11.2. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

Hatványozás és gyökvonás (emlékeztető) – megoldások

3161 *a)* a^{11}; *b)* b^{-4}; *c)* x^{23}; *d)* y^{24}; *e)* $x^{18}\cdot y^{-2}$; *f)* $a^{24}\cdot b^{-4}$;
g) $a^{23}\cdot b^{12}$; *h)* $a^{-3}\cdot b^{-7}$; *i)* $a^{-24}\cdot b^{14}$; *j)* $a^{55}\cdot b^{25}$.

3162 *a)* $x>0,\ \sqrt{\dfrac{1}{x^3}}=\sqrt{x^{-3}}$; *b)* $y\in\mathbb{R},\ y\neq 0,\ \dfrac{1}{y}=y^{-1}$;

c) $a>0,\ a$; *d)* $a, b\in\mathbb{R},\ a, b\neq 0,\ \sqrt[3]{\dfrac{b^7}{a}}=b^2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$;

e) $a>0,\ \sqrt[12]{a^{29}}=a^2\cdot\sqrt[12]{a^5}$; *f)* $a, b>0,\ \sqrt[12]{\dfrac{b^{29}}{a^{27}}}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\sqrt[12]{\dfrac{b^5}{a^3}}$;

g) $a, b>0,\ \sqrt[24]{a^{17}\cdot b^{36}}=b\cdot\sqrt[24]{a^{17}\cdot b^{12}}$;

h) $a, b>0,\ \sqrt[60]{\dfrac{b^{159}}{a^{177}}}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\sqrt[60]{\dfrac{b^{39}}{a^{57}}}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\sqrt[20]{\dfrac{b^{13}}{a^{19}}}$.

3163 *a)* $6^9\cdot 9^3=2^9\cdot 3^{15}\ >\ 8\cdot 18^7=2^{10}\cdot 3^{14}$; *b)* $\sqrt[3]{7^{53}}=7^{17}\cdot\sqrt[3]{49}\ <\ 7^{18}=7^{17}\cdot\sqrt[3]{7^3}$;

c) $\sqrt[6]{60^{2010}}=\sqrt[6]{2^{4020}\cdot 3^{2010}\cdot 5^{2010}}\ =\ \sqrt[6]{\left[\left(2^{10}\right)^{201}\cdot 3^{1005}\cdot 5^{1005}\right]^2}=\sqrt[6]{2^{4020}\cdot 3^{2010}\cdot 5^{2010}}$;

d) $\sqrt[3]{100^{-4}}=\sqrt[3]{10^{-8}}=\sqrt[15]{10^{-40}}\ <\ \sqrt[5]{10^{-9}}=\sqrt[15]{10^{-27}}$;

e) $20^{-5}\cdot 16^{-8}=2^{-42}\cdot 5^{-5}\ <\ 2^{-14}\cdot 5^{-14}\cdot\dfrac{2^{-27}}{5^{-9}}=2^{-41}\cdot 5^{-5}$;

f) $\sqrt{45^{-7}\cdot 75^{-21}}=\sqrt{5^{-7}\cdot 3^{-14}\cdot 3^{-21}\cdot 5^{-42}}=\sqrt{3^{-35}\cdot 5^{-49}}=$
$=3^{-17}\cdot 5^{-24}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{15}}\ >\ 3^{-17}\cdot 5^{-25}=3^{-17}\cdot 5^{-24}\cdot\dfrac{1}{5}$.

3164 *a)* $\dfrac{3^{-5}\cdot 10^{-6}\cdot 21^{-5}\cdot 25^{-2}}{6^{-7}\cdot 15^{-5}\cdot 35^{-5}}=\dfrac{3^{-5}\cdot 2^{-6}\cdot 5^{-6}\cdot 3^{-5}\cdot 7^{-5}\cdot 5^{-4}}{2^{-7}\cdot 3^{-7}\cdot 3^{-5}\cdot 5^{-5}\cdot 5^{-5}\cdot 7^{-5}}=18$;

b) $\left(\dfrac{6^{-6}\cdot 10^{-2}}{9^{-3}\cdot 200^{-1}\cdot 32^{-1}}\right)^{100}=\left(\dfrac{2^{-6}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{-2}\cdot 5^{-2}}{3^{-6}\cdot 2^{-3}\cdot 5^{-2}\cdot 2^{-5}}\right)^{100}=1$;

c) $\sqrt{\dfrac{24^{-4}\cdot 36^{-3}}{18^{-4}\cdot 256^{-1}\cdot 72^{-2}}}=\sqrt{\dfrac{2^{-12}\cdot 3^{-4}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 2^{-8}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-4}}}=3$;

d) $\sqrt[15]{\dfrac{2000^{-20}\cdot 25^{11}}{(-800)^{-19}}}=\sqrt[15]{\dfrac{2^{-80}\cdot 5^{-60}\cdot 5^{22}}{-2^{-95}\cdot 5^{-38}}}=-2$;

e) $\sqrt[5]{45^{-12}} : \left(\sqrt[5]{15^{-7}} \cdot \sqrt[5]{27^{-4}}\right) = \sqrt[5]{\dfrac{3^{-24} \cdot 5^{-12}}{3^{-7} \cdot 5^{-7} \cdot 3^{-12}}} = \dfrac{1}{15};$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{100^{-5}} \cdot \sqrt[4]{20^{-3}} \cdot \sqrt[12]{5^{7}}}{\sqrt[6]{1000^{-5}} \cdot \sqrt[3]{2^{-7}}} = \sqrt[12]{\dfrac{100^{-20} \cdot 20^{-9} \cdot 5^{7}}{1000^{-10} \cdot 2^{-28}}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^{-40} \cdot 5^{-40} \cdot 2^{-18} \cdot 5^{-9} \cdot 5^{7}}{2^{-30} \cdot 5^{-30} \cdot 2^{-28}}} = \dfrac{1}{5}.$

3165 *a)* $\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = 4;$

b) $\sqrt[4]{28+16\cdot\sqrt{3}} - \sqrt[4]{28-16\cdot\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\left(4+2\cdot\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt[4]{\left(4-2\cdot\sqrt{3}\right)^2} =$

$= \sqrt{4+2\cdot\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = 2;$

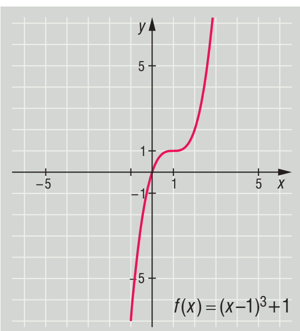
c) $\sqrt[3]{8+3\cdot\sqrt[3]{49}+3\cdot\sqrt[3]{7}} - \sqrt[3]{15+6\cdot\sqrt[3]{49}+12\cdot\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{7}+1\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{7}+2\right)^3} = -1;$

d) $\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\cdot\sqrt{3}-10} = \sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3}+9+3\cdot\sqrt{3}+1} - \sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3}-9+3\cdot\sqrt{3}-1} =$

$= \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3} = 2.$

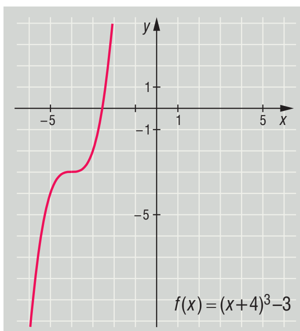
Hatványfüggvények és gyökfüggvények – megoldások

3166 *a)*



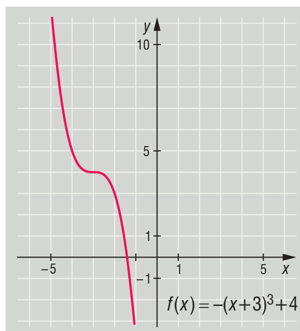
$x \in \mathbb{R};$

b)



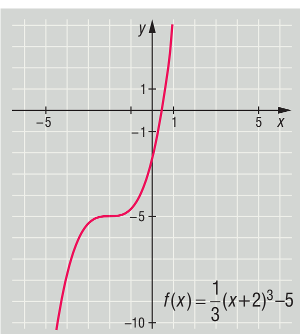
$x \in \mathbb{R};$

c)



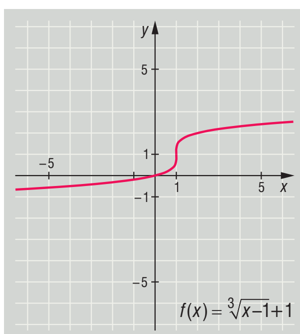
$x \in \mathbb{R};$

d)



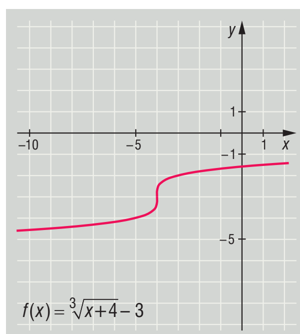
$x \in \mathbb{R};$

e)



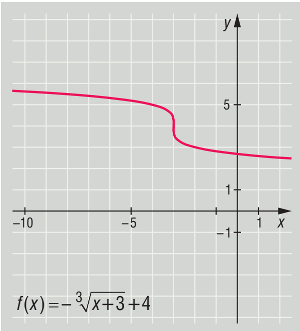
$x \in \mathbb{R};$

f)



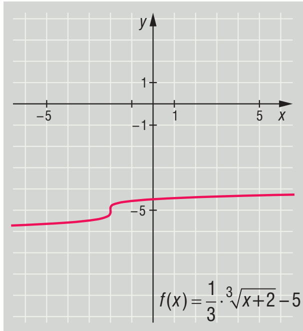
$x \in \mathbb{R};$

g)



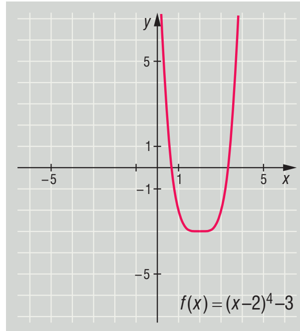
$x\in\mathbb{R}$;

h)



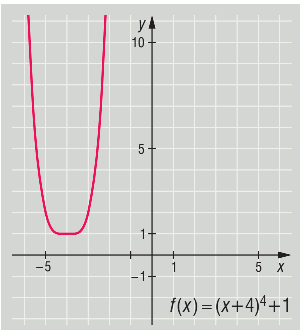
$x\in\mathbb{R}$;

i)



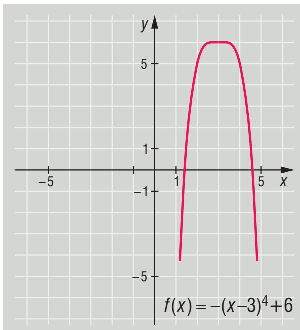
$x\in\mathbb{R}$;

j)



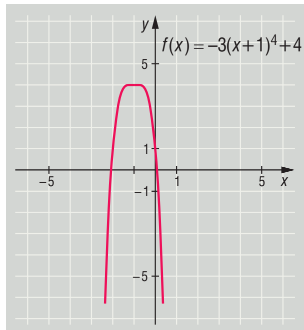
$x\in\mathbb{R}$;

k)



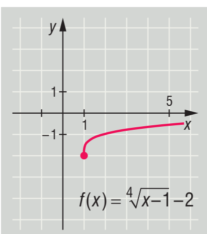
$x\in\mathbb{R}$;

l)



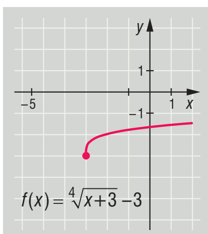
$x\in\mathbb{R}$;

m)



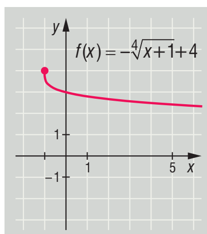
$x\geq 1,\ x\in\mathbb{R}$;

n)



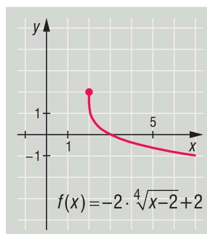
$x\geq -3,\ x\in\mathbb{R}$;

o)



$x\geq -1,\ x\in\mathbb{R}$;

p)



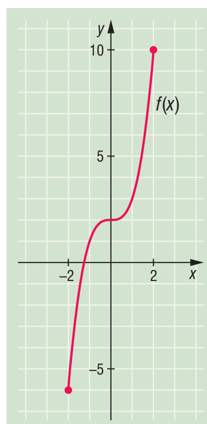
$x\geq 2,\ x\in\mathbb{R}$.

3167 *a)* Értékkészlete: $[-6;\,10]$.

Menete: a függvény növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x=-2$, értéke: $y=-6$;
maximumának helye: $x=2$, értéke: $y=10$.

Zérushelye: $x=\sqrt[3]{-2}$.



b) Értékkészlete: $[-6; 10]$.

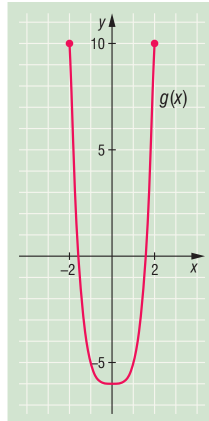
Menete: $[-2; 0]$-ban csökken,

$[0; 2]$-ban növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = -6$;

maximumának helye: $x = -2$ és $x = 2$, értéke: $y = 10$.

Zérushelyek: $x = \sqrt[4]{6}$ és $x = -\sqrt[4]{6}$.



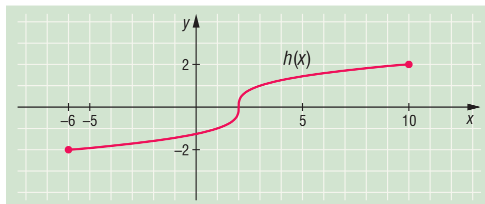
c) Értékkészlete: $[-2; 2]$.

