Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

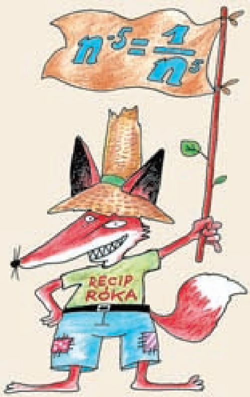
MEGOLDÁSOK

9

TARTALOMJEGYZÉK

Megoldások – 9. évfolyam

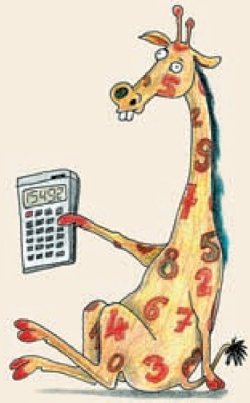
9.1. *Kombinatorika, halmazok* (1001–1106)



9.2. *Algebra és számelmélet* (1107–1193)

9.3. *Függvények* (1194–1282)

9.4. *Háromszögek, négyszögek, sokszögek* (1283–1474)



9.5. *Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek* (1475–1570)

9.6. *Egybevágósági transzformációk* (1571–1759)

9.7. *Statisztika* (1760–1807)

9.1. KOMBINATORIKA, HALMAZOK

Számoljuk össze! – megoldások

1001 *a)* $2\cdot 2\cdot 2=8$ *b)* 10, 6, 4, 2, 0, –2, –4, –8

1002 *a)* 4 *b)* 8, 4, 0, –4

1003 *a)* 6 *b)* 3, mégpedig a –2, –8 és 0.

1004 $2\cdot 3\cdot 3=18$

1005 $3\cdot 4\cdot 4\cdot 2=96$

1006 $3\cdot 3=9$

1007 *a)* $3\cdot 2\cdot 1\cdot 3=18$

1008 $1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^4=16$

1009 $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5=32$

1010 *b)* $3\cdot 2\cdot 1=6$ *c)* 2

1011 *a)* A mozdonyokra $2\cdot 1$, a kocsikra $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ lehetősége van egymástól függetlenül. Ez összesen $2\cdot 120=240$.

b) Mozdonyt választani most is 2 lehetősége van, utána pedig az első kocsit 5, a másodikat 4 járműből választhatja ki. Így összesen $2\cdot 5\cdot 4=40$-féle szerelvényt állíthat össze.

1012 *a)* Mivel megkülönböztetjük a helyeket, az olyan, mintha egyszerű lineáris sorba kellene tennünk három személyt. Vagyis a megoldás $3\cdot 2\cdot 1=6$.

b) Ha a székeket nem különböztetjük meg egymástól, akkor úgy kell eljárnunk, mint a körberakásoknál általában. Válasszuk ki egyiküket, és vele kezdjük a sort. Az eredmény $2\cdot 1=2$ lehetőség. (Nyilván, ha A már ül, akkor B és C legfeljebb helyet cserélhetnek.)

c) Mivel összesen hárman vannak, így mindig mindegyikük szomszédja a másik kettőnek. (Háromszögben minden csúcs szomszédos.) Az eredmény tehát 1.

1013 *a)* A halmazok elemeinek párosítását összesen $3\cdot 2\cdot 1=6$-féleképpen végezhetjük el.

Az egyes hozzárendelések során a következő függvényeket nyerjük:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$i(x)$	$j(x)$	$k(x)$
1	2	2	4	4	6	6
2	4	6	2	6	4	2
3	6	4	6	2	2	4

b) A függvények közül $f(x)$ és $j(x)$ lineáris (ábrázolva a pontokat, ezeket tudjuk egyetlen folytonos egyenessel összekötni). A szabályaik:

$$f(x)=2x \quad \text{és} \quad j(x)=-2x+8.$$

1014 *a)* Legyen a két szín mondjuk piros (P) és fekete (F). A felső sor-alsó sor ekkor: PF-FP vagy FP-PF. Tehát két lehetőség van.

b) Legyen a három szín mondjuk piros (P), kék (K) és fekete (F). Ha a bal felső sarokba pl. P-t írunk, akkor mellé és alá 2-2 lehetőség van a sor és oszlop kitöltésére. Ha mondjuk a felső sor PFK, akkor bármit is írunk a második sor első négyzetébe, az utána levők már meghatározottak

(hiszen a harmadik színt nem írhatjuk saját maga alá, oda P-t kell írni). Az utolsó sor mindenképpen eleve meghatározott. Mivel a bal felső négyzetet háromféleképp tölthetjük ki, így összesen $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ lehetőségünk van a négyzet színezésére.

Megjegyzés: Ha elég türelmesek vagyunk, akár egyesével is összegyűjthetjük a megoldásokat. Érdemes jó stratégiát kitalálni, hogy ne hagyjunk ki színezést, illetve ne készítsük el kétszer ugyanazt!

1015 *a)* A hátsó két ajtót összesen 3 helyzetbe mozgathatjuk. Ugyanis vagy egymás mellett vannak a jobb oldalon, vagy egymás mellett vannak a bal oldalon, vagy a két szélen vannak.

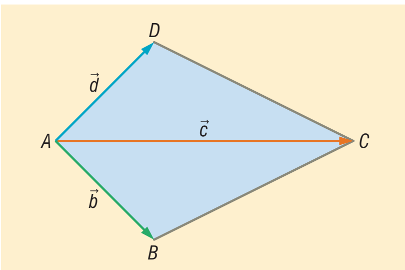
b) Az *a)* kérdésre adott választól függetlenül az első (tükrös) ajtó 3 helyzetben lehet: jobb oldalon, középen, bal oldalon. Így a válasz: $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$.

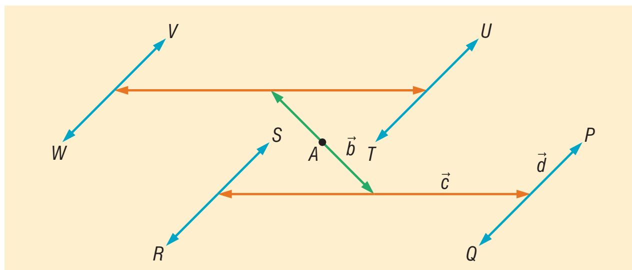
c) Az alsó részen a fentihez hasonlóan ismét 9 lehetőség van az ajtók beállítására. Mivel az alsó és a felső rész egymástól függetlenül állítható, ezért a keresett érték $(3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^4 = 81$.

1016 A feladatra két megoldást is mutatunk.

Rajzoljunk egy $ABCD$ deltoidot, és irányítsuk a kért szakaszokat mondjuk A-tól.

Legyen $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. A $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ vektorok összeadása tulajdonképpen egy útvonalat ad meg. Mindegyik vektort kétféle iránnyal tekinthetjük. Mivel a deltoid AB és AD oldala, illetve AC átlója nem lehetnek párhuzamosak, így a különféle irányításokkal összesen nyolc különböző pontba jutunk el (az eredeti irányítással például a P pontba jutunk A-ból).





A másik megoldáshoz jusson eszünkbe, hogy valamely $\vec{b}$ vektort ellentétesen irányítva $-\vec{b}$ vektort kapjuk! Ekkor a feladatot értelmezhetjük a következőképpen is: hányféleképpen oszthatjuk ki a + és – előjeleket az eredeti vektorösszegben: $\left(\square\vec{b}\right) + \left(\square\vec{c}\right) + \left(\square\vec{d}\right)$? Mivel három helyre kell a kétféle jelből beírnunk egyet-egyet, ezért a megoldások száma $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Sajnos ennyivel még nem fejezhetjük be a megoldásokat, diszkutálnunk is kell a feladatot. Ha ugyanis a deltoid rombusz, akkor $\vec{b} + \vec{d} = \vec{c}$. Ekkor előfordul, hogy különböző előjelkiosztással ugyanabba a pontba jutunk: $\left(\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = -\vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{0};\ S = A = T\right)$, így csak 7 különböző megoldást kapunk.

Megjegyzés: A vektorok összeadása felcserélhető művelet, ezért $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ sorrendjét nem kell figyelembe vennünk a megoldás során!

Halmazok – megoldások

1017 *a)* Nem, mert nem egyértelmű.

b) Igen.

c) Igen.

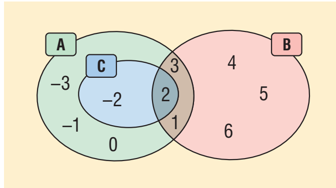
d) Nem, mert nincs róla információnk.

e) Igen.

1018 *a)* $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 6\}$, $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } 0 < x < 10\}$

b) C = {rövid magyar magánhangzók}, D = {a „Rákóczi FC” mássalhangzói}

1019 A Venn-diagram az ábrán látható. (➡)



1020 *a)* Igen. *b)* Nem.
c) Nem. *d)* Igen.

1021 *a)* Végtelen sok ilyen szám van.
b) $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$

1022 Jelölések: ász: á, király: k, felső: f, alsó: a. A kételemű részhalmazok:

$$\{á; k\}, \quad \{á; f\}, \quad \{á; a\}, \quad \{k; f\}, \quad \{k; a\}, \quad \{f, a\}.$$

1023 *a)* $\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 5\}$, $\{3; 5\}$, $\{2; 3; 5\}$.
b) $\{1; 4\}$, $\{1; 9\}$, $\{1; 16\}$, $\{4; 9\}$, $\{4; 16\}$, $\{9; 16\}$.

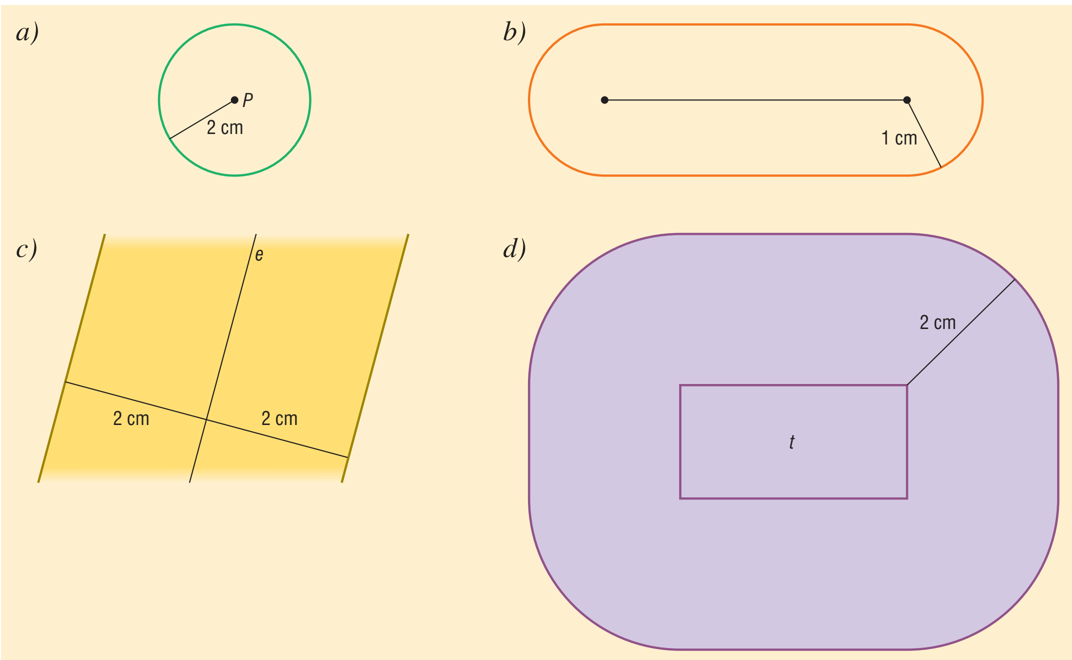
1024 A-ra végtelen sok megoldás adható, a legszűkebb: $A = \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$.

1025 *a)* $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$, $\varnothing$.
b) Végtelen sok.

1026 *a)* Igaz, hamis, igaz, igaz. *b)* Igen, az E halmaz. Nincs.
c) Igen, az A halmaz és a C halmaz.

1027 *a)* $R \subset P$ igaz. *b)* $P \subset T$ igaz.
c) Egyik sem igaz. *d)* Igaz, igaz, hamis, hamis, hamis, hamis, igaz.

1028 *a)* Körvonal. *b)* „Futópálya”.
c) Zárt sáv. *d)* Lekerekített sarkú téglalap (t hozzátartozik).



1029 *a)* Ha B-nek van olyan eleme, amely nem eleme A-nak, ugyanakkor nincs olyan elem, amely mindkét halmazban benne van.

b) Ha B-nek nincs olyan eleme, amely nem eleme A-nak, ugyanakkor nincs olyan elem, amely mindkét halmazban benne van, azaz ha $B = \emptyset$.

c) A második halmaz részhalmaza a harmadiknak.

1030 *a)* Gömbfelület.

b) Nyitott gömbtest.

c) Az AB szakaszt felező, rá merőleges sík.

d) Hengerfelület, tengelye az e egyenes.

1031 $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 2; 4\}$, $\{1; 2; 5\}$, $\{1; 2; 6\}$, $\{1; 3; 4\}$, $\{1; 3; 5\}$, $\{1; 3; 6\}$, $\{1; 4; 5\}$, $\{1; 4; 6\}$, $\{1; 5; 6\}$, $\{2; 3; 4\}$, $\{2; 3; 5\}$, $\{2; 3; 6\}$, $\{2; 4; 5\}$, $\{2; 4; 6\}$, $\{2; 5; 6\}$, $\{3; 4; 5\}$, $\{3; 4; 6\}$, $\{3; 5; 6\}$, $\{4; 5; 6\}$.

1032 *a)* A kitöltött táblázat:

	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c, d\}$
0 elemű részhalmaz	1	1	1	1
1 elemű részhalmaz	1	2	3	4
2 elemű részhalmaz	–	1	3	6
3 elemű részhalmaz	–	–	1	4
4 elemű részhalmaz	–	–	–	1

b) A számok a Pascal-háromszög soraiból valók. Ennek ötödik sora: 1; 5; 10; 10; 5; 1.

1033 *a)* „Mindenki költözzön öttel nagyobb sorszámú szobába!” Ekkor felszabadul az első öt szoba, így oda be lehet költöztetni a család mind az öt tagját.

b) Végtelen sokszor végtelen sok érkezőt kell elszállásolnunk. Először is keressünk jól beazonosítható végtelen láncokat a természetes számok között. Ilyenek például a különböző prímhatványok: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, …; 3^1, 3^2, 3^3, …; 5^1, 5^2, 5^3, … stb. A természetes számok között végtelen sok prím van, és minden egyes prím hatványainak sorozatában is végtelen sok elem van. Tehát van hely a végtelen sokszor végtelen sok érkezőnek, csak fel kell szabadítanunk a szobákat. Ehhez küldjük minden n-edik prímhatvány szoba lakóját a $2n$-edik prím ugyanannyiadik hatványú szobába.

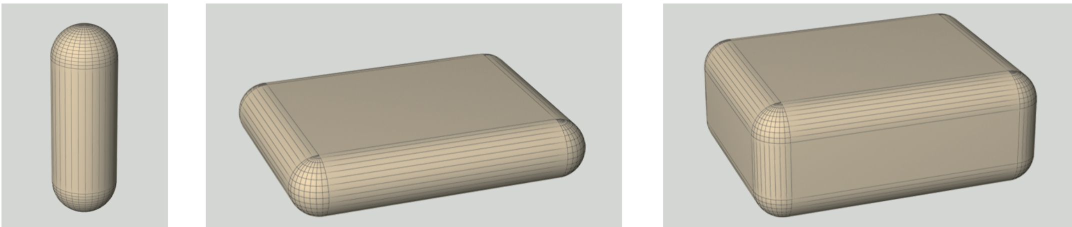
Példaként tekintsük az 5^7 sorszámú szoba lakóját. Ez a szobaszám a *harmadik* prím hetedik hatványa, ezért lakójának a *hatodik* prím hetedik hatványa sorszámú szobába kell költöznie, azaz új szobaszáma 13^7 lesz. És így tovább minden prímhatvány sorszámú szobára. Ekkor üresen maradnak az összes páratlanadik prímhatvány-láncolatban szereplő számú szobák, hiszen azokba nem költözik senki. Oda kell beköltöztetni az érkezőket, mégpedig a következőképpen:

A buszok ülésszáma (pl. s_5) jelentse a hatványkitevőt, a busz sorszáma pedig azt, hogy hányadik láncba kerül az utas a következő formula szerint: *az n-edik buszhoz tartozzon a (2n – 1)-edik prím.* Konkrét példán: keressük meg, melyik szobába kell mennie a B_4 jelű busz 13. székén helyet foglaló utasnak. Szobaszáma a $(2 \cdot 4 - 1) = 7$-edik prím hatványainak láncolatában a 13. láncszem, vagyis a 13. hatvány. Mivel a hetedik prím a 17, így a kedves vendég számára a 17^{13} sorszámú szoba lesz kiutalva.

1034 *a)* A szakasz mentén egy hengerpalást, a két végén pedig egy-egy félgömb. (Gyógyszeres kapszula.) Csak a felület tartozik a halmazhoz!

b) A téglalappal párhuzamosan egy-egy vele egybevágó téglalap (alatta és felette), oldalainál félhengerek, sarkainál pedig negyedgömbök. (Hasonlóan, mint amikor a légpárnás hajó felfújja a légpárnákat.) A megoldás az egész test, határoló felületével együtt.

c) Lekerekített szélű téglatest, ahol a lapok egybevágóak az eredeti lapjaival, oldalélei negyedhengerek, sarkai nyolcadgömbök. (Régi utazóbőrönd.) Csak a nyitott test tartozik a halmazhoz!



Megjegyzés: Érdemes meggondolni, mennyiben változnak a fenti alakzatok, ha kiindulásul nem zárt, hanem nyitott (vagy félig nyitott) szakaszt, téglalapot, téglatestet adunk meg!

Halmazműveletek – megoldások

1035 $A \cap B = \{7; 43; 61\}$

1036 *a)* Négy: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1; 3\}$. *b)* $\varnothing$, $\overline{A}$. Az is lehet, hogy a kettő egybeesik, ha $A = U$.

