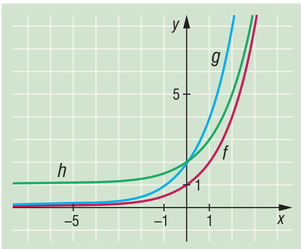
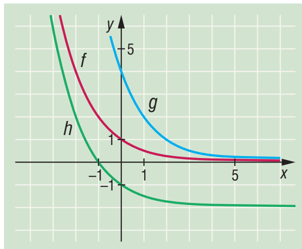
11.4. FÜGGVÉNYEK

Az exponenciális és logaritmusfüggvény – megoldások

3460 *a)*



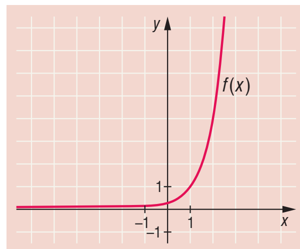
b)



3461 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.

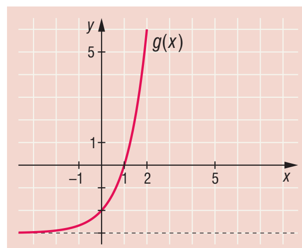
Az x tengelyt nem metszi, az y tengelyt az $y = \frac{1}{4}$ helyen metszi.



b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y > -3$.

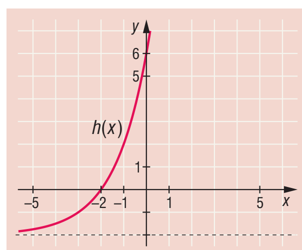
Az x tengelyt az $x = 1$ helyen, az y tengelyt az $y = -2$ helyen metszi.



c) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y > -2$.

Az x tengelyt az $x = -2$ helyen, az y tengelyt az $y = 6$ helyen metszi.

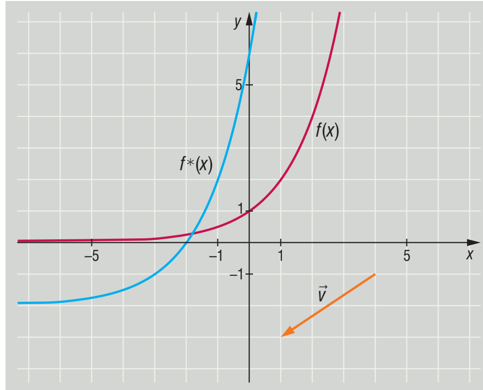


3462 $f(11) = \log_3 9 + 3 = 5, \quad f(3) = \log_3 1 + 3 = 3, \quad f(11) + f(3) = 8.$

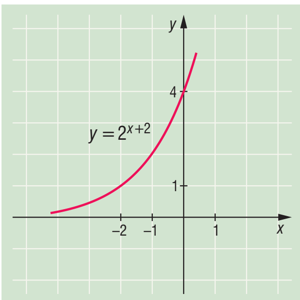
3463 $f(a+1) - f(a-1) = 2^{a+1} - 2^{a-1} = 2 \cdot 2^a - \frac{2^a}{2} = 2^a \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot 2^a = 3 \cdot 2^{a-1}.$

3464 *a)* $f^*(x) = 2^{x+3} - 2$

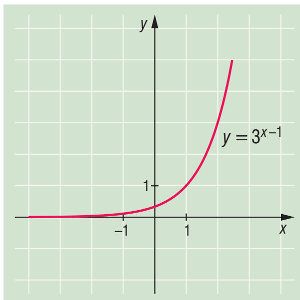
b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, nem változott.
Értékkészlet: $y > -2$.
Zérushely: $x = -2$.



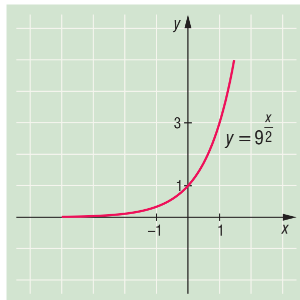
3465 *a)*



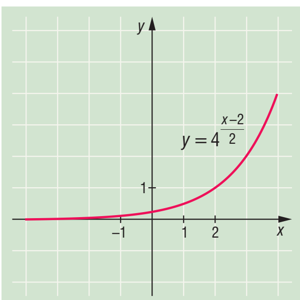
b)



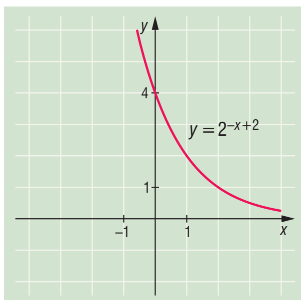
c)



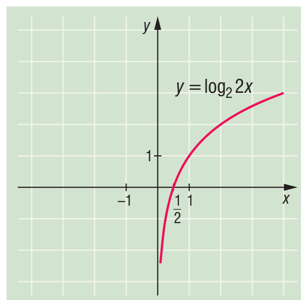
d)



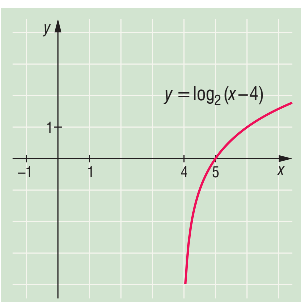
e)



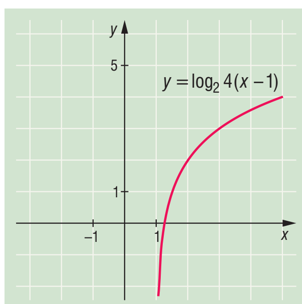
f)



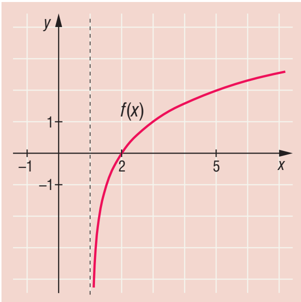
g)



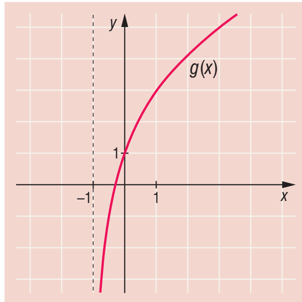
h)



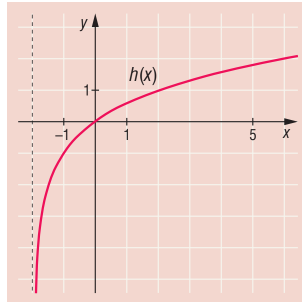
3466 *a)*



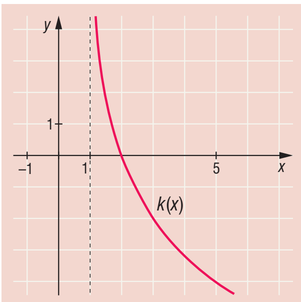
b)



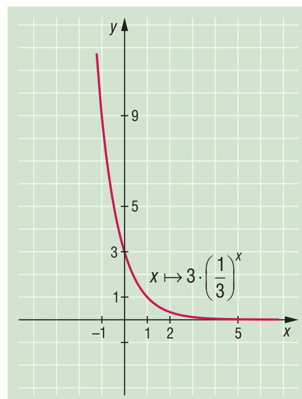
c)



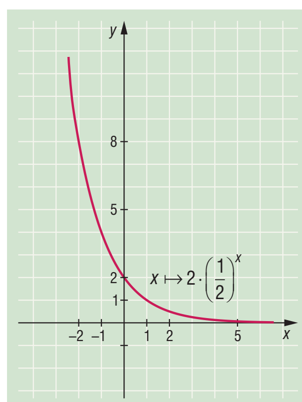
d)

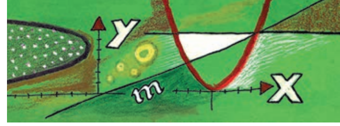


3467 *a)* $x \mapsto \sqrt[3]{3^{3\cdot(1-x)}} = 3^{1-x} = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

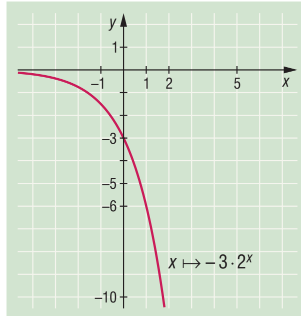


b) $x \mapsto 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

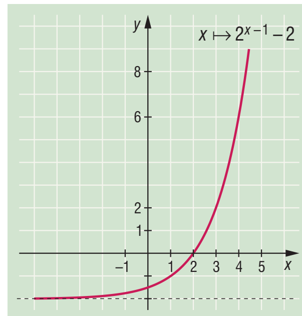




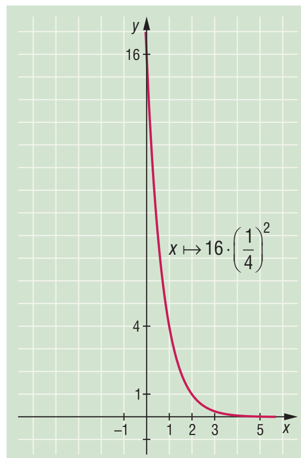
c) $x \mapsto -3 \cdot 2^x$;



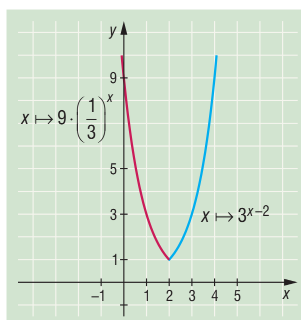
d) $x \mapsto \sqrt{2^{2\cdot(x-1)}} - 2 = 2^{x-1} - 2$;



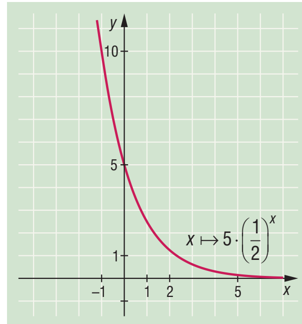
e) $x \mapsto 4^{1-x+1} = 4^{2-x} = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$;



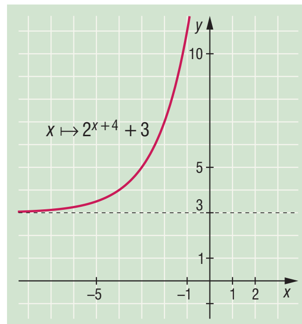
f) $x \mapsto 3^{|2-x|} = \begin{cases} 3^{2-x} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & \text{ha} \quad x \le 2, \\ 3^{-2+x} = 3^{x-2}, & \text{ha} \quad x > 2. \end{cases}$



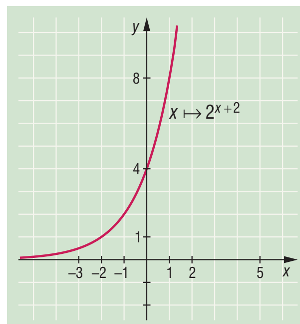
g) $x \mapsto \dfrac{2}{2^x} + \dfrac{3}{2^x} = \dfrac{5}{2^x} = 5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x;$



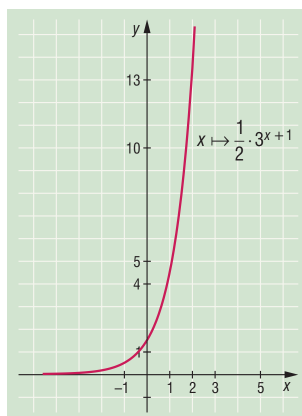
h) $x \mapsto 2^{-2} \cdot 2^{x+6} + 3 = 2^{x+4} + 3;$

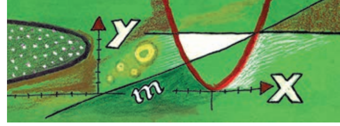


i) $x \mapsto 16^{\frac{1}{4}x} \cdot 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{16^x} \cdot \sqrt{16} = 4 \cdot \sqrt[4]{\left(2^x\right)^4} = 4 \cdot |2^x| = 2^{x+2};$



j) $x \mapsto \dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x} = \dfrac{3}{2} \cdot 3^x = \dfrac{1}{2} \cdot 3^{x+1}.$

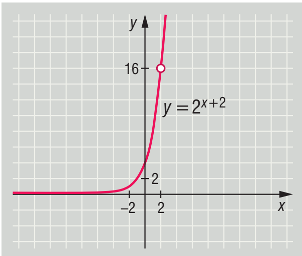




3468 *a)* $f(x)=\begin{cases} -x-4, & \text{ha} \quad -5\le x<0, \\ 5^x-5, & \text{ha} \quad 0\le x<1, \\ \log_3 x, & \text{ha} \quad 1\le x\le 9; \end{cases}$ *b)* $f(x)\in[-4;\,2]$;

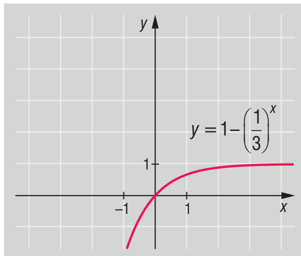
c) $x\in\,]-4;\,1[$; *d)* $x\in[-5;\,3]$; *e)* $x_1=-4$ és $x_2=1$.

3469 *a)*



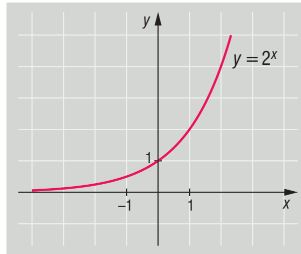
$2^{\frac{x^2-4}{x-2}}=2^{x+2}$, $x\neq 2$;

b)



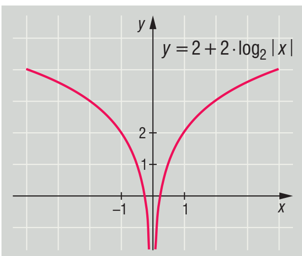
$1-3^{-x}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

c)



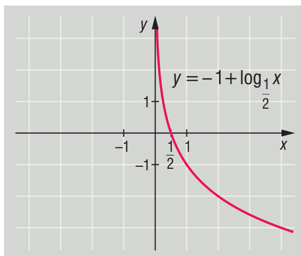
$\dfrac{1}{4^{-\frac{x}{2}}}=4^{\frac{x}{2}}=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x=2^x$;

d)



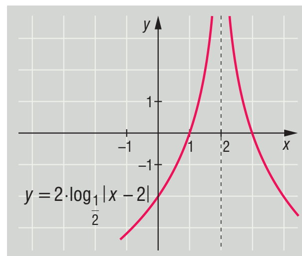
$\log_2 4x^2=2+2\cdot\log_2|x|$;

e)



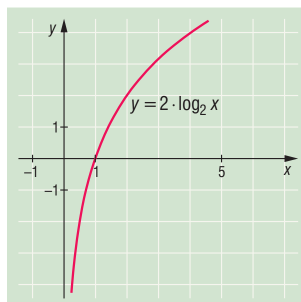
$\log_{\frac{1}{2}}2x=-1+\log_{\frac{1}{2}}x$;

f)

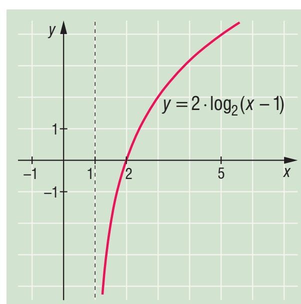


$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2=2\cdot\log_{\frac{1}{2}}|x-2|$.

3470 *a)* Értelmezési tartomány: $x>0$.
Értékkészlet: $y\in\mathbb{R}$.
Zérushely: $x=1$.
Értelmezési tartományán szigorúan monoton növő.



b) Értelmezési tartomány: $x>1$.
Értékkészlet: $y\in\mathbb{R}$.
Zérushely: $x=2$.
Értelmezési tartományán szigorúan monoton növő.



c) Nevezetes azonosságot alkalmazva:

$$\log_2(x^2-2x+1)=\log_2(x-1)^2.$$

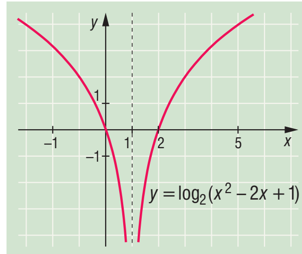
A logaritmus azonosságai alapján a függvény hozzárendelési szabálya:

$$x \mapsto 2\cdot\log_2|x-1|.$$

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, értékkészlet: $y\in\mathbb{R}$.