Menete: a függvény növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -6$, értéke: $y = -2$;

maximumának helye: $x = 10$, értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $x = 2$.



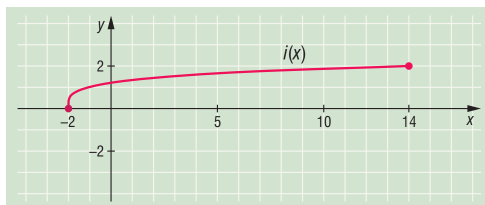
d) Értékkészlete: $[0; 2]$.

Menete: a függvény növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -2$, értéke: $y = 0$;

maximumának helye: $x = 14$, értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $x = -2$.



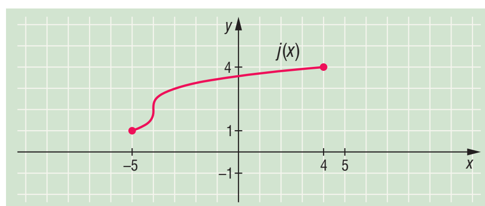
e) Értékkészlete: $[1; 4]$.

Menete: a függvény növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -5$, értéke: $y = 1$;

maximumának helye: $x = 4$, értéke: $y = 4$.

Zérushelye: nincs.



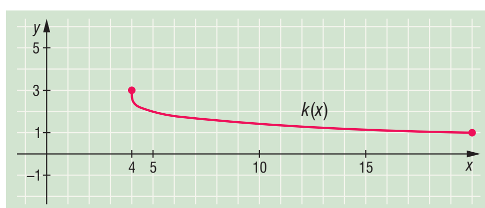
f) Értékkészlete: $[1; 3]$.

Menete: a függvény csökken.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 20$, értéke: $y = 1$;

maximumának helye: $x = 4$, értéke: $y = 3$.

Zérushelye: nincs.

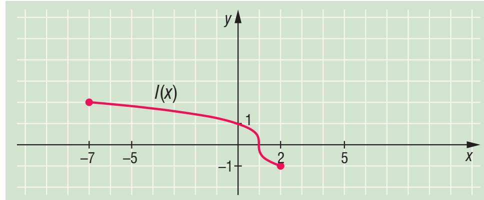


g) Értékkészlete: $[-1; 2]$.

Menete: a függvény csökken.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 2$,
értéke: $y = -1$;
maximumának helye: $x = -7$,
értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $x = 1$.

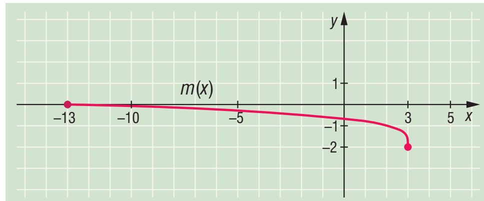


h) Értékkészlete: $[-2; 0]$.

Menete: a függvény csökken.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 3$,
értéke: $y = -2$;
maximumának helye: $x = -13$,
értéke: $y = 0$.

Zérushelye: $x = -13$.



3168 *a)* A függvény átalakítva:

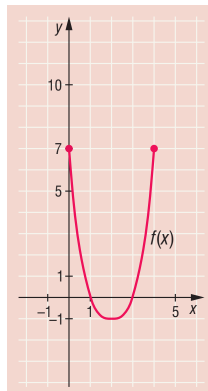
$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 - 1, & \text{ha} \quad x \geq 2, \\ -(x-2)^3 - 1, & \text{ha} \quad x < 2. \end{cases}$$

Értékkészlete: $[-1; 7]$.

Menete: $[0; 2]$-ban csökken,
$[2; 4]$-ban növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 2$,
értéke: $y = -1$;
maximumának helye: $x = 0$ és $x = 4$,
értéke: $y = 7$.

Zérushelyei: $x = 1$ és $x = 3$.



b) A függvény átalakítva:

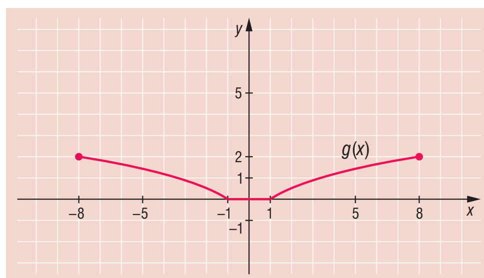
$$g(x) = \begin{cases} -2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2, & \text{ha} \quad x < -1, \\ 0, & \text{ha} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2, & \text{ha} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Értékkészlete: $[0; 2]$.

Menete: $[-8; -1]$-ban csökken,
$[-1; 1]$-ban konstans,
$[1; 8]$-ban növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $-1 \leq x \leq 1$,
értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = -8$ és $x = 8$,
értéke: $y = 2$.

Zérushelye: $-1 \leq x \leq 1$.



c) A függvény átalakítva:

$$h(x)=\left|(x-1)^3-1\right|=\begin{cases}(x-1)^3-1, & \text{ha} \quad x\geq 2,\\ -(x-1)^3+1, & \text{ha} \quad x<2.\end{cases}$$

Értékkészlete: $[0;\,9]$.

Menete: $[-1;\,2]$-ban csökken,
$[2;\,3]$-ban növekszik.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x=2$,
értéke: $y=0$;
maximumának helye: $x=-1$,
értéke: $y=9$.

Zérushelye: $x=2$.

Törtkitevőjű hatvány – megoldások

3169 *a)* 8; *b)* 9; *c)* 4; *d)* 3; *e)* $\frac{1}{5}$; *f)* $\frac{1}{2}$;
g) $\frac{1}{1000}$; *h)* $\frac{1}{100}$; *i)* 25; *j)* 1000. *k)* $\frac{8}{27}$; *l)* $\frac{2}{3}$.

3170 *a)* $\sqrt[8]{5}$; *b)* $\sqrt[7]{13^2}$; *c)* $\sqrt[11]{10^3}$; *d)* $\sqrt[3]{11^7}$; *e)* $\sqrt[3]{15^{-2}}$; *f)* $\sqrt[9]{23^{-4}}$;
g) $\sqrt[7]{7^{-20}}$; *h)* $\sqrt[21]{41^{-2}}$; *i)* $\sqrt[10]{9^{-7}}$; *j)* $\sqrt[100]{10^{-23}}$; *k)* $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$; *l)* $\frac{2}{\sqrt[3]{b^2}}$.

3171 *a)* $5^{\frac{1}{10}}$; *b)* $5^{\frac{4}{7}}$; *c)* $5^{\frac{1}{6}}$; *d)* $5^{\frac{6}{11}}$;
e) $\sqrt[5]{5^{-1}}=5^{-\frac{1}{5}}$; *f)* $\sqrt[8]{5^{-3}}=5^{-\frac{3}{8}}$; *g)* $\sqrt[3]{5^{11}}=5^{\frac{11}{3}}$; *h)* $\sqrt[12]{5^3\cdot 5^2}=5^{\frac{5}{12}}$;

i) $\sqrt[12]{\dfrac{5^9}{5^4\cdot 5^2}}=\sqrt[12]{5^3}=5^{\frac{1}{4}}$; *j)* $\dfrac{\sqrt{\sqrt[12]{5^4\cdot 5^3}}}{5}=\sqrt[24]{5^7}\cdot 5^{-1}=5^{-\frac{17}{24}}$;

k) $\sqrt[20]{\dfrac{\left(5^2\right)^4\cdot\left(5^3\right)^{10}}{\left(5^5\right)^5}}=\sqrt[20]{5^{13}}=5^{\frac{13}{20}}$; *l)* $\dfrac{\sqrt[4]{5\cdot\sqrt[6]{5^3}}}{\sqrt[6]{5\cdot\sqrt[4]{5^3}}}=\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[6]{5^9}}}{\sqrt[6]{\sqrt[4]{5^7}}}=\sqrt[24]{5^2}=5^{\frac{1}{12}}$.

3172 *a)* $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{-\frac{5}{6}}}=\dfrac{a^{\frac{14}{12}}}{a^{-\frac{1}{12}}}=a^{\frac{15}{12}}=a^{\frac{5}{4}}$; *b)* $\dfrac{b^{-\frac{3}{5}}\cdot b^{-\frac{3}{10}}}{b^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{7}{10}}}=\dfrac{b^{-\frac{9}{10}}}{b^{-\frac{12}{10}}}=b^{\frac{3}{10}}$;

c) $\dfrac{c^{\frac{1}{12}}\cdot c^{-\frac{1}{6}}}{c^{-\frac{1}{6}}\cdot c^{-\frac{5}{12}}}=\dfrac{c^{\frac{1}{12}}}{c^{-\frac{5}{12}}}=c^{\frac{1}{2}}$; *d)* $\dfrac{\left(d^{-\frac{1}{2}}\cdot d^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{7}{5}}}{\left(d^{-\frac{2}{5}}\cdot d^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{d^{\frac{7}{10}}\cdot d^{-\frac{14}{15}}}{d^{\frac{4}{15}}\cdot d^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{d^{-\frac{7}{30}}}{d^{\frac{23}{30}}}=d^{-1}$.

3173 *a)* $4^{-\frac{4}{3}} = 2^{-\frac{8}{3}} < \sqrt[3]{32^{-1}} = 2^{-\frac{5}{3}} < \sqrt[5]{8^{-2}} = 2^{-\frac{6}{5}} < \sqrt[8]{8^{-3}} = 2^{-\frac{9}{8}} < 2^{-\frac{3}{5}};$

b) $\sqrt{27^{-3}} = 3^{-\frac{9}{2}} < \sqrt[5]{81^{-3}} = 3^{-\frac{12}{5}} < \sqrt[7]{3^{-6}} = 3^{-\frac{6}{7}} < 3^{-\frac{5}{7}} < \sqrt[3]{9^{-1}} = 3^{-\frac{2}{3}};$

c) $25^{-\frac{7}{5}} = 5^{-\frac{14}{5}} < \sqrt{125^{-1}} = 5^{-\frac{3}{2}} < \sqrt[4]{5^{-5}} = 5^{-\frac{5}{4}} < \sqrt[3]{25^{-1}} = 5^{-\frac{2}{3}} < 5^{-\frac{2}{5}};$

d) $7^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[10]{7^6}} < 7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[10]{7^5}} < \sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{7^3} < \sqrt[3]{49} = \sqrt[12]{7^8} < \sqrt[3]{343} = \sqrt[12]{7^{12}}.$

3174 *a)* $2^{\frac{4}{5}} = \left(2^2\right)^{\frac{2}{5}} = a;$

b) $16^{\frac{2}{5}} = \left(4^2\right)^{\frac{2}{5}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^2 = a^2;$

c) $4^{\frac{1}{3}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{5}{6}};$

d) $8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{4}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{15}{8}} = a^{\frac{15}{8}};$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{4}} = 4^{-\frac{1}{8}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{5}{16}} = a^{-\frac{5}{16}};$

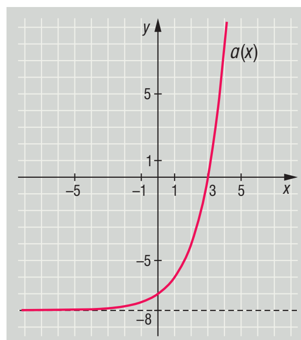
f) $32^{-\frac{2}{3}} = \left(2^5\right)^{-\frac{2}{3}} = 4^{-\frac{5}{3}} = \left(4^{\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{25}{6}} = a^{-\frac{25}{6}}.$

Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális függvény – megoldások

3175 *a)* Értékkészlete: $a(x) > -8$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

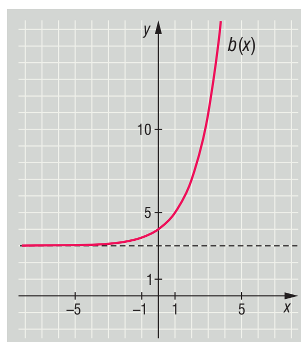
Zérushelye: $x = 3$.



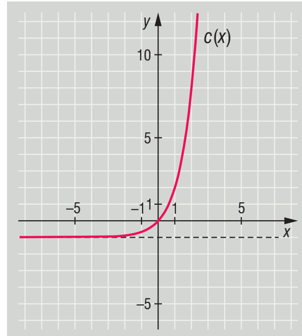
b) Értékkészlete: $b(x) > 3$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

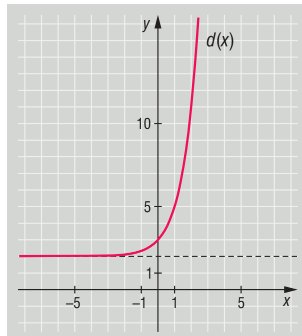
Zérushelye: nincs.



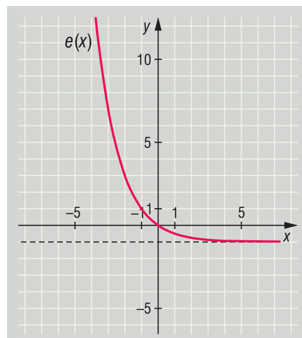
c) Értékkészlete: $c(x) > -1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 0$.



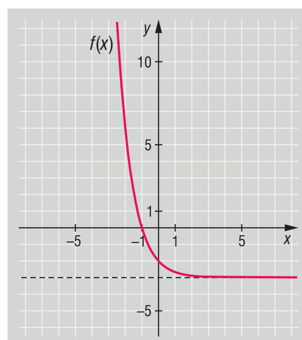
d) Értékkészlete: $d(x) > 2$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: nincs.



