11.3. A TRIGONOMETRIA ALKALMAZÁSAI

Vektorműveletek rendszerezése, alkalmazások (emlékeztető) – megoldások

3242 *a)* Egyenlő vektorok: $\vec{a}$ és $\vec{c}$. *b)* Ellentett vektorok: $\vec{b}$ és $\vec{d}$.
c) $\vec{a}+\vec{f}+\vec{d}=\vec{0}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{e}=\vec{0}$.

3243 *a)* $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{c}$; *b)* $\overrightarrow{AF}=-\vec{a}-\vec{c}$; *c)* $\overrightarrow{FD}=\vec{c}-\vec{a}$; *d)* $\overrightarrow{BD}=-2\cdot\vec{a}-\vec{c}$;
e) $\overrightarrow{EA}=2\cdot\vec{a}+\vec{c}$; *f)* $\overrightarrow{EC}=2\cdot\vec{c}+\vec{a}$; *g)* $\overrightarrow{FC}=2\cdot\vec{c}$.

3244 A vektorok által bezárt szög:
a) 0º; *b)* 180º.

3245 *a)* $\vec{a}+3\cdot\vec{b}$; *b)* $4\cdot\vec{a}-\vec{b}$.

3246 A vektor hossza:
a) $\sqrt{24^2+12^2}=12\cdot\sqrt{5}\approx 26{,}83$ cm; *b)* $\sqrt{6^2+16^2}=2\cdot\sqrt{73}\approx 17{,}09$ cm.

3247 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\cdot 10\cdot\cos 20^\circ\approx 18{,}79$; $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2\cdot 10\cdot\sin 20^\circ\approx 6{,}84$ egység.

3248 *a)* $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; *b)* $-\vec{b}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\dfrac{\vec{a}-2\cdot\vec{b}}{3}$; *c)* $\dfrac{2\cdot\vec{a}-\vec{b}}{3}$.

3249 *a)* Olyan vektorok felelnek meg a feltételnek, amelyek hegyesszöget zárnak be.
b) Olyan vektorok felelnek meg a feltételnek, amelyek hossza egyenlő.

3250 *a)* (12,5; –13,5); *b)* (0; –8); *c)* (2,05; –1,11).

3251 *a)* $\overrightarrow{AB}(2;8)$. *b)* A felezőpont helyvektora $\vec{f}(4;3)$.

3252 A háromszög belső szögfelezője a szemben levő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja: $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{10}{20}$, így a D pont az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja. A szakasz harmadolópontjába mutató helyvektorra vonatkozó összefüggés ismeretében: $\overrightarrow{CD}=\dfrac{\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{3}$.

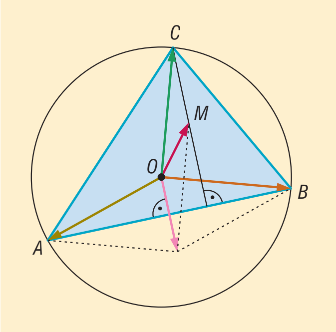
3253 *a)* Az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektor bezárt szöge 90º.
b) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{12^2+\left(12\cdot\sqrt{3}\right)^2}=24$.

3254 *a)* $\overrightarrow{AI}=\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\cdot\vec{c}$; *b)* $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{3}\cdot\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; *c)* $\overrightarrow{IJ}=-\dfrac{2}{3}\cdot\vec{a}+\dfrac{1}{2}\cdot\vec{c}$.

3255 A $\vec{v}$ vektor előállítható az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként $\vec{v}=\alpha\cdot a+\beta\cdot\vec{b}$ alakban. A feladatunk az, hogy α és β értékét meghatározzuk. Ehhez meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}6&=4\alpha-2\beta\\5&=\alpha+3\beta\end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $\alpha=2$, $\beta=1$. Tehát a $\vec{v}$ vektor előállítása: $\vec{v}=2\cdot\vec{a}+\vec{b}$.



3256 Először megmutatjuk, hogy az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ vektort az O kezdőpontba eltolva a vektor végpontja rajta lesz a háromszög C csúcsából induló magasságának egyenesén.

Az O pont az ABC háromszög köré írt kör középpontja, tehát az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok egyenlő hosszúságúak. A paralelogrammaszabály alapján a két vektort összeadva egy rombuszt kapunk. Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért az összegvektor merőleges lesz AB egyenesére.

Ismét használva a paralelogrammaszabályt, az O kezdőpontból kiindulva adjuk hozzá az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektorhoz az $\overrightarrow{OC}$ vektort.

Mivel a háromszög C csúcsából induló magasságának egyenese és az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ egyaránt merőleges AB egyenesére, az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ végpontja rajta lesz az ABC háromszög C-ből kiinduló magasságvonalán.

Hasonlóan belátható, hogy ha az O kezdőpontból kiindulva az $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ vektorhoz hozzáadjuk az $\overrightarrow{OA}$ vektort, az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ végpontja rajta lesz az ABC háromszög A-ból kiinduló magasságvonalán is.

Azt kaptuk, hogy ha $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ kezdőpontja az O pont, akkor végpontja rajta van a háromszög két magasságvonalának egyenesén, tehát a vektor végpontja a háromszög M magasságpontja.

Ezzel beláttuk, hogy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$.

3257 Legyen az ABC háromszög magasságpontja M, a körülírható kör középpontja O, az AB oldal felezőpontja F. Mivel OF merőleges AB-re, elég belátnunk, hogy $\overrightarrow{CM}=2\cdot\overrightarrow{OF}$.

Ismert, hogy egy tetszőleges vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató két helyvektor számtani közepe. Ha a vonatkoztatási pont O, akkor

$$\overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

A 3256. feladat alapján:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM},$$

amiből következik, hogy:

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

Tehát $\overrightarrow{CM}=2\cdot\overrightarrow{OF}$, vagyis a feladat állítását bebizonyítottuk.

3258 Az ABC háromszög körülírható körének O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$.

Egy tetszőleges vonatkoztatási pontból az ABC háromszög súlypontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe. Ha a vonatkoztatási pont a háromszög körülírható körének O középpontja és az S pont a háromszög súlypontja, akkor:

$$\overrightarrow{OS}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

A 3256. feladat alapján:

$$\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

Ez utóbbi két egyenlőségből következik, hogy $\overrightarrow{OM}=3\cdot\overrightarrow{OS}$, ami azt jelenti, hogy O, M és S pontok egy egyenesen vannak, és S pont az OM szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja.

3259 *a)* Az ABC háromszög körülírható körének O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$, magasságpontja M.

A 3256. feladat alapján $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, tehát:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}.$$

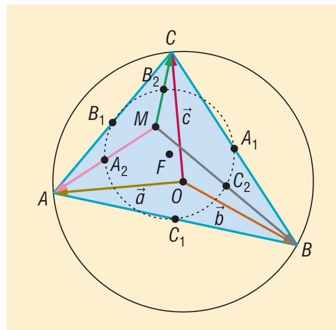
A háromszög AB oldalának C_1 felezőpontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{C_1F} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{c}}{2}.$$

Hasonló számolással adódik, hogy a BC oldal A_1, illetve az AC oldal B_1 felezőpontjába mutató vektorok $\frac{\vec{a}}{2}$, illetve $\frac{\vec{b}}{2}$.

Mivel az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok hossza a háromszög köré írható kör sugara, az F pont a háromszög minden oldalának felezőpontjától egyenlő távolságra van.

b) Az A csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz felezőpontja legyen A_2, ekkor $\overrightarrow{OA_2} = \frac{\overrightarrow{OM} + \vec{a}}{2}$.



A 3256. feladat alapján:

$$\overrightarrow{OA_2} = \frac{\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{a}}{2}.$$

Mivel $\overrightarrow{FA_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OF}$,

$$\overrightarrow{FA_2} = \frac{\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{a}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}}{2}.$$

Hasonlóan adódik, hogy az F pontból a B csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz B_2 felezőpontjába, illetve a C csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz C_2 felezőpontjába mutató vektorok $\frac{\vec{b}}{2}$, illetve $\frac{\vec{c}}{2}$.

Mivel az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok hossza a háromszög köré írható kör sugara, az F pont a háromszög minden csúcsát a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontjától egyenlő távol van.

A meggondolásainkból következik, hogy ha az ABC háromszög körülírható körének sugara R, akkor az F középpontú $\frac{R}{2}$ sugarú körön rajta van a háromszög három oldalának felezőpontja, és a háromszög minden csúcsát a háromszög magasságpontjával összekötő szakasz felezőpontja. Ezt a kört hívják a háromszög Feuerbach körének. Szokás még kilenc pont körének is nevezni, mivel az említett hat ponton kívül még rajta van a háromszög három magasságának talppontja is.

A skaláris szorzat – megoldások

3260 *a)* 16; *b)* 0; *c)* $-16 \cdot \sqrt{2}$; *d)* -32.

3261 *a)* 60°; *b)* 135°; *c)* 90°; *d)* $\approx 67{,}98°$.

3262 *a)* 9; *b)* 4; *c)* $\frac{12 \cdot \sqrt{2}}{7}$; *d)* 0.

3263 A skaláris szorzat legkisebb értéke -84, a legnagyobb értéke 84.

3264 *a)* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$; *b)* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1\cdot 1\cdot\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$;

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AT}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 0^\circ=\frac{1}{2}$; *d)* $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{TC}=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 30^\circ=\frac{3}{4}$.

3265 A négyzet átlójának a hossza 2 egység.

a) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2=4$;

b) $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=2$;

c) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2=0$, vagy

$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=2\cdot 2\cdot\cos 90^\circ=0$;

d) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=0+2=2$, vagy

$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=2$.

3266 *a)* $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$;

b) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$, mivel a két vektor merőleges egymásra.

c) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\cdot\vec{b}$;

d) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$;

e) $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=2(\vec{a})^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-3\left(\vec{b}\right)^2=2-\frac{5}{2}-3=-\frac{7}{2}$.

3267 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=3\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 120^\circ=-\frac{3}{2}$.

3268 *a)* Mivel $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ és $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|$, ezért $|\vec{b}|=\frac{1}{\cos\alpha}$.

Minden olyan $\vec{b}$ vektor megfelel, amelynek hossza az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által bezárt szög koszinuszának a reciproka.

b) Nincsenek ilyen vektorok, mert a skaláris szorzat értéke mindig egy valós szám.

c) Minden olyan $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor megfelel, amelyek nem egyirányúak.

d) Az egyenlőség igaz, ha a két vektor merőleges egymásra.

e) Az egyenlőséget olyan $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok teljesítik, amelyek skaláris szorzata 2.

3269 *a)* Mivel az $\vec{a}-\vec{b}$ vektor merőleges a $\vec{c}$ vektorra, a skaláris szorzatuk 0.

b) Mivel az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}+\vec{c}$ hossza egyaránt $\sqrt{2}$, valamint a közbezárt szögük 60°:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=1.$$

c) Az $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ testátló vektora $\sqrt{3}$, az $\vec{a}+\vec{c}$ lapátló vektora $\sqrt{2}$ hosszúságú, és a bezárt szögük koszinusza $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ezért:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=2.$$

3270 Legyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által bezárt szög α. Mivel a $3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}$ vektor merőleges az $\vec{a}-2\cdot\vec{b}$ vektorra, a skaláris szorzatuk 0:

$$\left(3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\cdot\vec{b}\right)=3\cdot\vec{a}^2-4\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}-4\cdot\vec{b}^2=0.$$

Ebből következik, hogy:

$$4\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}=-1 \quad\Rightarrow\quad 4\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\alpha=-1.$$

Így kapjuk, hogy $\cos\alpha=-0{,}25$, amiből $\alpha\approx 104{,}48°$.

3271 A két vektor merőleges egymásra, mert:

$$\left(\vec{a}-2\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(5\cdot\vec{a}+4\cdot\vec{b}\right)=5\cdot\vec{a}^2-6\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}-8\cdot\vec{b}^2=$$
$$=5\cdot|\vec{a}|^2-6\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos120°-8\cdot|\vec{b}|^2=$$
$$=5\cdot|\vec{a}|^2-6\cdot|\vec{a}|^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-8\cdot|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2\cdot(5+3-8)=0.$$

3272 Tekintsük a két vektor skaláris szorzatát, és alkalmazzuk a skaláris szorzás ismert műveleti tulajdonságait:

$$\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}-\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\right]\cdot\vec{a}=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)=0.$$

Mivel a szorzat 0, a két vektor merőleges egymásra.

3273 Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $ABCD$ tetraéder ABC lapjának oldalai között az $AB\ge BC\ge CA$ egyenlőtlenség áll fenn. Elég bizonyítanunk, hogy a $BCA\sphericalangle$ hegyesszög. Ehhez elég belátni, hogy $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ skaláris szorzat értéke pozitív valós szám:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\right)=$$
$$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}.$$

Mivel $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ és $\overrightarrow{DC}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra, ezért:

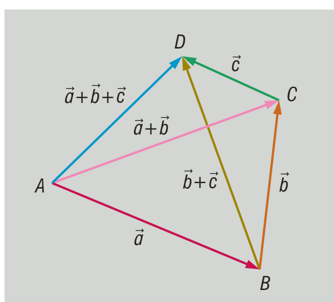
$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=0.$$

Így:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}=\left|\overrightarrow{DC}\right|^2>0,$$

ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

3274 Az ábrán látható $ABCD$ négyszög oldalainak vektorai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Elég belátni, hogy a szemközti oldalvektorok négyzetösszegének különbsége akkor és csak akkor nulla, ha az átlóvektorok merőlegesek egymásra. Vegyük a szemben lévő oldalvektorok négyzetösszegének a különbségét:

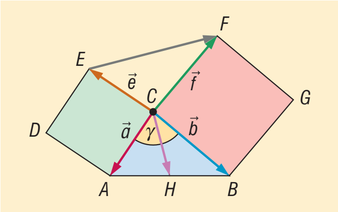


$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2+\vec{b}^2-\vec{a}^2-\vec{c}^2=$$
$$=2\cdot\vec{b}^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+2\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}=$$
$$=2\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Ez utóbbi szorzat akkor és csak akkor 0, ha $\vec{a}+\vec{b}$ átlóvektor merőleges $\vec{b}+\vec{c}$ átlóvektorra. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

3275 Irányítsuk az oldalakat az ábrán látható módon vektorokként. Egy szakasz felezőpontjába mutató vektor a végpontokba mutató vektorok számtani közepe:

$$\overrightarrow{CH}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$



Az ábráról leolvasható, hogy $\overrightarrow{EF}=\vec{f}-\vec{e}$.

Tekintsük ez utóbbi két vektor skaláris szorzatát:

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\cdot\left(\vec{f}-\vec{e}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{f}-\vec{e}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{f}-\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{f}-\vec{b}\cdot\vec{e}\right).$$

Az $\vec{a}$ és $\vec{e}$, valamint a $\vec{b}$ és $\vec{f}$ vektorok merőlegesek egymásra, tehát skaláris szorzatuk 0, tehát:

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{f}-\vec{b}\cdot\vec{e}\right).$$

Legyen γ a háromszög C csúcsánál lévő szöge. Tekintsük az $\vec{a}\cdot\vec{f}$ és $\vec{b}\cdot\vec{e}$ skaláris szorzatokat:

$$\vec{a}\cdot\vec{f}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{f}\right|\cdot\cos(\gamma+90^\circ),$$
$$\vec{b}\cdot\vec{e}=\left|\vec{b}\right|\cdot|\vec{e}|\cdot\cos(\gamma+90^\circ).$$

Figyelembe véve, hogy $|\vec{a}|=|\vec{e}|$ és $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{f}\right|$, a két skaláris szorzat egyenlő, tehát

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{f}-\vec{b}\cdot\vec{e}\right)=0.$$

Ha két vektor skaláris szorzata 0, akkor merőlegesek egymásra, tehát CH egyenese merőleges EF egyenesére.

Az $EF=2\cdot CH$ összefüggés bizonyításához tekintsük a $(2\cdot CH)^2-EF^2$ különbséget:

$$(2\cdot CH)^2-EF^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{f}-\vec{e}\right)^2=\vec{a}^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2-\vec{e}^2+2\cdot\vec{e}\cdot\vec{f}-\vec{f}^2.$$

Az $|\vec{a}|=|\vec{e}|$ és $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{f}\right|\Rightarrow\vec{a}^2+\vec{b}^2-\vec{e}^2-\vec{f}^2=0$, valamint az $ACB\sphericalangle=\gamma$, illetve az $ECF\sphericalangle=180^\circ-\gamma$, tehát:

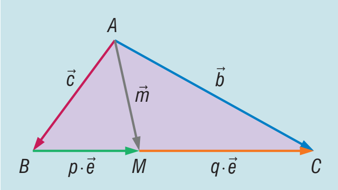
$$(2\cdot CH)^2-EF^2=2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+2\cdot\vec{e}\cdot\vec{f}=2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\gamma+2\cdot|\vec{e}|\cdot\left|\vec{f}\right|\cdot\cos(180^\circ-\gamma).$$

Ismert, hogy $\cos\gamma=-\cos(180^\circ-\gamma)$, tehát:

$$(2\cdot CH)^2-EF^2=2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\gamma-2\cdot|\vec{e}|\cdot\left|\vec{f}\right|\cdot\cos\gamma=0.$$

Azt kaptuk, hogy $(2\cdot CH)^2-EF^2=0$, vagyis $EF=2\cdot CH$.

3276 Vezessük be a következő jelöléseket: $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$.



Legyen a BC-vel párhuzamos egységvektor $\vec{e}$.

Ha $MC=q$ és $BM=p$, akkor $\overrightarrow{MC}=q\cdot\vec{e}$, illetve $\overrightarrow{BM}=p\cdot\vec{e}$.

A következő egyenlőségeket emeljük négyzetre:

$$\vec{c}=\vec{m}-p\cdot\vec{e}\qquad\text{és}\qquad\vec{b}=\vec{m}+q\cdot\vec{e}.$$

A skaláris szorzás tulajdonságai miatt ezeket négyzetre emelve kapjuk a következő egyenleteket:

$$AB^2=AM^2+p^2-2p\cdot\left(\vec{m}\cdot\vec{e}\right)\qquad\text{és}\qquad AC^2=AM^2+q^2+2q\cdot\left(\vec{m}\cdot\vec{e}\right).$$

Az első egyenletet q-val, a másodikat p-vel szorozva, majd összeadva, megkapjuk a következő összefüggést:

$$AB^2 \cdot q + AC^2 \cdot p = AM^2 \cdot (p+q) + pq^2 + qp^2,$$

$$AB^2 \cdot q + AC^2 \cdot p = AM^2 \cdot (p+q) + pq \cdot (p+q),$$

$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM = AM^2 \cdot BC + BM \cdot MC \cdot BC.$$

Ez utóbbi összefüggés éppen a bizonyítandó állítás.

3277 Az ABC háromszög S súlypontját tekintsük vonatkoztatási pontnak. Ekkor a súlypontba mutató képlet alapján az A, B és C csúcsok $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ helyvektoraira fennáll:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}.$$

Ha a P pont helyvektora $\vec{p}$, akkor $|\vec{p}| = r$, továbbá:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \left(\vec{a}-\vec{p}\right)^2 + \left(\vec{b}-\vec{p}\right)^2 + \left(\vec{c}-\vec{p}\right)^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2 \cdot \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) \cdot \vec{p} + 3 \cdot \vec{p}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3r^2.$$

Tehát az adott ABC háromszögben a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg az r sugarú kör kerületének bármely P pontjára nézve ugyanakkora.

3278 A 3277. feladat alapján adott ABC háromszög esetén a

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3r^2$$

összeg akkor minimális, ha $r = 0$, vagyis P pont éppen a háromszög súlypontja.

Vektor hossza, és skaláris szorzat a koordináta-rendszerben – megoldások

3279 *a)* $\sqrt{34}$; *b)* $\frac{\sqrt{37}}{2}$; *c)* $\frac{\sqrt{5}}{3}$; *d)* $\sqrt{20} = 2\cdot\sqrt{5}$;

e) $\sqrt{12} = 2\cdot\sqrt{3}$; *f)* 1.

3280 *a)* $\sqrt{290}$; *b)* $\sqrt{145}$.

3281 Az $\vec{a}$ vektorral egyirányú egységvektor: $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tehát koordinátái:

a) $\vec{a}_0(0{,}8; -0{,}6)$; *b)* $\vec{a}_0\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}; \frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)$;

c) $\vec{a}_0\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}; \frac{2mn}{m^2+n^2}\right)$.

3282 Az $\vec{a}$ vektorral megegyező irányú 5 egység hosszú vektor: $\vec{b} = 5\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tehát koordinátái:

a) $\vec{b}\left(-\frac{25}{13}; \frac{60}{13}\right)$; *b)* $\vec{b}\left(\frac{45\cdot\sqrt{130}}{130}; \frac{35\cdot\sqrt{130}}{130}\right)$;

c) $\vec{b}\left(-\sqrt{5}; 2\cdot\sqrt{5}\right)$.

3283 Az $\vec{a}$ vektorral ellentétes irányú 3 egység hosszú vektor: $\vec{b} = -3 \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tehát koordinátái:

a) $\vec{b}\left(\frac{15}{13}; -\frac{36}{13}\right)$; *b)* $\vec{b}\left(-\frac{27 \cdot \sqrt{130}}{130}; -\frac{21 \cdot \sqrt{130}}{130}\right)$;

c) $\vec{b}\left(\frac{3}{5} \cdot \sqrt{5}; -\frac{6}{5} \cdot \sqrt{5}\right)$.

3284 *a)* 9; *b)* 25,4; *c)* –3,8; *d)* –108,4; *e)* 254.

3285 *a)* 14,25°; *b)* 92,81°; *c)* 18,60°; *d)* 90°.

3286 Két vektor merőlegességének szükséges feltétele, hogy a két vektor skaláris szorzata 0 legyen.

a) $y = \frac{81}{7}$; *b)* $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$; *c)* $y = 5$ vagy $y = 11{,}5$.

3287 Az $\overrightarrow{AB}$ vektor:

$$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{b}{a^2 - b^2}; \frac{2b}{a^2 - b^2}\right).$$

A vektor hossza a koordinátáinak négyzetösszegéből vont négyzetgyök:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(-\frac{b}{a^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{2b}{a^2 - b^2}\right)^2} = \sqrt{5} \cdot \left|\frac{b}{a^2 - b^2}\right|.$$

3288 Az AOB háromszög OA oldalának hossza az A pont helyvektorának az abszolút értéke:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-12)^2 + 7^2} = \sqrt{193}.$$

A OB oldal hossza a B pont helyvektorának az abszolút értéke:

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}.$$

Az AB oldal hossza az $\overrightarrow{AB}(20; -5)$ vektor abszolút értéke:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{20^2 + (-5)^2} = 5 \cdot \sqrt{17}.$$

A háromszög kerülete:

$$\sqrt{193} + \sqrt{68} + 5 \cdot \sqrt{17} = 42{,}75 \text{ egység.}$$

3289 Mivel:

$$\sqrt{4 - 2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} - 1,$$

a két vektor skaláris szorzata:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} + \sqrt{3} = 0.$$

Tehát a két vektor 90°-os szöget zár be.