1037 $A \cap D = \varnothing$; $B \cap C = \varnothing$; $E \cap D = \varnothing$; $E \cap C = \varnothing$; $E \cap B = \varnothing$; $E \cap A = \varnothing$.

1038 *a)* $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$; $A \cap B = \{1; 3; 5\}$; $A \setminus B = \{2; 4; 6\}$; $B \setminus A = \{7; 9\}$.

b) Bármely C halmaz, melynek részhalmaza a $\{7; 9\}$.

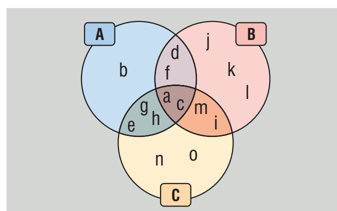
1039 *a)* Komplementerek.

b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ vagy $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $\overline{A \cup B} \cup (A \cap B)$ vagy $\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B)$.

1040 *a)* $A \setminus B = \{\text{b; e; g; h}\}$,
$B \setminus C = \{\text{d; f; j; k; l}\}$,
$A \cap C = \{\text{a; c; e; g; h}\}$,
$A \cup B = \{\text{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; k; l; m}\}$.

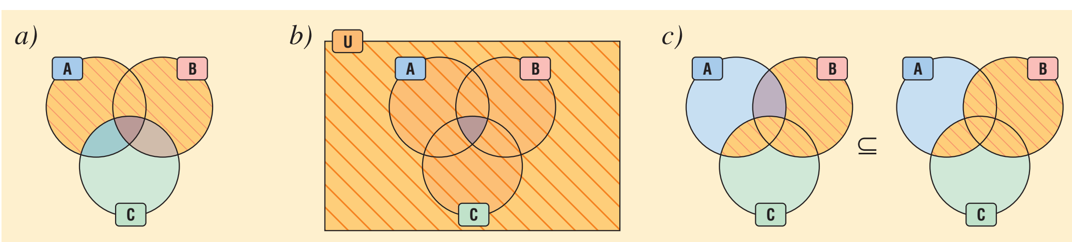
b) $A \setminus (B \cup C) = \{\text{b}\}$.

c) A Venn-diagram az ábrán látható.



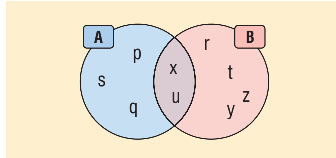
1041 *a)* A két halmaz megegyezik. *b)* A két halmaz megegyezik.

c) Az első részhalmaza a másodiknak.



1042 Készítsünk Venn-diagramot. Először írjuk be a metszetet (x; u), majd töltsük fel a B halmaz A-n kívül eső részét (r; t; y; z). Amit az unióból eddig nem írtunk sehova, az kerül az A halmaz B-n kívüli részébe. Így kapjuk:

$$A = \{p, q, s, u, x\}.$$

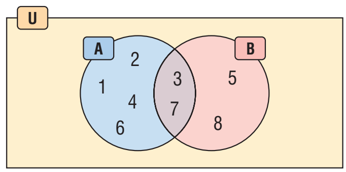


1043 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* $(A\setminus B)\setminus C \subseteq A\setminus(B\setminus C)$

1044 *a)* $A \cup \{1; 2; 3; 4\} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$;
$A \cap \{-1; -2; -3; -4\} = \{-1; -2; -3\}$;
$A\setminus\{0; 2; 4\} = \{-3; -2; -1; 1\}$;
$\{\text{egyjegyű pozitív prímek}\}\setminus A = \{3; 5; 7\}$.
b) $U = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, ezért $\overline{A} = \{-5; -4; 3; 4\}$.

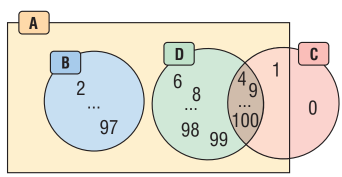
1045 *a)* Bármely kettő diszjunkt.
b) $[B\setminus(A \cup C)] \cup [(A \cap C)\setminus B]$;
$[C\setminus(A\setminus B)]\setminus(B\setminus A)$;
$\overline{A \cup B \cup C} \cup \left[((A \cup C) \cap B)\setminus(A \cap B \cap C)\right]$.
c) $A\setminus(B \cup C)$

1046 Az utolsó feltétel szerint A vagy B halmazon kívül nincsenek további elemek az univerzumban. Haladjunk a Venn-diagramban belülről kifelé. Így $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 7\}$.



1047 *a)* Elemeikkel megadva: $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
$A = \{2; 3; 5; 7\}$;
$B = \{0; 4; 6; 8; 9\}$.
Ekkor $\overline{A \cup B} = \{1\}$.
b) Elemeikkel megadva: $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
$A = \{2; 3; 5; 7\}$;
$B = \{6; 7; 8; 9\}$.
Ekkor $\overline{A \cup B} = \{0; 1; 4\}$.

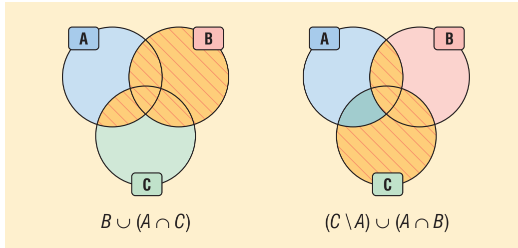
1048 *a)* Elemeikkel megadva: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots; 96; 97; 98; 99; 100\}$;
$B = \{2; 3; 5; 7; 11; \ldots; 73; 79; 83; 89; 97\}$;
$C = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100\}$;
$D = \{4; 6; 8; 9; 10; \ldots; 94; 95; 96; 98; 99\}$.
Így $B, D \subseteq A$.
b) Igen, B és C diszjunkt, hiszen nem lehet egy szám egyszerre prím és négyzetszám. Hasonlóan nem lehet egyszerre prím és összetett is egy szám, ezért B és D is diszjunkt.
c) A Venn-diagram az ábrán látható.



1049 *a)* A Venn-diagramok az ábrán láthatók.

b) Töltsük fel a Venn-diagram összes mezőjét egy-egy számmal, például: $A = \{1; 2; 4; 5\}$, $B = \{2; 3; 5; 6\}$, $C = \{4; 5; 6; 7\}$.

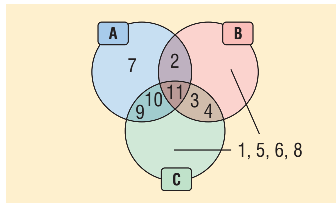
Ekkor
$$B \cup (A \cap C) = \{2; 3; 4; 5; 6\}$$
és
$$(C \setminus A) \cup (A \cap B) = \{2; 5; 6; 7\}.$$



$B \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $(C \setminus A) \cup (A \cap B)$

c) A másik halmazhoz nem tartozó részeket üressé kell tennünk:
$$B \cup (A \cap C) \subseteq (C \setminus A) \cup (A \cap B), \quad \text{ha} \quad (A \cap C) \setminus B = B \setminus (A \cup C) = \varnothing.$$
Fordítva,
$$(C \setminus A) \cup (A \cap B) \subseteq B \cup (A \cap C), \quad \text{ha} \quad C \setminus (A \cup B) = \varnothing.$$

1050 *a)* A 2 eleme A-nak és B-nek is, de nem eleme C-nek. Hasonlóan, 11 eleme mindhárom halmaznak. A 3 és 4 helye is rögzített. Ebből és az utolsó feltételből tudjuk, hogy az 1, 5, 6, 8 elemek valamilyen elosztásban a B vagy C halmaz mástól diszjunkt részébe kerülhetnek. A maradék 9 és 10 így csak az $(A \cap C) \setminus B$ részbe írhatók. Azaz $A = \{2; 7; 9; 10; 11\}$. A Venn-diagram az ábrán látható.



b) A B halmaz már most is tartalmaz két páratlan számot, így oda nem kerülhet 1 és 5, ezek csak C-be eshetnek. A 6 és 8 helye azonban továbbra is kérdéses. Mivel több információnk nincs, így négy megoldás lehetséges:
$$6, 8 \in B; \quad \text{vagy} \quad (6 \in B \text{ és } 8 \in C);$$
$$\text{vagy} \quad (6 \in C \text{ és } 8 \in B); \quad \text{vagy} \quad 6, 8 \in C.$$

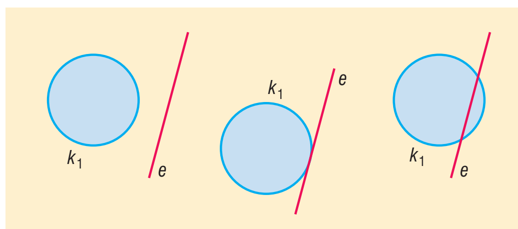
Megoldás	*B*	*C*
1.	{2; 3; 4; 11; **6; 8**}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11}
2.	{2; 3; 4; 11; **6**}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11; **8**}
3.	{2; 3; 4; 11; **8**}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11; **6**}
4.	{2; 3; 4; 11}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11; **6; 8**}

1051 *a)* A metszet lehet

– üres halmaz (ekkor e és k_1 *elkerülők*, $|e \cap k_1| = 0$);

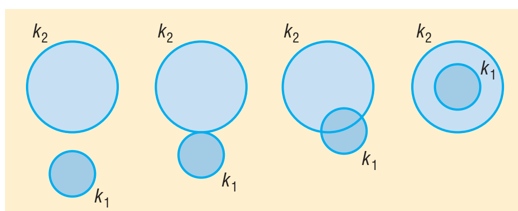
– egyetlen pont (ekkor e és k_1 *érintők*, $|e \cap k_1| = 1$);

– zárt szakasz (ekkor e és k_1 *metszők*, $|e \cap k_1| = \infty$).



(Utóbbi két pont lenne, ha körvonalról lenne szó, most viszont zárt körlapunk van.)

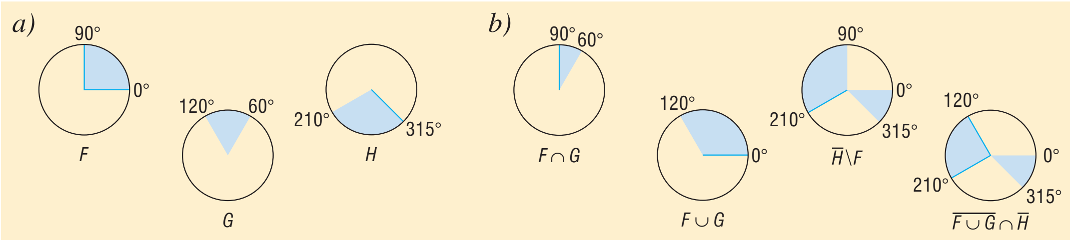
b) A metszeteket lásd az ábrákon. Két különböző sugarú körlap lehet *diszjunkt, érintő, metsző,* és *részhalmaza* egyik a másiknak. Koncentrikus körlapok esetén is ez utóbbi a helyzet.



c) Körgyűrű, a két kör közötti rész. A külső körvonal igen, a belső körvonal nem tartozik a halmazhoz!

Megjegyzés: Érdemes átgondolni, mi változik, ha zárt helyett nyitott körlapot, illetve a körvonalat adjuk meg!

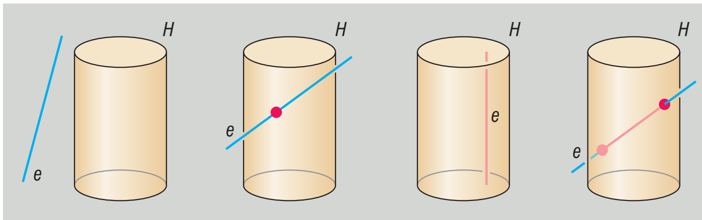
1052 A megoldás az ábrákról leolvasható.



1053 *a)* A metszet üres halmaz, ha elkerülik egymást.

Egyetlen pont, ha az egyenes érinti a hengert.

Egy egész egyenes, ha a henger részhalmazként tartalmazza az egész egyenest.

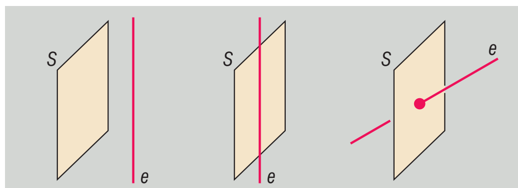


Végül bármilyen hosszú szakasz, ha az egyenes döfi a hengert. (Ne feledjük, zárt hengertestről van szó!)

b) Az egész sík, ha az egyenes párhuzamos a síkkal és nincs közös pontjuk.

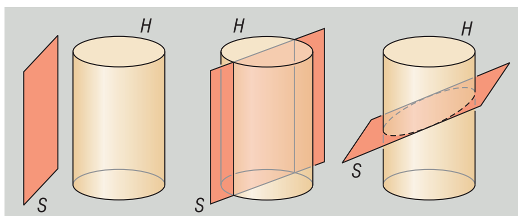
Két diszjunkt félsík, ha az egyenes a síkban futott.

Egy pontban kilyukasztott sík, ha az egyenes döfte a síkot.



c) Az egész sík, ha eredetileg diszjunktak voltak a hengerrel.

Két diszjunkt félsík, ha volt közös pontjuk és a henger tengelye párhuzamos a síkkal (a két félsík távolsága maximum a henger átmérője lehet). A metszet lehet egy lyukas sík, ahol a lyuk kör (ha a sík merőleges a henger tengelyére), vagy ellipszis (ha a sík derékszögnél kisebb pozitív szöget zár be a henger tengelyével).

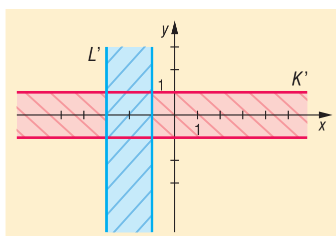


Megjegyzés: Hogy a sík valóban ellipszisben metszi a hengert, bizonyítani nem tudjuk (középiskolai tanulmányaink során később sem foglalkozunk vele).

1054 *a)* $K = \{(x;\, y) \,|\, |x| \le 1 \text{ és } x,\, y \in \mathbb{R}\}$ vagy $K = \{(x;\, y) \,|\, -1 \le x \le 1 \text{ és } x,\, y \in \mathbb{R}\}$.

$L = \{(x;\, y) \,|\, |y-2| \le 1 \text{ és } x,\, y \in \mathbb{R}\}$ vagy $L = \{(x;\, y) \,|\, 1 \le y \le 3 \text{ és } x,\, y \in \mathbb{R}\}$.

b) Jelölje K' a K, L' pedig az L elforgatásából kapott sávokat. $K' \setminus L'$ a csak \\\ ferdén satírozott; $L' \setminus K'$ a csak /// ferdén satírozott; $K' \cap L'$ pedig a rácsos rész.



Halmazként felírva őket (minden esetben $x,\, y \in \mathbb{R}$):

$$K' \setminus L' = \{(x;\, y) \,|\, |y| \le 1 \text{ és } (x < -3 \text{ vagy } x > -1)\};$$

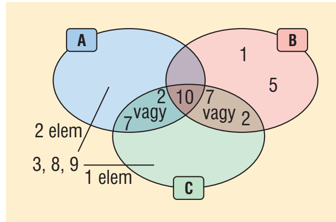
$$L' \setminus K' = \{(x;\, y) \,|\, |x+2| \le 1 \text{ és } (y < -1 \text{ vagy } y > 1)\};$$

$$K' \cap L' = \{(x;\, y) \,|\, |x| \le 1 \text{ és } |y-2| \le 1\}.$$

1055 *a)* Amit biztosan beírhatunk a halmazábrába, az a harmadik, illetve az utolsó feltételből adódik. A 10 a hármas metszetbe, az 1, valamint az 5 csak a B-be kerül. $(A \cap B) \setminus C$ üres. A második, illetve az utolsó előtti feltételből $(C \cap B) \setminus A$ részben egy elem van, ez vagy 2 vagy 7.

Ennél többet nem tudunk, ezek szerint

$$B = \{1; 5; 7; 10\} \quad \text{vagy} \quad B = \{1; 2; 5; 10\}.$$



b) A feladat feltételei megengedik, hogy a 7 az A-ba essen, de az is lehet, hogy $7 \notin A$. Nem tudjuk pontosan megmondani.

c) Folytatva az *a)* gondolatmenetét, C-ből egy, A-ból még két elem hiányzik. A szabad elemek a 3, a 8 és 9. Ezek közül kell kettőt csak A-ba, egyet csak C-be írni. Ez három lehetőség. B-re volt még kettő, így a feladatnak $2 \cdot 3 = 6$ olyan megoldása lehet, amely kielégíti a feltételeket. A táblázatban látható hat lehetőségből kellett felírni hármat.

Megoldás	*A*	*B*	*C*
1.	{7; 10; **8; 9**}	{1; 5; 10; 2}	{2; 7; 10; **3**}
2.	{7; 10; **3; 9**}	{1; 5; 10; 2}	{2; 7; 10; **8**}
3.	{7; 10; **3; 8**}	{1; 5; 10; 2}	{2; 7; 10; **9**}
4.	{2; 10; **8; 9**}	{1; 5; 10; 7}	{2; 7; 10; **3**}
5.	{2; 10; **3; 9**}	{1; 5; 10; 7}	{2; 7; 10; **8**}
6.	{2; 10; **3; 8**}	{1; 5; 10; 7}	{2; 7; 10; **9**}

Halmazok elemszáma, logikai szita – megoldások

1056 $|W| = 8$

1057 *a)* 6 elemű: {e, i, a, ó, í, ő}.

b) 4 elemű: $\{\varnothing; \{a\}; \{b\}; \{a, b\}\}$.

c) Végtelen sok eleme van: {szabályos 3-, 4-, 5-, 6-, 7-, …-szögek}.

d) 6 elemű: {2; 3; 5; 6; 10; 15}.

1058 $|T| = 123 + 45 + 87 = 255$

1059 $|A \cup B| = 20 + 32 - 14 = 38$

1060 Két megoldást is adunk.

I. Alkalmazzuk a logikai szitát:

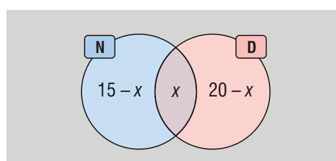
$$26 = |N \cup D| = |N| + |D| - |N \cap D| = 15 + 20 - |N \cap D|,$$

ahonnan a metszet elemszáma 9. Vagyis csak dánul $|D| - |N \cap D| = 11$ fő tanul.