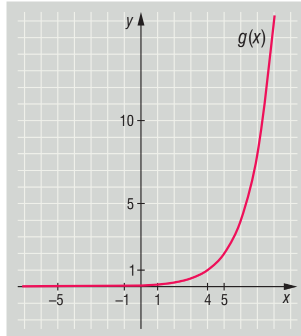
e) Értékkészlete: $e(x) > -1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 0$.



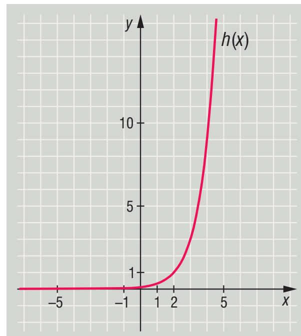
f) Értékkészlete: $f(x) > -3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = -1$.



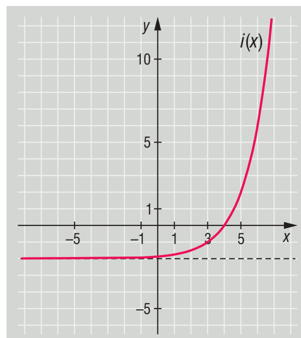
g) Értékkészlete: $g(x) > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: nincs.



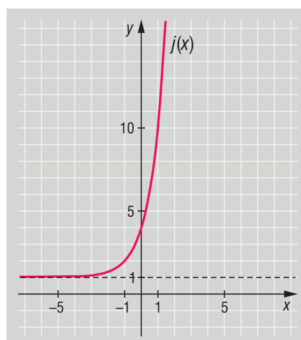
h) Értékkészlete: $h(x) > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: nincs.



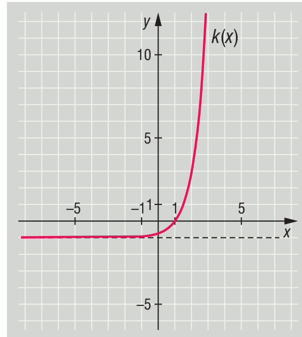
i) Értékkészlete: $i(x) > -2$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 4$.



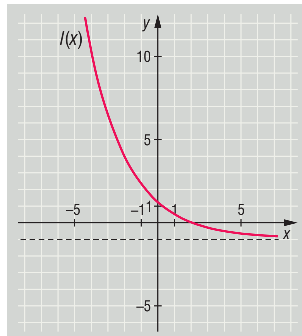
j) Értékkészlete: $j(x) > 1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: nincs.



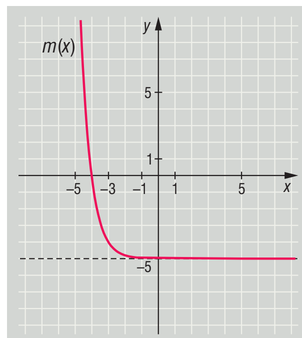
k) Értékkészlete: $k(x) > -1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 1$.



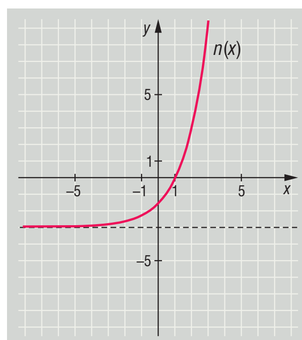
l) Értékkészlete: $l(x) > -1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 2$.



m) Értékkészlete: $m(x) > -5$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = -4$.



n) Értékkészlete: $n(x) > -3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 1$.



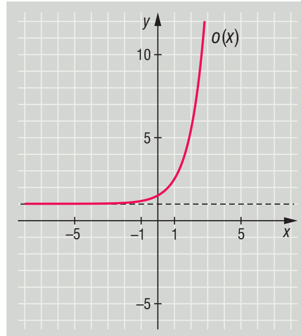
o) Az $o(x)$ függvény átalakítható a következőképpen:

$$o(x) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3^{x-1} + 1 = \frac{1}{2} \cdot 3^x + 1.$$

Értékkészlete: $o(x) > 1$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

Zérushelye: nincs.



p) A $p(x)$ függvény átalakítható a következőképpen:

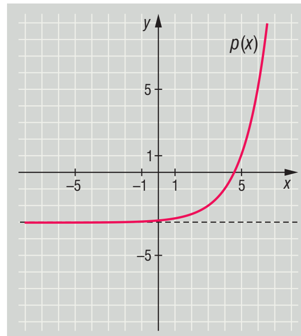
$$p(x) = \frac{2^{x-1}}{2^2} - 3 = 2^{x-3} - 3.$$

Értékkészlete: $p(x) > -3$.

Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.

Zérushelye: $x \approx 4{,}6$.

(Később, ha a logaritmust tanuljuk, ezt az értéket már ki tudjuk számítani.)



3176 *a)* $a(x) = 2^x - 2$;

b) $b(x) = 2^x - 4$;

c) $c(x) = 2^{x-1}$;

d) $d(x) = 2^{x+3}$;

e) $e(x) = 2^{x+1} + 1$;

f) $f(x) = 2^{x-2} - 8$;

g) $g(x) = 2^{-x} - 2,\ g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$;

h) $h(x) = 2^{-x-2} + 1,\ h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 1$;

i) $i(x) = 2^{3-x} - 4,\ i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 4$;

j) $j(x) = 2^{-x-3} - 8,\ j(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 8$.

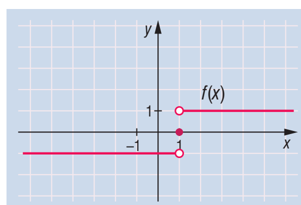
3177 *a)* $t(0) = 22$ °C, $t(6) \approx 33$ °C.

b) $t(15) \approx 60{,}76$ °C, tehát túllépte a 60 °C-ot.

c) $t(8) \approx 37{,}82$ °C. $t(12) \approx 49{,}59$ °C, ami 31,1%-os növekedés.

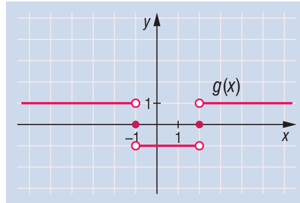
3178 *a)* A függvény átalakítva:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x > 1, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 1, \\ -1, & \text{ha} \quad x < 1. \end{cases}$$



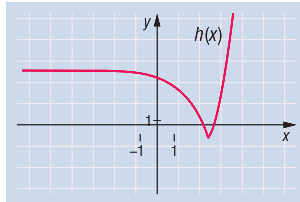
b) A függvény átalakítva:

$$g(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x<-1 \text{ vagy } x>2, \\ 0, & \text{ha} \quad x=-1 \text{ vagy } x=2, \\ -1, & \text{ha} \quad -1<x<2. \end{cases}$$



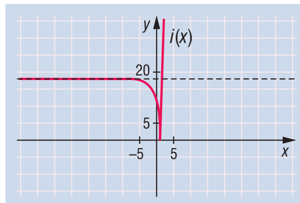
c) A függvény átalakítva:

$$h(x)=\begin{cases} 2^{x-1}-4, & \text{ha} \quad x\ge 3, \\ -2^{x-1}+4, & \text{ha} \quad x<3. \end{cases}$$



d) A függvény átalakítva:

$$i(x)=2\cdot\left|3^{x+1}-9\right|=\begin{cases} 2\cdot(3^{x+1}-9), & \text{ha} \quad x\ge 1, \\ -2\cdot(3^{x+1}-9), & \text{ha} \quad x<1. \end{cases}$$



3179 *a)* Ábrázolás előtt rendezve az egyenletet:

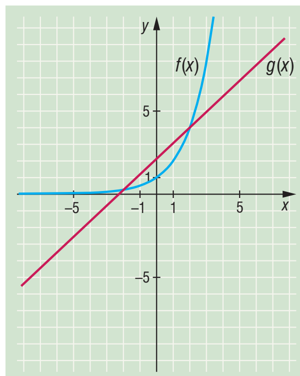
$$2^x=\frac{15}{16}\cdot x+\frac{34}{16}.$$

Legyen

$$f(x)=2^x \quad \text{és} \quad g(x)=\frac{15}{16}\cdot x+\frac{34}{16}.$$

Az ábráról leolvasott megoldások, ellenőrzés után:

$$x_1=2 \quad \text{és} \quad x_2=-2.$$



b) Ábrázolás előtt átalakítva:

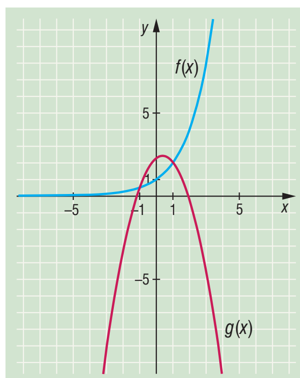
$$2^x=-x^2+\frac{3}{4}\cdot x+\frac{9}{4} \quad \text{azaz} \quad 2^x=-\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{153}{64}.$$

Legyen

$$f(x)=2^x \quad \text{és} \quad g(x)=-\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{153}{64}.$$

Az ábráról leolvasott megoldások, ellenőrzés után:

$$x_1=-1 \quad \text{és} \quad x_2=1.$$



Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek – megoldások

3180 *a)* $x=\frac{5}{4}$; *b)* $x=0$; *c)* $x=-\frac{1}{4}$; *d)* $x=\frac{1}{2}$; *e)* $x=\frac{7}{2}$; *f)* $x=1$;
g) $x=9$; *h)* $x=2$; *i)* $x=-4$; *j)* $x=-1$; *k)* $x=0$; *l)* $x=5$;
m) $x=3$; *n)* $x=-5$; *o)* $x=\frac{13}{2}$; *p)* $x=\frac{1}{5}$; *q)* $x=\frac{7}{2}$; *r)* $x=-\frac{5}{2}$;
s) $x=\frac{6}{5}$; *t)* $x=6$; *u)* $x=0$.

3181 *a)* $x=\frac{1}{2}$; *b)* $x_1=6$ vagy $x_2=0$; *c)* $x_1=5$ és $x_2=-7$;
d) $x_1=\frac{5}{2}$ és $x_2=-\frac{5}{2}$; *e)* $x=-\frac{1}{5}$; *f)* $x=-3$;
g) Nincs megoldás. *h)* $x=-4$; *i)* $x=-2$.

3182 *a)* $x=-1$; *b)* $x=\frac{1}{4}$; *c)* $x=2$; *d)* $x=-\frac{2}{3}$; *e)* $x=2$; *f)* $x=1$.

3183 *a)* $x=0$; *b)* $x=-2$; *c)* $x=1$; *d)* $x=4$; *e)* $x=3$; *f)* $x=2$;
g) $x=3$; *h)* $x=4$.

3184 *a)* $x_1=1,\ x_2=0$; *b)* $x_1=2,\ x_2=1$; *c)* $x_1=2,\ x_2=1$;
d) $x_1=3,\ x_2=-1$; *e)* $x_1=1,\ x_2=-2$; *f)* $x_1=1,\ x_2=-2$;
g) $x=5$; *h)* $x=-1$; *i)* $x_1\approx 1{,}305,\ x_2=1$;
j) $x=-1$; *k)* $x=0$; *l)* $x=-1$.

3185 *a)* $x=2,\ y=1$; *b)* $x=0,\ y=3$; *c)* $x=\frac{1}{2},\ y=2$;
d) $x=2,\ y=1$; *e)* $x=2,\ y=0$; *f)* $x=1,\ y=1$;
g) $x=5,\ y=-7$; *h)* $x=1,\ y=\frac{1}{2}$; *i)* $x=4,\ y=5$;
j) $x=3,\ y=1$.

3186 *a)* $x<5$; *b)* $x\ge\frac{1}{2}$; *c)* $x\ge\frac{3}{5}$; *d)* $x<-\frac{1}{3}$; *e)* $x>-\frac{8}{3}$; *f)* $x\le\frac{5}{9}$;
g) $x>\frac{25}{17}$; *h)* $x\le-2$; *i)* $x<2$; *j)* $x>\frac{32}{17}$.

3187 *a)* $x=3$; *b)* $x=4$; *c)* $x=1$; *d)* $x=-\frac{7}{11}$; *e)* $x=-4$; *f)* $x=3$;
g) $x=2$; *h)* $x=-3$; *i)* $x_1=1,\ x_2=-2$; *j)* $x_1=4,\ x_2=-2$;
k) $x=-1$; *l)* $x=\frac{2}{3}$; *m)* $x=-1$; *n)* $x=-\frac{1}{3}$; *o)* $x=2$; *p)* $x=4$.

