesen haladna, ha nem verődne vissza a parabolatükörről. Az F' pont koordinátái:
$$F'\left(2p; 2p^2 - \frac{1}{4}\right).$$

2. A P pontbeli érintő egyenletének felírása. Az érintő egyenletét $y - p^2 = m(x - p)$ alakban kereshetjük. Az
$$\left.\begin{aligned} y - p^2 &= m(x-p) \\ y &= x^2 \end{aligned}\right\}$$
egyenletrendszernek egy megoldása van csakúgy, mint a belőle kapott
$$x^2 - mx + mp - p^2 = 0$$
egyenletnek. Ebből adódóan az egyenlet diszkriminánsa 0, azaz
$$m^2 - 4(mp - p^2) = 0,$$
amiből
$$(m - 2p)^2 = 0, \quad \text{végül} \quad m = 2p.$$
A P ponton átmenő e érintő egyenlete:
$$e:\ \ y - p^2 = 2p \cdot (x - p).$$

3. Az F'-ben az érintőre emelt merőleges egyenes egyenletének meghatározása. A kapott érintő egyenletéből leolvasható annak egy normálvektora: $\vec{n}(2p; -1)$. Mivel ez a vektor a keresett merőlegesnek egyben irányvektora, ezért az egyenes egyenlete:
$$x + 2py = 2p + 2p \cdot \left(2p^2 - \frac{1}{4}\right), \quad \text{azaz} \quad x + 2py = 4p^3 + \frac{3}{2}p.$$

4. A 3. pontban felírt egyenes, valamint a P pontbeli érintő T metszéspontjának meghatározása. A T metszéspont koordinátáit az
$$\left.\begin{aligned} x + 2py &= 4p^3 + \frac{3}{2}p \\ y - p^2 &= 2p \cdot (x - p) \end{aligned}\right\}$$
egyenletrendszer megoldása után kapjuk. A második egyenlet $2p$-szeresét kivonva az első egyenletből:
$$x + 2p^3 = 4p^3 + \frac{3}{2}p - 4p^2x + 4p^3.$$

Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{6p^3 + \frac{3}{2}p}{1+4p^2} = \frac{\frac{3}{2}p \cdot (4p^2+1)}{1+4p^2} = \frac{3}{2}p.$$

A kapott értéket a második egyenletbe visszahelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve kapjuk: $y = 2p^2$, így

$$T\left(\frac{3}{2}p; 2p^2\right).$$

5. Az F' pont tükrözése a T pontra vonatkozóan. Ha az eredményt Q jelöli, akkor a parabolatükörről visszaverődött fénysugár áthalad a Q ponton. Mivel T a QF' szakasz felezőpontja, ezért ha $Q(q_1; q_2)$, akkor:

$$\frac{q_1 + 2p}{2} = \frac{3}{2}p \quad \text{és} \quad \frac{q_2 + 2p^2 - \frac{1}{4}}{2} = 2p^2.$$

Az egyenletrendszer megoldása után:

$$Q\left(p; 2p^2 + \frac{1}{4}\right).$$

6. A fénysugár útját a PQ egyenes mentén folytatja. A P és Q pontok első koordinátája egyaránt p, ezért a PQ egyenes párhuzamos az y tengellyel, ami a parabola tengelye. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Vegyes feladatok – megoldások

3750 *a)* (9; 5); *b)* (–9; –5); *c)* (0; 0); *d)* (45; 25).

3751 $B(10; 3)$.

3752 *a)* –11; *b)* –44; *c)* $-11\lambda^2$.
A skaláris szorzat az eredeti vektorok skaláris szorzatának λ^2-szeresére változik.

3753 Megmutathatjuk például, hogy $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, ahol $0 \le \lambda \le 1$.

a) $\overrightarrow{AP}(4; -3)$, $\overrightarrow{AB}(16; -12)$, így $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$.

b) $\overrightarrow{AP}(2; -4)$, $\overrightarrow{AB}(5; -10)$, így $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$.

c) $\overrightarrow{AP}(-8; 2)$, $\overrightarrow{AB}(-12; 3)$, így $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB} = 2$.

d) $\overrightarrow{AP}(5; -6)$, $\overrightarrow{AB}(10; -12)$, így $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\frac{AP}{PB} = 1$.

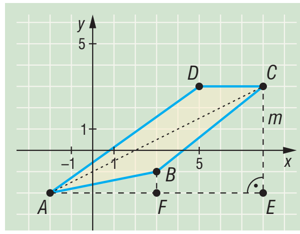
3754 $y = 4x + 5$ $[M(-1; 1)]$.

3755 $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ $[M(1; -3)]$.

3756 $p = 4$, $q = 2$, a kör sugara 5.

3757 *a)* $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$;   *b)* $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$;
c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$;   *d)* $(x - 9)^2 + (y + 8)^2 = 5$;
e) $(x + 4)^2 + y^2 = 5$;   *f)* $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$;
g) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$, illetve $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$;
h) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$, illetve $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

3758 Az ACD háromszög területére:



$$T_{ACD} = \frac{CD \cdot m}{2},$$

ahol m a háromszög CD oldalához tartozó magasságát jelöli.
Mivel $CD = 3$, továbbá $m = 5$, ezért

$$T_{ACD} = 7{,}5.$$

Az ABC háromszög területe az ábra alapján könnyen kiszámolható:

$$T_{ABC} = T_{AEC} - T_{AFB} - T_{BFEC}.$$

Az AEC, illetve AFB háromszögek területére:

$$T_{AEC} = 25, \quad T_{AFB} = 2{,}5.$$

A $BFEC$ trapéz alapjai 1, illetve 5, magassága szintén 5, ezért területe:

$$T_{BFEC} = \frac{1+5}{2} \cdot 5 = 15.$$

Végül az ABC háromszög területére:

$$T_{ABC} = 25 - 2{,}5 - 15 = 7{,}5$$

adódik, ami mutatja, hogy az AC átló valóban megfelezi az $ABCD$ négyszög területét.

3759 $C(-5; -1)$.

3760 *a)* Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. A két vektor skaláris szorzata a koordinátáik segítségével:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot (x - 1) + (x + 2) \cdot (x + 3) = 0,$$
$$2x^2 + 4x + 6 = 0.$$

Mivel a fenti egyenletnek nincsen valós megoldása, ezért a két vektor nem lehet merőleges egymásra.

b) A két vektor skaláris szorzata:

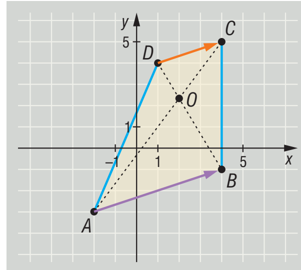
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot (x + 3) + (x + 2) \cdot (x + 3) = (x + 3) \cdot (2x + 2) = 0.$$

Mivel egy szorzat csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért

$$x = -3 \quad \text{vagy} \quad x = -1.$$

Megjegyzés: Az előbbi esetben $\vec{b} = \mathbf{0}$, amely minden vektorra merőleges. Ha $x = -1$, akkor $\vec{a}(-1; 1)$, $\vec{b}(2; 2)$.

3761 *a)* Mivel $\overrightarrow{AB}(6;\ 2)$ és $\overrightarrow{DC}(3;\ 1)$, ezért látható, hogy $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$, amiből már azonnal következik, hogy az AB oldal párhuzamos a DC oldallal, így az $ABCD$ négyszög valóban trapéz. Noéminek igaza volt.



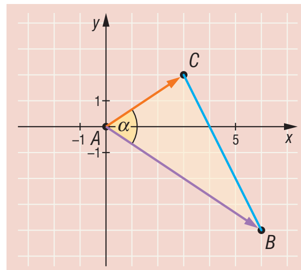
b) Az AB és DC alapok hosszának aránya az *a)* feladat eredményei alapján $\frac{AB}{DC} = 2.$ Ha az átlók metszéspontja O, akkor az ABO és COD háromszögek hasonlók egymáshoz, és a hasonlóság aránya 2. Ebből azonnal következik, hogy az átlók $2:1$ arányban osztják egymást, a hosszabb részek a hosszabb (AB) alaphoz vannak közelebb.

c) Az O pont koordinátái:

$$O\left(\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 4}{3};\ \frac{1\cdot(-3)+2\cdot 5}{3}\right), \qquad \text{azaz} \qquad O\left(2;\ \frac{7}{3}\right).$$

3762 *a)* Mivel $\overrightarrow{AC}(3;\ 2)$ és $\overrightarrow{AB}(6;\ -4)$, ezért:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{13} \qquad \text{és} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\cdot\sqrt{13}.$$



A két vektor skaláris szorzatára:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\cdot 6 + 2\cdot(-4) = 10,$$

másrészt

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \sqrt{13}\cdot 2\cdot\sqrt{13}\cdot\cos\alpha = 26\cdot\cos\alpha.$$

A két eredmény összevetéséből:

$$26\cdot\cos\alpha = 10,$$

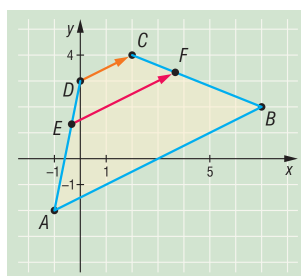
$$\cos\alpha = \frac{5}{13},$$

$$\alpha \approx 67{,}38^\circ.$$

b) Az α szögfelezője illeszkedik az x tengelyre. Az *a)* feladatban meghatározott két vektor az AC, illetve az AB egyenesnek egy-egy irányvektora, ezért AC egyenes iránytangense $\frac{2}{3}$, AB iránytangense $-\frac{2}{3}$.

A tangensfüggvény tulajdonságai alapján ezért AC és AB ugyanakkora nagyságú szöget zár be az x tengely pozitív felével, amit másként úgy is megfogalmazhatunk, hogy az x tengely szögfelezője a két egyenes által bezárt α szögnek.

3763 *a)* Az E pont a DA szakaszt $1:2$ arányban osztja, ezért $E\left(-\frac{1}{3};\ \frac{4}{3}\right)$.

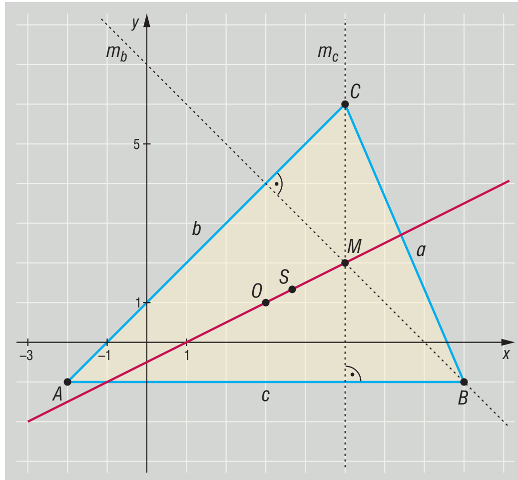


Hasonló módon az F pont $1:2$ arányban osztja a CB szakaszt, így $F\left(\frac{11}{3};\ \frac{10}{3}\right)$. Ennek megfelelően az $\overrightarrow{EF}$ koordinátái: $\overrightarrow{EF}(4;\ 2)$.

b) Mivel $\overrightarrow{DC}(2;\ 1)$, ezért $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{DC}$, amiből következik, hogy az EF szakasz párhuzamos az $ABCD$ trapéz DC, és így természetesen az AB alapjával is.

3764 A háromszög Euler-egyenese tartalmazza a háromszög M magasságpontját, valamint S súlypontját. Az S pont koordinátái:

$$S\left(\frac{11}{3};\frac{4}{3}\right).$$



Az M pont meghatározásához felírjuk az m_c, valamint az m_b magasságvonalak egyenletét. Mivel m_c párhuzamos az y tengellyel, továbbá átmegy a C ponton, így m_c egyenlete: $x = 5$.

Az m_b egyenesnek az $\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}(1;1)$ normálvektora, B pedig egy pontja, ezért m_b egyenlete: $x + y = 7$. A két egyenes metszéspontja:

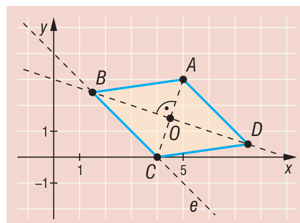
$$M(5;\,2).$$

Az Euler-egyenesnek a $\frac{3}{2}\overrightarrow{SM}(2;1)$ vektor irányvektora, ezért az SM Euler-egyenes egyenlete:

$$x - 2y = 1.$$

Megjegyzés: Az Euler-egyenes átmegy az ABC háromszög köré írt kör O középpontján is. Az O pont koordinátái: $O(3;\,1)$.

3765 A rombusz adott csúcsát A-val, átlóinak metszéspontját O-val, az adott oldalegyenest e-vel jelöltük. Az $ABCD$ rombusz az O pontra vonatkozóan középpontosan szimmetrikus, így az A pont O-ra vonatkozó tükörképe egybeesik a C ponttal. A megfelelő tükörkép koordinátái: $C(4;\,0)$.



A rombusz átlói merőlegesek egymásra, így a BD egyenesnek a $\overrightarrow{CA}(1;\,3)$ normálvektora, O pedig egy pontja, ezért egyenlete: $x + 3y = 9$.

A B csúcsot a BD egyenes metszi ki az e egyenesből. A megfelelő egyenletrendszer megoldása után $B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

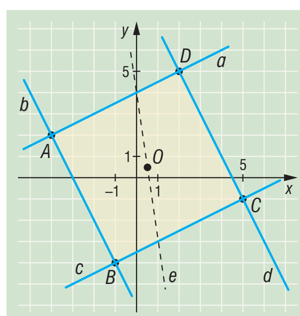
A BD szakasznak O a felezőpontja, amiből $D\left(\frac{15}{2};\frac{1}{2}\right)$.