II. Írjuk a Venn-diagramba az elemszámokat a metszettel (x) kezdve. x helyére olyan számot kell írni, hogy

$$15 - x + x + 20 - x = 26$$

legyen. Ez $x = 9$-re teljesül. Így csak dánul $20 - 9 = 11$ fő tanul.



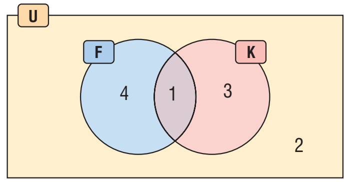
1061 Két megoldást is adunk.

I. Alkalmazzuk a logikai szitát:

$$10 = |U| = |F \cup K| + x = |F| + |K| - |F \cap K| + x = 5 + 4 - 1 + x,$$

ahonnan $x = 2$.

II. Jelölje U a baráti társaságot mint alaphalmazt, F a fociért, K a kosárlabdáért rajongók halmazát. Írjuk az elemszámokat a Venn-diagramba, kezdjük a metszettel. Utána töltsük fel F-t 5 és K-t 4 elemre, majd az egészet egészítsük ki 10-re. A megoldás 2.



1062 Jelölje T a tarka farkú, H a hosszú csőrű szarkák halmazát. A logikai szitát alkalmazva:

$$|T \cup H| = 200 \cdot 0{,}6 + 200 \cdot 0{,}7 - 200 \cdot 0{,}4 = 180,$$

így a rövid csőrű és egyszínű farktollú madarak száma 20. (Ez az összes madár 10%-a.)

1063 $0 \le |N \cap D| \le 4$. (A golyóstollak összes számára nem tudunk mit mondani, mert Magdinak lehetnek olyan tollai is, amelyek az említettektől különbözők.)

1064 Legyen J a jóképű, O az okos fiúk halmaza. A logikai szitát alkalmazva:

$$|J \cup O| = 7 + 5 - 3 = 9.$$

Rajtuk kívül vannak még nyolcan, akiket a lányok – papíron legalábbis – kikosaraztak. Így 17 fiú jár az osztályba. Evelinen és Lilin kívül pedig még 14 lány tanul ott, összesen 16-an. Az osztályba eggyel több fiú jár, mint lány.

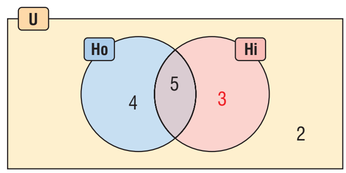
1065 Kétféle megoldást is adunk.

I. Logikai szitával: Jelölje Hi a hintázó, Ho a homokozó gyermekek halmazait. A kergetőzőket nem jelöljük külön, beleesnek az összes bölcsist tartalmazó U univerzumba.

$$14 = |U| = |Ho \cup Hi| + 2 = |Ho| + |Hi| - |Ho \cap Hi| + 2 = 9 + |Hi| - 5 + 2.$$

Innen $|Hi| = 8$, a csak hintázók száma pedig $8 - 5 = 3$.

II. Venn-diagrammal:



1066 Nem lehetséges. Minden szám vagy az egyik, vagy a másik halmazba esik. A két halmaz uniójának s-sel jelölt elemszáma:

$$\frac{2}{3} \cdot s + \frac{3}{4} \cdot s - \frac{1}{2} \cdot s = \frac{11}{12} \cdot s,$$

ami szerint az unión kívül is vannak még elemek. Ez viszont ellentmond az első feltételnek.

1067 Jelölje a tálban levő g darab gumicukrok közül A az állatos, S a többszínű cukrok halmazait. Ekkor

$$|U| = g = |A \cup S| + 0{,}1 \cdot g = |A| + |S| - |A \cap S| + 0{,}1 \cdot g =$$
$$= 0{,}4 \cdot g + 0{,}8 \cdot g - |A \cap S| + 0{,}1 \cdot g,$$

ahonnan $|A \cap S| = 0{,}3 \cdot g$. Mivel 10% pontosan $9 + 6 = 15$ cukrot jelent, így a tálban összesen 45 darab színes állatfigurás gumicukor volt. Azóta persze Eszter is evett belőle.

1068 *a)* Jelölje M a matematika, N a magyar nyelvtan házit készítők halmazát. Ekkor

$$|U| = |M \cup N| + 3 = |M| + |N| - |M \cap N| + 3 = 13 + 15 - 8 + 3 = 23.$$

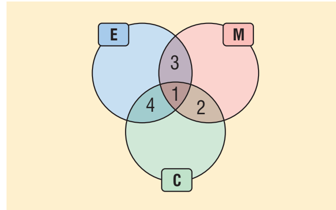
A csoport 23 fős.

Megjegyzés: A másik lehetőség Venn-diagramba írni az elemszámokat.

b) Csak a matek házit $13 - 8 = 5$ fő készítette el, ez pedig a 23-nak $100 \cdot \frac{5}{23} \approx 21{,}74$%-a.

1069 Jelölje az eperfagyit kedvelők halmazát E, a málnásokat M, a citromot szeretőket C. Rajzoljuk fel a Venn-diagramot, majd haladjunk belülről kifelé. Az ábrába került számokhoz még 13-t kell adnunk, így az osztálylétszám:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 13 = 23 \text{ fő}.$$



1070 Az első mondat alapján $U = V \cup P$, ahol V a verseket, P a prózát tartalmazó könyvek halmaza. Tudjuk még, hogy $|V| = 9$, $|P| = 7$ és $|V \cap P| \geq 1$. Mivel legalább egy olyan könyv van, amelyik csak prózát tartalmaz, ezért a metszetben legfeljebb 6 könyv lehet, így

$$6 \geq |V \cap P| \geq 1.$$

A logikai szitát felírva:

$$15 \geq |U| = 9 + 7 - |V \cap P| \geq 10.$$

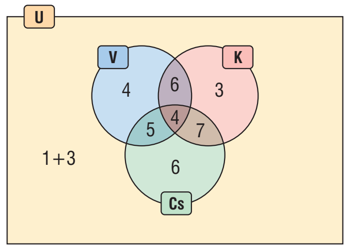
A polcon levő könyvek száma 10-től 15-ig terjedhet.

Megjegyzés: Másik lehetőségként felrajzolhatjuk a Venn-diagramot is.

1071 Kezdjük most logikai szitával. Jelölje U a helyszínen tartózkodók halmazát, V a védőt, K a középpályást és Cs a csatárt már játszott fiúk halmazait. Ne feledjük, Ede és a három kapus is ott volt a megbeszélésen, de nem jelentkezett! Ekkor

$$|U| = 1 + 3 + |V \cup K \cup Cs| = 4 + |V| + |K| + |Cs| -$$
$$- |V \cap K| - |V \cap Cs| - |K \cap Cs| + |V \cap K \cap Cs| =$$
$$= 4 + 19 + 20 + 22 - 10 - 9 - 11 + 4 = 39.$$

Ugyanez Venn-diagrammal az ábrán látható.



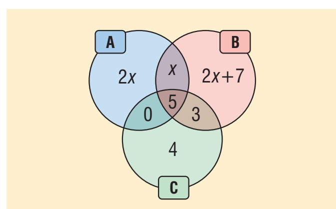
1072 Jelentse H, I, P azon fák halmazait, melyek mellett hóvirág, ibolya, pipacs terem. A szöveg szerint minden fa mellett nyílik valamilyen vadvirág, így a szita formula:

$$f = |H \cup I \cup P| = \frac{2}{3} \cdot f + \frac{7}{15} \cdot f + \frac{1}{3} \cdot f - \frac{1}{10} \cdot f - \frac{1}{5} \cdot f - \frac{7}{30} \cdot f + \overbrace{|H \cap I \cap P|}^{20}.$$

Innen adódik, hogy az összes fa $\frac{1}{15}$-e 20 darab, vagyis a kertben 300 fa található.

1073 *a)* Az (1) feltétel szerint $(A \cap C) \setminus B$-be nem esik egy elem sem, a hármas metszetbe viszont 5. Ez és a (6) feltétel szerint $(A \cap B) \setminus C$-ben 3 elem található. Így C számosságával végeztünk is, mert csak C-be 4 elem esik (hogy (3) alapján összesen 12-t kapjunk). Persze nem ez volt a kérdés.

A (4) feltétel szerint írhatjuk be x és $2x$ kifejezéseket. Mivel (2) miatt B-nek 10-zel több eleme van, mint A-nak, így csak B-be $2x + 7$ kerül. Az (5) feltétel szerint pedig $2 \cdot 2x = 2x + 7 + 3$, ahonnan $x = 5$. Tehát $|A| = 20$, $|B| = 30$.



b) Összeadva az egyes részekben levő számokat, az eredmény 44.

1074 *a)* Jelölje B, H, P a Bécsben, Helsinkiben, Prágában járt színjátszók halmazait. Mivel 55%-uk járt csak egy városban, így 45%-uk, vagyis 27 fő több helyen is. Tudjuk, hogy $(H \cap P) \setminus B$ üres halmaz, ezért

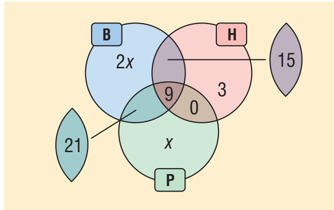
$$27 = 21 + 15 - |H \cap P \cap B|.$$

Innen a hármas metszet elemszámára 9 adódik.

b) Beírhatjuk csak H-ba a 3-at, csak P-be x-et és csak B-be $2x$-et. Mivel a 60 fős társulat tagjainak 55%-a csak egy városba jutott el, így

$$33 = 3x + 3,$$

ahonnan $x = 10$. Ez alapján Bécsben 47 fő, Helsinkiben 18, Prágában pedig 31 fő játszott.



1075 *a)* Érdemes először értelmeznünk a kijelentést. A „metszetük elemszáma”: $|A \cap B \cap C|$, az „elemszámaik számtani közepe” pedig (mivel hárman vannak): $\frac{|A|+|B|+|C|}{3}$. A kijelentés szerint előbbi nem nagyobb, mint utóbbi, azaz kisebb vagy egyenlő:

$$|A \cap B \cap C| \le \frac{|A|+|B|+|C|}{3}.$$

Ezt kell igazolnunk.

Mit tudunk bármely metszet elemszámáról? Például azt, hogy kisebb vagy egyenlő az őt alkotó halmazok elemszámainál. Vagyis

$$|A \cap B \cap C| \le |A|, \quad |A \cap B \cap C| \le |B| \quad \text{és} \quad |A \cap B \cap C| \le |C|.$$

Összeadva a fenti három egyenlőtlenséget, majd hárommal elosztva, éppen a kérdezett összefüggést kapjuk.

Megjegyzés: Jól látszik, hogy a kijelentés általánosítható bármennyi véges halmazra.

b) A második részben

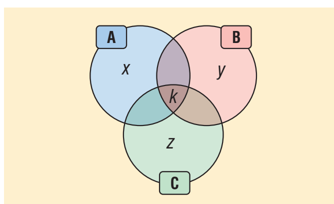
$$|A \cap B \cap C| = k \quad \text{és} \quad \frac{|A|+|B|+|C|}{3} = k+1.$$

Utóbbit megszorozva hárommal:

$$|A| + |B| + |C| = 3k + 3.$$

Rendezzük a következőképpen:

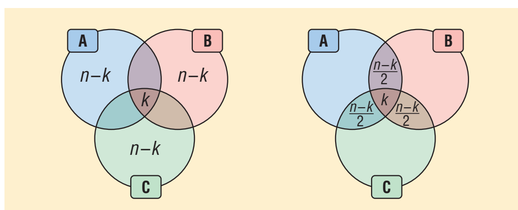
$$(|A| - k) + (|B| - k) + (|C| - k) = 3.$$



Most vessünk egy pillantást a Venn-diagramra. A feladat szövege szerint x, y, z egyike sem lehet 0. Utolsó egyenletünk ezen feltétel mellett csak úgy lehetséges, ha $x = y = z = 1$ és további elemet nem tartalmaznak a halmazok. Azaz uniójuk elemszámára:

$$|A \cup B \cup C| = k + 3.$$

Megjegyzés: Kiderült, hogy a három halmaz elemszáma egyenlő.



c) Gondoljuk meg, hogy a feltételeknek megfelelő két véglet az alábbi két lehetséges helyzet az elemek számára.

Az első esetnél több eleme már nem lehet az uniónak.

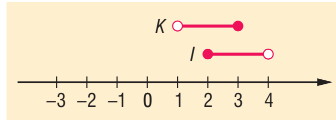
A második esetnél pedig kevesebb eleme nem lehet az uniónak.

Az ábrából pedig leolvashatjuk a feladatra adott választ is:

$$1{,}5n - 0{,}5k = 3 \cdot \frac{n-k}{2} + k \le |A \cup B \cup C| \le 3 \cdot (n-k) + k = 3n - 2k.$$

Számegyenesek, intervallumok – megoldások

1076 *a)* és *b)* intervalluma az ábrán látható.



c) $J = [-2;\ 1]$

d) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

1077 *a)* Az I és K intervallumok félig nyitott, félig zárt, a J nyitott, az L pedig zárt intervallumok.

b) Igen, $J \subset K$ és $L \subset K$.

c) Egészítsük ki K-t a jobb végponttal. A megoldás: $K' = [-2;\ 2]$.

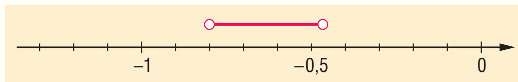
1078 *a)* K nyitott, J zárt, I balról zárt, jobbról nyitott, L pedig fordítva, jobbról zárt, balról nyitott.

b) $I = [0;\ 3[$; $J = [1;\ 6]$; $K =]-1;\ 4[$; $L =]4;\ 7]$; $I \setminus J = [0;\ 1[$; $K \setminus I =]-1;\ 0[\cup [3;\ 4[$; $J \setminus L = [1;\ 4]$; $I \cap J = [1;\ 3[$; $J \cap L =]4;\ 6]$; $J \cup L = [1;\ 7]$; $K \cup J =]-1;\ 6]$

c) I és L, illetve K és L diszjunkt intervallumok.

d) $\overline{L} = [-1;\ 4]$; $\overline{K} = \{-1\} \cup [4;\ 7]$

1079 *a)* $I = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\dfrac{4}{5} < x < -\dfrac{7}{15}\right\}$, számegyenesen:

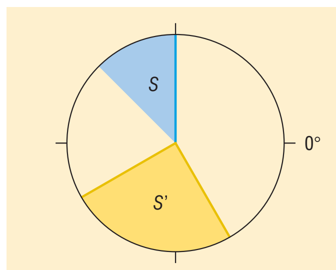


b) $-\dfrac{8}{15},\ -\dfrac{9}{15},\ -\dfrac{10}{15},\ -\dfrac{11}{15}$

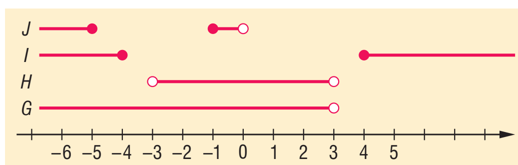
1080 *a)* A megadott intervallumok ábrázolása az egységkörben:

b) A zöld színnel ábrázolt szög: $[135°;\ 225°[$.

A piros színnel ábrázolt szög: $[270°;\ 360°[$ vagy $[-90°;\ 0°[$.



1081 *a) – d)* Ne feledjük, I és J két-két részből áll össze!

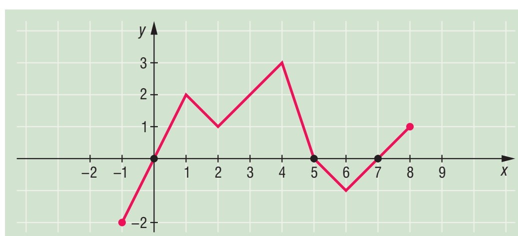


e) $\overline{H} = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $|x| \geq 3\}$.

$G(\geq)$ és $I(<)$ esetében igen,

$\overline{J} =]-5;\ -1[\cup [0;\ \infty[$.

1082 *a)* Ott van a függvény zérushelye, ahol görbéje metszi az x tengelyt. Az adott függvénynek 3 zérushelye van, az $x = 0$, az $x = 5$, valamint az $x = 7$ helyen.



b) Ott vesz fel negatív értéket, ahol az x tengely alá megy: $[-1;\ 0[$ és $]5;\ 7[$ intervallumokon.

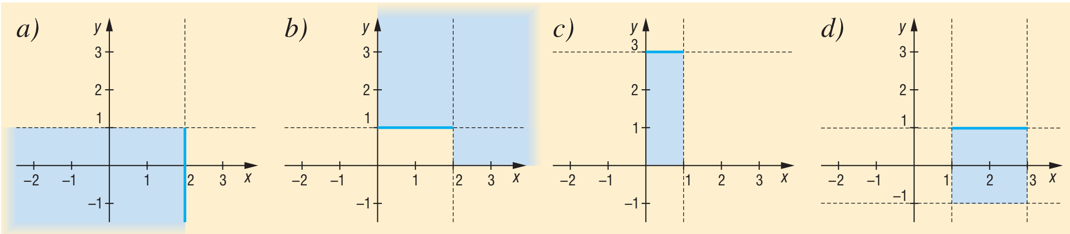
c) Növekedési intervallumok: $[-1;\ 1]$, $[2;\ 4]$, $[6;\ 8]$.

1083 *a)* Felül nyitott negyedsík.

b) Negyedsík, amelynek levágtuk a sarkát. A tengelyek felől nyitott, csak a rövid vízszintes határa tartozik hozzá.

c) Csak felül zárt téglalap.

d) Csak felül zárt négyzet.



1084 *a)* $U = \mathbb{R}$, $\overline{H} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\} = [-2; \infty[$.

