



# EMELT SZINTŰ FELADATSOROK

## 1. Feladatsor / A – megoldások

1. a) Az egyenlet a hatványozás azonosságai alapján átrendezve:

$$(2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 12 = 0.$$

Ennek megoldásai:

$$(2^x)_1 = 6 \text{ és } (2^x)_2 = 2, \text{ amiből } x_1 = \log_2 6 \approx 2,585 \text{ és } x_2 = 1.$$

A lépések során ekvivalens átalakításokat végeztünk.

- b) A logaritmus definíciója és azonosságai alapján az egyenlőtlenség átalakítható a következő alakba:

$$\log_3 \frac{x}{x+3} < \log_3 9.$$

Az  $f(x) = \log_3 x$  logaritmus szigorúan monoton növekvő függvény, mert  $3 > 1$ . Így  $\frac{x}{x+3} < 9$ , majd 0-ra rendezve  $\frac{-8x-27}{x+3} < 0$ .

A tört értéke vagy

$$-8x-27 > 0 \text{ és } x+3 < 0,$$

vagy

$$-8x-27 < 0 \text{ és } x+3 > 0$$

értékei esetén lesz kisebb 0-nál.

Előbbiből  $x < \frac{-27}{8}$ , utóbbira nem kapunk megoldást.

2. a) Jelölje a  $h(x) = 1,5x$  függvény Hiper Mária talajtól való távolságát  $x \geq 0$  másodperccel Boszi megjelenése után. Azt keressük, hogy mely  $x$ -ekre lesz  $h(x) - g(x) > 2$ . Behelyettesítve:

$$1,5x - (x^2 - 4x + 5) > 2,$$

$$-x^2 + 5,5x - 5 > 2,$$

$$-x^2 + 5,5x - 7 > 0.$$

A parabola lefelé nyílik, a két zérushely között találjuk a pozitív értékeket. Mivel  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3,5$ , így  $x \in ]2; 3,5[$ . Ez azt jelenti, hogy 1,5 másodpercig Mari van felül: a játékosnak van lehetősége a győzelemre.

- b) A játékos reakcióideje (azaz késlekedése) azt jelenti, hogy  $t$  másodpercig nem ugrik. Így  $h(x) = 1,5x - t$ -re módosul a Mari talajtól való távolságát leíró függvény ( $x > t$ ). Az előzőek alapján:

$$h(x) - g(x) - 2 = -x^2 + 5,5x - 7 - t > 0.$$

A megoldások (tíh.  $x_1 < x_2$ ) különbsége adja meg azt az időt, amíg Mari van felül:  $x_2 - x_1 \geq 1$  kell ahhoz, hogy ez legalább 1 másodperc legyen. A megoldóképletből:

$$x_2 - x_1 = \sqrt{2,25 - 4t} \geq 1,$$

$$1,25 \geq 4t,$$

$$0,3125 \geq t.$$

Tehát a játékosnak 0,3125 másodpercnél hamarabb érdemes reagálnia, ha nyerni szeretne.



3. a) Készítsünk ábrát, amelyen  $a$  és  $b$  jelöli az utcafronti telek-  
oldalak hosszúságait.

Pitagorasz tétele szerint a telek rövidebb átlója  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  
hosszabb átlója ennek a kétszerese.

Ha négyszög átlói merőlegesek, akkor területe az átlók szor-  
zatának fele:

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = a^2 + b^2.$$

Ezzel az állítást bizonyítottuk.

- b) Készítsünk egy új ábrát csak a négyszögről.

Meghosszabbítva a derékszögű utcafrontokat, tekintsük  
a kialakuló téglalapban a következő derékszögű három-  
szögeket. Az ábrán jelölt szögek az átlók merőlegessége miatt  
egyenlők.

Így  $\lambda = 2$  arányossági tényezővel

$$CAB_{\Delta} \sim ADE_{\Delta} \cong EFA_{\Delta}.$$

A hasonlóságból adódik, hogy

$$AD = EF = 2CA = 60 \text{ és } AF = ED = 2AB = 40.$$

Innen pedig

$$CF = AF - AC = 10, \quad BD = AD - AB = 40.$$

Ezek után a telek keresett oldalai:

$$CE = \sqrt{10^2 + 60^2} = \sqrt{3700}, \quad BE = \sqrt{40^2 + 40^2} = 40 \cdot \sqrt{2}.$$

Két tizedesjegyre kerekítve  $CE = 60,83$  m és  $BE = 56,57$  m.

4. a) Az  $a_1, \dots, a_9$  kilenclemű mintának a diagram alapján ismerjük öt elemét, tegyük rangsorba:  
2, 4, 7, 8, 10. Mivel a diagramon nincs 10-nél nagyobb érték és  $R = 10$ , így a rangsor első  
eleme 0 (0, 2, 4, 7, 8, 10). Az elemszám miatt az alábbiak igazak:

0	–		–	–	$Q_2$	–	–		–	10
	$a_2$	$Q_1$	$a_3$	$a_4$	$= 2 \cdot Q_1$	$a_6$	$a_7$	$Q_3$	$a_8$	

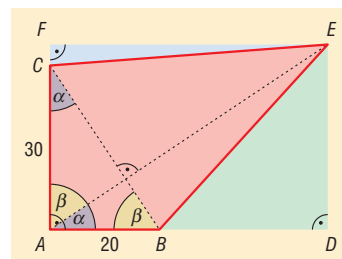
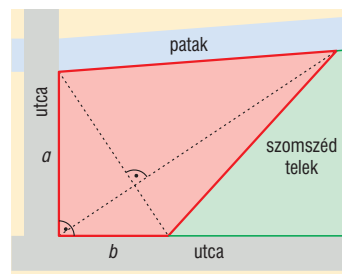
A kvartilisekre vonatkozó információk alapján  $\frac{a_1 + a_2}{2} = Q_1 > 0$  egész (ha 0 lenne, akkor  
minden kvartilis 0, ami ellentmond a két módusznak vagy az elemeknek). Mivel legalább egy  
7 és 8 elemünk is van, ezért  $\frac{a_7 + a_8}{2} = Q_3 > 7,5$ , vagyis  $Q_3$  csak 8, 9 vagy 10 lehet.

Elemezzük tovább a kvartiliseket! Ha  $Q_1 = 1$  vagy 2, akkor  $Q_3 < 7$ , nem jó. Ha  $Q_1 = 3$ ,  
akkor  $Q_2 = 6$ ,  $Q_3 = 9$ , ami megfelelő. Ha  $Q_1 > 3$ , akkor  $Q_3 > 10$ , ami ismét nem jó. Tehát  
 $Q_1 = 3$ ,  $Q_2 = 6$ ,  $Q_3 = 9$ . Így aztán a minta elején  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 4$ , a végén pedig  $a_6 = 7$ ,  $a_7 = 8$ ,  
 $a_8 = 10$  áll.

0	2	4	–	6	7	8	10	10
		$Q_1 = 3$	$a_4$	$Q_2$		$Q_3 = 9$		

Az  $a_4$ -re nincs külön feltételünk, így az a két módusz miatt 4 vagy 6 is lehet.

Válaszunk tehát: sajnos nem tudja egyértelműen visszaállítani az adatelemző a mintát.





- b) A három módusz gyakoriságainak száma lehet 4, 3 vagy 2. Mindhárom esetben ismétléses permutációval van dolgunk.

Ha minden módusz 4-szer szerepel, akkor nincs más elem a mintában: a lehetőségek száma

$$\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!} = 34\,650.$$

Ha a móduszok 3-szor szerepelnek, akkor lehetséges 3-3-3-1-1-1 vagy 3-3-3-2-1 egyforma elem. Ezek lehetőségeinek száma rendre

$$\frac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 2\,217\,600 \quad \text{és} \quad \frac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = 1\,108\,800.$$

Ha a móduszok 2-szer fordulnak elő, akkor csak 2-2-2-1-1-1-1-1-1 egyforma elem lehetséges:

$$\frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 59\,875\,200.$$

Összesen a lehetőségek száma ezek összege: 63 236 250.

## 1. Feladatsor / B – megoldások

5. a) Jelölje a marcipános édességek darabszámát  $m$  ( $\in \mathbb{Z}^+$ ). Eredetileg egy marcipános édesség kiválasztásának valószínűsége  $\frac{m}{68+m}$ .

Mivel ugyanannyi marcipánost tettek bele, a megváltozott feltételek mellett egy csokis édesség kivételének valószínűsége  $\frac{68}{68+2m}$ .

Előbbi az utóbbi 30%-a:

$$\frac{m}{68+m} = \frac{68}{68+2m} \cdot 0,3.$$

Ez átalakítva a következő egyenletet kapjuk:

$$m^2 + 23,8m - 693,6 = 0,$$

melynek megoldásai  $m_1 = 17$  és  $m_2 = -40,8$ . A megoldások közül csak a 17 felel meg a pozitív egész feltételnek.

Ellenőrzéssel meggyőződünk az eredmény helyességéről:  $\frac{17}{85} = \frac{68}{102} \cdot 0,3 = 0,2$ .

- b) A ládában 100 édesség van, így egy marcipános kiválasztásának valószínűsége 0,32, egy csokis pedig 0,68. Mivel nagyon sokféleképpen kerülhet kezükbe marcipános, térjünk át a komplementer eseményre: a „nincs marcipános” azt jelenti, hogy minden kivett csokis:

$$1 - 0,68^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geq 0,68^n.$$

Most mindkét oldalnak vesszük a 0,68 alapú logaritmusát: mivel ez 1-nél kisebb szám ( $\log_{0,68} x$  függvény szigorúan monoton csökkenő), így az egyenlőtlenség megfordul:

$$n \geq \log_{0,68} 0,01 \approx 11,94.$$

Vagyis legalább 12-szer kell próbálkoznunk ahhoz, hogy legalább 99%-os valószínűséggel kerüljön a kezükbe marcipános édesség.



6. a) Képzeld el a megforgatott függvényt és a lehető legnagyobb felszínű hengert. Egy ilyen henger fedőköre rajta van a megforgatott parabola felszínén.

Ha az alapkör sugarát  $r = x$ -nek vesszük, ahol  $0 < x < 2$ , akkor a henger  $m$  magassága az az érték, amit a parabola helyettesítési értékeként kapunk:

$$m = f(r) = 4 - x^2.$$

Ezekkel meg tudjuk adni a henger felszínét  $x$  függvényében:

$$A(x) = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2x^2\pi + 2x\pi(4 - x^2).$$

Átalakítva: az

$$A(x) = -2\pi(x^3 - x^2 - 4x)$$

függvénynek keressük a maximumát, ahol  $D_A = ]0; 2[$ .