A rombusz hiányzó csúcsai:

$$B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right),\qquad C(4;\,0),\qquad D\left(\frac{15}{2};\frac{1}{2}\right).$$

3766 *a)* Az adott egyenesek egy-egy irányvektora:

$$\vec{v}_a(2;1),\quad \vec{v}_b(1;-2),\quad \vec{v}_c(2;1)\quad \text{és}\quad \vec{v}_d(1;-2).$$



Mivel $\vec{v}_a = \vec{v}_c$ és $\vec{v}_b = \vec{v}_d$, ezért az egyenesek által közrefogott négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, így a négyszög paralelogramma. Vegyük észre továbbá, hogy például:

$$\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b = 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 0,$$

ezért az a és b egyenesek merőlegesek egymásra. Hasonló igaz a négyszög további szomszédos oldalegyeneseire, ezért a megadott egyenesek téglalapot fognak közre.

A megfelelő egyenletrendszerek megoldása után kiszámíthatjuk a szóban forgó négyszög csúcsainak koordinátáit is. Az a és b egyenesek metszéspontja: $A(-4;\,2)$, a b és c egyeneseké $B(-1;\,-4)$, a c és d egyeneseké $C(5;\,-1)$, végül a d és az a egyeneseké $D(2;\,5)$.

Mivel $AB = BC = \sqrt{45}$, ezért az $ABCD$ téglalap szomszédos oldalai megegyeznek, ami igazolja, hogy $ABCD$ négyzet.

b) A négyzet köré írt kör középpontja az AC szakasz O felezőpontja. Az O pont koordinátái: $O\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right)$. A kör sugara: $r = OA = \sqrt{\frac{45}{2}}$. Az $ABCD$ négyzet köré írt kör egyenlete:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{2}.$$

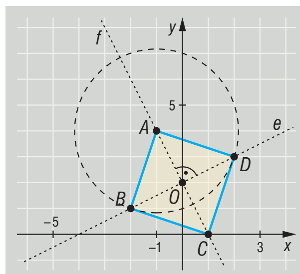
c) A négyzet köré írt kör területe: $T=\frac{45}{2}\pi$, a négyzet területe pedig $t = 45$. Mivel

$$\frac{T}{t}=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}571,$$

ezért a kör területe a négyzet területének körülbelül 157%-a.

d) Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a négyzet köré írt kör O középpontja illeszkedik az e egyenesre. Ebből adódóan az e egyenes a négyzetet két egybevágó trapézra bontja, így területük aránya $1:1$.

3767 Behelyettesítés mutatja, hogy az A pont nem illeszkedik az e egyenesre, ezért az A pontot is tartalmazó átló egyenese (melyet az ábrán f jelöl) merőleges e-re. Ebből adódóan az e egyenes irányvektora az f egyenesnek normálvektora. Az e egyenletéből leolvasható egy irányvektora: $\vec{v}(2;\,1)$. Az f egyenes egyenlete ennek megfelelően $2x + y = 2$. A rombusz átlóinak metszéspontját a két átlóegyenes egyenletéből álló



$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{2}x+2\\ y&=-2x+2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az O metszéspont: $O(0;\,2)$. Az $ABCD$ rombusz átlói felezik egymást, így O az AC szakasz felezőpontja, amiből $C(1;\,0)$. A feltételek alapján a rombusz oldala $\sqrt{10}$, ezért a hiányzó B és D csúcsokat az A középpontú, $\sqrt{10}$ sugarú kör metszi ki az e egyenesből. A szóban forgó kör egyenlete:

$$(x+1)^2+(y-4)^2=10.$$

A kör és az e egyenes egyenletéből álló

$$\left.\begin{aligned} (x+1)^2+(y-4)^2&=10\\ y&=\frac{1}{2}x+2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből y értékét kiküszöbölve:

$$(x+1)^2+\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2=10,$$

$$\frac{5}{4}x^2=5,$$

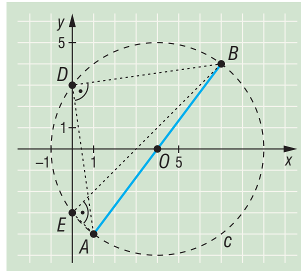
$$x^2=4.$$

A kapott egyenlet megoldásai: $x_1 = -2$, illetve $x_2 = 2$. Ennek megfelelően $B(-2;\, 1)$ és $D(2;\, 3)$. A rombusz hiányzó csúcsai:

$$C(1;\, 0), \quad B(-2;\, 1) \quad \text{és} \quad D(2;\, 3).$$

3768 *a)* A két templom távolsága:

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ km}.$$



b) Azok a pontok, amelyekből az AB szakasz 90º-os szög alatt látszik, illeszkednek a szakasz fölé emelt Thalész-körre, amit az ábrán c jelöl. A kör középpontja $O(4;\, 0)$, sugara 5, ezért egyenlete:

$$(x-4)^2 + y^2 = 25.$$

Mivel az útszakasz egyenlete $x = 0$, ezért a metszéspontok második koordinátájára:

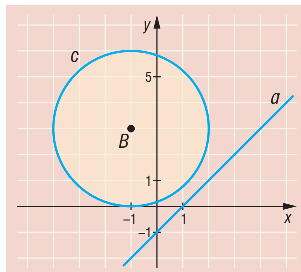
$$(0-4)^2 + y^2 = 25, \quad \text{amiből} \quad y_1 = 3 \text{ és } y_2 = -3.$$

Két olyan pont is van, amelyből a templomok 90º-os szög alatt látszanak, ezek koordinátái:

$$D(0;\, 3) \quad \text{és} \quad E(0;\, -3).$$

c) A két templom a c kör belső pontjaiból látszik tompaszög alatt. Ez az útszakasznak összesen 6 km hosszú része (D és E pont között).

3769 Bodri a c: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ egyenletű körvonalat, illetve annak belső pontjait éri el. A kör, valamint az a-val jelölt sétaút metszéspontjait az alábbi egyenletrendszer megoldásai adják:



$$\left.\begin{aligned} (x+1)^2 + (y-3)^2 &= 9 \\ y &= x-1 \end{aligned}\right\}.$$

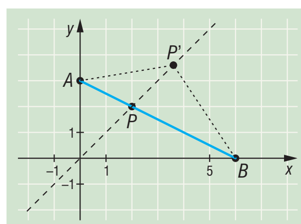
Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$(x+1)^2 + (x-4)^2 = 9,$$
$$x^2 - 3x + 4 = 0.$$

A fenti egyenlet diszkriminánsa negatív, így a sétaút nem metszi a Bodri által elérhető körvonalat. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

3770 *a)* A hozzárendelési utasítást átalakítva:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (x-3)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + x^2}.$$



Vegyük észre, hogy a jobb oldalon éppen a $P(x;\, x)$ pontnak az $A(0;\, 3)$ és $B(6;\, 0)$ pontoktól mért távolságösszege áll.

A feladatot így az alábbiak szerint fogalmazhatjuk át: keressük az $y = x$ egyenletű egyenesnek azt a P pontját, amelyre a $PA + PB$ összeg a lehető legkisebb.

Könnyen végiggondolható, hogy a P pontnak illeszkednie kell az AB szakaszra. Ha ugyanis P' az $y = x$ egyenletű egyenes egy P-től különböző pontja, akkor az ABP' háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség mutatja, hogy:

$$AP + PB = AB < AP' + P'B.$$

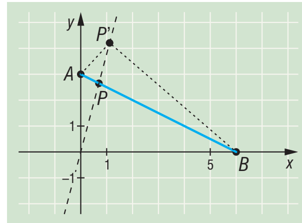
Az AB szakasz az adott egyenest a $P(2;\, 2)$ pontban metszi, ezért az f függvény a minimumát az $x = 2$ helyen veszi fel. A minimum értéke:

$$f(2) = AB = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}.$$

b) Az *a)* feladathoz hasonlóan járhatunk el. A hozzárendelési szabályt átalakítva:

$$g(x)=\sqrt{x^2+(4x-3)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(4x)^2}.$$

A jobb oldalon a $P(x; 4x)$ pontnak az $A(0; 3)$ és $B(6; 0)$ pontoktól mért távolságösszege áll. Feladatunk tehát ezúttal az $y=4x$ egyenletű egyenes, valamint az AB szakasz metszéspontjának meghatározása. Az AB egyenes tengelymetszeti egyenlete $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$, ezért a megfelelő P pont koordinátáira:

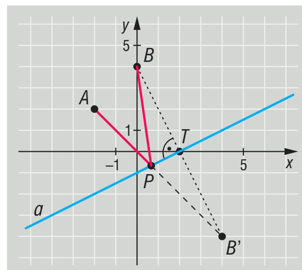


$$\frac{x}{6}+\frac{4x}{3}=1, \quad \text{amiből} \quad x=\frac{2}{3}.$$

A minimumot szolgáltató P pont koordinátái $P\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$. A g függvény a minimumát az $x=\frac{2}{3}$ helyen veszi fel. A minimum értéke:

$$g\left(\frac{2}{3}\right)=AB=\sqrt{45}=3\cdot\sqrt{5}.$$

3771 *a)* Az a-val jelölt autópályán olyan P pontot keresünk, amelyre az $AP+PB$ összeg a lehető legkisebb. Tükrözzük ennek érdekében a B pontot az a egyenesre, a tükörképet jelölje B'. Mivel a tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért:



$$PB=PB', \quad \text{így} \quad AP+PB=AP+PB',$$

amiből következik, hogy a keresett összeg pontosan akkor minimális, amikor az $AP+PB'$ összeg is minimális. A fenti összeg akkor lesz a lehető legkisebb, amikor a P pont illeszkedik az AB' szakaszra.

Első lépésben a B' pont koordinátáit számoljuk ki. A tükrözés miatt B' illeszkedik a B pontban az a egyenesre emelt merőlegesre. Ebből kifolyólag a BB' egyenes egy irányvektora megegyezik az a egyenes egy normálvektorával. Az adott egyenletből a BB' egyenes egy irányvektora: $\vec{v}(1; -2)$, így egyenlete: $2x+y=4$. A BB' egyenes és az a egyenes T metszéspontját a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja. A T pont koordinátái: $T(2; 0)$. Mivel a T pont egyben a BB' szakasz felezőpontja is, ezért $B'(4; -4)$.

A következő lépésben felírjuk az AB' egyenes egyenletét. Az egyenesnek az $\overrightarrow{AB'}(6; -6)$ egy irányvektora, ezért az $\vec{n}(1; 1)$ egy normálvektora. Az egyenes normálvektoros egyenlete: $x+y=0$.

Végül a lehajtó helyét (amit az ábrán P jelöl) az AB' egyenes metszi ki az a egyenesből. A megfelelő egyenletrendszer megoldása után $P\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ adódik. A lehajtót a $P\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ pontban kell kialakítani.

b) Korábbi megjegyzésünk alapján a megépítendő útszakasz hossza megegyezik az AB' szakasz hosszával. Mivel $AB'=6\cdot\sqrt{2}\approx 8{,}49$, ezért körülbelül 8,49 km hosszú utat kell építeni. Ez hozzávetőlegesen 1 273 500 000 Ft-ba kerül.

3772 *a)* Ha a kör középpontja $O(u; v)$, sugara r, továbbá $u, v, r\in\mathbb{Z}$, akkor a következő pontok koordinátái egészek, és illeszkednek a körre:

$$A(u-r; v), \quad B(u+r; v), \quad C(u; v-r) \quad \text{és} \quad D(u; v+r).$$

Az $O(0; 0)$ középpontú, $r=1$ sugarú kör pontosan négy rácspontot tartalmaz, ezek:

$$A(-1; 0), \quad B(1; 0), \quad C(0; -1) \quad \text{és} \quad D(0; 1).$$

b) Az $O\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{4}\right)$ középpontú r sugarú kör egyenlete:

$$\left(x+\sqrt{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=r^2.$$

Indirekt módon bizonyítunk, ezért tegyük fel, hogy az állítással ellentétben két olyan rácspont is létezik, amelyek illeszkednek a körvonalra. Legyenek ezek $A(a_1; a_2)$, illetve $B(b_1; b_2)$, továbbá $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, valamint az $a_1 = b_1$ és $a_2 = b_2$ egyenlőségek egyidejűleg nem teljesülnek. Mivel mindkét pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét, ezért:

$$\left(a_1+\sqrt{3}\right)^2+\left(a_2-\frac{1}{4}\right)^2=r^2,$$

$$\left(b_1+\sqrt{3}\right)^2+\left(b_2-\frac{1}{4}\right)^2=r^2.$$

A két egyenlet jobb oldala megegyezik, ezért a bal oldalak is egyenlők, így:

$$\left(a_1+\sqrt{3}\right)^2+\left(a_2-\frac{1}{4}\right)^2=\left(b_1+\sqrt{3}\right)^2+\left(b_2-\frac{1}{4}\right)^2.$$

A műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$a_1^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot a_1+a_2^2-\frac{1}{2}a_2=b_1^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot b_1+b_2^2-\frac{1}{2}b_2,$$

majd rendezés után:

$$a_1^2-b_1^2+a_2^2-b_2^2+\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}a_2=2\cdot\sqrt{3}\cdot(b_1-a_1).$$

A fenti egyenlőség bal oldalán racionális szám áll, ezért értelemszerűen a jobb oldalán is racionális szám szerepel. Mivel $2\cdot\sqrt{3}$ irracionális szám, ezért a jobb oldal egyetlen esetben lehet racionális, mégpedig ha értéke 0, azaz ha $a_1 = b_1$. Ekkor persze a bal oldal is 0, ezért:

$$a_1^2-b_1^2+a_2^2-b_2^2+\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}a_2=0,$$

majd szem előtt tartva, hogy $a_1 = b_1$:

$$a_2^2-b_2^2+\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}a_2=0,$$

$$a_2^2-b_2^2=\frac{1}{2}(a_2-b_2),$$

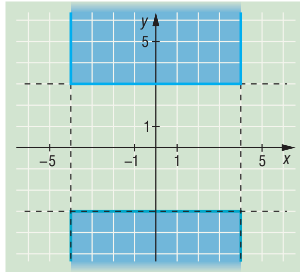
$$(a_2-b_2)\cdot(a_2+b_2)=\frac{1}{2}(a_2-b_2).$$

Korábbi megjegyzésünk alapján az $a_1 = b_1$ és $a_2 = b_2$ egyenlőségek egyidejűleg nem teljesülhetnek, ezért $a_2 \neq b_2$, így mindkét oldal osztható $(a_2 - b_2)$-vel, amiből következik, hogy:

$$a_2+b_2=\frac{1}{2}.$$

Mivel a bal oldal két egész szám összege, ezért nem lehet egyenlő a jobb oldallal, azaz ellentmondásra jutottunk. Ebből adódik, hogy az $O\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{4}\right)$ középpontú, r sugarú kör valóban legfeljebb egy rácsponton mehet át.