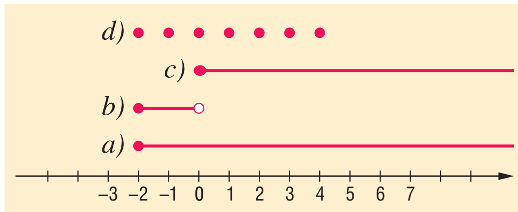
b) $U = \mathbb{R}^-$, $\overline{H} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 > x \geq -2\} = [-2; 0[$.

c) $U = \mathbb{R}_0^+$, $\overline{H} = U = [0; \infty[$.

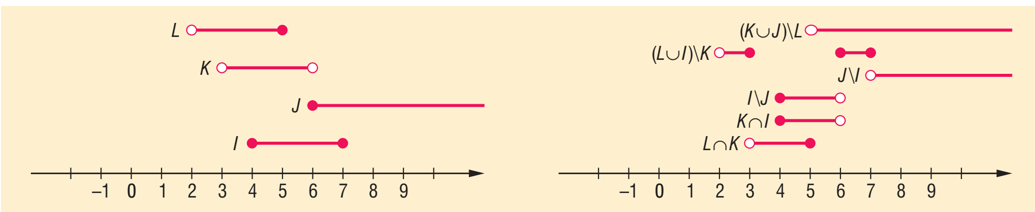
(A H ebben az univerzumban üres halmaz.)

d) $U = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2; -3; -4; \ldots\}$,

$\overline{H} = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.



1085 *a)* Először érdemes az adott intervallumokat ábrázolni számegyenesen, majd segítségükkel a kérdéses intervallumokat meghatároznunk. A keresett intervallumok alulról felfelé, sorban találhatók.



$$L \cap K =]3; 5], \quad K \cap I = [4; 6[, \quad I \setminus J = [4; 6[, \quad J \setminus I =]7; \infty[,$$
$$(L \cup I) \setminus K =]2; 3] \cup [6; 7], \quad (K \cup J) \setminus L =]5; \infty[$$

b) Az alábbi intervallumokat nem ábrázoltuk számegyenesen, csak leolvastuk az eredményeket.

$$\overline{L} =]5; \infty[, \quad \overline{J} =]2; 6[, \quad \overline{I \cup J} =]2; 4[,$$
$$\overline{I \cup K} =]2; 3] \cup]7; \infty[, \quad \overline{J \cup L \cup K} = \emptyset.$$

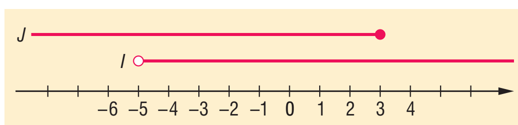
1086 *a)* Mindkettőt külön-külön közös nevezőre hozva, majd azzal megszorozva és átrendezve kapjuk eredményül (közben negatív számmal nem osztottunk, szoroztunk):

$$x > -5 \quad \text{és} \quad x \leq 3.$$

b) $I =]-5; \infty[$, $J =]-\infty; 3]$.

c) $I \cap J =]-5; 3]$, $I \setminus J =]3; \infty[$, $J \setminus I =]-\infty, -5]$.

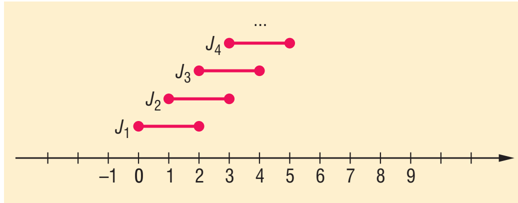
d) $I \cup J = \mathbb{R}$, hiszen egyesítésük magát a számegyenest adja.



1087 *a)* Érdemes felrajzolni néhány intervallumot (az intervallumot n indexével jelöltük). Ebből már láthatjuk, hogy végtelen lépcsőről van szó. Így könnyen válaszolunk a kérdésekre:

$$J_1 \cap J_2 \cap J_3 = \{2\}.$$

b) $(J_2 \cup J_4) \setminus J_3 = [1; 2[\cup]4; 5]$.

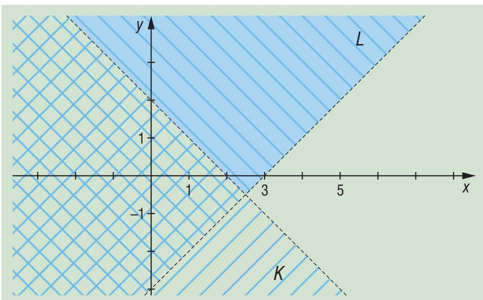


1088 A rajzolás előtt érdemes függvényként gondolni az összefüggésekre, *a)*-ban például $y = -x + 2$, illetve $y = x - 3$ alakban ábrázolni a lineáris függvényeket, majd utána színezni az egyenlőtlenségnek megfelelően! Azt se feledjük el, hogy meg kell mondanunk, hogy a kialakult alakzatokhoz mely határok tartoznak hozzá, és melyek nem.

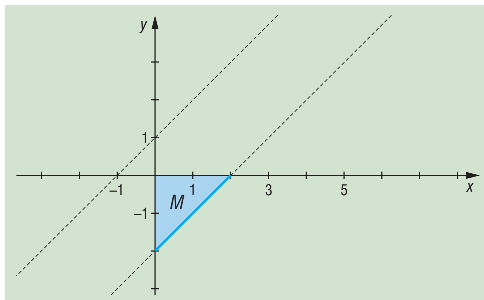
a) A K tartomány a /// irányban satírozott, L pedig \\\. Az $L \setminus K$ tartomány a csak \\\ irányban satírozott felső rész (negyed sík). Határai nem tartoznak hozzá.

b) A kérdéses ponthalmaz egy párhuzamos egyenesek közötti sáv egy darabkája lesz (a derékszögű háromszöghöz a befogók nem tartoznak hozzá, csak az átfogó). Az utolsó feltételek miatt végül az $x - y \geq -1$ feltétel mindig teljesül.

a)



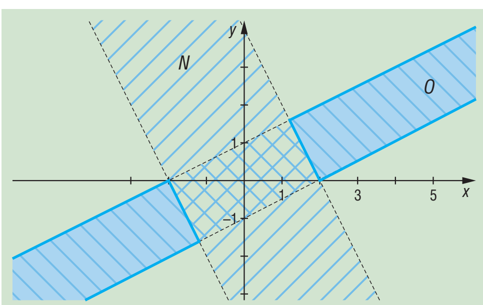
b)



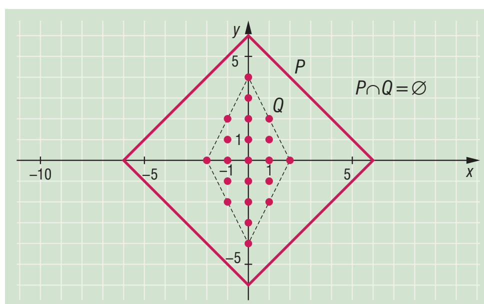
c) Az N és az O is egy-egy sávot határoz meg a síkon. Más irányba dőlnek, és szélességük sem ugyanaz. Ilyen ponthalmazokat úgy is megkereshetünk, ha kipróbálunk jó néhány pontot a síkon, és ellenőrizzük, igaz-e rájuk a feltétel. Elég sok pont után már látni fogjuk a szabályszerűséget. Az $O \setminus N$ eredménye két félsáv (a csak \\\ irányban satírozott részek). Határai hozzá tartoznak, hiszen N a határait nem tartalmazza, így nem is vettük el őket O-ból.

d) P nem egyenlőtlenséget tartalmaz, hanem egyenletet, ezért nem kell satíroznunk: egy négyzetet kapunk. Q-nál oda kell figyelni arra, hogy x és y is csak egész számok lehetnek! Tehát itt sem kell satíroznunk, csak egész koordinátájú pontokat bejelölni. A pontokat a fekete szaggatott vonallal jelölt rombusz szélén vagy azon belül kell keresni (négyzetrácsos füzetben hamar megy). A kérdéses $P \cap Q$ metszet üres halmaz, hiszen egyik gombóc sem esik a négyzet oldalaira.

c)



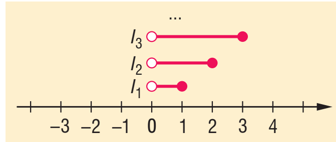
d)



1089 *a)* Ábrázoljuk az intervallumokat. Bármely nagyobb indexű intervallumnak részhalmaza egy kisebb indexű:

$$I_p \subseteq I_q,$$

ahol $p < q$ pozitív egészek.

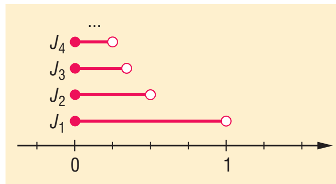


b) A tartalmazások miatt az összes intervallum metszete az első intervallum: $I_1 = \left]0; 1\right]$.

c) Egyesítésük a számegyenes pozitív fele, azaz $\mathbb{R}^+$.

Megjegyzés: A *c)* részfeladatra adott válasz pontos bizonyítását csak később adhatjuk meg. A gondolat lényege, hogy bármilyen (nagy) pozitív számot is választunk, előbb-utóbb belekerül valamelyik intervallumba. Például az 111111111 eleme lesz először az 111111111. intervallumnak, majd az utána jövő összes többinek, így uniójuknak is.

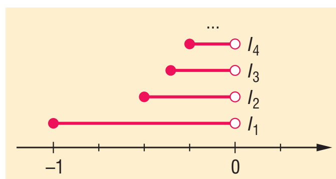
1090 *a)* Intervallumként: $J_n = \left[0; \dfrac{1}{n}\right[$.



b) A számegyenes egyetlen pontjára, a 0-ra igaz, hogy eleme az összes intervallumnak. Van-e rajta kívül másik ilyen érték? Nyilván negatív vagy 1-nél nagyobb szám nem lehet a metszetben, hiszen egyik intervallumnak sem eleme.

Mi a helyzet a 0-hoz nagyon közel levő pozitív számokra? Válasszunk egyet, például az $\dfrac{1}{1000000}$-t. Ez elég közel van a 0-hoz. Viszont az intervallumok jobb végpontjai ha lassan is, de egyre közelebb kerülnek a 0-hoz. Az 1000000. intervallum jobb végpontja például pont a kérdéses érték, vagyis annak már nem eleme az $\dfrac{1}{1000000}$. Az $n > 1000000$ intervallumokra biztosan nem, azaz az összes metszetébe sem kerülhet bele. A lényeg, hogy bármilyen pici pozitív számmal is próbálkozunk, mindig ezt kapjuk. Tehát a 0 az egyedüli szám, amely a metszetben megtalálható.

1091 *a)* Az ábra nagyon hasonlít az előző feladatban szereplőre, csak kicsit átrendeztük a szakaszokat.



b) A metszetük üres halmaz. Ha a 0 felől zárt intervallumok lennének, akkor a 0 eleme lenne mindegyiknek. Így viszont bármilyen kicsi negatív számot is választunk, pl. –0,001-et, előbb-utóbb a bal végpont átlépi ezt az értéket.

A konkrétan említett –0,001-et az 1001. intervallum már nem fogja tartalmazni, hiszen

$$-0{,}001 = -\frac{1}{1000} < -\frac{1}{1001}.$$

Természetesen az utána jövők sem, így nem lehet a metszetnek eleme.

c) Leolvashatjuk az ábráról, hogy

$$I_n \setminus I_{n+1} = \left[-\frac{1}{n}; -\frac{1}{n+1}\right[.$$

Megjegyzések: Előző és jelen feladat *b)* pontjában említett gondolatmenet vezet el minket később a *határérték* és a *torlódási pont* fogalmához. Megfigyelhetjük azt is, hogy mindkét esetben hasonlóan gondolkodtunk: egy értéket választva beláttuk, hogy az nem megoldása a feladatnak. Az ilyen gondolatmenetet *indirekt bizonyításnak* nevezzük.

Vegyes feladatok – megoldások

1092 *a)* $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ *b)* 4 *c)* 6

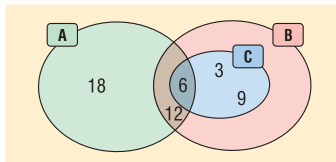
1093 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

1094 *a)* $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ *b)* $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 72$

1095 *a)* $2 \cdot 2 = 4$ *b)* $\frac{5}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{16}, \frac{9}{20}$

1096 *a)* $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$ *b)* $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$
c) $20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 2{,}43 \cdot 10^{18}$ *d)* $14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 8{,}72 \cdot 10^{10}$
e) $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

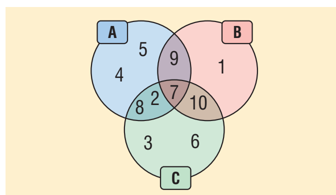
1097 *a)* $\{10; 12; 15; 20; 30; 60\}$
b) A Venn-diagram az ábrán látható.
c) Igaz, igaz.



1098 *a)* {a}, {b}, {c}, {d}, {a; b}, {a; c}, {a; d}, {b; c}, {b; d}, {c; d}, {a; b; c}, {a; b; d}, {a; c, d}, {b; c; d}, $\varnothing$
b) {a; b}, {a; b; c}, {a; b; d}

1099 *a)* $A \setminus B = \{0; 2; 4; 8; 10; 14\}$, $B \setminus A = \{3; 9; 15; 18\}$,
$A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 18\}$, $A \cap B = \{6; 12\}$
b) $\overline{A} = \{-1; 1; 3; 5; 7; 9\}$, $\overline{B} = \{-1; 0; 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10\}$,
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{-1; 1; 5; 7\}$, $\overline{A \setminus B} = \{-1; 1; 3; 5; 6; 7; 9\}$

1100 *a)* A Venn-diagram az ábrán látható.
b) $B \setminus A = \{1; 10\}$, $C \setminus B = \{2; 3; 6; 8\}$,
$A \cap C = \{2; 7; 8\}$, $C \cup B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8; 9; 10\}$
c) $B \setminus (A \cup C) = \{1\}$, $\overline{A} \cap (B \cup C \cup \{11\}) = \{1; 3; 6; 10\}$,
$\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)} = \{1; 3; 4; 5; 6\}$



1101 $\overline{A \cup C} \setminus \overline{B} = \{ó; é; ú\}$

1102 $|A \cup B| = 82 = 56 + 93 - |A \cap B|$, innen $|A \cap B| = 67$.

1103 Jelölje G a gitáros számok halmazát, D a dobosokat.

$$|G \cup D| = |G| + |D| - |G \cap D| = 13 + 10 - 8 = 15.$$

A Vízilovaknak 15 saját számuk van.

1104 Kétféle megoldást is adunk.

I. Jelölje H a szuperhősöket, J a járműveket, M a mesehősöket tartalmazó képregények halmazát.

$$|H \cup J \cup M| = 30 = |H| + |J| + |M| - |H \cap J| - |H \cap M| - |J \cap M| + |H \cap J \cap M| =$$
$$= 14 + 9 + 20 - 3 - 5 - |H \cap M| + 1,$$

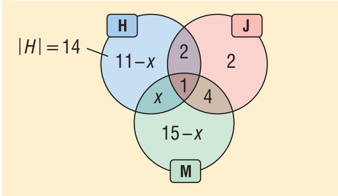
innen $|H \cap M| = 6$. Mivel a hármas metszet 1, ezért az együtt gyalog járó mese- és szuperhősöket felvonultató képregények száma 5.

II. Venn-diagrammal:

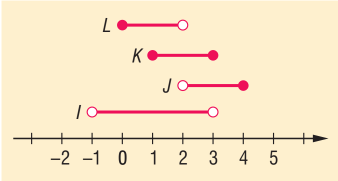
Dávidnak 30 képregénye van, így

$$14 + 2 + 4 + 15 - x = 30,$$

amiből $x = 5$.



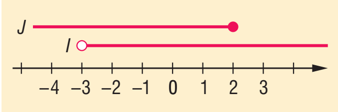
1105 *a)* Az intervallumok ábrázolása:



b) $I \setminus K =]-1; 1[$, $J \cap K =]2; 3]$, $K \cup L = [0; 3]$

c) Igen, J és L. Igen, $L \subseteq I$.

1106 *a)* A megoldások: $x > -3$ és $x \leq 2$. Ábrázolásuk:



b) $I \cap J =]-3; 2]$

c) $I \setminus J =]2; \infty[$

d) $J \setminus I =]-\infty; -3]$

9.2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

Betűk használata a matematikában – megoldások

1107 *a)* $5n+4,\ n\in\mathbb{N}$; *b)* $8n+5,\ n\in\mathbb{N}$; *c)* $100n,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$;
d) $100n+17,\ n\in\mathbb{N}$; *e)* $\frac{7}{3n},\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0$; *f)* $\frac{4n}{4n+3},\ n\in\mathbb{Z}$.

1108 *a)* A 9-cel osztható pozitív egész számokat.
b) Azokat a pozitív egész számokat, melyek 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul.
c) A 23-ra végződő legalább háromjegyű pozitív egész számokat.
d) A 2-nél a-val kisebb egész számokat (az összes egész számot).
e) A négyzetszámoknál 1-gyel nagyobb természetes számokat.
f) A 3-mal osztva 2 maradékot adó természetes számok 10-ed részét.

1109 *a)* $-4{,}2xy$; $-4xz$; $-2{,}8xyz$; $3{,}6xyz$; $3{,}8xyz$. *b)* $-7ab^2$; $-6ab$; $-6ab$; $-4{,}4a^4b$; $-4{,}2a^2$.

1110 *a)* -3; *b)* 70; *c)* -2; *d)* 8; *e)* $\frac{4}{3}$; *f)* $\frac{3869}{300}$.

1111 *a)* $x\neq 0$; *b)* $x\neq -2$; *c)* $a\neq -\frac{3}{2}$; *d)* $x\neq 0,\ x\neq 1$;
e) $x\neq\frac{4}{5},\ x\neq -\frac{1}{3}$; *f)* $a\neq -\frac{7}{2},\ a\neq\frac{3}{8}$; *g)* $y\neq 3,\ y\neq -3,\ y\neq 2,\ y\neq -2$.