3290 *a)* $\vec{b}(3; 5)$; *b)* $\vec{b}\left(-\frac{2}{5}; \frac{4}{3}\right)$; *c)* $\vec{b}(1 - 2k; k)$.

3291 A $\vec{c}$ vektor koordinátái legyenek $\vec{c}(x; y)$. A skáláris szorzatokat a koordináták segítségével kiszámolva a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{c} = 7 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2y = 7 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad 4x - y = 1 \end{array}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = -1$ és $y = -5$. Tehát a $\vec{c}$ vektor: $\vec{c}(-1; -5)$.

3292 Legyen $\vec{b}(x; -7)$. A két vektor skaláris szorzatát számolhatjuk kétféleképpen, így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$4x + 21 = 5 \cdot \sqrt{x^2 + 49} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Négyzetre emelés után az

$$x^2 + 48x - 49 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek gyökei 1 és -49.

Ha $x = -49$, akkor a két vektor skaláris szorzata negatív, tehát nem zárhatnak be hegyesszöget.
A $\vec{b}$ vektor első koordinátája 1, és ekkor a két vektor valóban $45°$-os szöget zár be.

3293 Az adott vektorokkal egyirányú egységnyi hosszú vektorok rombuszt feszítenek ki, így összegük a két vektor szögfelezőjének irányába mutat. A keresett vektor tehát így állítható elő:

$$\vec{v} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Mivel $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ koordinátái $\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$ és $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ koordinátái $\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$, ezért a két vektor szögfelezőjének irányába mutató vektor:

$$\vec{v}\left(\frac{112}{65}; -\frac{14}{65}\right).$$

3294 Mivel az $\overrightarrow{OA}$, illetve $\overrightarrow{OB}$ vektorok skaláris szorzata:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -12 \cdot 14 + 7 \cdot 24 = 0,$$

a két vektor merőleges egymásra, tehát az OAB háromszög derékszögű.

Egy derékszögű háromszög beírt körének sugarát kiszámíthatjuk az $r = \frac{a + b - c}{2}$ összefüggés alapján, ahol a, b a befogók, és c az átfogó hosszát jelöli.
A befogók hossza:

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{193} \quad \text{és} \quad \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{772} = 2 \cdot \sqrt{193}.$$

Az átfogó hossza:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5 \cdot 193} = \sqrt{965}.$$

A beírt kör sugara tehát:

$$r = \frac{\left(3 - \sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{193}}{2} \approx 5{,}31.$$

A háromszög köré írt kör sugara Thalész tételének értelmében az átfogó fele, vagyis:

$$\frac{\sqrt{965}}{2} \approx 15{,}53.$$

3295 Két vektor akkor és csak akkor zár be tompaszöget, ha a két vektor skaláris szorzata negatív:

$$(2 - 2p) \cdot (x + 1) + x^2 \cdot (5 - p) < 0.$$

Keressük p valós paraméter értékét úgy, hogy a

$$(5 - p) \cdot x^2 + (2 - 2p) \cdot x + (2 - 2p) < 0$$

egyenlőtlenség minden valós x-re fennálljon.

Ha az egyenlőtlenség elsőfokú, akkor $p = 5$, és vizsgálnunk kell a $-8x - 8 < 0$ egyenlőtlenséget. Ez csak $x > -1$ esetén teljesül, tehát $p = 5$ nem felel meg a feladat feltételeinek.

Ha az egyenlőtlenség másodfokú, akkor az

$$f(x) = (5 - p) \cdot x^2 + (2 - 2p) \cdot x + (2 - 2p)$$

másodfokú függvény csak negatív értékéket vehet fel. Ez akkor teljesül, ha a függvény főegyütthatója negatív, és a függvénynek nincs zérushelye. Mivel a függvényhez tartozó másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (2 - 2p)^2 - 4 \cdot (5 - p) \cdot (2 - 2p),$$

a következő egyenlőtlenségrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} (2 - 2p)^2 - 4 \cdot (5 - p) \cdot (2 - 2p) < 0 \\ 5 - p < 0 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenlőtlenség a következő alakra hozható:

$$-p^2 + 10p - 9 < 0,$$

amelynek megoldása: $p < 1$ vagy $p > 9$.

A második egyenlőtlenség $p > 5$ esetén teljesül.

A két megoldáshalmaz metszete: $p > 9$.

Tehát $p > 9$ esetén minden valós x értékére az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor tompaszöget zár be.

3296 Legyen $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$. Számítsuk ki a skaláris szorzatukat kétféleképpen:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \cos\alpha,$$

ahol α a két vektor által bezárt szög. Ismert, hogy $\cos\alpha \le 1$, így ebből közvetlenül adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $\cos\alpha = 1$, vagyis a két vektor egyirányú. Tehát létezik olyan $\lambda \ge 0$ valós szám, hogy $a_1 = \lambda \cdot b_1$, és $a_2 = \lambda \cdot b_2$.

3297 *a)* Alkalmazzuk az $\vec{a}(12; 5)$ és $\vec{b}(a; b)$ vektorokra a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $12b = 5a \ge 0$.

b) Alkalmazzuk az $\vec{a}\left(\sqrt{7a + 1}; \sqrt{7b + 1}\right)$ és $\vec{b}(1; 1)$ vektorokra Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, és használjuk ki, hogy $a + b = 1$:

$$\sqrt{7a + 1} \cdot 1 + \sqrt{7b + 1} \cdot 1 \le \sqrt{\left(\sqrt{7a + 1}\right)^2 + \left(\sqrt{7b + 1}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = b = \dfrac{1}{2}$.

3298 Alkalmazzuk az $\vec{a}\left(\sqrt{\dfrac{2}{a}}; \sqrt{\dfrac{3}{b}}\right)$ és $\vec{b}\left(\sqrt{a}; \sqrt{b}\right)$ vektorokra a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, és végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{\frac{3}{b}} \cdot \sqrt{b} \le \sqrt{\frac{2}{a} + \frac{3}{b}} \cdot \sqrt{a + b},$$

felhasználva, hogy $a + b = 7$:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \le \sqrt{\frac{2}{a} + \frac{3}{b}} \cdot \sqrt{7}.$$

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív:

$$\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{7} \le \frac{2}{a}+\frac{3}{b}.$$

Tehát $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$ minimális értéke $\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{7}$.

A kifejezés a minimális értéket olyan a és b értékekre veszi fel, amelyre teljesül, hogy:

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{\frac{3}{b}}\cdot\sqrt{a} \quad \text{és} \quad a+b=7.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$a=\frac{7\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=7\cdot\left(\sqrt{6}-2\right) \quad \text{és} \quad b=\frac{7\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=7\cdot\left(3-\sqrt{6}\right).$$

A szinusztétel – megoldások

3299 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
5 cm	3,70 cm	4,62 cm	73°	45°	62°
1,88 m	8,67 m	9 m	12°	74°	94°
3,75 dm	4 dm	4,61 dm	51°	56°	73°

3300 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
9 cm	5 cm	9,39 cm	70°	31,47°	78,53°
7,43 m	12 m	8 m	37,30°	102°	40,70°
18 dm	19,42 dm	120 cm	65°	77,83°	37,17°

3301 *a)* A háromszögben két oldal és a kisebbikkel szemben levő szög adott, tehát a háromszög nem egyértelműen meghatározott. Legyen a szokásos jelöléseket használva $a=6$, $b=10$ és $\alpha=30°$. Felírva a szinusztételt:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 30°}=\frac{10}{6} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta\approx 0{,}8333.$$

Innen β értéke hegyes- és tompaszög is lehet:

$\beta_1=56{,}44°$, illetve $\beta_2=123{,}56°$.

A szinusztételt ismételten használva a háromszög szögei és oldalai lehetnek:

a	b	c	α	β	γ
6 cm	10 cm	11,98 cm	30°	56,44°	93,56°
6 cm	10 cm	5,34 cm	30°	123,56°	26,44°

b) Hasonlóan az előző részhez a háromszög szögei és oldalai lehetnek:

a	b	c	α	β	γ
6 cm	10 cm	14,33 cm	20°	34,75°	125,25°
6 cm	10 cm	4,47 cm	20°	145,25°	14,75°

3302 *a)* Az $a + b = 12$ cm összefüggésből $a = 12 - b$. A szinusztételt használva:

$$\frac{\sin 42{,}8^\circ}{\sin 72{,}5^\circ} = \frac{12 - b}{b}.$$

A b oldalra így adódik:

$$b = \frac{12 \cdot \sin 72{,}5^\circ}{\sin 42{,}8^\circ + \sin 72{,}5^\circ} \approx 7{,}00.$$

A szinusztételt ismételten használva a háromszög oldalai:

$$5{,}00 \text{ cm}, \quad 7{,}00 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 6{,}65 \text{ cm}.$$

b) A háromszög oldalai:

$$17{,}28 \text{ cm}, \quad 30{,}72 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 24{,}89 \text{ cm}.$$

3303 A szinusztételt használva a háromszög oldalai:

a) 146,86 cm, 92,86 cm és 160,57 cm;

b) 43,18 cm, 13,18 cm és 50,16 cm.

3304 A szinusztétel segítségével a háromszög oldalaira kapjuk:

$$38{,}5 \text{ cm}, \quad 32{,}0 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 29{,}5 \text{ cm}.$$

3305 A háromszög oldalai:

$$12{,}89 \text{ cm}, \quad 17{,}36 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 19{,}75 \text{ cm}.$$

3306 A $2a + b = c$ egyenlőség mindkét oldalát osztva c-vel, majd használva a szinusztételt adódik, hogy igaz az állítás.

3307 A paralelogramma oldalai: 10,59 cm és 8,23 cm.

3308 *a)* 116,63 N és 84,31 N;

b) 85,95 N és 26,47 N.

3309 *a)* 25,55 cm^2;

b) 4153,51 cm^2.

3310 Egy háromszög területét a szokásos jelöléssel számíthatjuk a következő képlettel:

$$T = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}.$$

a) A háromszög szögei 50°, 82° és 48°, így az egyes oldalak::

$$a = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin 50^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \sin 48^\circ}} \approx 14{,}64, \qquad b = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin 82^\circ}{\sin 50^\circ \cdot \sin 48^\circ}} \approx 18{,}93,$$

$$c = \sqrt{\frac{2T \cdot \sin 48^\circ}{\sin 50^\circ \cdot \sin 82^\circ}} \approx 14{,}21.$$

A háromszög oldalai tehát:

$$14{,}64 \text{ cm}, \quad 18{,}93 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 14{,}21 \text{ cm}.$$

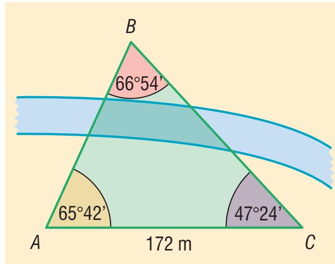
b) Hasonlóan a háromszög oldalaira kapjuk:

$$12{,}31 \text{ cm}, \quad 18{,}20 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 17{,}51 \text{ cm}.$$

3311 Az ABC háromszög harmadik szöge 66°54'. A háromszög AB és AC oldalára felírva a szinusztételt:

$$\frac{AB}{172} = \frac{\sin 47°24'}{\sin 66°54'} \quad \Rightarrow \quad AB \approx 137{,}64.$$

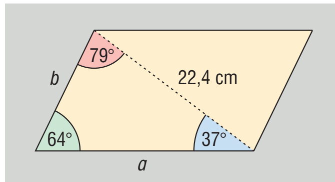
Az AB távolság 137,64 m.



3312 A paralelogramma 22,4 cm-es átlója a paralelogramma oldalaival olyan háromszöget határoz meg, amelynek szögei 37°, 79° és 64°. Ebben a háromszögben felírva a szinusztételt adódik, hogy $a = 24{,}46$ és $b = 15{,}00$.

A paralelogramma oldalai:

24,46 cm és 15,00 cm.

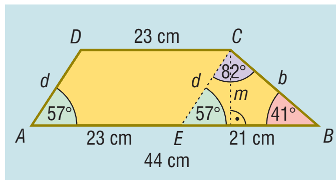


3313 Vegyük fel az $ABCD$ trapéz hosszabbik AB alapján az E pontot úgy, hogy az $AECD$ négyszög paralelogramma legyen. Ekkor:

$$EB = 44 - 23 = 21 \text{ cm},$$

$$CEB\sphericalangle = 57°, \quad EBC\sphericalangle = 41° \quad \text{és} \quad BCE\sphericalangle = 82°.$$

Az EBC háromszögnek ismerjük egy oldalát és a szögeit, így a szinusztétellel a b és d oldalak hosszát kiszámíthatjuk:



$$\frac{b}{21} = \frac{\sin 57°}{\sin 82°} \quad \Rightarrow \quad b = 21 \cdot \frac{\sin 57°}{\sin 82°} \approx 17{,}79;$$

$$\frac{d}{21} = \frac{\sin 41°}{\sin 82°} \quad \Rightarrow \quad d = 21 \cdot \frac{\sin 41°}{\sin 82°} \approx 13{,}91.$$

a) A trapéz szárainak hossza:

17,79 cm és 13,91 cm.

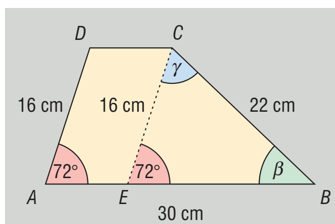
b) A terület meghatározásához számoljuk a trapéz magasságát:

$$m = b \cdot \sin 41° \approx 11{,}67.$$

A trapéz területe:

$$T = \frac{11{,}67 \cdot (44 + 23)}{2} = 390{,}95 \text{ cm}^2.$$

3314 A szóban forgó $ABCD$ trapéz hosszabbik AB alapján vegyük fel az E pontot úgy, hogy az $AECD$ négyszög paralelogramma legyen. Az EBC háromszögben így ismert két oldal, és a hosszabbikkal szemben levő szög. Szinusztétellel β és EB oldal számítható:



$$\frac{\sin \beta}{\sin 72°} = \frac{16}{22} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 43{,}76° \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 64{,}24°;$$

$$\frac{EB}{22} = \frac{\sin 64{,}24°}{\sin 72°} \quad \Rightarrow \quad EB \approx 20{,}83.$$

a) A trapéz rövidebb alapja:

$$AB - EB = 30 - 20{,}83 = 9{,}17 \text{ cm}.$$

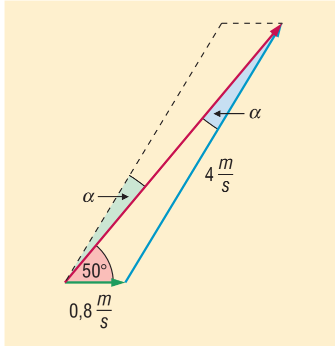
b) Mivel a trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180°, a trapéz szögei rendre:

72°, 43,76°, 136,24° és 108°.

3315 Ahhoz, hogy a csónak a kikötőbe érjen, a csónak és a folyó sebességvektorának összege a folyó partjával 50°-os szöget kell hogy bezárjon. A két vektort a háromszögszabály szerint összeadva, a vektorok egy olyan háromszöget alkotnak, amelynek két oldala 4, illetve 0,8 egység, és a 4 egységnyi oldallal szemben levő szög 50°. Feladatunk az, hogy szinusztétellel meghatározzuk a 0,8 egységnyi oldallal szemben levő α szöget:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 50^\circ} = \frac{0{,}8}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 8{,}81^\circ.$$

Tehát a cél irányától 8,81°-kal kell eltérnünk a folyási iránnyal ellentétesen.



3316 Az $ABCDE$ szabályos ötszög minden szöge 108°. A beírt $IFGH$ négyzet oldala 25 cm.

A GFC háromszögben:

$$GFC\sphericalangle = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ.$$

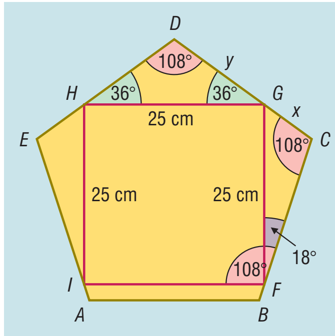
Felírva a szinusztételt:

$$\frac{x}{25} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 108^\circ} \quad \Rightarrow \quad x \approx 8{,}12.$$

A HGD egyenlő szárú háromszögből:

$$y = \frac{12{,}5}{\cos 36^\circ} \approx 15{,}45.$$

Az ötszög oldala: $x + y = 23{,}57$ cm.



3317 Alakítsuk át a $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\gamma$ egyenlőséget:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} + \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = 1.$$

(Háromszögről lévén szó, $\sin\gamma$ nem lehet 0.)

A szinusztétel értelmében ez utóbbi egyenlőség így is írható:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Ha egy háromszögben két oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a Pitagorasz-tétel értelmében az állítás megfordítása is igaz.

3318 Tudjuk, hogy egy háromszögben tompaszög vagy derékszög csak a legnagyobb oldallal szemben lehet, ezért ha van a feltételeknek megfelelő háromszög, akkor a 10 cm-es oldallal szemben levő α szög csak hegyesszög lehet.

Legyen a 23 cm-es oldallal szemben levő szög β. Felírva a háromszögben a szinusztételt:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{23}{10} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{23}{10}\cdot\sin\alpha.$$

Mivel $\sin\beta$ értéke legfeljebb 1 lehet, ahhoz, hogy létezzen ilyen háromszög szükséges, hogy $\frac{23}{10}\cdot\sin\alpha \le 1$ teljesüljön.

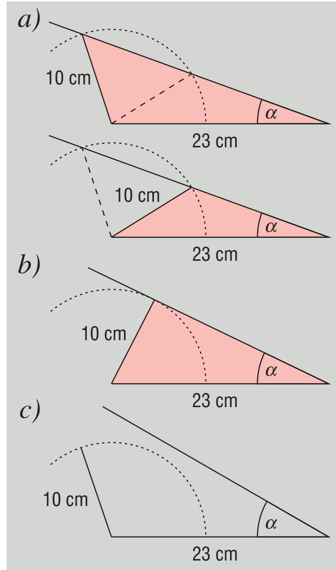
a) Ha
$$\frac{23}{10}\cdot\sin\alpha<1 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha<\frac{10}{23},$$
amiből $\alpha<25{,}77°$.

Ekkor a háromszögben két oldal és a kisebbikkel szemben levő szög adott, tehát két ilyen háromszög létezik.

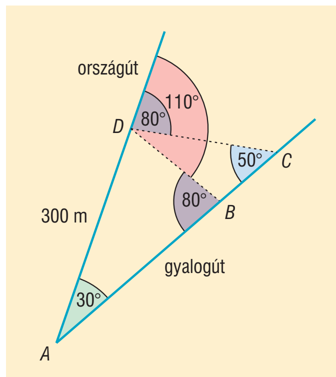
b) Ha
$$\frac{23}{10}\cdot\sin\alpha=1 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{10}{23},$$
amiből $\alpha=25{,}77°$.

Ekkor egy, a feltételeknek megfelelő háromszög van.

c) Nincs a feltételeknek megfelelő háromszög, ha $\sin\beta$ értéke 1-nél nagyobb vagy α tompaszög, vagyis ha $\alpha>25{,}77°$.



3319 *a)* Az országúton az A pont felől haladjunk a D pont felé. A gyalogút mentén lévő épületek helyét jelölje B és C.



Az ABD háromszögben:
$$ADB\sphericalangle=180°-110°=70°,$$
$$ABD\sphericalangle=180°-70°-30°=80°.$$

A háromszögben felírva a szinusztételt:
$$\frac{AB}{300}=\frac{\sin 70°}{\sin 80°} \quad\Rightarrow\quad AB=300\cdot\frac{\sin 70°}{\sin 80°}.$$

Az ACD háromszögben:
$$ADC\sphericalangle=180°-80°=100°,$$
$$ACD\sphericalangle=180°-100°-30°=50°.$$

A háromszögben felírva a szinusztételt:
$$\frac{AC}{300}=\frac{\sin 100°}{\sin 50°} \quad\Rightarrow\quad AC=300\cdot\frac{\sin 100°}{\sin 50°}.$$

A két épület
$$BC=300\cdot\frac{\sin 100°}{\sin 50°}-300\cdot\frac{\sin 70°}{\sin 80°}\approx 99{,}42\text{ m}$$
távolságra van egymástól.

b) A gazda a megadott sebességgel
$$t=\frac{99{,}42}{1{,}5}=66{,}28$$
másodperc alatt teszi meg az utat.

Ez idő alatt a kutyája által megtett út:
$$s=66{,}28\cdot 6=397{,}68\text{ m}.$$

A koszinusztétel – megoldások

3320 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
9 cm	8 cm	9,79 cm	59,84°	50,16°	70°
17,12 m	12,4 m	8,3 m	110°	42,89°	27,11°
18 dm	17,7 dm	120 cm	71,70°	69°	39,30°

3321 *a)* A háromszög legnagyobb szöge: 102,64°.
b) A háromszög legkisebb szöge: 26,05°.

3322 A két mutató végpontja 12,49 cm távolságra van egymástól.

3323 A paralelogramma átlói 66,80 cm és 90,98 cm hosszúak.

3324 A két erő eredője 46,30 N.

3325 A paralelogramma oldalai 10,92 cm és 21,42 cm.

3326 *a)* A paralelogramma másik oldala 20 cm.
b) A paralelogramma átlói 14,32 cm és 26,89 cm hosszúak.

3327 3 óra 40 perc múlva a két hajó 208,03 km-re lesz egymástól.