3188 *a)* $x_1 = 7,\ x_2 = 2;$ *b)* $x_1 = 5,\ x_2 = -3;$ *c)* $x_1 = 3,\ x_2 = -3;$
d) $x_1 = 4,\ x_2 = 1;$ *e)* $x_1 = 5,\ x_2 = -5;$ *f)* $x = 64;$
g) $x = 2;$ *h)* $x = 1;$ *i)* $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$
j) $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi,\ k, l \in \mathbb{Z};$ *k)* $x = 5.$
l) $x = -17;$ *m)* $x = 3;$ *n)* $x_{1,2} = \pm\sqrt{2};$
o) $x_1 = 1,\ x_2 = -4;$ *p)* $x_1 = 1,\ x_2 = -3.$

3189 *a)* A hatványokat átírva:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad 45\cdot 3^x - \frac{7}{2}\cdot 2^y = 17 \\ &(2)\quad 12\cdot 3^x + \frac{5}{8}\cdot 2^y = 17 \end{aligned}\right\},\quad \text{ahonnan}\quad 3^x = 1 \text{ és } 2^y = 8,\quad \text{a megoldás: } x = 0,\ y = 3.$$

b) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt a két egyenletből:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad 2x - 2 + y = -\frac{2}{3} \\ &(2)\quad x + 3y - 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\},\quad \text{a megoldás: } x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}.$$

c) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt a két egyenletből:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad 2xy = 3 \\ &(2)\quad 2xy + x = 1 + \frac{3}{y} \end{aligned}\right\},\quad \text{a megoldás: } x = 2,\ y = \frac{3}{4}.$$

d) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt a két egyenletből:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad x\cdot y = \frac{2}{3} \\ &(2)\quad 2x - y = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\},\quad \text{a megoldások: } x_1 = \frac{2}{3},\ y_1 = 1 \text{ és } x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = -\frac{4}{3}.$$

e) Jelölje $6^x = a$, és $5^y = b$. Így:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad 5a + 8b = 13 \\ &(2)\quad \frac{5}{a} + \frac{8}{b} = 13 \end{aligned}\right\}.$$

A (2)-es egyenletet beszorozva $a\cdot b$-vel, valamint az (1) egyenletből kifejezett $a = \frac{13-8b}{5}$-t helyettesítve (2)-be kapjuk:

$$5b + 8\cdot\frac{13-8b}{5} = 13b\cdot\frac{13-8b}{5},$$

amiből ered: $b^2 - 2b + 1 = 0$. Megoldásai: $x = 0,\ y = 0.$

f) A (2) egyenletben átrendezés után: $y^{x^2-7y-1} = 1$. Felhasználva, hogy $1 = y^0$ $(y > 0)$, valamint, hogy az exponenciális függvény szigorú monoton, kapjuk: $x^2 - 7y - 1 = 0$. Ebbe helyettesítve (1)-ből kifejezett $y = 1 - x$-et nyerjük az $x^2 + 7x - 8 = 0$ egyenletet, melynek gyökei: $x_1 = 1$, és $x^2 = -8$, melyhez tartozó y értékek: $y_1 = 0$, és $y_2 = 9$.

Az egyenletrendszer megoldása: $(-8\ ;\ 9)$ számpár.

3190 *a)* Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$\frac{x+3}{x+2} > 2, \quad \text{amiből} \quad \frac{-x-1}{x+2} > 0,$$

megoldása: $-2 < x < -1$.

b) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$\frac{4x-2}{3x+2} \geq -3, \quad \text{amiből} \quad \frac{13x+4}{3x+2} \geq 0,$$

megoldása: $x < -\frac{2}{3}$ vagy $-\frac{4}{13} \leq x$.

c) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$\frac{2x+3}{4x-1} < \frac{1}{2}, \quad \text{amiből} \quad \frac{10}{8x-2} < 0,$$

megoldása: $x < \frac{1}{4}$.

d) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$x^2 - 2x > 8,$$

megoldása: $x < -2$ vagy $4 < x$.

e) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$x^2 - 15 < -2x,$$

megoldása: $-5 < x < 3$.

f) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$x^2 + 3 \geq -6x - 6,$$

megoldása: $x \in \mathbb{R}$.

g) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$2 \cdot |x| \leq x + 2,$$

megoldása: $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$.

h) Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:

$$|x-3| > \frac{1}{2} \cdot x,$$

megoldása: $x < 2$ vagy $x > 6$.

i) A 2^x-re vonatkozóan másodfokú egyenlőtlenség, megoldása $2^x \leq 1$ vagy $2^x \geq 2$, amiből a megoldás: $x \leq 0$ vagy $x \geq 1$.

j) Az 5^x-re másodfokú egyenlőtlenség megoldása: $\frac{1}{5} \leq 5^x \leq 25$, amiből: $-1 \leq x \leq 2$.

k) Az $\frac{1}{2}$-es alapú exponenciális függvény szigorú csökkenése miatt:

$$4 > \frac{2}{x},$$

megoldása: $x > \frac{1}{2}$.

l) Az $\frac{1}{16}$-os alapú exponenciális függvény szigorú csökkenése miatt:

$$2 \cdot |x| - 1 < 2,$$

megoldása: $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$.

3191 *a)* Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x > 0,\ x \neq 1$.

A zárójelek felbontása után:

$$5^{\left(1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\cdot\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 5^2.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:

$$\left(1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\cdot\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-1} = 2,$$

ha új változót vezetünk be: $\sqrt{x} = t$, beszorzás után:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0,$$

melynek gyökei: $t_1 = 3,\ t_2 = -\frac{1}{2}$, csak az első felel meg, ebből $x = 9$.

b) A jobb oldali kifejezés a számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$5^{-x} + 5^{x+2} \geq 2\cdot\sqrt{5^{-x}\cdot 5^{x+2}} = 10.$$

A bal oldal:

$$1 - 6y - y^2 = 10 - (y+3)^2 \leq 10.$$

Akkor van megoldás, ha mindkét oldal 10-zel egyenlő, ekkor: $x = -1,\ y = -3$.

c) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Alakítsuk az egyik kitevőt:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2 x + 1,$$

így az egyenletünk:

$$4^{\mathrm{tg}^2 x} + 2\cdot 2^{\mathrm{tg}^2 x} - 80 = 0.$$

Az egyenlet $2^{\mathrm{tg}^2 x}$-re vonatkozóan másodfokú.

Megoldásai:

$2^{\mathrm{tg}^2 x} = -10$, aminek nincs megoldása, és

$2^{\mathrm{tg}^2 x} = 8$, amiből $\mathrm{tg}^2 x = 3$, azaz $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$ vagy $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$.

Ezek megoldásai: $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$ vagy $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l\pi,\ k, l \in \mathbb{Z}$.

3192 Az egyenlet $3^x = t$-re nézve másodfokú. Mivel $3^x > 0$, akkor lesz két különböző valós gyök, ha az egyenlet diszkriminánsa $D > 0$ (1) és a t-re másodfokú egyenlet mindkét megoldása pozitív (2).

Az (1) teljesül, ha:

$$4\cdot(p-3)^2 - 4\cdot(p^2-4) > 0,$$

ennek megoldása: $p < \frac{13}{6}$.

A (2) teljesül, ha $t_1 \cdot t_2 > 0$ (3) és $t_1 + t_2 > 0$ (4).

A (3) alapján: $p^2 - 4 > 0$, megoldása: $p < -2$ vagy $2 < p$.

A (4) alapján: $2\cdot(p-3) < 0$, megoldása: $p < 3$.

Az (1), (3) és (4) feltételek mindegyike teljesül, ha:

$$p < -2 \quad \text{vagy} \quad 2 < p < \frac{13}{6}.$$

3193 Az első egyenlet:

$$2^{6x}+2^{6y}=12.$$

A második egyenletből:

$$x+y=\frac{5}{6},\quad \text{vagyis}\quad 6x+6y=5.$$

Az első egyenletbe helyettesítve:

$$2^{6x}+2^{5-6x}=12.$$

A 2^{6x}-re nézve másodfokú egyenlet megoldásai:

$$2^{6x}=8\quad \text{és}\quad 2^{6x}=4.$$

Az egyenletrendszer megoldásai:

$$x_1=\frac{1}{2},\ y_1=\frac{1}{3}\qquad \text{és}\qquad x_2=\frac{1}{3},\ y_2=\frac{1}{2}.$$

3194 *a)* Válasszuk szét a különböző alapokhoz tartozó hatványokat:

$$4^{-x}-\frac{3^{-x}}{\sqrt{3}}>\sqrt{3}\cdot 3^{-x}-\frac{4^{-x}}{2},$$

$$4^{-x}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)>3^{-x}\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\frac{3}{2}\cdot 4^{-x}>\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot 3^{-x},$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}>\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{3},$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}>\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Az exponenciális függvény szigorú növekedése $\left(\frac{4}{3}>1\right)$ miatt:

$$-x>\frac{3}{2},\qquad \text{amiből}\qquad x<-\frac{3}{2}.$$

b) Írjuk fel mindegyik alapot 2 hatványaként:

$$\left(2^{-2}\right)^{3x}-\left(2^{-3}\right)^{x-1}-128\le 0,$$

$$2^{-6x}-2^{-3x+3}-128\le 0.$$

Az egyenlőtlenség másodfokú a $2^{-3x}=y$-ra vonatkozóan:

$$y^2-8y-128\le 0.$$

A másodfokú kifejezés zérushelyei: $y_1=16,\ y_2=-8.$

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-8\le y\le 16.$$

Visszahelyettesítve:

$$-8\le 2^{-3x}\le 16.$$

A bal oldali egyenlőtlenség minden valós szám esetén igaz, a jobb oldali pedig teljesül, ha $x\ge -\frac{4}{3}.$

A logaritmus fogalma – megoldások

3195 *a)* 2; *b)* 3; *c)* 7; *d)* $-\frac{1}{2}$;
e) -2; *f)* $\frac{7}{3}$; *g)* $\frac{2}{5}$; *h)* $\frac{1}{7}$;
i) 3; *j)* -4; *k)* 0; *l)* 23;
m) -2; *n)* -4; *o)* -3; *p)* -2.

3196 *a)* 10; *b)* 57; *c)* 41; *d)* 11;
e) 49; *f)* 27; *g)* 25; *h)* 169;
i) 3; *j)* 8; *k)* 5; *l)* 81;
m) $0{,}1$; *n)* $\frac{1}{5}$; *o)* $\frac{1}{25}$; *p)* $\frac{1}{17}$.

3197 *a)* $x=64$; *b)* $x=625$; *c)* $x=\frac{1}{3}$; *d)* $x=\frac{1}{16}$;
e) $x=7$; *f)* $x=5$; *g)* $x=4$; *h)* $x=\frac{1}{2}$;
i) $x=\frac{1}{9}$; *j)* $x=\frac{1}{32}$; *k)* $x=\frac{1}{100\,000}$; *l)* $x=\frac{1}{128}$.

3198 *a)* $x=2$; *b)* $x=4$; *c)* $x=2$; *d)* $x=10$;
e) $x=100$; *f)* $x=1000$; *g)* $x=\sqrt{6}$; *h)* $x=8$;
i) $x=\frac{1}{6}$; *j)* $x=\frac{1}{5}$; *k)* $x=32$; *l)* $x=\frac{1}{27}$;
m) $x=\frac{8}{27}$; *n)* $x\in\mathbb{R},\ x>0,\ x\neq 1$; *o)* nincs megoldás; *p)* $x=8$.

3199 *a)* $x>-1$; *b)* $x>\frac{6}{5}$; *c)* $x>\frac{3}{2}$; *d)* $-\frac{5}{7}<x<\frac{4}{5}$;
e) $x>\frac{1}{4}$; *f)* $x<-\frac{2}{3}$ vagy $x>\frac{1}{4}$; *g)* $x>\frac{8}{3}$; *h)* $-\frac{5}{7}<x<\frac{4}{5}$;
i) $x>\frac{3}{4}$; $x\neq 1$; *j)* nincs megoldás.

3200 *a)* 4; *b)* $-\frac{2}{3}$; *c)* $\frac{1}{4}$; *d)* -10; *e)* $\frac{2}{7}$; *f)* $-\frac{8}{5}$;
g) $\frac{2}{5}$; *h)* $-\frac{5}{3}$; *i)* $-\frac{4}{3}$.

3201 *a)* $\log_2\left[\log_2\left(\log_2 16\right)\right]=\log_2\left(\log_2 4\right)=\log_2 2=1$;

b) $\log_5\left[\log_3\left(\log_{11} 11^3\right)\right]=\log_5\left(\log_3 3\right)=\log_5 1=0$;

c) $\lg\left[\lg\left(\lg 10^{(10^{10})}\right)\right] = \lg\left(\lg 10^{10}\right) \cdot \lg 10 = 1;$

d) $\log_5\left[\log_2\left(\log_6 \sqrt[32]{6}\right)\right] = \log_5\left(\log_2 \dfrac{1}{32}\right) = \log_5(-5)$, ami nem értelmezhető.

3202 *a)* $10 \cdot 10^{\lg 5} = 10 \cdot 5 = 50;$

b) $\dfrac{3^2}{3^{\log_3 6}} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2};$

c) $\dfrac{5}{5^{\log_5 3}} = \dfrac{5}{3};$

d) $4 \cdot 4^{\log_2 5} = 4 \cdot \left(2^{\log_2 5}\right)^2 = 4 \cdot 5^2 = 100;$

e) $\dfrac{2^3}{2^{\log_4 25}} = \dfrac{8}{\left(4^{\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{8}{5};$

f) $3 \cdot 3^{\log_9 4^3} = 3 \cdot \left(9^{\log_9 64}\right)^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \sqrt{64} = 3 \cdot 8 = 24;$

g) $7^{\log_7 5} \cdot \left(49^{\log_{49} 16}\right)^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 4 = 20;$

h) $\dfrac{5^{\log_{25} 9^3}}{5^{\log_5 4^2}} = \dfrac{\left(25^{\log_{25} 9^3}\right)^{\frac{1}{2}}}{4^2} = \dfrac{\left(3^6\right)^{\frac{1}{2}}}{16} = \dfrac{27}{16};$

i) $\dfrac{16^{\log_4 5}}{16^{\log_2 3}} = \dfrac{(4^{\log_4 5})^2}{(2^{\log_2 3})^4} = \dfrac{5^2}{3^4} = \dfrac{25}{81};$

j) $\dfrac{9^2}{9^{\log_3 2}} = \dfrac{81}{\left(3^{\log_3 2}\right)^2} = \dfrac{81}{4};$

k) $\sqrt{5^4 \cdot 5^{\log_5 4}} = 5^2 \cdot \sqrt{4} = 50;$

l) $\sqrt[3]{\dfrac{10^6}{10^{\lg 27}}} = \sqrt[3]{\dfrac{10^6}{27}} = \dfrac{100}{3};$

m) $\log_a \dfrac{a^{-2} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{-6} \cdot a^{\frac{3}{2}}} = \log_a a^{\frac{7}{2}} = \dfrac{7}{2};$

n) $\log_x\left(x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{8}}\right) = \log_x x^{-\frac{7}{8}} = -\dfrac{7}{8}.$

3203 *a)* Az $x^2 - 2x - 8 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < -2$ vagy $4 < x$.

b) Az $x^2 - 9 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < -3$ vagy $x > 3$.