3773 *a)* A határoló vonalak pontjai hozzátartoznak az A halmazhoz.



b) Az egyenlőtlenséget 0-ra redukálva, majd közös nevezőt kialakítva kapjuk, hogy:

$$\frac{-x-2y+3}{2x+y-1} \le 0.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$-x-2y+3 \le 0 \quad \text{és} \quad 2x+y-1>0,$$

vagy ha

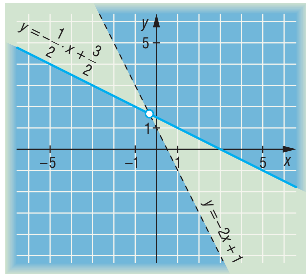
$$-x-2y+3 \ge 0 \quad \text{és} \quad 2x+y-1<0.$$

A két feltételből y értékét kifejezve

$$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \le y \qquad \text{és} \qquad y>1-2x,$$

vagy

$$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \ge y \qquad \text{és} \qquad y<1-2x.$$

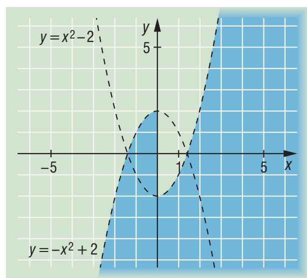


A folytonos vonallal rajzolt egyenes pontjai hozzátartoznak, míg a szaggatott egyenes pontjai nem tartoznak hozzá a B halmazhoz.

c) Az $x=0$ feltételt kielégítő pontok, vagyis az y tengely pontjai, nem tesznek eleget a feltételnek.

Ha $x>0$, vagyis az első és a negyedik síknegyed pontjait tekintjük, akkor:

$$x^3-2x-xy>0,$$
$$x(x^2-2-y)>0.$$



Mivel az első tényező pozitív, ezért

$$x^2-2>y.$$

Ha pedig $x<0$, akkor:

$$x^3-2x+xy>0,$$
$$x(x^2-2+y)>0.$$

Mivel az első tényező negatív, ezért

$$y<2-x^2.$$

Az ábrán szaggatottan jelölt parabolák, valamint az y tengely pontjai nem tartoznak a C halmazhoz.

d) Az egyenlőség bal oldalán a lehetséges kiemeléseket elvégezve:

$$xy\cdot(x^2+y^2)=16xy,$$

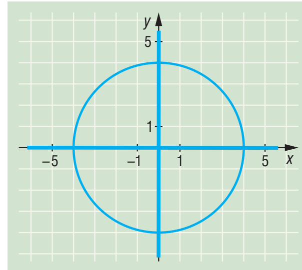
majd 0-ra redukálva, és ismét elvégezve a kiemeléseket:

$$xy\cdot(x^2+y^2-16)=0.$$

A bal oldalon álló szorzat csak úgy lehet 0, ha:

$$x=0,\quad \text{vagy}\quad y=0,\quad \text{vagy}\quad x^2+y^2=16.$$

Az első egyenlőségnek az y tengely, a másodiknak az x tengely, míg a harmadiknak az origó középpontú, 4 egység sugarú kör pontjai tesznek eleget.



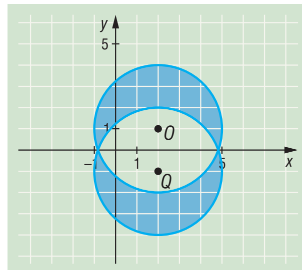
e) Az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív kifejezés áll, ezért mindkét oldalt négyzetre emelhetjük, így:

$$(x^2+y^2-4x-4)^2\le 4y^2,$$

majd 0-ra redukálva és szorzattá alakítva:

$$(x^2+y^2-4x-4)^2-4y^2\le 0,$$

$$(x^2+y^2-4x-4-2y)\cdot(x^2+y^2-4x-4+2y)\le 0.$$



A zárójeleken belül teljes négyzetek kialakítása után azt kapjuk, hogy:

$$\big((x-2)^2+(y-1)^2-9\big)\cdot\big((x-2)^2+(y+1)^2-9\big)\le 0.$$

Ha a P pont illeszkedik az $O(2;\,1)$ vagy a $Q(2;\,-1)$ középpontú, 3 egység sugarú körre, akkor P az E halmazhoz is hozzátartozik. Ezenkívül a fenti egyenlőtlenség bal oldalán pontosan akkor áll negatív szám, ha a tényezők közül az egyik pozitív, a másik negatív. A feltételnek ezért azok a pontok felelnek meg, amelyek az említett körök közül egyiknek belső, míg a másiknak külső pontjai.

f) A feltételnek megfelelő P pontok koordinátáira:

$$(x^2-y)\cdot(x^2+y)\le 0.$$

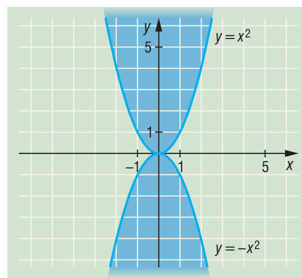
Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$x^2\le y\quad \text{és}\quad -x^2\le y,$$

vagy ha

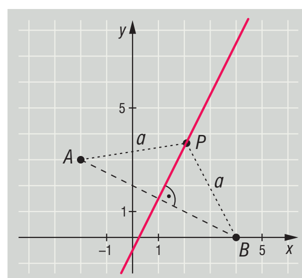
$$x^2\ge y\quad \text{és}\quad y\le -x^2.$$

Az első feltétel szerint $x^2\le y$, a második alapján $y\le -x^2$.



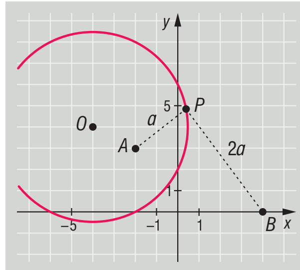
3774 *a)* A feltételnek eleget tevő pontok halmaza az AB szakasz felező-merőlegese. Ennek egyenlete:

$$2x-y=\frac{1}{2}.$$



b) Ha a $P(x; y)$ pont eleget tesz a feltételnek, akkor:

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}=\frac{1}{2}.$$



Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$\frac{(x+2)^2+(y-3)^2}{(x-4)^2+y^2}=\frac{1}{4}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt a törtek nevezőjével:

$$4(x+2)^2+4(y-3)^2=(x-4)^2+y^2,$$

végül végezzük el a kijelölt műveleteket, és így adódik, hogy

$$3x^2+3y^2+24x-24y+36=0,$$
$$x^2+y^2+8x-8y+12=0.$$

A kapott egyenletben teljes négyzeteket kialakítva:

$$(x+4)^2+(y-4)^2=20.$$

A fenti egyenlet az $O(-4; 4)$ középpontú, $r=2\cdot\sqrt{5}$ sugarú kör egyenlete.
Átalakításaink végig ekvivalensek voltak, ami mutatja, hogy a $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor tesz eleget az $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$ feltételnek, ha illeszkedik a fent meghatározott körre.

3775 *a)* A parabola egyenlete a következő alakban is felírható:

$$y=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a-1,\quad \text{amiből}\quad y-\left(-\frac{a^2}{4}+a-1\right)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2.$$

A fenti egyenlet mutatja, hogy a parabola tengelypontjának koordinátái:

$$T\left(\frac{a}{2}; -\frac{a^2}{4}+a-1\right).$$

b) Vegyük észre, hogy az *a)* feladatban meghatározott T pontok koordinátái kielégítik az

$$y=-x^2+2x-1,\quad \text{azaz}\quad y=-(x-1)^2$$

egyenletet. A felírt egyenlet parabola egyenlete, így a T tengelypontok parabolára illeszkednek. Könnyen belátható az is, hogy a most kapott parabola minden pontja az *a)* feladatban felírt parabolák valamelyikének tengelypontja. Eredményünk alapján a T pontok halmaza parabola.

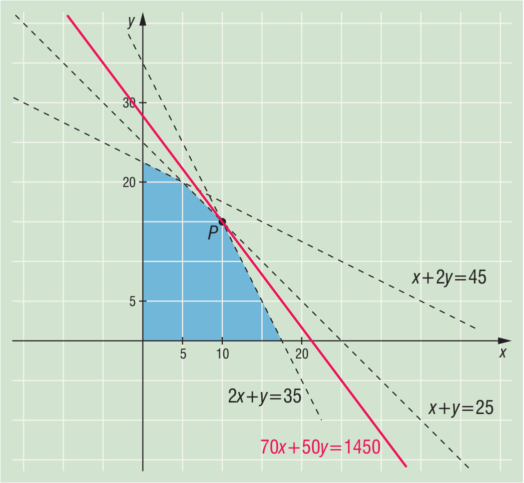
c) Ismét átalakítva a felírt parabola egyenletét:

$$y=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+a-1,\quad \text{amiből}\quad y-(a-1)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2.$$

A parabola tengelypontjának koordinátái ezúttal:

$$T\left(\frac{a}{2}; a-1\right)$$

A T pont koordinátái ezúttal az $y=2x-1$ egyenletnek tesznek eleget. Mivel egyenes egyenletét kaptuk, ezért ebben az esetben a tengelypontok halmaza az $y=2x-1$ egyenletű egyenes. Ezúttal is szükséges megjegyeznünk, hogy az egyenes bármely pontja egy alkalmasan választott parabola tengelypontjával esik egybe.



3776 *a)* Jelölje x az A sütemények, y pedig a B sütemények számát.

Ekkor a feltételek szerint a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \text{továbbá} \quad x, y \in \mathbb{Z};$$
$$x + 2y \leq 45 \text{ (a liszt mennyiségére)};$$
$$2x + y \leq 35 \text{ (a cukor mennyiségére)};$$
$$x + y \leq 25 \text{ (a margarin mennyiségére)}.$$

A nyereséget az alábbi kétváltozós függvény írja le:

$$f(x, y) = 70x + 50y.$$

Feladatunk tehát a fenti öt egyenlőtlenség teljesülése mellett az f függvény maximumának meghatározása.

Az első két egyenlőtlenség együtt a koordináta-rendszer első síknegyedét írja le. Ha a többi egyenlőtlenségben a relációjelet egyenlőségre cseréljük, akkor mindegyik feltétel egy-egy egyenes egyenletét adja. Ha közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk a megfelelő egyeneseket, akkor láthatjuk, hogy az öt egyenlőtlenséget egyidejűleg egy konvex ötszög belső, illetve határpontjainak koordinátái elégítik ki (ld. ábra). Ebben a tartományban keressük azt a $P(x; y)$ pontot, amelynek koordinátáira az $f(x, y)$ érték a lehető legnagyobb.

Vegyük észre, hogy bármely rögzített c valós számra az $f(x, y) = c$, vagyis a $70x + 50y = c$ egyenlet egy $\vec{n}(7; 5)$ normálvektorú egyenes egyenlete. Ha egy-egy ilyen egyenes belemetsz az ötszögbe, akkor a kapott pontokra az f függvény értéke állandó.

Észrevételünk alapján az $\vec{n}(7; 5)$ normálvektorú párhuzamos egyenes-sereg tagjai közül keressük azt, amely belemetsz az ötszögbe, továbbá (például) x tengellyel való metszete a lehető legnagyobb. Az ábra alapján is meggyőződhetünk arról, hogy a keresett egyenes áthalad az ötszög $P(10; 15)$ koordinátájú csúcsán. Ekkor:

$$70x + 50y = 1450.$$

A maximális nyereség elérése érdekében az A süteményből 10, a B süteményből 15 darabot kell készíteni.

b) A maximális nyereség 1450 Ft.

11.6. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Klasszikus valószínűségi modell – megoldások

3777 *a)* Igen.

b) Nem, a valószínűség:

$$P\left(\overline{A+B}\right)=1-P(A+B)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}.$$

c) Nem, a valószínűség:

$$1-P(A+B)=1-\frac{11}{32}=\frac{21}{32}.$$

3778 $P(\text{legalább egy piros})=1-P(\text{nincs piros})=1-\dfrac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}7.$

3779 $\dfrac{20}{20+t}<0{,}2,\quad \text{innen}\quad 80<t.$

3780 $1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}.$

3781 $1-\dfrac{2}{108}=\dfrac{53}{54}.$

3782 $P(A)=\dfrac{1}{\binom{90}{5}}\approx 0{,}000000022 \quad < \quad P(B)=\dfrac{1}{\binom{45}{6}}\approx 0{,}000000122 \quad < \quad P(C)=\dfrac{1}{3^{14}}\approx 0{,}000000209.$

3783 $1-\left[P(0\text{ találat})+P(1\text{ találat})\right]=1-\left[\dfrac{\binom{5}{0}\cdot\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}+\dfrac{\binom{5}{1}\cdot\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}\right]\approx 0{,}0233.$

3784 $1-\left[P(0\text{ találat})+P(1\text{ találat})+P(2\text{ találat})\right]=1-\left[\dfrac{\binom{6}{0}\cdot\binom{39}{6}}{\binom{45}{6}}+\dfrac{\binom{6}{1}\cdot\binom{39}{5}}{\binom{45}{6}}+\dfrac{\binom{6}{2}\cdot\binom{39}{4}}{\binom{45}{6}}\right]\approx 0{,}0238.$

3785 $P(10)+\ldots+P(13+1)=\dfrac{\binom{13}{10}\cdot 2^3\cdot 3}{3^{14}}+\dfrac{\binom{13}{11}\cdot 2^2\cdot 3}{3^{14}}+\dfrac{\binom{13}{12}\cdot 2^1\cdot 3}{3^{14}}+\dfrac{2}{3^{14}}+\dfrac{1}{3^{14}}\approx 0{,}0016.$

3786 $P(\text{fémtető})=1-\left[P(\text{fekete alj})-P(\text{fekete alj és fémtető})\right]=0{,}48.$

3787 $P(\text{PF}) = P(\text{P}) + P(\text{F}) - 1 = 0{,}6 + 0{,}75 - 1 = 0{,}35$. Innen: 35 db.