Harmadfokú függvény lehetséges szélsőértékeit legegyszerűbben deriválással találjuk meg:

$$A'(x) = -2\pi(3x^2 - 2x - 4) \Rightarrow x_1 = \frac{2 + \sqrt{52}}{6} \approx 1,535 \text{ és } x_2 = \frac{2 - \sqrt{52}}{6} \approx -0,869 \notin D_A.$$

A második derivált segítségével eldöntjük, hogy megfelelő szélsőértéket kaptunk-e:

$$A''(x_1) = -2\pi(6x_1 - 2) \approx -45,3 < 0 \Rightarrow x_1\text{-ben a függvénynek maximuma van.}$$

Tehát Jankának a tervezett űrkapszula henger alakú kabinjának sugarát 1,535 egységnek kell választania, hogy a kabin felszíne a lehető legnagyobb legyen.

- b) Elsőnek számítsuk ki az eredeti görbe alatti területet (felhasználjuk, hogy a függvény páros):

$$T_1 = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \cdot \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \cdot \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 \cdot \left[ 8 - \frac{8}{3} \right] = \frac{32}{3}.$$

Másodikkra levágjuk az alját  $y = 1$  magasságban, ami megfelel annak, mintha a függvényt eltolnánk 1 egységgel lefelé:  $g(x) = 3 - x^2$  alakú lesz. Ennek kell az  $x$  tengely feletti területe: ehhez először megállapítjuk a zérushelyeit.

$$3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}.$$

A lefelé való eltolás miatt  $g$  függvény is páros.

$$T_1 = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx = 2 \cdot \left[ 3x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = 2 \cdot \left[ 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} \right] = 4\sqrt{3}.$$

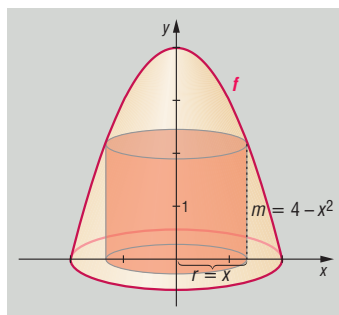
A keresett százaléértékhez osszuk  $T_2$ -t  $T_1$ -gyel:  $\frac{T_2}{T_1} \approx 0,649$ , ami kerekítve 65%.

7. a) A logaritmus két azonosságát (áttérés más alapú logaritmusra, illetve konstans szorzó bevitele a logaritmusba) és definícióját felhasználva bizonyíthatjuk az állítást.

$$\log_{x^2} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 x^2} = \frac{2}{2 \cdot \log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x}.$$

- b) Legyen  $x > 0$ , ekkor a hatványozás tulajdonságai miatt  $2^x < 4^x < 8^x$ . Mivel háromszög oldalai, így teljesül rájuk a háromszög-egyenlőtlenség:

$$2^x + 4^x > 8^x.$$



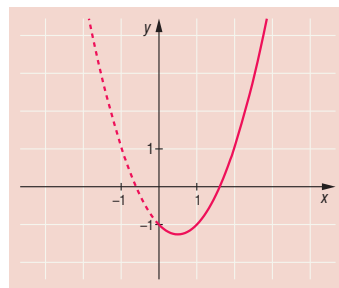


Mindkét oldalt leosztva  $2^x (> 0)$  kapjuk, hogy  $1 + 2^x > 4^x$ .  
Ez másodfokú egyenlőtlenség, 0-ra rendezve

$$0 > 4^x - 2^x - 1$$

alakú. A kifejezés  $2^x$ -ben másodfokú: felfelé nyíló parabola, így megoldáshalmaza a zérushelyek közötti tartomány (ábra). Az egyenlőség megoldásai:

$$2_1^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad 2_2^x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$



Utóbbi negatív, vagyis nem eleme  $2^x$  függvény értékkészletének. Az egyenlőtlenség megoldásai:

$$0 < 2^x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \text{ezért} \quad -\infty < x < \log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

A feltételt figyelembe véve az egyenlőtlenség megoldásai:

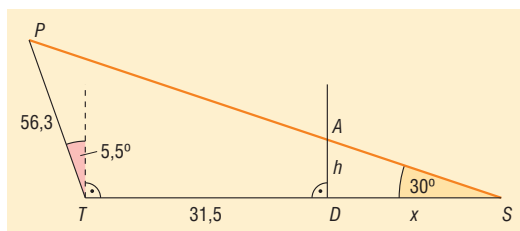
$$x \in \left] 0; \log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right[.$$

A bal végpont három tizedesre kerekítve 0,694. Mivel lefelé kerekítettünk, ebből még biztosan szerkeszthető háromszög és ez a legnagyobb ilyen érték.

8. a) A délkelet felé dőlő tornyot délkeletről érik a napsugarak, a dóm pedig tőle északnyugatra található, tehát kezelhetjük őket egy síkmetszetben. A ferde torony  $PT$ , távolsága a dómtól  $TD$ . A kérdés az  $AD = h$  távolság.

Mivel  $\angle DTP = 95,5^\circ$ , így

$$\angle TPS = 180^\circ - (95,5^\circ + 30^\circ) = 24,5^\circ.$$



$\triangle PTS$ -ben alkalmazzuk a szinusztételt:

$$\frac{x + 31,5}{56,3} = \frac{\sin 24,5^\circ}{\sin 30^\circ}, \quad \text{innen} \quad x \approx 15,19 \text{ méter.}$$

A derékszögű  $\triangle ADS$ -ben pedig  $\frac{h}{15,19} = \tan 30^\circ$ , amiből  $h \approx 8,77$  méter.

- b) Ismét készítsünk ábrát: ebben  $TDAM$  téglalap és keressük  $\angle PAM = \alpha$  szöget.  $MT = 43$ , így  $\triangle PTM$ -ben alkalmazhatjuk a koszinusztételt:

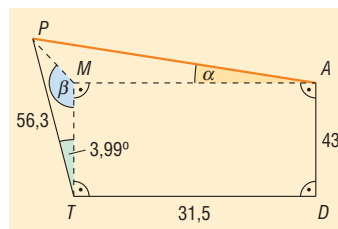
$$PM^2 = 56,3^2 + 43^2 - 2 \cdot 56,3 \cdot 43 \cdot \cos 3,99^\circ.$$

Ebből  $PM \approx 13,73$  méter.  $\triangle PTM$  minden oldala ismert, így akár a szinusztételt is alkalmazhatjuk (tudjuk, hogy  $\angle PMT = \beta$  tompaszög):

$$\frac{\sin \beta}{\sin 3,99^\circ} = \frac{56,3}{13,73}, \quad \text{amiből} \quad \beta \approx 163,42^\circ.$$

Áttérünk  $\triangle PMA$ -re. Ebben

$$\angle AMP = 360^\circ - (90^\circ + \beta) = 106,58^\circ.$$





$PM$  és  $MA$  szakaszok hossza már ismert, így újra a koszinusztételből:

$$PA^2 = 31,5^2 + 13,73^2 - 2 \cdot 31,5 \cdot 13,73 \cdot \cos 106,58^\circ,$$

ahonnan  $PA \approx 37,78$  m.

Végül újra szinuszételt alkalmazva:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 106,58^\circ} = \frac{13,73}{37,78}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 20,38^\circ.$$

Tehát a nap sugarai  $20,38^\circ$ -os szögben érkeznek a földre, amikor a ferde torony árnyéka pont a dóm falának tetején van.

9. Az egyenletesen gyorsuló test útját a következő képlet adja meg:  $s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ .  
A hátrább lévő test esetén ha  $t = 1$  s, akkor  $s = 25$  m, tehát:

$$25 = v_0 + \frac{a}{2}, \quad (1)$$

ha  $t = 2$  s, akkor  $s = 50 \frac{1}{3}$  m, tehát

$$50 \frac{1}{3} = 2v_0 + 2a. \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből  $a = \frac{1}{3}$  és  $v_0 = 25 - \frac{1}{6} = 24 \frac{5}{6}$ . Tehát  $s_1 = 24 \frac{5}{6} \cdot t + \frac{t^2}{6}$ .

A másik test esetén ha  $t = 1$  s, akkor  $s = 30$  m, tehát:

$$30 = v_0 + \frac{a}{2}, \quad (3)$$

ha  $t = 2$  s, akkor  $s = 59 \frac{1}{2}$  m, tehát

$$59 \frac{1}{2} = 2v_0 + 2a. \quad (4)$$

A (3) és (4) egyenletekből  $a = -\frac{1}{2}$  és  $v_0 = 30 \frac{1}{4}$ . Tehát  $s_2 = 30 \frac{1}{4} \cdot t - \frac{t^2}{4}$ .

Az első test akkor éri utol a másodikat, ha  $s_1 = s_2 + 20$ . Ebből  $t$ -re a következő egyenletet kapjuk:

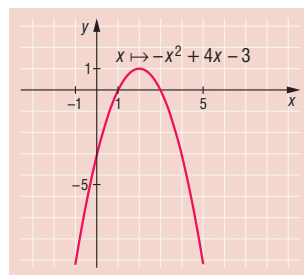
$$t^2 - 13t - 48 = 0.$$

Ennek gyökei 16 és  $-3$ . Nyilván csak a pozitív gyök jó, tehát 16 másodperc múlva éri utol az első test a másodikat.

## 2. Feladatsor / A – megoldások

1. a) A logaritmus értelmezése alapján  $-x^2 + 4x - 3 > 0$ , valamint  $x - 1 > 0$ . Az utóbbi egyenlőtlenség megoldása  $x > 1$ , míg az első egyenlőtlenség bal oldalán álló másodfokú kifejezés két zérushelye:  $x_1 = 1$  és  $x_2 = 3$ . Az  $x \mapsto -x^2 + 4x - 3$  másodfokú függvény grafikonjáról (ld. ábra) leolvasható, hogy az első egyenlőtlenség megoldása  $1 < x < 3$ .

A kifejezés értelmezési tartománya az  $]1; 3[$  intervallum.





b) A logaritmus azonosságai és definíciója alapján az egyenlet a következő alakokban is felírható:

$$\log_2 \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-1)^2} = 1, \quad \text{amiből} \quad \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-1)^2} = 2.$$

Az a) feladatban kiszámoltuk a számláló gyökeit. A gyöktényezőzős alak alkalmazásával kapjuk, hogy  $-x^2 + 4x - 3 = -(x-1)(x-3)$ , és ezért a bal oldalon álló tört egyszerűsítése után:

$$\frac{-(x-3)}{x-1} = 2, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{5}{3}.$$

A kapott szám eleme az értelmezési tartománynak, és ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy megoldása az egyenletnek.