3328 Koszinusztétellel számítható a PQ távolság: 2,33 km. A vitorlás átlagsebessége:

$$v = \frac{2{,}33\ \text{km}}{0{,}6\ \text{h}} \approx 3{,}88\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

3329 Az AC oldal hossza legyen x. Felírva a koszinusztételt:

$$100 = x^2 + (3x)^2 - 2 \cdot x \cdot (3x) \cdot \cos 54^\circ \quad \Rightarrow \quad x \approx 3{,}93.$$

A háromszög hiányzó oldalainak hossza:

$$3{,}93\ \text{cm} \quad \text{és} \quad 11{,}79\ \text{cm}.$$

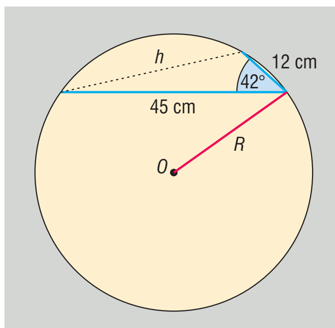
3330 Számítsuk ki a húrok másik végpontjait összekötő húr h hosszát koszinusztétellel:

$$h^2 = 45^2 + 12^2 - 2 \cdot 45 \cdot 12 \cdot \cos 42^\circ \quad \Rightarrow \quad h \approx 36{,}96.$$

Egy kör sugara, húrjának hossza és a húrhoz tartozó kerületi szög közötti összefüggés alapján a kör R sugara:

$$R = \frac{h}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{36{,}96}{2 \cdot \sin 42^\circ} \approx 27{,}62.$$

A kör sugara tehát 27,62 cm.



3331 A biliárdgolyó ütközésig megtett útja:

$$\frac{10}{\sin 33^\circ} \approx 18{,}36\ \text{cm}.$$

Ütközés után a megállásig

$$\frac{15}{\sin 33^\circ} \approx 27{,}54\ \text{cm}$$

utat tesz még meg, mivel a beesés szöge egyenlő a visszaverődés szögével.

A két út egymással bezárt szöge:

$$180° - 2 \cdot 33° = 114°.$$

A biliárdgolyó két helyzete közti d távolságot koszinusztétellel számolhatjuk:

$$d^2 = 18{,}36^2 + 27{,}54^2 - 2 \cdot 18{,}36 \cdot 27{,}54 \cdot \cos 114° \quad \Rightarrow \quad d \approx 38{,}82.$$

A golyó két helyzete közti távolság 38,82 cm.

3332 A kismutató hosszát jelölje k, a nagymutatóét n. Számoljunk deciméterekben.

9 órakor a mutatók derékszöget zárnak be, így hosszukra felírható a Pitagorasz-tétel:

$$10^2 = k^2 + n^2.$$

8 órakor a mutatók 120°-os szöget zárnak be, így hosszukra felírható a koszinusztétel:

$$12^2 = k^2 + n^2 - 2 \cdot k \cdot n \cdot \cos 120°.$$

A második egyenletbe $k^2 + n^2$ értéket beírva:

$$12^2 = 10^2 - 2 \cdot k \cdot n \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad k \cdot n = 44 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{44}{n}.$$

Ez utóbbi eredményünket az első egyenletbe írjuk be, majd rendezzük az egyenletet:

$$10^2 = \left(\frac{44}{n}\right)^2 + n^2,$$

$$0 = n^4 - 100n^2 + 1936,$$

$$n_{1,2}^2 = \frac{100 \pm \sqrt{2256}}{2}.$$

A megoldások: $n_1 \approx 8{,}59$ és $n_2 \approx 5{,}12$, amiből $k_1 \approx 5{,}12$ és $k_2 \approx 8{,}59$.

(A megoldásnál figyelembe vettük, hogy a mutatók hossza csak pozitív szám lehet.)

A kismutató hossza 51,2 cm, a nagymutatóé 85,9 cm.

3333 Ismeretes, hogy egy háromszög belső szögfelezője a szemben lévő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. Ha $AB:AC = 3:4$, akkor a háromszög AB oldalának hossza legyen $3x$, az AC oldalának hossza $4x$.

A háromszög területét felírhatjuk:

$$24 = \frac{3x \cdot 4x \cdot \sin 70°}{2} \quad \Rightarrow \quad x \approx 2{,}06.$$

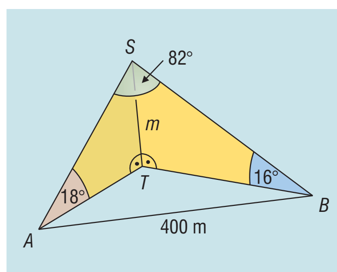
A háromszögben $AB \approx 6{,}18$ és $AC \approx 8{,}24$.

A háromszög BC oldalát koszinusztétellel számolhatjuk: $BC \approx 8{,}44$.

A háromszög oldalai:

6,18 cm, 8,24 cm és 8,44 cm.

3334 A sasfészek síkra vonatkozó merőleges vetülete T. Jelöljük az ST távolságot m-mel.



Az ATS derékszögű háromszögből:

$$AS = \frac{m}{\sin 18°},$$

a BTS derékszögű háromszögből:

$$BS = \frac{m}{\sin 16°}.$$

Az ABS háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$400^2=\left(\frac{m}{\sin 18^\circ}\right)^2+\left(\frac{m}{\sin 16^\circ}\right)^2-2\cdot\frac{m}{\sin 18^\circ}\cdot\frac{m}{\sin 16^\circ}\cdot\cos 82^\circ.$$

Kifejezve m-et:

$$\frac{400\cdot\sin 18^\circ\cdot\sin 16^\circ}{\sqrt{\sin^2 16^\circ+\sin^2 18^\circ-2\cdot\sin 18^\circ\cdot\sin 16^\circ\cdot\cos 82^\circ}}\approx 88{,}65.$$

A sasfészek megközelítőleg 89 m magasan van.

3335 A háromszög oldalai legyenek $n-1$, n és $n+1$ $(n>4)$.

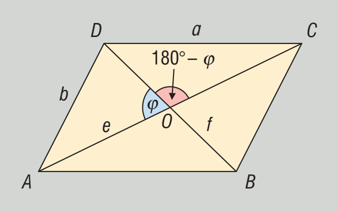
A koszinusztétel segítségével számoljuk ki a háromszög legnagyobb oldalával szemben levő α szög koszinuszát:

$$(n+1)^2=n^2+(n-1)^2-2\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha=\frac{n-4}{2\cdot(n-1)}.$$

Az $\dfrac{n-4}{2\cdot(n-1)}$ mindig pozitív $n>4$ miatt, tehát a háromszög legnagyobb α szögének koszinusza pozitív szám. Ez pedig azt jelenti, hogy az α szög hegyesszög, vagyis a háromszög biztosan hegyesszögű.

3336 Az ábrán látható $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja O, az átlók által bezárt szög φ. Az oldalak hossza a, b, az átlóké pedig e, f.



Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, az AOD és a DOC háromszögekben az alábbi módon felírhatjuk a koszinusztételt:

$$b^2=\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2-2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos\varphi,$$

$$a^2=\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2-2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos(180^\circ-\varphi).$$

Mivel $\cos\varphi=-\cos(180^\circ-\varphi)$, a két egyenletet összeadva adódik:

$$a^2+b^2=2\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{f}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad 2a^2+2b^2=e^2+f^2.$$

Tehát egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalaik négyzetösszegével.

3337 Ismeretes, hogy egy háromszög területét a $T=\dfrac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$ képlet alapján is számolhatjuk.

A területből a két adott oldal által közbezárt γ szög szinuszára kapunk értéket:

$$\sin\gamma=\frac{2\cdot 18000}{250\cdot 180}=0{,}8,$$

amiből $\gamma_1\approx 53{,}13^\circ$ és $\gamma_2\approx 126{,}87^\circ$.

Tehát a telek γ szöge lehet hegyesszög vagy tompaszög.

Ha γ hegyesszög, a telek harmadik oldala a koszinusztételből: 202,24 m.

Ha γ tompaszög, a telek harmadik oldala a koszinusztételből: 385,88 m.

a) Győzőnek nincs igaza.

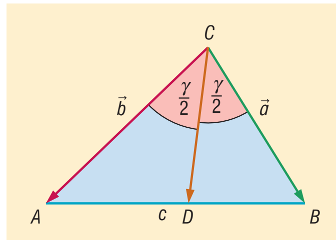
b) A háromszög területét számíthatjuk a beírt körének r sugarával:

$$T = r \cdot \frac{a+b+c}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2T}{a+b+c}.$$

A beírt kör sugara γ hegyesszög esetén: $r \approx 56{,}94$ m, γ tompaszög esetén: $r \approx 44{,}12$ m.

Nem biztos, hogy elfér a telken egy 50 m sugarú kör alakú delfinárium.

3338 A háromszög oldalainak hossza a szokásos jelöléssel legyen a, b és c. A szögfelezőtétel alapján a C csúcsnál lévő szög szögfelezője a szemközti c oldalt egy olyan D pontban metszi, amelyre igaz, hogy:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}.$$

Legyen $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

Egy szakasz osztópontjába mutató vektor képlete alapján:

$$\overrightarrow{CD} = \frac{b \cdot \vec{a} + a \cdot \vec{b}}{a+b},$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \left(\frac{b \cdot \vec{a} + a \cdot \vec{b}}{a+b}\right)^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2b^2 \cdot \cos\gamma}{(a+b)^2}.$$

Mivel a koszinusztétel alapján:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

ezért:

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2b^2 \cdot \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{(a+b)^2} = \frac{ab \cdot \left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{ab \cdot \left((a+b)^2 - c^2\right)}{(a+b)^2}.$$

Szorzattá alakítva és használva az $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ jelölést adódik, hogy:

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \frac{ab \cdot \left((a+b)^2 - c^2\right)}{(a+b)^2} = \frac{4ab \cdot \dfrac{a+b+c}{2} \cdot \dfrac{a+b-c}{2}}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{4ab}{(a+b)^2} \cdot s \cdot (s-c).$$

Tehát a C csúcsból induló belső szögfelező hossza:

$$CD = \frac{2}{a+b} \cdot \sqrt{ab \cdot s \cdot (s-c)}.$$

Hasonlóan az A, illetve a B csúcsból induló szögfelezők hossza:

$$\frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{bc \cdot s \cdot (s-a)} \quad \text{illetve} \quad \frac{2}{a+c} \cdot \sqrt{ac \cdot s \cdot (s-b)}.$$

Trigonometrikus összefüggések alkalmazásai – megoldások

3339 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	α	β	γ
6 cm	9 cm	12 cm	28,96°	46,57°	104,47°
12,5 dm	6,3 dm	9,8 dm	99,57°	29,80°	50,63°
51 dm	420 cm	2 m	105,08°	52,67°	22,25°

3340 A másik oldal 12 cm, a másik átló 25,25 cm hosszú.

3341 *a)* Az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor hossza: 9,06 cm.
b) Az $\vec{a}-\vec{b}$ vektor hossza: 8,23 cm.
c) Az eredő vektor az $\vec{a}$ vektorral 52,2°-ot, a $\vec{b}$ vektorral 31,8°-ot zár be.

3342 A súlyvonalak hossza: 9,18 cm, 13,89 cm és 13,20 cm.

3343 A háromszög hiányzó oldalainak hossza 9 cm és 12 cm, a velük szemben lévő szögek pedig 48°33' és 88°46'.

3344 A háromszög két hiányzó oldala legyen x és $x+6$. Felírva a koszinusztételt:

$$12^2 = x^2 + (x+6)^2 - 2x\cdot(x+6)\cdot\cos 60^\circ,$$
$$0 = x^2 + 6x - 108.$$

Az egyenlet pozitív megoldása: $x \approx 7{,}82$.
A háromszög hiányzó oldalai: 7,82 cm és 13,82 cm.
A háromszög többi szögeit szinusztétellel számolva: 34,36° és 85,64°.

3345 A paralelogramma oldalainak hossza legyen a és b, az általuk bezárt szög 60°. A szöggel szemben lévő átló hossza $e = 23$ cm, a másik átló hossza f.
a) Az a, b és e oldalú háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$23^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos 60^\circ.$$

A feladat szerint $a+b=30$, amiből $a = 30-b$. Ezek alapján b-re a következő egyenletet kapjuk:

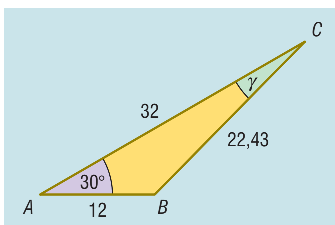
$$23^2 = (30-b)^2 + b^2 - 2\cdot(30-b)\cdot b\cdot\cos 60^\circ,$$
$$0 = 3b^2 - 90b + 371.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $b_1 = 25{,}07$ cm és $b_2 = 4{,}93$ cm. A hozzá tartozó a értékek: $a_1 = 4{,}93$ cm és $a_2 = 25{,}07$ cm.
A paralelogramma oldalainak hossza 25,07 cm és 4,93 cm.
b) A paralelogramma másik f átlójának hossza a koszinusztétel alapján:

$$f = \sqrt{25{,}07^2 + 4{,}93^2 - 2\cdot 25{,}07\cdot 4{,}93\cdot\cos 120^\circ} \approx 27{,}86 \text{ cm}.$$

3346 Az ABC háromszögben $AB = 12$, $BAC\sphericalangle = 30^\circ$.
a) Ismeretes, hogy egy háromszög területét a $T = \dfrac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2}$ képlet alapján is számolhatjuk. Ez alapján a háromszögben az AC oldal hossza:

$$AC = \frac{2\cdot 96}{12\cdot\sin 30^\circ} = 32.$$



A BC oldal hossza a koszinusztétellel határozható meg:

$$BC = \sqrt{12^2 + 32^2 - 2\cdot 12\cdot 32\cdot\cos 30^\circ} \approx 22{,}43.$$

A háromszög hiányzó két oldalának hossza 32 cm és 22,43 cm.

b) A háromszög C csúcsnál levő szögét a szinusztétellel számolhatjuk:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{22{,}43} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \sin 30^\circ \cdot \frac{12}{22{,}43} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 15{,}52^\circ.$$

(A háromszögben a legkisebb oldallal szemben levő szöget számoltuk, γ csak hegyesszög lehet.)

A háromszög hiányzó két szöge $15{,}52^\circ$ és $134{,}48^\circ$.

3347 Ismeretes, hogy egy háromszög területét a $T = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ képlet alapján számolhatjuk. A területből a két adott oldal által közbezárt γ szög szinuszára kapunk értéket:

$$\sin\gamma = \frac{2 \cdot 30{,}64}{8 \cdot 10} = 0{,}766 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 \approx 50^\circ \text{ és } \gamma_2 \approx 130^\circ.$$

Tehát két háromszög is megfelel a feladat feltételeinek. Két oldal és a közbezárt szög segítségével a koszinusztétellel számíthatjuk a háromszög harmadik oldalát, majd a szinusztételt használva egy másik szögét.

a	b	c	α	β	γ
8 cm	10 cm	7,82 cm	51,60°	78,40°	50°
8 cm	10 cm	16,34 cm	22,04°	27,96°	130°

A megoldásokat a táblázat tartalmazza.

3348 A háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölésekkel: $a = 43$ cm, $b = 52$ cm és a kettő által bezárt szög: $\gamma = 38^\circ$.

A háromszög harmadik oldalának hosszát a koszinusztétellel számolhatjuk:

$$c = \sqrt{43^2 + 52^2 - 2 \cdot 43 \cdot 52 \cdot \cos 38^\circ} \approx 32{,}08 \text{ cm}.$$

A háromszög c oldalához tartozó súlyvonal hossza:

$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 43^2 + 2 \cdot 52^2 - 32{,}08^2}}{2} \approx 44{,}94 \text{ cm}.$$

3349 A háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölésekkel: $a = 16$ cm, $b = 8$ cm, valamint $s_c = 9$ cm.

a) A súlyvonal kiszámítására vonatkozó összefüggés alapján:

$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2},$$

amiből:

$$c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - (2 \cdot s_c)^2} = \sqrt{2 \cdot 16^2 + 2 \cdot 8^2 - (2 \cdot 9)^2} \approx 17{,}78 \text{ cm}.$$

A harmadik oldal hossza $17{,}78$ cm.

b) Az s_c, b és $\dfrac{c}{2}$ oldalú háromszögben a b oldallal szemben levő szöget kell kiszámítani. Felírva a koszinusztételt:

$$b^2 = s_c^{\,2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2s_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\delta,$$

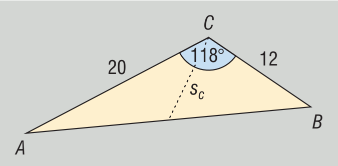
amiből:

$$\cos\delta = \frac{s_c^{\,2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - b^2}{2s_c \cdot \frac{c}{2}} = \frac{9^2 + (8{,}89)^2 - 8^2}{2 \cdot 9 \cdot 8{,}89} \approx 0{,}6001 \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 53{,}12^\circ.$$

A súlyvonal és a harmadik oldal hajlásszöge $53{,}12^\circ$.

3350 A mellékelt ábra szerint a kert az ABC háromszög, amelyben

$$BC = 12,\quad AC = 20 \quad \text{és} \quad ACB\sphericalangle = 118°.$$



Az AB oldalt a koszinusztétellel számolhatjuk:

$$AB^2 = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos 118°,$$

amiből $AB \approx 27{,}74$.

a) A kertet $27{,}74 + 20 + 12 = 59{,}74$ m kerítéssel lehet körbekeríteni.

b) A kert területét a C csúcsból kiinduló súlyvonal felezi. Ennek hosszát az

$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

összefüggés alapján számolhatjuk: $s_c \approx 8{,}92$.

A kert területét felező út hossza 8,92 m.

3351 A háromszög oldalainak hossza legyen $6x$, $7x$ és $10x$.

a) Írjuk fel a koszinusztételt:

$$(6x)^2 = (7x)^2 + (10x)^2 - 2 \cdot 7x \cdot 10x \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = 0{,}8071 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36{,}18°.$$

A szinusztétellel számolható a $7x$ hosszúságú oldallal szemközti β hegyesszög: $\beta \approx 43{,}53°$.

A háromszög szögei:

$$36{,}18°,\quad 43{,}53° \quad \text{és} \quad 100{,}29°.$$

b) Egy kör sugara, húrjának hossza és a húrhoz tartozó kerületi szög közötti összefüggés alapján számíthatók a háromszög oldalai:

$$a = 2R \cdot \sin\alpha \approx 41{,}32,\quad b = 2R \cdot \sin\beta \approx 48{,}21 \quad \text{és} \quad c = 2R \cdot \sin\gamma \approx 68{,}87.$$

A háromszög oldalai:

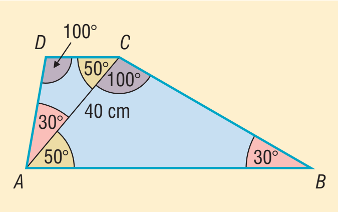
$$41{,}32 \text{ cm},\quad 48{,}21 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 68{,}87 \text{ cm}.$$

c) Legyen a háromszög beírt körének sugara r. A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = r \cdot \frac{a + b + c}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{a + b + c} \approx 12{,}37.$$

A beírt kör sugara 12,37 cm.

3352 Az $ABCD$ trapéz AC átlója 40 cm.



a) A megadott szögértékek alapján meghatározhatók az ABC háromszög szögei: 50°, 100° és 30°.

Írjuk fel az ABC háromszögben a szinusztételt az AB alap hosszának meghatározásához:

$$\frac{AB}{40} = \frac{\sin 100°}{\sin 30°} \quad \Rightarrow \quad AB \approx 78{,}78.$$

Hasonlóan BC oldal hossza is kiszámítható: $BC \approx 61{,}28$.

Az ACD háromszögben ugyanígy eljárva: $DC \approx 20{,}31$ és $AD \approx 31{,}11$.

A trapéz oldalai rendre:

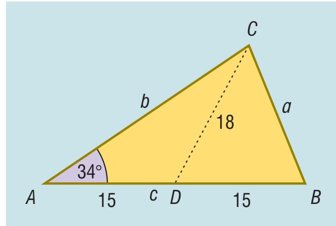
$$78{,}78 \text{ cm},\quad 61{,}28 \text{ cm},\quad 20{,}31 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 31{,}11 \text{ cm}.$$

b) A BD átló meghatározásához használjuk az ABD háromszögben a koszinusztételt:

$$BD^2 = 78{,}78^2 + 31{,}11^2 - 2 \cdot 78{,}78 \cdot 31{,}11 \cdot \cos 80° \quad \Rightarrow \quad BD \approx 79{,}52.$$

A trapéz másik átlója 79,52 cm.

3353 Az ábra szerinti ABC háromszögben a szokásos jelölés mellett $\alpha = 34°$, $c = 30$ és $s_c = 18$.



Az ADC háromszögben a szinusztétellel meghatározhatjuk az ACD szöget:

$$\frac{\sin ACD\sphericalangle}{\sin 34°} = \frac{15}{18},$$

amiből $ACD\sphericalangle \approx 27{,}77°$.

(A háromszögben nem a legnagyobb oldallal szemben levő szöget számoltuk, így ACD szög csak hegyesszög lehet.)

Újabb szinusztétel segítségével a háromszög b oldalának hossza $28{,}36$.

Ezután az ABC háromszögben az oldal hosszát a koszinusztétellel számolhatjuk:

$$a^2 = 28{,}36^2 + 30^2 - 2 \cdot 28{,}36 \cdot 30 \cdot \cos 34° \quad \Rightarrow \quad a \approx 17{,}13.$$

A háromszög β szögét az ABC háromszögben felírt szinusztétellel kaphatjuk meg: $\beta \approx 67{,}79°$.

A háromszög oldalai tehát:

$$30 \text{ cm}, \quad 17{,}13 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 28{,}36 \text{ cm},$$

a velük szemben lévő szögek pedig:

$$78{,}21°, \quad 34° \quad \text{és} \quad 67{,}79°.$$

3354 A feltételek szerint a háromszögben

$$a^2 + b^2 = 296, \quad \text{valamint} \quad \frac{ab \cdot \sin 30°}{2} = 35.$$

Az a és b oldalak meghatározásához az

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 296 \\ \frac{ab}{4} &= 35 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A másodikból kifejezve b-t, majd beírva az elsőbe, a következő másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet kapjuk:

$$a^4 - 296a^2 + 19\,600 = 0.$$

Ennek pozitív megoldásai: 10 és 14.

Az egyenletrendszert $a_1 = 10$, $b_1 = 14$, illetve $a_2 = 14$, $b_2 = 10$ értékek elégítik ki.

A háromszög harmadik oldalának hossza a koszinusztétellel számítva $7{,}32$.

A 10 cm-es oldallal szemben levő szögre a szinusztétel alapján $43{,}08°$ adódik.

A háromszög oldalainak hossza tehát:

$$10 \text{ cm}, \quad 14 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 7{,}32 \text{ cm},$$

a velük szemben levő szögek pedig rendre:

$$43{,}08°, \quad 106{,}92° \quad \text{és} \quad 30°.$$

3355 A háromszögben a szokásos jelölések szerint legyen: $a^2 + b^2 = 244 \text{ dm}^2$, $c = 2 \cdot \sqrt{31}$ dm és a háromszög területe: $T = 30 \cdot \sqrt{3} \text{ dm}^2$.