3788 $P(\text{Peti nyer}) = p$. Ekkor $3p = 1 - p$, amiből $p = 0{,}25$ és így $P(\text{Gabi nyer}) = 1 - p = 0{,}75$.

3789 $P(\text{Hapci nyer}) - 0{,}3 = 1 - P(\text{Hapci nyer})$, ebből $P(\text{Hapci nyer}) = 0{,}35$. Tehát Hapci 13-szor, Vidor pedig 7-szer nyer.

3790 $P(\text{Peti nyer}) = p$. Ekkor $p + 2p + 3p = 1$, amiből $p = \dfrac{1}{6}$. Tomi 0,5 valószínűséggel nyer.

3791 Csaba 0 valószínűséggel nyer.

3792 $1 - \dfrac{7+8+5}{25} = 0{,}2.$

3793 $1 - (0{,}25 + 0{,}16 + 0{,}28) = 0{,}31.$

3794 *a)* A közös nevező 420. Ennyi darab (vagy ennek többszöröse) gyümölcsnek kell a ládában lennie.

b) $1 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}\right) = \dfrac{31}{420} < \dfrac{1}{3}.$

3795 *a)* $P(\text{lapos}) = 1 - [P(\text{lyukas}) + P(\text{kerek}) + P(\text{tömör})] = 1 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{15}\right) = \dfrac{6}{15}.$

b) Tizenöt darab.

3796 $\left(\dfrac{7}{8}\right)^4 \approx 0{,}5862.$

3797 $p^4 = \dfrac{1}{81}$, amiből $p = \dfrac{1}{3}$. Pontosan kétszer.

3798 $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177.$

3799 *a)* $1 - 0{,}8^8 \approx 0{,}8322.$ *b)* $(1 - 0{,}8)^8 \approx 0{,}00000256.$

3800 $1 - p^5 = 0{,}99999$, amiből $p = 0{,}1$.

3801 $\Omega = \left\{\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \ldots; \dfrac{29}{3}\right\}$, $A = \left\{\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \ldots; \dfrac{5}{3}\right\}$, $P(A) = \dfrac{5}{29}.$

3802 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A0}$: $p = \dfrac{3}{54} = \dfrac{1}{18}.$

3803 *a)* Egy csomag 32 lapos kártyapakliban négy ász, négy tízes és négy hetes lap található. Ha egyetlen értékes lap sincs a kezünkben, akkor az említett 12 lapon kívüli 20 darab lapból kell a leosztáskor kapnunk négyet. Ez a feladat által kérdezett kedvező esemény, az összes esetek száma pedig $\dbinom{32}{4}$. Így a keresett valószínűség:

$$P(\text{nincs értékes lap}) = \frac{\dbinom{20}{4}}{\dbinom{32}{4}} \approx 0{,}1347.$$

b) Ha legalább egy értékes lap kerül a kezünkbe, akkor az lehet egy, kettő, három vagy akár négy darab ász, tízes, hetes is. Ez több eset, sokkal egyszerűbb, ha kiszámoljuk az ellentett esemény valószínűségét (egy eset), majd kivonjuk 1-ből. Az ellentett esemény pedig éppen az *a)* pontban tárgyalt eset:

$$P(\text{van értékes lap}) = 1 - \frac{\binom{20}{4}}{\binom{32}{4}} \approx 0{,}8653.$$

c) A „legfeljebb három" értékes lap ismét több esetből tevődik össze: három, kettő, egy vagy nulla értékes lap van a leosztott négy lap között. Ismét egyszerűbb, ha áttérünk a komplementer esemény valószínűségének kiszámítására. Az, hogy mind a négy lap értékes $\binom{12}{4}$-féleképp lehet. Azaz:

$$P(\text{legfeljebb három értékes lap}) = 1 - \frac{\binom{12}{4}}{\binom{32}{4}} \approx 0{,}9862.$$

3804 *a)* Jelölje V a vörös hajú, S a szemüveges klubtagok közül egy fő kiválasztásának eseményét. Ekkor $P(V) = 0{,}82$ és $P(S) = 0{,}76$. Ismert, hogy a klubban minden tag bírja valamelyik tulajdonságot. Ezért

$$1 = P(V + S) = P(V) + P(S) - P(VS),$$

ahonnan egyszerű behelyettesítés után $P(VS) = 0{,}58$.

b) Már tudjuk:

$$P(VS) = 0{,}58 = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}.$$

A szöveg szerint a klubnak 50 tagja van – ha ez az összes esetek száma, akkor 29 a kedvező esetek száma, azaz 29 mindkét tulajdonságot bíró egyén jár ebbe a klubba.

3805 Jelölje K azt az eseményt, hogy Teréz az ismerősei közül éppen kígyóbűvölőre, H pedig azt, hogy hastáncosokra kattint. Tudjuk, hogy $P(H) = 0{,}6$ és a $K + H$ esemény komplementerének 0,1 a valószínűsége. Azaz H, K és $\overline{K + H}$ lefedi Teréz összes ismerősét a weblapon.

Formulába öntve:

$$1 = P(\text{csak } K) + P(H) + 0{,}1.$$

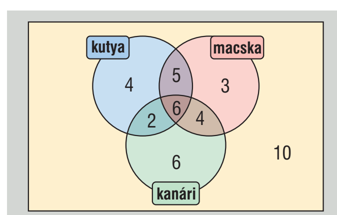
Innen adódik:

$$P(\text{csak } K) = 0{,}3 = \frac{3}{10} = \frac{30}{100}.$$

Ha tudjuk még azt is, hogy a számlálóban levő 30 a kedvező esetek száma, akkor a nevezőben csak az összes esetek száma lehet. Tehát a megoldás: ezen a napon ünnepelte Teréz, hogy immáron 100 ismerőssel büszkélkedhet.

3806 Készítsünk halmazábrát. A megoldás innen leolvasható:

$$P = \frac{11}{40}.$$



3807 Fontos az elején rögzítenünk, hogy Edének egy telefonszáma van, ez adja meg a kedvező esetek számát. Ferenc nem tudja, hogy mi a hívószám első két jegye (20, 30 vagy 70), ez 3 lehetőség. Két dologra emlékszik:

1. A következő 5 helyen van két 1-es, két 2-es és egy 4-es, ami $\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}=30$ lehetőség.
2. Az utolsó hét számjegyből álló szám hárommal osztható. Mivel ebből az első öt jegy összege 10, ezt az utolsó két számjeggyel úgy kell kiegészíteni, hogy 3-mal osztható legyen. Jó például a 02, 05, 08, 11, 14, 17, … végződés és így tovább, az utolsó szóba kerülő érték a 98. Ez összesen 32 darab szám.

Az összes feltételnek megfelelő hívószámok száma így $3\cdot 30\cdot 32=2880$. A megoldás:

$$P=1-\frac{1}{2880}\approx 0{,}999652.$$

3808 *a)* Jelölje a lovasok darabszámát n. Így az első lovas kivételének a valószínűsége: $\frac{n}{20+n}$. A másodiké már $\frac{n-1}{19+n}$, hiszen eggyel kevesebb lovas katona van, és eggyel kevesebb az összes ólomkatona száma is. Felírható a következő egyenlet:

$$\frac{1}{30}=\frac{n}{20+n}\cdot\frac{n-1}{19+n}.$$

Átalakítva másodfokú egyenletté:

$$0=29n^2-69n-380 \quad\Rightarrow\quad n_{1,2}=\frac{69\pm 221}{58}.$$

Csak az 5-öt fogadhatjuk el a részfeladat megoldásának, a negatív törtet nem.

b) Az előző részfeladat alapján eredetileg 20 gyalogos és 5 lovas katona volt a dobozban. Ha Jani minden lépésben kivesz a dobozból egy gyalogos katonát és beletesz egy lovast, akkor a dobozban levő katonák száma nem változik, mindig 25 marad. Viszont a lovasok száma lépésről lépésre növekszik, m lépés esetén $5+m$ lesz. Ezért az első lovas kivételének a valószínűsége $\frac{5+m}{25}$, a másodiké már $\frac{4+m}{24}$. Azt keressük, hogy a szorzatuk mikor növekedik 0,5 fölé:

$$\frac{5+m}{25}\cdot\frac{4+m}{24}>0{,}5.$$

Kifejtve és rendezve:

$$m^2+9m-280>0.$$

Megoldva az egyenlőtlenséget, $m<-21{,}8$ vagy $m>12{,}8$ egy tizedesre kerekítve. Vagyis Janinak legalább 13 cserét végre kellett hajtania. ($m=13$ esetén a keresett valószínűség éppen 0,51.)

3809 *a)* A feladat szövegében szerepel a „legalább egyet” kifejezés, ezért térjünk át a komplementer eseményre: „egyet sem”. Annak a valószínűsége, hogy a villamos vezetője egy ajtót sem nyit ki a nyolcból: $(1-p)^8$. Így a kérdezett valószínűség:

$$1-(1-p)^8.$$

b) Meg kell oldanunk a következő egyenlőtlenséget:

$$1-(1-p)^8>0{,}5.$$

Rendezve és nyolcadik gyököt vonva:

$$0{,}917>1-p \quad\Rightarrow\quad p>0{,}083.$$

Ha ezen kis valószínűségnél nagyobb valószínűséggel nyit ki egy ajtót, akkor már 0,5-nél nagyobb valószínűséggel nyit ki legalább egyet egy állomáson.

3810 Jelöljük a szóba kerülő eseményeket a következőképpen. Szerénke Károly bácsi ölében ül: SK. Lukrécia Károly bácsi ölében ül: LK. Szerénke Irma néni ölében ül: SI. Lukrécia Irma néni ölében ül: LI. A feltételek szerint ez a négy esemény kizárja egymást.

a) A szöveg szerint $P(SK) = 0{,}2$ és $P(LK) = 0{,}15$, valamint $P(SI + LI) = 0{,}55$. A kérdés azt firtatja, hogy mekkora valószínűséggel nem ül macska az öregek ölében, azaz a megadottak összegének komplementerét. Számítsuk ki hát:

$$P(\text{senki ölében nem ül macska}) = 1 - P(SK + LK + SI + LI) =$$
$$= 1 - (0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}55) = 0{,}1.$$

b) Tekintsük a táblázatot, amiben $P(SI) = x$, $P(LI) = y$. Ekkor a feltételek szerint

$$x + y = 0{,}55,$$

továbbá

$$y + 0{,}15 > x + 0{,}2,$$

mégpedig 0,1-del.

	Károly bácsi ölében	**Irma néni ölében**	
Szerénke	0,20	x	$x + 0{,}20$
Lukrécia	0,15	y	$y + 0{,}15$
	0,35	**0,55**	

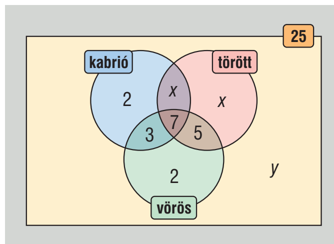
Meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0{,}55 \\ y + 0{,}15 &= x + 0{,}2 + 0{,}1 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldása: $x = 0{,}2$ (és $y = 0{,}35$). Azaz Szerénke ugyanakkora valószínűséggel ül mindkét öreg ölében.

3811 Rajzoljunk halmazábrát, és töltsük ki belülről kifelé haladva. Vörös törött kabrióból a megadott valószínűség alapján 7-et találunk, vörös kabrióból pedig 10-et (így nem törött vörös kabrió 3 van). Hasonlóan 2 darab jó állapotú nem vörös színű kabriót találunk és ugyanennyi jó állapotú, vörös színű, de nem kabrió sportkocsit.