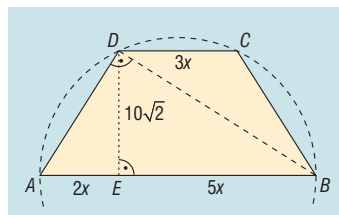
2. a) A feltételek alapján a trapéz nem téglalap. Ekkor az ábra jelöléseit használva a trapéz alapjai  $AB = 7x$ ,  $CD = 3x$ , a  $D$  csúsból induló magasság talppontja  $E$ , továbbá az  $ABD$  háromszög derékszögű. Az  $ABD$  háromszögben a magasságtétel alapján adódik:  $DE^2 = 2x \cdot 5x = 10x^2$ , ebből következik, hogy  $200 = 10x^2$ , végül  $x = 2\sqrt{5}$ .

A trapéz alapjai:

$$AB = 14\sqrt{5} \approx 31,30 \text{ cm}, \quad CD = 6\sqrt{5} \approx 13,42 \text{ cm}.$$

A trapéz területe:

$$T = \frac{AB + CD}{2} \cdot DE = \frac{14\sqrt{5} + 6\sqrt{5}}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 100\sqrt{10} \approx 316,23 \text{ cm}^2.$$



- b) Thalész tételének megfordítása alapján az  $ABD$  derékszögű háromszög köré írt kör középpontja éppen az  $AB$  átfogó felezőpontja. Természetesen a  $C$  csúcs szintén illeszkedik az  $AB$  átmérőjű körre, így a trapéz köré írt kör sugara az  $AB$  átfogó fele, azaz  $r = 7\sqrt{5} \approx 15,65 \text{ cm}$ .

A kör területe:

$$T = r^2 \pi = 245\pi \approx 769,69 \text{ cm}^2.$$

3. a) Jelöljük  $p$ -vel annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott tanuló mekkora valószínűséggel oldja meg egyedül a házi feladatát, azaz  $p = 0,65$ .

Mivel független eseményekről van szó, ezért a keresett valószínűség  $p^{15} \approx 0,0016$ . Sajnálattal állapítjuk meg, hogy ez elkeserítően kicsi érték.

- b) Azt a 10 diákot, aki nem önállóan dolgozott,  $\binom{15}{10} = 3003$ -féleképpen választhatjuk ki. A binomiális eloszlás alapján annak a valószínűsége, hogy éppen 10 diák készítette el segítségével a házi feladatát:

$$\binom{15}{10} \cdot p^5 \cdot (1-p)^{10} \approx 0,0096.$$

4. a) A holtverseny az 1., 2., 3., 4., illetve 5. hely valamelyikén lehetett. A hat versenyző közül  $\binom{6}{2} = 15$ -féleképpen választhatjuk ki azt a kettőt, akik holtversenyt értek el. A maradék négy helyen a többi versenyző  $4! = 24$ -féleképpen érhetett célba. Így összesen  $5 \cdot 15 \cdot 24 = 1800$  különböző sorrendben érhetek célba a versenyzők.

- b) Mivel a versenyt Andor egyedül nyerte meg, ezért az 1. helyen nem alakulhatott ki holtverseny. I. eset: Fábián az 5. helyen holtversennyel ért célba. Ekkor Fábián mellé 4-féleképpen választhatunk 5. helyezettet. A 2., 3., 4. helyen a maradék 3 versenyző  $3! = 6$ -féleképpen érhetett célba, ezért az 1. eset összesen  $4 \cdot 6 = 24$ -féleképpen valósulhatott meg.





II. eset: Fábán egyedül ért célba az utolsó helyen. Ekkor a holtverseny a 2., a 3. vagy a 4. helyen következhetett be. Az együtt célba érkezőket  $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen választhatjuk ki. A maradék két helyezésen kétféleképpen alakulhatott a sorrend, ezért a 2. eset összesen  $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$ -féleképpen valósulhatott meg.

A verseny végeredménye összesen  $24 + 36 = 60$ -féleképpen alakulhatott.

## 2. Feladatsor / B – megoldások

5. a) Anna a 4 év alatt 48 alkalommal fizet be 10 000 Ft-ot, ezért összesen 480 000 Ft-ot fizet be.  
 b) Anna az 1. évben összesen 12-szer fizet be 10 000 Ft-ot. Az első összeg 12 hónapig kamatozik, a második 11 hónapig, és így tovább; a december 1-jén befizetett 10 000 Ft után a bank már csak 1 havi kamatot fizet. Így december 31-én az Anna számláján lévő összeg:

$$10\,000 \cdot 1,003^{12} + 10\,000 \cdot 1,003^{11} + \dots + 10\,000 \cdot 1,003.$$

A fenti összeg egy mértani sorozat első 12 tagjának összege. A sorozat első tagja  $10\,000 \cdot 1,003$ , hányadosa 1,003, így az összeg:

$$10\,000 \cdot 1,003 \cdot \frac{1,003^{12} - 1}{1,003 - 1} \approx 122\,365,93,$$

vagyis Anna számláján hozzávetőlegesen 122 366 Ft lesz.

- c) A megtakarítás összegét két részre bonthatjuk.

I. rész: Anna befizetései, valamint annak kamata. Az első hónapban befizetett összeg 48 hónapig, a második hónapban befizetett összeg 47 hónapig, és így tovább; az utolsó befizetett összeg már csak 1 hónapig kamatozik. Ennek megfelelően a befizetésekből, valamint annak kamataiból Anna számláján a következő összeg íródik jóvá:

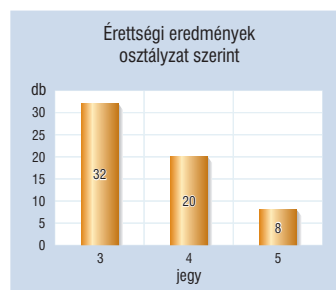
$$\begin{aligned} &10\,000 \cdot 1,003^{48} + 10\,000 \cdot 1,003^{47} + \dots + 10\,000 \cdot 1,003 = \\ &= 10\,000 \cdot 1,003 \cdot \frac{1,003^{48} - 1}{1,003 - 1} \approx 516\,996,95 \text{ Ft.} \end{aligned}$$

II. rész: az állami támogatás, valamint annak kamatai. Az első év után az állam 36 000 Ft-ot utal a számlára. Ez az összeg 36 hónapig kamatozik. A második év után kapott 36 000 Ft 24 hónapig, míg a harmadik év után járó 36 000 Ft csak 12 hónapig kamatozik. A negyedik év után járó állami támogatás jóváíródik a számlán az 5. év első napján, de kamat már nem jár utána. Ezek alapján az állami támogatás, valamint az utána járó kamat összege:

$$36\,000 \cdot 1,003^{36} + 36\,000 \cdot 1,003^{24} + 36\,000 \cdot 1,003^{12} + 36\,000 \approx 152\,100,26 \text{ Ft.}$$

Anna a takarékoskodási időszak letelte után összesen  $516\,996,95 + 152\,100,26 \approx 669\,097$  Ft összeget vehet fel.

6. a) Közepest a 20 diák 60%-a (12 fő), illetve a 40 diák 50%-a (20 fő) kapott, tehát összesen 32-en. Jót, azaz 4-est a 20 diák 25%-a (5 tanuló), valamint a 40 diák 37,5%-a (15 tanuló), összesen 20-an kaptak. A maradék 8 tanuló jelesre érettségizett. Az adatok szemléltetésére oszlopdiagram a legmegfelelőbb.







b) A matematikaérettségi jegyek átlaga:

$$\frac{12 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{20} = 3,55.$$

A történelemérettségi jegyek átlaga:

$$\frac{20 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{40} \approx 3,63.$$

c) Tegyük fel, hogy legalább  $n$  diáknak kellett volna 4-est szereznie a jobb átlaghoz. Ekkor:

$$\frac{(12 - n) \cdot 3 + (5 + n) \cdot 4 + 3 \cdot 5}{20} \geq 3,75.$$

A műveletek elvégzése után  $n \geq 4$  adódik, azaz legalább 4 embernek kellett volna 4-est elérnie a közepesre érettségizők közül a jobb átlaghoz.

d) Az átlag csak a következő esetekben nagyobb vagy egyenlő, mint 4,20:

I. eset: két ötös;

II. eset: egy ötös és egy négyes tanulót választunk ki.

Az I. eset bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(\text{két 5-ös tanulót választunk}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{10}{780} \approx 0,0128,$$

a II. eset bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(\text{egy 5-ös és egy 4-es tanulót választunk}) = \frac{5 \cdot 15}{\binom{40}{2}} = \frac{75}{780} \approx 0,0962.$$

A keresett valószínűség  $\approx 0,1090$ .

7. a) Mivel  $1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2$ , valamint  $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = 4$ , ezért  $A$  és  $B$  egyaránt illeszkednek az  $f$  függvény grafikonjára.

b) Az  $AB$  egyenes egyenlete:  $y = x + 1$ .

c) Az  $AB$  egyenes az  $x$  tengelyt a  $(-1; 0)$  pontban metszi. Egyszerű számolás mutatja, hogy  $(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = 0$ , így a  $(-1; 0)$  pont illeszkedik az  $f$  függvény grafikonjára is.

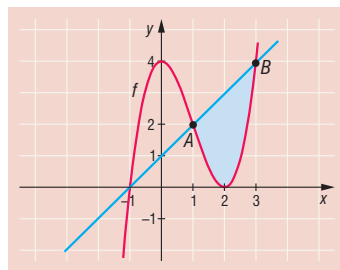
d) A zérushelyeket az  $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$  egyenlet megoldásai adják. A c) feladat eredménye alapján az  $AB$  egyenes zérushelye  $x = -1$ . Az egyenlet bal oldalán szorzattá alakítunk:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 4 &= x^3 + 1 - 3x^2 + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 1) - 3(x^2 - 1) = \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1) - 3(x + 1)(x - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1 - 3x + 3) = \\ &= (x + 1)(x^2 - 4x + 4) = (x + 1)(x - 2)^2. \end{aligned}$$

A szorzattá bontásból leolvasható, hogy az egyenlet megoldásai:  $x_1 = -1$  és  $x_2 = 2$ .

e) Az  $f$  függvény deriváltja  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ . A derivált előjelének vizsgálatából látható, hogy a függvény az  $[1; 2]$ -on csökken, a  $[2; 3]$ -on pedig növekszik. Ebből adódik, hogy az  $AB$  szakasz és a függvény grafikonja által közrefogott síkidom területe:

$$T = \int_1^3 (x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 4) dx = \int_1^3 -x^3 + 3x^2 + x - 3 dx.$$





A Newton–Leibniz-formula alapján:

$$T = \left[ -\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{x=1}^{x=3} = 4.$$

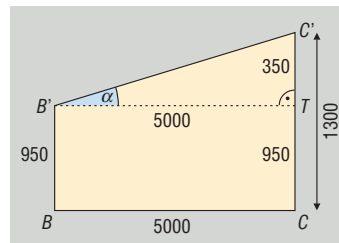
8. a) Ha a Tündér-hegy csúcsát  $B'$ , a Magas-hegyét pedig  $C'$  jelöli, akkor a  $BCC'B'$  derékszögű trapéz alapjai  $BB' = 950$  m,  $CC' = 1300$  m, míg egyik szára  $BC = 5000$  m (ld. ábra).