Az $1 - 3x > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < \dfrac{1}{3}$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $x < -3$.

c) A $3x^2 - 16x + 5 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < \dfrac{1}{3}$ vagy $x > 5$.

A $7x + 5 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x > -\dfrac{5}{7}$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $-\dfrac{5}{7} < x < \dfrac{1}{3}$ vagy $x > 5$.

d) A $12x^2 + 5x - 3 > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < -\dfrac{3}{4}$ vagy $\dfrac{1}{3} < x$.

A $x^2 + 2x > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x < -3$ vagy $0 < x$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $x < -2$ vagy $\dfrac{1}{3} < x$.

e) A $3-|x|>0$ egyenlőtlenség megoldása: $-3<x<3$.

A $2x+3>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>-\frac{3}{2}$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $-\frac{3}{2}<x<3$.

f) Az $|x|-2>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<-2$ vagy $2<x$.

Az $x+5>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>-5$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $-5<x<-2$ vagy $2<x$.

g) A $2|x|-1>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<-\frac{1}{2}$ vagy $\frac{1}{2}<x$.

Az $x^2-x>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<0$ vagy $1<x$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $x<-\frac{1}{2}$ vagy $1<x$.

h) A $3^x-9>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>2$.

A $3x+2>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>-\frac{2}{3}$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $x>2$.

i) A $4x+5>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>-\frac{5}{4}$ vagy $x>0$, $x\neq 1$.

Az $1-3x>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<\frac{1}{3}$ vagy $x>-3$, $x\neq -2$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $0<x<\frac{1}{3}$.

j) A $17x-2>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x>\frac{2}{17}$ vagy $x>1$, $x\neq 2$.

Az $6-2x>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<3$ vagy $x>0$, $x\neq 1$.

Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $1<x<3$, $x\neq 2$.

3204 *a)* A $-4^{x+1}+33\cdot 2^x-8>0$ egyenlőtlenség 2^x-re másodfokú, megoldása: $\frac{1}{4}<2^x<8$, amiből:

$$-2<x<3.$$

b) A $\sin x>0$, $\cos x>0$ és $\operatorname{tg} x>0$ egyenlőtlenségek együtt teljesülnek, ha:

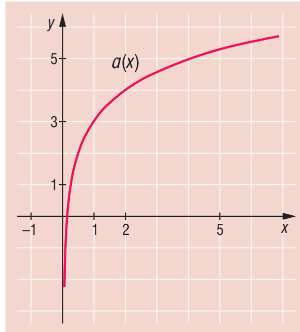
$$k\cdot 2\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

c) A $\sin x>0$ egyenlőtlenség megoldása: $l\cdot 2\pi<x<\pi+l\cdot 2\pi$, $l\in\mathbb{Z}$.
Az $x^2-3x+2>0$ egyenlőtlenség megoldása: $x<1$ vagy $2<x$.
A két egyenlőtlenség közös megoldása:

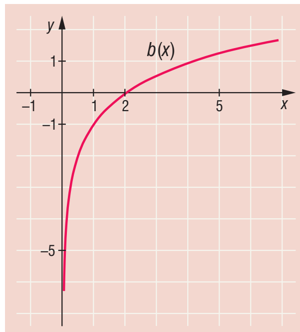
$$0<x<1 \quad\text{vagy}\quad 2<x<\pi \quad\text{vagy}\quad k\cdot 2\pi<x<\pi+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ |k|\geq 1.$$

A logaritmusfüggvény – megoldások

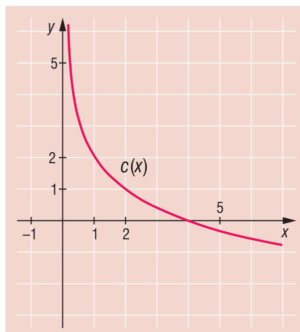
3205 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = \dfrac{1}{8}$.



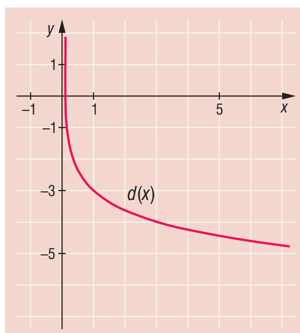
b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 2$.



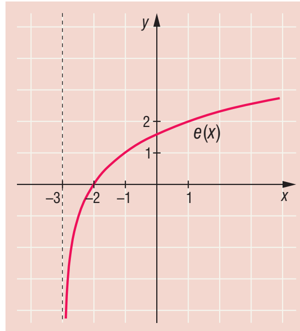
c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 4$.



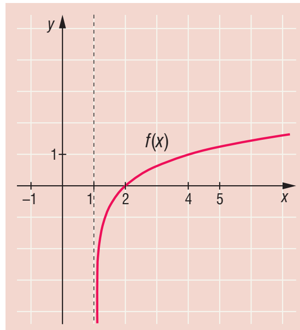
d) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = \dfrac{1}{27}$.



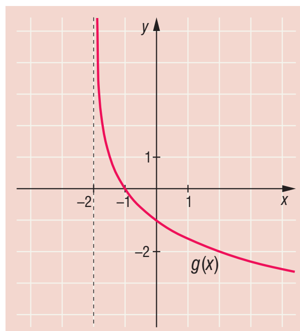
e) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > -3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = -2$.



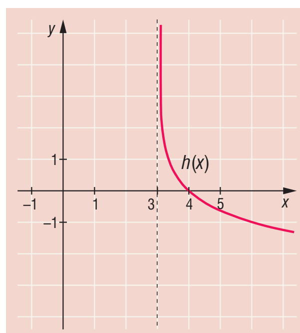
f) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 2$.



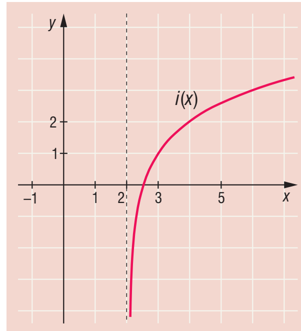
g) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > -2$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = -1$.



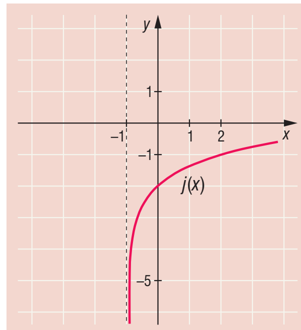
h) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 4$.



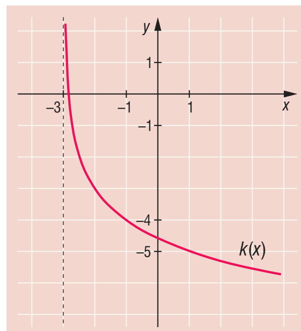
i) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 2$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = \frac{5}{2}$.



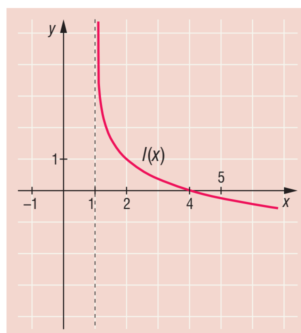
j) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > -1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton növekszik.
Zérushelye: $x = 8$.



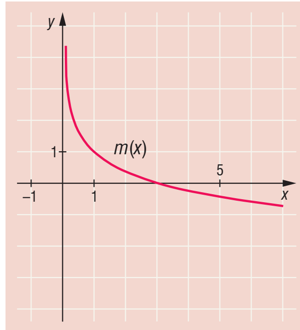
k) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > -3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = -\frac{23}{8}$.



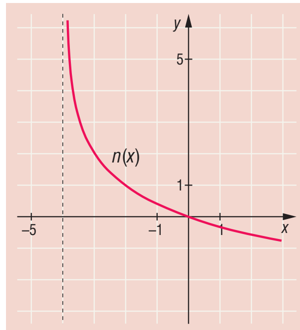
l) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 1$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 4$.



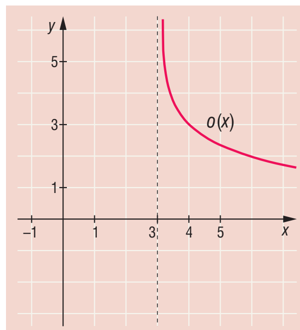
m) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 3$.



n) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > -4$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 0$.



o) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 3$.
Menete: a függvény szigorúan monoton csökken.
Zérushelye: $x = 30$.



3206 *a)* $a(x) = \log_2 x - 2$;
b) $b(x) = \log_2 x - 4$;
c) $c(x) = \log_2 (x-1)$;
d) $d(x) = \log_2 (x-3)$;
e) $e(x) = \log_2 (x+1) + 1$;
f) $f(x) = \log_2 (x-2) - 3$;
g) $g(x) = -\log_2 x$ vagy $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$;
h) $h(x) = 1 - \log_2 x$ vagy $h(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$;
i) $i(x) = -\log_2 (x+2) - 3$ vagy $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x+2) - 3$.

3207 *a)* A függvénybe behelyettesítve:

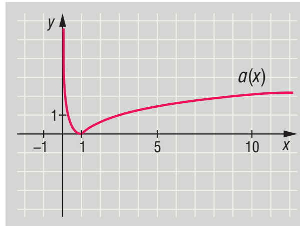
$$s(0) = 100, \qquad s(1) = 100 + 30 \cdot \lg 8 \approx 127{,}1,$$

tehát a megjelenéskor 100 000 db-ot, egy év múlva 127 000 darabot fognak eladni.

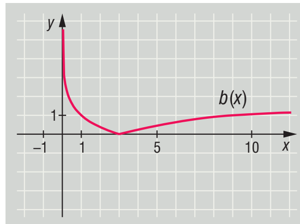
b) A $200 = 100 + 30 \cdot \lg(7t+1)$ egyenletből:

$$7t + 1 = 10^{\frac{10}{3}}, \qquad \text{amiből} \qquad t \approx 308 \text{ év}.$$

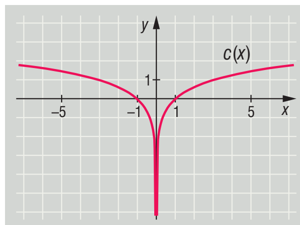
3208 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.



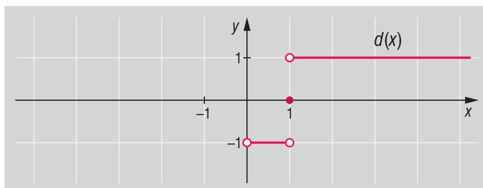
b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.



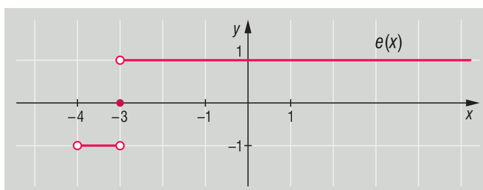
c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$.



d) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.

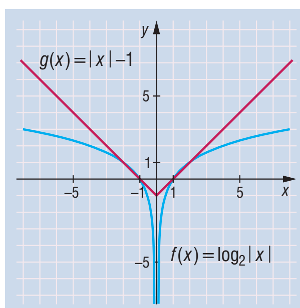


e) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R},\ x > -4$.



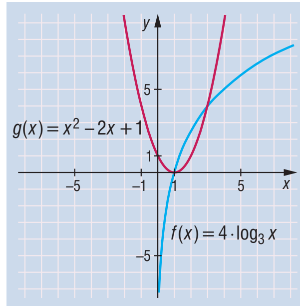
3209 *a)* Az ábráról leolvasott megoldásokat ellenőrizni kell.
Megoldások:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$



b) Az ábráról leolvasott megoldásokat ellenőrizni kell.
Megoldások:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$



A logaritmus azonosságai – megoldások

3210 *a)* $a = \dfrac{x \cdot z}{y}$; *b)* $b = x^2 \cdot y$; *c)* $c = 81 \cdot z^3$;

d) $d = \dfrac{y^2}{z^3}$; *e)* $e = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^2}}$; *f)* $f = \dfrac{10}{x}$;

g) $g = \dfrac{100 \cdot \sqrt{x}}{125} = \dfrac{4 \cdot \sqrt{x}}{5}$; *h)* $h = \dfrac{\sqrt[3]{z} \cdot \sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[5]{10}}$; *i)* $i = \dfrac{1}{10000 \cdot (x+1) \cdot y^3}$;

j) $j = 10^{x-y} \cdot z = \dfrac{z \cdot 10^x}{10^y}$.

3211 *a)* $a = 8$; *b)* $b = 5$; *c)* $c = 11$; *d)* $d = 10$;

e) $e = 12$; *f)* $f = \dfrac{13}{9}$; *g)* $g = 2 \cdot \sqrt{7}$; *h)* $h = \dfrac{1}{45}$.