Zérushelyek: $x=0$ és $x=2$.

A függvény a $]-\infty;\,1[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, az $]1;\,+\infty[$ intervallumon szigorúan monoton növő.

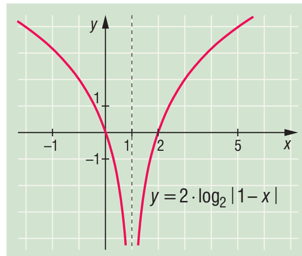


d) Mivel $|1-x|=|x-1|$, ezért a függvény megegyezik a *c)* feladatban megadott függvénnyel.

Értelmezési tartomány: $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, értékkészlet: $y\in\mathbb{R}$.

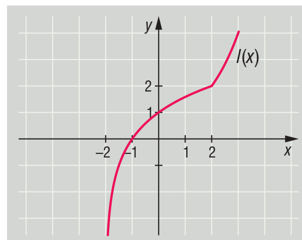
Zérushelyek: $x=0$ és $x=2$.

A függvény a $]-\infty;\,1[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, az $]1;\,+\infty[$ intervallumon szigorúan monoton növő.



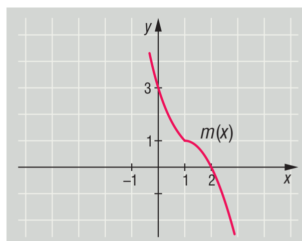
3471 *a)* A függvény $]-2;\,+\infty[$-ban szigorúan nő, zérushelye -1.

$$f(x)=\begin{cases}\log_2(x+2), & \text{ha } -2<x\le 2,\\ 2^{x-1}, & \text{ha } 2<x.\end{cases}$$



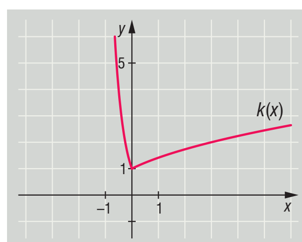
b) A függvény csökken, zérushelye $x=2$.

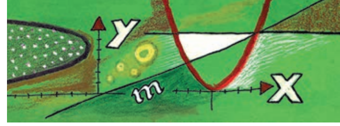
$$g(x)=\begin{cases}3^{-x+1}, & \text{ha } x\le 1,\\ -(x-1)^2+1, & \text{ha } x>1.\end{cases}$$



c) A függvény $]-\infty;\,0]$-ban csökken, $[0;\,+\infty[$-ban nő, zérushelye nincs.

$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & \text{ha } x\ge 0,\\ 4^{-2x}, & \text{ha } x<0.\end{cases}$$





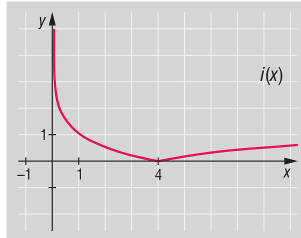
d) A logaritmus tulajdonságait felhasználva:

$$i(x) = \left|\log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{4}} 4\right| = \left|\log_{\frac{1}{4}} x + 1\right|.$$

Értelmezési tartomány: $x > 0$.

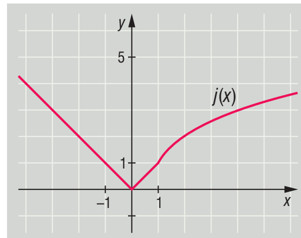
Zérushely: $x = 4$.

A függvény a $]0; 4[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $]4; +\infty[$ intervallumon szigorúan monoton nő.



e) Zérushely: $x = 0$.

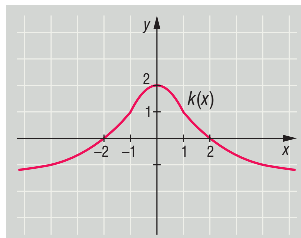
A $]-\infty; 0[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $]0; +\infty[$ intervallumon szigorúan monoton nő.



f) Zérushelyek: $x = -2$ és $x = 2$.

A $]-\infty; 0[$ intervallumon szigorúan monoton nő, a $]0; +\infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökken.

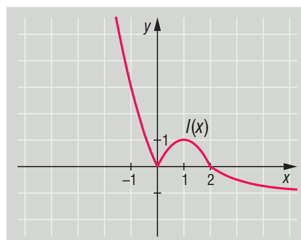
A függvény páros, grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre vonatkozóan.



g) Zérushelyek: $x = 0$ és $x = 2$.

A $]-\infty; 0[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $]0; 1[$ intervallumon szigorúan monoton nő, az $]1; +\infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökken.

Értékkészlete: $y > -1$.



3472 *a)* A másodfokú kifejezések gyöktényezős alakja alapján:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

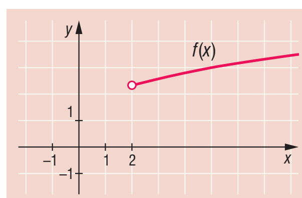
A függvény értelmezési tartományára:

$$(x - 2)(x + 3) > 0 \quad \text{és} \quad (x - 2) > 0,$$

amiből $x > 2$ adódik.

A logaritmus azonosságai alapján:

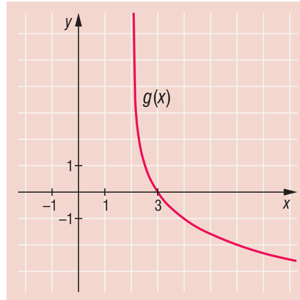
$$f(x) = \log_2 \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = \log_2 (x + 3).$$



b) A logaritmus és a négyzetgyök értelmezése miatt $x^2 - 4 > 0$ és $x + 2 > 0$. A két feltétel együtt akkor teljesül, ha $x > 2$.

A logaritmus azonosságai, majd nevezetes azonosság felhasználása alapján:

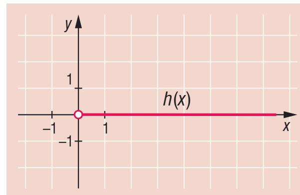
$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2).$$



c) A függvény értelmezési tartománya: $x > 0$.

A logaritmus azonosságai alapján:

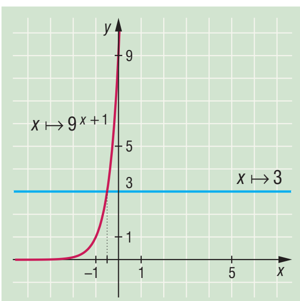
$$h(x) = \lg x - \log_{0,1}\frac{1}{x} = \lg x - \frac{\lg\frac{1}{x}}{\lg 0,1} =$$
$$= \lg x + (\lg 1 - \lg x) = 0.$$



Egyenletek és függvények – megoldások

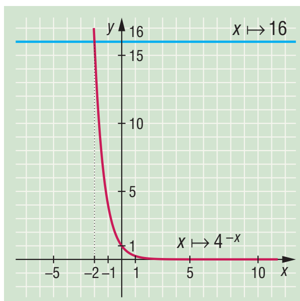
3473 Az egyenletek bal és jobb oldalát külön függvényként ábrázolva kapjuk:

a)



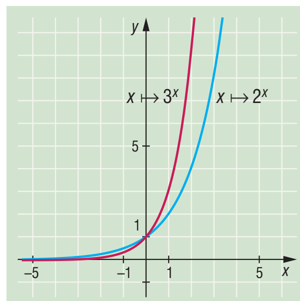
$x = -\frac{1}{2}$;

b)



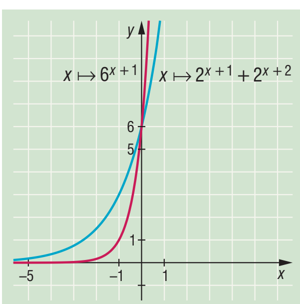
$x = -2$;

c)



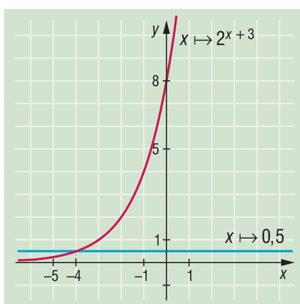
$x = 0$;

d)



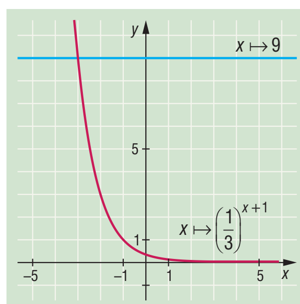
$x = 0$;

e)



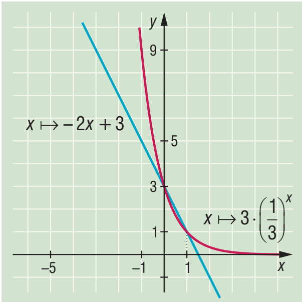
$x = -4$;

f)



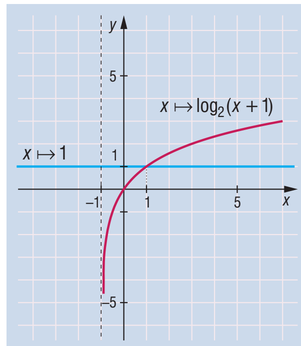
$x = -3$;

g)

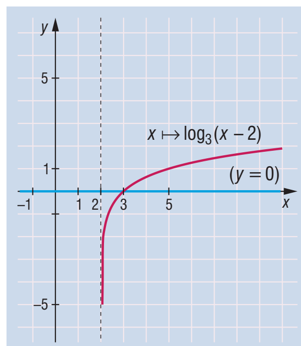


$x_1 = 0$ és $x_2 = 1$.

3474 *a)* $x = 1$ (értelmezési tartomány: $x > -1$).

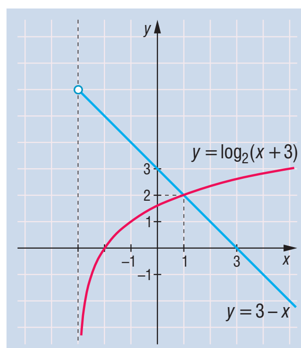


b) $x = 3$ (értelmezési tartomány: $x > 2$).

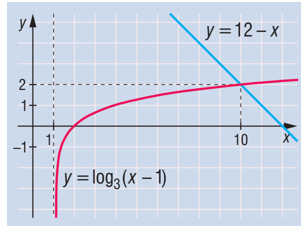


c) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a bal oldalon és a jobb oldalon álló kifejezésekkel értelmezhető függvények grafikonját $x > -3$ esetén.

Mivel az $x \mapsto \log_2(x+3)$ függvény nő, az $x \mapsto 3 - x$ függvény csökken az értelmezési tartományon, és $x = 1$-re mindkettő értéke 2, az egyenlet egyetlen gyöke: $x = 1$.



d) Az előzőhöz hasonlóan oldható meg, itt is egyetlen gyököt kapunk az értelmezési tartományon ($x > 1$): $x = 10$.

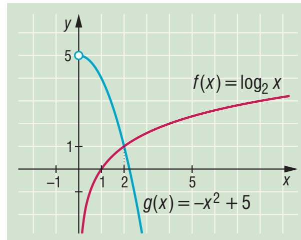


3475 *a)* Értelmezési tartomány: $x > 0$.

Átalakítás után:

$$\log_2 x = -x^2 + 5.$$

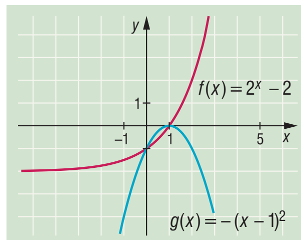
Az egyenletnek egy gyöke van, az $x = 2$.



b) Átrendezés után:

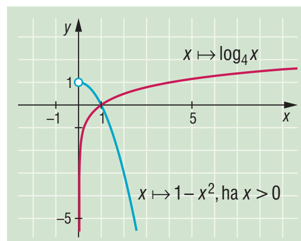
$$2^x - 2 = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2.$$

Az egyenletnek 2 gyöke van, az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 1$.



c) Értelmezési tartomány: $x > 0$.

Az egyenletnek egy gyöke van, $x = 1$.



3476 *a)* Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a bal és jobb oldalon álló függvények grafikonját, és olvassuk le az eredményt a grafikonról. Ellenőrizzük algebrai úton.

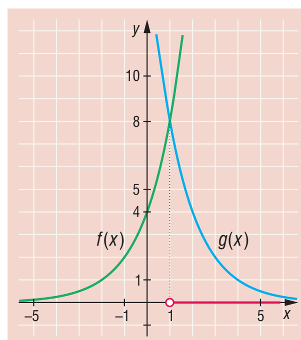
$$f(x) = 2^{x+2}, \quad g(x) = 2^{-x+4} = 2^{-1\cdot(x-4)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4};$$

$$f(x) > g(x).$$

Megoldás: $x > 1$.

Ellenőrzés:

$$2^{x+2} > 2^{4-x}, \quad 4 \cdot 2^x > \frac{16}{2^x}, \quad 2^{2x} > 4, \quad x > 1.$$



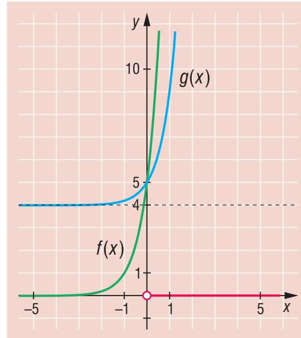
b) Ábrázoljuk:

$$f(x) = 5^{x+1}, \quad g(x) = 5^x + 4;$$
$$f(x) > g(x).$$

Megoldás: $x > 0$.

Ellenőrzés:

$$5 \cdot 5^x > 5^x + 4, \quad 5^x > 1, \quad x > 0.$$



c) Értelmezési tartomány: $x > \frac{1}{3}$.

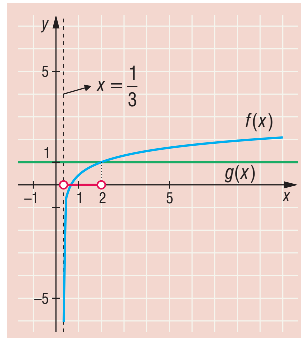
Ábrázoljuk:

$$f(x) = \log_5(3x - 1), \quad g(x) = 1;$$
$$f(x) < g(x).$$

Megoldás: $\frac{1}{3} < x < 2$.

Ellenőrzés:

$$\log_5(3x - 1) < 1, \quad 0 < 3x - 1 < 5, \quad 1 < 3x < 6, \quad \frac{1}{3} < x < 2.$$



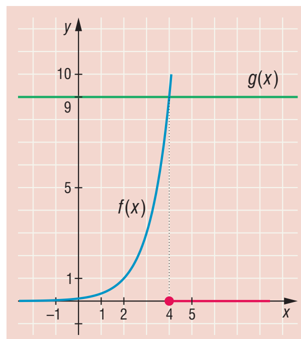
d) Ábrázoljuk:

$$f(x) = 3^{x-2}, \quad g(x) = 9;$$
$$f(x) \geq g(x).$$

Megoldás: $x \geq 4$.

Ellenőrzés:

$$3^{x-2} \geq 3^2, \quad x - 2 \geq 2, \quad x \geq 4.$$



e) Értelmezési tartomány: $1 > x$.

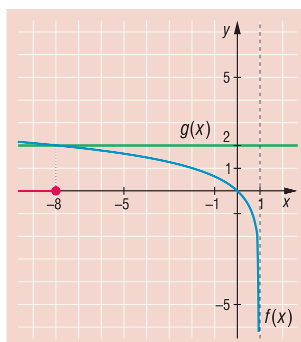
Ábrázoljuk:

$$f(x) = \log_3(1 - x), \quad g(x) = 2;$$
$$f(x) \geq g(x).$$

Megoldás: $x \leq -8$.