A háromszög területéből kiindulva:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad a \cdot b = \frac{2 \cdot T}{\sin\gamma}.$$

A háromszög c oldalára felírjuk a koszinusztételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{2 \cdot T}{\sin\gamma} \cdot \cos\gamma,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{4 \cdot T}{\operatorname{tg}\gamma}. \qquad (\cos\gamma \neq 0)$$

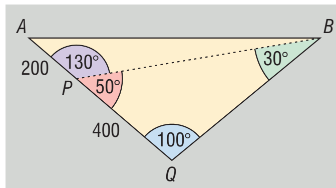
A feladat feltételeit figyelembe véve:

$$\left(2 \cdot \sqrt{31}\right)^2 = 244 - \frac{4 \cdot 30 \cdot \sqrt{3}}{\operatorname{tg}\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 60°.$$

Innen a 3354. feladat gondolatmenetét követve a háromszög hiányzó oldalainak hossza és a velük szemben lévő szögek nagysága:

$$a = 10 \text{ dm}, \; b = 12 \text{ dm} \quad \text{és} \quad \alpha = 51{,}05°, \; \beta = 68{,}95°.$$

3356 A PBQ háromszög külső szöge 130°, ami egyenlő a nem mellette levő két belső szög összegével, ezért $PBQ\sphericalangle = 30°$. Ebben a háromszögben a szinusztétel:



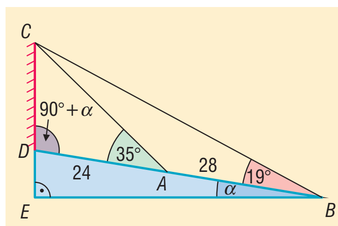
$$\frac{BQ}{400} = \frac{\sin 50°}{\sin 30°} \quad \Rightarrow \quad BQ \approx 612{,}84.$$

Az AQB háromszögben a koszinusztétel:

$$AB^2 = 600^2 + 612{,}84^2 - 2 \cdot 600 \cdot 612{,}84 \cdot \cos 100° \quad \Rightarrow \quad AB \approx 929{,}13.$$

Az A és B pontok távolsága 929,13 m.

3357 Jelölje az épület tetejét C, a lábát D pont, $AD = 24$, $AB = 28$.



a) Az ABC háromszög ACB szöge 16°. A szinusztétel alapján:

$$\frac{AC}{28} = \frac{\sin 19°}{\sin 16°} \quad \Rightarrow \quad AC \approx 33{,}07.$$

Az ADC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$CD^2 = 24^2 + 33{,}07^2 - 2 \cdot 24 \cdot 33{,}07 \cdot \cos 35°,$$

amiből $CD \approx 19{,}22$.

Az épület magassága tehát 19,22 m.

b) Az ADC háromszögben ADC tompaszög a szinusztétellel megadható: $ADC\sphericalangle = 99{,}29°$.

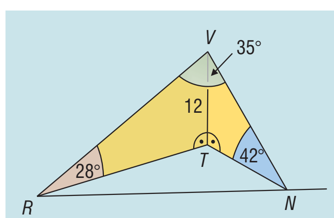
Mivel ADC szög a DEB háromszög külső szöge, a lejtő α hajlásszögére igaz, hogy:

$$90° + \alpha = 99{,}29° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 9{,}29°.$$

A lejtő hajlásszöge 9,29°.

3358 A vadászlesen V pontban tartózkodunk, ennek a síkra vonatkozó merőleges vetülete T. A róka helyét jelölje R, a nyúl helyét N pont. $VT = 12$.

A VTR derékszögű háromszögből:



$$VR = \frac{12}{\sin 28°},$$

a VTN derékszögű háromszögből:

$$VN = \frac{12}{\sin 42°}.$$

Az RVN háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$RN^2 = \left(\frac{12}{\sin 28^\circ}\right)^2 + \left(\frac{12}{\sin 42^\circ}\right)^2 - 2 \cdot \frac{12}{\sin 28^\circ} \cdot \frac{12}{\sin 42^\circ} \cdot \cos 35^\circ \quad \Rightarrow \quad RN \approx 14{,}97.$$

A róka és a nyúl távolsága tehát 14,97 méter.

A nyúl a rekettyésig az 50 m távolságot

$$t = \frac{s}{v} = \frac{50}{8} \approx 6{,}25 \text{ másodperc,}$$

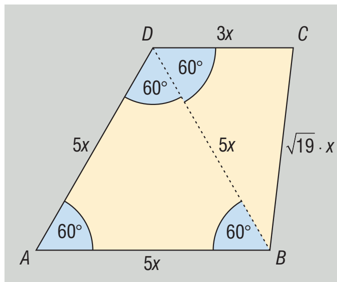
míg a róka a rekettyésig az $50 + 14{,}96 = 64{,}96$ m távolságot

$$t = \frac{s}{v} = \frac{64{,}96}{10} \approx 6{,}5 \text{ másodperc}$$

alatt teszi meg.

A rókának hosszabb idő kell a távolság megtételéig, tehát a róka a rekettyésig nem éri utol a nyulat.

3359 Az ABC háromszög AB oldalához és a BCD háromszög DC oldalához tartozó magasságok egyenlő hosszúak, tehát a háromszögek területének arányából következik, hogy $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}$.



Legyen a trapéz AB alapja $5x$, DC alapja $3x$ hosszúságú. Mivel az ABD háromszög szabályos, a BDC háromszögben $BD = 5x$ és $BDC\sphericalangle = 60^\circ$. Ez utóbbi háromszögben két oldal és a közbezárt szög segítségével felírhatjuk a koszinusztételt:

$$BC^2 = (5x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3x \cdot \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad BC = \sqrt{19} \cdot x.$$

A szinusztétel segítségével számítható $DBC\sphericalangle$:

$$\frac{\sin DBC\sphericalangle}{\sin 60^\circ} = \frac{3x}{\sqrt{19} \cdot x} \quad \Rightarrow \quad DBC\sphericalangle \approx 36{,}59^\circ.$$

A trapéz szögei rendre: 60°, $96{,}59^\circ$, $83{,}41^\circ$ és 120°.

A trapéz oldalait a területe segítségével határozhatjuk meg. A trapéz magassága a szabályos háromszög magassága: $\frac{5x \cdot \sqrt{3}}{2}$.

$$1000 = \frac{(5x + 3x) \cdot \frac{5x \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{100}{\sqrt{3}}} \approx 7{,}60.$$

A trapéz alapjai 22,80 cm és 38,00 cm, a szárai 33,13 cm és 38,00 cm hosszúak.

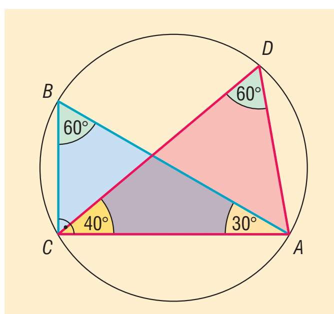
3360 *a)* Az ABC és ADC szögek ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek, tehát $ADC\sphericalangle = 60^\circ$.

Mivel $BCD\sphericalangle = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, és a BCD és BAD szögek ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek, $BAD\sphericalangle = 50^\circ$.

Az ADC háromszög szögei: 40°, 80° és 60°.

b) Az ABC háromszög egy fél szabályos háromszög, amelynek átfogója 20 cm, tehát hosszabb AC befogója:

$$\frac{20 \cdot \sqrt{3}}{2} = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17{,}32.$$



Az ADC háromszögben a szinusztétel:

$$\frac{DA}{10\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} \quad\Rightarrow\quad DA\approx 12{,}86.$$

Hasonlóan adódik, hogy $DC\approx 19{,}70$.

Az ADC háromszög oldalai: 17,32 cm, 12,86 cm és 19,70 cm.

3361 A virágágyások köreinek A, B és C középpontjait összekötő szakaszok hosszai a megfelelő körök sugarainak összege:

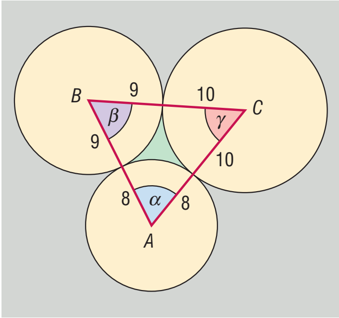
$AB=8+9=17,\quad BC=9+10=19\quad$ és $\quad AC=10+8=18.$

Ennek a háromszögnek az α szögét meghatározhatjuk a koszinusztétellel:

$$19^2=17^2+18^2-2\cdot 17\cdot 18\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx 65{,}68^\circ.$$

A szinusztétellel meghatározható a β szög:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 65{,}68^\circ}=\frac{18}{19} \quad\Rightarrow\quad \beta\approx 59{,}69^\circ \quad\Rightarrow\quad \gamma\approx 54{,}63^\circ.$$



(β tompaszög nem lehet, mert nem a legnagyobb oldallal szemben van.)

A zöld színű területet kell kiszámítanunk. Ehhez határozzuk meg a háromszög és a három körcikk területét:

$$T_{ABC\text{ háromszög}}=\frac{17\cdot 18\cdot\sin 65{,}68^\circ}{2}\approx 139{,}42,$$

$$T_{\alpha\text{ körcikk}}=\frac{8^2\cdot\pi\cdot 65{,}68^\circ}{360^\circ}\approx 36{,}66,$$

$$T_{\beta\text{ körcikk}}=\frac{9^2\cdot\pi\cdot 59{,}69^\circ}{360^\circ}\approx 42{,}17,$$

$$T_{\gamma\text{ körcikk}}=\frac{10^2\cdot\pi\cdot 54{,}63^\circ}{360^\circ}\approx 47{,}65.$$

Vonjuk ki a háromszög területéből a három körcikk területét:

$$T=T_{ABC\text{ háromszög}}-T_{\alpha\text{ körcikk}}-T_{\beta\text{ körcikk}}-T_{\gamma\text{ körcikk}}=12{,}94.$$

12,94 m^2 területet bevetéséhez $12{,}94\cdot 8=103{,}52$ dkg fűmag kell.

Tehát a terület füvesítéséhez megközelítőleg 1035 g fűmag szükséges.

3362 Az $ABCD$ húrnégyszög oldalainak hossza $AB=40$, $BC=52$, $CD=68$ és $AD=60$.

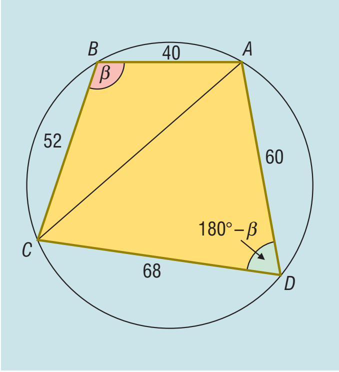
A húrnégyszögek tétele alapján:

$$\text{ha } ABC\sphericalangle=\beta \quad\Rightarrow\quad CDA\sphericalangle=180^\circ-\beta.$$

Írjuk fel a koszinusztételt az ABC, illetve ACD háromszögekben:

$$AC^2=40^2+52^2-2\cdot 40\cdot 52\cdot\cos\beta,$$

$$AC^2=68^2+60^2-2\cdot 68\cdot 60\cdot\cos(180^\circ-\beta).$$



A műveleteket elvégezve:

$$AC^2=4304-4160\cdot\cos\beta,$$

$$AC^2=8224-8160\cdot\cos(180^\circ-\beta).$$

A két egyenlet bal oldalának egyenlőségéből:

$$4304 - 4160 \cdot \cos\beta = 8224 - 8160 \cdot \cos(180^\circ - \beta).$$

Mivel $\cos\beta = -\cos(180^\circ - \beta)$:

$$\cos\beta = \frac{4304 - 8224}{4160 + 8160} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 108{,}55^\circ.$$

Hasonlóan felírva az ABD, illetve BCD háromszögekben a koszinusztételt, azt kapjuk, hogy a négyszög C csúcsánál levő szöge $79{,}67^\circ$.

Mivel egy húrnégyszög szemben levő szögeinek összege 180°, az $ABCD$ négyszög szögei rendre:

$$100{,}33^\circ, \quad 108{,}55^\circ, \quad 79{,}67^\circ, \quad 71{,}45^\circ.$$

3363 A koszinusztétel alapján:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \text{és} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ezt beírva a

$$\cos\beta + \cos\gamma = \frac{b + c}{a}$$

összefüggésbe, majd ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b + c}{a},$$

$$b \cdot \left(a^2 + c^2 - b^2\right) + c \cdot \left(a^2 + b^2 - c^2\right) = 2bc \cdot (b + c),$$

$$ba^2 + bc^2 - b^3 + ca^2 + cb^2 - c^3 = 2bc \cdot (b + c),$$

$$a^2 \cdot (b + c) + bc \cdot (b + c) - \left(b^3 + c^3\right) = 2bc \cdot (b + c),$$

$$a^2 \cdot (b + c) - (b + c) \cdot \left(b^2 - bc + c^2\right) = bc \cdot (b + c).$$

Ez utóbbi egyenletet $b + c \neq 0$-val osztva, majd rendezve, $a^2 = b^2 + c^2$ alakhoz jutunk.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű, és az „a” oldal a háromszög átfogója.

Összegzési képletek – megoldások

3364 Alkalmazzuk az addíciós tételeket:

a) $-\sin\alpha, \quad -\cos\alpha;$

b) $\cos\alpha, \quad -\sin\alpha;$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\alpha, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\alpha;$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha, \quad -\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha;$

e) $\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha.$

3365 Alkalmazzuk az addíciós tételeket:

a) $\sin 36^\circ \cdot \cos 24^\circ + \cos 36^\circ \cdot \sin 24^\circ = \sin(36^\circ + 24^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sin 96^\circ \cdot \cos 36^\circ - \cos 96^\circ \cdot \sin 36^\circ = \sin(96^\circ - 36^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\cos 125^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 125^\circ \cdot \sin 25^\circ = \cos(125^\circ + 25^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\cos 104^\circ \cdot \cos 44^\circ + \sin 104^\circ \cdot \sin 44^\circ = \cos(104^\circ - 44^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

3366 Alkalmazzuk az addíciós tételeket:

a) $\cos(150^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha) - \sin(30^\circ + \alpha) - \sin(120^\circ - \alpha) = -\sin\alpha - \sqrt{3} \cdot \cos\alpha$;

b) $\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha) + \sin(60^\circ + \alpha) = 0$;

c) $\sin^2(\beta + \alpha) - \sin^2(\beta - \alpha) = 4 \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$;

$\cos^2(\beta + \alpha) - \cos^2(\beta - \alpha) = -4 \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha = -2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = -\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$;

d) -1.

3367 Az összegzési képleteket használjuk α és $\alpha + \beta$ szögekre:

a) $\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha =$
$= \cos\big((\alpha + \beta) - \alpha\big) = \cos\beta$.

A *b), c)* és *d)* részeknél hasonlóan járhatunk el.

3368 *a)* $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$;

b) $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;

c) $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$;

d) $\sin 165^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos 165^\circ = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$;

e) $\sin 345^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$, $\cos 345^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

3369 Alkalmazzuk a $\sin\alpha \pm \sin\beta$, illetve $\cos\alpha \pm \cos\beta$ szorzattá alakítására vonatkozó azonosságokat:

a) $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ = 2 \cdot \cos\frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \sin\frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

c) $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2}$;

d) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3370 $\operatorname{tg} 40° \cdot \cos 10° + \sin 10° = \dfrac{\sin 40° \cdot \cos 10° + \cos 40° \cdot \sin 10°}{\cos 40°} = \dfrac{\sin(40° + 10°)}{\cos 40°} = \dfrac{\sin 50°}{\cos 40°} = 1.$

3371 Mivel a háromszög két szögének a számtani közepe a harmadik szögével egyenlő, a szögeit jelölhetjük így: $\alpha - \varphi,\ \alpha,\ \alpha + \varphi$.

A feladat feltétele szerint:

$$\sin(\alpha - \varphi) + \sin\alpha + \sin(\alpha + \varphi) = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}.$$

A háromszög belső szögeinek összege $180°$, tehát $\alpha = 60°$:

$$\sin 60° \cdot \cos\varphi - \cos 60° \cdot \sin\varphi + \sin 60° + \sin 60° \cdot \cos\varphi + \cos 60° \cdot \sin\varphi = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2},$$

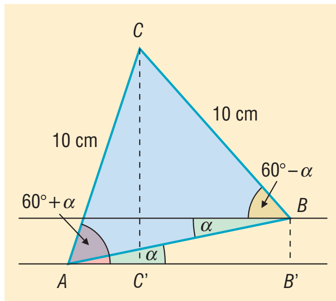
$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A φ szög hegyesszög, tehát $\varphi = 45°$.

A háromszög szögei: $15°$, $60°$ és $105°$.

3372 A merőleges vetületek hossza nem változik, ha az egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk. A mellékelt ábrát tekintve az egyenes haladjon át az ABC háromszög A csúcsán, és az AB oldallal zárjon be α szöget.



A vetületek nagysága:

$$AB' = 10 \cdot \cos\alpha,$$
$$C'B' = 10 \cdot \cos(60° - \alpha),$$
$$AC' = 10 \cdot \cos(60° + \alpha).$$

Ezek négyzetösszege:

$$AB'^2 + B'C'^2 + C'A^2 = 10^2 \cdot \left(\cos^2\alpha + \cos^2(60° - \alpha) + \cos^2(60° + \alpha)\right).$$

Használva az addíciós tételt:

$$\cos^2(60° - \alpha) = \left(\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \cos^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \frac{3}{4} \cdot \sin^2\alpha,$$

$$\cos^2(60° + \alpha) = \left(\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \frac{3}{4} \cdot \sin^2\alpha.$$

Tehát:

$$AB'^2 + B'C'^2 + C'A^2 = 10^2 \cdot \left(\cos^2\alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos^2\alpha + \frac{3}{2} \cdot \sin^2\alpha\right) = \frac{300}{2} \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{300}{2}.$$

A vetületek négyzetösszege α szögtől függetlenül $\dfrac{300}{2} = 150\ \text{cm}^2$.

3373 Alakítsuk át az addíciós tétel segítségével a $\sin x + \cos x$ kifejezést:

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Mivel a $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ minimális értéke -1, maximális értéke 1:

$$-\sqrt{2} \le f(x) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}.$$

Az $f(x)$ függvény minimuma $-\sqrt{2}$, maximuma $\sqrt{2}$.
Minimális értékét azokon a helyeken veszi fel, ahol

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \text{ ahol } k\in\mathbb{Z}.$$

Maximális értékét azokon a helyeken veszi fel, ahol

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ ahol } k\in\mathbb{Z}.$$

3374 Ha egy derékszögű háromszög átfogója 20 cm és egyik hegyesszöge α, akkor a befogói $20\cdot\sin\alpha$ és $20\cdot\cos\alpha$. A háromszög kerülete:

$$k = 20 + 20\cdot\sin\alpha + 20\cdot\cos\alpha = 20\cdot(1+\sin\alpha+\cos\alpha).$$

A 3373. feladat alapján a kerület maximális értéke: $20\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$.
Ezt a maximális értéket akkor veszi fel, ha $\alpha = 45°$, vagyis ha a háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

3375 Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x\right).$$

Mivel $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ és $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ négyzetösszege 1, létezik olyan φ szög, hogy:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \quad \text{és} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

Az addíciós tétel alapján:

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi).$$

Mivel a szinuszfüggvény minimális értéke -1, maximális értéke 1, az $f(x)$ függvény minimuma $-\sqrt{a^2+b^2}$, maximuma $\sqrt{a^2+b^2}$.
Minimális értékét ott veszi fel, ahol $\sin(x+\varphi) = -1$, maximális értékét pedig ott, ahol $\sin(x+\varphi) = 1$.

3376 Mivel $a^2+b^2=1$, létezik olyan x szög, hogy $a=\sin x$ és $b=\cos x$. Elég tehát a $\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x$ kifejezés szélsőértékeit keresni.
A 3373. feladat alapján:

$$\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x = \sin x\cdot(\sin x+\cos x) = \sin x\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\sin x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Két szög szinuszának szorzatát összeggé alakítva:

$$\sqrt{2}\cdot\sin x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}-x\right) - \cos\left(x+\frac{\pi}{4}+x\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Mivel a $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ minimális értéke -1, maximális értéke pedig 1:

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \le \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Az a^2+ab kifejezés minimuma $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, maximuma $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

A kifejezés a maximális értékét ott veszi fel, ahol

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor

$$a = \sin\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right), \quad b = \cos\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right).$$

Az a és b pontos értékének megadásához használjuk fel a $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ összefüggést:

$$\cos^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Ha k páros, akkor $\frac{3\pi}{8}+k\pi$ első negyedbeli szög:

$$b = \cos\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

valamint:

$$a = \sin\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right) = \sqrt{1-\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Ha k páratlan, akkor $\frac{3\pi}{8}+k\pi$ harmadik negyedbeli szög:

$$b = \cos\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

valamint:

$$a = \sin\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Az a^2+ab kifejezés maximumát a következő értékek esetén veszi fel:

$$a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ és } b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{vagy} \quad a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ és } b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

A kifejezés minimális értékét ott veszi fel, ahol

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{vagyis} \quad x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor:

$$a = \sin\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right), \quad b = \cos\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right).$$

Az előzőhöz hasonló módon:

$$\cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Ha k páros, akkor $-\frac{\pi}{8}+k\pi$ negyedik negyedbeli szög:

$$b=\cos\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

valamint:

$$a=\sin\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)=-\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Ha k páratlan, akkor $-\frac{\pi}{8}+k\pi$ második negyedbeli szög:

$$b=\cos\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

valamint:

$$a=\sin\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Az a^2+ab kifejezés minimumát a következő értékek esetén veszi fel:

$$a=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ és } b=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{vagy} \quad a=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ és } b=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

3377 Mivel háromszögről van szó:

$$\sin\alpha=\sin\left((180°-(\beta+\gamma)\right)=\sin(\beta+\gamma).$$

A $2\cdot\cos\gamma=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ egyenlőséget ennek figyelembevételével a következőképpen alakíthatjuk át:

$$2\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma=\sin(\beta+\gamma).$$

Alkalmazva az addíciós tételeket:

$$2\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma=\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta\cdot\sin\gamma,$$
$$\sin\beta\cdot\cos\gamma-\cos\beta\cdot\sin\gamma=0,$$
$$\sin(\beta-\gamma)=0.$$

Ez utóbbi egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\beta-\gamma=k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$. Mivel β és γ háromszög szögei, ezért $k=0$, ami azt jelenti, hogy $\gamma=\beta$. Tehát a háromszög egyenlő szárú.

