12.6. ÉRETTSÉGI GYAKORLÓ FELADATSOROK

KÖZÉPSZINTŰ FELADATSOROK

1. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $x(x+2)$.

2. A háromszög köré írható kör sugara 2,6 cm.

3. Körtéből 9 kg-ot, almából 18 kg-ot, banánból pedig 54 kg-ot adott el.

4. A hűtőszekrény 52,5 literes.

5. A bank 3000 Ft kamatadót vont le.

6. $100\,100\,101\,001_2$.

7. Medián 4,5.
Alsó kvartilis 3,5.
Felső kvartilis 5.

8. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$.

9. $\dfrac{70}{200} = 0{,}35$.

10. A nagyváros lakossága 4 év eltelte után haladja meg a 210 000 főt.

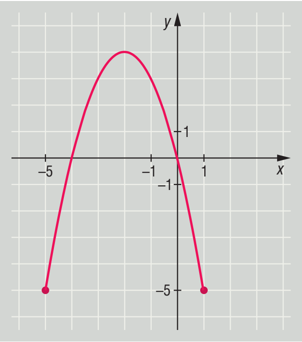
11. *a)* Nem. *b)* Igen. *c)* Igen.

12. $\alpha \approx 114{,}59°$.

1. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* $f(-6) = -(-6+2)^2 + 4 = -12$,
$f(5) = -(5+2)^2 + 4 = -45$.

b) A grafikon az ábrán látható.



c) Az egyenlet:
$$-(x+2)^2 + 4 = -21,$$
ami a következő alakban is írható:
$$(x+2)^2 = 25.$$
Ennek megoldásai:
$$x_1 = 3 \quad \text{és} \quad x_2 = -7.$$

14. *a)* Jelölje az adatsor elemeit nagyság szerinti sorrendben a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Az adatsor legkisebb eleme 10 000, a legnagyobb eleme pedig 30 000, így $a_1 = 10\,000$ Ft és $a_5 = 30\,000$ Ft. A nagyság szerinti sorrendben harmadik elem megegyezik az adatok mediánjával, ami 15 000, így $a_3 = 15\,000$ Ft. Az alsó kvartilis 11 000 Ft, ez (mivel 5 elemű az adatsor) pont a nagyság szerinti sorrendben első és második elem számtani közepe, azaz

$$11\,000 = \frac{10\,000 + a_2}{2},$$

így $a_2 = 12\,000$ Ft. Az adatsor felső kvartilise 25 000, ami épp a nagyság szerinti sorrendben negyedik és ötödik elem számtani közepe, ezért

$$25\,000 = \frac{a_4 + 30\,000}{2},$$

amiből $a_4 = 20\,000$ Ft. Berci tehát összesen 87 000 Ft-ot takarított meg az elmúlt öt hónapban.

b) A választott laptop 3 év múlva $250\,000 \cdot 0{,}65^3 \approx 68\,656$ Ft-ot ér.

c) Mivel $\dfrac{68\,656}{250\,000} \approx 0{,}2746$, ezért 3 év alatt a laptop értékcsökkenése körülbelül 72,54%-os.

15. *a)* A szépirodalmi könyvek számát $7x$, az albumok számát $5x$ alakban kereshetjük.

A feltételek alapján a műszaki könyvek száma $1{,}8 \cdot (5x) = 9x$.

Ha a 15 könyvből minden polcra ugyanannyit helyezünk, akkor a polcokon rendre $7x + 5$, $5x + 5$, illetve $9x + 5$ könyv lesz, továbbá például $(7x + 5) : (5x + 5) = 4 : 3$.

A felírt arányból $x = 5$. Eszerint Kristófnak összesen 35 szépirodalmi könyve, 25 albuma és 45 műszaki könyve van.

Az ellenőrzés mutatja, hogy ekkor műszaki könyvből valóban 1,8-szer annyi van, mint albumból, továbbá ha minden polcra 5 könyvet helyezünk, akkor a könyvek számának aránya $4 : 3 : 5$ lesz.

b) Kristóf $\binom{25}{3} = 2300$-féleképpen tud három albumot kölcsönadni Károlynak.

c) Ha Kristóf megveszi a 15 kiszemelt könyvet, akkor összesen 120 könyvet tárol majd a polcokon.

1. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Az 5 doboz $5! = 120$-féleképpen helyezhető egymás mellé.

b) Az első gyermek 5-féle, a második 4-féle, a harmadik 3-féle színű lufit kaphat. Az esetek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

c) Az árus az első órában összesen 14 lufit adott el. A lufik átlagára euróban:

$$\frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 1{,}4 + 4 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 2}{14} = \frac{19{,}4}{14} \approx 1{,}39.$$

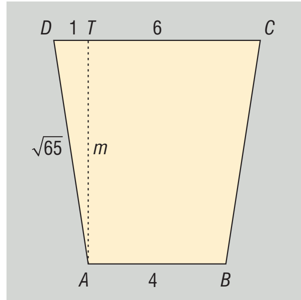
Az árus átlagosan 139 centért adta a lufikat az első órában.

d) A lufikból 19,4 € az árus bevétele. A lufi beszerzési ára 0,4 €, ez 14 lufi esetén 5,6 €, ezért a lufis haszna 13,8 €. Ez körülbelül 246,4%-os haszonnak felel meg.

e) Az eladott 14 lufi között vannak olyanok, amelyeket nem tudunk megkülönböztetni (az azonos színűek), így a lufik ismétléses permutációjáról van szó. Az esetek száma:

$$\frac{14!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 2!} = 25\,225\,200.$$

17. *a)* A gyertya tengelymetszetét az ábra mutatja. A csonka kúp m magasságát az ATD derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével számolhatjuk: $m = 8$ cm.

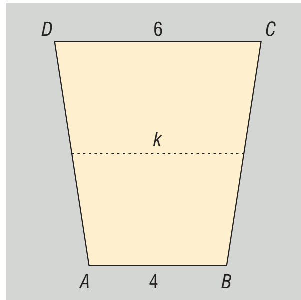


Mivel a csonka kúp alapkörének sugara 2 cm, fedőkörének sugara pedig 3 cm, ezért térfogata:

$$V = \frac{8\pi}{3} \cdot \left(2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2\right) \approx 159{,}17.$$

A gyertya térfogata 159,17 cm^3.

b) Ha a gyertyát az alapokkal párhuzamos síkkal két részre vágjuk, akkor két csonka kúp alakú rész keletkezik, ahol mindkét keletkező trapéz magassága 4 cm, k éppen az $ABCD$ trapéz középvonala, így hossza a két alap számtani közepe, azaz $k = 5$ cm.



Ha V_1 a kisebb, V_2 a nagyobb rész térfogatát jelöli, akkor arányukra:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4\pi}{3} \cdot \left(2^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)}{\frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \cdot 3 + 3^2\right)} = \frac{61}{91} \approx 0{,}67.$$

A keletkező két rész térfogatának aránya $\frac{61}{91}$.

18. *a)* A 15 szintes lépcső egyes szintjeit alkotó kockák száma felülről lefelé haladva számtani sorozatot alkot, amelynek első tagja 1, különbsége 2. Ebből következik, hogy a legalsó, 15. szinten található kockák száma $1 + 14 \cdot 2 = 29$.

b) Az n szintből álló lépcső legfelső szintjén 1, legalsó szintjén pedig $1 + 2(n - 1) = 2n - 1$ kocka található, ezért megépítéséhez összesen

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$$

kocka szükséges. Az S összegben éppen az első n páratlan szám összege áll, amit a számtani sorozat összegképletének alkalmazásával számíthatunk ki:

$$S = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2.$$

Az n szintből álló lépcső megépítéséhez n^2 darab kocka szükséges. Mivel Aladárnak 150 darab építőkockája van, ezért a legnagyobb olyan n egész számot keressük, amelyre $n^2 \le 150$ teljesül, azaz $n \approx 12{,}25$, vagyis Aladár építőkockáiból maximum 12 szintes lépcsőt építhet.

c) Aladár a következő számú építőkockákat használhatja fel a lépcsők építéséhez: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144. Ha Aladár épít egy kétszintes, egy ötszintes, továbbá egy tizenegy szintes lépcsőt, akkor mind a 150 kockát felhasználja, így egy sem marad felhasználatlan.

2. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $5{,}325 \cdot 10^{-18}$.

2. Összesen 6 dolgozó volt már mindkét városban.

3. *c)*.

4. $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} = 6 \cdot 3 = 18$ utazó csapat alakítható ki.

5. $x = -3, \quad x = 0 \quad \text{és} \quad x = 3.$

6. A négy ismert szám összege 177, amihez ha még 70-et adunk, akkor 247-et kapunk. Ehhez az ismeretlen számjegyet hozzáadva, 9-cel osztható számot kell kapnunk. Mivel a 247-nek a 9-cel való osztás során fellépő maradéka 4, ezért még 5-öt kell hozzáadni, hogy 9-cel osztható számot kapjunk, ezért az 5. nyertes szám a 75.

7. *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz.

8. Például: 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5.

9. Az akváriumhoz $3 \cdot 80 \cdot 60 + 2 \cdot 60 \cdot 60 = 21\,600 \text{ cm}^2 = 2{,}16 \text{ m}^2$ üveget használtak fel.

10. A két térkép hasonló egymáshoz, az $1:2\,300\,000$ méretarányú térképet $\lambda = \frac{2\,300\,000}{1\,200\,000} = \frac{23}{12}$ arányú hasonlósági transzformációval lehet átvinni az 1:1 200 000 méretarányú térképbe. Ebből következik, hogy az utóbbi térképen a Cegléd–Szeged-távolság $4{,}5 \cdot \frac{23}{12} \approx 8{,}6$ cm.

Kiszámolhatjuk a két város valóságban mért távolságát is:

$$4{,}5 \cdot 2\,300\,000 = 10\,350\,000 \text{ cm},$$

majd kiszámoljuk, hogy ennek mekkora távolság felel meg az $1:1\,200\,000$ méretarányú térképen:

$$10\,350\,000 : 1\,200\,000 \approx 8{,}6 \text{ cm}.$$

11. Az egyenes egyenlete: $y - 3 = -2(x - 1)$. Az egyenes az x tengelyt az $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ pontban metszi.

12. A módusz és a medián egyaránt 3.

2. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A négyzetgyökvonás miatt $x \geq -2$. Emeljük mindkét oldalt négyzetre, így

$$x + 2 = (10 - x)^2,$$
$$x + 2 = 100 - 20x + x^2,$$

amiből rendezés után

$$x^2 - 21x + 98 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 14$ és $x_2 = 7$. Ellenőrzés mutatja, hogy x_1 hamis gyöke az egyenletnek, míg x_2 megoldás. Az egyenlet egyetlen megoldása tehát $x = 7$.

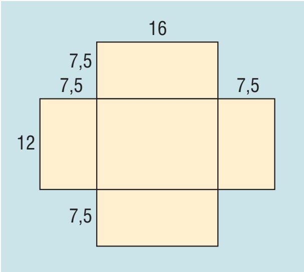
b) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A hatványozás azonosságait használva $3^{x^2} = 3^{12+4x}$. Mindkét oldalon 3-as alapú hatványok állnak, amelyek csak úgy egyezhetnek meg, ha kitevőik is egyenlők, ezért $x^2 - 4x - 12 = 0$.

A kapott másodfokú egyenletből: $x_1 = 6$ és $x_2 = -2$. Mindkét szám megoldása az egyenletnek.

14. *a)* A befőttesüveg alapkörének sugara $r = 4$ cm, magassága $m = 15$ cm.