Ellenőrzés:

$$\log_3(1 - x) \geq 2, \quad 1 - x \geq 3^2 = 9, \quad -8 \geq x.$$



f) Ábrázoljuk:

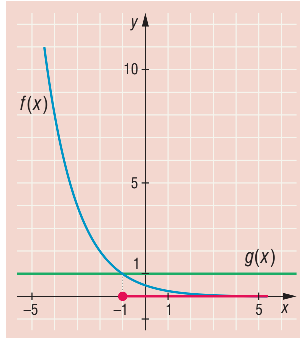
$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1},\qquad g(x)=1;$$

$$f(x)\le g(x).$$

Megoldás: $x\ge -1$.

Ellenőrzés:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\le 1,\qquad x+1\ge 0,\qquad x\ge -1.$$



g) Ábrázoljuk:

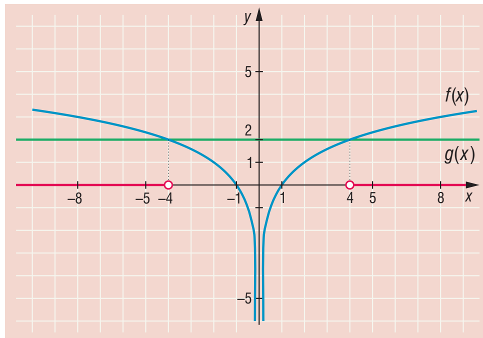
$$f(x)=\log_2|x|,\qquad g(x)=2,$$

$$f(x)>g(x).$$

Megoldás: $x<-4$ vagy $x>4$; összefoglalva: $|x|>4$.

Ellenőrzés:

$$\log_2|x|>2,\qquad |x|>2^2=4.$$



h) Ábrázoljuk:

$$f(x)=2^{|x|},\qquad g(x)=2,$$

$$f(x)<g(x).$$

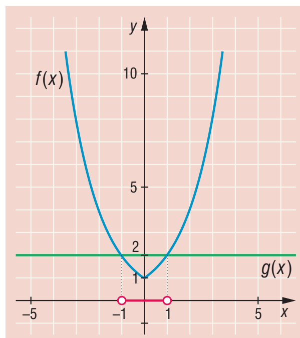
Mivel

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{ha } x\ge 0,\\ -x, & \text{ha } x<0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f(x)=2^{|x|}=\begin{cases}2^x, & \text{ha } x\ge 0,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{ha } x<0.\end{cases}$$

Megoldás: $-1<x<1$, vagyis $|x|<1$.

Ellenőrzés:

$$2^{|x|}<2,\qquad |x|<1.$$

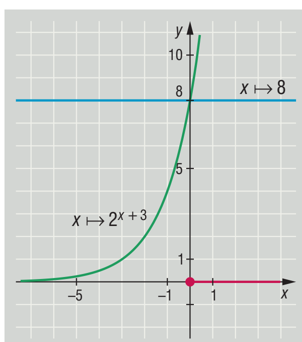


3477 Megoldás:

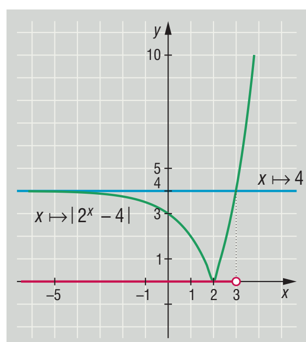
A: $x\in[0;\infty[$, vagyis $x\ge 0$;

B: $x\in\,]-\infty;3[$, vagyis $x<3$.

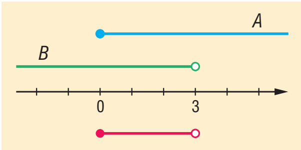
(1)



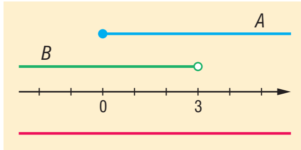
(2)



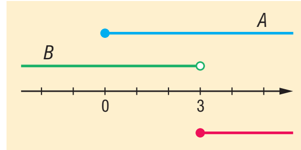
a) $x \in [0; 3[$;



b) $x \in \mathbb{R}$;



c) $x \in [3; \infty[$.



3478 *a)* Az $\frac{1}{5}$ alapú logaritmus csökkenő, így:

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{4x+6}{x} \leq 1.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség átalakítva:

$$0 < 4 + \frac{6}{x} \leq 1,$$
$$-4 < \frac{6}{x} \leq -3,$$
$$-1{,}5 > x \geq -2.$$

b) A szorzat logaritmusára vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1 \ \ (x > -1) \quad \Rightarrow \quad \log_3(x^2 + 4x + 3) = 1.$$

A logaritmusfüggvény szigorúan monoton, ezért:

$$x^2 + 4x + 3 = 3, \quad \text{amiből} \quad x \cdot (x+4) = 0.$$

A megoldások: $x = 0$ jó, $x = -4$ nem jó gyök.

c) Átalakítással:

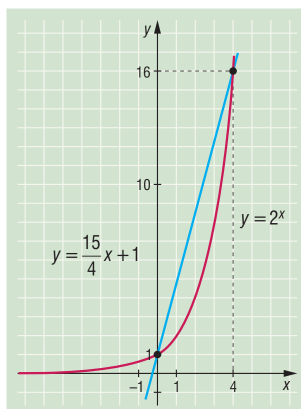
$$x^2 \cdot 5^x - 5^{x+2} < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot 5^x < 25 \cdot 5^x.$$

Az exponenciális függvény miatt $5^x \neq 0$, ezért:

$$x^2 < 25, \quad \text{amiből} \quad |x| < 5.$$

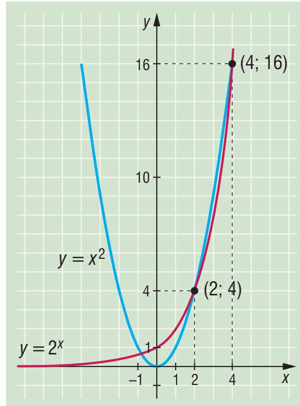
A megoldás: $-5 < x < 5$.

3479 *a)* Az $x \mapsto 2^x$ és $x \mapsto \frac{15}{4}x + 1$ függvény grafikonját egy koordinátarendszerben ábrázolva látszik, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ gyöke az egyenletnek. Más gyök nincs, hiszen a 2^x függvény konvex, tehát az egyenesnek és a görbének több közös pontja nincs.

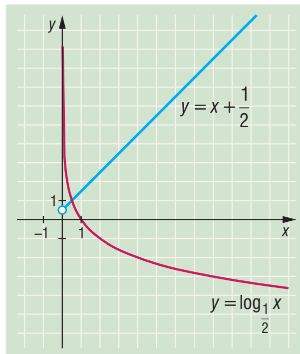


b) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az $x \mapsto 2^x$ és $x \mapsto x^2$ függvények grafikonját.

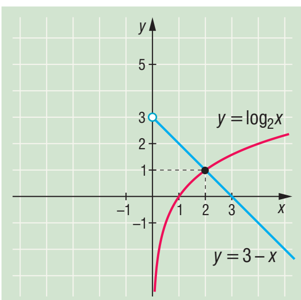
Ha $x > 0$, akkor $x_1 = 2$ és $x_2 = 4$ jó gyök, mert a két függvény képének (2; 4) és (4; 16) közös pontja. Más közös pont itt nincs. Ha $x < 0$, akkor az $x \mapsto x^2$ függvény csökken, az $x \mapsto 2^x$ függvény nő, így legfeljebb egy közös pont van. Ez -1 és 0 között lesz, $x_0 \approx -0{,}7$.



c) Az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ és $x \mapsto x + \dfrac{1}{2}$, $x > 0$ függvények grafikonját egy koordináta-rendszerben ábrázolva világos, hogy $x = \dfrac{1}{2}$ az egyetlen gyöke az egyenletnek, hiszen itt a két függvény értéke egyenlő, és $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ csökken, $x \mapsto x + \dfrac{1}{2}$ nő, tehát legfeljebb egy közös pontja van a két grafikonnak.

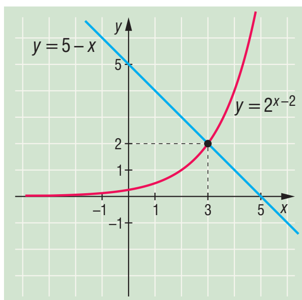


d)



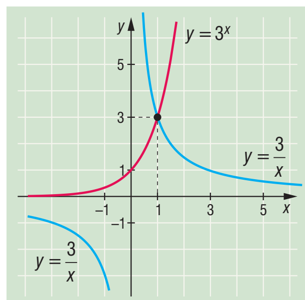
$x = 2$ (ÉT: $x > 0$);

e)



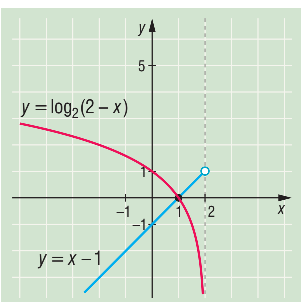
$x = 3$;

f)



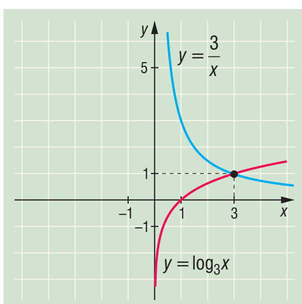
$x = 1$ (ÉT: $x \neq 0$);

g)



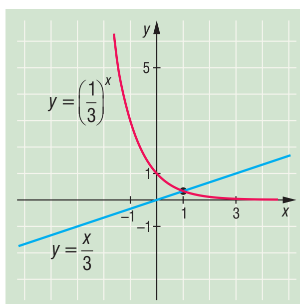
$x = 1$ (ÉT: $x < 2$);

h)



$x = 3$ (ÉT: $x > 0$);

i)

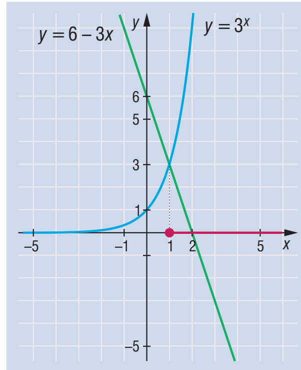


$x = 1$.

3480 *a)* Átrendezve az egyenlőtlenséget:

$$3^x \geq 6 - 3x.$$

Ábrázolva külön a bal és jobb oldalon álló függvény grafikonját, leolvasható a megoldás: $x \geq 1$.

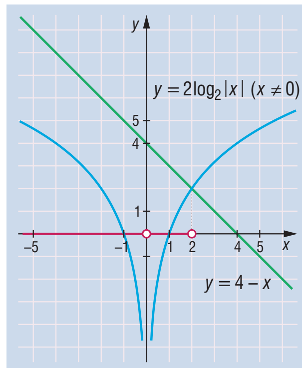


b) Az *a)*-hoz hasonló eljárással:

$$\frac{1}{2}\log_2 x^4 < 4 - x, \qquad (x^4 > 0, \text{ vagyis } x \neq 0)$$

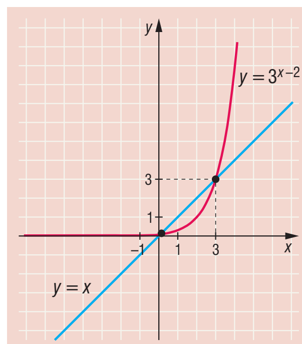
$$2\log_2|x| < 4 - x.$$

Megoldás: $x < 2$, $x \neq 0$.



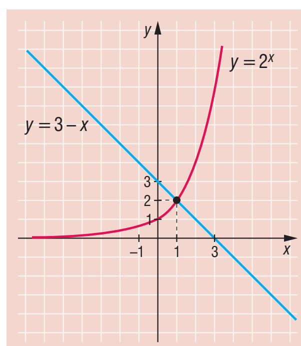
3481 *a)* Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az $x \mapsto x$ és $x \mapsto 3^{x-2}$ függvények grafikonját.

Mivel az $x \mapsto 3^{x-2}$ függvény konvex, ezért az $y = x$ egyenletű egyenesnek és az exponenciális függvény grafikonjának legfeljebb két közös pontja van. Az ábráról leolvasható, hogy az egyik közös pont $(3; 3)$, tehát az egyenlet egyik gyöke: $x_1 = 3$, a másiknak az x koordinátája 0 és 1 között van, pontosabb számolással ez adódik: $x_2 \approx 0{,}3$.



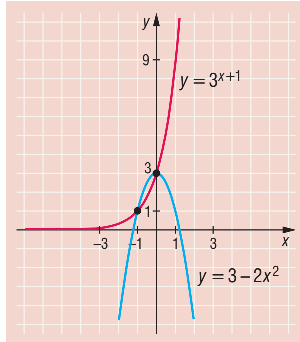
b) Az $x \mapsto 2^x$ és $x \mapsto 3 - x$ függvények közül az első nő, a második csökken, így a grafikonjaiknak legfeljebb egy metszéspontja lehet.

Az egyenlet egyetlen gyöke: $x = 1$.

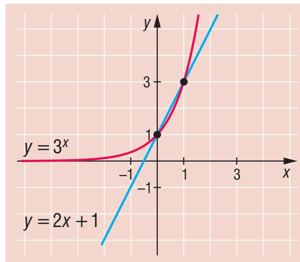


c) Ábrázoljuk itt is az $x \mapsto 3^{x+1}$ és $x \mapsto 3-2x^2$ függvény grafikonját egy koordináta-rendszerben.

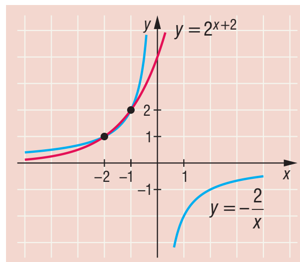
A függvények tulajdonságai alapján látható, hogy két gyök van: $x_1 = -1$ és $x_2 = 0$.



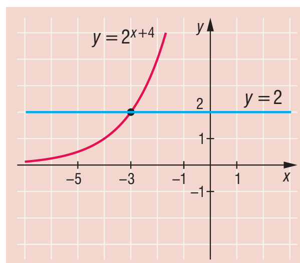
d) Az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenes két helyen metszi az exponenciális függvény grafikonját: az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 1$ helyen. Mivel az $y = 3^x$ egyenletű függvénygörbe konvex, csak ez a két metszéspont van.



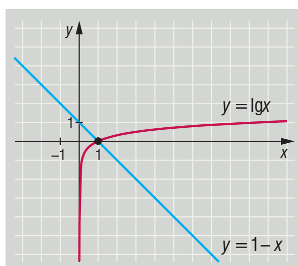
e) Értelmezési tartomány: $x \neq 0$. Két metszéspontja van a két függvény grafikonjának, az $x_1 = -2$ helyen és az $x_2 = -1$ helyen.



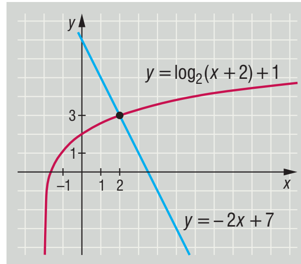
f) Átalakítva az egyenletet kapjuk, hogy $2^{x+4} = 2$. Egy metszéspontja van a két függvény grafikonjának, az $x = -3$ helyen. Ellenőrizve algebrai úton kapjuk, hogy $4 \cdot 2^{x+4} = 8$, amiből $2^{2+x+4} = 2^3$, $x + 6 = 3$, $x = -3$.