A  $B'TC'$  derékszögű háromszögben:

$$C'T = 1300 - 950 = 350 \text{ m,}$$

így a keresett  $C'B'T\hat{x} = \alpha$  szögre:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{350}{5000}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 4,00^\circ.$$



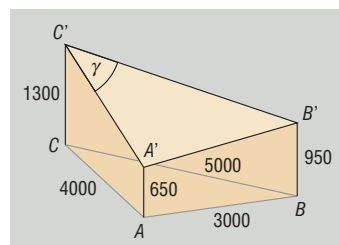
A Tündér-hegy csúcsáról a Magas-hegy csúcsa  $4,00^\circ$ -os emelkedési szögben látszik.

- b) Ha a Pokol-hegy csúcsát  $A'$  jelöli, akkor az  $A'C'B' = \gamma$  szög nagyságát keressük.

A  $\gamma$  szöget az  $A'C'B'$  háromszög oldalairól például a koszinusztétel segítségével számolhatjuk ki. Az a) feladat ábráján szereplő  $B'C'T$  derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével  $B'C' \approx 5012,24$  m adódik. Hasonló számolások után:

$$A'B' = \sqrt{3000^2 + (950 - 650)^2} \approx 3014,96 \text{ m,}$$

$$A'C' = \sqrt{4000^2 + (1300 - 650)^2} \approx 4052,47 \text{ m.}$$



Az  $A'C'B'$  háromszögre felírva a koszinusztételt kapjuk, hogy:

$$A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2 - 2 \cdot A'C' \cdot B'C' \cdot \cos \gamma, \quad \text{ahonnan} \quad \gamma \approx 36,97^\circ.$$

A Magas-hegy csúcsáról a másik két hegycsúcsot összekötő szakasz körülbelül  $36,97^\circ$ -os szögben látszik.

9. A második feltétel alapján a parabola áthalad a  $(0; 1)$  ponton, ezért:

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1, \quad \text{amiből} \quad c = 1.$$

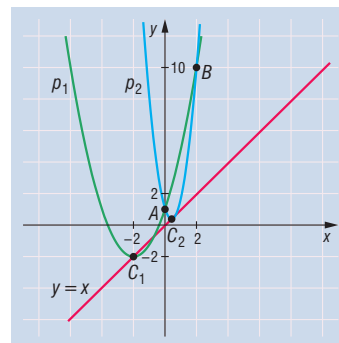
Mivel a parabola illeszkedik a  $(2; 10)$  pontra is, ezért:

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 10 \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b = 9. \quad (1)$$

A parabola egyenletének jobb oldalát teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy:

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 1,$$

$$y - \left( -\frac{b^2}{4a} + 1 \right) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$



A fenti egyenletből leolvasható, hogy a parabola tengelypontjának koordinátái:

$$C \left( -\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + 1 \right).$$



Ha a tengelypont illeszkedik az  $y = x$  egyenletű egyenesre, akkor koordinátái kielégítik az egyenletet, azaz:

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= -\frac{b^2}{4a} + 1, & / \cdot 4a \\ -2b &= -b^2 + 4a. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy (1) alapján  $4a = 9 - 2b$ , adódik, hogy:

$$-2b = -b^2 + 9 - 2b, \quad \text{innen} \quad b_1 = 3 \quad \text{és} \quad b_2 = -3.$$

Ha  $b_1 = 3$ , akkor  $a_1 = \frac{3}{4}$ , míg ha  $b_2 = -3$ , akkor  $a_2 = \frac{15}{4}$ .

A feltételeknek két parabola tesz eleget, ezek egyenlete:

$$p_1: y = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 1 \quad \text{és} \quad p_2: y = \frac{15}{4}x^2 - 3x + 1.$$

A két parabolát és a feltételek teljesülését az ábra szemlélteti.

### 3. Feladatsor / A – megoldások

1. Legyen  $x$  a hajó sebessége állóvízben,  $y$  pedig a folyó sebessége:

$$AB = 5 \cdot (x + y), \quad BA = \frac{17}{3} \cdot (x - y).$$

A két út egyenlőségéből:  $x = 16y$ .

Azaz  $AB = 5 \cdot 17y = 85y$ , tehát a tutaj 85 óra alatt teszi meg az  $AB$  utat.

2. A kör egyenlete  $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 32 - p^2$ , középpontja  $K(4; 4)$ .

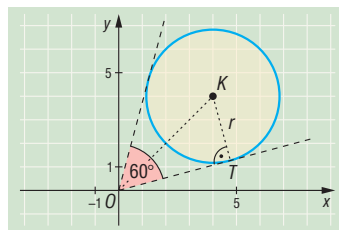
$$OK = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Az  $OTK$  derékszögű háromszögben:

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{4\sqrt{2}}, \quad \text{ebből} \quad r = 2\sqrt{2}.$$

Mivel  $r^2 = 32 - p^2$ , adódik, hogy  $p^2 = 24$ .

Tehát  $p_1 = 2\sqrt{6}$  és  $p_2 = -2\sqrt{6}$  értékei esetén látszik  $60^\circ$ -os szögben az origóból a kör.



3. Számítsuk ki a játékosok nyerési esélyeit.

Attila: az ellentett esemény alapján  $1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{16}{36} \left( = \frac{4}{9} = 0,4 \right)$ .

Balázs: a kedvező számhármasok:

(1; 2; 3), (1; 2; 5), (1; 3; 4), (1; 3; 5), (1; 4; 5), (1; 5; 6), (2; 3; 5), (3; 4; 5),

a nyerés esélye:  $\frac{8 \cdot 3!}{6^3} = \frac{8}{36}$ .

Csanád esélye pedig a maradék  $\frac{12}{36}$ .

A játék akkor igazságos, ha a tétek a nyerési esélyekkel arányosak, tehát Attila tétje 20 zseton, Csanád pedig 15 zseton.



4. Oldjuk meg az első egyenletet:

$$\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x,$$

$$0 = \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x,$$

$$0 = \cos x \cdot (\cos x - \sin x).$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát  $\cos x = 0$ , vagy  $\cos x - \sin x = 0$ .

A  $\cos x = 0$  megoldásai a  $[0; 2\pi]$ -ban:  $x_1 = \frac{\pi}{2}$  vagy  $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ . A  $\cos x - \sin x = 0$ -ból  $\sin x = \cos x$ .

Az egyenletet  $\cos x$ -szel osztva (a  $\cos x = 0$  nem megoldás, mivel ilyen  $x$ -ekre  $\sin x$  nem lehet 0)

$\tan x = 1$  egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai a  $[0; 2\pi]$ -ban:  $x_1 = \frac{\pi}{4}$  vagy  $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ .

$$\text{Tehát } A = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Oldjuk meg a második egyenlőtlenséget.

Mivel  $-5 = \log_{\frac{1}{2}} 32$ , elég a  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 12) > \log_{\frac{1}{2}} 32$  egyenlőtlenséggel foglalkoznunk.

Figyelembe véve az  $\frac{1}{2}$  alapú logaritmusfüggvény értelmezési tartományát és szigorú monoton csökkenését,  $x$ -re a következő feltételeket kapjuk:  $0 < x^2 - 8x + 12 < 32$ .

A bal oldali  $0 < x^2 - 8x + 12$  egyenlőtlenség megoldásai:

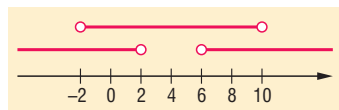
$$x \in ]-\infty; 2[ \cup ]6; \infty[.$$

A jobb oldali  $x^2 - 8x + 12 < 32$  egyenlőtlenséget rendezve kapjuk:  $x^2 - 8x - 20 < 0$ , ennek megoldásai:  $x \in ]-2; 10[$ .

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:  $B = ]-2; 2[ \cup ]6; 10[$ .

A  $\pi$  közelítő értékét felhasználva:

$$A \cap B = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\}, \quad A \cup B = ]-2; 2[ \cup ]6; 10[ \cup \left\{ \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right\}.$$



### 3. Feladatsor / B – megoldások

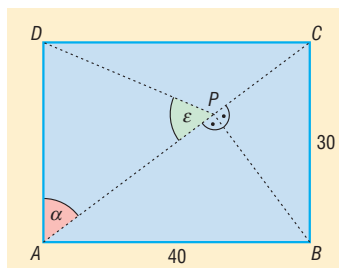
5. A keresett pont a téglalap átlóján található.

a) Az  $ABC$  derékszögű háromszög, átfogója  $AC = 50$  m, átfogóhoz tartozó magassága:  $PB = 24$  m. A Pitagorasz-tétellel számolható  $AP = 32$  m és  $PC = 18$  m.

A  $PD$  szakasz koszinusztétellel számítható az  $APD$  háromszögből, ha ismernénk a  $DAP$ -et. Ez viszont a  $CDA$  derékszögű háromszögből:  $\alpha = 53,13^\circ$ .

Ezt felhasználva:  $PD = 27,78$  m.

b) Az  $ADP$  háromszög  $P$ -nél lévő szöge szinusztétellel számítható:  $\varepsilon = 59,76^\circ$ , ekkora szögben látszik az  $AD$  oldal. A  $CD$  oldal pedig  $180^\circ - \varepsilon = 120,24^\circ$  szögben látszik  $P$ -ből.



6. a) Az átlag alapján  $S_{11} = 154$ , ebből  $a_1 = 4$  és  $a_{11} = 24$ . A mért legnagyobb csapadékmennyiség 24 mm volt.

b) A számtani sorozat 11 eleme és a 10 darab 0 lehetséges sorrendje:

$$21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 11 = \frac{21!}{10!} = 42325920.$$



- c) Az  $a_1$  helyzete és a sorban mögötte található 0-k elhelyezkedése egyértelműen adja a sorozat elemeinek helyét. Az  $a_1$  csak a hiányzó első 10 helyre kerülhet.

Ha  $a_1$  november 1-jén van, mögötte a 10 darab 0 helyét  $\binom{20}{10}$ -féleképpen választhatjuk ki.