Egy üveg térfogata: $V = r^2\pi m \approx 753{,}98 \text{ cm}^3$, azaz közelítően 7,5 dl.

b) Az üvegek tárolására szolgáló kartondoboz felül nyitott téglatest, az alaplapjának oldalai 24 cm és 32 cm, magassága 15 cm. A doboz hálójának kicsinyített képe az ábrán látható (az adatok centiméterben vannak megadva).



c) Mivel 1 dobozba 12 üveg fér, ezért nagymamának összesen 4 dobozra van szüksége.

Egy doboz térfogata $V = 24 \cdot 32 \cdot 15 = 11\,520 \text{ cm}^3$, így a 4 doboz összesen $46\,080 \text{ cm}^3 = 46{,}08 \text{ dm}^3$ helyet foglal el.

15. *a)* Az 1500 €-ból 200 € 1%-os kamatlábbal kamatozik, így erre a részre a bank 2 € kamatot fizet. A maradék 1300 € után 4% kamat jár, azaz $1300 \cdot 0{,}04 = 52$ €. A bank a lekötött összeg után 54 € kamatot fizet.

b) Mivel $\dfrac{54}{1500} = 0{,}036$, ezért a bank által ténylegesen kifizetett kamat 3,6%.

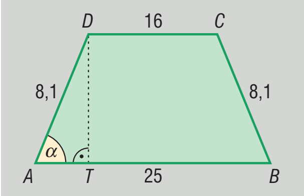
c) Ha x eurós betétnél legalább 3,8%-os kamatot fizet a bank, akkor

$$2 + (x - 200) \cdot 0{,}04 \geq x \cdot 0{,}038, \quad \text{vagyis} \quad x \geq 3000.$$

Legalább 3000 €-t kell lekötnünk ahhoz, hogy arra a bank legalább 3,8%-os kamatot fizessen.

2. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Tekintsük az ábra jelöléseit: $AB = 25$, $CD = 16$, $AD = BC = 8{,}1$, és DT a trapéz magassága.



Az ADT derékszögű háromszögben:

$$AD^2 = AT^2 + DT^2,$$
$$8{,}1^2 = 4{,}5^2 + DT^2,$$

amiből a trapéz DT magasságára körülbelül 6,73 méter adódik.

b) A töltés keresztmetszetének területe:

$$T = \frac{25 + 16}{2} \cdot 6{,}73 = 137{,}97 \text{ m}^2.$$

c) Az ADT derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{AT}{AD} = \frac{4{,}5}{8{,}1},$$

amiből $\alpha = 56{,}25°$.

17. *a)* Anna a három kockával összesen $6^3 = 216$-féleképpen dobhat. A kedvező esetek számbavételénél hasznos lehet azokat a következő módon csoportosítani:

- A dobott pontok száma 18, ha Anna minden kockával 6-ost dob.
- A dobott pontok száma 17, ha két 6-ost és egy 5-öst dob. Attól függően, hogy a piros, zöld vagy kék kockával dobja az 5-öst, ez az eset 3-féleképpen következhet be.
- A dobott pontok összege 16, ha két 5-ös mellett egy 6-ost dobott (összesen 3 eset), vagy két 6-os mellett egy 4-est (szintén 3 eset). A pontok száma 6-féleképpen lehet 16.

- A dobott pontok összege 15. A lehetséges dobások: két 6-os mellett egy 3-as (3 eset), egy 6-os, egy 5-ös és egy 4-es ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eset), illetve három 5-ös (1 eset). Ez összesen 10 eset.

Anna tehát összesen $1 + 3 + 6 + 10 = 20$-féleképpen dobhat úgy, hogy azzal a játékot megnyerje, ezért nyerésének valószínűsége $\frac{20}{216} \approx 0{,}0926$.

b) Anna a zöld és kék kockákkal összesen 36 különböző eredményt dobhat. Ha a piros kockával 6-ost dobott, akkor ahhoz, hogy a játékot megnyerje, a másik két kockával összesen legalább 9-et kell dobnia. A következő esetek lehetségesek:

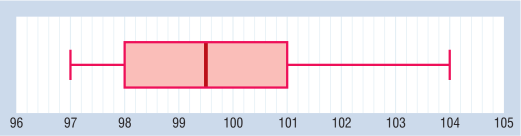
- A dobott pontok összege 12, ha a zöld és a kék kockával egyaránt 6-ost dob.
- A dobott pontok összege 11. Ez kétféleképpen következhet be: zöld 6-os és kék 5-ös, vagy fordítva.
- A dobott pontok összege 10. Ekkor vagy két 5-öst dob (1 eset), vagy egy 6-ost és egy 4-est (2 eset). A pontok összege 3-féleképpen lehet 10.
- A dobott pontok összege 9. Ekkor vagy egy 6-ost és egy 3-ast dob (2 eset), vagy egy 5-öst és egy 4-est (2 eset). Összesen 4 esetben lehet a dobott pontok összege 9.

Anna legalább 9-et $1 + 2 + 3 + 4 = 10$-féleképpen dobhat, ezért nyerésének valószínűsége: $\frac{10}{36} \approx 0{,}2778$.

18. *a)* Az adatok átlaga 99,8 gramm, az adatok szórása körülbelül 2,3. A termék nem kerülhet forgalomba.

b) Az adatok nagyság szerinti sorrendben:

97, 97, 98, 98, 99,
100, 101, 101, 103, 104.



Az adatok mediánja 99,5.

A minta alsó kvartilise 98, felső kvartilise pedig 101.

3. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Van, aki nem kiváló matematikából.
Nem mindenki kiváló matematikából.

2. $\frac{1}{12}$-dik hatvány.

3. 1 mérföld = 63 360 inch.

4. $a \neq 2$, $a \neq -2$, a tört: $\frac{3}{a-2}$.

5. $A \cup B = [-6; 4[$ és $A \cap B = [-3; 2]$.

6. $\alpha = 150°$.

7. $x \in \left]\frac{2}{5}; \infty\right[$.

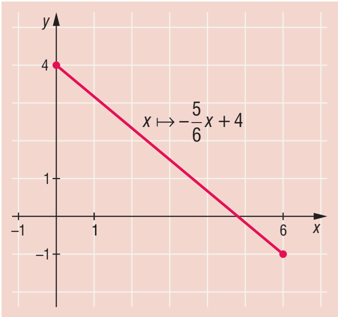
8. Az átlag 15, a módusz 12, a medián 14.

9. 66°, 66°, 48° vagy 54°, 54°, 72°.

10. Mindkét nyelvet beszéli: $0{,}85 + 0{,}75 - 1 = 0{,}6$, a lakosok 60%-a. A keresett valószínűség 0,6.

11. Koszinusztétellel számolva a legnagyobb oldallal szemközti szöget: $\gamma = 97{,}98°$.

12. Értékkészlet: $[-1; 4]$.



3. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* Az értelmezési tartomány: $x \ge \frac{13}{7}$, négyzetre emelés után: $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, mindkettő megoldás.

b) Minden tényezőt írjunk át 2 hatványára:

$$\left(2^x\right)^x \cdot \left(2^{-2}\right)^5 = 2^8 \cdot \left(2^5\right)^2 \cdot \left(2^{-3}\right)^x.$$

A zárójeleket felbontva és a szorzásokat elvégezve:

$$2^{x^2-10} = 2^{18-3x}.$$

Az exponenciális függvény monotonitása miatt:

$$x^2 - 10 = 18 - 3x.$$

Rendezve: $x^2 + 3x - 28 = 0$, aminek megoldásai $x_1 = 4$ és $x_2 = -7$.
Ellenőrzéssel megmutatható, hogy mindkét szám megoldás.

14. *a)* A kamatozott összeg mértani sorozatot alkot: $x = 150\,000 \cdot 1{,}05^{12} = 269\,378$ Ft lesz a felvehető összeg. A haszon 119 378 Ft lesz.

b) A kivehető összeg:

$$150\,000 \cdot 1{,}05^{12} + 150\,000 \cdot 1{,}05^{11} + 150\,000 \cdot 1{,}05^{10} + \ldots + 50000 \cdot 1{,}05.$$

Ebből:

$$150\,000(1{,}05^{12} + 1{,}05^{11} + \ldots + 1{,}05) = 150\,000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{12} - 1}{1{,}05 - 1} = 2\,506\,947 \text{ Ft}.$$

Mivel összesen $12 \cdot 150\,000 = 1\,800\,000$ Ft-ot fektetett be, a haszon 706 947 Ft.

15. *a)* A teljes gráfhoz 8 él hiányzik, ennyi kézfogás lesz.

b) Nem, mert Antinak csak egy ismerőse van.

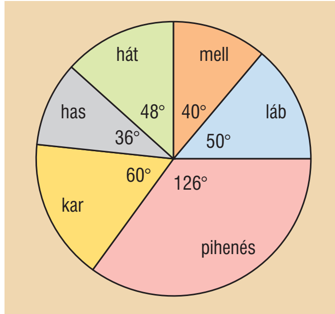
c) Tibi két oldalára $3 \cdot 2$-féle módon kerülhet egy-egy lány, a kimaradó 3 emberrel együtt 4! a leülések lehetséges száma, tehát:

$$p = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{5}.$$

3. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Az edzésformák heti összesítése:

	Összes idő (perc)	Középponti szög (fok)
Lábizom	75	50
Mellizom	60	40
Hátizom	72	48
Hasizom	54	36
Karizom	90	60
Pihenés (összesen)	189	126



b) $\dfrac{189}{540} = 0{,}35$, tehát az idő 35%-ában pihen.

c) A négyféle edzéstípus lehetséges sorrendje $4!$, amikor két kiválasztott egymás után van, a lehetőségek száma $2 \cdot 3!$.
A feltételnek megfelelő esetek száma a kettő különbsége: $4! - 2 \cdot 3! = 12$.

17. 1 csepp víz térfogata: $V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 1{,}5^3}{3} \approx 14{,}14 \text{ mm}^3$.

a) $2 \text{ dl} = 200\,000 \text{ mm}^3$, ez $14144{,}27$ csepp víz, ennyi csepp ≈ 3536 perc ≈ 58 óra 56 perc alatt csöpög le.

b) 1 év alatt $4 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 2\,102\,400$ csepp esik le, ennek a térfogata kb. 29,7 liter.

c) 1 évben 52 dl tisztítószer fogy el, ehhez 11 flakont kell megvenni, amelynek az ára: 9020 Ft.

18. *a)* A piros, a zöld és a citromsárga részek területe:

$$T_{\text{piros}} = r^2 \cdot \pi = 113{,}10 \text{ cm}^2,$$

$$T_{\text{zöld}} = T_{\text{citrom}} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 93{,}53 \text{ cm}^2.$$

A narancssárga szabályos sokszög 12 darab egyenlő szárú háromszögre bontható, a háromszög magassága:

$$m = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ} \approx 11{,}2.$$

Ebből adódik:

$$T_{\text{narancs}} = 12 \cdot \frac{a \cdot m}{2} - r^2 \cdot \pi = 289{,}96 \text{ cm}^2.$$

b) A $12 \cdot \dfrac{a \cdot m}{2} - x^2 \cdot \pi = x^2 \cdot \pi$ egyenletből $x \approx 8$ cm.

c) A belső kör színezésére 4 lehetőség van, a körülötte levő részre 3 színből választhatunk, és a külső háromszögeket a maradék két színnel csak egyféleképpen színezhetjük ki.
Tehát $4 \cdot 3 = 12$ különböző, a feltételeknek megfelelő színezés lehetséges.

4. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $A \cap B = \{36; 81\}$.

2. $50°$, $50°$, $80°$ vagy $50°$, $65°$, $65°$.

3. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

4. A tagadás a *c)*.

5. $36^{3\cdot\log_6 2} = 2^6 = 64$.

6. Az első szám a 63, a második a 64, ez a nagyobb.

7. $\frac{3\cdot 0{,}88 + 9\cdot 0{,}44}{12} = 0{,}55$, az éves kihasználtság 55%-os.

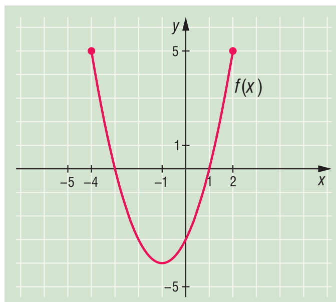
8. 4,8 m, 6,4 m, 3,2 m.

9. Egy 0-ra, hiszen csak egy darab 2-es és 5-ös van a szorzatban.

10. $x \in \left]\frac{11}{8}; \infty\right[$.

11. A függvény átalakításával: (➡)

$$f(x) = (x+1)^2 - 4.$$



12. Szinusztétellel számolva a 28°-kal szemközti oldalt:

$$b = 14{,}63 \text{ cm}.$$

4. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A $3\cdot\frac{x}{100} = 0{,}5\cdot\frac{10}{100}$ egyenletből $x = \frac{5}{3}$, tehát 1,67%-os oldatot kapunk.

b) A $3\cdot\frac{2}{100} = x\cdot\frac{10}{100}$ egyenletből $x = 0{,}6$, tehát 0,6 liter ecethez 2,4 liter vizet kell öntenünk.

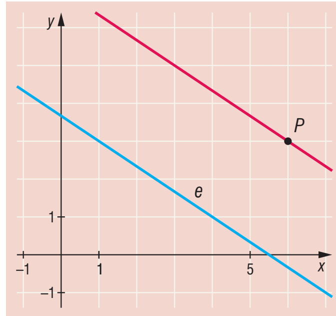
14. A naponta elolvasott oldalak száma számtani sorozatot alkot, amelyben $a_1 = 15$.

a) Az $S_n = \frac{30+12d}{2}\cdot 13 \geq 413$ egyenlőtlenség megoldása: $d \geq 2{,}79$.

Tehát ha naponta legalább 3 oldallal növeli az elolvasott mennyiséget, be tudja fejezni a könyvet a határidőre.

b) Ha $d = 4$, $S_{12} = 444$, tehát az utolsó napra már nem marad olvasnivaló. Mivel $S_{11} = 385$, már a tizenkettedik napon is csak 28 oldalt kell elolvasnia.

15. *a)* Az e egyenes egyenlete $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$ alakban írható, meredeksége $-\frac{2}{3}$.



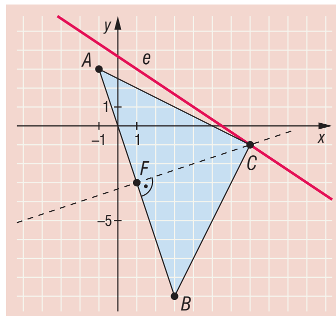
A vele párhuzamos egyenes meredeksége szintén ennyi, egyenlete $y=-\frac{2}{3}x+b$.

Mivel illeszkedik rá a P pont, ezért $3=-\frac{2}{3}\cdot 6+b$, amiből $b=7$.

A párhuzamos egyenes egyenlete:

$$y=-\frac{2}{3}x+7 \qquad \text{vagy} \qquad 2x+3y=21.$$

b) Mivel $AC=BC$, ezért C rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén.



Az AB szakasz felezőpontja $F(1;-3)$.

Az $\overrightarrow{AB}(4;-12)$ merőleges a keresett egyenesre, ezért annak meredeksége: $m=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

Mivel átmegy az F ponton, ezért $-3=\frac{1}{3}\cdot 1+b$, amiből $b=-\frac{10}{3}$.

A felezőmerőleges egyenlete $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$ vagy beszorozva: $-x+3y=-10$.

Meg kell oldani a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=11 \\ -x+3y&=-10 \end{aligned}\right\}.$$

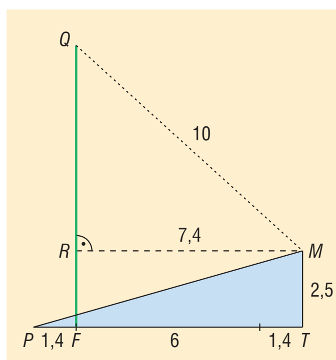
Az első egyenletből kivonva a másodikat, adódik a megoldás: $x=7$ és $y=-1$.

A megoldás: $C(7;-1)$.

A keresett pontok az egyenes és kör metszéspontjai: $P(5;5)$ és $Q(4;-2)$.

4. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Az ábra alapján számolható a PM távolság. Az $MTP_{\triangle}$-ben, Pitagorasz-tétellel:



$$PM^2=2{,}5^2+8{,}8^2, \quad \text{ebből} \quad PM\approx 9{,}15 \text{ m}.$$

Tehát a készülék érzékeli a macska mozgását.

b) Az MRQ háromszögben szintén Pitagorasz-tétellel számítható az RQ szakasz hossza:

$$RQ^2=10^2-7{,}4^2, \quad \text{ebből} \quad RQ\approx 6{,}73 \text{ m}.$$

Az $FQ=2{,}5+6{,}73=9{,}23$ m.

Tehát ha a szemközti fára 9,23 méternél magasabb helyre száll a bagoly, akkor a készülék nem érzékeli.

c) Készítsünk új ábrát. A keresett AB szakasz az ABT egyenlő szárú háromszögben található, melynek magassága $FT = 7{,}4$ m.

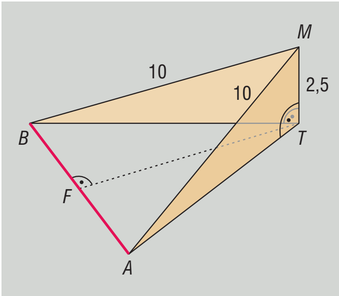
A BT hossza az $MTB_\triangle$-ben Pitagorasz-tétellel számítható:

$$BT^2 = 10^2 - 2{,}5^2, \quad \text{ebből} \quad AT = BT = 9{,}68 \text{ m.}$$

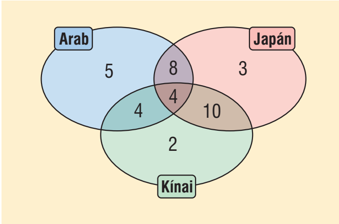
Az $ABT_\triangle$ alapja, szintén Pitagorasz-tétellel:

$$BF^2 = 9{,}68^2 - 7{,}4^2, \quad BF = 6{,}24 \text{ m}, \quad AB = 2BF = 12{,}48 \text{ m.}$$

Tehát a készülék a járda szélén egy 12,48 m hosszú szakaszt „tart megfigyelés alatt”.



17. A szöveg alapján a következő halmazábra készíthető el:



a) $p = \dfrac{16}{36} = 0{,}44;$ *b)* $p = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{36}{2}} = \dfrac{1}{105} = 0{,}0095.$

c) Az ábra alapján 10 olyan tanuló jár az osztályba, aki csak egy nyelvet tanul a fentiek közül.

18. A vásárolt edény térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \approx 89{,}6 \text{ liter.}$$

Ebbe az edénybe

$$\frac{89{,}6 - 17}{0{,}90} \approx 80{,}7 \text{ liter}$$

földet kell vásárolnia.

a) Több megoldás is lehetséges, például egy 50 literes, egy 20 literes, egy 10 literes és egy 5 literes csomag megfelel.

b) Az előbbiek ára összesen: 1477 Ft, a legolcsóbb a két darab 50 literes virágföld, 1450 Ft.

c) Ebben az esetben 89,6 liter földet kell vásárolnia, s ez most is többféleképpen lehetséges. Például vehet négy 20 literes és egy 10 literes csomagot.

A legolcsóbb ebben az esetben is a két 50 literes csomag.

5. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Normálalakban:

a) $A \cdot B = 1 \cdot 10^{24};$ *b)* $A + B = 5{,}2 \cdot 10^{12}.$

2. A síkon 8 különböző pont legfeljebb $\binom{8}{2}$, azaz 28 egyenest határoz meg.

3. A függvény

a) értelmezési tartománya: $x \in [-4; 4];$ *b)* értékkészlete: $y \in [-1; 4].$

4. Az eredeti háromszög kerülete 30 cm.

5. A túra teljes hossza 30 km.

6. Az ábrán jelölt tartomány:

$$C \cup (B \setminus A) \quad \text{vagy} \quad (A \cup B \cup C) \setminus (A \setminus C).$$

7. A paralelogramma átlóinak metszéspontjából a csúcsokba mutató vektorok:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad -\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}.$$

8. A háromszög két adott oldala által bezárt szög lehet $30°$ vagy $150°$.

9. A mondat tagadása B: „Van olyan erdész, akinek nincs zöld kalapja.”

10. Az egyenlőtlenség megoldása: $x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]5; \infty\right[$.

11. Az AB szakasz felezőpontja K. Ha a B végpont $B(b_1; b_2)$, akkor a szakasz felezőpontjának kooordinátáira vonatkozó összefüggés alapján:

$$\frac{5+b_1}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 1 \qquad \text{és} \qquad \frac{7+b_2}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 1.$$

A másik végpont koordinátái $B(1; 1)$.

12. A valószínűség:

$$P(\text{30-cal osztható}) = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}, \qquad P(\text{30-cal nem osztható}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

5. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A hatványozás azonosságainak és a törtkitevős hatvány definíciójának a használatával az egyenlet mindkét oldalát fel lehet írni 2 hatványaként:

$$2^{\frac{x}{3}} = 2^2 \cdot \left(2^3\right)^{2x},$$

$$2^{\frac{x}{3}} = 2^2 \cdot 2^{6x},$$

$$2^{\frac{x}{3}} = 2^{2+6x}.$$

Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelműsége alapján:

$$\frac{x}{3} = 2 + 6x, \qquad \text{ahonnan } x \text{ értéke: } x = -\frac{6}{17}.$$

Ellenőrzés után ez megoldása az egyenletnek.

b) Kezdeti kikötés $x \neq 1$.

$$2 \cdot \frac{x^2+1}{x-1} - 1 = \frac{4x}{x-1} + x,$$

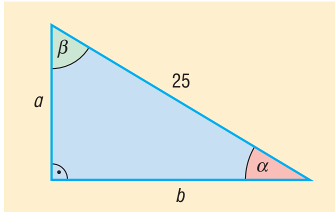
$$2x^2 + 2 - x + 1 = 4x + x^2 - x,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

A megoldóképlet alapján ez utóbbi egyenlet megoldásai: 1 és 3.

Az eredeti egyenletnek csak $x = 3$ a megoldása.

14. Legyen a derékszögű háromszög két befogójának hossza a és b.



a) A szokásos jelölésekkel a hegyesszögek koszinuszainak aránya:

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{25}}{\frac{b}{25}}=\frac{a}{b}\quad\Rightarrow\quad\frac{a}{b}=\frac{3}{4}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján $a^2+b^2=25^2$. A két összefüggésből $a=15$ és $b=20$. A háromszög befogói 15 cm és 20 cm hosszúak.