1112 Az oldalak: $2x-2,\ 2x,\ 2x+2$. A kerület: $6x,\ x\in\mathbb{N},\ x>1$.

1113 *a)* Mivel $a=3n+2$, attól függően, hogy n 4-gyel osztva milyen maradékot ad, a 12-es maradék lehet $2, 5, 8$ vagy 11.
Mivel $b=4k+3$, attól függően, hogy k 3-mal osztva milyen maradékot ad, a 12-es maradék lehet $3, 7$ vagy 11.
b) Az előző esetek alapján, mivel a maradékok összeadódnak, a lehetséges maradékok: 0-tól 11-ig minden egész szám.

Hatványozás, a számok normálalakja – megoldások

1114 *a)* $2^6<2^8$; *b)* $2^{16}>2^{12}$; *c)* $3^6<3^9$; *d)* $2^{15}<2^{16}$;
e) $2^3\cdot 3^3<3^3\cdot 2^4$; *f)* $3^{21}>3^{20}$; *g)* $2^{15}\cdot 5^{15}>2^{12}\cdot 5^{15}$; *h)* $4^{100}\cdot 10^{100}>10^{100}$.

1115 *a)* 2; *b)* 12; *c)* 4; *d)* 9; *e)* 1; *f)* 18.

1116 *a)* a^{41}; *b)* x^{36}; *c)* x^{11}; *d)* b; *e)* x^{26}; *f)* $a^4\cdot b^3$;
g) $a^6\cdot b^3$; *h)* $\frac{c^8}{d^6}$.

1117 *a)* $\frac{1}{81}$; *b)* $-\frac{1}{125}$; *c)* 8; *d)* 49; *e)* $-\frac{27}{125}$; *f)* $\frac{25}{16}$;
g) $\frac{4}{9}$; *h)* $-\frac{2}{5}$; *i)* $\frac{4}{9}$; *j)* 7.

1118 A kitevők:

a) $-2,\quad -4,\quad -5,\quad -8,\quad -10,\quad 30;$ *b)* $-2,\quad -3,\quad -4,\quad -5,\quad -11,\quad 40.$

1119 *a)* $a^3;$ *b)* $x^{10};$ *c)* $\dfrac{1}{8a};$ *d)* $a^6 \cdot b^8;$ *e)* $\dfrac{5^{10}}{b^{12}};$ *f)* $c^5;$

g) $a^{30} \cdot b^3;$ *h)* $\dfrac{d^{21}}{9};$ *i)* $\dfrac{2^{18} \cdot 3^4}{e^5}.$

1120 *a)* $\dfrac{1}{216} > \dfrac{1}{729};$ *b)* $\dfrac{1}{2^{12}} > \dfrac{1}{2^{16}};$ *c)* $\dfrac{1}{10^{10} \cdot 10^{10}} < \dfrac{1}{2^{10} \cdot 10^{10}};$

d) $\dfrac{7^3}{4^3} > \dfrac{7^3}{5^3};$ *e)* $\dfrac{7^2}{5^3} < \dfrac{7^3}{5^3};$ *f)* $3^8 = 3^8;$

g) $\dfrac{8}{7} < 1{,}6.$

1121 *a)* $61\ \text{kg} = 6{,}1 \cdot 10^4\ \text{g} = 6{,}1 \cdot 10^{-2}\ \text{t};$ *b)* $3{,}77 \cdot 10^{14}\ \text{g} = 3{,}77 \cdot 10^8\ \text{t}.$

1122 *a)* $3{,}33 \cdot 10^{-12}\ \text{s};$ *b)* $8{,}1 \cdot 10^{11}\ \text{m}.$

1123 $4^4 = 2^8,\ 8^8 = 2^{24}$, ezért $\left(4^4\right)^3 = 8^8.$

1124 A szorzat átalakítható: $2^{2007} \cdot 125^{345} \cdot 25^{200} = 2^{2007} \cdot 5^{1035} \cdot 5^{400} = 10^{1435} \cdot 2^{572}$. A szorzat tehát 1435 darab 0-ra végződik.

1125 *a)* Igaz. Egész és törtszámok esetén is teljesül.

b) Hamis. A negatív számoknak a páratlan kitevős hatványai negatívak.

c) Igaz. A páros kitevős hatványok pozitívak.

d) Hamis. Lehetnek törtek is.

e) Hamis. Az 1-nek minden hatványa 1.

1126 A tömeg: $\dfrac{1}{3} \cdot 20 \cdot 10^6\ \text{g} \approx 6{,}67 \cdot 10^3\ \text{kg} = 6{,}67\ \text{t}.$

1127 *a)* $3^5 = 243.$ *b)* $3^4 = 81$-szeresére növekszik.

1128 *a)* $1{,}56 \cdot 10^{17}\ \text{m}.$ *b)* $1{,}04 \cdot 10^6 = 1\,040\,000$-szerese.

1129 Csak a 2 és 3 hatványai jöhetnek szóba.

Ha a kihúzott számok a

$$2^0 = 1,\quad 2^1 = 1,\quad 2^2 = 4,\quad 2^3 = 8,\quad 2^4 = 16,\quad 2^5 = 32,\quad 2^6 = 64$$

közül kerülnek ki, akkor $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ eset lehetséges.

Ha a kihúzott számok a

$$3^0 = 1,\quad 3^1 = 3,\quad 3^2 = 9,\quad 3^3 = 27,\quad 3^4 = 81,$$

akkor 1 eset fordulhat elő.

Tehát összesen $21 + 1 = 22$ esetben lehetnek a kihúzott számok ugyanazon szám egész kitevős hatványai.

Egész kifejezések, nevezetes szorzatok, a szorzattá alakítás módszerei – megoldások

1130 *a)* $-6a^2 + a - 3$; *b)* $b^3 + 3b^2 - 3$; *c)* $-3cd^2 - 3c^2 + 5d + 3$;
d) $a^2 - 6a + 6$; *e)* 1; *f)* $a^2 - 8a - 23$;
g) $-3x^3 + 8x^2 - 14x + 4$; *h)* $8x + 8$; *i)* $-6a^2 - 7a + 7$;
j) $16x^2 - 21x - 4$; *k)* $x + 5$; *l)* $12x^2 - 30x - 26$.

1131 *a)* $-3b + 3 = 1$; *b)* $-a - 3 = -1$; *c)* $-2a + 1 = 5$;
d) $-3b - 15a - 6 = 22$; *e)* $9b + 14a = -22$; *f)* $a + 6b = 2$.

1132 *a)* $a^2 + 14a + 49$; *b)* $64 - 16b + b^2$; *c)* $49 - 14b + b^2$;
d) $9y^2 + 12xy + 4x^2$; *e)* $16x^2 - 24xy + 9y^2$; *f)* $100a^2 - 60ab + 9b^2$;
g) $x^4 + 6x^2z + 9z^2$; *h)* $4x^6 - 12x^3y^2 + 9y^4$; *i)* $64a^6 - 80a^3b^2 + 25b^4$;
j) $\frac{4}{9} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot xy + \frac{1}{16}y^2$; *k)* $\frac{25}{36} \cdot x^2 - \frac{35}{9} \cdot xy + \frac{49}{9} \cdot y^2$;
l) $z^2 + 4x^2 + y^2 + 4zx + 2zy + 4xy$;
m) $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$;
n) $16x^2 + \frac{4}{25} \cdot y^2 + \frac{1}{49} \cdot z^2 - \frac{16}{5} \cdot xy - \frac{8}{7} \cdot xz + \frac{4}{35} \cdot yz$.

1133 *a)* $(a + 4)^2 = (-a - 4)^2$; *b)* $(b - 5)^2 = (5 - b)^2$;
c) $(c + 7)^2 = (-c - 7)^2$; *d)* $(x - 20)^2 = (20 - x)^2$;
e) $\left(d^2 - 10\right)^2 = \left(10 - d^2\right)^2$; *f)* $\left(x^4 + 5\right)^2 = \left(-x^4 - 5\right)^2$;
g) $\left(x^3 + 3y^5\right)^2 = \left(-x^3 - 3y^5\right)^2$; *h)* $\left(0{,}5x - 6y^3\right)^2 = \left(6y^3 - 0{,}5x\right)^2$;
i) $\left(\frac{2}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{4}y\right)^2 = \left(-\frac{2}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot y\right)^2$.

1134 *a)* $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$; *b)* $8b^3 - 12b^2 + 6b - 1$;
c) $27c^6 + 108c^4 + 144c^2 + 64$; *d)* $64d^9 - 96d^6x^2 + 48d^3x^4 - 8x^6$;
e) $0{,}125x^6 + 1{,}5x^4y + 6x^2y^2 + 8y^3$; *f)* $\frac{8}{27} \cdot x^3 - \frac{16}{15} \cdot x^2y + \frac{32}{25} \cdot xy^2 - \frac{64}{125} \cdot y^3$.

1135 *a)* $9a^2 - 25$; *b)* $64x^2 - 49$; *c)* $16b^2 - 4x^2$; *d)* $36a^2 - 25b^2$;
e) $25c^2 - 9y^2$; *f)* $25a^6 - 1$; *g)* $9d^4 - 64$; *h)* $4y^2 - 81x^4$;
i) $49e^{10} - 100x^6$; *j)* $\frac{4}{49} \cdot x^{14} - \frac{1}{9} \cdot y^6$.

1136 *a)* $6a^2 - 2a + 14$; *b)* $8x^2 - 26x + 36$; *c)* $12x^2 + 64x + 9$;
d) $2x^2 + 50$; *e)* $-7b^2 - 32b + 48$; *f)* $-9x^2 + 24x - 31$;
g) $20c + 78$; *h)* $x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 24x^2 + 12y^2 - 12xy$;
i) $-2x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 23$; *j)* $\frac{19}{4} \cdot y^2 - x^2 - 2xy$.

1137 *a)* a^3-1; *b)* b^3+125; *c)* $27x^3+64$.

1138 *a)* $(x-1)^2-4$; *b)* $(a+2)^2+2$; *c)* $(a+3)^2-8$;
d) $(x-4)^2+4$; *e)* $(a-5)^2-23$; *f)* $(x+6)^2+14$;
g) $(x+7)^2-18$; *h)* $2\cdot(x-4)^2-6$; *i)* $-(x+3)^3+12$;
j) $-(x-6)^2+37$; *k)* $3\cdot(x+2)^2-10$; *l)* $-5\cdot(x+2)^2+13$.

1139 *a)* $a\cdot(3a^2-2a+1)$; *b)* $2x\cdot(3x^2-5x+1)$; *c)* $4b\cdot(b^3+2b^2+7b-1)$;
d) $5x\cdot(7x^2+3x+4)$; *e)* $3a^2\cdot(2a^2-3a+1)$; *f)* $4x^3\cdot(x^2-6x+3)$;
g) $5a^2b\cdot(ab-3b^2+2)$; *h)* $17ab^4\cdot(a^2b+ab^2-2)$; *i)* $8a^2b^3\cdot(2a^2+3b-5a^2b)$.

1140 *a)* $(a+3)\cdot(b-2)$; *b)* $(2a+b)\cdot(x+1)$;
c) $(a+5)\cdot(2x+y)$; *d)* $(a-2x)\cdot(b+4)$;
e) $(x+2)\cdot(3a-b)$; *f)* $(4x-1)\cdot(a-2b)=(2b-a)\cdot(1-4x)$;
g) $(3a+4b)\cdot(2x+5)$; *h)* $(a-4x^2)\cdot(1-5b)=(4x^2-a)\cdot(5b-1)$;
i) $(3a^2-4b^3)\cdot(3-2x^2)=(4b^3-3a^2)\cdot(2x^2-3)$.

1141 *a)* $(4x-5)\cdot(4x+5)$; *b)* $(7a+10b)\cdot(7a-10b)$;
c) $(8b+3x)\cdot(8b-3x)$; *d)* $(6x^2-11y^3)\cdot(6x^2+11y^3)$;
e) $(x-10)^2=(10-x)^2$; *f)* $(6a-7)^2=(7-6a)^2$;
g) $\left(\frac{2}{5}\cdot x+5\right)^2$; *h)* $(4x^2-1)\cdot(4x^2+1)=(2x-1)\cdot(2x+1)\cdot(4x^2+1)$;
i) $(4+9x^2)\cdot(4-9x^2)=(4+9x^2)\cdot(2+3x)\cdot(2-3x)$;
j) $(2a^2+7b^3)^2$; *k)* $6\cdot(x+1)^2$;
l) $4x\cdot(x-3)^2$; *m)* $3x^2\cdot(x+2)^2$;
n) $5x^2\cdot(x^2-4)^2$;
o) $(1+x^6)\cdot(1-x^6)=(1+x^6)\cdot(1+x^3)\cdot(1-x^3)=(1+x^6)\cdot(1+x^3)\cdot(1-x)\cdot(1+x+x^2)=$
$=(1+x^2)\cdot(1-x^2+x^4)\cdot(1+x)\cdot(1-x+x^2)\cdot(1-x)\cdot(1+x+x^2)$;
p) $(x+5)\cdot(x+3)$; *q)* $(x-4)\cdot(x+3)$;
r) $(4x^2+3)\cdot(x^2-4)=(4x^2+3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$;
s) $(2x+1)^3$; *t)* $(3a-b)^3$;
u) $(2x+3y)^3$; *v)* $(a-3)\cdot(a^2+3a+9)$;
w) $(x+4)\cdot(x^2-4x+16)$; *x)* $(3a+5b)\cdot(9a^2-15ab+25b^2)$.

1142 *a)* $(10\,000-2)\cdot(10\,000+2)=100\,000\,000-4=99\,999\,996$;

b) $\dfrac{(526+74)\cdot(526-74)}{(726+274)\cdot(726-274)}=\dfrac{600\cdot 452}{1000\cdot 452}=0{,}6$;

c) Legyen $a=54\,320$:

$$\frac{54321\cdot 54325-54323\cdot 54320}{54323\cdot 54322-54321^2}=\frac{(a+1)\cdot(a+5)-(a+3)\cdot a}{(a+3)\cdot(a+2)-(a+1)^2}=\frac{3a+5}{3a+5}=1.$$

1143 Az $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ kifejezésből

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=23^2-2\cdot(-7)=543.$$

1144 Egy polinomban az együtthatók összegét megkapjuk, ha a változó helyére 1-et helyettesítünk. Az $\left(x^2 - 3x + 1\right)^{2007}$ kifejezés $x = 1$ esetén:

$$(-1)^{2007} = -1.$$

Tehát a keresett polinomban az együtthatók összege –1.

1145 Legyenek a téglalap oldalai a és b. Tudjuk, hogy

$$2 \cdot (a + b) = 74,$$
$$a + b = 37,$$

másrészt

$$2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 = 1642,$$
$$a^2 + b^2 = 821.$$

Az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kifejezésből

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 37^2 - 821 = 548.$$

Tehát a téglalap területe 274 cm^2.

1146 Végezzük el a következő átalakításokat:

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) =$$
$$= (a - b) \cdot \left[(a - b)^2 + 2ab + ab\right] = (a - b) \cdot \left[(a - b)^2 + 3ab\right].$$

Behelyettesítve:

$$a^3 - b^3 = 2 \cdot (2^2 + 3 \cdot 7) = 50.$$

Műveletek algebrai törtekkel – megoldások

1147 *a)* $\frac{9a^3}{4b}$; *b)* $\frac{x}{2}$; *c)* $-\frac{4}{3a}$; *d)* $2a$;
e) $-\frac{4}{5} \cdot a^2$; *f)* $2y$; *g)* $\frac{2x+3}{x+5}$; *h)* $\frac{1-2x}{1+2x}$;
i) $\frac{3x+5}{4x}$; *j)* $\frac{2y+1}{4x+3}$; *k)* $\frac{x-4}{x+6}$; *l)* $\frac{2x-4}{x+2}$.

1148 *a)* $\frac{ab}{10xy}$; *b)* $\frac{3by^2}{8ax}$; *c)* $\frac{y}{x}$; *d)* a^2b;
e) $\frac{b-2}{a \cdot (b-3)}$; *f)* $\frac{3b+1}{b}$; *g)* $\frac{1}{x+4}$; *h)* $\frac{a-1}{a}$.

1149 *a)* $\frac{4x^2+15}{10x}$; *b)* $\frac{3-18y}{4y^2}$; *c)* $\frac{a+7}{a \cdot (a+1)}$; *d)* $\frac{1}{3}$;
e) $\frac{21-12x}{10 \cdot (2x-1)}$; *f)* $\frac{5a-14}{12 \cdot (3a+5)}$; *g)* $-\frac{1}{6}$; *h)* $\frac{8}{(x+2) \cdot (x-2)}$;
i) 1; *j)* $\frac{y^2-10y-27}{3 \cdot (y+5)^2}$; *k)* $\frac{4x^2+22x-5}{(2x-5) \cdot (2x+5)^2}$; *l)* $\frac{y^2-4y-7}{(y+1)^3}$.