3212 *a)* $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{9 \cdot 48}{6^3} = \log_{\sqrt{2}} \dfrac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^3} = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$;

b) $\log_6 \dfrac{12^5}{9^2 \cdot 4^4 \cdot 2} = \log_6 \dfrac{2^{10} \cdot 3^5}{2^9 \cdot 3^4} = \log_6 6 = 1$;

c) $\log_3 \dfrac{18^4 \cdot 256 \cdot 72^2}{36^3 \cdot 24^4} = \log_3 \dfrac{2^{12} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^6} = \log_3 9 = 2$;

d) $\log_5 \dfrac{6^6 \cdot 10^2}{32 \cdot 9^3 \cdot 200} = \log_5 \dfrac{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^2}{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^2} = \log_5 1 = 0$;

e) $\log_{\frac{1}{18}} \dfrac{6^7 \cdot 15^5 \cdot 35^5}{10^6 \cdot 21^5 \cdot 25^2 \cdot 3^5} = \log_{\frac{1}{18}} \dfrac{2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{10} \cdot 7^5}{2^6 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 7^5} = \log_{\frac{1}{18}} 18 = -1$;

f) $\log_8 \dfrac{\sqrt{2200} \cdot \sqrt{40}}{\sqrt{55} \cdot 10} = \log_8 \dfrac{10 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{11} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11} \cdot 10} = \log_8 4 = \dfrac{2}{3}$;

g) $\log_2 \dfrac{\operatorname{tg}60° \cdot \cos 30° \cdot \sin 30°}{3} = \log_2 \dfrac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{3} = \log_2 \dfrac{1}{4} = -2$;

h) $\log_4 \dfrac{\sin 45° \cdot \sqrt{2}}{\sin 60° \cdot \mathrm{tg} 30°} = \log_4 \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \log_4 2 = \dfrac{1}{2};$

i) $\log_5 \dfrac{15 \cdot 25 \cdot \sqrt{63} \cdot \sqrt{28}}{126} = \log_5 \dfrac{3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 2}{3^2 \cdot 7 \cdot 2} = 3.$

3213 *a)* Mivel az adott szorzatban a $\lg \mathrm{tg} 45°$ értéke 0, ezért a szorzat is 0.

b) $\lg \dfrac{\cos 30° \cdot 4 \cdot \sin^2 30°}{\sin 60°} = \lg \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \lg 1 = 0;$

c) $\lg \left[\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \right)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right] = \lg \left[\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right] = \lg 1 = 0;$

d) $\log_6 \dfrac{9a - 6}{a^2 - a} = \log_6 \dfrac{12}{2} = \log_6 6 = 1;$

e) $\log_{0,1} \left(10 \cdot \dfrac{2x + 5}{5} \right) = \log_{0,1} [2 \cdot (2x + 5)] = \log_{0,1} 10 = -1.$

3214 *a)* $\lg (6 \cdot 10^{23}) = \lg 6 + 23 \ < \ \log_2 16^6 = \log_2 2^{24} = 24,$ mert $\lg 6 < 1;$

b) $\lg (9{,}1 \cdot 10^{-31}) = \lg 9{,}1 - 31 \ < \ \log_5 \left(\dfrac{1}{125} \right)^{10} = \log_5 5^{-30} = -30,$ mert $\lg 9{,}1 < 1;$

c) $\log_2 \left[5 \cdot \left(\dfrac{1}{32} \right)^{16} \right] = \log_2 (5 \cdot 2^{-80}) = \log_2 5 - 80 \ > \ \log_3 \left[5 \cdot \left(\dfrac{1}{81} \right)^{20} \right] = \log_3 (5 \cdot 3^{-80}) = \log_3 5 - 80,$

mert $\log_2 5 > \log_3 5.$

d) Bal oldal: $\lg \left[\log_{\frac{2}{3}} \left(\log_7 \sqrt[3]{49} \right) \right] = \lg \left[\log_{\frac{2}{3}} \left(\log_7 7^{\frac{2}{3}} \right) \right] = \lg \left(\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{2}{3} \right) = \lg 1 = 0.$

Jobb oldal: $\log_2 \left[\log_{\frac{5}{6}} \left(\log_8 \sqrt{32} \right) \right] = \log_2 \left(\log_{\frac{5}{6}} \dfrac{5}{6} \right) = \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0.$

A két kifejezés egyenlő.

3215 *a)* $\lg 2250 = \lg (15^2 \cdot 10) = 2b + 1.$

b) $\lg 75 = \lg \dfrac{750}{10} = \lg \dfrac{50 \cdot 15}{10} = a + b - 1.$

c) Az $a = 1 + \lg 5$ és $b = \lg 3 + \lg 5$ alapján $\lg 3 = b - \lg 5 = b - (a - 1) = b - a + 1.$

3216 A bal oldali tagokat átírva b alapú logaritmusra:

$$\log_b a + 6 \cdot \log_b a + 12 \cdot \log_b a - 20 \cdot \log_b a = -\log_b a.$$

A jobb oldal: $\log_b a^{-1} = -\log_b a.$

Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek – megoldások

3217 *a)* Értelmezés: $x > \frac{5}{7}$, megoldás: $x = 3$.

b) Értelmezés: $x > -\frac{1}{3}$, megoldás: $x = 5$.

c) Értelmezés: $x > -\frac{1}{8}$, megoldás: $x = \frac{1}{2}$.

d) Értelmezés: $x > \frac{10}{11}$, megoldás: $x = \frac{91}{100}$.

e) Értelmezés: $x > \frac{3}{10}$, megoldás: $x = \frac{7}{10}$.

f) Értelmezés: $x > \frac{10}{13}$, megoldás: $x = \frac{21}{26}$.

g) Értelmezés: $x < -8$ vagy $x > 8$, megoldások: $x_1 = 18$, $x_2 = -18$.

h) Értelmezés: $x < \frac{7-\sqrt{77}}{2}$ vagy $x > \frac{7+\sqrt{77}}{2}$, megoldások: $x_1 = 8$, $x_2 = -1$.

i) Értelmezés: $x \in \mathbb{R}$, megoldások: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

j) Értelmezés: $x < \frac{9-\sqrt{21}}{2}$ vagy $x > \frac{9+\sqrt{21}}{2}$, megoldások: $x_1 = 10$, $x_2 = -1$.

k) Értelmezés: $x > \frac{15}{4}$, megoldás: $x = 5$.

l) Értelmezés: $x > \frac{7}{3}$, megoldás: $x = 8$.

m) Értelmezés: $x > 0$, $x \neq 1$, megoldások: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Csak az első megoldás.

n) Értelmezés: $x > \frac{5}{6}$, $x \neq 1$, adódik: $x_1 = 5$, $x_2 = 1$. Csak az első megoldás.

o) Értelmezés: $x > \frac{10}{7}$, adódik: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$. A harmadik nem megoldás.

3218 *a)* Értelmezés: $x > -1$, megoldás: $x = 7$.

b) Értelmezés: $x > \frac{4}{3}$, adódik: $x = -7$, de nem megoldás.

c) Értelmezés: $x > \frac{3}{2}$, adódik: $x = -\frac{9}{10}$, de nem megoldás.

d) Értelmezés: $x > \frac{3}{5}$, megoldás: $x = 3$.

e) Értelmezés: $x > \frac{5}{3}$, adódik: $x = -\frac{3}{8}$, de nem megoldás.

f) Értelmezés: $-7 < x < 1$, megoldás: $x = -2$.

g) Értelmezés: $x > -\frac{7}{5}$, megoldás: $x = 4$.

h) Értelmezés: $x > -\frac{5}{3}$, megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{19}{13}$.

i) Értelmezés: $x > \frac{5}{43}$, megoldások: $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{5}{3}$.

j) Értelmezés: $x > \frac{1}{3}$, adódik: $x_1 = -3$, $x_2 = 27$. Csak a második megoldás.

k) Az értelmezési tartomány üres halmaz, nincs megoldás.

l) Értelmezés: $x > 8$, adódik: $x_1 = \frac{14}{3}$, $x_2 = 2$. Egyik sem megoldás.

m) Értelmezés: $x > 6$, adódik: $x_1 = 1$, $x_2 = 8$. Csak a második megoldás.

n) Értelmezés: $x > \frac{1}{5}$, adódik: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{17}{15}$. Csak az első megoldás.

3219 Értelmezés: $x > 0$, $y > 0$.

a) $x = 1024$, $y = 16$; *b)* $x = 81$, $y = 9$; *c)* $x = 25$, $y = \frac{1}{5}$; *d)* $x = 7$, $y = 49$;

e) $x = 1$, $y = 4$; *f)* $x = 4$, $y = 64$; *g)* $x = \frac{1}{4}$, $y = 8$; *h)* $x = \frac{1}{10}$, $y = 10$.

3220 *a)* Értelmezés: $x > \frac{3}{4}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x \le \frac{4}{3}$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{3}{4} < x \le \frac{4}{3}$.

b) Értelmezés: $x > \frac{1}{5}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $x \ge -3$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x > \frac{1}{5}$.

c) Értelmezés: $x > \frac{3}{4}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x > 7$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x > 7$.

d) Értelmezés: $x > \frac{5}{3}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x \le 3$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{5}{3} < x \le 3$.

e) Értelmezés: $x > \frac{3}{5}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $x > 6$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x > 6$.

f) Értelmezés: $x > -\frac{3}{4}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $x < -\frac{74}{100}$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{3}{4} < x < -\frac{74}{100}$.

3221 *a)* Értelmezés: $x > \frac{1}{7}$, megoldás: $x = \frac{3}{2}$.

b) Értelmezés: $x > \frac{1}{2}$, adódik: $x = -4$, de ez nem megoldás.

c) Értelmezés: $x > -1$. Érdemes beszorozni 2-vel, a $3x + 7 = (x+1)^2$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Csak a második megoldás.

d) Értelmezés: $x > \frac{1}{3}$. Átszorzás után a $8x + 9 = (3x - 1)^2$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{4}{9}$. Csak az első megoldás.

e) Értelmezés: $x > 1000$. Átalakítva az egyenletet:

$$\lg(x - 1000) = \lg 10\,000 - \lg 25 = \lg 400.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt $x - 1000 = 400$, tehát: $x = 1400$.

f) Értelmezés: $x > -1$, $x \neq 0$. Átszorzás után, felhasználva a logaritmusfüggvény szigorú monotonitását, az $x^2 + 2x - 3 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Csak az $x_1 = 1$ a megoldás.

g) Értelmezés: $(x-5)\cdot(x-1) > 0$, $2x - 10 > 0$ és $\lg(2x-10) \neq 0$ közös megoldása: $x > 5$, $x \neq 5{,}5$.

Az egyenletet átszorozva $\lg(2x-10)$-zel, kapjuk: $\lg(x-5)\cdot(x-1) = \lg(2x-10)$. A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt $x^2 - 8x + 15 = 0$, amely akkor teljesül, ha: $x_1=5$, $x_2=3$. Az értelmezési tartomány miatt az egyenletnek nincs megoldása.

h) Értelmezés: $x > 2$. Felhasználva a logaritmus azonosságait, kapjuk: $\lg[(x-2)\cdot 8] = \lg(x^2 - 1)$, melyből a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt adódik: $8x - 16 = x^2 - 1$, vagyis $x^2 - 8x + 15 = 0$. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Mindkét gyök megfelel az adott értelmezési tartománynak.

i) A logaritmus definíciója alapján, sorban felbontva a zárójeleket:

$$\log_3[\log_4(\log_5 x)] = 1,$$

amiből $\log_4(\log_5 x) = 3$, ebből pedig $\log_5 x = 64$, amiből $x = 5^{64}$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

j) A logaritmus definíciója alapján felbontva a zárójeleket: $x = 25$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

k) Az előző módszerrel: $x = 128$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

l) Az előző módszerrel: $x = 16$. Ellenőrzéssel meggyőződünk a megoldás helyességéről.

3222 *a)* Értelmezés: $0 < x < 3$, $x \neq 1$ vagy $x > \frac{11}{3}$. A logaritmus definíciója alapján: $(3x^2 - 20x + 33) = 1$, amiből: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{8}{3}$. Mindkettő megoldás.

b) Értelmezés: $0 < x < \frac{7}{2} = 3{,}5$, $x \neq 1$ vagy $x > 6$. A logaritmus definíciójának segítségével kapjuk: $2x^2 - 19x + 42 = x$, amiből: $x_1 = 7$, $x_2 = 3$. Mindkettő megoldás.

c) Értelmezés: $x > 6$. A logaritmus definíciója alapján: $2x^2 - 7x - 30 = x^2$, amiből: $x_1 = 10$, $x_2 = -3$. Csak az első megoldás.

d) Értelmezés: $x > \frac{3}{4}$, $x \neq 1$. A logaritmus definíciója alapján $4x^2 - 3x = x^3$, amiből: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Csak az $x = 3$ megoldás.

e) Értelmezés: $x > 0$. A $\lg x$-re nézve másodfokú egyenlet megoldásaiból: $x_1 = 10^5$, $x_2 = \sqrt{10}$.

f) Értelmezés: $x > 0$. A $\log_3 x$-re nézve másodfokú $\log_3^2 x - 8 \cdot \log_3 x + 15 = 0$ egyenlet megoldásaiból adódik: $x_1 = 3^5 = 243$, $x_2 = 3^3 = 27$.

g) Értelmezés: $x > 0$. A $4 \cdot \log_5^2 x + 9 \cdot \log_5 x - 9 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásaiból adódik: $x_1 = 5^{\frac{3}{4}}$, $x_2 = 5^{-3} = \frac{1}{125}$.

h) Értelmezés: $x > \sqrt{2}$. A $\lg\left(x^2 - \frac{4}{x^2}\right) = \lg 3$ egyenletet megoldásai: $x^2 = -1$ és $x^2 = 4$. Csak a másodikból adódik megoldás, és abból is csak az $x = 2$ felel meg.

i) Értelmezés: $\log_2 x \neq -1$ $\left(x \neq \frac{1}{2}\right)$ és $\log_2 x \neq 5$ $(x \neq 32)$.