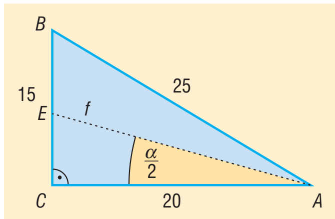
b) A kisebb hegyesszög koszinusza:

$$\cos\alpha=\frac{20}{25}\quad\Rightarrow\quad\alpha\approx 36{,}87°,$$

a másik hegyesszög pedig $\beta=90°-\alpha=53{,}13°$.

c) Az AEC derékszögű háromszögben:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{20}{f}\quad\Rightarrow\quad f=\frac{20}{\cos\frac{36{,}87°}{2}}\approx 21{,}08\text{ cm}.$$



15. A befektetni kívánt pénz legyen a forint.

a) Az (1) lehetőség szerint három év múlva $a\cdot 1{,}08^3\approx 1{,}2597a$ forintot kapunk.

A (2) lehetőség szerint három év múlva $a\cdot 1{,}01\cdot 1{,}08\cdot 1{,}15\approx 1{,}2544a$ forintot kapunk.

Takarékos Oszkár az első befektetési forma esetén jut több pénzhez 3 év letelte után.

b) Tegyük fel, hogy n év múlva legalább 5 000 000 forint áll majd rendelkezésére. Ez akkor következik be, ha

$$2\cdot 10^6\cdot 1{,}08^n+10^6\cdot 1{,}08^{n-1}\ge 5\cdot 10^6.$$

Osztva mindkét oldalt 10^6-nal és az egyenlőtlenséget rendezve:

$$2\cdot 1{,}08\cdot 1{,}08^{n-1}+1{,}08^{n-1}\ge 5,$$
$$3{,}16\cdot 1{,}08^{n-1}\ge 5,$$
$$1{,}08^{n-1}\ge\frac{5}{3{,}16}.$$

Mindkét oldal pozitív, így vehetjük a tízes alapú logaritmusát:

$$\lg 1{,}08^{n-1}\ge\lg\frac{5}{3{,}16},\qquad\text{amiből}\qquad n\ge 6{,}96.$$

Takarékos Oszkárnak hét évet kell várni hogy év végén legalább 5 000 000 forintot vehessen fel.

5. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Számítsuk ki 8, 12 és 14 legkisebb közös többszörösét: $[8;\,12;\,14]=168$.

A buszok a megállóból 168 percenként indulnak egyszerre. Reggel 5-től délelőtt 10-ig 300 perc, 11-ig 360 perc telik el. Mivel $2\cdot 168=336$, 10 és 11 óra között van olyan időpont, amikor a megállóból egyszerre indul mind a három járat, és ez az időpont 10 óra 36 perc.

b) Minden várakozó 3-féle buszra szállhat fel, ezért 3^{35}-féleképpen szállhatnak fel a buszokra.

c) A 70-es buszra $35 \cdot 0{,}2 = 7$ ember, a 71-esre $35 \cdot \frac{2}{7} = 10$, a 72-esre $35 - 7 = 18$ utas száll fel.

A kedvező esetek száma $\binom{35}{7} \cdot \binom{28}{10} \cdot \binom{18}{18}$, az összes eset a *b)* rész alapján 3^{35}.

A keresett valószínűség $\frac{\binom{35}{7} \cdot \binom{28}{10} \cdot \binom{18}{18}}{3^{35}} \approx 0{,}0018.$

d) A kiindulási pont $K(0;\, 0)$, az első megálló $E(-2;\, 3)$, a második megálló $M(2;\, 5)$, a harmadik $H(3;\, 3)$. A kiindulási helyétől a harmadik megállóig megtett út:

$$s = KE + EM + MH = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} + \sqrt{(2-(-2))^2 + (5-3)^2} + \sqrt{(3-2)^2 + (3-5)^2} =$$
$$= \sqrt{13} + \sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{13} + 3\sqrt{5} \approx 10{,}31 \text{ km}.$$

17. *a)* A stadion egyes soraiban levő ülőhelyek számai olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első eleme 200, differenciája 4. Tegyük fel, hogy n sor van a stadionban. A számtani sorozat első n elemének összegére vonatkozó összefüggés alapján:

$$11500 < n \cdot \frac{400 + (n-1) \cdot 4}{2} < 12000.$$

Az egyenlőtlenség-rendszert rendezve:

$$11500 < n \cdot (200 + (n-1) \cdot 2) < 12000,$$
$$5750 < n^2 + 99n < 6000.$$

A sorok n számára teljesülnie kell, hogy (1) $0 < n^2 + 99n - 5750$ és (2) $n^2 + 99n - 6000 < 0$.

Az (1) egyenlőtlenség megoldása:

$$n < \frac{-99 - \sqrt{32\,801}}{2} \approx -140{,}06 \quad \text{vagy} \quad n > \frac{-99 + \sqrt{32\,801}}{2} \approx 41{,}06.$$

A (2) egyenlőtlenség megoldása:

$$-141{,}43 \approx \frac{-99 - \sqrt{33\,801}}{2} < n < \frac{-99 + \sqrt{33\,801}}{2} \approx 42{,}43.$$

Mivel n pozitív egész, a két feltételt csak $n = 42$ teljesíti, tehát a stadionban 42 sor van.

b) Az összes lehetőség száma $\binom{8}{3}$.

Ha az első három között nincs angol versenyző, akkor 5 versenyző közül került ki a három dobogós helyezett. A kedvezőtlen esetek száma $\binom{5}{3}$.

Annak a valószínűsége, hogy valamelyik dobogós helyre angol futó került:

$$p = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{23}{28} \approx 0{,}82.$$

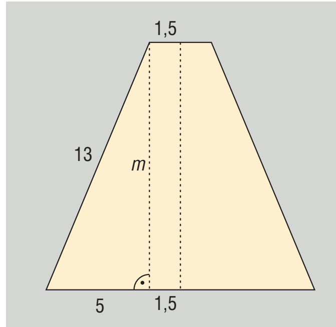
c) Az eladott jegyek árainak átlaga:

$$\frac{4740 \cdot 0{,}4 \cdot 3200 + 4740 \cdot 0{,}3 \cdot 4000 + 4740 \cdot 0{,}3 \cdot 4700}{4740} = 3890 \text{ forint}.$$

Az eladott jegyek árainak módusza 3200 forint, mediánja pedig 4000 forint.

18. *a)* Először az alsó egyenes csonka kúp alakú rész térfogatát számítjuk ki.

A csonka kúp alapkörének sugara $R = 6{,}5$ cm, fedőkörének sugara $r = 1{,}5$ cm. A kúp magasságát a tengelymetszetből számíthatjuk:



$$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}.$$

A csonka kúp térfogata:

$$V_{\text{csonka kúp}} = \frac{m \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \cdot \pi}{3} = 217\pi.$$

A felső hengeres rész térfogata:

$$V_{\text{henger}} = r^2 \cdot \pi \cdot m' = 27\pi.$$

A flaska teljes űrtartalma:

$$V = V_{\text{csonka kúp}} + V_{\text{henger}} = 244\pi \approx 766{,}55 \text{ cm}^3.$$

A 7,5 dl = 750 cm^3 bort beleöntve a flaskába: 766,55 – 750 = 16,55 cm^3 térfogatnyi hely marad. Mivel ez kisebb, mint a felső hengeres rész térfogata, az üvegben a bor szintje a felső hengeres résznél van, felülről számítva a következő magasságban:

$$h = \frac{V_{\text{hiány}}}{r^2 \cdot \pi} = \frac{16{,}55}{1{,}5^2 \cdot \pi} \approx 2{,}34 \text{ cm}.$$

b) Ha az üvegből annyit kiöntünk, hogy a bor szintje 3 centiméterrel csökkenjen, akkor ez

$$V^* = 1{,}5^2 \cdot \pi \cdot 3 \approx 21{,}21 \text{ cm}^3$$

bor kiöntését jelenti. A bor alkoholtartalma eredetileg $750 \cdot 0{,}125 \text{ cm}^3$. Az alkoholtartalom minden kiöntés után $\frac{750 - 21{,}21}{750} = \frac{728{,}79}{750}$-szeresére változik.

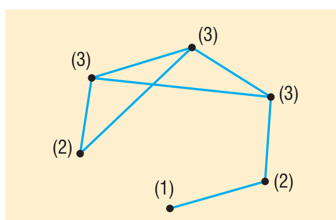
A kínált bor alkoholtartalma végül $750 \cdot 0{,}125 \cdot \left(\frac{728{,}79}{750}\right)^4 \text{cm}^3$.

A vendégeket Vendel $\dfrac{750 \cdot 0{,}125 \cdot \left(\dfrac{728{,}79}{750}\right)^4}{750} \cdot 100 \approx 11{,}14\%$-os borral kínálta.

6. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Az egyszerűsített tört: $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1) \cdot n.$

2. Kössük össze a haragosokat éllel. Az ábrán egy lehetséges megoldást látunk. (➡)



3. A szavazáson 7 530 000 fő vehetett volna részt.

4. A sorozat első 5 elemének összege 459.

5. *a)* Igaz. *b)* Hamis.

6. A focilabdát 5,73°-ban látjuk.

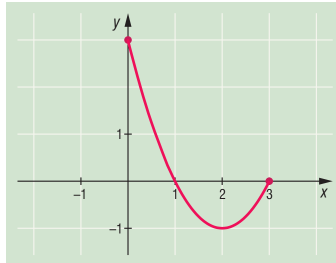
7. A megoldás kettő tizedesjegyre kerekítve: $x = 3{,}32$.

8. Az $ABC\sphericalangle = 21°$.

9. A fizetések átlaga 126 571 forint, módusza 90 000 forint, mediánja pedig 105 000 forint.

10. Az egyenlet diszkriminánsa $4\sqrt{2}$.

11. A függvény grafikonja az ábrán látható. (➡)



12. Annak a valószínűsége, hogy Ambrus Adri mellett ül:

$$\frac{2\cdot 5!}{6!} = \frac{1}{3}.$$

6. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

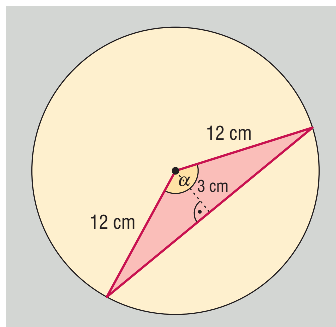
13. *a)* A 24 cm-es pizza átlagára négyzetcentiméterenként: $\dfrac{1150}{12^2\pi} \approx 2{,}54$ forint.

A 32 cm-es pizza átlagára négyzetcentiméterenként: $\dfrac{1650}{16^2\pi} \approx 2{,}05$ forint.

A 40 cm-es pizza átlagára négyzetcentiméterenként: $\dfrac{2650}{20^2\pi} \approx 2{,}11$ forint.

A 24 cm átmérőjű pizzának a legmagasabb az átlagos ára négyzetcentiméterenként.

b) A Hajni öccse által elfogyasztott pizza egy körszelet területének felel meg.



A körszelet α középponti szögére felírható:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{12} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 151°.$$

A körszelet területét megkapjuk úgy, hogy a körcikk területéből kivonjuk a háromszög területét:

$$T_{\text{körszelet}} = 12^2\cdot\pi\cdot\frac{151°}{360°} - \frac{12^2\cdot\sin 151°}{2} \approx 154{,}75\ \text{cm}^2.$$

Hajni öccse a pizza $\dfrac{154{,}75}{12^2\cdot\pi}\cdot 100 \approx 34{,}22$ százalékát ette meg.

c) Az 10110_2 kettes számrendszerbeli szám tízes számrendszerben: $16 + 4 + 2 = 22$.
Ez a futár az adott napon 22 címre szállított pizzát.

14. A kutya az első nap $2(20 + 60) = 160$ m utat tesz meg.

A második nap $2(20 + 50) + 160 = 300$ m utat tesz meg, mivel az első háztömb szélességét és még két háztömb közti távot kétszer kell megtennie az előző napihoz képest.