Ha  $a_1$  november 2-án van, a mögötte lévő 9 darab 0 helyét  $\binom{19}{9}$ -féleképpen adhatjuk meg. És így tovább, összesen:

$$\binom{20}{10} + \binom{19}{9} + \binom{18}{8} + \binom{17}{7} + \binom{16}{6} + \binom{15}{5} + \binom{14}{4} + \binom{13}{3} + \binom{12}{2} + \binom{11}{1} + \binom{10}{0} = 352716.$$

7. a) A cső teljes hossza két részből tevődik össze, az ábra alapján:

$$x = \frac{50}{\sin 60^\circ} = 57,74 \text{ cm}, \quad y = 12 \cdot \tan 30^\circ = 6,93 \text{ cm},$$

tehát  $x + y = 64,67$  cm hosszú csőre van szükség.

- b) A keletkező lyuk területének vetülete a fúrás irányára merőleges síkra:  $T_v = 6^2 \cdot \pi \approx 113 \text{ cm}^2$ . A két sík szöge  $30^\circ$ , tehát:

$$T_v = T \cdot \cos 30^\circ, \text{ ahonnan } T = 130,6 \text{ cm}^2.$$

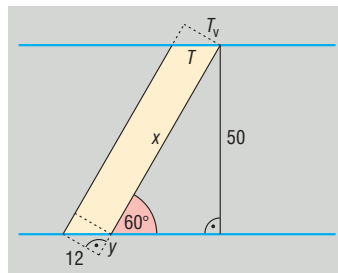
- c) Az egyenes henger térfogata:

$$V_e = 6^2 \cdot \pi \cdot 50 = 5654,9 \text{ cm}^3.$$

A ferde henger egy  $x$  magasságú egyenes hengerré darabolható át, térfogata:

$$V_f = 6^2 \cdot \pi \cdot 57,74 = 6530,2 \text{ cm}^3,$$

ami 15,5%-kal több, mint az egyenes hengeré.



8. a) Szemléltessük az igennel szavazók halmazát.

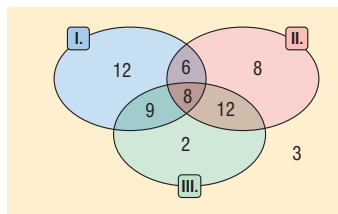
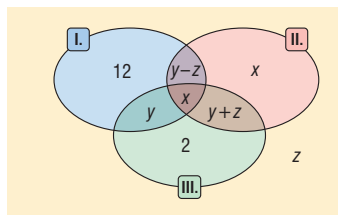
A feltételek szerint:

$$\begin{cases} 12 + 2y + x - z = 35 \\ 14 + z + y = 26 \\ x + 2y + z + 2 = 31 \end{cases}$$

Az első és harmadik egyenlet kivonásából  $z = 3$ , ezt a másodikba helyettesítve:  $y = 9$ . Mindkettőt az elsőbe helyettesítve:  $x = 8$ . A kapott értékeket beírva a halmazábrába, kiderül, hogy 60 fő vett részt a szavazáson.

- b) A lehetséges eredmények száma:  $\binom{35}{7} = 6724520$ .

- c) A keresett valószínűség:  $\frac{30!}{10! \cdot 10! \cdot 10!} = 0,02696$ .



9. Az autónak 100 km úton a literekben mért fogyasztását keressük  $f(v) = av^2 + bv + c$  alakban  $v$  sebességének függvényeként. A megadott táblázat alapján a sebességet  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban mérve:

$$f(50) = 5,5 \Rightarrow 5,5 = a \cdot 50^2 + b \cdot 50 + c \Rightarrow 5,5 = a \cdot 2500 + b \cdot 50 + c,$$

$$f(100) = 7 \Rightarrow 7 = a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + c \Rightarrow 7 = a \cdot 10000 + b \cdot 100 + c,$$

$$f(150) = 9,5 \Rightarrow 9,5 = a \cdot 150^2 + b \cdot 150 + c \Rightarrow 9,5 = a \cdot 22500 + b \cdot 150 + c.$$

Az egyenletrendszer megoldva  $a = \frac{1}{5000}$ ,  $b = 0$ ,  $c = 5$  adódik, vagyis  $f(v) = \frac{1}{5000} \cdot v^2 + 5$ .



a) Az autó fogyasztása 100 kilométeren  $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  sebességnél:

$$f(90) = \frac{1}{5000} \cdot 90^2 + 5 = 6,62 \text{ liter.}$$

b) A 300 km-es utazás  $\frac{300}{v}$  óra időt vesz igénybe  $v$  sebesség esetén, tehát a sofőrnek kifizetett költség  $\frac{300}{v} \cdot 2000$  forint. A 300 km megtételéhez szükséges benzin mennyisége literben:

$$\frac{300}{100} \cdot \left( \frac{1}{5000} \cdot v^2 + 5 \right) = \frac{3}{5000} \cdot v^2 + 15.$$

Mivel a benzin literenkénti ára 320 Ft, az üzemanyag  $320 \cdot \left( \frac{3}{5000} \cdot v^2 + 15 \right)$  forintba kerül. Az összköltség a sebesség függvényében:

$$k(v) = \frac{300}{v} \cdot 2000 + 320 \cdot \left( \frac{3}{5000} \cdot v^2 + 15 \right) = \frac{600000}{v} + \frac{96}{500} \cdot v^2 + 4800.$$

A  $k(v)$  függvénynek ott lehet minimuma, ahol az első deriváltja 0:

$$k'(v) = -\frac{600000}{v^2} + \frac{96}{250} \cdot v \Rightarrow 0 = -\frac{600000}{v^2} + \frac{96}{250} \cdot v \Rightarrow v \approx 116.$$

Ha  $v < 116$ , akkor  $k'(v) < 0$ , ha  $v > 116$ , akkor  $k'(v) > 0$ , tehát a függvénynek  $v = 116$  helyen minimuma van.

Az utazás költsége  $116 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  sebesség esetén lesz minimális.

## 4. Feladatsor / A – megoldások

1. Az egyenletrendszer az  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y > -1$  számokon van értelmezve.

A második egyenlet alapján  $y + 1 = 3^x$ .

Ezt felhasználva, az első egyenlet:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (y + 1)^3 &= 3y^3 + 8y^2 + 8y + 9, \\ 3y^3 + 9y^2 + 9y + 3 &= 3y^3 + 8y^2 + 8y + 9, \\ y^2 + y - 6 &= 0, \\ (y + 3) \cdot (y - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldása:  $y_1 = 2$  és  $y_2 = -3$ . Ez utóbbi nem eleme az értelmezési tartománynak.

Az  $y = 2$  értéket a második egyenletbe helyettesítve  $x = 1$  adódik.

Az egyenletrendszer megoldása:  $x = 1$  és  $y = 2$ .

2. Mivel  $a_n = 2a_{n+1} - a_{n+2}$ , ebből  $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ .

Az a sorozat, amelynek bármely tagja (a másodiktól kezdve) előáll a két szomszédos tag számtani közepeként, számtani sorozat.

Ha a sorozat első eleme  $a_1$ , differenciája  $d$ , akkor:

$$a_3 + a_7 = a_1 + 2d + a_9 - 2d = a_1 + a_9 = 12.$$

A sorozat első 9 tagjának összege:

$$S_9 = 9 \cdot \frac{a_1 + a_9}{2} = 54.$$



3. A szekszárdi borászok száma legyen  $s$ , a villányiaké  $v$ , az egrieké  $e$ .

a) A feladat szövege szerint:

$$5s + 4v + 2e = 25 \quad \text{és} \quad s + v + e = 8.$$

A második egyenletből  $e$ -t kifejezve és beírva az elsőbe:

$$3s + 2v = 9, \quad \text{ebből} \quad v = \frac{9 - 3s}{2},$$

vagyis  $9 - 3s$  páros és pozitív, tehát  $9 - 3s > 0$ , azaz  $3 > s$ . Tehát  $s$  lehet 1 vagy 2, de csak 1 esetén lesz a  $9 - 3s$  páros. Így  $s = 1 \Rightarrow v = 3$  és  $e = 4$ .

A borversenyen 1 szekszárdi, 3 villányi és 4 egri borász vett részt.

- b) A binomiális eloszlás alapján annak a valószínűsége, hogy 10 ember közül 7-en mondják, hogy a vörösbort jobban szeretik:

$$p = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \binom{10}{7} \cdot \frac{2^7}{3^{10}} \approx 0,26.$$

4. A keresett egyenesnek az  $x$  tengellyel való metszéspontja legyen  $(a; 0)$ , az  $y$  tengellyel pedig  $(0; b)$ .

Ha  $a = 0$  vagy  $b = 0$ , akkor az egyenes áthalad az origón, és egyenlete:  $y = \frac{7}{2}x$ .

Ha  $a$  és  $b$  közül egyik sem 0, az egyenes tengelymetszetes alakjából következően egyenlete:

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad (a, b \neq 0).$$

Az egyenes illeszkedik az  $A(2; 7)$  pontra, ezért  $1 = \frac{2}{a} + \frac{7}{b}$ .

Alakítsuk át az egyenletet:

$$ab = 2b + 7a, \quad \text{átalakítás után} \quad ab - 2b - 7a + 14 - 14 = 0, \quad \text{vagyis} \quad (a - 2)(b - 7) = 14.$$

Mivel  $a$  és  $b$  egész számok, 14-et kell egész számok szorzataként felírunk.

Ezeket a lehetőségeket a következő táblázat mutatja:

Nyolc egyenes tesz eleget a feltételeknek, ezek egyenletei:

$a - 2$	1	14	2	7	-1	-14	-2	-7
$b - 7$	14	1	7	2	-14	-1	-7	-2
$a$	3	16	4	9	1	-12	0	-5
$b$	21	8	14	9	-7	6	0	5

$$\begin{aligned} y = \frac{7}{2}x, \quad 1 = \frac{x}{3} + \frac{y}{21}, \quad 1 = \frac{x}{16} + \frac{y}{8}, \quad 1 = \frac{x}{4} + \frac{y}{14}, \\ 1 = \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad 1 = x - \frac{y}{7}, \quad 1 = -\frac{x}{12} + \frac{y}{6}, \quad 1 = -\frac{x}{5} + \frac{y}{5}. \end{aligned}$$

## 4. Feladatsor / B – megoldások

5. Mivel a nevező minden  $x$ -re pozitív értéket vesz fel, a függvény az intervallum minden pontjában értelmezve van.

Ha  $2 \leq x \leq 5$ , akkor:

$$f(x) = \frac{x + x + 2}{x + x - 2} = \frac{x + 1}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, ebből következik, hogy

$$f(5) = \frac{3}{2} \leq f(x) \leq 3 = f(2).$$





Ha  $0 \leq x < 2$ , akkor:

$$f(x) = \frac{x + x + 2}{x - x + 2} = x + 1.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő, ebből következik, hogy

$$f(0) = 1 \leq f(x) < 3 = f(2).$$

Ha  $-2 \leq x < 0$ , akkor:

$$f(x) = \frac{-x + x + 2}{-x - x + 2} = \frac{2}{-2x + 2} = -\frac{1}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő, ebből következik, hogy

$$f(-2) = \frac{1}{3} \leq f(x) < 1 = f(0).$$

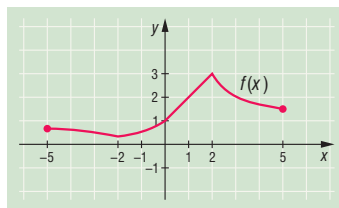
Ha  $-5 \leq x < -2$ , akkor:

$$f(x) = \frac{-x - x - 2}{-x - x + 2} = \frac{-2x - 2}{-2x + 2} = \frac{x + 1}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, ebből következik, hogy

$$f(-2) = \frac{1}{3} < f(x) \leq \frac{2}{3} = f(-5).$$

A függvény minimuma  $\frac{1}{3}$ , az  $x = -2$  helyen, maximuma pedig 3, az  $x = 2$  helyen.