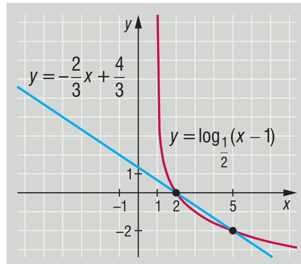
3482 *a)* Az $x \mapsto \lg x$ $(x > 0)$ és $x \mapsto 1 - x$ függvények grafikonja alapján világos, hogy az egyenlet egyetlen gyöke: $x = 1$, hiszen az első függvény nő, a második csökken, így legfeljebb egy közös pont van.



b) Értelmezési tartomány: $x > -2$. A megfelelő függvények grafikonja alapján az egyenlet megoldása $x = 2$. Több megoldás nem lehet, mivel az egyik függvény szigorúan monoton nő, a másik szigorúan monoton csökken.



c) Értelmezési tartomány: $x > 1$. A grafikonok alapján az egyenlet megoldásai: $x_1 = 2$ és $x_2 = 5$. Több megoldás nem lehet, mivel egy egyenesnek és egy konkáv függvény grafikonjának legfeljebb két metszéspontja lehet.



3483 *a)* Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$\left(2^{-1}\right)^{x^2-x-6} > 2^{x^2-x-6},$$

vagyis

$$-x^2 + x + 6 > x^2 - x - 6,$$

azaz, akkor és csak akkor igaz, ha

$$x^2 - x - 6 < 0,$$

ennek megoldása: $-2 < x < 3$.

b) Az adott egyenlet így írható:

$$(3^x + 2) \cdot (2^x - 9) = 0.$$

Mivel $3^x > 0$, ez csak akkor teljesül, ha $2^x = 9$, azaz $x = \log_2 9$.

c) Használjuk fel, hogy

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) = -\log_3(x+1),$$

így a megadott egyenlőtlenség:

$$0 > \log_3(x+1) + \log_3(2-x) = \log_3(x+1)\cdot(2-x),$$

ahol $x + 1 > 0$ és $2 - x > 0$, azaz $-1 < x < 2$.

A $0 > \log_3(x+1)\cdot(2-x)$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$0 < (x+1)\cdot(2-x) < 1, \quad \text{azaz} \quad 0 < 2 + x - x^2 < 1.$$

A bal oldali egyenlőtlenség akkor igaz, ha

$$-1 < x < 2.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség:

$$1 + x - x^2 < 0,$$
$$x^2 - x - 1 > 0.$$

Ez akkor és csak akkor igaz, ha

$$x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{vagy} \quad x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tehát az eredeti egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

$$-1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{vagy} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2.$$

d) Két esetet érdemes külön vizsgálni: ha az alap 0 és 1 közé esik (I. eset), illetve, ha az alap nagyobb 1-nél (II. eset).

I. eset:

$$0<2x<1,$$
$$0<x<0{,}5.$$

Ekkor a logaritmusfüggvény csökken, tehát az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következőkkel:

$$x^2-5x+6>2x.$$

Azaz

$$(x-6)\cdot(x-1)>0,$$

amiből:

$$x<1 \text{ vagy } x>6.$$

Eredményünket az I. eset alaphalmazával összevetve: $0<x<0{,}5$.

II. eset: Mivel $0{,}5<x$, ekkor a logaritmusfüggvény nő, tehát az eredeti egyenlőtlenség a következővel ekvivalens:

$$0<x^2-5x+6<2x.$$

A bal oldali egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x<2 \quad \text{vagy} \quad x>3,$$

a jobb oldali pedig akkor, ha

$$1<x<6.$$

Tehát mindkettő teljesül, ha

$$1<x<2 \quad \text{vagy} \quad 3<x<6.$$

Az egyenlőtlenség megoldása:

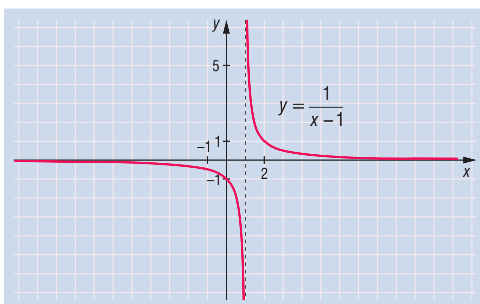
$$0<x<0{,}5, \quad \text{vagy} \quad 1<x<2, \quad \text{vagy} \quad 3<x<6.$$

3484 *a)* Az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmusfüggvény csökken, ezért az egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$0<\log_3\frac{x+1}{x-1}\le 1.$$

A 3-as alapú logaritmusfüggvény nő, így a kapott egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$1<\frac{x+1}{x-1}\le 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0<\frac{1}{x-1}\le 1.$$



Az ábra alapján a megoldás: $2\le x$.

b) Az előző feladat megoldásához hasonlóan az adott egyenlőtlenség a következő alakra hozható:

$$0 < \log_5(x^2 - 4) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x^2 - 4 < 5.$$

A megoldás: $\sqrt{5} < |x| < 3$, azaz $-3 < x < -\sqrt{5}$, vagy $\sqrt{5} < x < 3$.

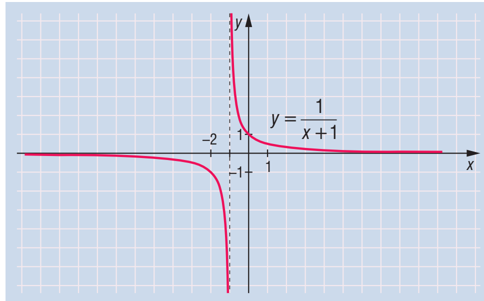
c) Itt is az előzőhöz hasonló gondolatmenet szerint:

$$0 < \log_2 \frac{x}{1+x} < 1.$$

A kapott egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$1 < \frac{x}{1+x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > \frac{1}{x+1} > -1.$$

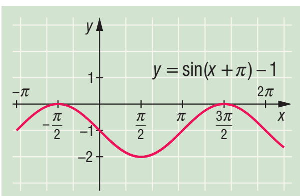
Az ábra alapján a megoldás: $x < -2$.



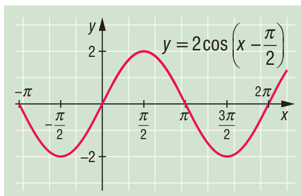
Trigonometrikus függvények – megoldások

3485 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Hamis. *e)* Hamis.

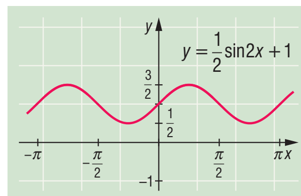
3486 *a)*



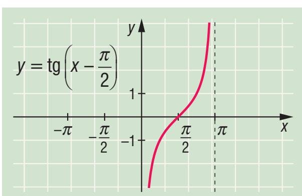
b)



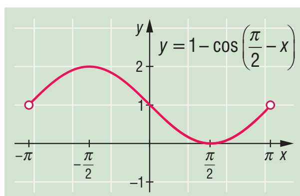
c)



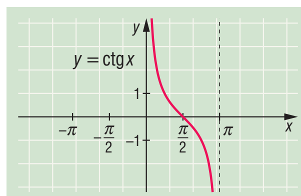
d)



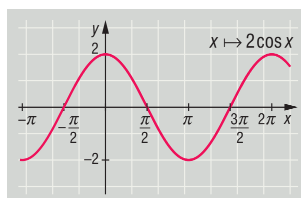
e)



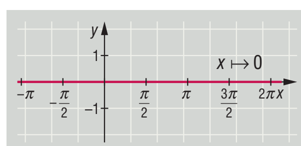
f)



3487 *a)* $x \mapsto 2\cos x$.



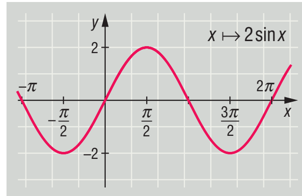
b) $x \mapsto -\sin x + \sin x = 0$.



c) $x \mapsto \cos x + \cos x = 2\cos x$. (lásd *a)* ábra)

d) $x \mapsto \sin x - \sin x = 0$. (lásd *b)* ábra)

e) $x \mapsto 2\sin x$.



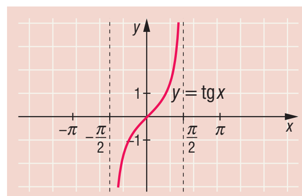
3488 Megoldás:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

3489 A függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

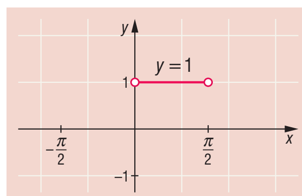
a) $\sqrt{3} + 3$; *b)* $\frac{1}{6}$; *c)* -2.

3490 *a)* Mivel $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, ezért valójában a tangensfüggvényt kell ábrázolni a megfelelő intervallumon.



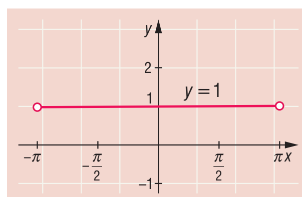
b) Mivel $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, ezért:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1.$$

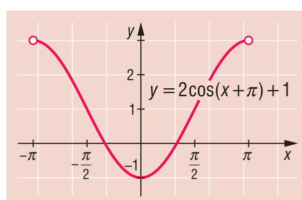


c) Mivel $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, ezért:

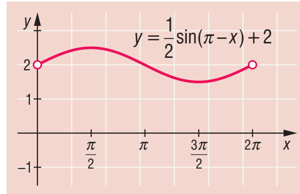
$$\sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$



d) A függvény grafikonja az ábrán látható.



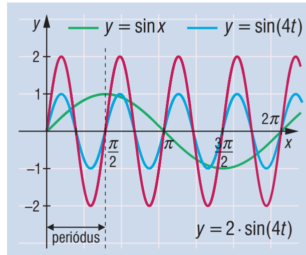
e) A függvény grafikonja az ábrán látható.



3491 *a)* $y(2) = 2 \cdot \sin(4 \cdot 2) = 2 \cdot \sin 8 \approx 1{,}98.$

b) $2 = 2 \cdot \sin(4t)$, amiből:

$$1 = \sin(4t),$$
$$4t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$
$$t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$
$$t \approx 0{,}39 + \frac{k\pi}{2}.$$



c) $t \mapsto 2 \cdot \sin(4t)$ függvény periodikus, periódusa $\frac{\pi}{2}$, ez egyben egy teljes rezgés periódusa.

d) A test pályája az ábrán látható.

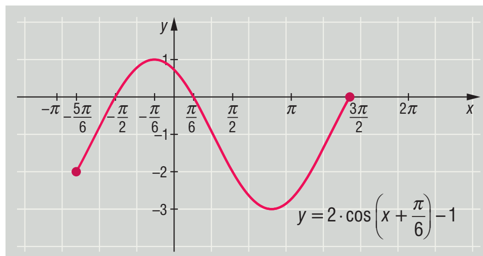
3492 *a)* $f(0) = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1;$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} - 1 = 0;$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = -2;$

$f(\pi) = 2 \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1 = -\sqrt{3} - 1.$

b)

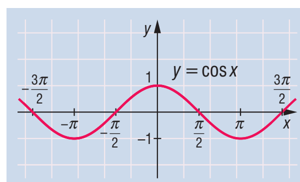


c) Értékkészlet: $y \in [-3; 1]$; zérushely: $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$.

Menete: $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$-on és $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$-on nő, $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$-on csökken.

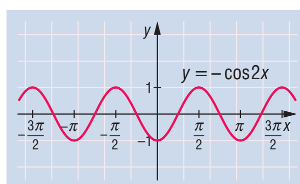
3493 *a)* A tanult azonosság szerint:

$$f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



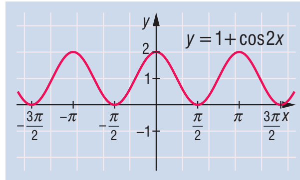
b) Alkalmazzuk a megismert azonosságokat:

$$g(x) = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



c) Itt is az azonosságok segítenek:

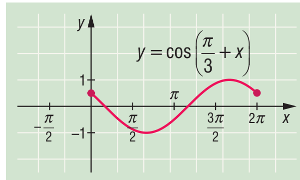
$$h(x) = 2 \cdot \cos^2 x = 1 - \sin^2 x + \cos^2 x = 1 + \cos 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



3494 *a)* Vegyük észre, hogy az együtthatók nevezetes szögek szögfüggvényei, így

$$\frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin x =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$



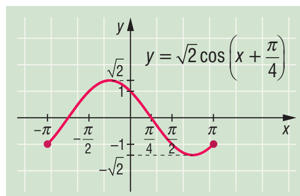
A függvény grafikonját az ábra mutatja.

A függvény minimuma –1, amit az $x = \frac{2\pi}{3}$ helyen vesz el. A függvény maximuma 1, amit az $x = \frac{5\pi}{3}$ helyen vesz fel. A függvény szigorúan monoton csökkenő a $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, valamint az $\left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$ intervallumokon, és szigorúan monoton növekvő a $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ intervallumon.

b) Alakítsuk át a függvényt definiáló kifejezést:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cdot \left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

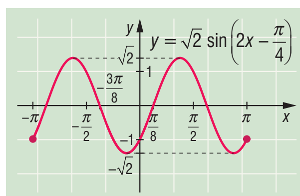


A függvény $\left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right]$-ban és $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$-ban nő, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$-ban csökken.

A maximuma $\sqrt{2}$, az $x = -\frac{\pi}{4}$ helyen, minimuma $-\sqrt{2}$, az $x = \frac{3\pi}{4}$ helyen.

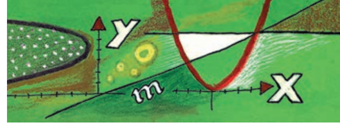
c) A kifejezést átalakítva:

$$h(x) = \sqrt{2} \cdot \left(\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

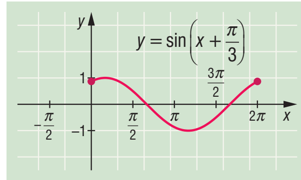


A függvény $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{8}\right]$-ban, $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$-ban és $\left[\frac{7\pi}{8}; \pi\right]$-ban nő, $\left[-\frac{5\pi}{8}; -\frac{\pi}{8}\right]$-ban és $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$-ban pedig csökken.

Minimuma $-\sqrt{2}$, az $x = -\frac{\pi}{8}$ és $x = \frac{7\pi}{8}$ helyeken, maximuma $\sqrt{2}$, az $x = -\frac{5\pi}{8}$ és $x = \frac{3\pi}{8}$ helyeken.



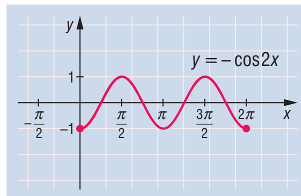
d) Addíciós összefüggés alapján:



$$\frac{1}{2}\cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \cos x = \cos\frac{\pi}{3}\cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cdot \cos x =$$
$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

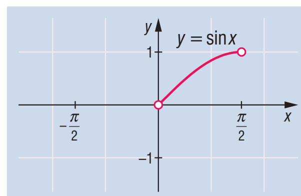
A függvény az $x = \frac{\pi}{6}$ helyen veszi fel maximumát, amelynek értéke 1. Minimumának értéke –1, amelyet az $x = \frac{7\pi}{6}$ helyen vesz fel. A függvény szigorúan monoton nő a $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, valamint a $\left[\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right]$ intervallumokon, és szigorúan monoton csökkenő a $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ intervallumon.