Azt is tudjuk, hogy van 5 darab törött, vörös nem kabrió autó a versenyen. A maradék két helyre ugyanazt a számot kell írnunk, és összesen 25 autó indult. Ebből adódik, hogy x 0, 1, 2 vagy 3 lehet. Ekkor pedig y lehet rendre 6, 4, 2 vagy 0. A lehetséges valószínűségeket a táblázatban találjuk.



x	0	1	2	3
P	0,24	0,16	0,08	0

3812 *a)* Annak a valószínűsége, hogy egy szoba takarítható, illetve annak is, ha nem, egyaránt 0,5. A „legalább egy szoba takarítható” kitétel miatt érdemes áttérnünk a komplementer esemény valószínűségére: „egy szoba sem takarítható”. Ez utóbbinak a valószínűsége n szoba esetén $0{,}5^n$. Mivel ez a komplementer esemény, így a következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$1 - 0{,}5^n > 0{,}999.$$

Átrendezve:

$$0{,}001 > 0{,}5^n.$$

Mindkét oldalnak véve a 0,5 alapú logaritmusát, a relációjel megfordul (az $f(x) = \log_{0{,}5} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő):

$$\log_{0{,}5} 0{,}001 < n.$$

Előbbi értéke:

$$\frac{\lg 0{,}001}{\lg 0{,}5} \approx 9{,}966.$$

Így legalább 10 szoba van a hotelben.

b) Jelölje p annak a valószínűségét, hogy egy szoba a személyzet számára megközelíthető, és legyen a hotelben n szoba. Két ismeretlen van, így szükségünk lesz két egyenletre is. Az első feltételnek („legalább egy szoba”) vegyük a komplementer eseményét, ekkor

$$1 - p^n = 0{,}79.$$

A második feltétel egyszerűbb:

$$(0{,}75 \cdot p)^{n+2} = 0{,}01.$$

Meg kell tehát oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} p^n &= 0{,}21 \\ (0{,}75 \cdot p)^{n+2} &= 0{,}01 \end{aligned}\right\}.$$

Vegyük mindkét egyenlet mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát (ezt megtehetjük, hiszen a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés). Használjuk ki a logaritmus azonosságait is:

$$\left.\begin{aligned} n \cdot \lg p &= \lg 0{,}21 \\ (n+2) \cdot (\lg p + \lg 0{,}75) &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

Életünk egyszerűbbé tételéhez vezessük be a $\lg p = x$ jelölést (a feladat amúgy sem kérdezi a valószínűség értékét):

$$\left.\begin{aligned} n \cdot x &= \lg 0{,}21 \\ (n+2) \cdot (x + \lg 0{,}75) &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

Megjegyzés: Alkalmazhatjuk azt a trükköt is, hogy $\lg 0{,}21$ és $\lg 0{,}75$ helyére is betűket írunk és paraméterként számolunk velük. Így elegendő csak a végeredmény közvetlen kiszámításakor behelyettesíteni őket.

Az egyenletrendszer megoldásakor érdemes az első egyenletből kifejezni az x ismeretlent, és behelyettesíteni azt a második egyenletbe. Így az alábbi másodfokú egyenlethez jutunk:

$$\lg 0{,}75 \cdot n^2 + (\lg 0{,}21 + 2 \cdot \lg 0{,}75 + 2) \cdot n + 2 \cdot \lg 0{,}21 = 0.$$

Ennek megoldásai: $n_1 = 1{,}5$ és $n_2 = 7{,}0$. Az 1,5 értéket nem fogadjuk el, a hotelben tehát jelenleg hét szoba van.

3813 Vegyük észre, hogy a függvény átalakítható $f(x) = (x - A) \cdot (x - B)$ alakúvá. Ilyen formában már tudjuk a zérushelyeket is: $x_1 = A$ és $x_2 = B$. Mit tudunk A és B számokról? $A < B$ egészek, továbbá $1 \le A,\ B \le 9$.

Az összes esetek száma: $8 + 7 + 6 + \ldots + 1 = 36$. A táblázatban látjuk a magyarázatot is:

***A* értéke**	8	7	6	5	4	3	2	1
***B* lehet**	9	8, 9	7, 8, 9	6, 7, 8, 9	5, …, 9	4, …, 9	3, …, 9	2, …, 9
Számuk	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

A kedvező esetek számához is írjunk fel egy hasonló táblát:

***A* értéke**	1	2	3	4	5
***B* lehet**	5, 6, 7, 8, 9	6, 7, 8, 9	7, 8, 9	8, 9	9
Számuk	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

A kedvező esetek száma: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

A keresett valószínűség tehát $\dfrac{15}{36}$.

3814 *a)* Először is próbáljuk meg rendszerezni az adatokat. Talán a legjobb, ha készítünk egy táblázatot, hiszen mindhárom ládában ugyanolyan méretű csavarokat találunk. Fontos megjegyeznünk, hogy a táblázatban található események egymást kizáró események, így valószínűségeik összeadhatók.

	1. ládában	2. ládában	3. ládában	Összesen
10-es csavar	50	10	20	**80**
12-es csavar	70	x	40	**110 + x**
14-es csavar	30	80	y	**110 + y**
Összesen	**150**	**90 + x**	**60 + y**	**300 + x + y**

Ha minden láda tartalma kiborul a földre, akkor $\dfrac{x}{300+x+y}$ valószínűséggel fogunk közülük felvenni a második ládából való tizenkettes csavart és $\dfrac{y}{300+x+y}$ valószínűséggel a harmadik ládából való tizennégyes csavart. Ez a kettő is összeadható, így a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{x}{300+x+y}+\frac{y}{300+x+y}=\frac{1}{3}.$$

Furcsának tűnhet, hogy nincs két egyenletünk, de ha jobban belegondolunk, nincs is rá szükség. Az *a)* kérdés ugyanis azt firtatja, hogy mennyi csavarunk van összesen, aminek megválaszolásához elegendő az $x+y=z$ összeg kiszámítása:

$$\frac{z}{300+z}=\frac{1}{3}.$$

Ennek megoldása: $z=150$, vagyis összesen 450 csavar van a három ládában.

b) A második kérdésben módosul a táblázatunk. Immár csak egy ismeretlennel kell számolni, hiszen Sanyi a harmadik ládában található összes tizennégyes csavart felhasználta.

	1. ládában	2. ládában	3. ládában	Összesen
10-es csavar	50	10	20	**80**
12-es csavar	70	x	40	**110 + x**
14-es csavar	30	80	0	**110**
Összesen	**150**	**90 + x**	**60**	**300 + x**

Mivel a 3. ládában nincs 14-es, egy-egy különböző méretű csavart négyféleképpen lehet kivenni a három ládából. A táblázat a négy esetet tartalmazza.

	A húzott csavar			
1. ládából	14	12	14	10
2. ládából	12	14	10	14
3. ládából	10	10	12	12

Ezen esetek valószínűségeire:

$$\frac{30}{110}\cdot\frac{x}{110+x}\cdot\frac{20}{80}+\frac{30}{110}\cdot\frac{40}{110+x}\cdot\frac{10}{80}+\frac{80}{110}\cdot\frac{70}{110+x}\cdot\frac{20}{80}+\frac{80}{110}\cdot\frac{40}{110+x}\cdot\frac{50}{80}=\frac{40}{187}.$$

A lehetséges egyszerűsítések és összevonások után:

$$\frac{6x+2840}{88\cdot(110+x)}=\frac{40}{187},\qquad \text{amiből}\qquad x=60.$$

A második ládában így eredetileg 60 tizenkettes, a harmadik ládában 90 tizennégyes csavar volt.

c) A kérdés megválaszolásához vizsgáljuk meg az előbb kapott $\dfrac{6x+2840}{88\cdot(110+x)}$ kifejezést (függvényt). Alakítsuk át, hogy jobban lássuk a reciprokfüggvényt:

$$f(x)=\frac{6x+2840}{88\cdot(110+x)}=\frac{3}{44}\cdot\frac{x+110+\frac{1090}{3}}{x+110}=\frac{3}{44}\cdot\left(1+\frac{\frac{1090}{3}}{x+110}\right)=\frac{3}{44}+\frac{\frac{1090}{44}}{x+110}.$$

A fenti függvény írja le a kérdezett valószínűség változását a második ládában levő tizenkettes csavarok x számának függvényében. Amennyiben $x=0$, úgy $f(0)\approx 0{,}2934$, majd a függvény szigorúan monoton csökken, de nem éri el a $\dfrac{3}{44}\approx 0{,}0682$ értéket – hiszen mindig adunk hozzá egy pozitív, de egyre kisebb számot.

Megjegyzés: Ha ábrázoljuk, a függvény hozzávetőleges ábrája is szemlélteti az eredményeket.

Visszatevéses mintavétel – megoldások

3815 *a)* $0{,}87^5\approx 0{,}4982$; *b)* $0{,}13^5\approx 0{,}000037$.

3816 *a)* $0{,}3^6=0{,}000729$; *b)* $0{,}7^6=0{,}117649$.

3817 *a)* $4\cdot 0{,}35^3\cdot 0{,}65=0{,}111475$; *b)* $7\cdot 0{,}35\cdot 0{,}65^6\approx 0{,}1848$.

3818 *a)* $3\cdot\left(\dfrac{19}{20}\right)^2\cdot\dfrac{1}{20}=0{,}135375$; *b)* $9\cdot\dfrac{19}{20}\cdot\left(\dfrac{1}{20}\right)^8\approx 3{,}34\cdot 10^{-10}$.

3819 $\dbinom{10}{7}\cdot\left(\dfrac{24}{30}\right)^7\cdot\left(\dfrac{6}{30}\right)^3\approx 0{,}2$.

3820 *a)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\approx 0{,}0041$; *b)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\approx 0{,}0494$;

c) $5\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\cdot\dfrac{2}{3}\approx 0{,}0412$.

3821 $P(A)=\dbinom{20}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^3\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^{17}\approx 0{,}1901\ >\ P(B)=\dbinom{25}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^4\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^{21}\approx 0{,}1384$.

3822 $P(A)=\dbinom{7}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\ =\ P(B)=\dbinom{7}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\ \approx\ 0{,}2734$.

3823 *a)* $p_{\text{fej}}{}^2=0{,}49\ \Rightarrow\ p_{\text{fej}}=0{,}7$; *b)* $(1-p_{\text{fej}})^2=0{,}81\ \Rightarrow\ p_{\text{fej}}=0{,}1$.

3824 $\dbinom{10}{7}\cdot p^7\cdot(1-p)^3>\dbinom{10}{8}\cdot p^8\cdot(1-p)^2\ \Rightarrow\ \dfrac{8}{11}>p$.

3825 A „tízből legfeljebb nyolcat” kitétel miatt (ez kilenc elemi esemény) érdemes áttérnünk a komplementer eseményre, ami „tízből legalább kilencet”. Ez kilenc vagy tíz ászt jelent tíz szervából. Tudjuk, hogy az ász valószínűsége 0,2; így a megoldás:

$$P(\text{legfeljebb nyolc ász szerva})=1-\left[\binom{10}{9}\cdot 0{,}2^9\cdot 0{,}8^1+\binom{10}{10}\cdot 0{,}2^{10}\cdot 0{,}8^0\right]\approx 0{,}999996.$$

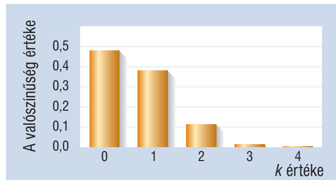
3826 Az összetett számok közül csak a 4-et és a 6-ot dobhatjuk, így az „összetett dobás” valószínűsége $\frac{1}{3}$.
Mivel legalább kétszer szeretnénk ezt dobni, így az eseményt hét elemi esemény alkotja: 2, 3, 4, 5, 6, 7 vagy 8 alkalommal dobunk összetett számot. Ez elég sok esemény. Térjünk át a komplementerre, ahol csak két esetet kell kiszámolnunk: amikor nincs összetett szám és amikor csak egy darab van. A keresett valószínűség:

$$P(\text{legalább kétszer dobunk összetett számot}) = 1 - \left[\binom{8}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{8}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^7\right] \approx 0{,}8050.$$

3827 Ne ugorjunk be a feladatnak! Bár a szövegben szerepel a „legalább” kifejezés, ez pont így jelent kevesebb esetet. A „hétből legalább öt” találat az öt, hat vagy hét találatot (3 elemi esemény) foglalja magában, ellentétben a komplementerével, ami a 0, 1, 2, 3, 4 (5 elemi esemény) eseteket foglalja magában. A megoldás így:

$$P(\text{legalább öt találat}) = \binom{7}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^2 + \binom{7}{6}\cdot 0{,}3^6\cdot 0{,}7^1 + \binom{7}{7}\cdot 0{,}3^7\cdot 0{,}7^0 \approx 0{,}0288.$$

3828 Ha négyszer dobunk a kockával, akkor dobhatunk 0, 1, 2, 3 vagy 4 hatost. Fel kell írnunk minden eset valószínűségét, majd ábrázolnunk őket oszlopdiagramon. Az egyszerűség kedvéért jelölje k, hogy hány hatost dobtunk a négy dobásból.



Megjegyzés: Az itt megadott eseményeket együtt teljes eseményrendszernek nevezzük.

$$P(k=0) = \binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}482253;\quad P(k=1) = \binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}385802;$$

$$P(k=2) = \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}115741;\quad P(k=3) = \binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 \approx 0{,}015432;$$

$$P(k=4) = \binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0 \approx 0{,}000772.$$

3829 A dolgozatnak nyolc feladata van, ezek közül 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 darabot tudhat Jani. Ezt a kilenc esetet kell áttekintenünk, és kiválasztani közülük a legnagyobb valószínűséggel bekövetkezőt. Most k azt jelöli, hogy Jani hány feladatot tud megoldani a dolgozat nyolc példájából.

$$P(k=0) = \binom{8}{0}\cdot 0{,}6^0\cdot 0{,}4^8 \approx 0{,}000655;\quad P(k=1) = \binom{8}{1}\cdot 0{,}6^1\cdot 0{,}4^7 \approx 0{,}007864;$$

$$P(k=2) = \binom{8}{2}\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4^6 \approx 0{,}041288;\quad P(k=3) = \binom{8}{3}\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}4^5 \approx 0{,}123863;$$

$$P(k=4) = \binom{8}{4}\cdot 0{,}6^4\cdot 0{,}4^4 \approx 0{,}232243;\quad P(k=5) = \binom{8}{5}\cdot 0{,}6^5\cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}278692;$$

$$P(k=6) = \binom{8}{6}\cdot 0{,}6^6\cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}209019;\quad P(k=7) = \binom{8}{7}\cdot 0{,}6^7\cdot 0{,}4^1 \approx 0{,}089579;$$

$$P(k=8) = \binom{8}{8}\cdot 0{,}6^8\cdot 0{,}4^0 \approx 0{,}016796.$$

Jani a legnagyobb valószínűséggel öt feladatot fog jól megoldani a dolgozat során. Ám akkor sem lepődünk meg, ha négy vagy hat feladattal birkózik meg.