3378 Két szög szinuszának és koszinuszának összegét alakítsuk szorzattá:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{és} \quad \cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ez alapján a feladatban szereplő egyenlőség a következőképpen alakítható át:

$$2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0.$$

Ez utóbbi szorzat kétféleképpen lehet 0.

I. Ha $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

Háromszögről lévén szó, ez egyetlen k értékre sem teljesülhet.

II. Ha $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0 \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

Mivel $0°<\alpha+\beta<180°$, $k=0$, vagyis $\alpha+\beta=90°$. Tehát a háromszög harmadik szöge 90°, vagyis derékszögű a háromszög.

Az összegzési képletek alkalmazásai – megoldások

3379 A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggések alapján:

a) $2 \cdot \sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x = 2 \cdot \sin^2 x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x;$

b) $2 \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = 2 \cdot \cos^2 x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = \sin 2x;$

c) $\dfrac{\sin 2x}{\sin^2 x} = \dfrac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = 2 \cdot \operatorname{ctg} x;$

d) $\dfrac{\cos 2x}{1 + \cos 2x} = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \dfrac{\sin 2x}{2 \cdot \cos^2 x} = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \dfrac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{2 \cdot \cos^2 x} =$

$= \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x};$

e) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x \cdot \sin x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x \cdot \sin x}} = \dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x}.$

f) $\operatorname{ctg} x - \sin 2x = \dfrac{\cos x}{\sin x} - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \dfrac{\cos x \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 x)}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) =$

$= \operatorname{ctg} x \cdot \cos 2x;$

g) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \dfrac{2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \dfrac{2}{\sin 2x};$

h) $4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 2 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = \sin 4x;$

i) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2x}{2}} = \sqrt{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{2}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot \sin^2 x}{2}} = |\sin x|;$

j) $\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}} = \sqrt{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{2}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot \cos^2 x}{2}} = |\cos x|;$

k) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{2 \cdot \cos^2 x} = \dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \dfrac{\sin 2x}{(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x)} =$

$= \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x};$

l) $2 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x\right) =$

$= 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 1 + \sin 2x;$

m) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cdot\sin x\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x+\frac{1}{2}\cdot\sin x\right)=\frac{3\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}{4}=$

$=\frac{3\cdot\cos^2 x\cdot\sin x-\sin^3 x}{4\cdot\sin x}=\frac{2\cdot\cos^2 x\cdot\sin x+\cos^2 x\cdot\sin x-\sin^3 x}{4\cdot\sin x}=$

$=\frac{\cos x\cdot(2\cdot\sin x\cdot\cos x)+\sin x\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)}{4\cdot\sin x}=\frac{\cos x\cdot\sin 2x+\sin x\cdot\cos 2x}{4\cdot\sin x}=\frac{\sin 3x}{4\cdot\sin x}.$

3380 A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggések alapján:

a) $\frac{\sin 2x}{2\cdot\cos x}=\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2\cdot\cos x}=\sin x;$

b) $2\cdot\sin^2 x+\cos 2x=2\cdot\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x=1;$

c) $\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}=\frac{(\cos x+\sin x)\cdot(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}=\cos x+\sin x;$

d) $\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x;$

e) $\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\cos 2x}=\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\cdot(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}=1;$

f) Mivel $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, a kifejezés egyszerűbb alakja:

$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin 2x=-\sin 2x;$

g) $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\sin^2 2x}=\frac{\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)}{4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{1}{4};$

h) $\frac{\sin 3x+\sin x}{2\cdot\cos x\cdot\sin 2x}=\frac{2\cdot\sin\frac{3x+x}{2}\cdot\cos\frac{3x-x}{2}}{2\cdot\cos x\cdot\sin 2x}=\frac{2\cdot\sin 2x\cdot\cos x}{2\cdot\cos x\cdot\sin 2x}=1;$

i) $\frac{\cos 3x-\cos x}{2\cdot\sin x\cdot\sin 2x}=\frac{-2\cdot\sin\frac{3x+x}{2}\cdot\sin\frac{3x-x}{2}}{2\cdot\sin x\cdot\sin 2x}=\frac{-2\cdot\sin 2x\cdot\sin x}{2\cdot\sin x\cdot\sin 2x}=-1.$

3381 Az addíciós tételeket használva:

a) $\mathrm{tg}\,15^\circ=\mathrm{tg}(45^\circ-30^\circ)=\frac{\mathrm{tg}\,45^\circ-\mathrm{tg}\,30^\circ}{1+\mathrm{tg}\,45^\circ\cdot\mathrm{tg}\,30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$

$\mathrm{ctg}\,15^\circ=\frac{1}{\mathrm{tg}\,15^\circ}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3};$

b) $\mathrm{tg}\,75^\circ=\mathrm{ctg}\,15^\circ=2+\sqrt{3},$

$\mathrm{ctg}\,75^\circ=\mathrm{tg}\,15^\circ=2-\sqrt{3}.$

3382 Az addíciós tételeket használva:

a) $$\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\right)^2=\left(\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}\right)^2=\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+1}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}\right)^2=\left(\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}\right)^2=$$

$$=\frac{\sin^2x+\cos^2x+2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin^2x+\cos^2x-2\cdot\sin x\cdot\cos x}=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x};$$

b) $$\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{ctg}x-1}{\operatorname{ctg}x+1}=\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\sin x}}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)\cdot(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)\cdot(\cos x-\sin x)}=\frac{\sin^2x+\cos^2x-2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x};$$

c) $$\frac{1}{1+\operatorname{ctg}x}-\frac{1}{1-\operatorname{ctg}x}=\frac{1}{1+\frac{1}{\operatorname{tg}x}}-\frac{1}{1-\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+1}-\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x-1}=\frac{-2\cdot\operatorname{tg}x}{(\operatorname{tg}x+1)\cdot(\operatorname{tg}x-1)}=$$

$$=\frac{2\cdot\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\operatorname{tg}2x;$$

d) $$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=2\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=2\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=2\cdot\operatorname{ctg}x;$$

e) $$\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1.$$

3383 Az addíciós tételeket használva:

a) $$\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{1-\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\right)^2}{1+\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\right)^2}=\frac{1-\left(\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^2}{1+\left(\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^2}=\frac{(1+\operatorname{tg}x)^2-(1-\operatorname{tg}x)^2}{(1+\operatorname{tg}x)^2+(1-\operatorname{tg}x)^2}=$$

$$=\frac{4\cdot\operatorname{tg}x}{2+2\cdot\operatorname{tg}^2x}=\frac{2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2x+\sin^2x}=\sin 2x;$$

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\frac{2}{\cos 2x}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}-\frac{2}{\cos 2x}=$

$=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}+\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}-\frac{2}{\cos 2x}=\frac{(1+\operatorname{tg}x)^2+(1-\operatorname{tg}x)^2}{1-\operatorname{tg}^2x}-\frac{2}{\cos 2x}=$

$=\frac{2\cdot(1+\operatorname{tg}^2x)}{1-\operatorname{tg}^2x}-\frac{2}{\cos 2x}=-\frac{2\cdot(\cos^2x+\sin^2x)}{\cos^2x-\sin^2x}-\frac{2}{\cos^2x-\sin^2x}=0;$

c) $\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1-2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=$

$=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=$

$=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=1.$

3384 A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggések alapján:

a) $\sin^4\frac{13\pi}{12}-\cos^4\frac{23\pi}{12}=\left(-\sin\frac{\pi}{12}\right)^4-\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^4=$

$=\left(\sin^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}\right)=$

$=-\cos 2\cdot\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$

b) $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{1}{2\cdot\sin 20^\circ}\cdot(2\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ)\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=$

$=\frac{1}{2\cdot\sin 20^\circ}\cdot\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{1}{4\cdot\sin 20^\circ}\cdot(2\cdot\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ)\cdot\cos 80^\circ=$

$=\frac{1}{4\cdot\sin 20^\circ}\cdot\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{1}{8\cdot\sin 20^\circ}\cdot\sin 160^\circ=\frac{1}{8}.$

3385 A két adott kifejezést átírhatjuk:

$$A=\log_2 0{,}5^{\sin x}=\log_2 2^{-\sin x}=-\sin x,$$
$$B=\sqrt{1-\sin^2x}=|\cos x|.$$

a) $-1\le-\sin x\le 1$, tehát A minimális értéke –1, maximális értéke 1.

b) $0\le|\cos x|\le 1$, tehát B minimális értéke 0, maximális értéke 1.

c) $A+B=-\sin x+|\cos x|$ lehet:

$$A+B=-\sin x+\cos x=-\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x\right)=-\sqrt{2}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\quad \text{ha}\quad \cos x\geq 0,$$

$$A+B=-\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x\right)=-\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\quad \text{ha}\quad \cos x<0.$$

Mivel a szinuszfüggvény minimális értéke –1, maximális értéke 1, mindkét esetben $A+B$ minimális értéke $-\sqrt{2}$, maximális értéke $\sqrt{2}$.

d) $A\cdot B=-\sin x\cdot|\cos x|$ lehet:

$$A\cdot B=-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x=-\frac{1}{2}\cdot\sin 2x,\quad \text{ha}\quad \cos x\geq 0,$$

$$A\cdot B=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\cdot\sin 2x,\qquad \text{ha}\quad \cos x<0.$$

Mivel a szinuszfüggvény minimális értéke –1, maximális értéke 1, mindkét esetben $A\cdot B$ minimális értéke $-\frac{1}{2}$, maximális értéke $\frac{1}{2}$.

3386 A kétszeres szögek szinuszára vonatkozó összefüggés alapján tekintsük a következő egyenlőségeket:

$$\sin 12^\circ\cdot\cos 12^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sin 24^\circ,\qquad \sin 24^\circ\cdot\cos 24^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sin 48^\circ,$$

$$\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sin 72^\circ,\qquad \sin 48^\circ\cdot\cos 48^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sin 96^\circ,$$

$$\sin 60^\circ\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sin 120^\circ,\qquad \sin 72^\circ\cdot\cos 72^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sin 144^\circ,$$

$$\sin 84^\circ\cdot\cos 84^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sin 168^\circ.$$

Szorozzuk össze az egyenlőségek bal oldalait, illetve jobb oldalait, majd használjuk ki, hogy $\sin 96^\circ=\sin 84^\circ$, $\sin 120^\circ=\sin 60^\circ$, $\sin 144^\circ=\sin 36^\circ$ és $\sin 168^\circ=\sin 12^\circ$. Ezek után éppen a bizonyítandó egyenlőséghez jutunk.

3387 *a)* Az addíciós tételeket használva:

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3\cdot\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

b) Az addíciós tételeket használva:

$$\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ=\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-20^\circ)\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+20^\circ)=$$

$$=\operatorname{tg}20^\circ\cdot\frac{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}20^\circ}{1+\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ}\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\frac{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}20^\circ}{1-\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ}=$$

$$=\operatorname{tg}20^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}20^\circ}{1+\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}20^\circ}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}20^\circ}{1-\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}20^\circ}=\sqrt{3}\cdot\frac{3\cdot\operatorname{tg}20^\circ-\operatorname{tg}^3 20^\circ}{1-3\cdot\operatorname{tg}^2 20^\circ}.$$

Ez utóbbi kifejezés az *a)* rész alapján:

$$\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}(3\cdot 20^\circ)=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3.$$

3388 Legyen a háromszög 6,4 cm-es oldalával szemben levő szög α. A feladat feltétele szerint a 9,3 cm-es oldallal szemben levő szög 2α. Írjuk fel a háromszögben a szinusztételt:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{9,3}{6,4} \Rightarrow \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{9,3}{6,4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{9,3}{12,8} \Rightarrow \alpha \approx 43,40^\circ \Rightarrow 2\alpha = 86,80^\circ.$$

A harmadik, ismeretlen x hosszúságú oldallal szemben levő szög:

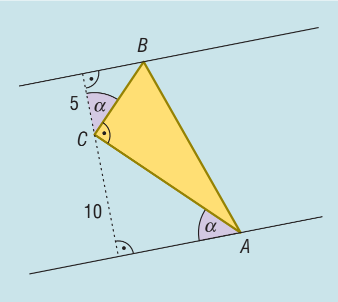
$$180^\circ - 43,40^\circ - 86,80^\circ = 49,80^\circ.$$

Felírva a szinusztételelt:

$$\frac{x}{6,4} = \frac{\sin 49,8^\circ}{\sin 43,4^\circ} \qquad \Rightarrow \qquad x \approx 7,11.$$

A háromszög oldalainak hossza 6,4 cm, 9,3 cm és 7,11 cm, a velük szemben levő szögek rendre 43,40°, 86,80° és 49,80°.

3389 Az ábrán α-val jelölt szögek merőleges szárú hegyesszögek.



Az ABC derékszögű háromszög BC befogója $\dfrac{5}{\cos\alpha}$, az AC befogója $\dfrac{10}{\sin\alpha}$.

A háromszög területe:

$$T = \frac{\dfrac{5}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{10}{\sin\alpha}}{2} = \frac{50}{2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha} = \frac{50}{\sin 2\alpha}.$$

Ez a pozitív előjelű kifejezés akkor minimális, ha $\sin 2\alpha$ maximális, vagyis 1. Mivel α csak hegyesszög lehet, ez csak $2\alpha = 90^\circ$ esetén teljesül, azaz ha $\alpha = 45^\circ$.

A háromszög területe akkor minimális, ha befogóinak hossza:

$$BC = \frac{5}{\cos 45^\circ} = 5\cdot\sqrt{2}\ \text{cm}, \qquad \text{illetve} \qquad AC = \frac{10}{\cos 45^\circ} = 10\cdot\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

Az átfogója Pitagorasz tétele alapján $5\cdot\sqrt{10}$ cm.

3390 A bizonyítandó egyenlőség bal oldalán álló törtet bővítsük $\sin(\alpha+\beta)$-val:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

A két szög szinuszának szorzatát összeggé alakítva:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\right] - \cos\left[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\right]\right)}{\sin^2(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

A kétszeres szög koszinuszára vonatkozó összefüggés ($\cos 2\alpha = 1 - 2\cdot\sin^2\alpha$ és $\cos 2\beta = 1 - 2\cdot\sin^2\beta$) alapján:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Mivel háromszögről van szó:

$$\sin\gamma = \sin\big((180^\circ - (\alpha+\beta)\big) = \sin(\alpha+\beta),$$

így:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}.$$

A szinusztétel alapján:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

A bal oldalból kiindulva ekvivalens átalakítások során a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalához jutottunk, tehát bármely háromszögben igaz, hogy

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

3391 *a)* Alakítsuk át az $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}$ kifejezést a szinusztétel segítségével, majd használjuk ki, hogy mindkét oldal pozitív, a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}},$$

$$\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \sin^2\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\sin^2\alpha\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \sin^2\beta\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0,$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\beta\cdot\cos\beta) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség mivel $\sin\alpha$, illetve $\sin\beta$ nem lehet nulla, csak akkor teljesülhet, ha

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\beta\cdot\cos\beta,$$
$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta.$$

Mivel háromszögről van szó, a 2α, illetve 2β szög szinusza csak abban a két esetben lehet egyenlő, ha

$$2\alpha = 2\beta \;\Rightarrow\; \alpha=\beta, \quad \text{vagy} \quad 2\alpha = 180^\circ - 2\beta \;\Rightarrow\; \alpha+\beta = 90^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 90^\circ.$$

A háromszög tehát vagy egyenlő szárú, vagy derékszögű.

b) A háromszögben:

$$\sin\gamma = \sin\big((180^\circ - (\alpha+\beta)\big) = \sin(\alpha+\beta) = \sin 2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2} =$$
$$= 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Az ismert összefüggés alapján:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tehát a $\sin\gamma = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$ egyenlőséget a következő alakba írhatjuk:

$$2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}},$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(2\cdot\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)=0.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesülhet, ha:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0 \qquad \text{vagy} \qquad 2\cdot\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1.$$

Az első esetben azt kapjuk, hogy $\alpha+\beta=2k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$. Ez egyetlen háromszög esetén sem teljesülhet.

A második esetben:

$$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\left|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{vagy} \qquad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Innen:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Mivel háromszögről van szó, csak az első eset jöhet szóba, ekkor $\alpha+\beta=90°$.

Tehát a kérdéses háromszög derékszögű.

c) Alakítsuk szorzattá a $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$ összeget:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta).$$

Mivel α, β és γ háromszög szögei, az ismert trigonometrikus összefüggések alapján írjuk át $\cos 2\gamma$-t:

$$\cos 2\gamma = \cos 2\cdot\big(180° - (\alpha+\beta)\big) = \cos 2\cdot(\alpha+\beta) = \cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha+\beta).$$

Az eredeti egyenlet jobb oldalán szereplő $-1 = -\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha+\beta)$.

Ezek alapján az eredeti $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$ egyenlet a következőképpen alakul:

$$2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha+\beta)=-\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha+\beta),$$

$$2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)+2\cdot\cos^2(\alpha+\beta)=0,$$

$$2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)=0.$$

A $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$ összeget szorzattá alakítva:

$$2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=0,$$

$$2\cdot\cos\gamma\cdot 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=0.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha vagy $\cos\gamma$, vagy $\cos\alpha$, vagy $\cos\beta$ nulla értéket vesz fel. Mivel α és β háromszög szögei, ez csak akkor teljesülhet, ha a háromszög valamelyik szöge 90º, tehát a háromszög derékszögű.

Trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek – megoldások

3392 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x_1 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 \approx 1{,}18 + 2k\pi,\ x_2 \approx \pi - 1{,}18 + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

d) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

e) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

f) $x \approx \pm 1{,}00 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

g) $x \approx \pm 2{,}50 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

h) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

i) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

j) $x \approx 1{,}50 + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

k) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

l) $x \approx 0{,}75 + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

3393 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{6} + l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{17\pi}{12} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{7\pi}{12} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

d) $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

e) $x = \frac{\pi}{4} + 3k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

f) $x = \frac{1}{2} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

g) $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

h) $x = \frac{7\pi}{60} + \frac{1}{5} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

3394 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cdot k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi,\ x_2 = 3l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z})$, ami felírható $x = \frac{3}{2} k\pi\ (k, \in \mathbb{Z})$ alakban.

d) $x_1 = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{12} + l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

e) $x_1 = 2k\pi,\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

f) $x_1 = \frac{1}{2} \cdot k\pi,\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z}).$

3395 Az egyenletek megoldásai:

a) $x_1 = 2k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

b) $x_1 = -\frac{7\pi}{12} - 2k\pi,\ x_2 = \frac{11\pi}{36} + \frac{2}{3} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

c) $x_1 = -\frac{4}{7} \cdot k\pi,\ x_2 = \frac{4}{9} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

d) $x_1 = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3} \cdot l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$

e) $x = \frac{1}{4} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

f) $x = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

3396 *a)* Használjuk ki, hogy a szinuszfüggvény páratlan:

$$x_1 = -\frac{\pi}{21} + \frac{2}{7} \cdot k\pi, \quad x_2 = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Használjuk ki, hogy $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$:

$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} - 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}),$ ami felírható $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ alakban.

c) Használjuk ki, hogy $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-x)$, és hogy a szinuszfüggvény páratlan:

$$x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

d) Használjuk ki, hogy $\cos(x + \pi) = -\cos x$. A megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{32} + \frac{1}{4} \cdot l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

e) A megoldások:

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{6} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

f) Használjuk ki, hogy $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. A megoldások:

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3397 Hozzuk $\operatorname{tg} x = c$ alakra az egyenleteket.

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

b) $x \approx -0{,}32 + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

c) $x \approx 0{,}30 + \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} \cdot k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$

d) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

3398 Használjuk ki, hogy $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, valamint azt, hogy a szinuszfüggvény páratlan.

a) $x = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$; *b)* $x_1 = \frac{19\pi}{72} - \frac{1}{3} \cdot k\pi,\ x_2 = \frac{13\pi}{24} + l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z})$;

3399 Másodfokú egyenletre visszavezethetők a trigonometrikus egyenletek.

a) A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = -6, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások közül a $[0; 2\pi]$ intervallumba az $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ gyökök esnek.

b) A megoldóképlet alapján:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\cos x = 3, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások közül a $[0; 2\pi]$ intervallumba az $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ gyökök esnek.

c) A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = -\sqrt{3}, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások közül a $[0; 2\pi]$ intervallumba az $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ gyökök esnek.

d) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A megoldóképlet alapján:

$$\operatorname{tg} x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \approx 1{,}25 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások közül a $[0; 2\pi]$ intervallumba az $x_1 \approx 1{,}25$, $x_2 \approx 1{,}25 + \pi$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$, $x_4 = \frac{5\pi}{4}$ gyökök esnek.

3400 A feladatokban használjuk a trigonometrikus összefüggéseket.

a) Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet ilyen alakba is írható: $\sin^2 x + 2 \cdot \sin x - 3 = 0$.

A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = -3, \text{ ami nem lehet.}$$

b) Mivel $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, az egyenlet ilyen alakba is írható: $2 \cdot \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

A megoldóképlet alapján:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \pi + 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

c) A tangensfüggvény értelmezési tartományából $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Mivel $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, valamint $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet ilyen alakra is hozható: $\sin^2 x + 2 \cdot \sin x - 1 = 0$.
A megoldóképlet alapján:

$$\sin x = -1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \approx 0{,}43 + 2k\pi, \; x_2 \approx \pi - 0{,}43 + 2l\pi \; (k, l \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = -1 - \sqrt{2} < 1, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldás beletartozik a tangensfüggvény értelmezési tartományába.

d) Az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ekvivalens átalakítások után az egyenlet a következő alakra hozható: $2 \cdot \cos^2 x = 1$.
Innen a megoldás:

$$|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \; (k \in \mathbb{Z}).$$

A megoldás az értelmezési tartománynak megfelel.

e) A tangensfüggvény értelmezési tartományából $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ekvivalens átalakítások után az egyenlet $6 \cdot \cos^2 x + \sqrt{3} \cdot \cos x - 6 = 0$ alakra hozható.
Innen a megoldás:

$$\cos x = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} < -1, \text{ ami nem lehet,} \quad \text{vagy}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \; (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezek a megoldások a az értelmezési tartománynak nem mondanak ellent.

f) Az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ Ekvivalens átalakítások után az egyenlet a következő alakra hozható: $\operatorname{tg}^2 x - 2 \cdot \operatorname{tg} x - 1 = 0$.
Innen a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$\operatorname{tg} x = 1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \approx 1{,}18 + k\pi \; (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \approx -0{,}39 + l\pi \; (l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

g) Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\cos^2 x$-szel (a $\cos x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, mert $\sin x$ és $\cos x$ egyszerre nem lehet 0):

$$2 \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 1 = 0,$$

$$2 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 3 \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \; (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \approx 0{,}46 + l\pi \; (l \in \mathbb{Z}).$$

h) A *g)* rész gondolatmenete alapján:

$$2\cdot \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 1 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$\mathrm{tg}\, x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \approx -0{,}46 + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

3401 *a)* Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Ekvivalens átalakítások után a $\sin x \cdot \left(2\cdot\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$ egyenletet kapjuk. Innen:

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

b) Az egyenletet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon oldjuk meg. Átalakítások után a következő alakhoz jutunk: $\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ahonnan az $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ megoldásokhoz jutunk.
A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

c) Egy tört akkor nulla, ha:

$$\text{a számlálója } 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\, x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx -1{,}11 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Bontsuk fel az abszolút értéket, és osszuk el $\cos x$-szel ($\cos x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, mert $\sin x$ és $\cos x$ egyszerre nem vehet fel 0 értéket).
Ha $\cos x > 0$, akkor az egyenlet $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ alakba írható. Ennek megoldása $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, de $\cos x > 0$ miatt csak az első negyedbeli szög megoldás: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Ha $\cos x < 0$, akkor az egyenlet $\mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ alakba írható. Ennek megoldása $x = \frac{5\pi}{6} + l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$, de $\cos x < 0$ miatt csak a második negyedbeli szög megoldás: $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$.