3495 *a)* Alkalmazzunk azonosságokat $(0 \le x \le 2\pi)$:
$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)\cdot(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x.$



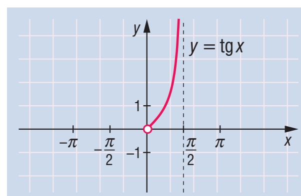
b) Trigonometrikus összefüggéseket felhasználva:

$$g(x) = \frac{1-\cos 2x}{2\cdot \sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2\cdot \sin x} =$$
$$= \frac{2\cdot \sin^2 x}{2\cdot \sin x} = \sin x,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$



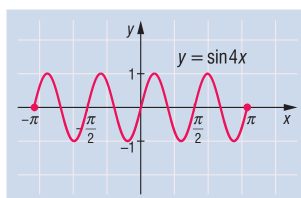
c) Alakítsuk át a törtet:

$$h(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cdot \sin^2 x}{2\cdot \sin x\cdot \cos x} = \operatorname{tg} x,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

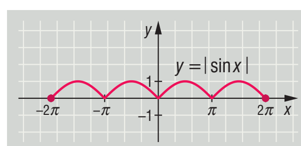


d) Az addíciós tételek alkalmazásával kapjuk, hogy:

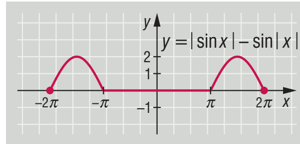
$$k(x) = 4\cdot \sin x\cdot \cos x\cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) =$$
$$= 2\cdot \sin 2x\cdot \cos 2x = \sin 4x.$$



3496 *a)* $x \mapsto |\sin x|,\ -2\pi \le x \le 2\pi$



b) $x \mapsto |\sin x| - \sin|x|$, $-2\pi \le x \le 2\pi$:



Ha $-2\pi \le x < -\pi$, akkor

$$|\sin x| - \sin|x| = |\sin x| - \sin(-x) = \sin x + \sin x = 2 \cdot \sin x.$$

Ha $-\pi \le x < 0$, akkor

$$|\sin x| - \sin|x| = |\sin x| - \sin(-x) = -\sin x + \sin x = 0.$$

Ha $0 \le x < \pi$, akkor

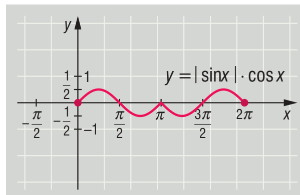
$$|\sin x| - \sin|x| = |\sin x| - \sin x = \sin x - \sin x = 0.$$

És végül ha $\pi \le x \le 2\pi$, akkor

$$|\sin x| - \sin|x| = |\sin x| - \sin x = -\sin x - \sin x = -2 \cdot \sin x.$$

A függvény grafikonját az ábra mutatja.

c) Mivel $0 \le x \le \pi$-ben $\sin x \ge 0$, és $\pi \le x \le 2\pi$-ben $\sin x \le 0$, így:



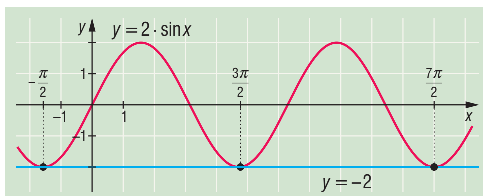
$$|\sin x| \cdot \cos x = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sin 2x, & \text{ha } \quad 0 \le x \le \pi, \\ -\frac{1}{2} \cdot \sin 2x, & \text{ha } \quad \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

A függvény grafikonja az $x = \pi$ egyenletű egyenesre szimmetrikus.

Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (kiegészítő anyag) – megoldások

3497 *a)* A megfelelő függvény grafikonja alapján:

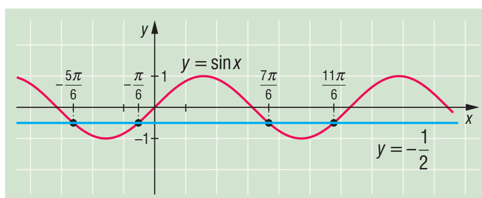
$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$



b) Az egyenletből adódik, hogy $\sin x = -\frac{1}{2}$.

A szinuszfüggvény grafikonja alapján:

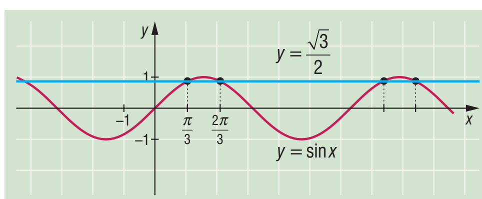
$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{és} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

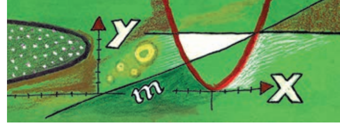


c) Az egyenletből adódik, hogy $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A szinuszfüggvény grafikonja alapján:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{és} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$





d) Mivel $\sin x \le 1$ és $\cos x \le 1$, ezért

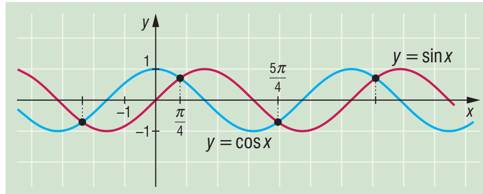
$$2 \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x \le 5$$

és itt az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\sin x = 1$ és $\cos x = 1$.

Mivel az utóbbi két egyenlőség egyidejűleg nem teljesülhet, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

e) A szinuszfüggvény és a koszinuszfüggvény grafikonja alapján:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{és} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



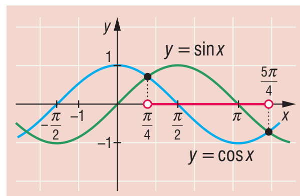
3498 *a)* A koszinuszfüggvény értékkészlete $[-1; 1]$, ezért $\cos x < 1$ minden olyan x-re teljesül, amelyre $\cos x \ne 1$.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

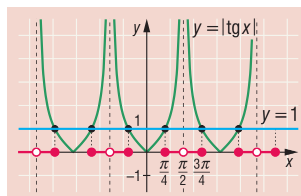
b) A szinusz- és koszinuszfüggvény grafikonjáról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



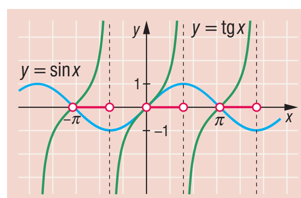
c) A függvénygrafikonok alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x \le \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



d) A tangens- és szinuszfüggvények grafikonját közös koordinátarendszerben felrajzolva látható, hogy az egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

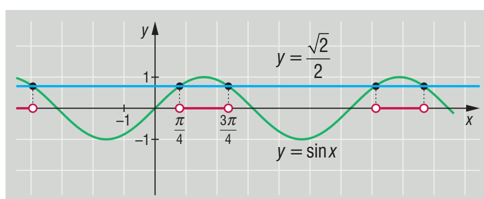
$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



3499 *a)* A szinuszfüggvény értékkészlete $[-1; 1]$, ezért az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

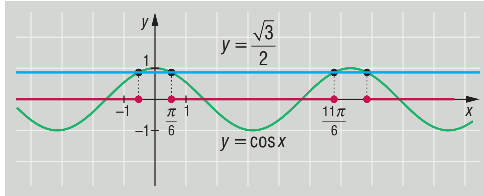
b) A szinuszfüggvény grafikonja alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



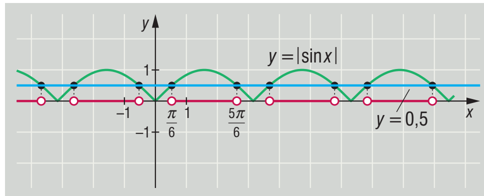
c) A koszinuszfüggvény grafikonja alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



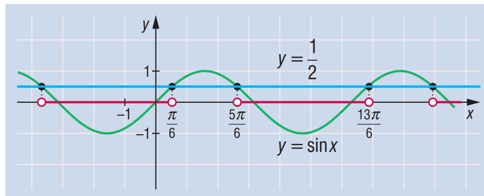
d) Az $f(x) = |\sin x|$ függvény grafikonja alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



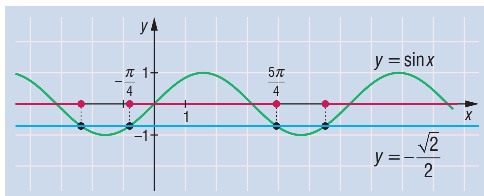
3500 *a)* A függvénygrafikon alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



b) Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

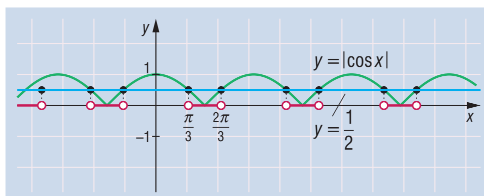


c) Mindkét oldal négyzetgyökét véve az egyenlőtlenség a következő alakban írható:

$$|\cos x| \le \frac{1}{2}.$$

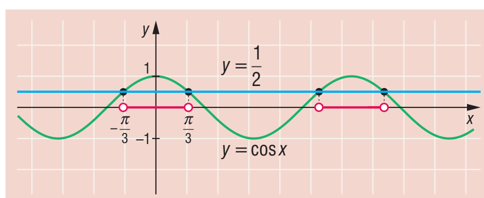
Az $f(x) = |\cos x|$ függvény ábrázolása után az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



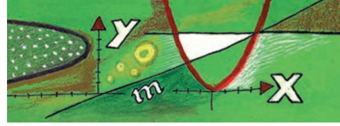
3501 *a)* A koszinuszfüggvény értékkészlete $[-1; 1]$, ezért $\cos x + 3 > 0$ minden x-re teljesül. Ebből következik, hogy a szorzat másik tényezőjének is pozitívnak kell lennie, azaz

$$\cos x > \frac{1}{2}.$$



A függvénygrafikonok alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

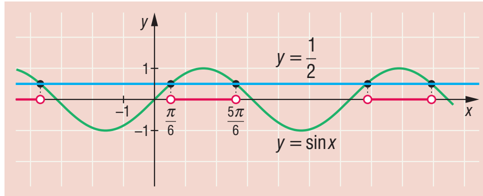


b) Az $y = \sin x$ helyettesítés után az egyenlőtlenség a következő alakban írható:

$$2y^2 + y - 1 > 0.$$

A bal oldalon álló másodfokú függvény zérushelyei:

$$y_1 = -1 \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$



A másodfokú függvény grafikonja „felfelé nyíló” parabola, ezért az egyenlőtlenség megoldása:

$$y < -1 \quad \text{vagy} \quad y > \frac{1}{2}.$$

A $\sin x < -1$ egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

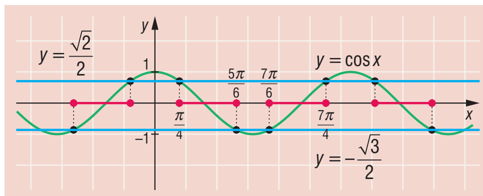
A $\sin x > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldása a függvénygrafikonok alapján:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Az $y = \cos x$ helyettesítés után az egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$4 \cdot y^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \cdot y - \sqrt{6} \le 0.$$

A bal oldalon álló másodfokú függvény zérushelyeire:



$$y_{1,2} = \frac{-2 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \pm \sqrt{4 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 + 16 \cdot \sqrt{6}}}{8} = \frac{-2 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \pm \sqrt{20 + 8 \cdot \sqrt{6}}}{8} =$$

$$= \frac{-2 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \pm \sqrt{4 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2}}{8} = \frac{-2 \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \pm 2 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{8},$$

így $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mivel a másodfokú függvény grafikonja „felfelé nyíló” parabola, ezért a függvény a két zérushelye között vesz fel negatív értéket, amiből következik, hogy

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{azaz} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A függvénygrafikonok alapján az egyenlőtlenség megoldása:

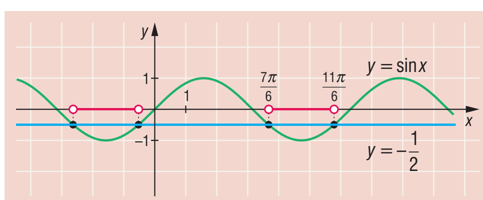
$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

d) Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ezért az egyenlőtlenség

$$2 \cdot \sin^2 x - 9 \cdot \sin x - 5 > 0$$

alakban írható. A bal oldalon álló, $y = \sin x$-ben másodfokú függvény zérushelyei:

$$y_1 = 5 \quad \text{és} \quad y_2 = -\frac{1}{2}.$$



A másodfokú függvény grafikonja „felfelé nyíló” parabola, ezért értéke akkor pozitív, ha

$$y < -\frac{1}{2}, \quad \text{vagy} \quad y > 5, \qquad \text{azaz} \qquad \sin x < -\frac{1}{2}, \quad \text{vagy} \quad \sin x > 5,$$

Az utóbbi egyenlőtlenség egyetlen számra sem teljesül, ezért $\sin x < -\frac{1}{2}$.

A szinuszfüggvény grafikonja alapján az egyenlőtlenség megoldása:

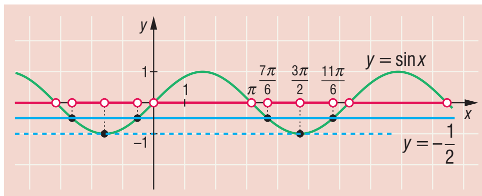
$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

e) Az egyenlőtlenség bal oldalán kiemelve $\sin x$-et:

$$\sin x \cdot (2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \sin x + 1) > 0,$$

majd a zárójelen belüli kifejezést is szorzattá alakíthatjuk, így azt kapjuk, hogy

$$\sin x \cdot (2 \cdot \sin x + 1) \cdot (\sin x + 1) > 0.$$



Mivel a bal oldalon álló szorzat pozitív, ezért egyetlen tényezője sem lehet 0, így $\sin x \neq 0$, $\sin x \neq -\frac{1}{2}$ és $\sin x \neq -1$. Az utóbbi feltétel mellett viszont $\sin x + 1 > 0$, ezért az egyenlőtlenség mindkét oldalát eloszthatjuk az utolsó tényezővel, így

$$\sin x \cdot (2 \cdot \sin x + 1) > 0.$$

A kapott szorzat akkor pozitív, ha $\sin x > 0$ vagy $-1 < \sin x < -\frac{1}{2}$.

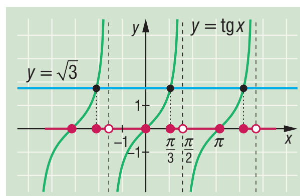
A függvénygrafikonok alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \quad \text{vagy} \quad \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \; x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3502 *a)* Rendezés és szorzattá alakítás után:

$$\operatorname{tg} x \cdot \left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right) \geq 0.$$

A bal oldalon álló szorzat pontosan akkor nemnegatív, ha $\operatorname{tg} x \leq 0$ vagy $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$. A tangensfüggvény grafikonja alapján az egyenlőtlenség megoldása:

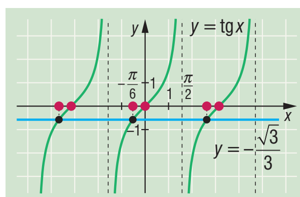


$$\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \pi + k\pi, \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) A bal oldal szorzattá alakítva:

$$\operatorname{tg} x \cdot \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

így $\operatorname{tg} x = 0$ vagy $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

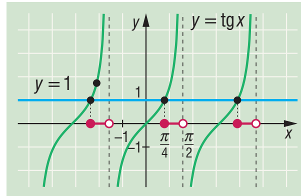


A tangensfüggvény grafikonja alapján:

$$x = k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Az egyenlőtlenség ekvivalens alakja: $\operatorname{tg} x \geq 1$.
A tangensfüggvény tulajdonságai alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



d) Ha $\operatorname{tg} x \neq 0$, akkor mindkét oldalt szorozhatjuk a jobb oldal nevezőjével, így

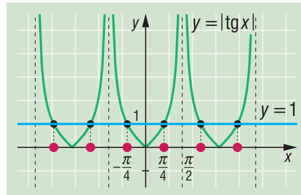
$$\operatorname{tg}^2 x = 1,$$

majd mindkét oldalból négyzetgyököt vonva

$$|\operatorname{tg} x| = 1.$$

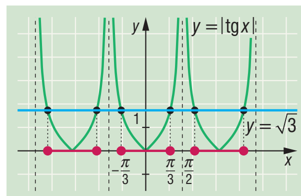
Az $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ függvény grafikonja alapján az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

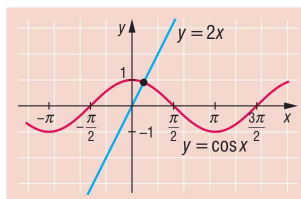


e) Az $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ függvény grafikonja alapján az egyenlet megoldása:

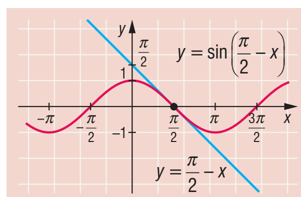
$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



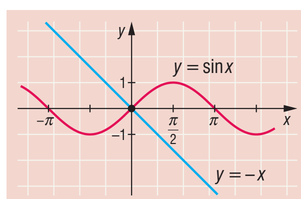
3503 *a)* Ábrázoljuk az egyenlőség két oldalán álló kifejezéssel megadható függvények grafikonját.
Erről leolvasható, hogy 0 és $\frac{\pi}{2}$ között van egy gyöke az egyenletnek.