Megjegyzés: Figyeljük meg, mennyire kevés a szélső esetek valószínűsége! A 0, 1, 8 esetek valószínűségei együtt nem érik el a 0,02-ot.

3830 Jelölje például egy dobás esetén a fej valószínűségét p. Mivel annak az esélye, hogy két dobásból egy fej és egy írás lesz, $0{,}18$, a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$P(k=1)=\binom{2}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^1=0{,}18.$$

Nem muszáj felírni a fenti formulát, elegendő két dolgot meggondolnunk. Ha p valószínűsége van a fejnek, akkor $(1-p)$ van az írásnak. Másrészt vagy elsőre, vagy másodikra dobunk fejet, ami két eset. Így ugyanazt az egyenletet kapjuk kicsit egyszerűbben:

$$2\cdot p\cdot(1-p)=0{,}18.$$

Bármelyik egyenletet átalakítva:

$$0=p^2-p+0{,}09.$$

Megoldásai: $p_1=0{,}9$ és $p_2=0{,}1$. Mindkét megoldás jó.

Megjegyzés: Azért kaptunk olyan számokat, melyek összege 1, mert a feladat szimmetrikus fejre és írásra.

3831 Jelölje p annak a valószínűségét, hogy egy sorsjeggyel nyerünk, k pedig a nyertes szelvények számát. Ekkor a „hatból kétszer nyerünk” esélye:

$$P(k=2)=\binom{6}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^4.$$

A „hatból kétszer veszítünk” esélye megegyezik a „hatból négyszer nyerünk” esélyével:

$$P(k=4)=\binom{6}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^2.$$

A szöveg szerint a formulák értékei egyenlőek:

$$\binom{6}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^4=\binom{6}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^2.$$

Egyszerűsítsünk p^2-tel és $(1-p)^2$-tel, majd a $\binom{6}{2}=\binom{6}{4}$ binomiális együtthatókkal:

$$(1-p)^2=p^2.$$

Mivel $0\le p\le 1$, így gyökvonás után elhagyható az abszolút érték:

$$1-p=p \quad\Rightarrow\quad p=0{,}5.$$

Ez egy nagyon jó sorsjegy, nagy valószínűséggel minden második nyer! Kár, hogy ilyen sorsjegyet a valóságban nem lehet kapni.

3832 Jelölje p az „egy dobásból ötöst dobunk” valószínűségét, k pedig, hogy hányszor következett be az „ötös dobás”. A „hét dobásból négy ötös” valószínűsége ekkor:

$$P(k=4)=\binom{7}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^3.$$

A „hét dobásból hat ötös” valószínűsége:

$$P(k=6)=\binom{7}{6}\cdot p^6\cdot(1-p)^1.$$

Azt szeretnénk, hogy a második nagyobb legyen, mint az első:

$$\binom{7}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^3<\binom{7}{6}\cdot p^6\cdot(1-p)^1.$$

Számítsuk ki a binomiális együtthatókat, majd egyszerűsítsünk, amivel csak lehet. Rendezzük egy oldalra az egyenlőtlenséget:

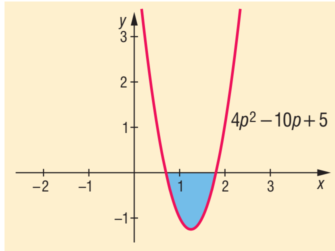
$$4p^2 - 10p + 5 < 0.$$

A megoldások: $p_1 \approx 1{,}81$ és $p_2 \approx 0{,}69$. A másodfokú egyenlőtlenség megoldásához ábrázoljuk a kifejezéssel leírható parabolát. Azt keressük, ahol a kifejezés 0-nál kisebb (azaz, ahol az x tengely „alatt” található):

$$0{,}69 < p < 1{,}81.$$

Ám mivel p valószínűség, értéke legfeljebb 1 lehet, amit el is érhet. Tehát a végső megoldás:

$$0{,}69 < p \le 1.$$



3833 Jelölje az írás valószínűségét egy feldobás esetén x. Ezt az x értéket úgy szeretnénk megadni, hogy az írás maximális valószínűséggel következzen be hat dobásból ötször.

Meg kell hát adnunk egy függvényt, amely x változó függvényében leírja a keresett valószínűséget. A binomiális eloszlást hívjuk segítségül:

$$f(x) = \binom{6}{5} \cdot x^5 \cdot (1 - x) = 6x^5 \cdot (1 - x) = 6 \cdot \left(x^5 - x^6\right).$$

Ez egy hatodfokú függvény. Természetesen adódik $f(x)$ értelmezési tartományára a $[0;\, 1]$ zárt intervallum, hiszen x az írás valószínűsége. A függvény mindenütt pozitív, kivéve a két zérushelyet: $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Ezen függvénynek keressük a maximumát.

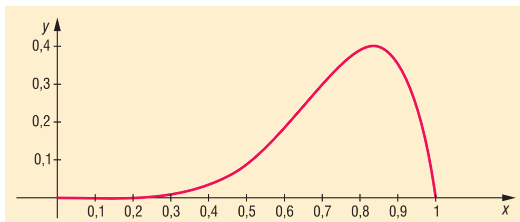
Ilyen magas fokú görbéket (még) nem áll módunkban elemezni, ezért hagyatkozzunk a számítógép vizsgálatára.

Eszerint a függvény maximumhelye:

$$x_{\max} = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333,$$

a maximum értéke pedig

$$y_{\max} = f\left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}4019.$$



Amennyiben ezt állítjuk be az érmén az írás valószínűségének, akkor nagy valószínűséggel hat dobásból ötször fogunk írást kapni.

Megjegyzés: Ha majd tanulunk deriválni, akkor deriválással egyetlen sorban megoldhatjuk a feladatot:

$$f'(x) = 6 \cdot \left(x^5 - x^6\right)' = 6 \cdot \left(5x^4 - 6x^5\right) = 6 \cdot x^4 \cdot (5 - 6x).$$

Az eredeti függvénynek ott van szélsőértéke, ahol az első derivált nulla, és előjelet vált. Jelen esetben ez a már felírt értékre következik be.

3834 Ha a hatból két faluban nincs sem fel-, sem leszálló utas, akkor négy helyen van. A keresett egyenlet:

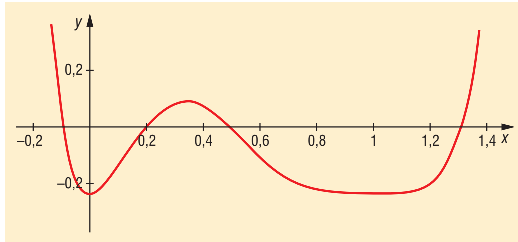
$$\binom{6}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^4 = 0{,}01536 \cdot 2^4 = 0{,}24576.$$

A binomiális együtthatót számoljuk ki, fejtsük ki a zárójelet a binomiális tétel alapján. Végezzük el a beszorzásokat, és rendezzük egy oldalra az egyenletet:

$$15p^6 - 60p^5 + 90p^4 - 60p^3 + 15p^2 - 0{,}24576 = 0.$$

Általában hatodfokú egyenletet nem tanultunk megoldani, és később sem fogunk. Lehetséges azonban közelítő megoldásokat keresni, a számítógép erre kiváló. A négy megoldásból minket csak az a kettő érdekel, amelyek a $[0;\,1]$ intervallumba esnek. Az egyik megoldás ráadásul véges:

$$p_1 = 0{,}2 \quad \text{és} \quad p_2 = 0{,}48769.$$



Megjegyzés: Ha behelyettesítjük az értékeket, akkor $p = 0{,}2$-re pontosan 0,24576-t kapunk, azonban $p = 0{,}48769$-re „csak" 0,245759487-t. Nem a számítógép tévedett, egyszerűen a kerekítés pontatlanságából adódik a megoldás hibája.

3835 Mivel a hét egybevágó körcikk bármelyikének kiforgatása $\frac{1}{7}$ valószínűséggel következik be, ennyi a főnyeremény valószínűsége is. Tételezzük fel, hogy a kilenc forgatásból k esetben következett be a főnyeremény:

$$\binom{9}{k} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^k \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{9-k} = 0{,}25.$$

Alakítsuk át a bal oldali kifejezést a hatványozás azonosságai szerint:

$$\binom{9}{k} \cdot \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^k}{\left(\frac{6}{7}\right)^k} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 0{,}25.$$

Folytatva ezt kapjuk:

$$\binom{9}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 0{,}25.$$

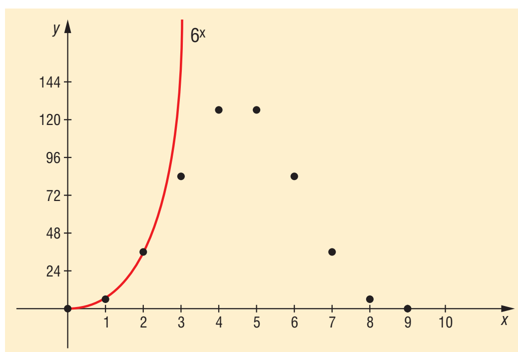
Osszunk le a kilencedik hatvánnyal (kerekítsünk), és szorozzunk át 6^k-nal:

$$\binom{9}{k} = 6^k.$$

I. megoldás. A 6^x exponenciális függvényről tudjuk, hogy szigorúan monoton növő. Szintén ismert, hogy a binomiális együttható értékei véges sokan vannak, és szimmetrikusak:

$$\binom{9}{k} = \binom{9}{9-k}.$$

Tehát $k = 4$ után nem növekedik tovább, hanem csökken. Két megoldást találunk: rögtön a $k = 0$ értékre teljesül az egyenlőség, majd $k = 2$-re is. A kifejezések tulajdonságai miatt több megoldás nincs.



II. megoldás. Fejtsük ki a binomiális együtthatót. Számlálójában 9! szerepel, amiben összesen négy darab 3-as prímtényezőt találunk. Ez azért érdekes, mert $6^k = 2^k \cdot 3^k$. Tehát k maximum 4 lehet. Ám ha hozzávesszük, hogy $k!$ vagy $(n-k)!$ egyike legalább 4!, akkor így az egyik 3-as prímmel le is egyszerűsítünk, azaz csak a $k = 0, 1, 2, 3$ eseteket szükséges megvizsgálni. Ezek közül $k = 0$ és $k = 2$ megoldás.

3836 *a)* A lehetséges esetek összegyűjtésekor az elvesztett 400 eurót kell 10 darab 50 eurós és/vagy 100 eurós, valamint 0 eurós részekre (partíciókra) bontanunk. 50 eurósból csak páros sok kerülhet a partíciókba, 100 eurós pedig legfeljebb négy.

100 eurós	4	3	2	1	0
50 eurós	0	2	4	6	8
0 eurós	6	5	4	3	2

b) A fenti táblázat oszlopainak valószínűségeit kell meghatározni és összegezni. Ez nem is olyan egyszerű! Gondoljuk meg: az eddigi feladatokban csak és kizárólag olyan kérdésekkel foglalkoztunk, amelyekben egy p valószínűségű esemény és annak $(1-p)$ valószínűségű komplementere szerepelt. Most viszont három eseményünk van. Nézzünk kicsit más szemmel a korábbi két esetre! Tekinthetjük úgy is, mint két eseményt, amelyek egymást kizárják, de egyben kiegészítik egymást a teljes eseménytérre – azaz teljes eseményrendszert alkotnak. Ezt már általánosíthatjuk három (de akár több) eseményre is:

$$p_1 = P(100 \text{ euró kifizetése}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3;$$

$$p_2 = P(50 \text{ euró kifizetése}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$p_3 = P(\text{nincs kifizetés}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Az eddigi formulák elején szereplő $\binom{n}{k}$ binomiális együttható kifejtve $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Ez azt jelenti, hogy a k darab eseményt és az $(n-k)$ darab komplementer eseményt pontosan ennyiféleképpen tudjuk sorba rakni (ismétléses permutáció). Természetesen olvashatjuk kiválasztásnak is: n helyre választunk ki k darab egyfajta elemet. (A két formula megegyezik.) Három elemre nem alkalmazhatjuk a kombinációs meggondolást, azonban alkalmazhatjuk az ismétléses permutációt! Például a fenti táblázat második oszlopát tekintve, az összes lehetséges sorba kell raknunk 3 darab 100 eurós, kettő darab 50 eurós és 5 darab 0 eurós kifizetést. Ezt pedig $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 5!}$-féleképpen tehetjük meg. Ezzel az eset felírásával készen vagyunk:

$$P(2.\text{ oszlop}) = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 5!}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}5^5 = 0{,}08505.$$

Ugyanígy fel kell írnunk a táblázat többi oszlopára is a valószínűségeket, majd ezeket összeadni. Az eredmények:

$$P(1.\text{ oszlop}) = \frac{10!}{4!\cdot 0!\cdot 6!}\cdot 0{,}3^4\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}5^6 = 0{,}026578;$$

$$P(3.\text{ oszlop}) = \frac{10!}{2!\cdot 4!\cdot 4!}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}5^4 = 0{,}02835;$$

$$P(4.\text{ oszlop}) = \frac{10!}{1!\cdot 6!\cdot 3!}\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}2^6\cdot 0{,}5^3 = 0{,}002016;$$

$$P(5.\text{ oszlop}) = \frac{10!}{0!\cdot 8!\cdot 2!}\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}2^8\cdot 0{,}5^2 = 0{,}0000288.$$

Összegük négy tizedesre kerekítve: $p = 0{,}1420$.

Megjegyzés: A két komplementer eseményből felírt összes eset valószínűségeit *binomiális eloszlásnak,* a több, teljes eseményrendszert alkotó eseményből felírt összes eset valószínűségeit együtt *polinomiális eloszlásnak* nevezzük.