6. A motor sebessége legyen  $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , az autóé  $y \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , a Béltelep és Andrásfalva közti távolság  $s$  km.

a) Míg az autó visszaér Andrásfalvára,  $2s$  utat tesz meg, ha pedig onnan visszafordulna, akkor a motorral való találkozásig újabb  $\frac{2s}{3}$  utat tenne meg, azaz összesen  $2s + \frac{2s}{3} = \frac{8s}{3}$  km-t haladna.

Ez idő alatt a motor által megtett út  $s + \frac{s}{3} = \frac{4s}{3}$  km, vagyis feleannyi, mint az autósé.

Mivel az út és a sebesség egyenesen arányos, az autó sebessége kétszerese a motorénak, vagyis  $y = 2x$ .

- b) Az első találkozásig az autó a két helység közti távolságnál 5 kilométerrel többet, a motor 5 kilométerrel kevesebbet tesz meg. Mivel az első találkozásig ugyanannyi ideig mozgottak, a  $t = \frac{s}{v}$  összefüggés alapján felírható:  $\frac{s - 5}{x} = \frac{s + 5}{y}$ . Felhasználva, hogy  $y = 2x$ :

$$\frac{s - 5}{x} = \frac{s + 5}{2x} \Rightarrow 2s - 10 = s + 5 \Rightarrow s = 15.$$

Az Andrásfalva és Béltelep közti távolság 15 km.

- c) Mivel a két helység közti kétszeres  $2s = 30$  km távolságot az autó 20 perccel, azaz  $\frac{1}{3}$  órával rövidebb idő alatt teszi meg, mint a motor, a mozgásuk idejére a  $t = \frac{s}{v}$  összefüggés alapján felírható:

$$\frac{30}{x} = \frac{30}{y} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{30}{x} = \frac{30}{2x} + \frac{1}{3} \Rightarrow x = 45.$$

A motor sebessége  $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , az autó sebessége  $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .



7. Alkalmazva a megfelelő trigonometrikus összefüggéseket, a feladat másodfokú egyenletre vezet:

$$\begin{aligned}\sin 2x - 2 \cdot \sin x - 2 \cdot \cos x - 2 &= 0, \\ 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - 2 \cdot (\sin x + \cos x) - 2 &= 0, \\ \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 2 \cdot (\sin x + \cos x) - 3 &= 0, \\ (\sin x + \cos x)^2 - 2 \cdot (\sin x + \cos x) - 3 &= 0.\end{aligned}$$

A  $(\sin x + \cos x)$ -re másodfokú egyenlet megoldásai:  $\sin x + \cos x = -1$  vagy  $\sin x + \cos x = 3$ .

Ha  $\sin x + \cos x = -1$ , akkor mindkét oldalt  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -vel beszorozva:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = \pi + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

$\sin x + \cos x = 3$  nem lehet, mert  $\sin x + \cos x$  kifejezés értéke legfeljebb  $\sqrt{2}$ .

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \pi + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

8. Helyezzük el a céltáblát egy olyan koordináta-rendszerbe, amelyben 1 egység 10 centiméternek felel meg, és a koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a céltábla középpontja.

A két parabolaív egyenlete:  $y = x^2 + 1$ , illetve  $y = -x^2 - 1$ .

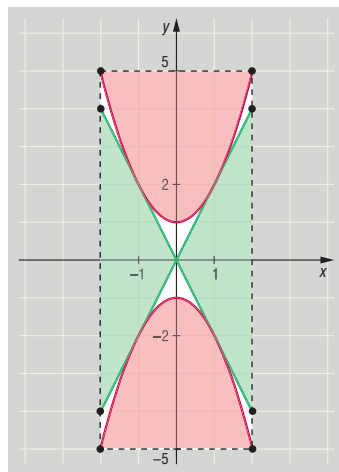
A parabolaívekhez az origóból húzott érintők egyenleteit keressük  $y = mx$  alakban. Az érintés feltétele, hogy a parabola és az érintő egyenletéből alkotott egyenletrendszernek egy megoldása legyen.

Az első és második síknegyedben levő parabola esetén az

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = mx \end{cases}$$

egyenletrendszert kell vizsgálni. Az egyenletrendszerből  $y$ -t kiküszöbölve, az  $x^2 - mx + 1 = 0$  másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0, vagyis:

$$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2.$$



A tengelyes szimmetria miatt a két parabolaív érintőinek egyenletei:  $y = 2x$ , illetve  $y = -2x$ .

- Először számítsuk ki a zöld terület nagyságát. Az első síknegyedbe eső területrészt olyan derékszögű háromszög, amelynek befogói 2 és 4, területe tehát 4 egység. Az egész céltáblán a zöld terület nagysága:  $T_{\text{zöld}} = 4 \cdot 4 = 16$  területegység.
- Az első síknegyedbe eső piros területrészt megkapjuk úgy, hogy egy 2 és 5 egység oldalú téglalap területéből kivonjuk a  $[0; 2]$ -on a parabolaív alatti területet:

$$2 \cdot 5 - \int_0^2 (x^2 + 1) dx = 10 - \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = 10 - \frac{14}{3} = \frac{16}{3}.$$

A piros terület nagysága a tengelyes szimmetria miatt:  $T_{\text{piros}} = 4 \cdot \frac{16}{3} = \frac{64}{3}$  területegység.

- A fehér terület nagyságát megkapjuk úgy, hogy a céltábla teljes területéből kivonjuk a piros és zöld területek nagyságát:  $T_{\text{fehér}} = 10 \cdot 4 - 16 - \frac{64}{3} = \frac{8}{3}$  területegység.



- a) A geometriai valószínűség fogalmából adódóan a céltáblára véletlenszerűen érkező lövések akkora valószínűséggel érkeznek a zöldre festett területre, amekkora része a zöld rész területe az egész céltábla területének, tehát:

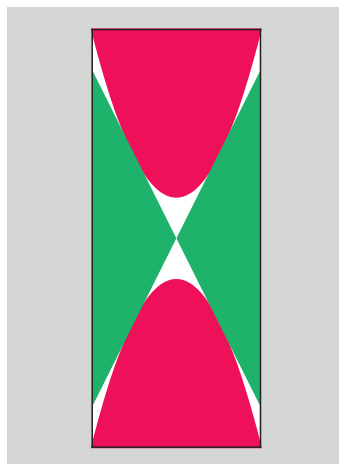
$$P(\text{zöld}) = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}.$$

Hasonlóan:

$$P(\text{piros}) = \frac{3}{40} = \frac{8}{15}, \quad \text{illetve} \quad P(\text{fehér}) = \frac{3}{40} = \frac{1}{15}.$$

- b) Az egy lövésért kapható pont várható értéke:

$$4 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{8}{15} + 6 \cdot \frac{1}{15} = \frac{70}{15} \approx 4,67.$$



9. A szoknya felszínének kiszámításához egy csonka kúp palástjának felszínét kell meghatározoznunk.

Tekintsük a csonka kúp ábrán látható tengelymetszetét, és használjuk az ábra jelöléseit. A csonka kúp fedőlapjának sugara  $r = CD$ , az alaplappjának sugara  $R = AB$ , valamint a csonka kúp alkotójának hossza  $a = AC$ .

Húzzunk  $EC$ -vel párhuzamost a középső gömb  $O_1$  középpontján keresztül. Mivel egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, az  $EKO_1C$  négyszög téglalap.

A  $KO_1O_2$  derékszögű háromszög átfogója a két érintő gömb középpontjának távolsága  $O_1O_2 = 7 + 4 = 11$ . A háromszög  $KO_2$  befogója pedig a gömbök sugarainak különbsége  $KO_2 = 7 - 4 = 3$ .

A Pitagorasz-tétel alapján a másik befogó:

$$KO_1 = EC = \sqrt{11^2 - 3^2} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}.$$

Az ábrán a  $KO_2O_1 \hat{=} CO_1D \hat{=}$ , mivel egyállású szögek, valamint  $KO_2O_1 \hat{=} EAB \hat{=}$ , mivel hegyesszögű merőleges szárú szögek. Jelöljük ezeket a szögeket  $\alpha$ -val.

A  $KO_1O_2$  derékszögű háromszögből  $\cos \alpha = \frac{3}{11}$ , és  $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{7}}{11}$ .

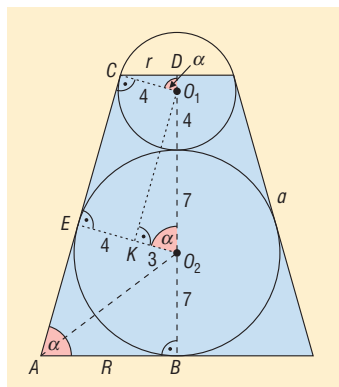
A csonka kúp fedőlapjának  $r$  sugarát az  $O_1DC$  derékszögű háromszögből számíthatjuk:

$$r = CD = 4 \cdot \sin \alpha = 4 \cdot \frac{4\sqrt{7}}{11} = \frac{16\sqrt{7}}{11}.$$

Mivel az  $AB$ , illetve az  $AE$  egyenesek érintik az  $O_2$  középpontú kört, az  $AO_2$  egyenes az  $A$  csúcsnál lévő  $\alpha$  szög felezője. Az  $ABO_2$  derékszögű háromszögből  $AB = O_2B \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

Ismert, hogy  $\left| \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$ , és mivel  $\frac{\alpha}{2}$  hegyesszög, és  $\cos \alpha = \frac{3}{11}$ , ezért:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{11}}{1 - \frac{3}{11}}} = \sqrt{\frac{14}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \text{amit felhasználva} \quad R = AB = O_2B \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 7 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{7\sqrt{7}}{2}.$$





Az  $AE$  és az  $AB$  érintőszakaszok egyenlősége alapján a csonka kúp alkotójának hossza:

$$a = AC = AE + EC = AB + EC = \frac{7\sqrt{7}}{2} + 4\sqrt{7} = \frac{15\sqrt{7}}{2}.$$

A csonka kúp palástjának felszíne:

$$A = (R + r) \cdot a \cdot \pi = \left( \frac{7\sqrt{7}}{2} + \frac{16\sqrt{7}}{11} \right) \cdot \frac{15\sqrt{7}}{2} \cdot \pi = \frac{11445}{44} \cdot \pi \approx 817,17 \text{ cm}^2.$$

A szoknya elkészítéséhez  $817,17 \text{ cm}^2$  területű karton szükséges.