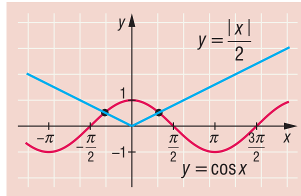
b) Az ábráról leolvasható, hogy egy gyöke van az egyenletnek, ez az $x = \frac{\pi}{2}$.



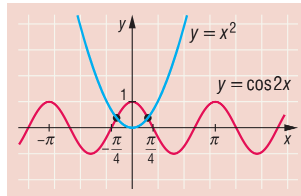
c) Látható, hogy az egyetlen gyök $x = 0$.



d) Az ábra alapján az egyenletnek két gyöke van.



e) Az egyenletnek két gyöke van.



3504 *a)* Ha $|\sin x| < 1$ és $|\cos x| < 1$, akkor $\sin^6 x < \sin^2 x$ és $\cos^6 x < \cos^2 x$, tehát

$$\sin^6 x + \cos^6 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Így az egyenlet csak akkor teljesülhet, ha vagy $|\sin x| = 1$ és akkor $\cos x = 0$, vagy $|\cos x| = 1$ és akkor $\sin x = 0$. Az egyenlet gyökei tehát:

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Az *a)* feladat megoldásához hasonlóan itt is azt kapjuk, hogy az egyetlen gyöksorozat:

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Az egyenlet ekvivalens a következővel:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin 2x} \quad \left(\text{ahol } x \neq k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right), \qquad \text{azaz} \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin 2x = 1.$$

Mivel mindkét tényező abszolút értéke legfeljebb 1, tehát az egyenlőség csak akkor teljesül, ha

$$\text{vagy} \quad (1)\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ és } \sin 2x = 1, \quad \text{vagy} \quad (2)\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ és } \sin 2x = -1.$$

(1) Mindkét feltételt az $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\quad k, \in \mathbb{Z}$ szögek elégítik ki.

(2) Nincs olyan szög, amely egyszerre mindkét feltételt kielégíti.

d) Az előzőhöz hasonló egyenlethez jutunk, ha mindkét oldalt 2-vel osztjuk, és alkalmazzuk az összegzési tételt:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 4x = 1.$$

Itt vagy $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ és $\sin 4x = 1$ (I. eset), vagy $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ és $\sin 4x = -1$ (II. eset).

I. eset:

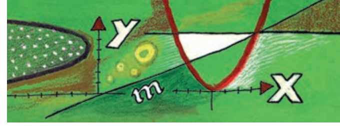
$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{tehát} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

és

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad \text{tehát} \quad x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ezek egyszerre nem teljesülhetnek.

II. eset: Hasonlóan adódik, hogy ez sem lehet egyetlen valós x-re sem.



3505 *a)* A nevezőt vizsgáljuk:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \le \sqrt{2}.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha:

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mivel a nevező nem lehet 0, ezért:

$$x \ne \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Minden, az értelmezési tartományban lévő x-re a nevező pozitív, tehát a tört értéke akkor pozitív, ha a számláló is pozitív:

$$\sin^2 x > \frac{1}{4},$$

$$|\sin x| > 0{,}5.$$

Innen kapjuk a megoldást:

$$\frac{\pi}{6} + n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + n\pi, \quad x \ne \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

b) A tangensfüggvény értelmezése alapján:

$$x \ne \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{azaz} \quad x \ne \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$3x \ne \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad \text{azaz} \quad x \ne \frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{\pi}{3}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Az utóbbi két kikötést elég feltenni, az első benne van az utolsóban.

Alkalmazzuk a tangensfüggvényre megismert azonosságot:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{tg} 3x = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x}.$$

Ezeket behelyettesítve, majd elvégezve a műveleteket az egyenlőtlenség bal oldalán, azt kapjuk, hogy:

$$\operatorname{tg}^4 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x + 1 = (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 > 0.$$

Ez minden olyan $x \in \mathbb{R}$-re érvényes, amire az eredeti kifejezésnek értelme van.

c) Használjuk fel a következő azonosságokat:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right)$$

úgy, hogy a $\sin x \cdot \sin 3x$ szorzatot alakítjuk át:

$$\sin 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = \frac{4}{5},$$

$$2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x - 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = \frac{16}{5},$$

$$\sin 4x - 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = \frac{16}{5}.$$

A jobb oldal nagyobb mint 3, a bal oldal viszont 3-nál nagyobb nem lehet, mert $\sin 4x \le 1$ és $-2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x \le 2.$ Így nincs olyan $x \in \mathbb{R}$, amire az egyenlőség teljesülne.

3506 *a)* Alkalmazzuk a megfelelő azonosságokat:

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x.$$

Mivel $0 \le \sin^2 2x \le 1$, nyilván teljesül, hogy

$$\frac{1}{4} \le f(x) \le 1.$$

b) Használjuk fel a $2 \cdot \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ és $2 \cdot \cos^2 x = 1 + \cos 2x$, valamint a $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ ismert azonosságot. Ezek alapján:

$$g(x) = 3 + 3 \cdot \sin 2x + \cos 2x = 3 + \sqrt{10} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \cos 2x\right).$$

Mivel $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1$, van olyan α valós szám, hogy $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ és $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ezek alapján $g(x)$ így írható:

$$g(x) = 3 + \sqrt{10} \cdot \sin(2x + \alpha).$$

Innen következik, hogy:

$$3 - \sqrt{10} \le g(x) \le 3 + \sqrt{10}.$$

c) A megfelelő azonosságok alapján:

$$h(x) = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3 + \sin 2x},$$

tehát

$$\frac{7}{2} \cdot \sqrt{2} \le h(x) \le 7.$$

3507 Tegyük fel, hogy $n > 0$ egész és az f függvény 3π szerint periodikus. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$-re:

$$f(x + 3\pi) = \cos n(x + 3\pi) \cdot \sin \frac{5}{n}(x + 3\pi) = \cos nx \cdot \sin \frac{5}{n} x = f(x).$$

Legyen $x = 0$, ekkor:

$$\cos n3\pi \cdot \sin \frac{15\pi}{n} = 0.$$

Mivel $|\cos n3\pi| = 1$, így $\sin \frac{15\pi}{n} = 0$, ami akkor és csak akkor igaz, ha $\frac{15}{n}$ egész szám, azaz n osztója 15-nek, tehát (tekintettel arra, hogy n pozitív) $n = 1, 3, 5, 15$.
Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott n értékek mindegyike megfelelő.

3508 Az addíciós tétel szerint az egyenlet így írható:

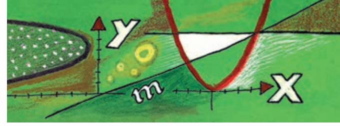
$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5,$$

amiből:

$$(1) \quad 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

illetve

$$(2) \quad 3x + \frac{\pi}{4} = 5 \cdot \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \; n \in \mathbb{Z}.$$



Az (1)-ből:

$$x = -\frac{\pi}{36} + 2k \cdot \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

a (2)-ből pedig:

$$x = \frac{7\pi}{36} + 2n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Az első sorozat legkisebb pozitív eleme $k = 1$-hez tartozik, ekkor $x = \frac{23\pi}{36}$.

A második sorozat legkisebb pozitív eleme pedig $n = 0$-hoz tartozik, ekkor $x = \frac{7\pi}{36}$.

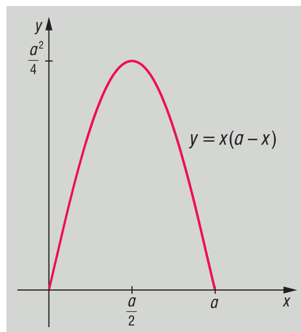
Tehát egy egyenlet legkisebb pozitív gyöke $\frac{7\pi}{36}$.

3509 Használjuk fel, hogy $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, az egyenlet így írható:

$$\cos x\,(1 + \cos^2 x) = (2 + \sin^2 3x) \cdot \sqrt{1 + \sin^2 3x}.$$

A bal oldal értéke legfeljebb 2, ez akkor teljesül, ha $\cos x = 1$. A jobb oldal értéke legalább 2, ez akkor teljesül, ha $\sin 3x = 0$. Az egyenlőség tehát csak akkor lehet igaz, ha $\cos x = 1$ és $\sin 3x = 0$, azaz $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3510 Az egyenlet értelmezési tartománya: $0 \le x \le a$. Az egyenlet gyökei azok a valós számok, amelyekre teljesül, hogy



$$\pi \cdot \sqrt{x \cdot (a - x)} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

azaz

$$\sqrt{x \cdot (a - x)} = 2k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ és } k \ge 0.$$

Ebből adódik, hogy:

$$x \cdot (a - x) = (2k + 0{,}5)^2, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ és } k \ge 0.$$

Ha felvázoljuk az $x \mapsto x \cdot (a - x)$ függvény grafikonját, akkor láthatjuk, hogy az egyenletnek $(2k + 0{,}5)^2 < \frac{a^2}{4}$ esetén kettő, ha pedig $(2k + 0{,}5)^2 = \frac{a^2}{4}$, akkor csak egy gyöke van. Ahhoz tehát, hogy összesen 2001 gyöke legyen az egyenletnek, az kell, hogy $(2 \cdot 1000 + 0{,}5)^2 = \frac{a^2}{4}$ teljesüljön, amiből

$$a = 4001$$

adódik. Ekkor $k = 0, 1, 2, \ldots, 999$ esetén két-két megoldás, $k = 1000$ esetén pedig egy megoldás adódik, azaz a megoldások száma valóban 2001.

3511 A négyzetgyök értelmezése miatt teljesülnie kell, hogy $0 \le \pi^2 - x^2$, azaz $|x| \le \pi$, tehát:

$$-\pi \le x \le \pi.$$

Ennek megfelelően:

$$-\frac{\pi}{3} \le \sqrt{\pi^2 - x^2} - \frac{\pi}{3} \le \frac{2\pi}{3},$$

és a szinuszfüggvény értékkészlete alapján:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le f(x) \le 1.$$

3512 Alakítsuk át a $\sin x$-et tartalmazó törtet:

$$\frac{5\cdot\sin x-3}{\sin x+1}=5-\frac{8}{\sin x+1}.$$

Mivel $0<\sin x+1\le 2$ ezért $\dfrac{8}{\sin x+1}\ge 4$, és így $5-\dfrac{8}{\sin x+1}\le 1$, tehát:

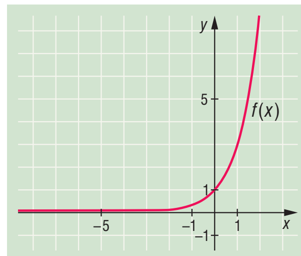
$$g(x)=0{,}1\cdot\frac{5\cdot\sin x-3}{\sin x+1}\le 0{,}1.$$

A függvény értékkészlete tehát a $]-\infty;\,0{,}1]$ intervallum.

Vegyes feladatok – megoldások

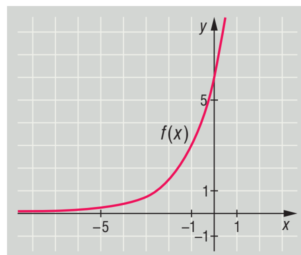
3513 *a)* Az $f(3)=27$ feltétel miatt $a^3=27$, amiből $a=3$. Az $f(x)=3^x$ függvény grafikonját az ábra mutatja.

b) A $3^x=\dfrac{1}{3}$ egyenlet megoldása $x=-1$, azaz a függvény az $\dfrac{1}{3}$ értéket -1-ben veszi fel.
A függvény a $\sqrt{3}$ értéket az $x=\dfrac{1}{2}$-ben veszi fel.



3514 Az f függvény grafikonját az ábra mutatja.

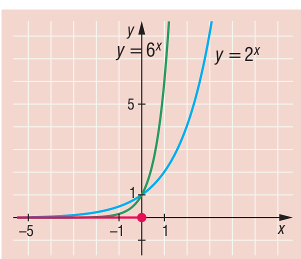
x	2	–1	–2	3
$f(x)$	24	3	$\frac{3}{2}$	48



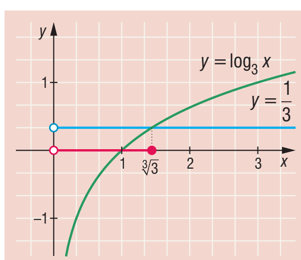
3515 A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-2.$$

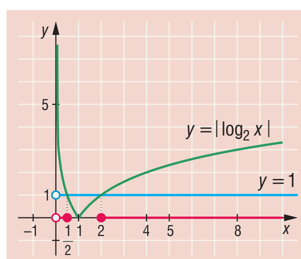
3516 *a)*



b)

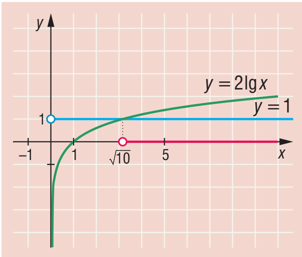


c)



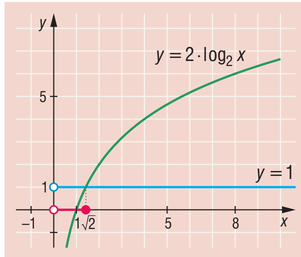
$x\le 0$; $\qquad 0<x\le\sqrt[3]{3}$; $\qquad 0<x\le\dfrac{1}{2}$, vagy $x\ge 2$;

d)



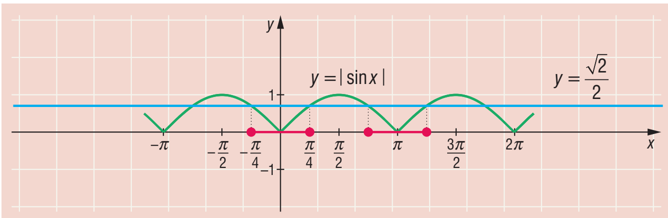
$x > \sqrt{10}$;

e)



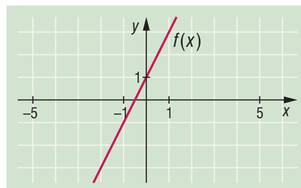
$0 < x \leq \sqrt{2}$;

f)

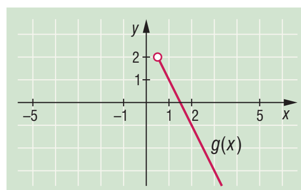


$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

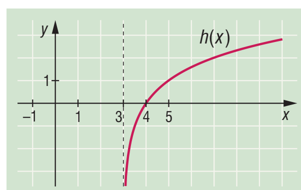
3517 *a)* $f(x) = \log_3 3^{2x} + 1 = 2x + 1, \quad (x \in \mathbb{R})$;



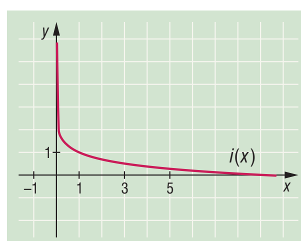
b) $g(x) = 2 - 3^{\log_3(2x-1)} = 2 - (2x - 1) = -2x + 3, \quad \left(x > \frac{1}{2}\right)$;



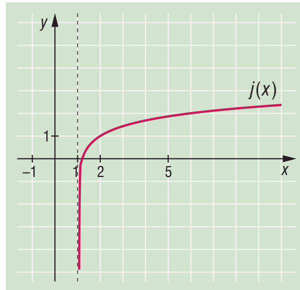
c) $h(x) = \log_2 \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \log_2(x - 3), \quad (x > 3)$;