1150 *a)* A tört értelmezve van, ha $4ab^2+4abc\neq 0$, azaz $4ab\cdot(b+c)\neq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $b+c\neq 0$.
A számlálóban két négyzet különbsége áll, tehát szorzattá alakítható:

$$\frac{(a^2+b^2-c^2+a^2-b^2+c^2)\cdot(a^2+b^2-c^2-a^2+b^2-c^2)}{4ab\cdot(b+c)}=$$

$$=\frac{2a^2\cdot 2\cdot(b^2-c^2)}{4ab\cdot(b+c)}=\frac{a\cdot(b-c)}{b}.$$

b) A törtek nevezői nem lehetnek egyenlők 0-val: $a^2-b^2\neq 0$, illetve $(a+b)^2\neq 0$, azaz $a+b\neq 0$. Mindhárom feltétel teljesül, ha $|a|\neq|b|$.
A számlálókat és a nevezőket is alakítsuk szorzattá, majd egyszerűsítsünk:

$$\frac{ab\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot(a+b)}+\frac{a^2\cdot(a+b)}{(a+b)^2}-\frac{a^2-2ab}{a+b}=\frac{ab}{a+b}+\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^2-2ab}{a+b}=\frac{3ab}{a+b}.$$

c) A törtek nevezői nem lehetnek egyenlők 0-val:

$$\begin{array}{rrrr} a^3-ab^2\neq 0, & & & \\ a\cdot(a^2-b^2)\neq 0, & & a^2+ab\neq 0, & b^2+ab\neq 0, \\ a\cdot(a-b)\cdot(a+b)\neq 0; & a+b\neq 0; & a\cdot(a+b)\neq 0; & b\cdot(a+b)\neq 0. \end{array}$$

Minden feltétel teljesül, ha $a\neq 0$, $b\neq 0$, $|a|\neq|b|$.
A zárójeleken belül hozzunk közös nevezőre:

$$\left(\frac{b^2}{a\cdot(a-b)\cdot(a+b)}+\frac{a\cdot(a-b)}{a\cdot(a-b)\cdot(a+b)}\right):\left(\frac{(a-b)\cdot b}{ab\cdot(a+b)}-\frac{a^2}{ab\cdot(a+b)}\right)=$$

$$=\frac{b^2+a^2-ab}{a\cdot(a-b)\cdot(a+b)}\cdot\frac{ab\cdot(a+b)}{ab-a^2-b^2}=\frac{-1}{a-b}\cdot b=\frac{b}{b-a}.$$

1151 *a)* Alakítsuk át az egyenlőség bal oldalán álló kifejezéseket. Közös nevezőre hozás után egyszerűsítsünk, majd újra hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{6ab-a^2-9b^2}{3b}\cdot\frac{a-6b}{a^2-6ab+9b^2}+\frac{a}{3b}\cdot\frac{a-3ab-6b}{a}=$$

$$=\frac{-1}{3b}\cdot(a-6b)+\frac{a-3ab-6b}{3b}=\frac{-a+6b+a-3ab-6b}{3b}=\frac{-3ab}{3b}=-a.$$

b) A módszer ugyanaz, az első nevező szorzattá alakítása:

$$a^3-a^2-a+1=a^2\cdot(a-1)-(a-1)=(a-1)\cdot(a^2-1)=(a-1)^2\cdot(a+1).$$

Ezt beírva egyszerűsíthetünk az első zárójelben:

$$\frac{4a^2-1}{(a-1)^2\cdot(a+1)}\cdot\frac{(1-a)^2}{a}=\frac{4a^2-1}{a\cdot(a+1)}=\frac{(2a-1)\cdot(2a+1)}{a\cdot(a+1)}.\qquad(1)$$

A második zárójelben legyen a közös nevező $a\cdot(a-1)\cdot(a+1)$, ekkor

$$\frac{4a\cdot(a+1)-2\cdot(a-1)-8a}{a\cdot(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{4a^2-6a+2}{a\cdot(a-1)\cdot(a+1)}.\qquad(2)$$

A számlálót alakítsuk szorzattá:

$$4a^2 - 6a + 2 = 4a^2 - 4a - 2a + 2 = 4a \cdot (a-1) - 2 \cdot (a-1) =$$
$$= (a-1) \cdot (4a-2) = 2 \cdot (a-1) \cdot (2a-1).$$

Ezt (2)-be beírva egyszerűsíthetünk:

$$\frac{2 \cdot (a-1) \cdot (2a-1)}{a \cdot (a-1) \cdot (a+1)} = \frac{2 \cdot (2a-1)}{a \cdot (a+1)}.$$

(1) és (3) alapján az eredeti kifejezés:

$$\frac{(2a-1) \cdot (2a+1)}{a \cdot (a+1)} \cdot \frac{a \cdot (a+1)}{2 \cdot (2a-1)} = \frac{2a+1}{2}.$$

1152 Alakítsuk át a bal oldalt:

$$\left(a - \frac{ab}{a-b}\right) : \left(\frac{ab}{a-b} - b\right) - \frac{a^2}{2b^2} \cdot \left(2 - \frac{b}{a}\right) =$$
$$= \frac{a^2 - ab - ab}{a-b} \cdot \frac{a-b}{ab - ab + b^2} - \frac{a^2}{2b^2} \cdot \frac{2a-b}{a}.$$

Egyszerűsítések után:

$$\frac{a^2 - 2ab}{b^2} - \frac{2a^2 - ab}{2b^2} = \frac{-3ab}{2b^2} = -\frac{3a}{2b}.$$

A feltétel szerint: $-\frac{3a}{2b} = -6$, amiből $a = 4b$ következik.

Behelyettesítve a kiszámítandó törtbe:

$$\frac{3a - 2b}{a+b} = \frac{10b}{5b} = 2.$$

Oszthatóság, számrendszerek – megoldások

1153 *a)* 4-re végződik. *b)* 2-re végződik. *c)* 1-re vagy 6-ra végződik.

1154 *a)* Ha n osztható 4-gyel. *b)* Nincs ilyen n.
c) Ha $n = 4k + 2$ alakú természetes szám.

1155 *a)* $x = y = 0$. *b)* $x = 1; 4; 7$. *c)* Ha $y = 0$, $x = 0; 3; 6; 9$. Ha $y = 8$, $x = 1; 4; 7$.
d) Ha $y = 0$, $x = 7$. Ha $y = 5$, $x = 2$.

1156 $18a - 6b = 14a + 2 \cdot (2a - 3b)$.

1157 $8a - 3b = 2 \cdot (a + b) + (6a - 5b)$.

1158 *a)* Az utolsó jegyek összege: $6 + 4 = 10$. *b)* A hatványok összege 5-re végződik.
c) Mindegyik hatványalap osztható 3-mal.

1159 *a)* $p = 2$.
b) Csak páros lehetne p, de a 21 nem prím, tehát nincs ilyen prímszám.

1160 $p = 2,\ q = 5,\ r = 23$; vagy $p = 2,\ q = 11,\ r = 17$.

1161 $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $3750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$. A 360-nak 24, a 3750-nek 20 osztója van.

1162 12.

1163 *a)* $2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$; *b)* $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$; *c)* $2^2 \cdot 3^4 = 324$;
d) $2^6 \cdot 7^2 = 3136$; *e)* $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$; *f)* $2^5 \cdot 5^2 \cdot 17 = 13\,600$;
g) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 = 1584$; *h)* $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 = 1\,228\,500$.

1164 *a)* $\frac{2}{15}$. *b)* $\frac{2}{45}$. *c)* $\frac{13}{1764}$.

1165 1; 3; 7; 9; 11; 13; 17; 19.

1166 $[a; b] = a \cdot b$.

1167 $a = 5$; 10; 15; 45; 30; 90.

1168 *a)* 115; *b)* 581; *c)* 742; *d)* 95 285.

1169 *a)* 11110100100_2; *b)* 30311_5; *c)* 13020_6.

1170 $1001_2 = 9 < 102_3 = 11 < 23_5 = 13 < 22_7 = 16 < 101_4 = 17 < 31_6 = 19$.

1171 $10010110_2 = 410_6$.

1172 Az összeadás helyesen: $3124_5 + 10232_5 = 13411_5$.

1173 Mivel $21\,600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, és a négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden kitevő páros, ezért a megfelelő osztó: $2 \cdot 3 = 6$.
Így a hányados valóban négyzetszám:
$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 60^2.$$

1174 A 40-re végződő szám osztható 10-zel. Ha egy szám négyzete lenne, az a szám is osztható lenne 10-zel. De akkor a négyzete 100-zal is osztható lenne, ami nem teljesül.

1175 Legyen a lépcsők száma n. Ez a szám a 2, 3, 4, 5, 6 többszöröseinél 1-gyel kisebb. A fenti számok legkisebb közös többszöröse 60, tehát $60 \mid n + 1$, azaz $n + 1 = 60k$, ahol $k \in \mathbb{N}^+$, másrészt $7 \mid n$. A legkisebb ilyen tulajdonságú számot keressük.
Legyen $k = 1$, ekkor $n = 59$, de a 7 nem osztója az 59-nek.
Ha $k = 2$, akkor $n = 119 = 17 \cdot 7$.
Tehát a legkisebb megfelelő szám a 119.

1176 Amikor Tibor n éves, édesanyja $28 + n$ éves. $n \mid 28 + n$, ezért $n \mid 28$. Tehát Tibor életkora akkor lesz osztója az édesanyjáénak, ha ő 1, 2, 4, 7, 14, 28 éves lesz.

1177 *a)* Hamis. Ha egyik szám osztója a másiknak, akkor a legnagyobb közös osztó a kisebb szám.
b) Igaz. A legkisebb közös többszörös legalább akkora, mint a nagyobb szám.
c) Hamis. A legnagyobb közös osztó csak a közös osztóknak többszöröse.
d) Igaz. Mivel a legnagyobb közös osztó mindkét számnak osztója, ezért a többszöröseiknek is.
e) Igaz. Ha a két számnak nincs közös prímtényezője, akkor a legkisebb közös többszörös a szorzatuk.
f) Hamis. Például $11 + 2 = 13$.

1178 A négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden kitevő páros, a harmadik hatványban a kitevők oszthatók 3-mal.

Mivel $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 3 = 6$, a keresett legkisebb szám csak a 2, 3 és 5 prímtényezőket tartalmazza.

A szám prímtényezős felbontásában a 2 kitevője páratlan, és 3-mal osztva 2-t ad maradékul, a legkisebb ilyen szám az 5.

A 3 kitevője páros, és 3-mal osztva 2-t ad maradékul. A legkisebb ilyen szám a 2.

Az 5 kitevője páratlan, és 3-mal osztható. A legkisebb ilyen szám a 3.

Tehát a keresett szám:

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 36\,000.$$

Ennek a számnak $(5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (3 + 1) = 72$ osztója van.

1179 Az összeget rendezzük négyes csoportokba:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{4n} =$$
$$= (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^4 \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \ldots + 7^{4n-4} \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) =$$
$$= (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) \cdot (1 + 7^4 + 7^8 + \ldots + 7^{4n-4}).$$

Mivel

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7 + 49 + 343 + 2401 = 2800,$$

ezért az összeg utolsó két számjegye 0.

1180 Számoljuk össze a számok osztóit:

$$10^{40} = 2^{40} \cdot 5^{40}, \text{ tehát } 41 \cdot 41 = 1681 \text{ osztója van,}$$
$$20^{30} = 2^{60} \cdot 5^{30}, \text{ tehát } 61 \cdot 31 = 1891 \text{ osztója van.}$$

Mindkét számnál figyelembe vettük a közös osztókat, ezeket el kell vennünk. A legnagyobb közös osztó $2^{40} \cdot 5^{30}$, amelynek $41 \cdot 31 = 1271$ osztója van. Tehát

$$1681 + 1891 - 1271 = 2301$$

olyan pozitív egész szám van, amely osztója a fenti számok valamelyikének.

1181 Képezzük a következő 1-es számjegyekből álló számokat:

$$A_1 = 1; \quad A_2 = 11; \quad A_3 = 111; \quad \ldots; \quad A_{2001} = 111\ldots111 \text{ (2001 jegy).}$$

Ha van közöttük olyan szám, amely többszöröse a 2001-nek, akkor az állítást beláttuk.

Ha nincs megfelelő szám, akkor van közöttük két olyan (pl. A_i és Aj), amelynek 2001-gyel osztva a maradéka megegyezik. Képezzük A_i és A_j különbségét, ha $i > j$:

$$A_i - A_j = 111\ldots111000\ldots000 \text{ (} i - j \text{ darab 1-es számjegy).}$$

Ez a különbség a megfelelő számjegyekből áll, és osztható 2001-gyel.

1182 A 7, 8 és 9 legkisebb közös többszöröse $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Ha a keresett 3 jegyű szám x, akkor

$$504 \mid 523\,000 + x.$$

Osszuk el maradékosan 523 000-t 504-gyel:

$$523\,000 = 504 \cdot 1037 + 352.$$

Tehát

$$x = 504 - 352 = 152 \quad \text{vagy} \quad x = 2 \cdot 504 - 352 = 656,$$

a következő megfelelő szám már 4 jegyű.

A megoldás:

$$523\,152 \quad \text{és} \quad 523\,656.$$

1183 Az összeadandók 3 jegyűek, az összeg pedig 4 jegyű, tehát $C = 1$.

I. Ha az utolsó tagok összeadásánál $A + 1 < 5$, akkor $B = A + 1$ (és $D = A + 2$).

– Ha ($D =$) $A + 2 \geq 5$, akkor $A = 3$ vagy $A = 4$, az utóbbi ellentmond az első feltételünknek. Ha $A = 3$, akkor $B = 4$, $D = 0$ és $E = 3$, ami nem lehet, mert különböző betűk különböző számokat jelölnek.

– Ha $D = A + 2 < 5$, akkor $A = 2$ vagy $A = 0$, az utóbbi esetben $B = 1 = C$, ami nem megfelelő. Ha $A = 2$, akkor $B = 3$, $D = 4$ és $E = 0$.

II. Ha az utolsó tagok összeadásánál $A + 1 \geq 5$, akkor $A = 4$, $B = 0$, $D = 2$, de $E = 4$, és ez ellentmondás.

Tehát az összeadás helyesen:

$$231_5 + 312_5 = 1043_5.$$

Vegyes feladatok – megoldások

1184 $A = 5 < B = 6$.

1185 *a)* $\frac{2a+3}{(a+1)\cdot(a+3)}$; *b)* $\frac{6x-1}{(3x-1)\cdot(3x+1)}$; *c)* $\frac{4}{x+5}$; *d)* 4.

1186 *a)* $\frac{3}{a-b}$; *b)* $\frac{x+y}{5}$; *c)* $\frac{a-b}{a+b}$; *d)* $\frac{x-y}{x+y}$.

1187 *a)* 2^{10240}; *b)* 2^{-160}; *c)* 2^{-1500}; *d)* 2^{896}.

1188 *a)* $11110_2 = 30 = 1010_3 < 111_5 = 31 = 133_4$;

b) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \frac{49}{25} = 1\frac{24}{25} < \left(\frac{39}{26}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25 < \left(\frac{4}{13}\right)^{-1} = \frac{13}{4} = 3{,}25 < \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8} = 3{,}375.$

1189 $96 = 2^5 \cdot 3$.

a) $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$; *b)* $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$;

c) $2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2400$; *d)* $2^5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 576 = 24^2$;

e) $2^5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 = 1728 = 12^3$; *f)* $54 = 2 \cdot 3^3$, $[54; 96] = 3^3 \cdot 2^5 = 864$.

1190 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis, $x \cdot y = 5$. *d)* Igaz.

e) Hamis.

1191 A feladat az 1800 és 6000 legnagyobb közös osztójának megkeresése:

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \quad \text{és} \quad 6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3,$$

$$(1800; 6000) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600.$$

1192 A fürdőszoba oldalai a 60 cm többszörösei.

Az 54 000 lehetséges osztópárjai közül csak a $60 \cdot 900$ és a $180 \cdot 300$ felel meg.

Az első nem lehet egy fürdőszoba mérete, tehát a fürdőszoba oldalai 1,8 m és 3 m.

1193 *a)* A 7300 m^2 területű futballpályán körülbelül $8{,}76 \cdot 10^8$ fűszál nő.

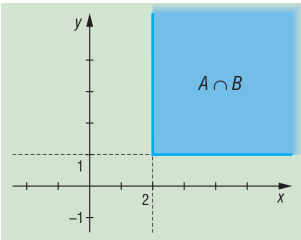
b) Európa területére $1{,}47 \cdot 10^9$ futballpálya férne el.

9.3. FÜGGVÉNYEK

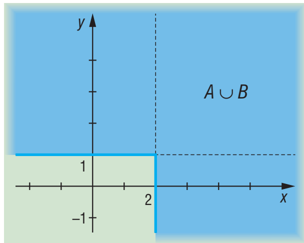
A derékszögű koordináta-rendszer, ponthalmazok – megoldások

1194 $f(-1) = 12$; $f(0) = 6$; $f(1) = 2$; $f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(4) = 2$.

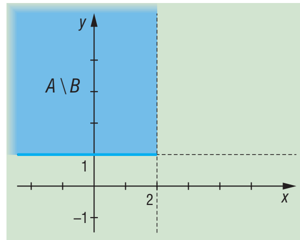
1195 *a)*



b)

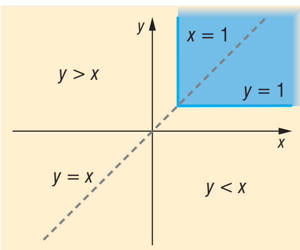


c)

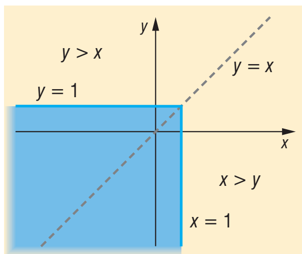


1196 $f(-1) = -24$; $f(0) = -6$; $f(1) = 0$; $f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(4) = 6$.