## 5. Feladatsor / A – megoldások

1. Az egyenlet értelmezési tartománya  $x^2 - 1$  miatt:  $-1 \leq x \leq 1$ .

Figyeljük meg, hogy két gyökjel alatt is nevezetes szorzat áll:

$$\sqrt{(x-1)(x+1)} + \sqrt{x+1} = \sqrt{(x+1)^2}.$$

Mivel minden tagban megtaláljuk az  $x+1$  tényezőt, ezért az egyenlet egyik megoldása  $x_1 = -1$ .

Így akár le is oszthatunk  $\sqrt{x+1}$ -gyel (feltesszük, hogy  $x \neq -1$ ):

$$\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+1}.$$

Mindkét oldal négyzetre emelése, majd az egyenlet rendezése után:

$$2\sqrt{x-1} = 1, \text{ ahonnan } x_2 = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Ellenőrzés:

$$\sqrt{1,25^2 - 1} + \sqrt{1,25 + 1} = 0,75 + 1,5 = \sqrt{1,25^2 + 2 \cdot 1,25 + 1} = 2,25.$$

Az egyenletnek nincs más megoldása.

2. A körök elhelyezkedése miatt két közös belső érintőt keresünk.

Az ábra alapján azt sejtjük, hogy az  $e: y = 2$  egyenes egyike a két keresett belső érintőnek. Behelyettesítve a körök egyenleteibe, a következő egyenleteket kapjuk:

$$(x+1)^2 = 0 \text{ és } (x-2)^2 = 0.$$

Mindkettőnek csak 1-1 megoldása van, tehát  $e$  valóban közös belső érintő,  $k_2$ -vel vett érintési pontja  $P(2; 2)$ .

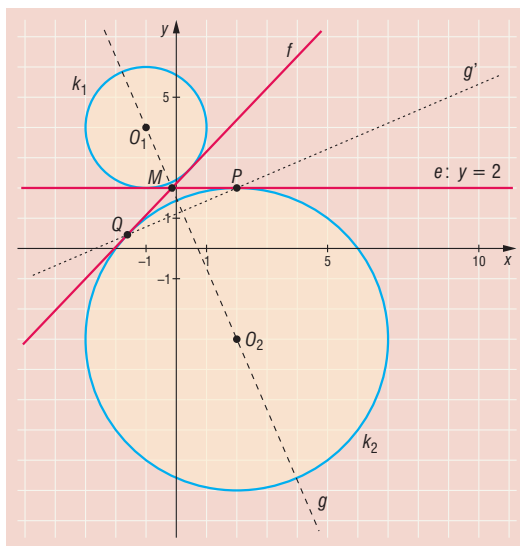
Az ábra szimmetrikus a körök középpontjain áthaladó  $g$  egyenesre. Ezért  $g$  és  $e$  olyan  $M$  pontban metszik egymást, amely rajta van  $f$ -en is.

Írjuk fel  $g$  egyenletét:

$$O_1O_2(3; -7) = \vec{n}_g \Rightarrow \vec{n}_g(7; 3),$$

$$g: 7x + 3y = 5,$$

ebből ( $y$  helyére  $2$ -t írva):  $x = -\frac{1}{7}$ . A három egyenes közös metszéspontja:  $M\left(-\frac{1}{7}; 2\right)$ .





Ismét használjuk ki a szimmetriát!  $P$  és  $Q$  érintési pontok is szimmetrikusak  $g$ -re, ezért ha  $P$ -ből  $g'$  merőlegest állítunk  $g$ -re, az  $Q$ -ban fogja metszeni  $k_2$ -t.  $g'$ -t  $g$ -ből könnyen megkapjuk:

$$g': 3x - 7y = -8.$$

Meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{array}{l} g': 3x - 7y = -8 \\ k_2: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = 2 \text{ és } y_2 = \frac{13}{29}.$$

Az első megoldás a már ismert  $P$  pontot adja vissza, a második pedig  $Q\left(-\frac{47}{29}, \frac{13}{29}\right)$ -t.

Két pontból ( $M$  és  $Q$ ) már fel tudjuk írni a keresett  $f$  egyenes egyenletét:

$$f: -21x + 20y = 43.$$

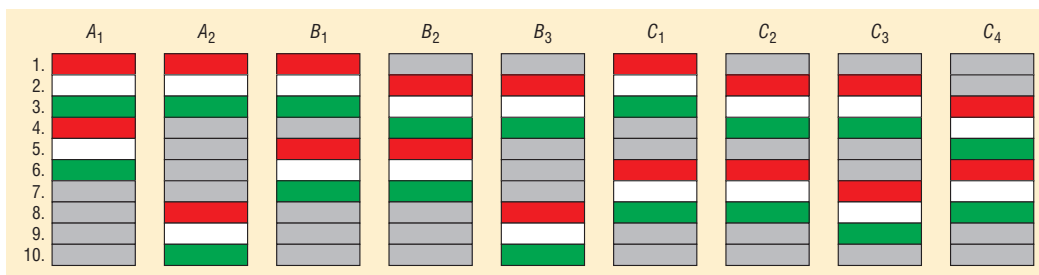
*Megjegyzés:* A feladatot más úton is megoldhatjuk, például  $MO_2$  fölé írt Thalész-körrel.

3. a)  $(3; 4; 3)$  típusú ismétléses permutációt kell elszámolnunk:  $\frac{10!}{3! \cdot 4! \cdot 3!} = 4200$ .

b) A 10 papírdarabkából három magyar zászlót rakhatunk ki, és marad egy fehér lapocska. Ezt a lapot vagy az első zászló elé, vagy az első után a második elé, vagy a második után a harmadik elé, vagy a harmadik után a negyedik elé, vagy a negyedik után húzhatjuk. Ez összesen 4 lehetőség.

c) A két zászló elhelyezésére összesen  $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$  lehetőségünk van.

Vázoljuk az eseteket! Lehetséges, hogy a két zászló mellett 4 egybefüggő szürke „nem-zászló” rész marad ( $A$  esetek), illetve  $1 + 3$  ( $B$ ), vagy  $3$ -nál kevesebb szürke rész ( $C$ ). Minden esetben a szürke részt 1 piros, 2 fehér és 1 zöld színű lappal töltjük ki.



**A esetek.** Ilyen három van, mert  $A_1$  „tükrözhető” (a szürke résszel kezdjük),  $A_2$  viszont szimmetrikus. Bármelyiket is tekintjük, a 4 helyen 2 módon jelenhet meg újra zászló, vagyis a lehetőségek száma:

$$3 \cdot \left( \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} - 2 \right) = 30.$$

**B esetek.** Ilyen hat eset van, mert mindegyik „tükrözhető”. Most minden esetben csak egyféleképpen kerülhet zászló a szürke mezőbe, ezért a lehetőségek száma:

$$3 \cdot 2 \cdot \left( \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} - 1 \right) = 66.$$

**C esetek.** Itt  $C_1, C_2$  „tükrözhető”,  $C_3$  és  $C_4$  szimmetrikus, így összesen 6 eset van. Zászló egyikben sem alakulhat ki, hiszen elapróztuk a szürke lapokat. Az esetek száma itt:

$$6 \cdot \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = 72.$$

Az esetek száma összesen 168.



4. a) A függvény az  $x = -1$  helyen metszi az  $x$  tengelyt, azaz:

$$f(-1) = -a + b - c + d = 0.$$

Ahol szélsőértéke van, ott az  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$  deriváltja 0, vagyis

$$f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \quad \text{és} \quad f'(3) = 27a + 6b + c = 0.$$

Más információnk nincs a függvényről. Ha négy ismeretlen és három egyenlet áll csak rendelkezésünkre, akkor csak valamelyik paraméter függvényében tudunk nyilatkozni a többről.

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad -a + b - c + d = 0 \\ (2) \quad 3a + 2b + c = 0 \\ (3) \quad 27a + 6b + c = 0 \end{array} \right\}.$$

Vonjuk ki a (2)-t a (3)-ból:  $24a + 4b = 0$ , így  $b = -6a$ .

Helyettesítsünk vissza (2)-be:  $3a - 12a + c = 0$ , így  $c = 9a$ .

Végül helyettesítsünk vissza (1)-be:  $-a - 6a - 9a + d = 0$ , így  $d = 16a$ .

Tehát  $f(x)$  függvényünk a következő:

$$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax + 16a = a(x^3 - 6x^2 + 9x + 16).$$

- b)  $a = 1$  esetén  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$ . Azt már tudjuk, hogy a függvény szélsőértékei az  $x = 1$  és  $x = 3$  helyeken vannak. Tekintsük a deriváltat:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3).$$

Mivel a derivált felfelé nyíló parabola, ezért előjelviszonyai a következők:

	$x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x$
$f'(x)$	pozitív	0	negatív	0	pozitív
$f(x)$	monoton növekvő	MAXIMUM	monoton csökkenő	MINIMUM	monoton növekvő

Innen leolvasható, hogy a függvénynek  $x = 3$  helyen van a lokális minimuma.