3402 *a)* Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Átszorzás után:

$$\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 1,$$

$$\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$2\cdot\sin x\cdot\cos x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x\cdot(2\cdot\sin x - \cos x) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesülhet, ha

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \approx 0{,}46 + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

Az egyenlet pozitív megoldásai: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right)$ és $x_2 \approx 0{,}46 + l\pi \ \left(l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right)$.

b) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Redukáljuk nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá:

$$\sin x - \cos x + 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0,$$

$$(\sin x - \cos x) + 2 \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} = 0,$$

$$(\sin x - \cos x) \cdot \left(1 + \frac{2}{\cos x}\right) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség csak akkor teljesül, ha a szorzótényezők valamelyike 0.
Ha az első tényező 0:

$$\sin x - \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

A második tényező akkor 0, ha $\cos x$ értéke -2, ez nem lehet.
A kapott megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.
Az egyenlet pozitív megoldásai: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $\left(k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right)$.

3403 Vizsgáljuk az adott egyenletek jobb és bal oldalának értékkészletét.

a) Az egyenletnek nincs megoldása, mivel a bal oldal csak 8-nál kisebb értéket vehet fel.

b) A bal oldal értéke legalább 1, mivel:

$$-1 \le \sin x \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \sin^2 x \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le 2^{\sin^2 x} \le 2.$$

A jobb oldal a koszinuszfüggvény értékkészlete miatt legfeljebb 1.
Így az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldal 1 értéket vesz fel, azaz ha:

$$\cos x = 1 \quad \text{és} \quad 2^{\sin^2 x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = 0.$$

Az egyenlet megoldása: $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3404 *a)* Az addíciós tétel alapján az egyenlet a következő alakba írható:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x\right) = \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot \sin x, \qquad \text{amiből} \qquad \cos x = \sin x.$$

Az utóbbi egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Használjuk az addíciós tételeket:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 3x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \cos 3x \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 3x,$$

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin 3x \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 3x.$$

Ezek alapján a megoldandó egyenlet:

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 3x + \frac{1}{2} \cdot \cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 3x = 0.$$

Mivel $\cos 3x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, az egyenletet $\operatorname{tg} 3x$-re rendezve kapjuk, hogy:

$$\operatorname{tg} 3x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A bal oldalon álló kifejezéseket írjuk át az addíciós tételek segítségével, majd végezzük el az összevonásokat:

$$\sqrt{2} \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x},$$
$$\sqrt{2} \cdot \cos^2 x = \sin x,$$
$$\sqrt{2} \cdot \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0.$$

Innen a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$
$$\sin x = -\sqrt{2}, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

d) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A bal oldalon álló kifejezéseket írjuk át az addíciós tételek segítségével, majd végezzük el az összevonásokat:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin^2 x = \cos x,$$
$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos^2 x + \cos x - 2 \cdot \sqrt{3} = 0.$$

Innen a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$
$$\sin x = -\frac{2}{\sqrt{3}} < -1, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

3405 Alkalmazzuk az $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ típusú egyenletek megoldási módszerét: osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{a^2 + b^2}$-tel, majd használjunk addíciós tételt.

a) Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$-vel:

$$\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az addíciós tételt használva:

$$\sin x \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

amelynek megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z});$$

b) A megoldások:

$$x_1 \approx -0{,}44 + 2k\pi, \quad x_2 \approx 2{,}30 + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3406 Az egyenlet megoldási lépései:

$$\sin(\pi \cdot \cos x) = \cos(\pi \cdot \sin x),$$

$$\sin(\pi \cdot \cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin x\right).$$

I. eset:

$$\pi \cdot \cos x = \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos x + \sin x = \frac{1}{2} + 2k, \qquad / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot k,$$

$$-1 \le \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}k \le 1.$$

$$\Downarrow$$

Az egyenlőtlenségek csak $k = 0$ esetén teljesülnek:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$x_1 \approx \pm 1{,}21 + \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\pi \cdot \cos x = \pi - \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \sin x + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{2} + 2l, \qquad / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot l,$$

$$-1 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot l \le 1.$$

$$\Downarrow$$

Az egyenlőtlenségek csak $l = 0$ esetén teljesülnek:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$x_2 \approx \pm 1{,}21 - \frac{\pi}{4} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 \approx \pm 1{,}21 + \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{és} \quad x_2 \approx \pm 1{,}21 - \frac{\pi}{4} + 2m\pi \quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

3407 *a)* Használjuk a kétszeres szögekre vonatkozó összefüggéseket, illetve a szögfüggvényekre érvényes pitagoraszi összefüggést:

$$\sin^2 x - \cos 2x = 2 - \sin 2x,$$
$$2 \cdot \sin^2 x - \cos^2 x = 2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x,$$
$$0 = 3 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x,$$
$$0 = \cos x \cdot (3 \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \qquad \text{vagy}$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \approx 0{,}98 + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

b) Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát $\cos^2 x$-szel (megtehetjük, mert $\cos x = 0$ nem megoldása az egyenletnek).

A $\operatorname{tg}^2 x + \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ egyenletet megoldva:

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \qquad \text{vagy}$$
$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

c) Az egyenlet jobb oldalán álló 2-t írjuk fel $2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x$ alakban, majd redukáljuk 0-ra az egyenletet. Így a *b)* részben alkalmazott módszert alkalmazva $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$ egyenlethez jutunk.

Az egyenlet megoldásai:

$$\operatorname{tg} x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \approx -1{,}11 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \qquad \text{vagy}$$
$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

d) A kétszeres szögekre vonatkozó összefüggés alapján az egyenlet:

$$12 \cdot \sin^4 x + 4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \cos^4 x.$$

A *b)* részben alkalmazott módszert alkalmazva: $12 \cdot \operatorname{tg}^4 x + 4 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$.

A másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet megoldva adódik, hogy:

$$\operatorname{tg}^2 x = -\frac{1}{2}, \text{ ami nem lehet,} \quad \text{vagy}$$
$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x \approx \pm 0{,}39 + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldása: $x \approx \pm 0{,}39 + l\pi \ (l \in \mathbb{Z})$.

e) Mivel

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2},$$

a $\sin^2 2x = 1$ egyenletet kell megoldanunk.

A megoldás:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

f) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\sin x + \cos x = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \cos x, \qquad /:\sqrt{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x.$$

Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

g) Az egyenlet mindkét oldalát 2-vel osztva, majd alkalmazva a $\sin(\alpha + \beta)$-ra vonatkozó addíciós tételt:

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 4x = \sin 3x,$$

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 3x.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha:

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{21} + \frac{2}{7} \cdot l\pi \ (k, l \in \mathbb{Z}).$$

h) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A bal oldalt alakítva:

$$\mathrm{ctg}^2 x - \mathrm{tg}^2 x = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

A jobb oldalt $16 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)$ alakba írva a megoldandó egyenlet:

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 16 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x),$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - 16\right) = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha:

$$\mathrm{tg}^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \qquad \text{vagy}$$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

i) Az egyenletet 2-vel osztva, majd használva a $\sin(\alpha - \beta)$-ra vonatkozó addíciós tételt, a következő egyenlethez jutunk:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 3x = 1.$$

Mivel a szinuszfüggvény 1-nél nagyobb értéket, illetve –1-nél kisebb értéket nem vehet fel, ez utóbbi egyenlőség két esetben teljesül.

I. eset: $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ és $\sin 3x=1.$

Az első összefüggésből:

$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}),$$

a másodikból:

$$3x=\frac{\pi}{2}+2l\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\cdot l\pi \ (l\in\mathbb{Z}).$$

Ezek alapján k és l egész számokra teljesülnie kell az alábbi egyenlőségnek:

$$\frac{5\pi}{6}+2k\pi=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\cdot l\pi.$$

Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $l=1+3k,$ tehát az eredeti egyenletünk megoldása:

$$x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\cdot(1+3k)\cdot\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$$

II. eset: $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ és $\sin 3x=-1.$

Az első összefüggésből:

$$x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{\pi}{6}+2n\pi \ (n\in\mathbb{Z}),$$

a másodikból:

$$3x=\frac{3\pi}{2}+2m\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\cdot m\pi \ (m\in\mathbb{Z}).$$

Ezek alapján n és m egész számokra teljesülnie kell az alábbi egyenlőségnek:

$$-\frac{\pi}{6}+2n\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\cdot m\pi.$$

Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $m=3n-1,$ tehát az eredeti egyenletünk megoldása:

$$x_2=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\cdot(3n-1)\cdot\pi=-\frac{\pi}{6}+2n\pi \ (n\in\mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$x_1=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ és $x_2=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$ $(k, n\in\mathbb{Z})$, ami $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ alakban is írható.

j) Az egyenlet az $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$ $(k\in\mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

A nullától különböző valós szám és reciproka összegére ismert egyenlőtlenség miatt:

$$|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|=\left|\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right|\geq 2,$$

tehát az egyenlet jobb oldalának értékészlete $]-\infty; -10]\cup[10; \infty[$.

A szinuszfüggvény alapján az egyenlet bal oldalának értékkészlete a $[-2; 2]$ intervallum.

Mivel a jobb és bal oldal értékkészlet halmazának a metszete üres halmaz, az egyenletnek nincs megoldása.

3408 *a)* Alakítsuk szorzattá az egyenlet mindkét oldalát:

$$\sin 2x - \sin x = 2\cdot\cos\frac{2x+x}{2}\cdot\sin\frac{2x-x}{2} = 2\cdot\cos\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2},$$

$$\cos 2x - \cos x = -2\cdot\sin\frac{2x+x}{2}\cdot\sin\frac{2x-x}{2} = -2\cdot\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}.$$

Az egyenletet nullára redukálva, majd szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)=0.$$

Innen vagy $\sin\frac{x}{2}=0$, vagy $\operatorname{tg}\frac{3x}{2}=-1$. Az egyenlet megoldásai a $[0;\,2\pi]$ intervallumon:

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{\pi}{2},\quad x_3=\frac{7\pi}{6},\quad x_4=\frac{11\pi}{6}\quad \text{és}\quad x_5=2\pi.$$

b) Alakítsunk alkalmasan szorzattá:

$$\cos x+\cos 3x = 2\cdot\cos\frac{x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2} = 2\cdot\cos 2x\cdot\cos(-x) = 2\cdot\cos 2x\cdot\cos x,$$

$$\cos 2x+\cos 4x = 2\cdot\cos\frac{2x+4x}{2}\cdot\cos\frac{2x-4x}{2} = 2\cdot\cos 3x\cdot\cos(-x) = 2\cdot\cos 3x\cdot\cos x.$$

Ezeket felhasználva, az egyenletet nullára redukálva, majd szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$2\cdot\cos x\cdot(\cos 2x+\cos 3x)=0.$$

Újabb szorzattá alakítás után:

$$2\cdot\cos x\cdot 2\cdot\cos\frac{2x+3x}{2}\cdot\cos\frac{2x-3x}{2}=0,$$

$$4\cdot\cos x\cdot\cos\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0.$$

Az egyenlet megoldásai a valós számok halmazán:

$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad x_2=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\cdot l\pi,\quad x_3=\pi+2m\pi\quad (k,l,m\in\mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai a $[0;\,2\pi]$ intervallumon:

$$x_1=\frac{\pi}{5},\quad x_2=\frac{\pi}{2},\quad x_3=\frac{3\pi}{5},\quad x_4=\pi,\quad x_5=\frac{3\pi}{2},\quad x_6=\frac{7\pi}{5}\quad \text{és}\quad x_7=\frac{9\pi}{5}.$$

3409 *a)* Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést átalakítva az $|\sin x| = 1-\sin|x|$ egyenletet kell megoldanunk.

Mivel mind a bal, mind a jobb oldalon álló függvény páros, ha egy valós szám megoldása az egyenletnek, akkor az ellentettje is megoldás lesz.

Elég a megoldásokat $x\ge 0$ esetén keresnünk. Ekkor $|\sin x| = 1-\sin x$.

Ha $\sin x\ge 0$, akkor az egyenlet:

$$2\cdot\sin x=1\quad\Leftrightarrow\quad x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ x_2=\frac{5\pi}{6}+2l\pi\ \left(k,l\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\right).$$

Ha $\sin x<0$, akkor ellentmondásra jutunk.

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\quad x_2=\frac{5\pi}{6}+2l\pi,\quad x_3=-\frac{\pi}{6}-2k\pi,\quad x_4=-\frac{5\pi}{6}-2l\pi\quad \left(k,l\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\right).$$

b) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.
Bontsuk fel a jobb oldalon álló abszolútértéket tartalmazó kifejezést:

$$\left|x-\frac{\pi}{2}\right|-\left|x+\frac{\pi}{2}\right|=\begin{cases}\pi, & \text{ha} \quad x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ -2x, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x<\dfrac{\pi}{2}, \\ -\pi, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x.\end{cases}$$

Ez alapján:
Ha $x<-\frac{\pi}{2}$, akkor

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_1=\frac{\pi}{3}+k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}^-).$$

Ha $-\frac{\pi}{2} \leq x<\frac{\pi}{2}$, akkor

$$\operatorname{ctg} x=-\frac{2}{\sqrt{3} \cdot \pi} \cdot x,$$

amelynek az adott intervallumon nem lehet megoldása, mert a jobb és bal oldal előjele különböző.

Ha $\frac{\pi}{2} \leq x$, akkor

$$\operatorname{ctg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_2=-\frac{\pi}{3}+l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}^+).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1=\frac{\pi}{3}+k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}^-) \quad \text{és} \quad x_2=-\frac{\pi}{3}+l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}^+).$$

Ezek a megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

3410 *a)* Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve. Ekvivalens átalakítások után:

$$16^{\operatorname{tg}^2 x}-4^{\operatorname{tg}^2 x+1}=192,$$
$$\left(4^{\operatorname{tg}^2 x}\right)^2-4 \cdot 4^{\operatorname{tg}^2 x}-192=0.$$

A kapott másodfokúra visszavezethető egyenletet megoldva:

$4^{\operatorname{tg}^2 x}=-12$, ami nem lehet, vagy

$4^{\operatorname{tg}^2 x}=16 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2 x=2 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x=\pm\sqrt{2}$, amiből $x \approx \pm 0{,}96+k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$.

Az $x \approx \pm 0{,}96+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ megoldások elemei az egyenlet alaphalmazának.

b) A bal oldalon álló logaritmikus kifejezések akkor vannak értelmezve, ha $\sin x$ és $\cos x$ pozitív értéket vesz fel, és egyik sem 1. Az egyenlet megoldásait tehát az $\left]2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ intervallumokon kell keresnünk.
A logaritmusra vonatkozó azonosságok alapján:

$$\log_{\cos x} \sin x+\log_{\sin x} \cos x=2,$$
$$\frac{1}{\log_{\sin x} \cos x}+\log_{\sin x} \cos x=2.$$

Ismert, hogy nullától különböző valós szám és reciproka összegének abszolút értéke nagyobb egyenlő mint 2, valamint az összeg csak abban az esetben lehet 2, ha a valós szám éppen 1.

Az egyenlet megoldását tehát a $\log_{\sin x} \cos x = 1$ egyenlet szolgáltatja.

Innen $\sin x = \cos x$ adódik, amelyet az alaphalmaz elemei közül csak az $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ valós számok elégítenek ki.

Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

3411 Először adjuk meg azt az alaphalmazt, amelyen a megadott egyenlőség értelmezve van:

$$x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \Rightarrow \ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{illetve} \quad \frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \ \Rightarrow \ x \neq -l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Az addíciós tétel alapján az egyenlet bal oldala $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$, de ezt csak akkor írhatjuk fel, ha $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$.

Ismert, hogy $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, tehát az adott egyenlet a következő alakba is írható:

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 1 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \ \Rightarrow \ x \approx 0{,}32 + m\pi \ (m \in \mathbb{Z}).$$

Ha $x = \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$, akkor ez megoldása az egyenletnek, mivel a bal oldal:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

és a jobb oldal:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - n\pi\right) - 1 = -1.$$

Az egyenlet megoldásai az alaphalmazon:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x_2 \approx 0{,}32 + m\pi \ (m \in \mathbb{Z}).$$

3412 A másodfokúra visszavezethető egyenlet diszkriminánsa:

$$D = 4 \cdot (p+1)^2 - 16p = 4 \cdot p^2 - 8p + 4 = 4 \cdot (p-1)^2.$$

A megoldóképletet használva:

$$\sin x_{1,2} = \frac{2 \cdot (p+1) \pm 2 \cdot |p-1|}{2} = \frac{2 \cdot (p+1) \pm 2 \cdot (p-1)}{2},$$

ahonnan

$\sin x = 2$, ami egyetlen x-re sem teljesülhet, vagy
$\sin x = 2p$.

Figyelembe véve, hogy

$$-1 \leq \sin x = 2p \leq 1,$$

az egyenletnek akkor lesz megoldása, ha:

$$-\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{1}{2}.$$

3413 Az adott intervallumon az $x = 0$ helyen az egyenlet nincs értelmezve.
Mivel

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x =$$
$$= \operatorname{tg}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2,$$

az egyenlet $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$-re nézve másodfokú. Legyen $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = a$.

Az egyenlet a következő alakba írható:

$$a^2 - 4ma + 3m^2 = 0.$$

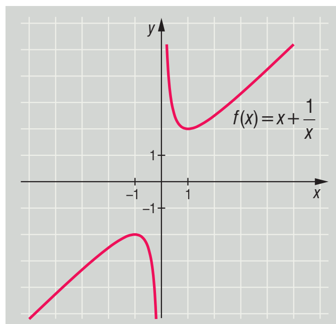
Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = 16m^2 - 12m^2 = 4m^2 \quad \Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{4m \pm 2|m|}{2} = \frac{4m \pm 2m}{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3m,\ a_2 = m.$$

Ez alapján $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = m$ és $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 3m$ egyenletek megoldásainak számát kell vizsgálnunk m függvényében a $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon.

A $\operatorname{tg} x$ függvény kölcsönösen egyértelmű a $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon, és értékkészlete a valós számok halmaza.

Ezeket figyelembe véve az $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény grafikonja alapján a következő megállapításokat tehetjük.



Az adott intervallumon a $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$ egyenletnek

- két megoldása van, ha $|m| > 2$,
- egy megoldása van, ha $|m| = 2$,
- nincs megoldása, ha $|m| < 2$.

Az adott intervallumon a $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3m$ egyenletnek

- két megoldása van, ha $|3m| > 2 \;\Leftrightarrow\; |m| > \frac{2}{3}$,
- egy megoldása van, ha $|3m| = 2 \;\Leftrightarrow\; |m| = \frac{2}{3}$,
- nincs megoldása, ha $|3m| < 2 \;\Leftrightarrow\; |m| < \frac{2}{3}$.

Tehát az egyenletnek

- nincs megoldása, ha $|m| < \frac{2}{3}$,
- egy megoldása van, ha $|m| = \frac{2}{3}$,
- két megoldása van, ha $\frac{2}{3} < |m| < 2$,
- három megoldása van, ha $|m| = 2$,
- négy megoldása van, ha $|m| > 2$.

3414 *a)* Az első egyenletből y-t kifejezve, majd beírva a másodikba:

$$\sin x = \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$
$$\sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x.$$

Mivel a $\cos x \neq 0$, ezért $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Ez alapján az egyenletrendszer megoldásai:

$$\left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} - k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Az első egyenletből $\sin x = -\cos y$, ezt beírva a második egyenletbe kapjuk, hogy:

$$\cos y \cdot \sin y = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt visszaírva az első összefüggésbe, ha

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + 2l\pi, \quad \text{akkor} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{vagy} \quad x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2m\pi,$$
$$y_2 = \frac{5\pi}{4} + 2l\pi, \quad \text{akkor} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{vagy} \quad x_4 = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi.$$

Az egyenletrendszer megoldásai a valós számok halmazán a következő számpárok $(l, m, n \in \mathbb{Z})$:

$$\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi; \frac{\pi}{4} + 2l\pi\right), \quad \left(\frac{7\pi}{4} + 2m\pi; \frac{\pi}{4} + 2l\pi\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \frac{5\pi}{4} + 2l\pi\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4} + 2m\pi; \frac{5\pi}{4} + 2l\pi\right).$$

c) Kihasználva, hogy az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű:

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x + \cos 2y &= 0 \\ 2 \cdot \cos x \cdot \cos y &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenlet bal oldalát alakítsunk szorzattá:

$$\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = 0.$$

A második egyenlet bal oldalát alakítsuk összeggé:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 1.$$

Az első egyenlet bal oldalán lévő szorzat két esetben lehet 0.