A harmadik nap $2(20 + 50 + 20 + 50) + 160 = 440$ m utat tesz meg, az előző napinál ismét $2(20 + 50) = 140$ méterrel többet.

A kutya által naponként megtett távolságok egy számtani sorozat tagjai. A sorozat első tagja 160, differenciája 140.

a) A kutya a hetedik napon $a_7 = a_1 + 6d = 160 + 6 \cdot 140 = 1000$ méter utat tesz meg.

b) Húsz nap alatt a kutya összesen $S_{20} = 20 \cdot \dfrac{2a_1 + 19d}{2} = 29800$ métert, azaz 29,8 km-t fut.

15. Az első kép alapján az első fájl 25%-a az összes másolás 7%-a, tehát az első fájl az összes másolandónak $\dfrac{7}{25} \cdot 100 = 28\%$-a.

Ezért és a második kép alapján a második fájl 15%-a az összes másolás $37\% - 28\% = 9\%$-a.

A második fájl az összes másolandó anyagnak $\dfrac{9}{15} \cdot 100 = 60\%$-a.

A harmadik fájl mérete tehát az összesnek $100\% - 28\% - 60\% = 12\%$-a.

Ha a teljes másolás a 91%-ánál tart, akkor a harmadik fájlból akkora rész másolása történt meg, amennyi az összes másolandónak $91\% - 28\% - 60\% = 3\%$-a.

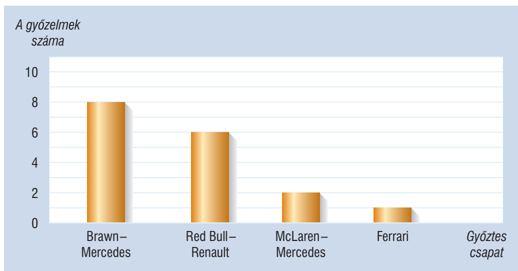
A 3% a 12%-nak $\dfrac{3}{12} \cdot 100 = 25\%$-a.

A harmadik fájl másolása során, ha a felső sávban 91% látható, akkor az alsó sávban 25%-ot láthatunk.

6. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Az átlagpontszám 53,95. Az átlagpontszámhoz Lewis Hamilton pontszáma van a legközelebb.

b) Az adatsor módusza a Brawn–Mercedes csapata, ők nyertek legtöbbször futamot.



c) Az összes helyszín száma 17, ebből a két megszüntetendő helyszínt $\binom{17}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani, tehát az összes esetek száma $\binom{17}{2}$.

Ha Magyarországot kiválasztanák, akkor a másik helyszín a fennmaradó 16 másik közül kerülne ki, tehát a kedvező esetek száma 16.

Annak a valószínűsége, hogy Magyarország a két kiválasztott közt lenne:

$$\frac{16}{\binom{17}{2}} = \frac{2}{17} \approx 0{,}12.$$

d) Mivel Schumacher 3 perc 20 másodpercenként körözi le a másik autót, ennyi idő alatt Schumacher a pálya hosszával, azaz 4381 méterrel több utat tesz meg.

Legyen az autó sebessége v. Mivel 3 perc 20 másodperc az $\dfrac{1}{18}$ óra, az $s = v \cdot t$ összefüggés alapján a megtett utak különbsége:

$$199 \cdot \frac{1}{18} - v \cdot \frac{1}{18} = 4{,}381, \quad \text{ebből} \quad v = 120{,}142.$$

A másik autó sebessége megközelítőleg 120 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

17. *a)* A mértani sorozat első tagja a, hányadosa q, az első három tagja a; $a \cdot q$; $a \cdot q^2$.

Felírhatók a következő összefüggések:

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 = 38 \quad \text{és} \quad a + a \cdot q = 20.$$

A két egyenlet bal oldalán a-t kiemelve, majd a megfelelő oldalakat elosztva kapjuk:

$$\frac{a(1+q+q^2)}{a(1+q)} = \frac{38}{20}.$$

Egyszerűsítve a-val, majd rendezve az egyenletet, egy másodfokú egyenlethez jutunk:

$$10q^2 - 9q - 9 = 0.$$

Innen q-ra két értéket kapunk: $q_1 = \frac{3}{2}$ és $q_2 = -\frac{3}{5}$.

A feladat szövegéből adódóan csak a pozitív q-val számolhatunk, amelyre $a = 8$.

A sorozat tagjai: 8; 12; 18.

A B helyen dolgozó régészek száma 12.

b) Elég belátni, hogy C-ből az AB egyenesre állított merőleges talppontja éppen a B pont. Ehhez pedig bizonyítani kell, hogy ABC háromszög B-ben derékszögű.

Számoljuk ki ABC háromszög oldalainak hosszát:

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{40},$$

$$BC = \sqrt{(13-4)^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{90},$$

$$AC = \sqrt{(13-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{130}.$$

Mivel $AB^2 + BC^2 = AC^2$, Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű, és a derékszög B-nél van.

c) Az új hely az ABC derékszögű háromszög körülírható körének középpontja. Thalész tételének megfordítása alapján ez a pont az AC átfogó felezőpontja.

A felezőpont koordinátáira vonatkozó összefüggés alapján:

$$O\left(\frac{2+13}{2}; \frac{3+0}{2}\right),$$

vagyis az újabb feltárandó hely a $\left(\frac{15}{2}; \frac{3}{2}\right)$ koordinátájú pontban van.

d) A következő exponenciális egyenletet kell megoldani:

$$72\,000 = 90\,000 \cdot 10^{-0{,}00005 \cdot t},$$

$$0{,}8 = 10^{-0{,}00005 \cdot t},$$

$$-0{,}00005t = \lg 0{,}8,$$

$$t = \frac{\lg 0{,}8}{-0{,}00005},$$

$$t \approx 1938.$$

A lelet kora megközelítőleg 2000 év.

18. *a)* A repülőgép európai idő szerint 21:15 perckor száll le. Az austini időt úgy kapjuk meg, hogy a budapesti időből kivonunk 7 órát:

$$(21{:}15 - 14{:}15 = 7),$$

azaz ha Budapesten 12 óra van, akkor Austinban reggel 5 óra.

Tehát a 2-es válasz a helyes.

b) Ha a kiválasztás sorendje nem számít, a Business Class 30 fője közül 2 embert $\binom{30}{2}$, a Prémium Economy Class 16 fője közül 2 embert $\binom{30}{2}$, a Prémium Economy Class 255 fője közül 2 embert $\binom{255}{2}$-féleképpen választhatunk ki.

Ez alapján az utasok közül mindhárom osztályból két-két főt

$$\binom{30}{2}\cdot\binom{16}{2}\cdot\binom{255}{2}\approx 1{,}69\cdot 10^{9}\text{-féleképpen}$$

választhatunk ki, ha a kiválasztás sorendje nem számít.

Mivel hat ember sorbarendezési lehetőségeinek száma $6!$, ezért

$$\binom{30}{2}\cdot\binom{16}{2}\cdot\binom{255}{2}\cdot 6!\approx 1{,}22\cdot 10^{12}\text{-féleképpen}$$

történhet a kiválasztás, ha a sorrendet is figyelembe vesszük.

c) A tányér területének 87%-a:

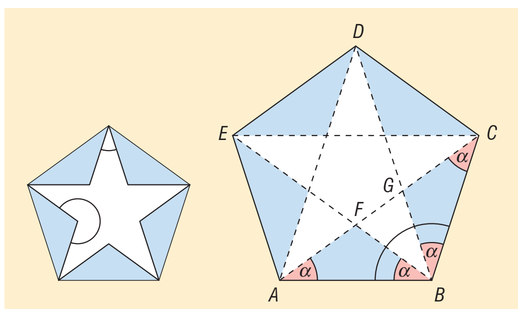
$$10^2\cdot\pi\cdot 0{,}87\approx 273{,}18\ \text{cm}^2.$$

Mivel a hasonlóság aránya $k = 5\cdot 10^6$, Texas állam szárazföldi területe négyzetcentiméterben mérve

$$273{,}18\cdot k^2 = 273{,}18\cdot\left(5\cdot 10^6\right)^2 = 6829{,}5\cdot 10^{12}\ \text{cm}^2.$$

A terület négyzetkilométerben megadva $682\,950\ \text{km}^2 \approx 680\,000\ \text{km}^2$.

d) A csillag alakzat hegyes, illetve konkáv szögének nagyságát kell meghatározni.



Az $ABCDE$ szabályos ötszög egy belső szöge:

$$ABC\sphericalangle = \frac{3\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ.$$

Az ABC egyenlő szárú háromszögben:

$$\alpha = BAC\sphericalangle = BCA\sphericalangle = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Hasonlóan 36°-osak az EBA és DBC szögek.

A csillag hegyesszögeinek nagysága:

$$FBG\sphericalangle = 108^\circ - 2\cdot 36^\circ = 36^\circ.$$

A csillag konkáv szögeinek nagyságát megkaphatjuk úgy, hogy a teljes szögből kivonjuk a szabályos ötszög egy belső szögét:

$$360^\circ - 108^\circ = 252^\circ.$$

7. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}=\dfrac{x-y}{x+y}$.

2. Az összes golyó $30+50=80$ darab. Így a keresett valószínűség $\dfrac{30}{80}=0{,}375$.

3. 6.

4. Rangsorba rendezve: 0, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10.

Nyolc elemre az alsó kvartilis $\dfrac{2+4}{2}=3$, a felső kvartilis $\dfrac{8+9}{2}=8{,}5$.

5. $T=5^2\cdot\sin 60°\approx 21{,}65\ \text{cm}^2$.

6. Az élek száma a fokszámok összegének a fele, azaz $\dfrac{2+2+2+2+4}{2}=6$.

7. A keresett egyenes egyenlete e: $-3x+2y=1$.

8. Az egyenlet két gyöke: $x_1=0$ és $x_2=-9$. A megoldás: $x=-9$.

9. A megoldás: *c)*, azaz $y=2^{x+1}-1$.

10. Mivel a koszinusza negatív, a megoldás tompaszög. A keresett érték 120°.

11. Jelölje x a két halmaz metszetének elemszámát. Logikai szita alapján $14=10+10-x$, innen $x=6$.

12. A logaritmus definíciója szerint $2x-4>0$, innen $x>2$. Intervallummal felírva $x\in\,]2;\infty[$.

7. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* $\dfrac{6+9+10+8+X}{5}=8$, vagyis $X=7$.

b) Az egyes napokon 5, 10, 9, 11 autó érkezett, a változások (+5, –1, +2) átlaga: $\dfrac{5-1+2}{3}=2$.
Ennek alapján péntekre $11+2=13$ autó várható.

c) Ha egyik napon sem érkezett olyan jármű, amelyen egyszerre végzik el a kétfajta beavatkozást, akkor a valószínűség 1. A legkisebb értéket pedig akkor kapjuk, ha minden nap a lehető legtöbb jármű vesz részt mindkét típusú beavatkozásban, azaz hétfőn 5 (1), kedden 9 (1), szerdán 9 (1), csütörtökön 8 (3). Zárójelben azon járművek száma szerepel, amelyeken csak az egyik beavatkozást végzik el. Így a kérdéses valószínűség:

$$\frac{1+1+1+3}{37}\approx 0{,}16.$$

14. *a)* $2^{2x+4}=8=2^3$, ami csak akkor lehetséges, ha $2x+4=3$. Innen $x=-0{,}5$.

b) $\dfrac{x}{x+3}<0$ két esetben lehetséges.