Mintavétel visszatevés nélkül – megoldások

3837 $\dfrac{\binom{28}{2}}{\binom{30}{2}} \approx 0,869.$

3838 *a)* $\dfrac{\binom{27}{10}}{\binom{135}{10}} \approx 0,000000021;$ *b)* $\dfrac{\binom{108}{10}}{\binom{135}{10}} \approx 0,09832.$

3839 $\dfrac{\binom{7}{6}}{\binom{13}{6}} \approx 0,004.$

3840 $\dfrac{\binom{15}{4}}{\binom{27}{4}} \approx 0,0778.$

3841 $\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{17}{5}} \approx 0,0034.$

3842 $\dfrac{\binom{11}{4}}{\binom{17}{10}} \approx 0,017.$

3843 $\dfrac{\binom{27}{4} \cdot \binom{31}{4}}{\binom{58}{8}} \approx 0,2881.$

3844 $\dfrac{\binom{42}{7} \cdot \binom{21}{3}}{\binom{63}{10}} \approx 0,2807.$

3845 $\dfrac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{10}{5}} \approx 0,2381.$

3846 A „legalább 3” feltétel miatt össze kellene számolnunk a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 bogár esetek valószínűségeit, ez hosszadalmas. Jobban járunk, ha áttérünk a komplementer eseményre. Ebben csak a 0, 1, 2 esetek vannak. Így a keresett valószínűség:

$$1-\left[\frac{\binom{135}{15}\cdot\binom{92}{0}}{\binom{227}{15}}+\frac{\binom{135}{14}\cdot\binom{92}{1}}{\binom{227}{15}}+\frac{\binom{135}{13}\cdot\binom{92}{2}}{\binom{227}{15}}\right]\approx 0{,}9788.$$

3847 Mivel mindkét csapatból kell ott lennie játékosnak, így az öt fő a következő párosításokból állhat össze: 1–4, 2–3, 3–2, 4–1. Igazából csak a 0–5, 5–0 esetekben nem teljesül Klári megállapítása. Bár nem sok a direkt esetek száma sem, itt mi a komplementert írjuk fel:

$$1-\left[\frac{\binom{11}{5}\cdot\binom{11}{0}}{\binom{22}{5}}+\frac{\binom{11}{0}\cdot\binom{11}{5}}{\binom{22}{5}}\right]\approx 0{,}9649.$$

3848 A 17 fiú és a 23 lány együtt 40 fős csapatot képez.

a) A „csak azonos neműek” lehetnek csak fiúk vagy csak lányok. Mivel két egymást kizáró esetről van szó, valószínűségeiket egyszerűen összeadhatjuk:

$$\frac{\binom{17}{7}\cdot\binom{23}{0}}{\binom{40}{7}}+\frac{\binom{17}{0}\cdot\binom{23}{7}}{\binom{40}{7}}\approx 0{,}0142.$$

b) A lányok úgy kerülnek túlsúlyba, ha 4, 5, 6 vagy 7 lány jut a döntőbe. Most nem érdemes áttérni a komplementer eseményre, hiszen ott is (0, 1, 2, 3) négy eset van. A megoldás:

$$\frac{\binom{17}{3}\cdot\binom{23}{4}}{\binom{40}{7}}+\frac{\binom{17}{2}\cdot\binom{23}{5}}{\binom{40}{7}}+\frac{\binom{17}{1}\cdot\binom{23}{6}}{\binom{40}{7}}+\frac{\binom{17}{0}\cdot\binom{23}{7}}{\binom{40}{7}}\approx 0{,}6736.$$

3849 A dobozban összesen 15 golyó van.

a) „Legalább egy színből legalább kettő” golyóhoz legalább négyet kell kivennünk. Ugyanis három golyó esetén még elképzelhető olyan eset, hogy mind a három különböző színű. A zöld golyók száma összesen 6, így:

$$\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{9}{2}}{\binom{15}{4}}\approx 0{,}3956.$$

b) Ha azt szeretnénk, hogy „mindhárom színből legyen legalább egy”, akkor legalább 12 golyót ki kell vennünk a 15-ből. Ugyanis ki lehet úgy venni 11-et, hogy közülük 5 piros és 6 zöld – ez így viszont csak két különböző szín. Mivel piros golyó összesen öt darab van, ezért a keresett „pontosan három piros” golyó van a kezünkben valószínűsége:

$$\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{10}{9}}{\binom{15}{12}}\approx 0{,}2198.$$

3850 Az öt zsebkendő kiemelése a tasakból hat elemi eseményt eredményez, például a kamillás zsebkendők oldaláról: 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 kamillás elvételét. (Ennek megfelelően veszünk ki 5, 4, 3, 2, 1, 0 mentolost is, természetesen az egyes esetekben.)

Feladatunk először az összes eset felírása és kiszámítása. Jelölje k a kamillás zsebkendők számát:

$$P(k=0)=\frac{\binom{15}{0}\cdot\binom{25}{5}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}0807;\quad P(k=1)=\frac{\binom{15}{1}\cdot\binom{25}{4}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}2884;$$

$$P(k=2)=\frac{\binom{15}{2}\cdot\binom{25}{3}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}3670;\quad P(k=3)=\frac{\binom{15}{3}\cdot\binom{25}{2}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}2074;$$

$$P(k=4)=\frac{\binom{15}{4}\cdot\binom{25}{1}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}0519;\quad P(k=5)=\frac{\binom{15}{5}\cdot\binom{25}{0}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}0046.$$

Megjegyzés: A fenti események valószínűségeinek összege 1, mivel ezek az esetek teljes eseményrendszert alkotnak.

Ábrázoljuk az eredményeket oszlopdiagramon.

A feladat megoldását akár az oszlopdiagramról, akár a számított értékekről leolvashatjuk: legnagyobb valószínűséggel két darab kamillás zsebkendő lesz a kivett öt darab között.

3851 *a)* A megoldás sejthető: mivel szimmetrikusan szeretnénk tudni a kétféle kekszet, így várhatóan 50-50 darabnak kell lenni a dobozban mindkét fajtából. Sejtésünket többféleképpen is igazolhatjuk! Írjuk fel általánosan a valószínűséget kiszámító formát. Jelölje m a mogyorós csokik számát a 100 darabos mintában. Azt vizsgáljuk, milyen m-re lesz a legnagyobb az alábbi valószínűség $(1 < m < 99)$:

$$\frac{\binom{m}{2}\cdot\binom{100-m}{2}}{\binom{100}{4}}=\frac{\frac{m\cdot(m-1)}{2}\cdot\frac{(100-m)\cdot(99-m)}{2}}{\binom{100}{4}}=$$

$$=\frac{m\cdot(m-1)\cdot(100-m)\cdot(99-m)}{4\cdot\binom{100}{4}}.$$

A formula egy negyedfokú függvény maximumának vizsgálatára vezet – ilyet nem tanultunk jellemezni.

Megjegyzés: Emelt szinten deriváltak segítségével megtehetjük, bár ott sem lesz könnyű.

Természetesen a kifejezés értéke csak a számlálótól függ, a nevező konstans. Elegendő a számlálót tovább vizsgálnunk:

$$m\cdot(m-1)\cdot(100-m)\cdot(99-m).$$

I. megoldás. Vegyük észre, hogy két tényezőben az m előjele (+), kettőben pedig (–). Ez adhat egy ötletet: ha nem szorzás, hanem összeadás lenne a zárójelek között, akkor m éppen kiesne! Milyen összefüggés „képes” szorzásból összeadást csinálni? Például a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség. Az összefüggést négy elemre írjuk fel (minden tényező pozitív):

$$M=\sqrt[4]{m\cdot(m-1)\cdot(100-m)\cdot(99-m)}\le\frac{m+m-1+100-m+99-m}{4}=\frac{198}{4}=49{,}5=A.$$

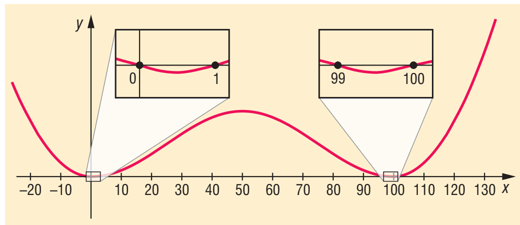
Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a tényezők megegyeznek (jelen esetben ez nem lehetséges). Mivel a számtani közép konstans, a mértani akkor közelíti meg a legjobban, ha az elemek a legközelebb kerülnek egymáshoz. Ez pedig akkor következik be, amennyiben $m = 50$.

II. megoldás. Ha elemezni „papíron” nem is tudjuk, számítógép segítségével azért ábrázolhatjuk és elemezhetjük is a valós számokon értelmezett negyedfokú kifejezésünket:

$$f(x)=x\cdot(x-1)\cdot(100-x)\cdot(99-x).$$

A függvénynek négy zérushelye van:

$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=99,\quad x_4=100.$$



Az első két és utolsó két zérushely között negatív az értéke, a többi nyitott intervallumban pozitív.

Az ábrán is szépen látszik, de a számítógép is megerősíti a sejtésünket: $x = 50$-nél van a függvény lokális szélsőértéke.

b) Ebben a részben kissé módosul a formula:

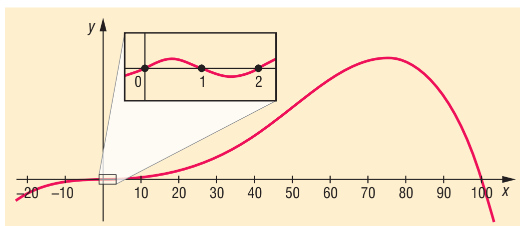
$$\frac{\binom{m}{3}\cdot\binom{100-m}{1}}{\binom{100}{4}}=\frac{\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{6}\cdot(100-m)}{\binom{100}{4}}=\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot(100-m)}{6\cdot\binom{100}{4}}.$$

Az előző részben alkalmazott első megoldás most nem működik, azonban a számítógép segítségét igénybe vehetjük. A vizsgálandó minden valós számon értelmezett függvény:

$$f(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(100-x).$$

A függvénynek most is négy zérushelye van:

$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=2,\quad x_4=100.$$



Az első és a második, valamint a harmadik és negyedik zérushely között pozitív, a többi nyitott intervallumban negatív az értéke.

Az elemzést bízzuk a számítógépre. A keresett szélsőértékre $x \approx 75{,}25$ adódik. Ezt már le tudjuk ellenőrizni számológéppel is, a megoldás: 75 mogyorós csoki van a dobozban.

3852 Először is adjuk meg az összes esetek számát, ami 1880-ból 20 szem barack kiválasztása esetén:

$$\binom{1880}{20}.$$

Másodszor határozzuk meg, melyik kategóriájú barackból hány szemet szedtünk:

I. kategóriájúból: $1880\cdot 0{,}50 = 940$ darabot;

II. kategóriájúból: $1880\cdot 0{,}35 = 658$ darabot;

III. kategóriájúból: $1880\cdot 0{,}15 = 282$ darabot.

A feladat kérdése az, hogy mekkora valószínűséggel lesz a kapott 20 szem barackból I. kategóriájú 10, II. kategóriájú 8 és III. kategóriájú 2.

Vagyis a „kedvező” esetekben 940 darabból választunk 10-et, 658-ból választunk 8-at és ugyanakkor 282-ből választunk 2-t. Már fel tudjuk írni a kedvező esetek számát is, tehát a kérdezett valószínűség:

$$\frac{\binom{940}{10}\cdot\binom{658}{8}\cdot\binom{282}{2}}{\binom{1880}{20}}\approx 0{,}0414.$$

Megjegyzés: Ha egy összességben kétfajta elemből veszünk visszatevés nélkül mintát, az összes lehetséges eredményhez tartozó valószínűségeket *hipergeometriai,* ha többfajta elemből vesszük a mintát, *polihipergeometriai eloszlásnak* nevezzük.

Valószínűségi játékok gráfokon (kiegészítő anyag) – megoldások

3853 $P(A)=\frac{1}{3}$, $\quad P(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$, $\quad P(C)=\frac{2}{3}\cdot(0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}4\cdot 0{,}7)\approx 0{,}2867.$

3854 $0{,}3x<0{,}27 \quad\Rightarrow\quad x<0{,}9.$

3855 $0{,}6x+0{,}4\cdot 2x=0{,}42 \quad\Rightarrow\quad x=0{,}3.$

3856 $0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}05=0{,}425.$

3857 $\frac{2}{3}\cdot 0{,}9=0{,}6.$

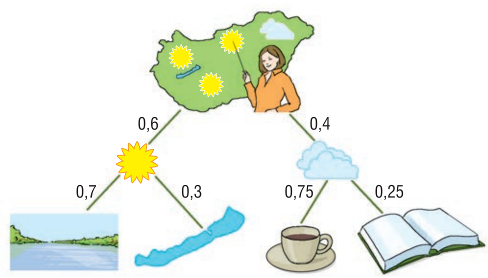
3858 *a)* A lehetőségek az ábrán láthatók.

b) $P(\text{Deseda tó})=0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}42;$

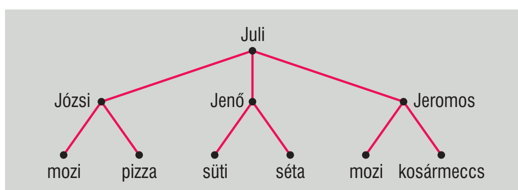
$P(\text{Balaton})=0{,}6\cdot 0{,}3=0{,}18;$

$P(\text{kávéház})=0{,}4\cdot 0{,}75=0{,}3;$

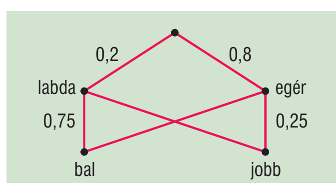
$P(\text{könyvtár})=0{,}4\cdot 0{,}25=0{,}1.$



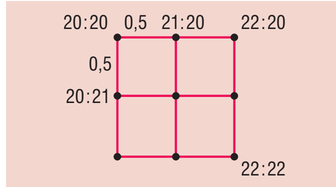
3859 $P(\text{mozi})=\frac{1}{3}\cdot 0{,}5+\frac{1}{3}\cdot 0{,}5=\frac{1}{3}.$



3860 $P(\text{bal})=0{,}2\cdot 0{,}75+0{,}8\cdot 0{,}75=0{,}75.$

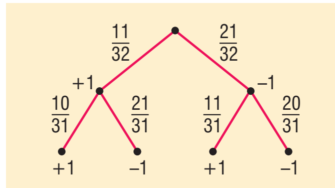


3861 $P(22:22) = 6 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}375.$



3862 *a)* A gráf az ábrán látható.

b) $1 - \dfrac{21}{32} \cdot \dfrac{20}{31} \approx 0{,}5767.$



3863 Kiindulásul a 3855. feladat válaszában egyetlen jelet kell átírnunk:

$$0{,}6x + 0{,}4 \cdot 2x > 0{,}42.$$

Innen $x > 0{,}3$. Ám még nem végeztünk a feladattal. Az x valószínűséget jelöl, így természetesen adódik: $1 \ge x$.