I. eset:

$$\cos(x + y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$0 + \cos(x - y) = 1 \quad \Rightarrow \quad x - y = 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Így az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - y &= 2n\pi \end{aligned}\right\}.$$

Innen:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{k}{2} + n\right) \cdot \pi, \qquad y_1 = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{k}{2} - n\right) \cdot \pi.$$

II. eset:

$$\cos(x-y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-y=\frac{\pi}{2}+l\pi \ (l\in\mathbb{Z}).$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$\cos(x+y)+0=1 \quad \Rightarrow \quad x+y=2m\pi \ (m\in\mathbb{Z}).$$

Így az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\frac{\pi}{2}+l\pi \\ x+y&=2m\pi \end{aligned}\right\}.$$

Innen:

$$x_2=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{l}{2}+m\right)\cdot\pi, \qquad y_2=-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{l}{2}-m\right)\cdot\pi.$$

A feladat megoldásai ($k, l, m, n\in\mathbb{Z}$):

$$x_1=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{k}{2}+n\right)\cdot\pi, \qquad y_1=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{k}{2}-n\right)\cdot\pi,$$
$$x_2=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{l}{2}+m\right)\cdot\pi, \qquad y_2=-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{l}{2}-m\right)\cdot\pi.$$

3415 *a)* Az x-re másodfokúnak tekinthető egyenletnek csak akkor van valós megoldása, ha diszkriminánsa nem negatív:

$$D=4\cdot\sin^2 xy-4=4\cdot(\sin^2 xy-1)\ge 0.$$

Mivel $\sin^2 xy$ legfeljebb 1 értéket vehet fel, a diszkrimináns pozitív nem lehet.

Tehát, hogy legyen megoldás, a diszkriminánsnak 0-nak kell lennie. Ebben az esetben $\sin xy=1$ vagy $\sin xy=-1$.

Ha $\sin xy=1$, akkor az egyenlet megoldása:

$$x^2+2x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \quad \Rightarrow \quad \sin xy=\sin(-y)=1 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$$

Ha $\sin xy=-1$, akkor az egyenlet megoldása:

$$x^2-2x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \quad \Rightarrow \quad \sin xy=\sin y=-1 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{3\pi}{2}+2l\pi \ (l\in\mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai az $\left(1;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$ és $\left(-1;\ \frac{3\pi}{2}+2l\pi\right)$ számpárok, ahol $k, l\in\mathbb{Z}$.

b) Ismert, hogy egy 0-tól különböző valós szám és reciproka összegének abszolút értéke legalább 2. Az összeg 2 értéket csak akkor vesz fel, ha a valós szám 1, illetve –2 értéket akkor, ha a valós szám –1.

Figyelembe véve a koszinuszfüggvény értékkészletét, $\cos y$ értéke 1 vagy –1 lehet.

Ha $\cos y=1$, akkor

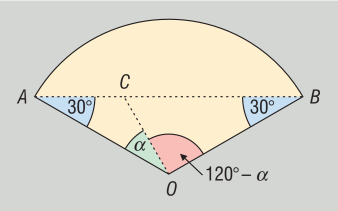
$$y=2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x=1.$$

Ha $\cos y=-1$, akkor

$$y=\pi+2l\pi \ (l\in\mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x=-1.$$

Az egyenlet megoldásai az $(1;\ 2k\pi)$ vagy $(-1;\ \pi+2l\pi)$ számpárok, ahol $k, l\in\mathbb{Z}$.

3416 A körcikkhez tartozó kör középpontja legyen O, az AB húrt a C pont ossza két részre úgy, hogy $AC:CB = 1:2$.



Mivel az AOB háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárszöge 120°, $OAB\sphericalangle = OBA\sphericalangle = 30°$.

Legyen $AOC\sphericalangle = \alpha$, ekkor $BOC\sphericalangle = 120° - \alpha$.

Írjuk fel az AOC, illetve BOC háromszögekben a szinusztételt:

$$\frac{AC}{CO} = \frac{\sin\alpha}{\sin 30°}, \quad \text{illetve} \quad \frac{CB}{CO} = \frac{\sin(120° - \alpha)}{\sin 30°}.$$

A két egyenletet egymással elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\sin\alpha}{\sin(120° - \alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sin(120° - \alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\alpha = \sin(120° - \alpha).$$

Az addíciós tételt használva:

$$2\sin\alpha = \sin 120° \cdot \cos\alpha - \cos 120° \cdot \sin\alpha,$$

$$2\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$\frac{3}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha.$$

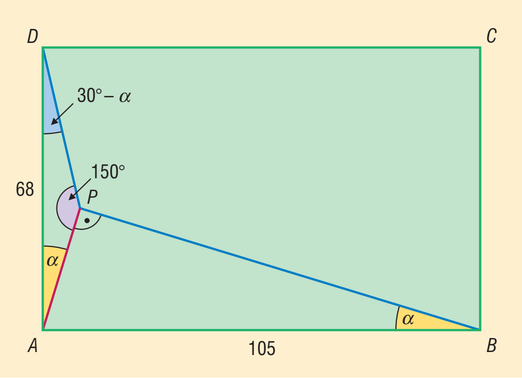
Mivel $\cos\alpha = 0$ nem megoldása az egyenletnek:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Az egyenlőség megoldása a 120°-nál kisebb pozitív szögeket tekintve: $\alpha = 30°$.

A két részszög nagysága 30° és 90°.

3417 A focista tartózkodjon a P pontban, és a pálya AB oldala legyen 105 m, az AD oldala 68 m hosszú.



Jelölje az ABP szöget α. Ekkor a P-nél lévő szögek nagyságát figyelembe véve:

$$PAD\sphericalangle = \alpha \quad \text{és} \quad PDA\sphericalangle = 30° - \alpha.$$

Az ABP derékszögű háromszögben:

$$\frac{PA}{105} = \sin\alpha,$$

amiből

$$PA = 105 \cdot \sin\alpha.$$

Az APD háromszögben felírva a szinusztételt:

$$\frac{PA}{68} = \frac{\sin(30° - \alpha)}{\sin 150°}.$$

Behelyettesítve az ismert értékeket:

$$\frac{PA}{68} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad PA = 68\cdot\cos\alpha - 68\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\alpha.$$

A két összefüggésből a következő trigonometrikus egyenlethez jutunk:

$$105 \cdot \sin\alpha = 68 \cdot \cos\alpha - 68 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\alpha.$$

Ezt megoldva:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{68}{105 + 68 \cdot \sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 16{,}97^\circ.$$

Az APD háromszög A csúcsánál lévő szög $16{,}97^\circ$, a D csúcsnál lévő szög $30^\circ - 16{,}97^\circ = 13{,}03^\circ$, ezért $PA < PD$, tehát a PA távolságot kell meghatároznunk.

A focistának a P ponttól az A csúcsig $105 \cdot \sin 16{,}97^\circ \approx 30{,}6$ m távolságot kell megtennie.

Trigonometrikus egyenlőtlenségek – megoldások

3418 *a)* $2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

b) $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

c) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

d) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

e) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

f) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

g) $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

h) $\frac{\pi}{6} + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

i) $\frac{3\pi}{4} + k\pi \le x < \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

3419 *a)* $-\frac{3\pi}{8} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{8} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

b) $\frac{7\pi}{3} + 4k\pi \le x \le 5\pi + 4k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

c) $\frac{7\pi}{36} + \frac{1}{3} \cdot k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cdot k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

d) $k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

e) $\frac{7\pi}{12} + k\pi \le x \le \frac{4\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

f) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} \ (k \in \mathbb{Z})$;

g) $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

h) Az egyenlőtlenség $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ alakba írható. Megoldása: $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

3420 *a)* Az egyenlőtlenséget azok a valós x számok elégítik ki, amelyekre $\operatorname{tg} x > 1$ vagy $\operatorname{tg} x < -1$. Az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{vagy} \quad \frac{\pi}{2} + l\pi < x < \frac{3\pi}{4} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

b) Az egyenlőtlenség minden valós számra igaz, mert $\frac{\pi}{3} > 1$.

c) Az egyenlet az $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \ (k \in \mathbb{Z})$ alaphalmazon van értelmezve.

Legyen $\operatorname{tg} x = a$, és ekkor az $a^2 + a - 2 > 0$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Ennek megoldásai: $a < -2$ vagy $a > 1$.

Az eredeti egyenlőtlenséget azok az x valós számok elégítik ki, amelyekre $\operatorname{tg} x < -2$ vagy $\operatorname{tg} x > 1$.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -1{,}11 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{vagy} \quad \frac{\pi}{4} + l\pi < x < \frac{\pi}{2} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

d) A *c)* részhez hasonló gondolatmenet alapján az egyenlőtlenséget azok a valós x számok elégítik ki, amelyre $-2 \le \cos x \le \frac{1}{2}$.

A bal oldali egyenlőtlenséget minden valós szám kielégíti, a jobb oldali és egyben a teljes egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

e) Felhasználva, hogy $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, a következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$2 \cdot \cos^2 x - \cos x - 1 < 0.$$

Ebből a $-\frac{1}{2} < \cos x < 1$ feltételt kapjuk $\cos x$-re.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x \ne 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

3421 *a)* A logaritmus után álló kifejezés csak pozitív értéket vehet fel, tehát a $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

Megoldás:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt a $\operatorname{ctg} x \ge \sqrt{3}$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

Megoldás:

$$k\pi < x \le \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) A logaritmusfüggvény értelmezési tartományából adódóan $\sin x > 0$.

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $\lg(\sin x) \ge 0$, amiből a tízes alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt $\sin x \ge 1$.

Elég tehát a $\sin x \ge 1$ egyenlőtlenséget megoldanunk.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) A $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$ kifejezés értelmezési tartománya $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} (k \in \mathbb{Z})$

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} - 1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos x} \ge 1.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha:

$$0 < \cos x \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + 2l\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A kifejezés értelmezési tartománya:

$$-\frac{\pi}{2} + 2m\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \ x \ne 2k\pi \ \ (k, m \in \mathbb{Z}).$$

3422 *a)* Alakítsuk szorzattá a bal oldalt:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x,$$

$$\cos 2x \ge \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Használjuk a $\sin 2x$-re vonatkozó azonosságot, majd nullára redukálás után alakítsuk szorzattá az egyenlőtlenség bal oldalát:

$$\sin x \cdot (2\cdot\cos x - 1) < 0.$$

A szorzat negatív értéket vesz fel, ha a tényezők különböző előjelűek.

I. eset:

$$\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$2\cdot\cos x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + 2l\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\sin x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\pi + 2k\pi < x < 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$2\cdot\cos x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3} + 2l\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$-\frac{\pi}{3} + 2m\pi < x < 2m\pi \ \ (m \in \mathbb{Z}).$$

Összefoglalva az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi \ \ (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{vagy} \quad -\frac{\pi}{3} + 2m\pi < x < 2m\pi \ \ (m \in \mathbb{Z}).$$

c) Az egyenlőtlenség mindkét oldalát osszuk el $\sqrt{2}$-vel, redukáljuk 0-ra, és alkalmazzuk a két szög különbségének szinuszára vonatkozó addíciós képletet.

Így a megoldandó egyenlet:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < 0.$$

A megoldás:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) A bal oldalon levő tört akkor van értelmezve, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Az egyenlőtlenség bal oldala átalakítható az addíciós tételek segítségével:

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} > 0.$$

A tört pozitív értéket vesz fel, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

I. eset:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + 2l\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5\pi}{4} + 2l\pi < x < \frac{9\pi}{4} + 2l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A két intervallum metszete:

$$\frac{5\pi}{4} + 2m\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2m\pi \ \ (m \in \mathbb{Z}).$$

Összefoglalva az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + p\pi < x < \frac{3\pi}{4} + p\pi \ \ (p \in \mathbb{Z}).$$

3423 *a)* Kétszeres szögekre vonatkozó összefüggés alapján:

$$4 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \sin 2x.$$

A logaritmusfüggvény értelmezési tartományából adódóan:

$$2 \cdot \sin 2x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin 2x > -\frac{1}{2}.$$

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $\log_2(2 \cdot \sin 2x + 1) \geq 0$, amiből a kettes alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt:

$$2 \cdot \sin 2x + 1 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x \geq 0.$$

Elég tehát az értelmezési tartomány meghatározásához a $\sin 2x \geq 0$ egyenlőtlenséget megoldani.

A kifejezés értelmezési tartománya:

$$l\pi < x < \frac{\pi}{2} + l\pi \ \ (l \in \mathbb{Z}).$$

b) A logaritmus után álló kifejezés csak pozitív értéket vehet fel:

$$\sin x + \cos x + 1 > 0,$$
$$\sin x + \cos x > -1.$$

Osszuk le az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\sqrt{2}$-vel, majd használjuk a $\sin(\alpha + \beta)$-ra vonatkozó addíciós összefüggést:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

3424 Az egyenlet másodfokú, ha $\sin 2p \neq 0$, vagyis $p \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Egy másodfokú egyenletnek akkor van két különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív:

$$D = (4 \cdot \cos p)^2 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 2p = 16 \cdot \left(\cos^2 p - \sqrt{3} \cdot \sin p \cdot \cos p\right) =$$

$$= 32 \cdot \cos p \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos p - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin p\right) = 32 \cdot \cos p \cdot \cos\left(p + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 16 \cdot \left[\cos\left(2p + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{3}\right] = 16 \cdot \left[\cos\left(2p + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\right].$$

Ez alapján a $\cos\left(2p + \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk, amely pontosan akkor teljesül, ha:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2p + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$-\pi + 2k\pi < 2p < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < p < \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenletnek két különböző valós megoldása van, ha:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < p < \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{és} \quad p \neq l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3425 *a)* Írjuk fel $\cos\alpha$-t $1 - 2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$ alakban.

A $\cos\beta + \cos\gamma$ összeget alakítsuk szorzattá, és vegyük figyelembe, hogy $\beta + \gamma = 180° - \alpha$:

$$\cos\beta + \cos\gamma = 2 \cdot \cos\frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2} =$$

$$= 2 \cdot \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2} = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Ezek alapján:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 - 2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Mivel $\cos\frac{\beta - \gamma}{2}$ maximális értéke 1:

$$1 - 2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2} \leq 1 - 2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2} - 2 \cdot \left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Egy valós szám négyzete nem lehet negatív, vagyis:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}.$$

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha:

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 1 \qquad \text{és} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mivel α, β és γ háromszög szögei, ez csak akkor lehet, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, vagyis ha a háromszög szabályos.

b) Mivel α, β és γ háromszög szögei, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ és $\cos\gamma$ pozitív valós számok.
Írjuk fel a számtani és mértani közép közti összefüggést erre a három számra, és használjuk fel az *a)* részben bizonyított egyenlőtlenséget:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \le \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3 \le \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma \qquad \text{és} \qquad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{3}{2}.$$

Ezen feltételek csak szabályos háromszög esetén teljesülnek.

Vegyes feladatok – megoldások

3426 *a)* $-\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{3}{2}$; *c)* $-\frac{1}{2}$; *d)* -1.

3427 *a)* A két vektor merőleges egymásra.
b) A két vektor $30°$-os szöget zár be.
c) A két vektor $120°$-os szöget zár be.

3428 A paralelogramma oldalainak hossza $9{,}54$ cm és $13{,}45$ cm.

3429 *a)* A háromszög tompaszögű.
b) A háromszög tompaszögű.

3430 A háromszög másik két oldala $10{,}78$ cm és $12{,}26$ cm.

3431 A kert harmadik oldala a koszinusztétellel számítható:

$$c^2 = 15^2 + 20^2 - 2\cdot 15\cdot 20\cdot\cos 76{,}41° \quad\Rightarrow\quad c = 22.$$

A kert kerülete: $15 + 20 + 22 = 57$ m.
A bekerítéshez $57\cdot 1{,}85 = 105{,}45$ m^2 dróthálóra van szükség.

3432 A háromszög szögei: $149{,}15°$, $11{,}19°$ és $19{,}66°$.

3433 A háromszög hiányzó oldalainak hossza $4\cdot\sqrt{21} \approx 18{,}33$ cm, $5\cdot\sqrt{21} \approx 22{,}91$ cm, a velük szemben levő szögek rendre $49{,}11°$ és $70{,}89°$.

3434 *a)* Az egyenletet redukáljuk nullára, majd alakítsunk szorzattá. A megoldások:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Az egyenlet alaphalmaza minden olyan valós szám, amelyre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
Szorzattá alakítás után a megoldások:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

c) Használjuk fel, hogy $\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$. A megoldások:

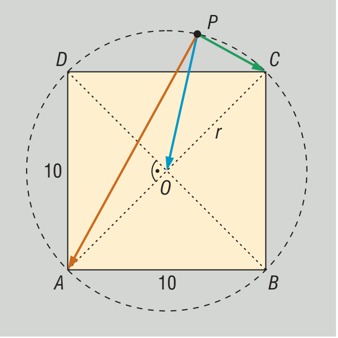
$$x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\cdot k\pi, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} - 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3435 *a)* $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z})$; *b)* $x = \frac{\pi}{12} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

3436 *a)* $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. *b)* Az értelmezési tartomány az üres halmaz.

c) $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

3437 *a)* Az *ABCD* négyzet körülírható körének *r* sugara az átló hosszának fele, $5\cdot\sqrt{2}$ egység. A kör középpontja a négyzet átlóinak *O* metszéspontja.



Ismert, hogy egy szakasz felezőpontjába mutató vektor a végpontokba mutató vektorok számtani közepe, tehát:

$$\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}\right) =$$
$$= 4\cdot\frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}}{2} = 4\cdot\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO} =$$
$$= 4r^2 = 4\cdot\left(5\cdot\sqrt{2}\right)^2 = 200.$$

b) Mivel a négyzet átlói merőlegesek egymásra, vektoraik skaláris szorzata 0:

$$\left(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PD}\right) = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB} = 0.$$

3438 *a)* Ha egy 7 egység hosszú vektor merőleges az $\vec{a}(-3; 4)$ vektorra, akkor *x*, *y* koordinátáira fennáll a következő két összefüggés:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 49 \\ -3x + 4y &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai, és így az $\vec{a}(-3; 4)$ vektorra merőleges 7 egység hosszú vektor koordinátái:

$$\left(\frac{28}{5}; \frac{21}{5}\right) \quad \text{vagy} \quad \left(-\frac{28}{5}; -\frac{21}{5}\right).$$

b) Az előző részben leírt gondolatmenet alapján az $\vec{a}(-5; 12)$ vektorra merőleges 7 egység hosszú vektor koordinátái lehetnek:

$$\left(\frac{84}{13}; \frac{35}{13}\right) \quad \text{vagy} \quad \left(-\frac{84}{13}; -\frac{35}{13}\right).$$

3439 Ha $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, akkor $\operatorname{ctg} x = \frac{4}{3}$, $|\sin x| = \frac{3}{5}$ és $|\cos x| = \frac{4}{5}$.

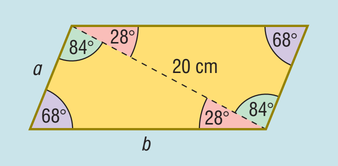
a) Mivel $\operatorname{tg} x$ értéke pozitív, az x szög az első vagy a harmadik negyedben lehet. Ezekben a negyedekben $\sin x$ és $\cos x$ előjele azonos, tehát:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{12}{25}.$$

b) A kifejezés értéke:

$$\frac{1}{\sin^2 x + \operatorname{ctg} x} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{4}{3}} = \frac{75}{127}.$$

3440 A paralelogramma másik két szöge $112°$, és ezeket a szögeket az átló egy $28°$-os és egy $84°$-os szögre osztja. Így ez az átló a paralelogrammát két olyan háromszögre bontja, amelynek szögei $68°$, $28°$ és $84°$. A háromszög $68°$-os szöggel szemben levő oldala 20 cm hosszú, a háromszög másik két oldala pedig a paralelogramma két oldala.



A szinusztétellel kiszámítható a háromszög hiányzó két oldalának hossza:

$$\frac{a}{20} = \frac{\sin 28°}{\sin 68°} \quad \Rightarrow \quad a = 20 \cdot \frac{\sin 28°}{\sin 68°} \quad \Rightarrow \quad a \approx 10{,}13,$$

$$\frac{b}{20} = \frac{\sin 84°}{\sin 68°} \quad \Rightarrow \quad b = 20 \cdot \frac{\sin 84°}{\sin 68°} \quad \Rightarrow \quad b \approx 21{,}45.$$

A paralelogramma oldalainak hossza $10{,}13$ cm és $21{,}45$ cm.

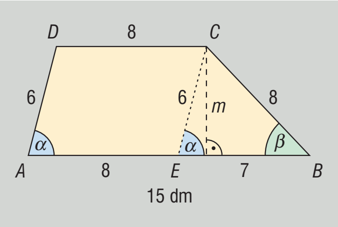
3441 A feladatban szereplő terítő legyen az ABC háromszög. Egy háromszög területét egy csúcsából kiindulva pontosan a súlyvonal felezi. Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $c = 18$ cm, a másik két oldalhoz tartozó súlyvonal hossza $s_a = 15$ cm és $s_b = 21$ cm.

Ismert a háromszög súlyvonalára vonatkozó $s_a = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}$ és $s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$ összefüggés.

Az ismert adatokat beírva, és az egyenletrendszert megoldva: $a \approx 28{,}77$ és $b \approx 23{,}24$.

A terítő másik két oldalának hossza $28{,}77$ cm és $23{,}24$ cm hosszú.

3442 Vegyük fel az $ABCD$ trapéz hosszabbik AB alapján az E pontot úgy, hogy az $AECD$ négyszög paralelogramma legyen. Ekkor $EB = 15 - 8 = 7$ dm, $BC = 8$ dm és $EC = 6$ dm.



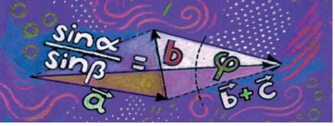
Az EBC háromszögben ismerjük három oldal hosszát, így a koszinusztétellel kiszámíthatjuk β szögét:

$$6^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 46{,}57°.$$

Az EBC háromszög E csúcsánál levő α szögét a szinusztétellel határozhatjuk meg:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 46{,}57°} = \frac{8}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 75{,}53°.$$

($180° - 75{,}53° = 104{,}47°$ nem lehet, mert ekkor a háromszög harmadik szöge $28{,}96°$ lenne, ami nem tesz annak eleget, hogy egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.)



a) A trapéz szögei: 46,57°, 75,53°, 104,47° és 133,43°.

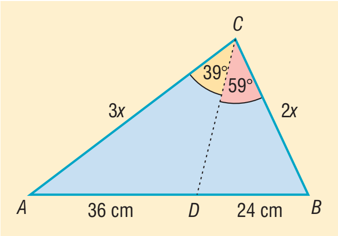
b) A trapéz magassága az EBC háromszög EB oldalához tartozó magassága:

$$m = 8 \cdot \sin 46{,}57° \approx 5{,}81 \text{ dm}.$$

A trapéz területe:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(15+8)\cdot 5{,}81}{2} = 66{,}82 \text{ dm}^2.$$

3443 Az ABC háromszög $AB = 24 + 36 = 60$ cm hosszú oldalát a belső szögfelező a D pontban metszi. Ismeretes, hogy egy háromszög belső szögfelezője a szemben lévő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. A háromszög AC oldalának hossza legyen $3x$, a BC oldalának hossza $2x$.