I. eset: ha $x<0$ és $x+3>0$. Ekkor $-3<x<0$.
II. eset: ha $x>0$ és $x+3<0$. Ilyen valós szám nincs.
Tehát a feladat megoldáshalmaza intervallummal: $]-3;0[$.

15. *a)* Az egyre növekvő kerületű körök sugarai: $r,\ 2r,\ 3r,\ \ldots,\ nr,\ \ldots\ (n \in \mathbb{Z}^+)$.
A körök kerülete: $K_1 = 2r \cdot \pi,\ K_2 = 2 \cdot (2r) \cdot \pi,\ K_3 = 2 \cdot (3r) \cdot \pi,\ \ldots,\ K_n = 2 \cdot (nr) \cdot \pi,\ \ldots$
Számtani a sorozat, ha a szomszédos elemek különbsége állandó. Ez teljesül a kerületekre:

$$K_{n+1} - K_n = 2 \cdot [(n+1) \cdot r] \cdot \pi - 2 \cdot (nr) \cdot \pi = 2r \cdot \pi = K_1 = \text{állandó}.$$

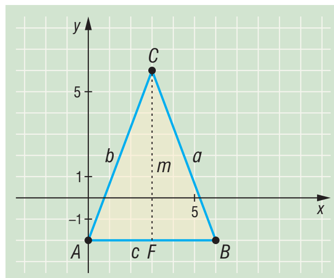
b) Jelölje a_n az n-edik körgyűrűbe került darabkák számát, ami arányos a kerülettel.
Mivel $K_n = K_{n-1} + K_1$, ezért $a_n = a_{n-1} + a_1$ (ahol $a_1 = 4$), tehát:

$$a_1 + (n-1)d = a_1 + (n-2)d + a_1,$$
$$nd - d = nd - 2d + 4,$$
$$d = 4.$$

Így a darabkák száma: $S_{20} = 840$. Ha egy járólap 6 darabkát adott ki, akkor 140 járólapot kellett miszlikbe aprítaniuk.

7. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Készítsünk ábrát.

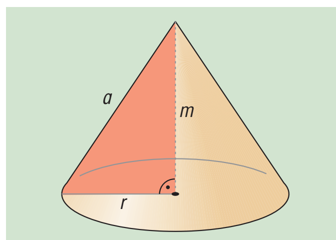


Az egyenlő szárú háromszög magassága merőlegesen felezi az alapot, így $F(3; -2)$.
Mivel $AB \parallel x$ tengellyel, F-ből felfelé kell lépnünk 8 egységet a magasság mentén, így jutunk el a C pontig: $C(3; 6)$.

b) Tudjuk, hogy $d(AB) = 6$ és $m = 8$, így

$$T_{ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ területegység.}$$

c) Készítsünk ábrát a kúpról.



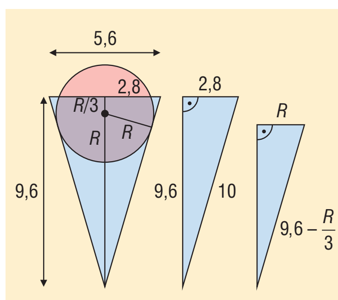
Mivel $d = 6$ cm, ezért $r = 3$ cm. Tudjuk, hogy $m,\ r,\ a\ (> 0)$ derékszögű háromszöget alkot:

$$3^2 + 4^2 = a^2, \quad \text{innen} \quad a = 5.$$

A kúp felszíne:

$$A = r^2 \cdot \pi + ar\pi = r\pi \cdot (r + a) =$$
$$= 3\pi \cdot (3 + 5) = 24\pi \approx 75{,}4 \text{ cm}^2.$$

17. Képzeletben vágjuk el a tölcsért és a fagyit középen egy függőleges síkkal. A metszetet rajzoljuk le.



a) A rajzon kiemelt két háromszög hasonló. (A tölcsér alkotójának hosszát kiszámíthatjuk a Pitagorasz-tétellel, értéke 10 cm.) Felírva az arányokat:

$$\frac{9{,}6 - \dfrac{R}{3}}{R} = \frac{10}{2{,}8}, \qquad \text{ahonnan} \qquad R \approx 2{,}4585 \text{ cm}.$$

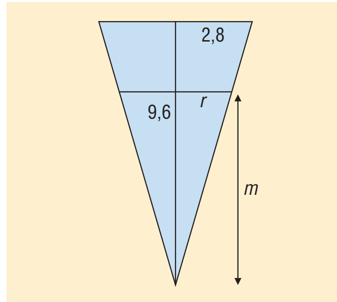
Így a fagyi térfogata:

$$V_{\text{fagyi}} = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi \approx 62{,}24 \text{ cm}^3.$$

Kerekítve, a gombóc térfogata 62 cm^3.

b) Ha elolvad a fagyi, és az olvadt csoki „kitölti” a kúp alakú tölcsért, akkor szintén találunk két hasonló háromszöget:

$$\frac{m}{r}=\frac{9,6}{2,8}=\frac{24}{7},\quad \text{innen}\quad m=\frac{24}{7}r.$$



Feltételezzük, hogy a fagyi térfogata nem változott (illetve a változástól eltekintünk), ezért:

$$V_{\text{olvadt csoki}}=\frac{r^2\cdot\pi\cdot m}{3}=\frac{r^2\cdot\pi\cdot\frac{24}{7}r}{3}=\frac{8r^3\cdot\pi}{7}=62,$$

amiből $r\approx 2,58$ cm és $m\approx 8,86$ cm.

18. Minden esetben megfelelő módon kell behelyettesítenünk a megadott képletbe.

a) $L=25\text{ cm}=0,25\text{ m},\quad a=0,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\quad T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{0,25}{9,81-0,81}}=\frac{\pi}{3}\,(\text{s}).$

b) $T=2\,(\text{s}),\quad a=8,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\quad 2=2\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{9,81-8,81}}\quad\Rightarrow\quad L=\frac{1}{\pi^2}\approx 0,1013\,(\text{m}).$

c) $T=3\text{ s},\quad L=1\text{ m}.\quad 3=2\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{9,81-a}}\quad\Rightarrow\quad a=9,81-\frac{4\pi^2}{9}\approx 5,42\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

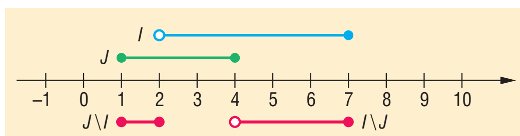
8. Feladatsor I. rész – megoldások

1. A végződés lehet 12, 32, 52, 72, 92, tehát X lehet 1, 3, 5, 7, 9.

2. A külső pontból a körhöz húzott érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. A Pitagorasz-tételből $x^2+6^2=10^2$, ebből $x=8$.

3. Az első állítás megfordítása igaz. A második állítás megfordítása igaz. A harmadik állítás megfordítása hamis, mert az 1 önmagával és 1-gyel is osztható, mégsem prím.

4. Az intervallumok az ábrán láthatók.



5. $\binom{10}{4}\cdot 4!=\frac{10!}{(10-4)!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040.$

6. $\dfrac{\frac{15}{100}+\frac{62}{80}+\frac{58}{100}+\frac{n}{80}}{4}=\dfrac{15+77,5+58+1,25n}{400}\geq 0,6,$ innen $n\geq 71,6.$

Ha a tanár csak egész pontokat ad, akkor legalább 72 pontost.

7. Mivel $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ezért negatív.

8. Az előjel miatt $f(x)$ lefelé nyíló parabola, a zárójelben levő +4 miatt eltoltuk vízszintesen negatív irányba 4-gyel. Tehát a $]-\infty;\,-4]$-on monoton növő.

9. Ha eredetileg x árú az áru, akkor a vásárt követő csökkentés után $x\cdot 1,4\cdot 0,6=x\cdot 0,84$ az ára, s ez az eredeti árnál kisebb. Mégpedig 16%-kal.

10. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9.$

11. A logaritmus definíciója szerint $2^p = 3$.

12. A valószínűség a területek aránya. A keret és a kép konkrét nagysága nem számít, tekintsük a kör sugarát egynek, így:

$$T_{\text{képkeret}} = 4 \quad \text{és} \quad T_{\text{körkép}} = 1^2 \cdot \pi.$$

A találati valószínűség:

$$p = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$$

8. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3} = \dfrac{5\pm 1}{6}$. $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{2}{3}$.

b) A 2. egyenletből kifejezve y-t $(y = 2 + x)$ és visszahelyettesítve az 1. egyenletbe:

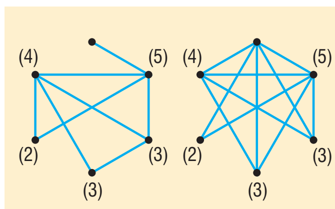
$$(2+x)^2 + 2x = 4 + 7x,$$
$$4 + 4x + x^2 + 2x = 4 + 7x,$$
$$x^2 + 6x + 4 = 4 + 7x \qquad / -4 - 7x$$
$$x^2 - x = 0,$$
$$x(x-1) = 0,$$

innen $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Visszahelyettesítve a kifejezésbe: $y_1 = 2 + 0 = 2$ és $y_2 = 2 + 1 = 3$.

14. *a)* A három házaspár összesen hat fő. Ha valakinél elvágjuk a kört és „kiterítjük” az ülésrendet, akkor az eredmény $5! = 120$.

b) Most az egyik pár első tagjánál vágjuk el a sort és kiterítjük az ülésrendet, akkor 2-féle módon lehet a másik két párt leültetni, illetve minden páron belül 2-2-féleképpen a házastársakat. Így az eredmény $2\cdot 2^3 = 16$.

c) Képzeljük el a hat személyt, mint egy gráf hat pontját. A gráf élei azt reprezentálják, hogy két személy egymás között kicserélte a salátástálat (az mindegy, hogy ki kinek adta). Ekkor az 5 fokú pont minden más ponttal szomszédos, tehát a hatodik pont fokszáma is legalább 1.



A 4 fokú pontból tudunk éleket rajzolni csak a többi ponthoz, illetve a leendő két 3 fokú pontot összekötve fokszámuk 3 lesz. Tehát az utolsó pont minimális fokszáma 1.

Másodszorra kössük össze a 4 fokú pontot a hatodik ponttal és a két 3 fokú ponttal. Végül kössük össze a 2 fokú pontot is a hatodik ponttal. Így a hatodik pont fokszáma 5 lesz. Tehát ennyi információ birtokában csak annyit állíthatunk, hogy a hatodik személy az asztalnál legalább egyszer, legfeljebb ötször adta-vette a salátástálat.

15. *a)* Ha egy $y = f(x)$ függvény áthalad az $(x'; y')$ ponton, akkor teljesül rá, hogy $f(x') = y'$. Azaz $f(4) = 2\cdot 4^2 - 5\cdot 4 + c = 16$, innen $c = 4$.

b) Az $f(x)$ függvény pontosan ott metszi az x tengelyt, ahol $y = f(x) = 0$. Azaz $2x^2 - 5x + 4 = 0$.

A másodfokú egyenletnek nincs megoldása, hiszen $D = 5^2 - 4\cdot 2\cdot 4 = 25 - 32 = -7 < 0$.

Mivel normál állású parabola, eszerint végig az x tengely felett halad, nem metszi azt.

c) Ha az x tengely felett halad, akkor függőlegesen lefelé kell elmozgatni, hogy érintse a tengelyt. Ezt pozitív konstans elvételével érhetjük el.