Beszorozva az egyenletet a közös nevezővel, és $\log_2 x = a$-val jelölve, kapjuk:

$$2 \cdot (a - 5) - (a + 1) = (a + 1) \cdot (a - 5),$$

melyből $a^2 - 5a + 6 = 0$, amiből $a_1 = 3$ és $a_2 = 2$, amelynek megfelelő x értékek: $\log_2 x = 3$ $(x_1 = 8)$ és $\log_2 x = 2$ $(x_2 = 4)$.

j) Értelmezés: $x > 0, x \neq 1$. Alkalmazva a logaritmus definícióját: $x^5 = 16x$. Rendezés és kiemelés után: $x \cdot (x^4 - 16) = 0$. Mivel $x \neq 0$, ezért $x^4 - 16 = 0$. Az egyenlet gyökei: $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$. Az értelmezési tartománynak csak az első gyök felel meg.

3223 *a)* Értelmezés: $x > 1$, $y > 4$. Megoldás: $x = 101$, $y = 5$.

b) Értelmezés: $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$. Megoldás: $x = 9$, $y = 2$.

c) Értelmezés: $x > -1$, $y < 5$. Megoldás: $x = 7$, $y = -4$.

d) Értelmezés: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$. Megoldás: $x = 8$, $y = 27$.

e) Értelmezés: $x > 0$, $y > 0$. Megoldás: $x = 100$, $y = 1$.

f) Értelmezés: $x - y > 0$, $x + y > 0$. Megoldás: $x = 13$, $y = 11$.

g) Értelmezés: $x, y > 0$ vagy $x, y < 0$. Megoldás: $x_1 = \frac{1}{3}$, $y_1 = \frac{1}{12}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = -\frac{1}{12}$.

3224 *a)* Értelmezés: $x > \frac{1}{2}$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x < 0$ vagy $1 < x$. Megoldás: $1 < x$.

b) Értelmezés: $x > 2$. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ebből $-2 < x < 4$. Megoldás: $2 < x < 4$.

c) Értelmezés: $x > \frac{1}{2}$. Rendezés után, a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x \leq -3$. Nincs megoldás.

d) Értelmezés: $x > \frac{4}{5}$. Az $\frac{5x-4}{x+2} \ge 3$ egyenlőtlenségből: $x < -2$ vagy $5 \le x$. Megoldás: $x \ge 5$.

e) Értelmezés: $x > \frac{7}{4}$. A $\frac{4x-7}{3x-1} \le 25$ egyenlőtlenségből: $x \le \frac{18}{71}$ vagy $x > \frac{1}{3}$. Megoldás: $x > \frac{7}{4}$.

f) Értelmezés: $x > \frac{3}{7}$. A $\frac{7x-3}{2x+1} \le \frac{1}{4}$ egyenlőtlenségből: $-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}$. Megoldás: $\frac{3}{7} < x \le \frac{1}{2}$.

g) Értelmezés: $x > 6$. Az $\frac{(x-2)^2}{x-6} \ge 16$ egyenlőtlenségből: $x > 6$. Megoldás: $x > 6$.

h) Értelmezés: $x > \frac{1}{3}$. A $\frac{15x+17}{(3x-1)^2} \ge 8$ egyenlőtlenségből: $-\frac{1}{8} \le x \le 1$. Megoldás: $\frac{1}{3} < x \le 1$.

i) Értelmezés: $x > 3$. A $(4x-3)\cdot(x-3) \ge 100$ egyenlőtlenségből adódik: $x \le -\frac{13}{4}$ vagy $7 \le x$.
Megoldás: $x \ge 7$.

j) Értelmezés: $x > 12$. A $(2x+1)\cdot(x-12) \le 27$ egyenlőtlenségből adódik: $-\frac{3}{2} \le x \le 13$.
Megoldás: $12 < x \le 13$.

k) Értelmezés: $x < -\frac{4}{3}$ vagy $x > \frac{1}{2}$. A $\frac{3x+4}{2x-1} \le 2$ egyenlőtlenségből adódik: $x < \frac{1}{2}$ vagy $x \ge 6$.

Megoldás: $x < -\frac{4}{3}$ vagy $x \ge 6$.

l) Értelmezés: $0 < x < 1$ vagy $x > 4$. A $\frac{4\cdot(x^2-4x)}{x-1} \le 5$ egyenlőtlenségből adódik: $x \le \frac{1}{4}$ vagy $1 < x \le 5$. Megoldás: $0 < x \le \frac{1}{4}$ vagy $4 < x \le 5$.

m) Értelmezés: $x > 4$ vagy $x < 2$. Az $(x-2)\cdot(x-4) \le 3$ egyenlőtlenségből adódik: $1 \le x \le 5$.
Megoldás: $1 \le x < 2$ vagy $4 < x \le 5$.

n) Értelmezés: $x > 4$. A $(3+x)\cdot(x-4) > 2x+6$ egyenlőtlenségből adódik: $x < -3$ vagy $x > 6$.
Megoldás: $x > 6$.

o) Értelmezés: $-4 < x < 4$. A $4-|x| \ge 8^{\frac{1}{3}}$ egyenlőtlenségből adódik: $-2 \le x \le 2$.
Megoldás: $-2 \le x \le 2$.

p) Értelmezés: $x < 0$. Az $x^2-2x-3 > 0$ egyenlőtlenségből adódik: $x < -1$ vagy $x > 3$.
Megoldás: $x < -1$.

3225 *a)* Értelmezés: $x > \frac{5}{3}$. Áttérve 2-es alapú logaritmusra az $\frac{(x+1)^2}{3x-5} = 4$ egyenlethez jutunk.
Megoldás: $x_1 = 3$, $x_2 = 7$.

b) Értelmezés: $x > 0$, $x \ne 1$. Áttérve 3-as alapú logaritmusra, a $\log_3 x + \frac{8}{\log_3 x} = 6$ másodfokú egyenletből: $x_1 = 9$, $x_2 = 81$.

c) Mivel $5^x > 0$, az egyenletnek minden valós szám esetén van értelme. Írjunk fel minden tagot logaritmussal, és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\lg\left[10^x \cdot (5^x + 1)\right] = \lg(2^x \cdot 30).$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt, és 2^x-nel osztva, a másodfokú egyenlet megoldásai: $5^x = -6$, aminek nincs megoldása és $5^x = 5$, ahonnan $x = 1$.

d) Értelmezés: $x > 0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$(3 + \lg x) \cdot (\lg x - \lg 3) = \lg 3 + 4.$$

A $\lg x$-re másodfokú egyenlet:

$$(\lg x)^2 + (3 - \lg 3) \cdot \lg x - 4 \cdot (\lg 3 + 1) = 0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (3 - \lg 3)^2 + 16 \cdot (\lg 3 + 1) = 25 + 10 \cdot \lg 3 + (\lg 3)^2 = (5 + \lg 3)^2.$$

A megoldások: $\lg x = \lg 30$, amiből $x = 30$ és $\lg x = -4$, amiből $x = 10^{-4}$.

3226 Az értelmezésből ($x > 0$, $x \neq 1$, $px > 0$) következik, hogy csak pozitív p-k esetén van megoldás. A logaritmus definíciója szerint: $x^p = px$.

Ha $p = 1$, akkor a megoldás: $x > 0$, $x \neq 1$.

Ha $p \neq 1$ (de $p > 0$), vegyük mindkét oldal p alapú logaritmusát: $p \cdot \log_p x = 1 + \log_p x$.

Ebből $\log_p x = \dfrac{1}{p-1}$, a logaritmus definíciója alapján: $x = p^{\frac{1}{p-1}}$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

3227 *a)* Értelmezés: $x, y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Legyen $a = \dfrac{\lg x}{\lg y}$, ezzel a második egyenlet: $a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{13}{6}$, aminek megoldásai: $a_1 = \dfrac{3}{2}$, $a_2 = \dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{\lg x}{\lg y} = \dfrac{3}{2}$ az első egyenletbe beírva: $x_1 = 1000$, $y_1 = 100$.

$\dfrac{\lg x}{\lg y} = \dfrac{2}{3}$ az első egyenletbe helyettesítve: $x_2 = 100$, $y_2 = 1000$.

b) Értelmezés: $x > 4$, $y > 1$, $x - y + 5 > 0$. Az első egyenletből:

$$(x - 4)^2 = \frac{y^2 - 1}{6}. \qquad (1)$$

A második egyenletből:

$$\frac{x + 2y + 2}{x - y + 5} = 3,$$

ahonnan

$$y = \frac{2x + 13}{5},$$

ezt (1)-be helyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$73x^2 - 626x + 1128 = 0.$$

A megoldásai: $x_1 = 6$, $x_2 = \dfrac{188}{73}$, a második nem megoldás, mert $x > 4$, az elsőből $y = 5$.

Vegyes feladatok – megoldások

3228 Az egyes kifejezések értékei:

$$A=\frac{1}{8},\quad B=-2,\quad C=\frac{10}{32}=\frac{5}{16},\quad D=-3,\quad E=\frac{13}{6},\quad F=\frac{64}{25},\quad G=\frac{1}{2},\quad H=\frac{1}{2}.$$

A növekvő sorrend: $D<B<A<C<G=H<E<F$.

3229 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Igaz. *e)* Igaz. *f)* Igaz.

3230 *a)* $x_1=3,\ x_2=4$. *b)* $x=2$. *c)* $x=3$.

d) Értelmezés: $x>-\frac{1}{4}$, megoldás: $x_1=0,\ x_2=5$.

e) Értelmezés: $-\frac{1}{2}<x<\frac{2}{5}$, megoldás: $x_1=4,\ x_2=\frac{1}{5}$. Csak a második megoldás.

f) Értelmezés: $x>0$. Átalakítva az egyenletet $(\log_2 x)$-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$2\cdot(\log_2 x)^2-(\log_2 x)-1=0.$$

Legyen: $\log_2 x=a$. A $2a^2-a-1=0$ egyenlet gyökei: $a_1=1$ és $a_2=-\frac{1}{2}$, ennek megfelelően $x_1=2$ és $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Mindkét gyök megfelel az egyenlet értelmezési tartományának.

g) Értelmezés: $x\ge 0$. Jelölje $3^{\sqrt{x}}=a$-nak, s átrendezve az $a^2-3a+2=0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $a_1=2$ és $a_2=1$. Ebből a $3^{\sqrt{x}}=2$, ahol mindkét oldal 3-as alapú logaritmusát véve kapjuk:

$$\sqrt{x}\cdot\log_3 3=\log_3 2\ \Rightarrow\ x=\log_3{}^2 2,\quad \text{valamint}\quad 3^{\sqrt{x}}=1\ \Rightarrow\ 3^{\sqrt{x}}=3^0\ \Rightarrow\ x=0.$$

Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

Megjegyzés: Az előbbi gyök számolható úgy is, hogy mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve kapjuk:

$$\sqrt{x}\cdot\lg 3=\lg 2\ \Rightarrow\ \sqrt{x}=\frac{\lg 2}{\lg 3}\approx 0{,}63\ \Rightarrow\ x\approx 0{,}4.$$

h) Összevonva a 11^{2x} és 13^x együtthatóit, átrendezve az egyenletet kapjuk:

$$49\cdot 13^x=49\cdot 11^{2x},$$

melyből $x=0$. Az egyenletnek egy gyöke van, az $x=0$.

i) Értelmezés: $x<\frac{\lg 12}{\lg 2}\ \Rightarrow\ x<3{,}58$. Átrendezve az egyenletet:

$$\log_2\left(12-2^x\right)=5-x,$$

majd alkalmazva a logaritmus definícióját, kapjuk: $2^{5-x}=12-2^x$, amiből $\frac{32}{2^x}=12-2^x$.

Jelölje: $2^x=a$. Így $a^2-12a+32=0$, melynek gyökei $a_1=8$ és $a_2=4$. Ennek megfelelően $x_1=3$ és $x_2=2$. Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

j) Értelmezés: $x>0,\ x\ne 1$. Jelölje $a=2^{\log_x 16}$, így a következő egyenletet kapjuk:

$$a^2-17a+16=0,$$

melynek gyökei: $a_1=16$ és $a_2=1$. Behelyettesítve a $2^{\log_x 16}=a$ alakba:

$$2^{\log_x 16}=16,$$

melynek gyökei: $x_1=2$ és $x_2=-2$, de csak az első gyök felel meg az értelmezési tartománynak.