Még mindig nem végeztünk! A $0{,}6x + 0{,}4 \cdot 2x$ is valószínűséget jelöl, ezért $1 \ge 0{,}6x + 0{,}4 \cdot 2x$, azaz $\dfrac{5}{7} \ge x$.

Most már végeztünk? Nem! Ugyanis még $2x$ is valószínűséget jelöl: $0{,}5 \ge x$.

No, most már tényleg végeztünk: $0{,}5 \ge x > 0{,}3$.

3864 *a)* Tekintsük az ábrát. A pontok között csak jobbra vagy lefelé léphetünk. A felső sorban azt látjuk, amikor harcosunk nyer, a függőlegesen lógó gombócok a vesztett mérkőzések eredményei. Az élekre most is felírtuk a feladatban meghatározott valószínűségeket.

Az *a)* részkérdésben így össze kell szoroznunk a felső sor értékeit:

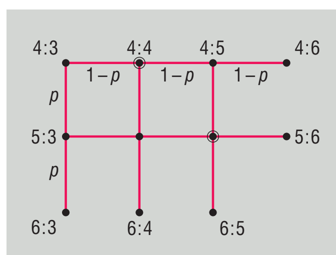
$$P(\text{mindent megnyer}) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}0384.$$

b) Az előzőhöz hasonlóan az ábráról leolvashatjuk:

$$P(\text{3. meccsen veszít}) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}288.$$

c) Mivel négy meccset megnyert, így csak 1 vagy 0 meccset bukhat el ötből, azaz harcosunk erőssége 4 vagy 5.

3865 Mielőtt a kérdésekre válaszolnánk, rajzoljuk fel a játék gráfját. Egy vízszintes jobb lépés Batka manó pontszerzését, egy függőleges lefelé lépés Biga csiga pontszerzését hivatott jelezni. Más lépés az éleken nem megengedett.



Biga csiga p valószínűséggel ér el pontot, Batka manóra pedig $1 - p$ valószínűség marad.

Az utolsó sorban olvasható feltétel szerint:

$$P(4:6) = (1-p)^3 = 0{,}064 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}4.$$

Ezek után válaszolhatunk a kérdésekre.

a) $P(6:3) = p^2 = 0{,}16.$

b) Ebben az esetben először el kell jutnunk az 5:4 pontba, majd ebben az állásban Biga csigának kell még egy pontot szereznie. Az 5:4 állást kétféleképpen kaphatjuk meg. Egyszer kell Batka manónak és egyszer Biga csigának pontot elérnie, sorrendjük azonban kétféle is lehet. Ezért:

$$P(6:4) = 2p^2 \cdot (1-p) = 0{,}192.$$

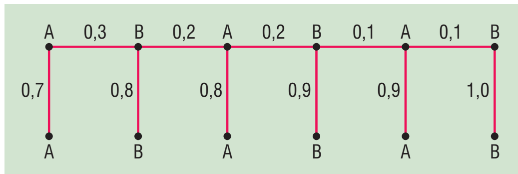
c) Kétféle döntetlen állás is kialakulhat: 4:4 és 5:5 (külön jelölt állások a gráfban). A 4:4 álláshoz Batka manónak egy játékot kell megnyernie, ennek valószínűsége:

$$P(4:4) = 0{,}6.$$

Az 5:5-höz azonban Batka manónak már kétszer kell játszmát nyerni, míg Biga csigának egyet. Ezen győzelmeket háromféle sorrendben érhetik el:

$$P(5:5) = 3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}432.$$

3866 Elsőnek most is írjuk fel a játék gráfját. Az alsó sorban azt látjuk, hogy ki találta el a tábla közepét. Vízszintesen akkor lépünk, ha az illető játékos nem találta el a középkört. A valószínűségeket a szövegből olvashattuk ki. Lássuk a feladat kérdéseit!



a) Végig akkor játsszák, ha eljutunk a gráf utolsó B betűjéig:

$$P(\text{végigjátsszák}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}0 = 0{,}00012.$$

b) Andor három különböző esetben nyerhet.

Ha rögtön nyer:

$$P_1(\mathrm{A}) = 0{,}7.$$

Ha Boldizsár ront, majd Andor nyer:

$$P_2(\mathrm{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}048.$$

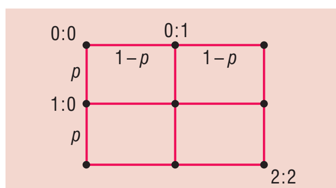
Mindketten kétszer rontanak, de Andor harmadszorra talál:

$$P_3(\mathrm{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}00108.$$

A fenti esetek kizárják egymást, ezért eredményeiket összeadhatjuk:

$$P(\text{Andor nyer}) = P_1(\mathrm{A}) + P_2(\mathrm{A}) + P_3(\mathrm{A}) = 0{,}74908.$$

3867 Tételezzük fel, hogy az erősebb csapat p, a gyengébb $1-p$ valószínűséggel nyer meg egy mérkőzést, $p > 1-p$. Tekintsük a játék gráfját. Hogy a bal felső pontból eljussunk a jobb alsó pontba, kettőt kell jobbra és kettőt lefelé lépni. Ilyen lépéseket összesen $\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}$-féleképpen tehetünk (ismétléses permutáció). A kérdéses egyenlet:



$$\frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 < 0{,}24.$$

Egyszerűsítsünk 6-tal, és vonjunk négyzetgyököt mindkét oldalból (p és $1-p$ is nemnegatív):

$$p \cdot (1-p) < 0{,}2,$$

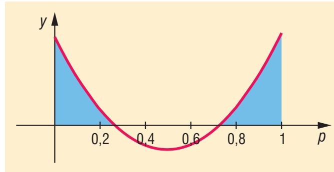
$$0 < p^2 - p + 0{,}2.$$

A parabola zérushelyei:

$$p_1 \approx 0{,}7236 \quad \text{és} \quad p_2 \approx 0{,}2764,$$

tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$p < 0{,}2764 \quad \text{vagy} \quad p > 0{,}7236.$$

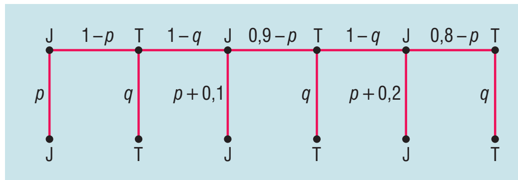


Mivel $p > 1 - p$, ezért csak a $p > 0{,}7236$ megoldást fogadjuk el.

Most már válaszolhatunk a kérdésre is: a két csapat által megszerzett győzelem valószínűségeinek aránya egy-egy mérkőzésen legalább

$$\frac{p}{1-p} > \frac{0{,}7236}{0{,}2764} \approx 2{,}618.$$

3868 Jane és Tarzan egymástól teljesen függetlenül lasszózzák meg Bagirát, ezért jelölje Jane találati valószínűségét p, Tarzanét pedig q. A szöveg szerint Jane még javul is a játék során, körönként 0,1-et. A kapott gráf az ábrán látható.



Írjuk fel egyenlettel az ismert győzelmi esélyeket.

Tarzan győz az első körben:

$$(1-p) \cdot q = 0{,}48. \qquad \left(= \frac{12}{25}\right)$$

Jane győz a harmadik körben:

$$(1-p) \cdot (1-q) \cdot (0{,}9-p) \cdot (1-q) \cdot (p+0{,}2) = 0{,}03584.$$

Tarzan győz a harmadik körben:

$$(1-p) \cdot (1-q) \cdot (0{,}9-p) \cdot (1-q) \cdot (0{,}8-p) \cdot q = 0{,}032256.$$

Ez három egyenlet két ismeretlenre, ami akár sok is lehetne. Azonban mivel elég magas fokú egyenleteink vannak, valószínűleg jól jön. Nézzük meg közelebbről az utolsó két egyenletet! Észrevehetjük, hogy az első négy tényezőjük megegyezik. Érdemes őket elosztanunk egymással, mondjuk az elsőt a másodikkal:

$$\frac{p+0{,}2}{(0{,}8-p) \cdot q} = \frac{10}{9}.$$

Tüntessük el a törteket is:

$$9 \cdot (p+0{,}2) = 10 \cdot (0{,}8-p) \cdot q.$$

Kissé alakítsuk át az első egyenletet, és vegyük hozzá az előbbihez:

$$\left.\begin{aligned} 9 \cdot (p+0{,}2) &= 10 \cdot (0{,}8-p) \cdot q \\ 12 &= 25 \cdot (1-p) \cdot q \end{aligned}\right\}.$$

Már nem is annyira csúnya az egyenletrendszer! Osszuk el a felső egyenletet az alsóval:

$$\frac{3 \cdot (p+0{,}2)}{4} = \frac{2 \cdot (0{,}8-p)}{5 \cdot (1-p)}.$$

Szorozzunk a közös nevezővel:

$$15 \cdot (p+0{,}2) \cdot (1-p) = 8 \cdot (0{,}8-p).$$

Fejtsük ki a zárójeleket, majd rendezzünk egy oldalra:

$$0 = 15p^2 - 20p + 3{,}4.$$

A megoldóképletből:

$$p_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 15 \cdot 3{,}4}}{30} = \begin{cases} p_1 = 1{,}13; \\ p_2 = 0{,}2. \end{cases}$$

Az első megoldást nem fogadhatjuk el, hiszen p (≤ 1) valószínűséget jelöl, azonban a második jó. Innen $q = 0{,}6$.

Tehát Jane $0{,}2$; Tarzan $0{,}6$ valószínűséggel lasszózza meg a párducot.

Most pihenjünk egyet, és próbáljunk meg válaszolni a feladat kérdésére.

A harmadik kör után akkor nincs Bagira befűzve, ha a felső sor utolsó pontjában Tarzan sem találja el. Azaz:

$$P(\text{Bagira még mindig szabad}) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}021504.$$

Ez azt mutatja, Bagirát nagyon nagy valószínűséggel befogja valaki a három körben.

Valóság és statisztika – megoldások

3869 11 óra 12 perckor.

3870 4,65%-a.

3871 Nem. Ha a még össze nem számolt 20% voks a másiké, akkor 52 : 48%-ra a másik győz.

3872 Az eddig megszámolt szavazatok 62,5%-át + 1 szavazatot.

3873 Az összes szavazat $83\frac{1}{3}$%-át + 1 szavazatot.

3874 260%-ot.

3875 200 g termékhez 220 g marhahús szükséges, és 11 g „házi fűszert” tartalmaz. Azaz 5%-ot.

3876 Mivel $x \cdot 0{,}35 = 28$, így az üzletház $x = 80$ boltot foglal magában, amiből $80 \cdot 0{,}65 - 2 = 50$ árul ruhát.

3877 $18 \cdot \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}5}{0{,}6 \cdot 0{,}4} = 26{,}25.$

Vegyes feladatok – megoldások

3878 *a)* $\dfrac{6}{25} = 0{,}24.$ *b)* Legalább negyvenet.

3879 0,3.

3880 $1 - \dfrac{2 \cdot 4!}{5!} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6.$

3881 $1 - 0{,}7^6 \approx 0{,}88.$

3882 0,125.

3883 $0{,}99^8 \approx 0{,}9227.$

3884 *a)* $\left(\dfrac{7}{20}\right)^{14} \cdot \left(\dfrac{13}{20}\right)^{14} \approx 9{,}948 \cdot 10^{-10};$ *b)* $\dbinom{28}{14} \cdot \left(\dfrac{7}{20}\right)^{14} \cdot \left(\dfrac{13}{20}\right)^{14} \approx 0{,}04.$

3885 $1-\left[\binom{9}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\binom{9}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1+\binom{9}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\right]\approx 0{,}9917.$

3886 *a)* $\binom{7}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5\approx 0{,}2613;$

b) $\binom{7}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3+\binom{7}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^1+\binom{7}{7}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^0\approx 0{,}44462.$

3887 *a)* $\dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}0019;$ *b)* $\dfrac{\binom{8}{3}\cdot\binom{24}{1}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}0374;$ *c)* $1-\dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}9981.$

3888 $\dfrac{\binom{25}{2}\cdot\binom{75}{8}}{\binom{100}{10}}\approx 0{,}2924.$

3889 $P(s=0)=\dfrac{\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{1}{3};$ $P(s=1)=\dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{8}{15};$ $P(s=2)=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{2}{15}.$

3890 $P(\text{meggyes rétes vagy dobostorta})=P(\text{meggyes})+P(\text{dobos})=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}.$

3891 $1-P(\text{nem kell várni Esztire})=1-0{,}6\cdot 0{,}9=0{,}46.$

3892 Nem lehet:

$$P(B+C)=(1-p)^2+p^2=2p^2-2p+1<0{,}4.$$

De minden $p\in\mathbb{R}$ esetben:

$$2p^2-2p+0{,}6>0.$$