I. megoldás.

Az érintéshez a diszkriminánsnak 0-vá kell válnia:

$$D = 25 - 8(4 - p) = -7 + 8p = 0, \quad \text{ahonnan} \quad p = \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

II. megoldás.

Alakítsuk a függvényt teljes négyzetté:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 4 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} + 4 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}.$$

Innen látható, hogy az utolsó tag elhagyása, azaz a görbe 0,875 egységgel való lefelé mozdítása után már érinti az x tengelyt.

8. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. Készítsünk a hotelszobákról egy összefoglaló táblázatot.

	Egy szinten található azonos típusú		Összesen a hotelben	
	szobák	közülük konyhával rendelkezik	szoba	konyhával
2 személyes	7	2	91	26
4 személyes	8	2	104	26
6 személyes	5	2	65	26
Összesen	20	6	260	78

a) A 8 párnak kétszemélyes szobákat utalnak ki a hotel 91 szobájából valamilyen sorrendben. Erre $\frac{91!}{(91-8)!}$-féleképpen kerülhet sor. A kétgyermekes pároknak négyszemélyes szobákra van szükségük, ezért számukra $\frac{104!}{(104-3)!}$ lehetőség adódik. (A szobákat és a párokat is megkülönböztetjük.) A kérdésre a válasz ezek szorzata, hiszen függetlenek: $\frac{91!}{(91-8)!} \cdot \frac{104!}{(104-3)!}$.

b) A felső öt emeleten összesen $5 \cdot 8 = 40$ négyszemélyes szoba van. Hogy pont ilyenbe kopog be az illető, annak valószínűsége $P_1 = \frac{40}{260}$. Az alsó nyolc emeleten $8 \cdot 5 = 40$ hatszemélyes szoba van, így utóbbi $P_2 = \frac{40}{260}$ valószínűsége megegyezik az előbbivel.

c) Mivel a feladat szövege tartalmazza a „legalább” szót, érdemes megvizsgálni a komplementer eseményre való áttérés lehetőségét. 39 szobát választunk ki összesen, közülük legalább egy konyhával rendelkezik: akkor rendelkezhet azzal 1, 2, 3, 4 stb. Ez nagyon sok lehetőség, megéri áttérni a komplementer eseményre!

Ha a kiválasztás után nincs konyhás szoba, akkor szintenként a kétszemélyesek közül 5, a háromszemélyesek közül 6, a hatszemélyesek közül 3 szoba jöhet szóba $\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{5}$ valószínűséggel.

Ugyanez érvényes mind a 13 szintre, tehát az ellentett esemény valószínűsége $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{5}\right)^{13}$.

Magának a kérdezett eseménynek pedig $1 - \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{5}\right)^{13}$ a valószínűsége.

17. Jelölje S a szépirodalmat, K a képregényeket, U az újságot olvasó tanulók halmazát. A feladat szövege szerint:

(1) $|S|+|K|-|S\cap K|=15$; (2) $|K|+|U|-|K\cap U|=17$;

(3) $|S|+|U|-|S\cap U|=18$; (4) $\frac{1}{2}\cdot|S|=|S\cap K|$;

(5) $|K|-6=|K\cap U|$; (6) $|S\cap U|=3$;

(7) $|S\cap U\cap K|=1$.

(4)-et (1)-be helyettesítve: $\frac{1}{2}\cdot|S|+|K|=15$.

(5)-öt (2)-be helyettesítve: $|U|=11$.

(6)-ot (3)-ba helyettesítve: $|S|+|U|=21$, ebből $|S|=10$, és így $|K|=10$.

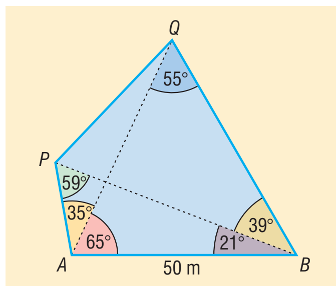
Ekkor (4)-ből $|S\cap K|=5$, (5)-ből $|K\cap U|=4$.

Tehát

$$30-(|S|+|K|+|U|-|S\cap K|-|S\cap U|-|K\cap U|+|S\cap U\cap K|)=$$
$$=30-(10+10+11-5-3-4+1)=10,$$

azaz 10-en nem olvassák egyiket sem. Mivel $10:30\approx 0{,}333$, ez a tanulók 33,3%-át jelenti.

18. A következő ábrát rajzolhatjuk fel:



Felírva a szinusztételt az APB és QAB háromszögekben, kiszámíthatjuk AP és AQ hosszát:

$$\frac{AP}{50}=\frac{\sin 21^\circ}{\sin 59^\circ} \quad \text{és} \quad \frac{AQ}{50}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 55^\circ},$$

ahonnan $AP\approx 20{,}9$ m és $AQ\approx 52{,}861$ m.

Alkalmazzuk a koszinusztételt APQ háromszögben:

$$PQ^2=AP^2+AQ^2-2AP\cdot AQ\cdot\cos 35^\circ\approx 1421{,}1$$

amiből $PQ\approx 37{,}7$ m.

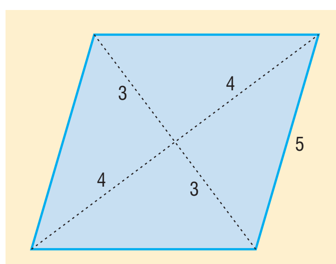
Nagy Papucsnak közelítőleg 37,7 m hosszú szárítókötelet kell sodornia.

9. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Az emelés mértéke 4536 Ft. $\frac{4\,536}{37\,800}=0{,}12$, tehát 12%-os az áremelés.

2. $90^\circ : 6 = 15^\circ$. A hegyesszögek 15° és 75°.

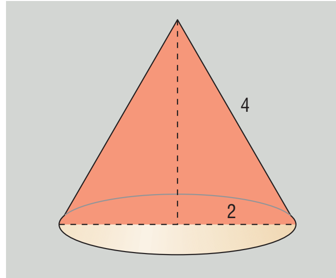
3. A rombusz átlói felezik egymást, és merőlegesek is egymásra. Pitagorasz tétele szerint a rombusz oldala 5 egység, így kerülete 20 egység.



4. A forgáskúp tengelymetszete az ábrán látható. (➡)

A kúp felszíne:

$$A = 2^2 \cdot \pi + 2\pi \cdot 4 = 12\pi.$$



5. Zárójelfelbontás, beszorzás és összevonás után:

$$7x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Ennek megoldásai: $x_1 = \frac{3}{7}$ és $x_2 = -1.$

6. A kedvező esetek száma 3 (prímszámok: 2, 3, 5), az összes esetek száma 6, így a prímszám dobásának valószínűsége:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

7. Ha a sorozat ötödik tagja a_5 és a differencia d, akkor a következő összeget kell kiszámítanunk:

$$3 - 4d + 3 - 3d + 3 - 2d + 3 - d + 3 + 3 + d + 3 + 2d + 3 + 3d + 3 + 4d = 9 \cdot 3 = 27.$$

8. Az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenes meredeksége 2, ezért a rá merőleges egyenes meredeksége $-\frac{1}{2}$, így az egyenlete:

$$y - 2 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1), \quad \text{vagy más alakban:} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

9. Az utak egyenlőségéből:

$$\frac{v_t}{v_{gy}} = \frac{t_{gy}}{t_t} = \frac{45}{75} = 0{,}6,$$

tehát 60%.

10. $1{,}4^3 = 2{,}744$-szeresére.

11. Az 1-től 100-ig terjedő egész számok között 50 db osztható 2-vel, 33 db osztható 3-mal, és 16 db osztható 2-vel is meg 3-mal is, tehát 6-tal.

Így $50 + 33 - 16 = 67$ olyan szám van, amely vagy 2-vel, vagy 3-mal osztható, tehát 33 olyan van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal.

12. Alkalmazzuk azt a területképletet, amely szerint a háromszög területe két oldalának és a közbezárt szög szinuszának szorzata osztva 2-vel:

$$t = \frac{3 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 6\sqrt{3}.$$

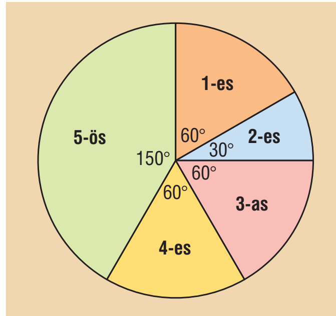
9. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A $2\,800\,000 = 2\,000\,000 \cdot q^8$ egyenletből $q = 1{,}043$, tehát az éves kamat 4,3%.

b) A $2\,800\,000 = 2\,000\,000 \cdot 1{,}03^n$ egyenlet megoldása: $n = \frac{\lg 1{,}4}{\lg 1{,}03} \approx 11{,}38$, tehát 12 év múlva éri el a 2 800 000 Ft-ot a betét.

14. *a)* Az adatok táblázatba foglalva:

Érdemjegy	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös
Darab	2	1	2	2	5



Egy adathoz tartozó középponti szög:

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

A kördiagram jobbra látható.

b) Az átlag:

$$\frac{2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 5\cdot 5}{12} \approx 3,583.$$

A medián 4. A módusz: 5.

A szórás:

$$\sqrt{\frac{2\cdot(1-3,583)^2 + 1\cdot(2-3,583)^2 + 2\cdot(3-3,583)^2 + 2\cdot(4-3,583)^2 + 5\cdot(5-3,583)^2}{12}} \approx 1,498.$$

15. *a)* A Thalész-tétel megfordítása miatt a háromszög köré írható kör sugara megegyezik az átfogó felével és az átfogóhoz tartozó súlyvonal hosszával.

A válasz: a súlyvonal 12,5 cm hosszú.

b) Mivel az átfogó 25 cm, Pitagorasz-tétellel:

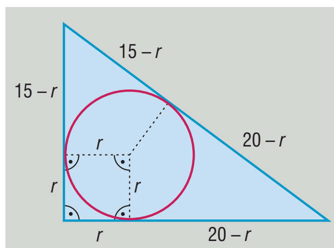
$$15^2 + b^2 = 25^2, \quad \text{amiből} \quad b = 20 \text{ cm}.$$

A kerület:

$$K = 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}.$$

c) A terület:

$$T = \frac{a\cdot b}{2} = \frac{15\cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2.$$



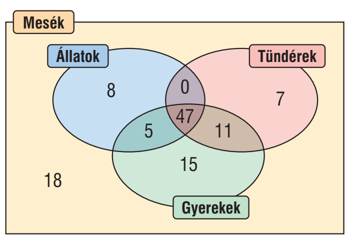
d) A külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők.

Az átfogóra felírható:

$$25 = (15 - r) + (20 - r), \quad \text{amiből} \quad r = 5 \text{ cm}.$$

9. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* A halmazábra:



b) A logikai szita alapján a mesék száma:

$$18 + 60 + 65 + 78 - (47 + 52 + 58) - 47 = 111.$$

c) A valószínűség: $\frac{7}{65} \approx 0{,}108.$

d) A valószínűség: $\frac{\binom{47}{2}}{\binom{111}{2}} \approx 0{,}177.$

17. *a)* $p = 0{,}94^{25} \approx 0{,}213.$

b) $p = \binom{40}{5} \cdot 0{,}06^5 \cdot 0{,}94^{35} \approx 0{,}0587.$

c) Az arányossági tényezőt x-szel jelölve, a bevont felület:

$$A = 2x \cdot 3x + 2 \cdot (x \cdot 2x + x \cdot 3x) = 400.$$

Megoldva: $x = 5$ cm.
A doboz élei: 10 cm, 15 cm, 5 cm.
A térfogata: $750\ \text{cm}^3 = 0{,}75$ liter.

18. *a)* $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 \cdot 2$ jegyű lesz a szám.