3231 *a)* $x = 2,\ y = 0.$

b) Értelmezés: $x > \frac{3}{2},\ y > 4.$ A logaritmus azonosságait és monotonitását felhasználva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned}(2x-3)\cdot 5 &= 4y+15\\(3x-1)\cdot(y-4) &= 512\end{aligned}\right\}.$$

A feltételeknek megfelelő megoldások: $x = 11,\ y = 20.$

c) Értelmezés: $y > x.$ Az első egyenletből a logaritmus definíciója miatt:

$$\sqrt{3}^2 = y - x \quad\Leftrightarrow\quad 3 + x = y.$$

Ezt a kifejezést helyettesítve a második egyenletbe:

$$2x \cdot 3^{3+x} = 972, \quad \text{vagyis} \quad 2^x \cdot 3^3 \cdot 3^x = 972.$$

Osztva 3^3-nal, valamint felhasználva, hogy $2^x \cdot 3^x = 6^x$, kapjuk: $6^x = 36$, melynek gyöke $x = 2$, amiből $y = 5.$

Az egyenletrendszer megoldása a (2; 5) számpár.

d) Értelmezés: $x + y > 0,\ x - y > 0,\ x \neq y.$ Az első egyenletből ered: $x^2 - y^2 = 1000$, a második egyenletből pedig: $\frac{x+y}{x-y} = 2$, amelyből $x = 3y$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe, kapjuk, hogy $8y^2 = 1000$, vagyis: $y = \pm 5 \cdot \sqrt{5}$, melyből $x = \pm 15 \cdot \sqrt{5}.$

Az egyenletrendszer megoldása: $\left(15 \cdot \sqrt{5}; 5 \cdot \sqrt{5}\right).$

e) Értelmezés: $x + y > 0,\ x - y > 0,\ x \neq y.$ Az első egyenletet átrendezve, azt kapjuk, hogy $x = 3y.$ Ezt helyettesítve a második egyenletbe, melyből a logaritmus azonosságok felhasználása után: $x^2 - y^2 = 2$ egyenletet kaptuk, ered: $8y^2 = 2$, melynek gyöke: $y = \pm\frac{1}{2}$, amiből $x = \pm\frac{3}{2}.$

Az egyenletrendszer megoldása: $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$

f) Értelmezés: $x, y > 0$, vagy $x, y < 0.$ Az első egyenletet átrendezve, azt kapjuk, hogy $x = 6 + 3y.$ A második egyenletben a logaritmus definíciója miatt az $xy = 9$, melybe helyettesítve az első egyenletből kifejezett $x = 6 + 3y$-t ered: $y^2 + 2y - 3 = 0.$ Ebből $y_1 = 1,\ y_2 = -3.$ Így $x_1 = 9$ és $x_2 = -3.$

Az egyenletrendszer megoldásai a (9; 1) és a (–3; –3) számpárok.

g) Értelmezés: $x, y > 0.$ Az első egyenletből a logaritmus azonosságainak felhasználása után, kapjuk, hogy $3x^2 = 8y.$ A második egyenletből, felhasználva, hogy $1 = 0{,}5^0$, valamint, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton, ered: $y = x + 2.$ Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk a $3x^2 - 8x - 16 = 0$ egyenletet, melynek gyökei: $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{4}{3}$, amiből $y_1 = 6,\ y_2 = \frac{2}{3}.$

Az egyenletrendszer megoldásai a (4; 6) és a $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ számpárok.

3232 *a)* Az $y = 2^x$ helyettesítés után az $1024y^2 - 80y + 1 \le 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, melynek megoldása: $\frac{1}{64} \le y \le \frac{1}{16}$. Ebből: $-6 \le x \le -4.$

b) Értelmezés: $x > -1.$ A logaritmus azonosságait felhasználva, a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ebből $-6 \le x \le 1.$ Megoldás: $-1 < x \le 1.$

c) Értelmezés: $x<-4$. A 10-es alapú logaritmus szigorú monoton növekedése miatt:

$$-3x-1<x^2-5x-36, \quad \text{vagyis} \quad 0<x^2-2x-35,$$

amelynek gyökei: $x<-5$ vagy $x>7$.

Az egyenlőtlenség megoldása az értelmezési tartományon: $x<-5$.

d) Értelmezés: $x>1$. Felhasználva, hogy $1=\log_2 2$, valamint, hogy a 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton nő, kapjuk, hogy $\log 5(x-1)<2$, majd $2=\log_5 25$, és az 5-ös alapú logaritmusfüggvény szintén szigorúan monoton nő, ezért $x-1<25$, amiből $x<26$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $1<x<26$.

e) Felhasználva, hogy $1=3^0$, a megoldandó egyenlőtlenség: $(x+2)\cdot(x-1)<0$. Ez akkor teljesül, ha a szorzat egyik tényezője negatív, másik pozitív, tehát itt akkor és csak akkor, ha $-2<x<1$.

f) Felhasználva, hogy $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, valamint, hogy az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus szigorúan monoton csökken, ezért: $x_2-8x+18=3$ a megoldandó egyenlőtlenség. Ebből: $x_2-8x+15=0$, amiből $3\le x\le 5$.

3233 *a)* $8^{-\frac{2}{3}}+\log_4\left(\frac{1}{8}\right)+7^{\log_7 3}=\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}\right)+3=\frac{7}{4};$

b) $10^{\log_{\sqrt{10}}6-\lg 12}+8^{\log_2 3-\log_8 9}=\frac{36}{12}+\frac{27}{9}=6.$

3234 *a)* Értelmezés: $x>0$. Vegyük mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát, és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$(\log_2 x+4)\cdot\log_2 x=\log_2 32.$$

$\log_2 x=a$-t helyettesítve kapjuk: $(a+4)\cdot a-5=0$, melyből $a_2+4a-5=0$, melynek gyökei $a_1=1$ és $a_2=-5$. Visszahelyettesítve $\log_2 x=a$ kifejezésbe először $a_1=1$-et ered: $x_1=2$, majd $a_2=-5$-ből kapjuk: $x_2=2^{-5}=\frac{1}{32}$. Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

b) Értelmezés: $x>0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, ekkor:

$$8\cdot\lg x\cdot\lg x=\lg 100 \;\Rightarrow\; 8\cdot\lg^2 x=2 \;\Rightarrow\; \lg^2 x=\frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \lg x=\pm\frac{1}{2},$$

melynek gyökei: $x_1=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$ és $x_2=10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Mindkét gyök megfelel az értelmezési tartománynak.

3235 A feltételek szerint:

$$\left.\begin{aligned}-2&=\lg(5-a)+b\\ -1&=\lg(95-a)+b\end{aligned}\right\}.$$

A második egyenletből kivonva az elsőt:

$$1=\lg(95-a)-\lg(5-a),$$

aminek megoldása: $a=-5$, visszahelyettesítve: $b=-3$.

A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x)=\lg(x+5)-3.$$

3236 *a)* $1000 \cdot 2^8 = 256\,000$.

b) A $10^9 = 1000 \cdot 2^{\frac{x}{6}}$ egyenletből, mindkét oldal logaritmusát véve:

$$x = 6 \cdot \frac{\lg 10^6}{\lg 2} = \frac{36}{\lg 2} = 119{,}6 \text{ óra.}$$

A kísérlet 5 napig tart.

3237 *a)* $-\lg\left(10^{-7}\right) = 7$.

b) Az $5{,}5 = -\lg K$ egyenlőségből:

$$K = 10^{-5{,}5} \approx 3{,}16 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}.$$

c) Ha $p_1 = -\lg K$, akkor $p_2 = -\lg(100 \cdot K) = -\lg 100 - \lg K = -\lg K - 2$. A pH érték 2-vel csökken.

3238 *a)* $h(1) = 500 \cdot \log_3 5 \approx 732$.

b) Mivel $h(2) = 500 \cdot \log_3 7 \approx 886$ és $h(4) = 500 \cdot \log_3 11 \approx 1091$, ezért a növekedés 23,1%-os.

c) Az $1500 = 500 \cdot \log_3(2t+3)$ egyenletből $t = 12$, tehát várhatóan 2017 márciusában éri el a halak száma az 1500-at.

3239 *a)* Értelmezés: $x, y > 0$; $y \neq 1$.

Az első egyenlet mindkét oldalának vegyük a 10-es alapú logaritmusát, majd rendezzük át, így kapjuk: $\dfrac{\lg x}{\lg y} = \dfrac{2}{3}$. Ezt a második egyenlet bal oldala helyett beírva ered: $\dfrac{2}{3} = \lg \dfrac{x}{y}$.

Tehát: $\dfrac{2}{3} = \lg x - \lg y$. Az első egyenletből kapott $\lg x = \dfrac{2}{3}\lg y$-t helyettesítve ebbe az egyenletbe kapjuk, hogy $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}\lg y - \lg y$, amiből $-2 = \lg y$, tehát $y = 10^{-2}$, amiből $x = 10^{-\frac{4}{3}}$.

Az egyenletrendszer megoldása: $\left(10^{-\frac{4}{3}}; 10^{-2}\right)$ számpár.

b) Értelmezés: $x, y \neq 1$. Térjünk át 4-es alapú logaritmusra mindkét egyenlet esetén. Így:

$$\log_4 x + \frac{\log_4 y}{\log_4 16} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \log_4 x + \log_4 y = 3,$$

$$\frac{\log_4 4}{\log_4 x} + \frac{\log_4 16}{\log_4 y} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 y} = 3.$$

Jelölje: $a = \log_4 x$ és $b = \log_4 y$-t. Ekkor:

$$2a + b = 3$$
$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 3$$

Az első egyenletből kapott $b = 3 - 2a$-t helyettesítve a második egyenletbe: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{3-2a} = 3$, amiből: $2a^2 - 3a + 1 = 0$, vagyis $a_1 = 1$ és $a_2 = \dfrac{1}{2}$, valamit: $b_1 = 1$ és $b_2 = 2$.

Az a és b értékeket visszahelyettesítve kapjuk x és y értékeit, mely szerint: $\log_4 x = 1$, amiből $x = 4$, és $\log_4 y = 1$, amiből $y = 4$, valamint: $\log_4 x = \dfrac{1}{2}$, amiből $x = 2$, és $\log_4 y = 2$, amiből $y = 16$.

Az egyenletrendszer megoldásai: (4; 4), és (2; 16) számpárok.

c) Értelmezés: $y>0$ és $x>0$. Mindkét egyenlet 10-es alapú logaritmusát véve:

$$(1)\quad \lg y\cdot\lg x=\lg 9,\qquad (=2\cdot\lg 3)$$
$$(2)\quad \lg x+\lg y=\lg 300.\quad (=\lg 3+2)$$

Az első egyenletből kifejezett $\lg x=\dfrac{2\cdot\lg 3}{\lg y}$-t ($\lg y\neq 0$, egyébként (1)-es nem teljesülhetne) helyettesítjük a (2) egyenletbe, így kapjuk, hogy:

$$\frac{2\cdot\lg 3}{\lg y}+\lg y=2+\lg 3,$$

melyből a $\lg^2 y-(2+\lg 3)\cdot\lg y+2\cdot\lg 3=0$ másodfokú egyenlet gyökei: $\lg y=2$, valamint $\lg y=\lg 3$. Az $\lg y=2$ megoldás esetén $y=100$ és $x=3$, az $\lg y=3$ esetén $y=3$ és $x=100$.

Az egyenletrendszer megoldásai a (3; 100) és a (100; 3) számpárok.

Megjegyzés: Egyszerű helyettesítéssel belátható, hogy mindkét számpár igazzá teszi az egyenletrendszert.

3240 *a)* Az egyenlet jobb oldala:

$$\frac{\lg 4}{\lg 8}=\frac{2\cdot\lg 2}{3\cdot\lg 2}=\frac{2}{3}.$$

Az egyenlet bal oldalának átalakításával:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+3}=\frac{2}{3},$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}=\frac{2}{3}.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $x=2$.

b) Értelmezés: $x>3$. A logaritmus azonosságait alkalmazva, az

$$\lg[10\cdot(3^{x-3}+15)]=\lg[3\cdot(9^{x-3}-1)]$$

egyenletet kapjuk, amiből a

$$3\cdot 9^{x-3}-10\cdot 3^{x-3}-153=0$$

másodfokú egyenlet adódik, ennek megoldásai: $3^{x-3}=9$ és $3^{x-3}=-\dfrac{17}{3}$.

Csak az elsőből kapunk megoldást: $x=5$.

c) Értelmezés: $x>0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\left[\left(\lg\sqrt{x}\right)^3-\frac{5}{8}\cdot\lg x\right]\cdot\lg x=-\frac{1}{2},$$
$$\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\lg x\right)^3-\frac{5}{8}\cdot\lg x\right]\cdot\lg x=-\frac{1}{2}.$$

Beszorzás után a következő negyedfokú egyenlet adódik:

$$(\lg x)^4-5\cdot(\lg x)^2+4=0.$$

Ennek a megoldásai: $(\lg x)^2=4$ és $(\lg x)^2=1$. Mindkettőből kapunk megoldást:

$$x_1=100,\qquad x_2=\frac{1}{100},\qquad x_3=10,\qquad x_4=\frac{1}{10}.$$

Mind a négy eredmény megoldása az eredeti egyenletnek.

d) Vizsgáljuk az értelmezési tartományt, melyre: $3^x > 2$ és $3^x > 5$, vagyis az első esetben:

$$x > \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0,63,$$

a második esetben:

$$x > \frac{\lg 5}{\lg 3} \approx 1,46.$$

Tehát az egyenlet értelmezési tartománya: $x > \dfrac{\lg 5}{\lg 3}$.

Felhasználva a logaritmus azonosságait:

$$\log_2 (3^x - 2) \cdot (3^x - 5) = 2,$$

majd alkalmazva a logaritmus definícióját, és elvégezve a beszorzást, kapjuk:

$$\left(3^x\right)^2 - 7 \cdot \left(3^x\right) + 10 - 4 = 0,$$

vagyis $3^x = a$ esetén:

$$a^2 - 7a + 6 = 0,$$

melynek gyökei: $a_1 = 6$ és $a_2 = 1$. Helyettesítve a $3^x = a$ kifejezésbe, $3^x = 6$ esetén $x_2 = 0$. A második gyök nem felel meg az értelmezési tartománynak, az első kifejezhető 10-es alapú logaritmussal is, ahol $x_1 = \dfrac{\lg 6}{\lg 3} \approx 1,63$. Ez megfelelő gyöknek bizonyul.

3241 Értelmezés: $x > \dfrac{1}{2}$, $x \neq 1$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\log_7^2 (2x - 1) + \frac{16}{\log_7^2 (2x-1)} \geq 2 \cdot \sqrt{\log_7^2 (2x-1) \cdot \frac{16}{\log_7^2 (2x-1)}} = 8.$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$\log_7^2 (2x-1) = \frac{16}{\log_7^2 (2x-1)}.$$

Megoldásai: $\log_7 (2x - 1) = 2$, amiből $x = 25$, és $\log_7 (2x - 1) = -2$, amiből $x = \dfrac{25}{49}$.

Tehát a kifejezés az $x = 25$ és $x = \dfrac{25}{49}$ esetén lesz a legkisebb, amelynek értéke 8.