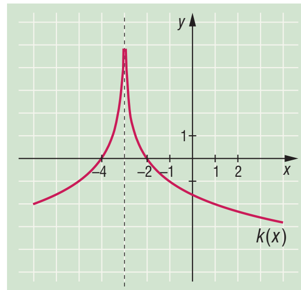
d) $i(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \log_3 x = -\frac{1}{2} \cdot \log_3 x + 1, \quad (x > 0)$;



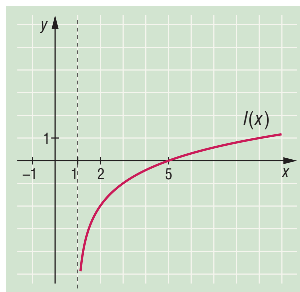
e) $j(x) = \log_5\left[\frac{1}{3}\cdot(3x-3)\right] + 1 = \log_5(x-1)+1, \quad (x>1);$



f) $k(x) = \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{(x+3)^2} = \log_{\frac{1}{2}}|x+3|, \quad (x \neq -3);$



g) $l(x) = \log_2\frac{1}{2}\cdot(2x-2) - 2 = \log_2(x-1)-2, \quad (x>1).$



3518 A függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = -2\cdot\sin 2x - 1$.

3519 *a)* A megadott adatokból felírható a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & -1 = \log_a 1 + b\\ (2) & \;\;\,0 = \log_a 2 + b\end{array}\right\}\quad a>0,\ a\neq 1.$$

(1)-ből kivonva a (2)-t:

$$-1 = \log_a 1 - \log_a 2,$$

$$-1 = \log_a\frac{1}{2},$$

$$\Updownarrow$$

$$a^{-1} = 2^{-1},$$

$$a = 2.$$

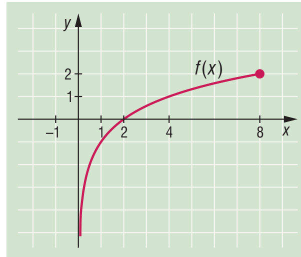
(1)-be visszaírva a kapott a értéket:

$$-1 = \log_2 1 + b \quad\Rightarrow\quad b = -1.$$

A kapott függvény:

$$g(x) = \log_2 x - 1 \ \ (x \in\,]0;\, 8]).$$

b) A függvény görbéje az ábrán látható.



c) Értékkészlet: $g(x) \le 2$, vagy másként: $y \in]-\infty;\, 2]$.

d) $A(5;\,1)$ pont esetén: $y = 1$ és $x = 5$, tehát:

$$1 = \log_2 5 - 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = \log_2 5 \quad \Rightarrow \quad 4 \ne 5.$$

Az A pont nem illeszkedik a grafikonra.

$B(2;\,0)$ esetén: $y = 0$ és $x = 2$, tehát:

$$0 = \log_2 2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \log_2 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1.$$

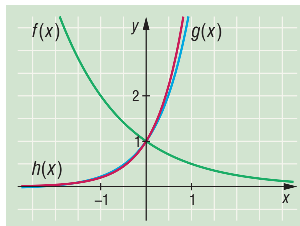
A B pont illeszkedik a grafikonra.

$C(16;\,3)$ esetén: $y = 3$ és $x = 16$, tehát:

$$3 = \log_2 16 - 1 \quad \Rightarrow \quad 4 - 1 = 3.$$

De a függvény értelmezési tartománya $]0;\,8]$, ezért nem illeszkedik C az adott függvény grafikonjára.

3520 *a)* $f(x)$ esetén:



$$f(-1) = 2, \quad \text{ekkor} \quad 2 = a^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

A hozzárendelési szabály:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

$g(x)$ esetén:

$$g(2) = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 16 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4, \text{ mivel } a > 0.$$

A hozzárendelési szabály:

$$g(x) = 4^x.$$

$h(x)$ esetén:

$$h(2) = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 25 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 5, \text{ mivel } a > 0.$$

A hozzárendelési szabály:

$$h(x) = 5^x.$$

c) Az értékkészletek:

$$f(x) \in \left[\frac{1}{2};\, 4\right], \qquad g(x) \in \left[\frac{1}{16};\, 4\right], \qquad h(x) \in \left[\frac{1}{25};\, 5\right].$$

d) Igen, a függvények mindkét esetében az $y = 2$ értéket veszik fel:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \qquad \text{és} \qquad f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2.$$

3521 *a)* Az A pont akkor és csak akkor illeszkedik az adott függvény grafikonjára, ha $p^2 = 9$, $p > 0$, azaz $p = 3$.

b) A logaritmus alapja csak 1-től különböző pozitív szám lehet, tehát $p > 0$, $p \ne 1$, és $\log_p 0{,}5 = 1$, azaz $p = 0{,}5$.

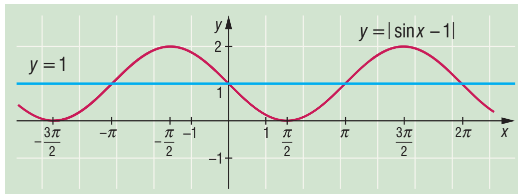
c) A függvény értelmezési tartománya miatt $-\pi < x + p < \pi$, tehát $x = 0$-ra $-\pi < p < \pi$, és $\sin p = 1$. Ebből következik, hogy $p = \dfrac{\pi}{2}$.

d) Az értelmezési tartomány miatt $p > 0$ és $\log_2 p = 0$, tehát $p = 1$.

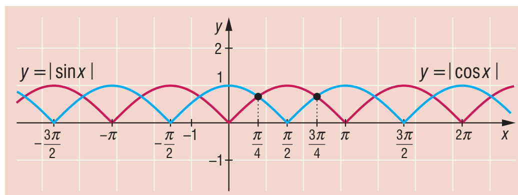
3522 *a)* A négyzetgyök miatt $4 - x \geq 0 \iff 4 \geq x$.
A tört nevezője nem lehet 0, ezért $\lg(x-3) \neq 0 \iff x - 3 \neq 1,\ x \neq 4$.
A logaritmus miatt $x - 3 > 0 \iff x > 3$. Tehát : $x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4$, vagyis: $x \in \,]3; 4[$.

b) A logaritmus miatt:
$$x^2 + 4x - 5 > 0 \iff x < -5 \text{ vagy } x > 1.$$
A négyzetgyök miatt:
$$\lg(x^2 + 4x - 5) \geq 0 \iff x^2 + 4x - 5 \geq 1 \iff x^2 + 4x - 6 \geq 0 \iff$$
$$\iff x < -\sqrt{10} - 2 \quad \text{vagy} \quad x > \sqrt{10} - 2.$$
Értelmezési tartomány:
$$x \in \,]-\infty; -\sqrt{10} - 2[\quad \text{vagy} \quad x \in \,]\sqrt{10} - 2; \infty[.$$

3523 Az ábráról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha:
$$(2k+1) \cdot \pi \leq x \leq (2k+2) \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



3524 Az ábráról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha:
$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

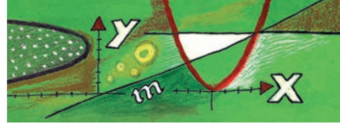


3525 *a)* Mivel $\sin x \leq 1$, és a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan nő:
$$2^{\sin x} \leq 2,$$
és a 2 értéket ott veszi fel, ahol $\sin x = 1$, azaz az $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken.

b) A $|\cos x| \leq 1$, és az egyenlőség csak az $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken teljesül. Ezért a 3-as alapú exponenciális függvény szigorú növekedése miatt:
$$3 \cdot 3^{|\cos x|} \leq 3^2 = 9.$$
A 9 értéket csak az $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken veszi fel a függvény.

c) A szinuszfüggvény tulajdonsága miatt $1 - \sin x \leq 2$, és itt az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\sin x = -1$, azaz $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Az 5 alapú exponenciális függvény szigorúan nő, ezért:
$$5^{1 - \sin x} \leq 5^2 = 25.$$
Az egyenlőség csak az $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken teljesül.

3526 Az f függvény hozzárendelési szabálya:
$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1, & \text{ha } x < 0, \\ -1 \cdot (x-2)^2 + 6, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$
azaz $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $p = -1$, $u = 2$ és $v = 6$.



3527 *a)* Az f függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(n) = 500\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

b) A feltételek szerint:

$$500\,000 \cdot 1{,}05^n \geq 500\,000 \cdot 1{,}5, \qquad \text{azaz} \qquad 1{,}05^n \geq 1{,}5.$$

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve:

$$n \cdot \lg 1{,}05 \geq \lg 1{,}5,$$

aminek megoldása $n \geq 8{,}31,$ azaz Gézának legalább 9 teljes évet kell várnia.

3528 *a)* Ha az éves szaporodás mértéke p százalék, akkor

$$10^7 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = 12{,}5 \cdot 10^6,$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = 1{,}25,$$

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[20]{1{,}25} \approx 1{,}0112,$$

amiből $p \approx 1{,}12\%.$ Az éves természetes szaporodás mértéke körülbelül $1{,}12\%.$

b) Az ország népessége 1990. január 1-én:

$$10^7 \cdot 1{,}0112^{10} \approx 11\,178\,167,$$

körülbelül 11 178 000 fő volt.

3529 *a)* Az egyenlet ekvivalens átalakításokkal

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$$

alakra hozható. A bal oldalon 1-nél kisebb alapú exponenciális függvények összege áll, ezért a bal oldalon álló függvény szigorúan monoton csökkenő. Mivel a jobb oldal konstans, ezért az egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet. Az egyenletnek $x = 2$ megoldása, ezért több megoldás nincsen.

b) Vezessük be az $a = 2^x$ helyettesítést. Ekkor az egyenlet

$$a^2 + (x - 7) \cdot a + 6 - x = 0$$

alakban írható. A kapott másodfokú egyenletre felírva a megoldóképletet, majd elvégezve a kijelölt műveleteket azt kapjuk, hogy

$$a_{1,2} = \frac{7 - x \pm \sqrt{(x-7)^2 - 4(6-x)}}{2} = \frac{7 - x \pm \sqrt{x^2 - 10x + 25}}{2} =$$

$$= \frac{7 - x \pm \sqrt{(x-5)^2}}{2} = \frac{7 - x \pm (x-5)}{2}.$$

Az egyenlet két megoldása:

$$a = 1, \qquad \text{vagy} \qquad a = 6 - x.$$

Az első esetben $2^x = 1,$ aminek megoldása $x = 0.$

A második esetben $2^x = 6 - x.$ Az egyenlet bal oldalán álló függvény szigorúan monoton növő, a jobb oldalon álló függvény pedig szigorúan monoton csökkenő. Ebből adódik, hogy az egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet. Mivel $x = 2$ kielégíti az egyenletet, ezért nincs több megoldás.

c) Az $f(x) = 3^x + x$ függvény két szigorúan monoton növő függvény összege, így f maga is szigorúan monoton növő. Ebből adódóan minden értékét egyszer veszi fel, azaz ha $f(x) = f(y)$, akkor $x = y$.

Mivel egyenletünk alapján $f\left(x^2\right) = f(x)$, ezért $x^2 = x$. Az egyenlet megoldásai: $x = 0$ és $x = 1$.

3530 *a)* A logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján az adott egyenlőtlenségből a következő ekvivalens egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_5 (x^2 - 11) > 0,$$

$$0 < \log_5 (x^2 - 11) < 1,$$

$$1 < (x^2 - 11) < 5,$$

$$12 < x^2 < 16,$$

$$2 \cdot \sqrt{3} < |x| < 4,$$

$$-4 < x < -2 \cdot \sqrt{3}, \quad \text{vagy} \quad 2 \cdot \sqrt{3} < x < 4.$$

b) A hatványazonosságok alkalmazásával ekvivalens átalakításokat végezhetünk:

$$4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x - 1},$$

$$4^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = \sqrt{3} \cdot 3^x + \frac{3^x}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{3}{2} \cdot 4^x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3^x, \quad \text{mivel } 3^x \neq 0, \text{ ezért:}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{az exp. fv. szig. monotonitása miatt:}$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

c) Átalakításokkal:

$$(0{,}4)^{\lg^2 x + 1} = (6{,}25)^{2 - \lg x^3}, \quad x > 0$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x + 1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2 - 3 \cdot \lg x},$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x + 1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{6 \cdot \lg x - 4}, \quad \text{a logaritmus fv. szig. monotonitása miatt:}$$

$$\lg^2 x + 1 = 6 \cdot \lg x - 4,$$

$$\lg^2 x - 6 \cdot \lg x + 5 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei:

$$\lg x_1 = 1 \quad \text{és} \quad \lg x_2 = 5,$$

amiből:

$$x_1 = 10 \quad \text{és} \quad x_2 = 10^5.$$

A kapott gyökök jók, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.

3531 Ekvivalens átalakítással 2-es alapú logaritmusra áttérve így írhatjuk az egyenlőtlenséget:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \le -2 \cdot \cos\alpha.$$

Nyilván $0 < x$, $x \ne 1$ jöhet szóba csak.

Ha $0 < x < 1$, akkor $\log_2 x < 0$ és így:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \le -2.$$

A $-2 \le -2 \cdot \cos\alpha$ egyenlőtlenség minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén igaz, tehát az egyenlőtlenség teljesül, ha:

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad 0 < x < 1.$$

Ha $x > 1$, akkor $\log_2 x > 0$, így:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \ge 2,$$

és itt egyenlőség csak $\log_2 x = 1$, azaz $x = 2$ esetén teljesül. Másrészt $-2 \cdot \cos\alpha \ge 2$ csak $\cos\alpha = -1$ esetén teljesül, ekkor az egyenlőség igaz, tehát:

$$\alpha = (2k+1) \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3532 A logaritmus azonosságait felhasználva ekvivalens átalakítással $f(x)$ értékét a következő alakra hozhatjuk:

$$f(x) = \log_2^2 x \cdot \left(\log_2^2 x + 12 \cdot (3 - \log_2 x)\right) = \log_2^2 x \cdot (\log_2^2 x - 12 \cdot \log_2 x + 36) =$$
$$= \left(\log_2 x \cdot (6 - \log_2 x)\right)^2.$$

Mivel $1 \le x \le 64$, ezért $0 \le \log_2 x \le 6$, tehát ha a $\log_2 x = z$ jelölést használjuk, a $\left(z \cdot (6-z)\right)^2$ legnagyobb értékét keressük, ha $0 \le z \le 6$.

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján:

$$z \cdot (6 - z) \le \left(\frac{z + 6 - z}{2}\right)^2 = 9,$$

és egyenlőség csak akkor teljesül, ha $z = 6 - z$, azaz $z = 3$.

Ezek szerint $f(x) \le 9^2 = 81$, és az egyenlőség $\log_2 x = 3$, azaz $x = 8$ esetén teljesül.