Ez az összeg $\frac{1+9}{2} \cdot 9 + 20 = 45 + 20 = 65.$

Tehát a leírt szám 65 jegyű.

b) Az egyesek helyén: 3; 13-ban 13-szor; 23-ban 23-szor; …
Összesen:

$$1 + 13 + 23 + 33 + 43 + 53 + 63 + 73 + 83 + 93 = 1 + \frac{13+93}{2} \cdot 9 = 478.$$

A tízesek helyén 30-ban 30-szor; 31-ben 31-szer; 32-ben 32-szer; …
Összesen:

$$30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 = \frac{30+39}{2} \cdot 10 = 345.$$

Tehát az egy- és kétjegyű számok leírásakor 823-szor kell leírni a 3-as számjegyet.

c) Az egy- és kétjegyű számok leírásával kapott szám jegyeinek száma:

$$45 + 2 \cdot \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 9855,$$

ami azt jelenti, hogy a 2023 jegyű számban csak egy- és kétjegyű számok vannak.
Legyen n az utolsó kétjegyű szám, amit leírunk, ekkor:

$$45 + 2 \cdot \frac{10+n}{2} \cdot (n - 90) = 2023.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai: $n_1 = 44{,}9$ és $n_2 = -45{,}9$, amiből csak a pozitív lehet helyes.
Eredményünk azt jelenti, hogy a 2023 számjegyig nem kell leírni az összes 45-öt.
Mivel az egyjegyűek leírásával 45 jegyű lesz a szám, a páratlan helyen a kétjegyű számok második számjegye szerepel, ezért a keresett számjegy: 5.

10. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $x = 135°$.

2. $\frac{4}{9}$.

3. $A'(-7; 9)$.

4. A dobott számok összege 11 vagy 12 lehet. 11-et úgy lehet dobni, hogy egyik kockán 5-öst, a másikon 6-ost dobunk, ennek valószínűsége $\frac{2}{36}$. 12-t csak úgy, hogy mindkét kockán 6-ost dobunk, ennek valószínűsége $\frac{1}{36}$, tehát a keresett valószínűség: $\frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

5. A két keresett szög mértéke $6x$ és $7x$, ezek összege: $6x + 7x = 130°$. Ebből $x = 10$, tehát a két szög nagysága 60° és 70°.

6. A gömb sugarát jelölje r, akkor a térfogata:

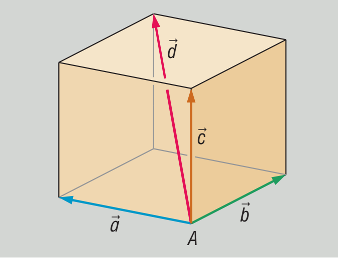
$$\frac{4r^3\pi}{3} = \frac{9}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{27}{8} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}.$$

A gömb felszíne:

$$4r^2\pi = 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot \pi = 9\pi.$$

7. Az ábrán az adott három vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. A keresett testátló vektor:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$



8. Az életkorok összege: $7 \cdot 26 = 182$, a kiállítás után: $6 \cdot 27 = 162$. A kiállított játékos 20 éves.

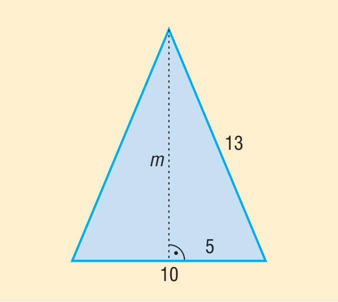
9. Az $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 66$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 12$ és $n_2 = -11$. Tehát a teljes gráfnak 12 csúcsa van.

10. A háromszög magassága Pitagorasz tételével kiszámítható:

$$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}.$$

A háromszög területe:

$$t = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$

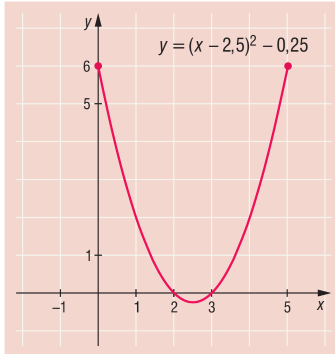


11. A szám 70%-a a szám 0,7-szerese, tehát $0{,}7 \cdot \frac{a}{5} = 35$, amiből $a = 250$.

12. Átalakítva a hozzárendelési szabályt:

$$x \mapsto \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

A függvény legnagyobb értéke 6, ezt a 0 és a 6 helyen veszi fel. A legkisebb értéke a parabola tengelypontjában, $x = 2{,}5$-nél van, ez $y = -0{,}25$.



10. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* 1. Hamis, ha szerepel közöttük a 0, akkor a szorzat 0.

2. Igaz, nem lehet 2 pozitív, 2 negatív.

3. Igaz, kettő páros és kettő páratlan szám négyzeteinek összege páros.

4. Hamis, lehet köztük két 3-mal osztható is, pl: 3, 4, 5, 6.

5. Igaz, minden második egész szám páros.

b) Legyen a legkisebb szám x.

Ekkor:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = 1374.$$

Rendezés után: $x^2 + 3x - 340 = 0$, aminek a megoldásai: $x_1 = 17$ és $x_2 = -20$.

Tehát a négy szám:

$$17,\quad 18,\quad 19,\quad 20 \qquad \text{vagy} \qquad -20,\quad -19,\quad -18,\quad -17.$$

Ellenőrzéssel megmutatható, hogy mindegyik megoldás.

14. *a)* Legyen az eredeti háromszög alapjának hossza a, szárának hossza b.

Ekkor az eredeti háromszögben: $a + 2b = 57$.

A felcserélés után kapott háromszögben: $b + 2a = 54$.

Az $\left.\begin{aligned} a + 2b &= 57 \\ b + 2a &= 54 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $a = 17$ és $b = 20$.

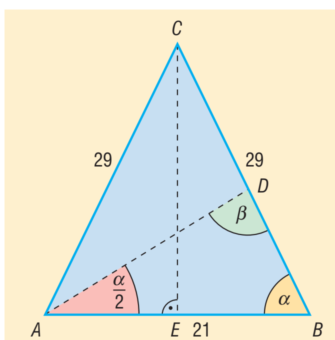
Tehát az eredeti háromszög alapja 17 cm, szára 20 cm hosszú.

b) Az EBC háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{10{,}5}{29}, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha = 68{,}77°.$$

Az ABD háromszögben:

$$\frac{\alpha}{2} = 34{,}38°, \qquad \text{amiből} \qquad \beta = 76{,}85°.$$



A szinusztétellel:

$$\frac{BD}{21} = \frac{\sin 34{,}38°}{\sin 76{,}85°}, \qquad \text{amiből} \qquad BD = 12{,}18 \text{ és } CD = 16{,}82.$$

Tehát a szögfelező a szemközti szárat 12,18 cm és 16,82 cm hosszú részekre vágja.

15. *a)* 12 óra után a 12 osztói: 01, 02, 03, 04, 06, 12.
13 óra után: 01, 13.
14 óra után: 01, 02, 07, 14.
Tehát az adott időszakban 12-szer fordul elő, hogy a percek száma osztója az órák számának.

b) 08 óra után: 08, 16, 24, 32, 40, 48, 56.

09 óra után: 09, 18, 27, 36, 45, 54.

10 óra után: 10, 20, 30, 40, 50.

Tehát az adott időszakban 18-szor fordul elő, hogy az órák száma osztója a percek számának.

10. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Ha $x = 0$:

$$T(0) = 73 \cdot 10^0 + 22 = 95 \text{ °C}.$$

b) Ha $x = 37$:

$$T(37) = 73 \cdot 10^{-\frac{37}{37}} + 22 = 73 \cdot 10^{-1} + 22 = 7{,}3 + 22 = 29{,}3 \text{ °C}.$$

c) A $60 = 73 \cdot 10^{-\frac{x}{37}} + 22$ egyenlet megoldása:

$$\frac{38}{73} = 10^{-\frac{x}{37}},$$

$$-\frac{x}{37} = \lg\frac{38}{73},$$

$$x = -37 \cdot \lg\frac{38}{73} = 10{,}5.$$

Körülbelül 10,5 perc múlva lesz 60 °C-os a tea.

d) A tea feletti rész térfogata:

$$V = 2 \cdot 3{,}75^2 \cdot \pi \approx 88{,}36 \text{ cm}^3,$$

ennek vízzel való kitöltéséhez $\dfrac{88{,}36}{0{,}9} = 98{,}18 \text{ cm}^3$ jégre van szükség.

Egy jéggolyó térfogata:

$$v = \frac{4 \cdot 1{,}5^3 \cdot \pi}{3} \approx 14{,}18 \text{ cm}^3.$$

$\dfrac{98{,}18}{14{,}18} \approx 6{,}92$, ezért legfeljebb 6 jéggolyót tehetünk a teába anélkül, hogy kifolyna a bögréből.

17. *a)* Az összes lap 32, az összes esetek száma:

$$\binom{32}{5} = 201\,376.$$

Mindkét színből 8 lap van, a kedvező esetek száma:

$$\binom{8}{3} \cdot \binom{8}{2} = 1\,568.$$

A valószínűség:

$$p = \frac{1\,568}{201\,376} \approx 0{,}0078.$$

b) Már csak 27 lapból osztanak 5-t, az összes eset:

$$\binom{27}{5} = 80\,730.$$

A 27 lap között még 8 piros van, 19 nem piros, a kedvező esetek száma:

$$\binom{19}{5} = 11\,628.$$

A valószínűség:

$$p = \frac{11\,628}{80\,730} \approx 0{,}144.$$

c) Csak 22 lapból osztanak 5-öt, az összes eset:

$$\binom{22}{5} = 26\,334.$$

A csomagban még 4 zöld, 7 tök és 6 piros van, a kedvező esetek száma:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{6}{1} = 756.$$

A valószínűség:

$$p = \frac{756}{26\,334} \approx 0{,}0287.$$

d) Az összes esetek száma:

$$\binom{32}{5} \cdot \binom{27}{5} \cdot \binom{22}{5} \approx 4{,}28 \cdot 10^{14}.$$

Mivel 3-szor 4 figura kiesik, a kedvező esetek száma:

$$\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \approx 1{,}17 \cdot 10^{10}.$$

A valószínűség:

$$p \approx 0{,}27 \cdot 10^{-4}.$$

18. *a)* Maximális akkor lehet, ha minden más jegy jeles, ekkor az átlag: 3,4.
Minimális úgy lehet, ha minden más jegy elégséges, ekkor az átlag: 1,6.

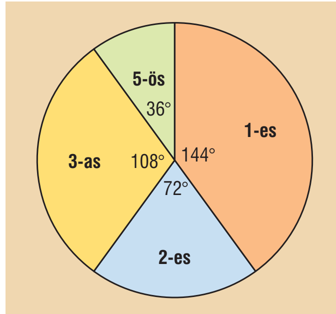
b) Táblázat a jegyekről:

Érdemjegy	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös
Darab	12	6	9	0	3

Egy adathoz tartozó középponti szög:

$$\frac{360^\circ}{30} = 12^\circ.$$

A kördiagram jobbra látható.



c) A módusz 1, a medián 2.

d) Az átlag:

$$\frac{12 + 12 + 27 + 15}{30} = 2,2.$$

A szórás:

$$\sqrt{\frac{12 \cdot (1 - 2,2)^2 + 6 \cdot (2 - 2,2)^2 + 9 \cdot (3 - 2,2)^2 + 3 \cdot (5 - 2,2)^2}{30}} \approx 1,43.$$

e) A $[2,2 - 1,43;\ 2,2 + 1,43] = [0,77;\ 3,63]$ intervallumon kívül csak 3 adat van (az 5-ösök).