Az ABC háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$60^2 = (3x)^2 + (2x)^2 - 2\cdot 3x \cdot 2x \cdot \cos 78° \quad\Rightarrow\quad x \approx 18{,}51.$$

a) A háromszög oldalainak hossza: $AC = 55{,}53$ cm és $BC = 37{,}02$ cm.

b) A háromszög α szögét a szinusztétellel számolhatjuk ki:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 78°} = \frac{37{,}02}{60} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 37{,}12°.$$

(Az α biztosan hegyesszög, mert nem a leghosszabb oldallal szemben lévő szög.)

A háromszög szögei: 37,12°, 64,88° és 78°.

c) Legyen a háromszög beírt körének sugara r. A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2} = r\cdot\frac{a+b+c}{2} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{a+b+c} \approx 13{,}18.$$

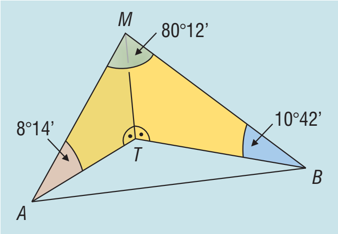
A háromszög beírt körének sugara 13,18 cm.

d) Legyen a háromszög köré írható körének sugara R. Egy kör sugara, húrjának hossza és a húrhoz tartozó kerületi szög közötti $c = 2R\cdot\sin\gamma$ összefüggés alapján:

$$R = \frac{c}{2\cdot\sin\gamma} \approx 30{,}67.$$

A háromszög köré írható körének sugara 30,67 cm.

3444 A hegycsúcs helyét az M, annak merőleges vetületét a T pont jelöli. A kikötők az A és a B pontban vannak.



Az ATM derékszögű háromszögből:

$$AM = \frac{400}{\sin 8°14'},$$

a BTM derékszögű háromszögből:

$$BM = \frac{400}{\sin 10°42'}.$$

Az ABM háromszögre felírva a koszinusztételt:

$$AB^2 = \left(\frac{400}{\sin 8°14'}\right)^2 + \left(\frac{400}{\sin 10°42'}\right)^2 - 2\cdot\frac{400}{\sin 8°14'}\cdot\frac{400}{\sin 10°42'}\cdot\cos 80°12'.$$

Innen $AB \approx 3224$.

A két kikötő távolsága 3224 m.

3445 *a)* Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet $2 \cdot \sin^2 x + 5 \cdot \sin x - 3 = 0$ alakba írható. A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján vagy $\sin x = -3$, ami nem lehet, vagy $\sin x = \frac{1}{2}$.
A megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Az egyenlet alaphalmaza $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Legyen $\mathrm{tg}^2 x = y$, ekkor az egyenlet:

$$y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3y^2 - 8y - 3 = 0.$$

A megoldások:

$$y_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}^2 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\, x = \pm\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

$$y_2 = -\frac{1}{3}, \text{ nem lehet.}$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

c) Az egyenlet a következő alakba írható:

$$\cos^2 x + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Szorzattá alakítás után:

$$\cos x \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

A megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

d) Az egyenlet alaphalmaza $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ekvivalens átalakítások után a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$2 \cdot \cos^2 x + 5 \cdot \cos x + 2 = 0.$$

Ennek megoldásai:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos x = -2 < -1, \text{ ami nem lehet.}$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

e) Az egyenlet alaphalmaza $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Az egyenlet mindkét oldalát $\sin x$-szel szorozva, majd felhasználva, hogy $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\sin^2 x + \cos x \cdot \sin x = 1,$$

$$\sin^2 x + \cos x \cdot \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$\cos x \cdot (\sin x - \cos x) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, tehát:

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = \cos x \ (\cos x = 0 \text{ esetet már vizsgáltuk}) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A megoldások beletartoznak az egyenlet alaphalmazába.

f) Használjuk a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ összefüggést, és nullára redukálás után alakítsuk szorzattá:

$$\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x),$$

$$\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x - \sin^4 x,$$

$$\sin^4 x + \sin^3 x - 2 \cdot \sin^2 x = 0,$$

$$\sin^2 x \cdot (\sin^2 x + \sin x - 2) = 0,$$

$$\sin^2 x \cdot (\sin x + 2) \cdot (\sin x - 1) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, tehát

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = -2 < -1, \text{ ami nem lehet,} \quad \text{vagy}$$

$$\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = k\pi \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

3446 *a)* A számlálóban $\operatorname{tg} x$ miatt $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

A nevezőben négyzetgyökös kifejezés áll, tehát:

$$1 - 2 \cdot \cos^2 x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} > |\cos x| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + l\pi < x < \frac{3\pi}{4} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A kifejezés értelmezési tartománya:

$$\left]\frac{\pi}{4} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + m\pi; \frac{3\pi}{4} + n\pi\right[\quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

b) A logaritmus alapja pozitív és nem lehet egyenlő 1-gyel:

$$\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\sin x \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

A logaritmus után álló kifejezés csak pozitív értéket vehet fel:

$$2 \cdot \cos x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z}).$$

A három halmaz metszete adja az értelmezési tartományt:

$$x \in \left]2m\pi; \frac{\pi}{3} + 2m\pi\right[\quad (m \in \mathbb{Z}).$$

3447 Ha két vektor merőleges egymásra, akkor skaláris szorzatuk 0, tehát:

$$\left(7\vec{a}-5\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=0,\quad \text{valamint}\quad \left(7\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-4\vec{b}\right)=0.$$

A két egyenletből fejezzük ki az $\vec{a}\cdot\vec{b}$ szorzatot:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{15\cdot|\vec{b}|^2-7\cdot|\vec{a}|^2}{16},\quad \text{valamint}\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{7\cdot|\vec{a}|^2+8\cdot|\vec{b}|^2}{30},$$

amiből adódik, hogy:

$$\frac{15\cdot|\vec{b}|^2-7\cdot|\vec{a}|^2}{16}=\frac{7\cdot|\vec{a}|^2+8\cdot|\vec{b}|^2}{30},$$

$$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2.$$

Ezen eredményünket felhasználva:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{15\cdot|\vec{b}|^2-7\cdot|\vec{a}|^2}{16}=\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|^2.$$

Az $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$ és $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|^2$ egyenlőségek akkor teljesülnek egyszerre, ha a két vektor nullvektor, vagy ha a két vektor egyenlő hosszú és egymással 60º-os szöget zárnak be.

3448 Alkalmazzuk az $\vec{a}(2;\,3)$ és $\vec{b}(a;\,b)$ vektorokra a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget:

$$2a+3b\le\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve és kihasználva, hogy $2a+3b=9$:

$$9\le\sqrt{13}\cdot\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\frac{9}{\sqrt{13}}\le\sqrt{a^2+b^2}.$$

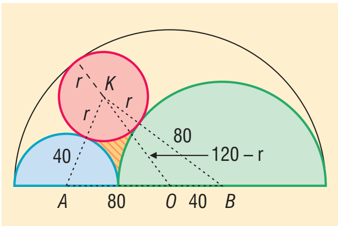
Az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, tehát:

$$\frac{81}{13}\le a^2+b^2.$$

Az a^2+b^2 minimuma $\frac{81}{13}$. A kifejezés a minimális értékét akkor veszi fel, ha $3a=2b\ge 0$ és és $2a+3b=9$. Az egyenletrendszert megoldva ez $a=\frac{18}{13}$ és $b=\frac{27}{13}$ esetén teljesül.

Megjegyzés: A feladat másodfokú függvény szélsőértékének meghatározására is visszavezethető.

3449 Jelölje az érintő kör keresett sugarának hosszát r. A kisebb félkörök középpontjai legyenek A és B, a nagy félkör középpontja O, az érintőkör középpontja K.



Használjuk ki, hogy ha két kör érinti egymást, akkor a körök középpontjait összekötő egyenesen rajta van az érintési pont.

Az ABK háromszögben $BK=r+80$, $AK=r+40$, $AB=120$ és $OK=120-r$, valamint $AO=80$ és $BO=40$.

Írjuk fel az AOK és BOK háromszögekre a koszinusztételt:

$$(40+r)^2=80^2+(120-r)^2-2\cdot 80\cdot(120-r)\cdot\cos AOK\sphericalangle,$$

$$(80+r)^2=40^2+(120-r)^2-2\cdot 40\cdot(120-r)\cdot\cos BOK\sphericalangle.$$

Vegyük figyelembe, hogy $AOK\sphericalangle=180°-BOK\sphericalangle$, tehát $\cos AOK\sphericalangle=-\cos BOK\sphericalangle$.

A második egyenlet kétszereséhez hozzáadva az elsőt:

$$(40 + r)^2 + 2 \cdot (80 + r)^2 = 80^2 + 2 \cdot 40^2 + 3 \cdot (120 - r)^2,$$
$$1120r = 38\,400,$$
$$r \approx 34,29.$$

a) A három félkört érintő kör sugara $34,29$ cm.

b) A besatírozott terület kiszámításához az ABK háromszög területéből vonjuk ki a megfelelő körcikkek területét.

Az ABK háromszög oldalai:

$$AB = 120, \quad AK = 40 + 34,29 = 74,29 \quad \text{és} \quad BK = 80 + 34,29 = 114,29.$$

A koszinusztétellel számítsuk ki az AKB szöget:

$$120^2 = 74,29^2 + 114,29^2 - 2 \cdot 74,29 \cdot 114,29 \cdot \cos AKB\sphericalangle \;\Rightarrow\; AKB\sphericalangle \approx 75,75°.$$

A szinusztétellel határozzuk meg az ABK szöget, ami nem lehet tompaszög:

$$\frac{\sin ABK\sphericalangle}{\sin 75,75°} = \frac{74,29}{120} \quad\Rightarrow\quad ABK\sphericalangle \approx 36,87°.$$

A háromszög harmadik szöge: $67,38°$.

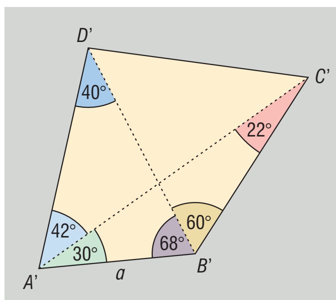
A körcikkek sugarai és középponti szögei rendre:

$$r_1 = 34,29,\ \alpha_1 = 75,75°; \quad r_2 = 40,\ \alpha_2 = 67,38°; \quad r_3 = 80,\ \alpha_3 = 36,87°.$$

A besatírozott terület:

$$T = \frac{74,29 \cdot 114,29 \cdot \sin 75,75°}{2} -$$
$$- 34,29^2 \cdot \pi \cdot \frac{75,75°}{360°} - 40^2 \cdot \pi \cdot \frac{67,38°}{360°} - 80^2 \cdot \pi \cdot \frac{36,87°}{360°} \approx 337,43 \text{ cm}^2.$$

3450 Vegyünk fel a négy tereppont által meghatározott négyszöghöz hasonló négyszöget, amelyben az $A'B'$ oldal a hosszúságú.



Az $A'B'C'$ háromszögnek ismert egy oldala és három szöge, így a szinusztétel segítségével megadható az $A'C'$ oldal:

$$\frac{A'C'}{a} = \frac{\sin 128°}{\sin 22°} \quad\Rightarrow\quad A'C' = a \cdot \frac{\sin 128°}{\sin 22°}.$$

Az $A'B'D'$ háromszögnek is ismert egy oldala és három szöge, így hasonlóan a szinusztétel segítségével megadható az $A'D'$ oldal:

$$\frac{A'D'}{a} = \frac{\sin 68°}{\sin 40°} \quad\Rightarrow\quad A'D' = a \cdot \frac{\sin 68°}{\sin 40°}.$$

Az $A'D'C'$ háromszögben írjuk fel a koszinusztételt:

$$C'D'^2 = A'C'^2 + A'D'^2 - 2 \cdot A'C' \cdot A'D' \cdot \cos 42°,$$

$$C'D' = \sqrt{\left(a \cdot \frac{\sin 128°}{\sin 22°}\right)^2 + \left(a \cdot \frac{\sin 68°}{\sin 40°}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{\sin 128°}{\sin 22°} \cdot a \cdot \frac{\sin 68°}{\sin 40°} \cdot \cos 42°}.$$

A számítások elvégzése után kapjuk: $C'D' \approx 1,41a$, amiből $a \approx \dfrac{C'D'}{1,41}$.

Mivel feladatunkban $CD = 2$ km, a keresett AB távolság: $\dfrac{2}{1,41} \approx 1,42$ km.

3451 A háromszög oldalainak hossza legyen $x-2$, x és $x+2$, valamint az $x+2$ hosszúságú oldallal szemben lévő szöget jelölje α.

A háromszög területét felírva:

$$\frac{x\cdot(x-2)\cdot\sin\alpha}{2}=24 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{48}{x\cdot(x-2)}.$$

A háromszögben felírva a koszinusztételt:

$$(x+2)^2=x^2+(x-2)^2-2x\cdot(x-2)\cdot\cos\alpha,$$

amiből

$$\cos\alpha=\frac{x^2+(x-2)^2-(x+2)^2}{2x\cdot(x-2)}=\frac{x^2-8x}{2x\cdot(x-2)}.$$

Használjuk ki, hogy $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$:

$$\left(\frac{48}{x\cdot(x-2)}\right)^2+\left(\frac{x^2-8x}{2x\cdot(x-2)}\right)^2=1.$$

Az egyenletet rendezve az

$$x^4-16x^2-3072=0$$

másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet kell megoldanunk.

A megoldóképlet alapján adódik:

$$x^2=-48 \quad\text{vagy}\quad x^2=64.$$

Megoldást csak ez utóbbiból kapunk.

Mivel x egy háromszög oldalát jelöli: $x=8$.

A háromszög oldalainak hossza tehát 6, 8 és 10 hosszegység.

Pitagorasz tételének megfordítása alapján ez a háromszög derékszögű, szögeit szögfüggvénnyel számolhatjuk ki.

A háromszög szögei: 90°, 36,87° és 53,13°.

3452 Használjuk a következő összefüggéseket:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad\text{és}\quad 1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha.$$

Innen:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad\text{és}\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Ez alapján a szögfüggvények lehetséges értékei:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{3};$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4},\quad \sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{4},\quad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{5},\quad \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{3};$$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{4},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4},\quad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{5},\quad \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{3};$$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{4},\quad \sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{4},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

3453 Trigonometrikus összefüggések felhasználása után:

a) $$\frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)\cdot(\sin x-\cos x)}=$$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+1}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}=\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1}=\frac{2+1}{2-1}=3.$$

b) $$\frac{1-\sin^4 x-\cos^4 x}{\cos^4 x}=\frac{1-\left(1-\cos^2 x\right)^2-\cos^4 x}{\cos^4 x}=\frac{1-1+2\cdot\cos^2 x-\cos^4 x-\cos^4 x}{\cos^4 x}=$$

$$=\frac{2\cdot\cos^2 x\cdot(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}=\frac{2\cdot\sin^2 x}{\cos^2 x}=2\cdot\operatorname{tg}^2 x=8.$$

3454 *a)* Alakítsuk át a $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ egyenlőséget az addíciós tétel alapján:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$
$$0=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$0=\cos(\alpha+\beta).$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

Mivel α és β háromszög szögei, $k=0$, tehát $\alpha+\beta=90°$, vagyis a háromszög derékszögű, és $\gamma=90°$.

b) Az egyenlet rendezése után alkalmazzuk a $\cos 2x$-re vonatkozó addíciós tételt:

$$\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta,$$
$$\cos 4\alpha=\cos 4\beta.$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $4\alpha=4\beta+2k\pi$, vagy ha $4\alpha=-4\beta+2l\pi$, ahol $k, l\in\mathbb{Z}$.

I. eset: $4\alpha=4\beta+2k\pi \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\beta+\frac{1}{2}\cdot k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Mivel α és β háromszög szögei, k értéke 0 vagy 1 lehet.
Ha $k=0$, akkor $\alpha=\beta$.
Ha $k=1$, akkor $\alpha=\beta+90°$.

II. eset: $4\alpha=-4\beta+2l\pi \quad\Leftrightarrow\quad \alpha+\beta=\frac{1}{2}\cdot l\pi\ (l\in\mathbb{Z})$.

Mivel α és β háromszög szögei, l értéke csak 1 lehet, és ekkor $\alpha+\beta=90°$.

A feladat feltételének megfelelő háromszög α és β szögére a következő összefüggések közül teljesül valamelyik:
(1) $\alpha=\beta$, vagyis a háromszög egyenlő szárú;
(2) $\alpha=\beta+90°$, vagyis a háromszög α szöge tompaszög, és 90°-kal nagyobb β-nál;
(3) $\alpha+\beta=90°$, vagyis a háromszög derékszögű, és $\gamma=90°$.

3455 A szinusztétel értelmében $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$. Elég tehát a szögek szinuszainak arányát megadnunk. (Ezek biztosan pozitív értékek, hiszen tangenseik is pozitívak.)

Ismert, hogy

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}, \qquad \sin\beta = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta}}, \qquad \sin\gamma = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\gamma}{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}.$$

A feladatunk az, hogy megadjuk $\mathrm{tg}^2\alpha$, $\mathrm{tg}^2\beta$ és $\mathrm{tg}^2\gamma$ pontos értékét.

Mivel a háromszög szögeinek összege 180º, így

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}(180^\circ - \alpha - \beta) = -\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}.$$

A $\mathrm{tg}\,\alpha : \mathrm{tg}\,\beta : \mathrm{tg}\,\gamma = 2:3:4$ arányból:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{3}{2}\mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{és} \quad \mathrm{tg}\,\gamma = 2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Az előző egyenletben ezeket felhasználva $\mathrm{tg}\,\alpha$-ra a következő összefüggést kapjuk:

$$2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{3}{2}\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\frac{3}{2}\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{5\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha},$$

$$4\cdot\mathrm{tg}\,\alpha - 6\,\mathrm{tg}^3\alpha = -5\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$9\cdot\mathrm{tg}\,\alpha - 6\,\mathrm{tg}^3\alpha = 0,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot(3 - 2\,\mathrm{tg}^2\alpha) = 0.$$

A szorzat első tényezője nyilvánvalóan nem lehet 0, tehát $\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{3}{2}$.

Ez alapján β és γ tangenseinek négyzetét is kiszámolhatjuk:

$$\mathrm{tg}^2\beta = \left(\frac{3}{2}\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2 = \frac{9}{4}\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{27}{8}, \text{ és}$$

$$\mathrm{tg}^2\gamma = (2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha)^2 = 4\cdot\mathrm{tg}^2\alpha = 6.$$

A háromszög szögeinek szinuszai:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad \sin\beta = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{27}{8}}{1+\frac{27}{8}}} = \sqrt{\frac{27}{35}},$$

$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\gamma}{1+\mathrm{tg}^2\gamma}} = \sqrt{\frac{6}{1+6}} = \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Ez alapján:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{27}{35}} : \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Az arányt $\sqrt{\frac{35}{3}}$-dal bővítve kapjuk, hogy a háromszög oldalai hosszának aránya: $\sqrt{7} : 3 : \sqrt{10}$.

3456 Mivel

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2},$$

valamint

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 1 - 2\cdot\sin^2 2x,$$

az egyenlet a következő alakba írható:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x,$$

$$1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - 2\cdot\sin^2 2x,$$

$$2 - \sin^2 2x = 2 - 4\cdot\sin^2 2x,$$

$$\sin^2 2x = 0.$$

Az egyenlet megoldása:

$$x = k\cdot\frac{\pi}{2}\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

3457 *a)* Az egyenlet jobb oldalát alakítsuk át a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ összefüggés segítségével, majd alakítsunk szorzattá, és redukáljuk nullára az egyenletet:

$$\sin x - \cos x = \sin x\cdot\cos 2x,$$

$$\sin x - \cos x = \sin x\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x),$$

$$\sin x - \cos x = \sin x\cdot(\cos x - \sin x)\cdot(\cos x + \sin x),$$

$$(\sin x - \cos x)\cdot\left[1 + \sin x\cdot(\sin x + \cos x)\right] = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)\cdot(1 + \sin^2 x + \sin x\cdot\cos x) = 0.$$

A szorzat pontosan akkor nulla, ha

I. eset:

$$\sin x - \cos x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{tg} x = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$1 + \sin^2 x + \sin x\cdot\cos x = 0,$$

$$\cos^2 x + 2\cdot\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x = 0,\quad /:\cos^2 x \neq 0$$

$$2\cdot\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa negatív, tehát nincs olyan valós x, amely kielégítené ezt az egyenletet.

Az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) A szinusz- és koszinuszfüggvény periódusa 2π, tehát elegendő a következő egyenletet megoldanunk:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + 2\cdot\sin x.$$

Az addíciós tételek alapján:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + 2\cdot\sin x,$$

$$\cos 2x + 3\cdot\sin x = 1 + 2\cdot\sin x,$$

$$1 - 2\cdot\sin^2 x + \sin x = 1,$$

$$\sin x\cdot(1 - 2\cdot\sin x) = 0.$$

A szorzat akkor nulla, ha

I. eset:

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

II. eset:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2l\pi,\ x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \ \ (l, n \in \mathbb{Z}).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2l\pi, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \quad (k, l, n \in \mathbb{Z}).$$

3458 Alakítsuk át a kifejezést:

$$\cos^4 x \cdot \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \sin^4 x = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2x.$$

Mivel $-1 \le \sin 2x \le 1$, a kifejezés minimális értéke 0, maximális értéke $\frac{1}{4}$.

A kifejezés a minimumát ott veszi fel, ahol $\sin 2x = 0$, vagyis $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

A kifejezés a maximumát ott veszi fel, ahol $\sin 2x = \pm 1$, vagyis $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$.

3459 Ha $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, vagyis $\alpha = 120°$, akkor az egyenlet elsőfokú:

$$-4x + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1.$$

Ekkor az egyenletnek egy valós gyöke van.

Ha az egyenlet másodfokú $(\alpha \ne 120°)$, akkor van két valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív:

$$D = 16 - 4 \cdot (2 \cdot \cos\alpha + 1) \cdot (4 \cdot \cos\alpha - 2) = 16 - 8 \cdot (4 \cdot \cos^2\alpha - 1) = 24 - 32 \cdot \cos^2\alpha.$$

A következő egyenlőtlenség megoldásait keressük, ha α konvex szög:

$$24 - 32 \cdot \cos^2\alpha > 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} > |\cos\alpha|.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség megoldása:

$$30° + k \cdot 180° \le \alpha \le 150° + k \cdot 180° \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Összefoglalva: az egyenletnek két valós megoldása van azokra a konvex α szögekre, amelyre

$$30° < \alpha < 150° \quad \text{és} \quad \alpha \ne 120°.$$