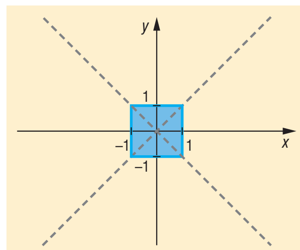
1197 *a)*



b)

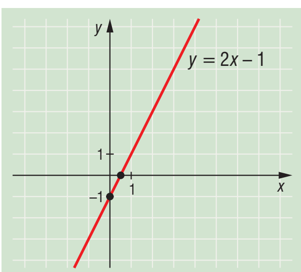


c)

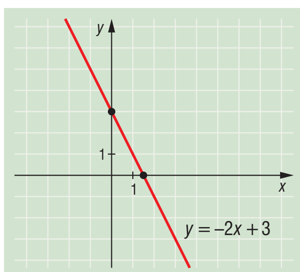


Lineáris függvények – megoldások

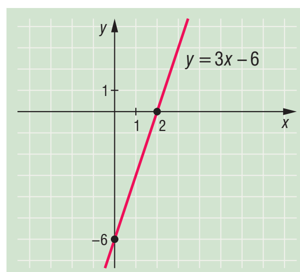
1198 *a)*



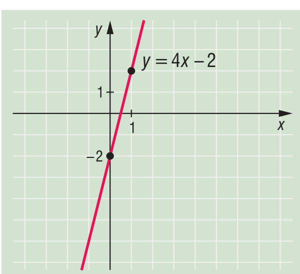
b)



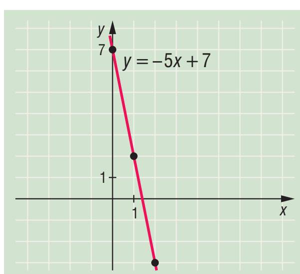
c)



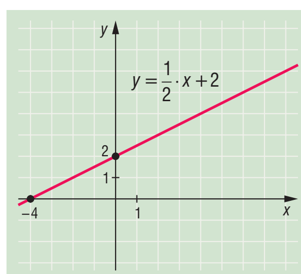
d)



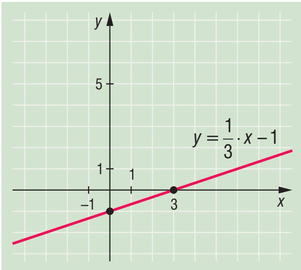
e)



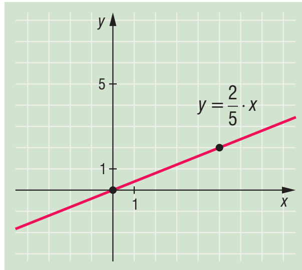
f)



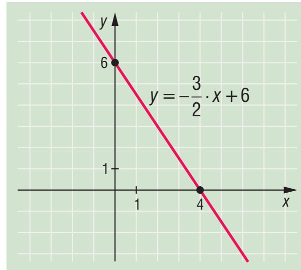
g)



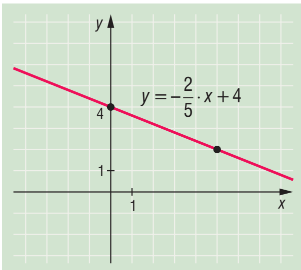
h)



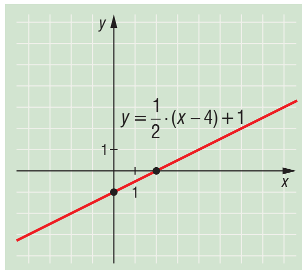
i)



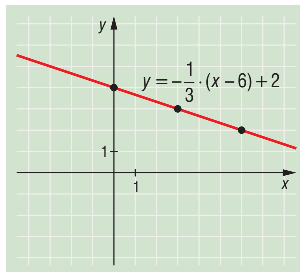
j)



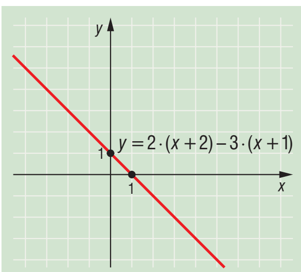
k)



l)



m)



1199 *a)* $x \mapsto x - 4$; *b)* $x \mapsto -x + 2$; *c)* $x \mapsto 2x - 3$;

d) $x \mapsto 4x - 4$; *e)* $x \mapsto -3x + 5$; *f)* $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x - 1$;

g) $x \mapsto 3$; *h)* $x \mapsto -\frac{2}{3} \cdot x + 4$; *i)* $x \mapsto -\frac{5}{2} \cdot x + 2$.

1200 *a)* P és R illeszkedik $f(x)$-re, Q nem. *b)* P és Q illeszkedik $g(x)$-re, R nem.

c) R illeszkedik $h(x)$-re, P és Q nem.

1201 Az $f(x) = ax + b$ egyenletbe helyettesítve a két pont koordinátáit, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} 3 &= a \cdot 3 + b \\ 0 &= a \cdot 2 + b \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$3 - 3a = -2a \quad \Rightarrow \quad a = 3 \quad \text{és} \quad b = -6.$$

A keresett hozzárendelési szabály: $x \mapsto 3x - 6$, a meredekség: $a = 3$.

Az x tengelyt $(x; 0)$ pontban metszi, azaz

$$0 = 3x - 6 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Az y tengelyt $(0; y)$ pontban metszi, azaz

$$y = 3 \cdot 0 - 6 \quad \Rightarrow \quad y = -6.$$

A keresett metszéspontok tehát: $(2; 0)$ és $(0; -6)$.

1202 Helyettesítsük be az adott függvényértékeket:

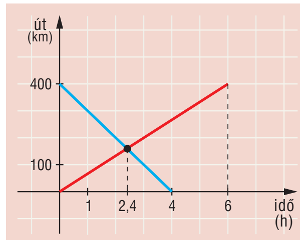
$$\left.\begin{aligned} f(-1) = 2 = a\cdot(-1)+b \quad &\Rightarrow \quad b = 2+a \\ f(2) = 3 = a\cdot 2 + b \quad &\Rightarrow \quad b = 3-2a \end{aligned}\right\}.$$

Egyenletként megoldva:

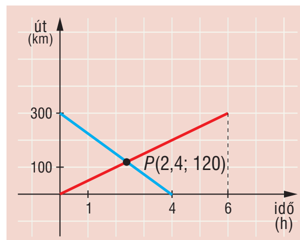
$$2+a = 3-2a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{3} \quad \text{és} \quad b=\frac{7}{3}.$$

Tehát az f függvény képlettel megadva: $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x+\frac{7}{3}$.

1203 A két autó 2,4 órával az indulásuk után találkozik.

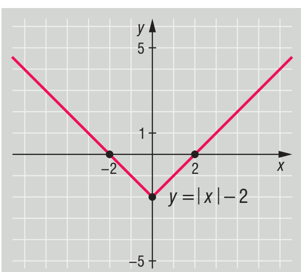


1204 A két jármű A-tól 120 km-re találkozik, indulásuk után 2,4 óra múlva.

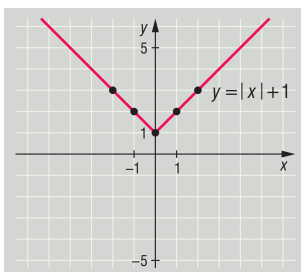


Az abszolútérték-függvény – megoldások

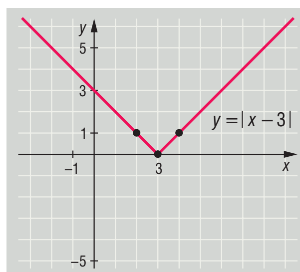
1205 *a)*



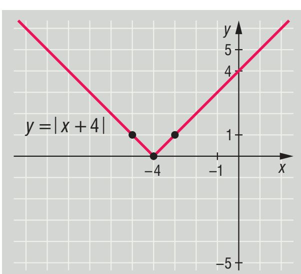
b)



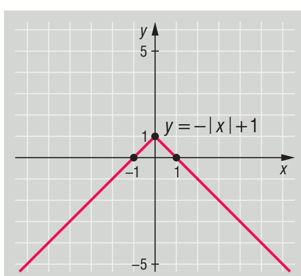
c)



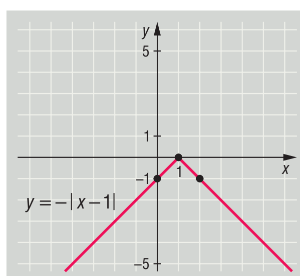
d)



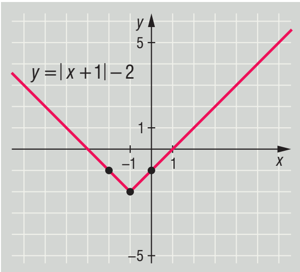
e)



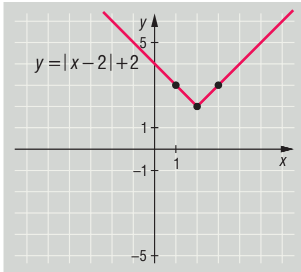
f)



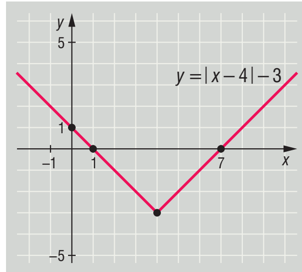
g)



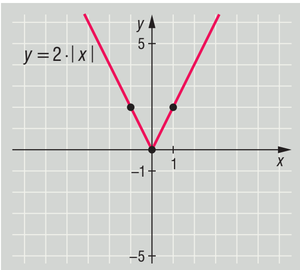
h)



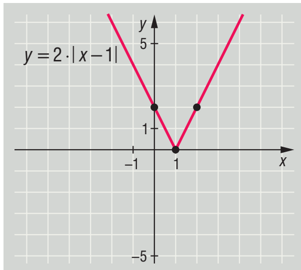
i)



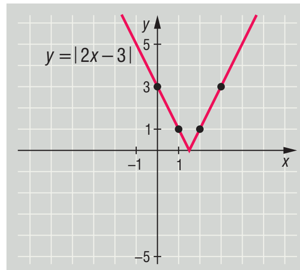
j)



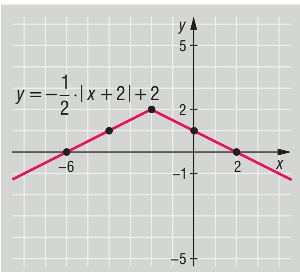
k)



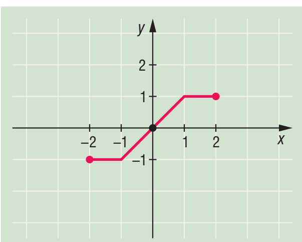
l)



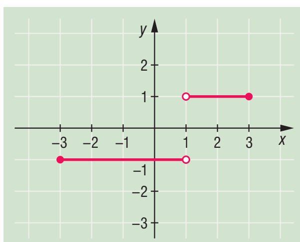
m)



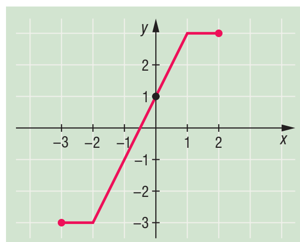
1206 *a)*



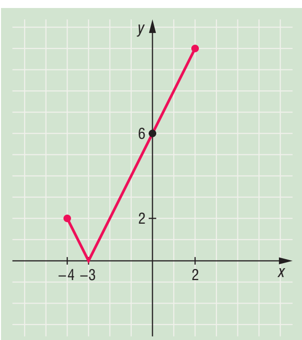
b)



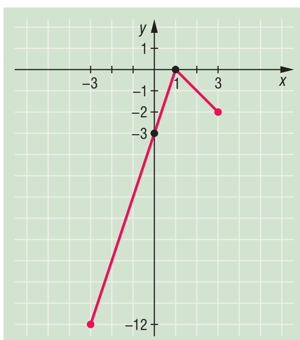
c)



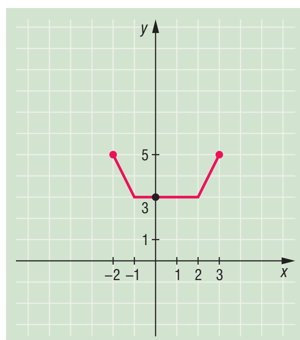
d)



e)



f)



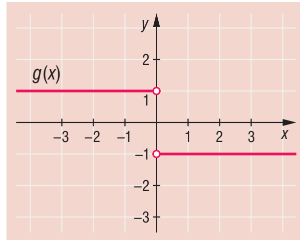
1207 *a)* $x \mapsto |x|-1$; *b)* $x \mapsto -|x|-1$; *c)* $x \mapsto |x-2|$; *d)* $x \mapsto |x+3|$;
e) $x \mapsto |x+4|-2$; *f)* $x \mapsto |x-3|-3$; *g)* $x \mapsto -|x+2|+4$; *h)* $x \mapsto -|x-4|+2$.

1208 Mivel

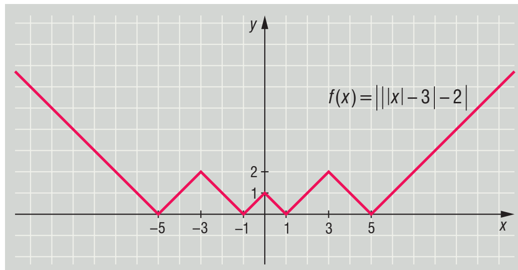
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \ge 0, \\ -x, & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

ezért

$$g(x) = \frac{-|x|}{x} = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x > 0, \\ 1, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



1209 A függvény grafikonja az ábrán látható.

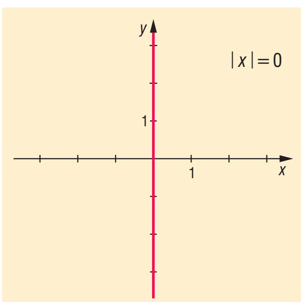


1210 Ha $x = 0$, akkor az egyenlőség igaz.

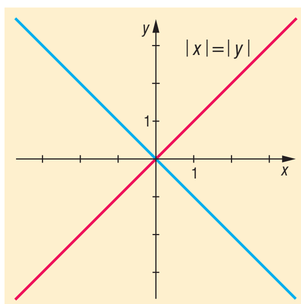
Ha $x > 0$, akkor $|x| = x$, így $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2 + 0 = x^2$, tehát az egyenlőség igaz.

Ha $x < 0$, $|x| = -x$, így $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = 0 + x^2 = x^2$, tehát az egyenlőség igaz.

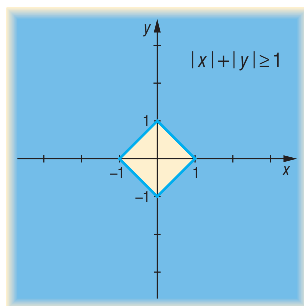
1211 *a)*



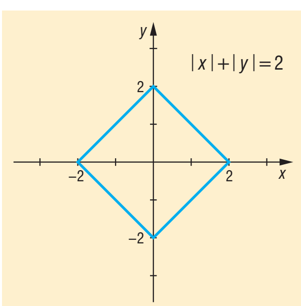
b)



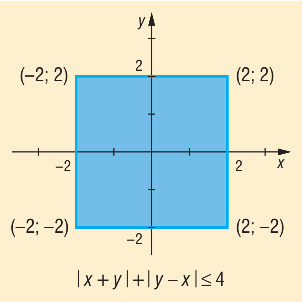
c)



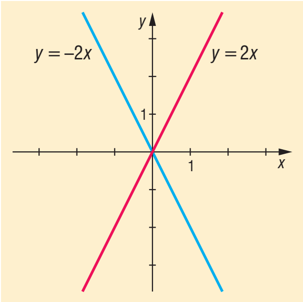
d)



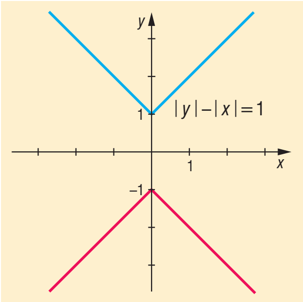
1212 *a)*



b)



c)



A másodfokú függvény – megoldások

1213 *a)* Értékkészlete: $[2; \infty[$.

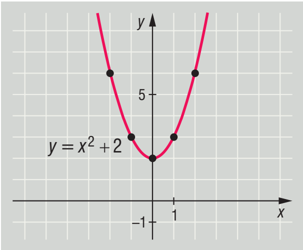
Zérushelye: nincs.

Menete: $]-\infty; 0]$-ban szigorúan monoton csökken;

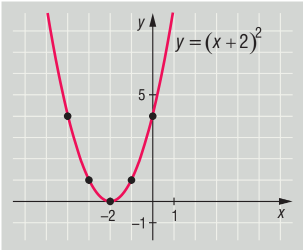
$[0; \infty[$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértéke: minimuma van, helye: $x = 0$, értéke $y = 2$.

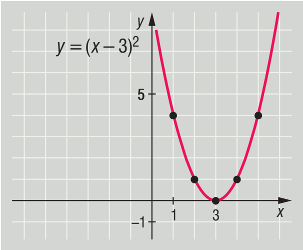
Paritása: páros függvény.



b) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



c) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



d) Értékkészlete: $]-\infty; 4]$.

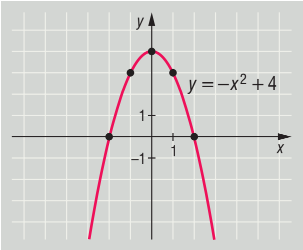
Zérushelyei: $x = -2$ és $x = 2$.

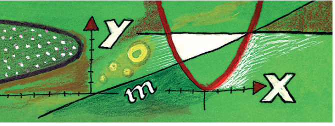
Menete: $]-\infty; 0]$-ban szigorúan monoton nő;

$[0; \infty[$-ban szigorúan monoton csökken.

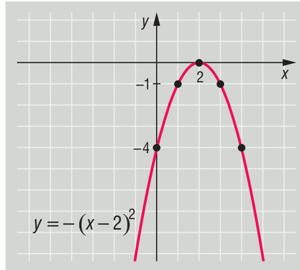
Szélsőértéke: maximuma van, helye: $x = 0$, értéke $y = 4$.

Paritása: páros függvény.

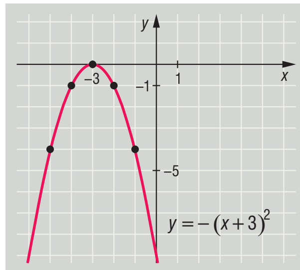




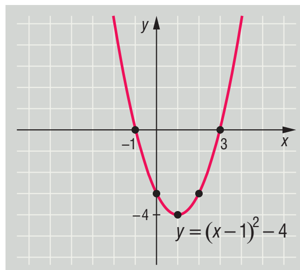
e) Jellemzése a *d)* feladathoz hasonlóan történik.



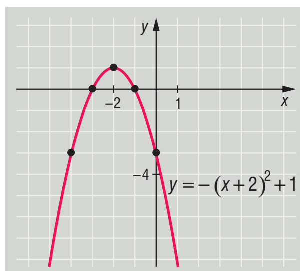
f) Jellemzése a *d)* feladathoz hasonlóan történik.



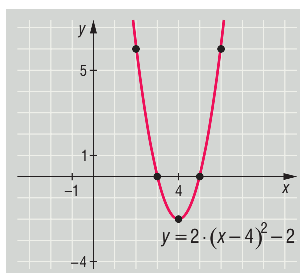
g) Értékkészlete: $[-4; \infty[$.
Zérushelyei: $x = -1$ és $x = 3$.
Menete: $]-\infty; 1]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[1; \infty[$-ban szigorúan monoton nő.
Szélsőértéke: minimuma van, helye: $x = 1$, értéke $y = -4$.
Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.