3533 Nyilván $x > 0$ jöhet szóba megoldásként. A 2-es alapú logaritmusfüggvény az értelmezési tartományában szigorúan nő, így mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát véve, és felhasználva a logaritmus azonosságait, a következő, az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(3 - \log_2^2 x - 2 \cdot \log_2 x) \cdot \log_2 x > 0.$$

Az első tényezőt további szorzattá alakítva, és –1-gyel szorozva ezt kapjuk:

$$(\log_2 x - 1) \cdot (\log_2 x + 3) \cdot \log_2 x < 0.$$

A három tényező szorzata akkor lehet negatív, ha mindhárom tényező negatív, azaz a legnagyobb tényező negatív:

$$\log_2 x + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x < -3, \quad \text{amiből} \quad 0 < x < \frac{1}{8},$$

vagy ha egy tényező negatív, kettő pozitív, azaz a legkisebb tényező negatív, a középső pozitív:

$$\log_2 x - 1 < 0 < \log_2 x \quad \Rightarrow \quad 0 < \log_2 x < 1, \quad \text{amiből} \quad 1 < x < 2.$$

3534 A következőket kell tudni x-ről: $|x| \ne 0$, $|x| \ne 1$, $x + 2 > 0$, azaz $x > -2$.

Ha $0 < |x| < 1$, akkor a logaritmusfüggvény csökken, így az adott egyenlőtlenség a következővé alakul:

$$x + 2 > x^2, \quad \text{azaz} \quad 0 > x^2 - x - 2 = (x-2) \cdot (x+1), \quad \text{amiből} \quad -1 < x < 2.$$

Ekkor tehát a megoldás:

$$-1 < x < 0 \quad \text{és} \quad 0 < x < 1.$$

Ha $|x| > 1$, akkor a logaritmusfüggvény nő, tehát az adott egyenlőtlenség a következővel ekvivalens:

$$x + 2 < x^2, \quad \text{azaz} \quad 0 < x^2 - x - 2 = (x-2)\cdot(x+1), \quad \text{amiből} \quad x < -1 \text{ vagy } x > 2.$$

Az értelmezési tartományt is figyelembe véve ekkor a következő számok elégítik ki az egyenlőtlenséget:

$$x > 2 \quad \text{és} \quad -2 < x < -1.$$

3535 Fejezzük ki $\operatorname{tg} x$-et $\sin x$ és $\cos x$ segítségével, majd ezeket $\frac{x}{2}$ szögfüggvényeivel:

$$\frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2\cdot\sin x}{1+\cos x} = 2\cdot\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = 2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Igazoltuk 10. osztályban, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $x < \operatorname{tg} x$, tehát az állítást igazoltuk.

3536 *a)* Az exponenciális függvény tulajdonságai alapján a hatvány értéke akkor és csak akkor nagyobb mint 1, ha vagy az alap 1-nél nagyobb és a kitevő pozitív (I. eset), vagy az alap 0 és 1 között van és a kitevő negatív (II. eset).

I. eset:

$$4x^2 + 2x + 1 > 1 \quad \Rightarrow \quad 2x\cdot(2x+1) > 0,$$

amiből

$$x > 0 \quad \text{vagy} \quad x < -0{,}5,$$

valamint:

$$x^2 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot(x-1) > 0,$$

amiből

$$x > 1 \quad \text{vagy} \quad x < 0.$$

Tehát ebben az esetben az $x > 1$, illetve $x < -0{,}5$ valós számokra igaz az egyenlőtlenség.

II. eset:

$$0 < 4x^2 + 2x + 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 2x\cdot(2x+1) < 0,$$

amiből

$$-0{,}5 < x < 0,$$

illetve

$$x^2 - x < 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot(x-1) < 0,$$

amiből

$$0 < x < 1.$$

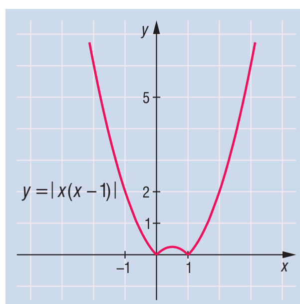
Mindkét kikötést egyetlen valós szám sem elégíti ki, tehát itt nincs megoldás.

b) Az exponenciális függvény tulajdonságai alapján az eredeti egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$0 < |x\cdot(x-1)| < 2.$$

Ábrázolva az $x \mapsto |x\cdot(x-1)|$ függvény grafikonját, az ábráról leolvasható, de számolással is könnyen ellenőrizhető, hogy a megoldások:

$$-1 < x < 0, \quad 0 < x < 1 \quad \text{és} \quad 1 < x < 2.$$



c) A logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján 2 eset lehetséges.

I. eset: $0 < x^2 < 1$ és $0 < 3 - 2x < x^2$ teljesül.

Az első egyenlőtlenségből

$$-1 < x < 0 \quad \text{vagy} \quad 0 < x < 1,$$

a másodikból

$$1 < x < 1{,}5 \quad \text{vagy} \quad x < -3,$$

tehát ezeket kielégítő valós szám nincs.

II. eset: $1 < x^2$ és $3 - 2x > x^2$ teljesül.

Ebből

$$x < -1 \quad \text{vagy} \quad x > 1,$$

illetve

$$0 > x^2 + 2x - 3 = (x-1)\cdot(x+3), \quad \text{azaz} \quad -3 < x < 1.$$

Mindkét feltételt a $-3 < x < -1$ számok elégítik ki, ezek az egyenlőtlenség megoldásai.

3537 Indirekt bizonyítást célszerű választani. Tegyük fel, hogy az f függvénynek van egy $p > 0$ periódusa, azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re $f(x+p) = f(x)$. Használjuk a szorzattá alakító azonosságokat:

$$f(x+p) - f(x) = 2\cdot\sin\frac{p}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{p}{2}\right) + 2\cdot\sin\frac{p\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x + \frac{p\cdot\sqrt{2}}{2}\right)$$

minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ez csak akkor teljesülhet, ha $\sin\frac{p}{2} = 0$, azaz $p = 2k\pi$, valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén és $\sin\frac{p\cdot\sqrt{2}}{2} = 0$, azaz $p = \sqrt{2}\cdot 2n\pi$, valamely $n \in \mathbb{Z}$ esetén. Ebből az következik, hogy van olyan $k, n \in \mathbb{Z}$, hogy $\sqrt{2}\cdot n = k$, $n \neq 0$ miatt $\sqrt{2} = \frac{k}{n}$, ami ellentmondás, mert $\sqrt{2}$ irracionális.

3538 A $\sin\sqrt{3}\cdot x$ értéke $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ szerint periodikus, $\cos\frac{x}{\sqrt{3}}$ értéke $2\pi\cdot\sqrt{3}$ szerint periodikus.

Akkor lesz $f(x)$ periodikus, ha van olyan k és n egész, hogy:

$$k\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = l\cdot 2\pi\cdot\sqrt{3}, \quad l \neq 0.$$

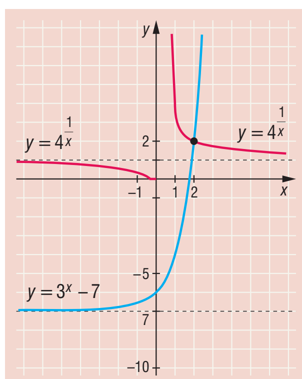
Ebből $\frac{k}{l} = 3$ adódik, $k = 3$, $l = 1$ esetén ez teljesül. Tehát az f függvény $2\pi\cdot\sqrt{3}$ szerint periodikus.

Valóban:

$$f\left(x + 2\pi\cdot\sqrt{3}\right) = \sin\left(\sqrt{3}\cdot x + 6\pi\right) - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + 2\pi\right) = f(x).$$

3539 Ábrázoljuk az $x \mapsto 3^x - 7$, $x \in \mathbb{R}$ és $x \mapsto 4^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ függvényeket.

Az $x \mapsto 3^x - 7$, $x \in \mathbb{R}$ függvény végig nő, az $x \mapsto 4^{\frac{1}{x}}$ függvény $]-\infty; 0[$-ban csökken és $]0; +\infty[$-ban is csökken, de mindenütt pozitív. Így legfeljebb egy gyök lehet. Az $x = 2$ jó gyöknek, itt mindkét függvény értéke 2.



3540 *a)* Ha $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, akkor $0<\sin x<x$, és

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=1-2\cdot\sin^2\frac{x}{2}>1-2\cdot\frac{x^2}{4}=1-\frac{x^2}{2}.$$

Ha $0<x<2$, akkor $x^2<2x$, azaz $\dfrac{x^2}{2}<x$, tehát:

$$\cos x>1-\frac{x^2}{2}>1-x.$$

b) Mivel $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, akkor $0<\sin x<x<\operatorname{tg} x$, ebből következik, hogy:

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x>1-x.$$

Tehát az *a)*-ban igazolt azonosság felhasználásával:

$$x>1-\frac{\sin x}{x}>0.$$

3541 Ismert azonosságok alapján:

$$(1)\ \ \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad (2)\ \ 1=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

(1) és (2) összegéből:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},$$

és mivel $\cos\dfrac{\alpha}{2}\ge 0$, ezért:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

(1) és (2) különbségéből:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

és mivel $\sin\dfrac{\alpha}{2}\ge 0$, ezért:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

3542 A pontos értékek:

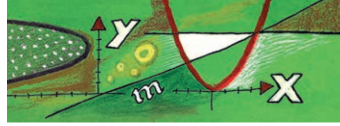
$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\qquad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2};\qquad \sin\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$$

3543 Szorozzuk meg a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalát $16\cdot\sin\dfrac{x}{16}$-tal:

$$16\cdot\sin\frac{x}{16}\cdot\cos\frac{x}{16}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}=\sin x.$$

A $\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ azonosságot négyszer alkalmazva a bal oldalon, éppen a jobb oldalt kapjuk.



3544 Azonosságok alkalmazásával $f(x)$ így írható:

$$f(x) = \sin 5x \cdot \sin 2x.$$

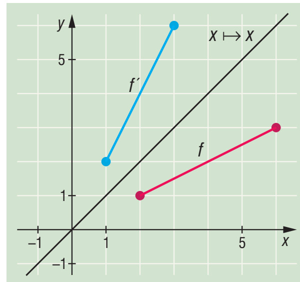
Mivel $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\sin 2x > 0$, így $f(x) > 0$ akkor és csak akkor, ha $\sin 5x > 0$. Ez pedig akkor teljesül, ha:

$$0 < x < \frac{\pi}{5} \quad \text{és} \quad \frac{2\pi}{5} < x < \frac{\pi}{2}.$$

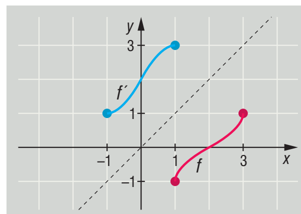
Inverz függvények – megoldások

3545 Az f függvény értelmezési tartománya: $[2; 6]$, értékkészlete $[1; 3]$, hozzárendelési szabálya: $x \mapsto \frac{1}{2}x$.

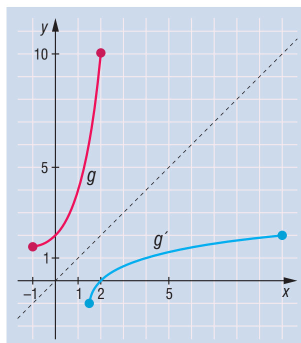
Az f függvény grafikonjának tükörképét f' jelöli az ábrán. Az f' függvény értelmezési tartománya: $[1; 3]$, értékkészlete: $[2; 6]$, hozzárendelési szabálya: $x \mapsto 2x$.



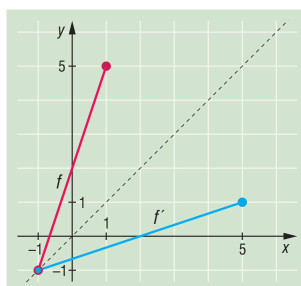
3546 Az f függvény inverzének értelmezési tartománya: $[-1; 1]$, értékkészlete $[1; 3]$. Az inverz függvénynek nincs zérushelye.



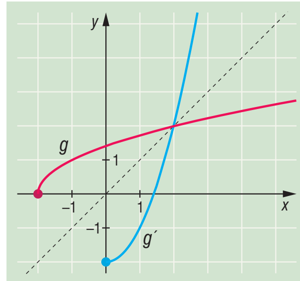
3547 A g' inverz függvény értelmezési tartománya: $\left[\frac{3}{2}; 10\right]$, értékkészlete: $[-1; 2]$, zérushelye: $x = 2$. A g és inverz függvénye szigorúan monoton növő függvények.



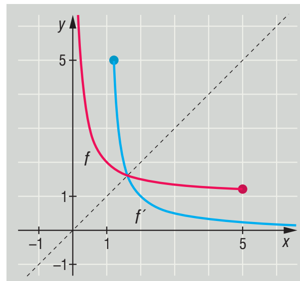
3548 *a)* Az inverz függvény értelmezési tartománya: $[-1; 5]$, hozzárendelési szabálya: $f'(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.



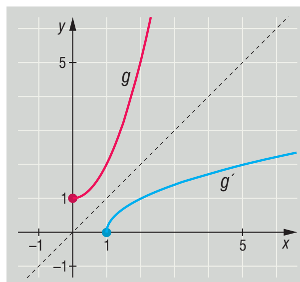
b) Az inverz függvény értelmezési tartománya: $[0; +\infty[$, továbbá $g'(x) = x^2 - 2$.



3549 *a)* Az inverz függvény értelmezési tartománya: $\left[\frac{6}{5}; +\infty\right[$, hozzárendelési szabálya: $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$.



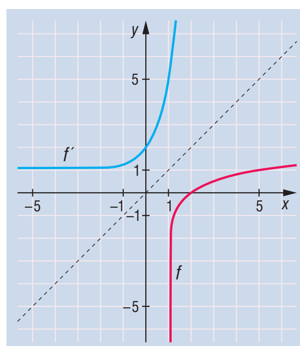
b) Az inverz függvény értelmezési tartománya: $[1; +\infty[$, hozzárendelési szabálya: $g'(x) = \sqrt{x-1}$.



3550 *a)* $f_1\colon \mathbb{R} \to]-\infty; 0[,\ x \mapsto -2^x$; *b)* $f_2\colon \mathbb{R} \to]0; +\infty[,\ x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;

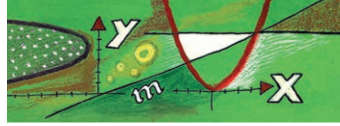
c) $f_3\colon]0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \log_2 x$; *d)* $f_4\colon]-\infty; 0[\to \mathbb{R},\ x \mapsto -\log_2(-x)$.

3551 A logaritmus azonosságai alapján $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \log_2(x-1)$. Az inverz függvény hozzárendelési szabálya: $f'(x) = 4^x + 1$, értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete: $]1; +\infty[$.



3552 Teljes négyzetté alakítás után $f(x) = (x-3)^2 - 5$, így $g(x) = \sqrt{x+5} + 3$. Ekkor

$$g(4) + f(4) = \sqrt{4+5} + 3 + (4-3)^2 - 5 = 2.$$

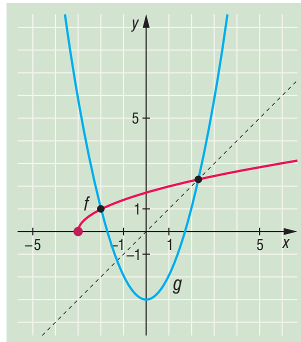


3553 Az f függvény értékkészlete: $[-4; +\infty[$, ez egyben a g függvény értelmezési tartománya is. Az f függvény inverz függvényének hozzárendelési szabálya: $g(y) = \sqrt{y+4}$. Ekkor

$$f(g(y)) = (g(y))^2 - 4 = \left(\sqrt{y+4}\right)^2 - 4 = y + 4 - 4 = y,$$

és pontosan ezt kellett igazolni.

3554 Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \geq -3$. Legyen $f(x) = \sqrt{x+3}$ és $g(x) = x^2 - 3$. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a két függvény grafikonját. Az ábra alapján láthatjuk, hogy az egyenletnek két megoldása van, továbbá az egyik gyök $x = -2$. Keressük az egyenlet másik, pozitív előjelű gyökét.



Ehhez vegyük észre, hogy az f függvény inverze épp a g függvény nemnegatív számok halmazára való leszűkítésével egyezik meg. Ez azt is jelenti, hogy ha az f függvény grafikonját tükrözzük az $y = x$ egyenletű egyenesre, akkor a tükörkép illeszkedik a g függvény grafikonjára. Ebből adódóan a két függvény grafikonjának (pozitív abszcisszájú) metszéspontja illeszkedik a két grafikon szimmetriatengelyére, vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre.

Az eredeti egyenlet pozitív megoldása így kielégíti az $x^2 - 3 = x$ egyenletet is. Az $x^2 - x - 3 = 0$ egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Mivel csak x_2 pozitív, ezért az egyenlet megoldásai:

$$x = -2 \quad \text{és} \quad x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$