## 5. Feladatsor / B – megoldások

5. a) Sorban véve a kis háromszögekben az  $x_1, x_2, \dots$  szakaszokat, kapjuk:

$$x_1 = 80 \cdot \cos \alpha,$$

$$x_2 = x_1 \cdot \cos \alpha = 80 \cdot \cos^2 \alpha,$$

$$x_3 = x_2 \cdot \cos \alpha = 80 \cdot \cos^3 \alpha,$$

$$x_4 = x_3 \cdot \cos \alpha = 80 \cdot \cos^4 \alpha \text{ stb.}$$

A töröttvonal hossza a mértani sorozatot alkotó szakaszok összege (mértani sor):

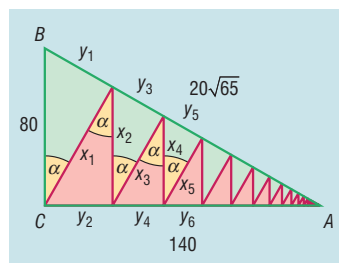
$$80 \cdot \cos \alpha (1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \dots) = 80 \cdot \cos \alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \cos^i \alpha = \frac{80 \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Mivel a nagy háromszögben az átfogó  $20\sqrt{65}$ , így

$$\cos \alpha = \frac{140}{20\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}.$$

Behelyettesítve, a vonal hosszára kapjuk:

$$\frac{7 \cdot 80}{\sqrt{65} - 7} = 35(\sqrt{65} + 7) \approx 527,18 \text{ cm.}$$





- b) Tudjuk, hogy a derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának fele. Vegyük sorban az  $y_1, y_2, \dots$  szakaszok hosszait a kis háromszögekben:

$$\begin{aligned}y_1 &= 80 \cdot \sin \alpha; \\y_2 &= x_1 \cdot \sin \alpha = 80 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha; \\y_3 &= x_2 \cdot \sin \alpha = 80 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha; \\y_4 &= x_3 \cdot \sin \alpha = 80 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha \text{ stb.}\end{aligned}$$

A zöld háromszögek területei a páratlan sorszámú  $x$ -ek és  $y$ -ok szorzatai felének az összege (mértani sor):

$$\begin{aligned}T_{\text{zöld}} &= \frac{80^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2} \cdot (1 + \cos^4 \alpha + \cos^8 \alpha + \dots) = \\&= \frac{80^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\cos^4 \alpha)^i = \frac{80^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2(1 - \cos^4 \alpha)}.\end{aligned}$$

A piros háromszögek területei a páros sorszámú  $x$ -ek és  $y$ -ok szorzatai felének az összege (mértani sor):

$$\begin{aligned}T_{\text{piros}} &= \frac{80^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha}{2} \cdot (1 + \cos^4 \alpha + \cos^8 \alpha + \dots) = \\&= \frac{80^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\cos^4 \alpha)^i = \frac{80^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha}{2(1 - \cos^4 \alpha)}.\end{aligned}$$

A hányadosuk pedig:

$$\frac{T_{\text{zöld}}}{T_{\text{piros}}} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{65}{49}.$$

6. a) Az  $n$  pontú teljes gráf éleinek száma  $\frac{n(n-1)}{2}$ , az  $n$  pontú fának pedig  $(n-1)$  éle van. Hányadosuk  $\frac{n}{2}$ .

- b) Mivel a teljes gráfban bármely két pont szomszédos, így az őket összekötő utak hosszának minimuma mindig 1. A teljes gráfok átmérőinek maximuma 1. Az  $n$  pontú fagrafok lehetnek teljesen különbözőek is. A legszélesebb fákat akkor kapjuk, ha a pontokat egyetlen vonalra fűzzük fel (lánc). Ekkor a legtávolabbi pontok között  $(n-1)$  él fut, azaz az ilyen gráfok átmérőinek maximuma  $(n-1)$ .

- c) Tudjuk, hogy minden pont foka kettő, továbbá a gráf egyszerű és összefüggő. Vegyük észre, hogy az ilyen gráf „kör” alakú! A 8 pontú körben a szemkölti pontok legkisebb távolsága 4, azaz a gráf átmérője is 4.

A „kör” alak igazolásához válasszuk ki az egyik pontot és annak egyik élet. A pontot satírozzuk be, és induljunk el az élen. A következő pontba jutva satírozzuk be azt is, majd menjünk tovább a másik élen. Ismételjük ezt addig, míg satírozott pontba nem érünk. Belátjuk, hogy ekkor minden pontot érintettünk: a satírozott pontok összefüggő gráfot alkotnak és ha lenne satírozatlan pont, akkor az eredeti gráfunk nem lenne összefüggő.

- d) Ha minden pont foka 6, akkor bármely pontot is tekintve, van pontosan egy olyan, amellyel nem szomszédos. Azonban a többi hat ponttal ez is szomszédos, azaz a két említett pont távolsága 2. Ilyen feltételek mellett bármely két pont távolsága vagy 1, vagy 2. A gráfok átmérője 2.





e) A gondolatmenet nagyon hasonló a d) ponthoz, kis különbséggel. Induljunk ki pl. az  $A$  pontból, 4 szomszédos pontját jelölje  $S_A$ .  $B$  jelöljön olyan pontot, amely nem szomszédos  $A$ -val (három ilyen is van). Mivel  $B$  foka is 4, ezért maximum 2 olyan pont lehet vele szomszédos, amely nincs  $S_A$ -ban. Tehát  $B$  legalább két olyan ponttal szomszédos, amelyek  $A$ -val szomszédosak. Így most is bármely két pont távolsága vagy 1, vagy 2. Az ilyen gráfok átmérője is 2.

*Megjegyzés:* Ha minden pont foka 3, akkor nehezebb a helyzet. Lehetséges, hogy  $S_A$  egyik pontja sem szomszédos  $S_B$  egyik pontjával sem. Nem összefüggő gráfnak pedig nincs átmérője.

7. Jelölje a két ismeretlen értéket  $x$  és  $y$ . Az  $]A - s; A + s[ = ]2,5941; 9,4059[$ -ből kiindulva használjuk ki, hogy az intervallum középpontja a számtani átlag. Tehát:

$$A = \frac{A - s + A + s}{2} = 6.$$

Ebből négy tizedesjegyre megadhatjuk a szórást is:

$$6 + s = 9,4059 \Rightarrow s = 3,4059.$$

Ennyi információ már elegendő egy kétismeretlenes egyenletrendszer felírásához:

$$\left. \begin{aligned} 6 &= \frac{1 + 2 + 4 + 5 + 8 + 9 + 9 + 10 + x + y}{10} \\ 3,4059 &= \sqrt{\frac{5^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 + (6 - x)^2 + (6 - y)^2}{10}} \end{aligned} \right\}.$$

Rendezzük mindkét sort. Mivel tudjuk, hogy  $x$  és  $y$  egészek, ezért 3,4059 négyzetét kerekítjük:

$$\left. \begin{aligned} 12 &= x + y \\ 32 &= (6 - x)^2 + (6 - y)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 = 10, \quad x_2 = 2, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 10.$$

A minta hiányzó két eleme tehát a 10 és a 2.

8. Egy másodfokú függvénynek pontosan akkor van két zérushelye, ha a polinomból alkotott másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív szám:

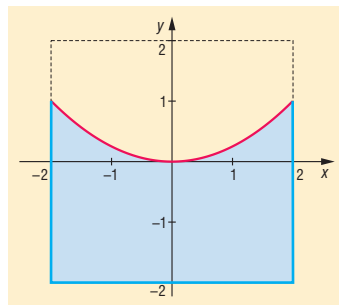
$$D = p^2 - 4q > 0, \quad \text{azaz} \quad q < \frac{p^2}{4}.$$

Tudjuk, hogy  $(p; q) \in I^2$ , ahol  $I = [-2; 2]$ . A  $(p; q)$  rendezett párt és a fenti feltételt legegyszerűbben koordináta-rendszerben ábrázolhatjuk. A kék színű rész jelenti azokat a pontokat, melyekre a kérdéses  $g(x)$  függvénynek két különböző zérushelye van. A valószínűség a kék színű terület és a négyzet területének aránya. A parabolagörbe és az  $x$  tengely közötti terület:

$$\int_{-2}^2 \frac{p^2}{4} dp = \left[ \frac{p^3}{12} \right]_{-2}^2 = \frac{8}{12} + \frac{8}{12} = \frac{4}{3}.$$

A valószínűség:

$$\frac{T_{\text{kék}}}{T_{\text{négyzet}}} = \frac{8 + \frac{4}{3}}{16} = \frac{7}{12}.$$



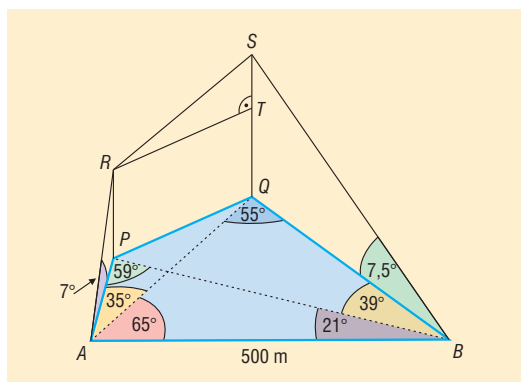


9. Feltételezhetjük, hogy a fák függőlegesen nőttek, ezért  $RPQT$  négyszög téglalap, és  $RTS$  háromszög derékszögű.  $APB$  és  $AQB$  szögeket az adatokból kiszámíthatjuk. Mivel ismertek a szögek,  $APB_{\Delta}$  és  $AQB_{\Delta}$  oldalait kiszámíthatjuk szinusz-tétellel:

$$\frac{PA}{500} = \frac{\sin 21^\circ}{\sin 59^\circ} \Rightarrow PA \approx 209,04 \text{ m},$$

$$\frac{PB}{500} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 59^\circ} \Rightarrow PB \approx 574,45 \text{ m},$$

$$\frac{BQ}{500} = \frac{\sin 65^\circ}{\sin 55^\circ} \Rightarrow BQ \approx 553,2 \text{ m}.$$



Trigonometrikus összefüggések alapján:

$$\frac{PR}{PA} = \tan 7^\circ \Rightarrow PR \approx 25,67 \text{ m}, \quad \text{illetve} \quad \frac{QS}{QB} = \tan 7,5^\circ \Rightarrow QS \approx 72,83 \text{ m}.$$

Ekkor  $ST = QS - PR = 47,16 \text{ m}$ . A  $PQB_{\Delta}$ -ben koszinusz-tétellel kiszámítható  $PQ$ :

$$PQ^2 = PB^2 + QB^2 - 2PB \cdot QB \cdot \cos 39^\circ \Rightarrow PQ \approx 376,95 \text{ m}.$$

Végül egy Pitagorasz-tétellel megadhatjuk  $RS$  értékét:

$$RS^2 = RT^2 + ST^2 = PQ^2 + (QS - PR)^2 \Rightarrow RS \approx 379,89 \text{ m}.$$

Ahhoz, hogy a kötéltre rögzített tárgy a pálya egyik végpontjából a másikba jusson, a kötélnak legalább kétszer olyan hosszúnak kell lennie, mint a pálya hossza. Azaz a kérdésre a válasz:

$$2RS \approx 759,78 \text{ m}.$$