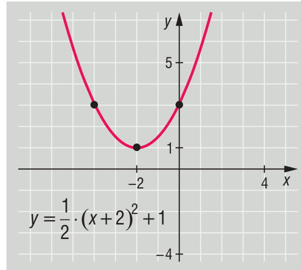
h) Értékkészlete: $]-\infty; 1]$.
Zérushelyei: $x = -3$ és $x = -1$.
Menete: $]-\infty; -2]$-ban szigorúan monoton nő;
$[-2; \infty[$-ban szigorúan monoton csökken.
Szélsőértéke: maximuma van, helye: $x = -2$, értéke $y = 1$.
Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.



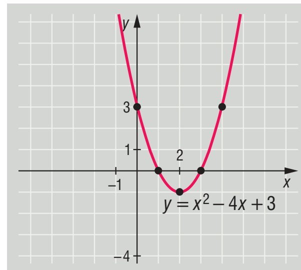
i) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.



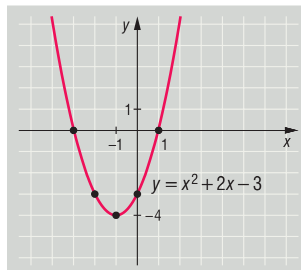
j) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.



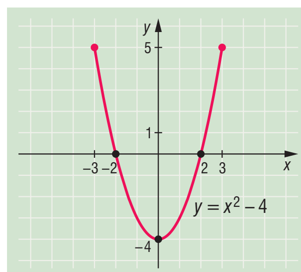
k) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.



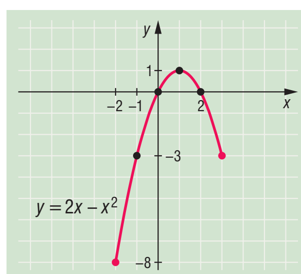
l) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.



1214 *a)* Értékkészlete: $[-4; 5]$.
Zérushelyei: $x = -2$ és $x = 2$.
Menete: $[-3; 0]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[0; 3]$-ban szigorúan monoton nő.
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = -4$;
maximumai: $x_1 = -3$ helyen értéke: $y_1 = 5$;
$x_2 = 3$ helyen értéke: $y_2 = 5$.
Paritása: páros függvény.



b) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



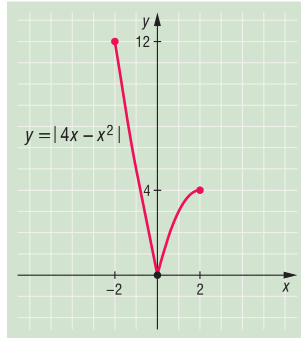
c) Értékkészlete: $[0; 12]$.

Zérushelye: $x = 0$.

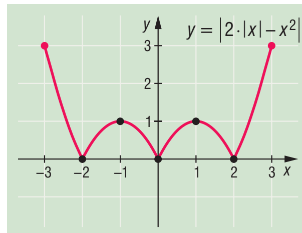
Menete: $[-2; 0]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[0; 2]$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = -2$, értéke: $y = 12$.

Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.



d) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



e) Értékkészlete: $[0; 7]$.

Zérushelyei: $x_1 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ és $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Menete: $\left[-1; 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$-ban szigorúan monoton csökken;

$\left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1\right[$-ban szigorúan monoton nő;

$\left[1; \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right[$-ban szigorúan monoton csökken;

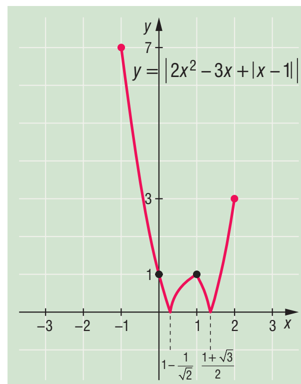
$\left[\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}; 2\right[$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértékei: minimumai: $x_1 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ helyen értéke: $y_1 = 0$;

$x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ helyen értéke $y_2 = 0$;

maximumának helye: $x = -1$, értéke $y = 7$.

Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.

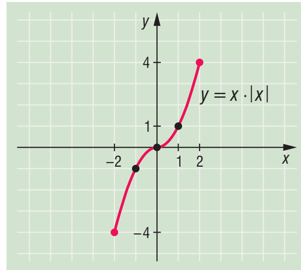


f) Mivel

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \ge 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

ezért

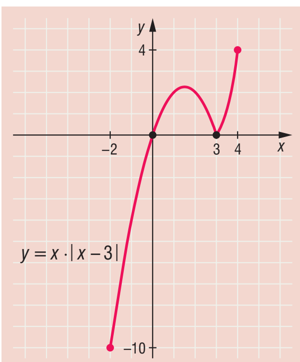
$$x \mapsto x \cdot |x| = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \ge 0, \\ -x^2, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



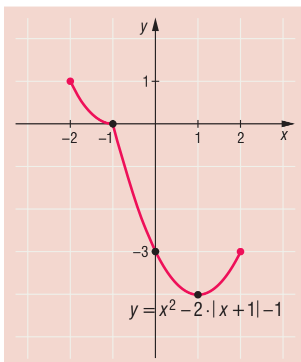
Értékkészlete: $[-4; 4]$.
Zérushelye: $x = 0$.
Menete: $[-2; 2]$-ban szigorúan monoton nő.
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -2$, értéke: $y = -4$;
maximumának helye: $x = 2$, értéke: $y = 4$.
Paritása: páratlan függvény.

1215 *a)* $x \mapsto x^2 - 1$; *b)* $x \mapsto -x^2 + 5$; *c)* $x \mapsto (x-4)^2$;
d) $x \mapsto -(x+2)^2$; *e)* $x \mapsto (x+1)^2 - 2$; *f)* $x \mapsto -(x-5)^2 + 3$;
g) $x \mapsto 2 \cdot (x+1)^2 - 5$; *h)* $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x+2)^2 - 4$; *i)* $x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 + 2$.

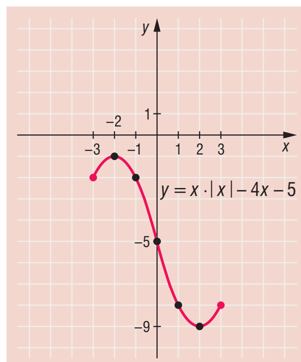
1216 *a)*



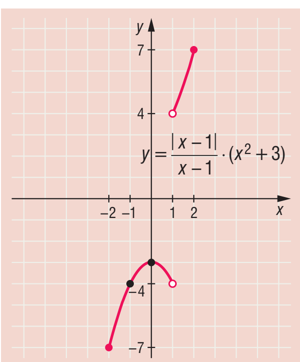
b)



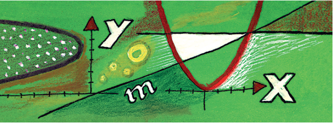
c)



d)



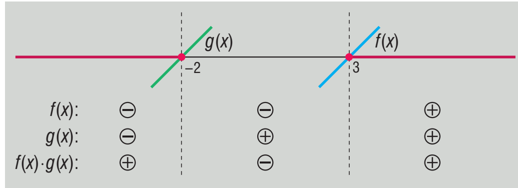
1217 *a)* $x = 3$ és $x = 4$; *b)* $2 < x < 7$; *c)* $-4 < x < -1$ vagy $1 < x < 4$;
d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$; *e)* $-1 \le x \le 1$ vagy $x \le -\frac{3}{2}$ vagy $x \ge \frac{3}{2}$.



1218 *a)* Az egyenlőtlenség: $(x-3)\cdot(x+2)\geq 0$.

Legyen $f(x)=x-3$ és $g(x)=x+2$. Az $f(x)$ zérushelye $x=3$, a $g(x)$ zérushelye pedig $x=-2$ helyen van. Mindkét függvény szigorúan monoton nő.

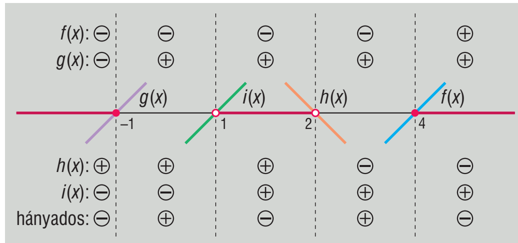
A keresett megoldás: $x\leq -2$ vagy $x\geq 3$.



b) Az $\dfrac{(x-4)\cdot(x+1)}{(2-x)\cdot(x-1)}\leq 0$ egyenlőtlenségnek akkor van értelme, ha $x\neq 1$ és $x\neq 2$.

Legyen $f(x)=x-4$ és $g(x)=x+1$. Az $f(x)$ zérushelye $x=4$, a $g(x)$ zérushelye pedig $x=-1$ helyen van. Mindkét függvény szigorúan monoton nő.

Legyen $h(x)=2-x$ és $i(x)=x-1$. A $h(x)$ zérushelye $x=2$, az $i(x)$ zérushelye pedig $x=1$ helyen van. $h(x)$ szigorúan monoton csökken, $i(x)$ szigorúan monoton nő.

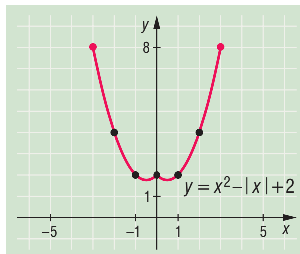


A keresett megoldás: $x\leq 1$ vagy $1<x<2$ vagy $x\geq 4$.

1219 Az f függvény páros, így grafikonja szimmetrikus az y tengelyre. Ha $x\geq 0$, akkor

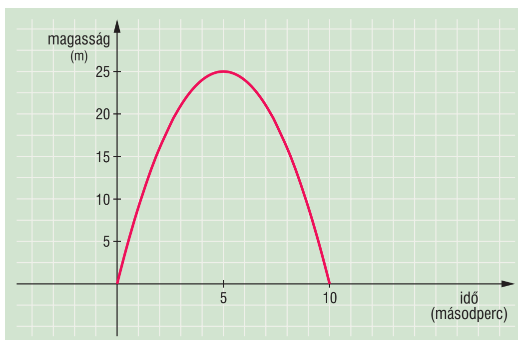
$$f(x)=x^2-x+2=(x-0{,}5)^2+\frac{7}{4},$$

$f(x)\geq 0$ minden $-3\leq x\leq 3$ esetén teljesül.



1220 Ha $f(x)=ax^2+bx+c$ alakú, akkor a feltételekből $c=1$, $a+b+c=0$, $9a+3b+c=10$. Innen $a=2$, $b=-3$, $c=1$, tehát $f(x)=2x^2-3x+1$.

1221 A labda 10 másodperc múlva esik le, és 5 másodperc múlva jut a legmagasabbra, 25 méterre.



1222 Az ábra jelöléseit felhasználva:

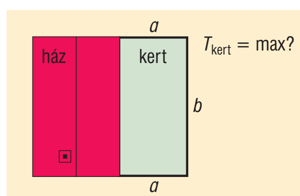
$$48=a+a+b \quad\Rightarrow\quad b=48-2a.$$

A kert területe:

$$T=a\cdot b=a\cdot(48-2a)=48a-2a^2.$$

Ennek keressük a maximumát. Teljes négyzetté alakítás után kapjuk:

$$-2\cdot(a-12)^2+288.$$



Ez akkor maximális, ha csak 288 az értéke, tehát ha $a = 12$, amiből $b = 24$. Ekkor:

$$T_{max} = 12 \cdot 24 = 288\ \text{m}^2.$$

Tehát ahhoz, hogy a kert maximális területű legyen, a téglalap oldalainak $a = 12$ m és $b = 24$ m-nek kell lennie.

1223 *a)* Jelöljük az egyik részt x-szel. Ekkor az $x \cdot (40 - x)$ szorzat maximumát keressük. Alakítsunk teljes négyzetté:

$$x \cdot (40 - x) = -x^2 + 40x = -(x - 20)^2 + 400.$$

Ez akkor maximális, ha csak 400-zal egyenlő, azaz $x = 20$. Ekkor a két rész egyenlő.

b) Jelöljük a számot y-nal, az egyik részt x-szel, ahol $y > x$ és $x, y > 0$. Ekkor az $x \cdot (y - x)$ szorzat maximumát keressük. Alakítsunk teljes négyzetté:

$$x \cdot (y - x) = -x^2 + x \cdot y = -\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}.$$

Ez akkor maximális, ha a kifejezés értéke $\frac{y^2}{4}$, vagyis ha $x = \frac{y}{2}$. Ezzel beláttuk a fenti állítást.

1224 Mivel a másodfokú függvénynek maximuma van, $p < 0$. Ekkor a másodfokú függvény képe egy lefelé nyíló parabola, és a csúcspontja, ahol a függvénynek maximuma van, a következő helyen van:

$$-\frac{p^2 - 40{,}5}{2p} = \frac{9}{4}.$$

Ebből $2p^2 + 9p - 81 = 0$, tehát $p_1 = 4{,}5$, vagy $p_2 = -9$. Csak az utóbbi jöhet számításba, ekkor a függvény:

$$f(x) = -9x^2 + 40{,}5x - 12, \quad f\left(\frac{9}{4}\right) = 33{,}5625.$$

1225 Mivel

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10,$$

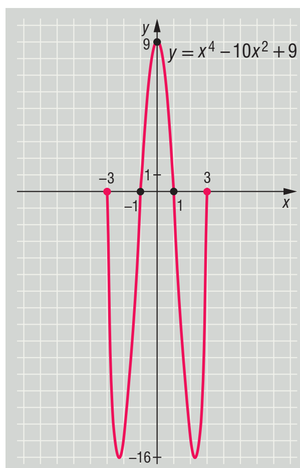
ezért

$$f(-x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 10.$$

Így

$$g(x) = 2x^4 - 5x^2 - 10 \quad \text{és} \quad h(x) = -3x^3 + 6x.$$

1226 A függvény grafikonja az ábrán látható.



A függvény páros, mert $f(-x) = f(x)$ az értelmezési tartomány minden elemére. $f(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $|x| = 1$ és $|x| = 3$. Mivel $f(x) = (x^2 - 5)^2 - 16 \geq -16$, $f(x)$-nek az $|x| = \sqrt{5}$-nél van minimuma, itt $f(\sqrt{5}) = f(-\sqrt{5}) = -16$.

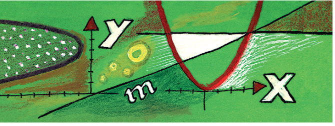
Maximuma: $f(0) = 9$.

1227 Az $f(x)$-et értelmező kifejezést alakítsuk teljes négyzetté:

$$f(x) = (x^2 - 4)^2 - 25.$$

Mivel egy szám négyzete mindig nemnegatív, $f(x) \geq -25$ és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x^2 - 4 = 0$, és így $x^2 = 4$-ből $x = 2$, mivel a feladat feltétele szerint $x \geq 0$. Az f függvény a legkisebb értékét tehát a 2 helyen veszi fel, és itt az értéke -25.

A legnagyobb értékét a 3 helyen éri el az f, és $f(3) = 0$.



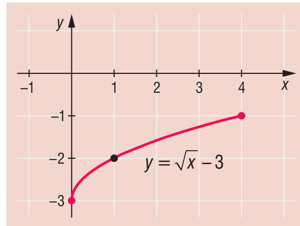
A négyzetgyökfüggvény – megoldások

1228 *a)* Értékkészlete: $[-3; -1]$.

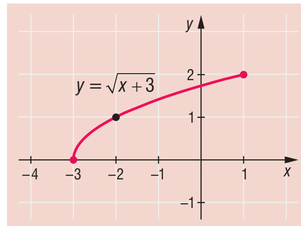
Zérushelye: nincs.

Menete: $[0; 4]$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = -3$;
maximumának helye: $x = 4$, értéke: $y = -1$.



b) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.

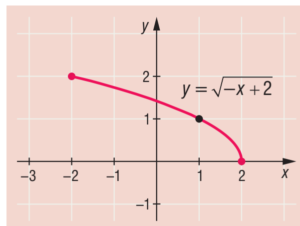


c) Értékkészlete: $[0; 2]$.

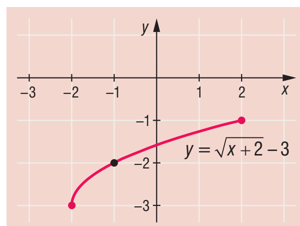
Zérushelye: $x = 2$.

Menete: $[-2; 2]$-ban szigorúan monoton csökken.

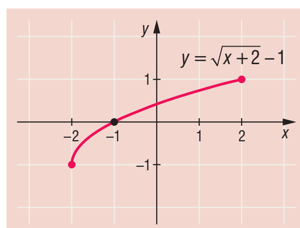
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 2$, értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = -2$, értéke: $y = 2$.



d) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



e) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.

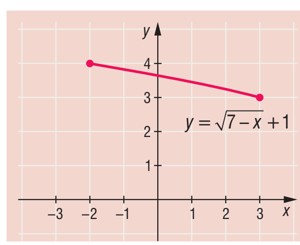


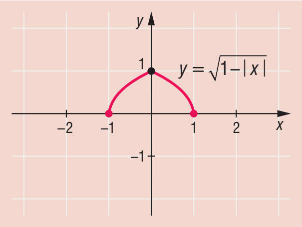
f) Értékkészlete: $[3; 4]$.

Zérushelye: nincs.

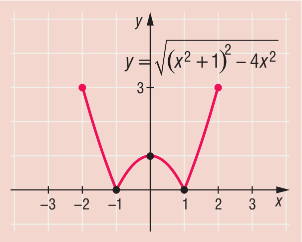
Menete: $[-2; 3]$-ban szigorúan monoton csökken.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 3$, értéke: $y = 3$;
maximumának helye: $x = -2$, értéke: $y = 4$.





g) Értékkészlete: $[0; 1]$.
Zérushelyei: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$.
Menete: $[-1; 0]$-ban szigorúan monoton nő;
$[0; 1]$-ban szigorúan monoton csökken.
Szélsőértékei: minimumai: $x_1 = -1$ helyen értéke: $y_1 = 0$;
$x_2 = 1$ helyen értéke: $y_2 = 0$;
maximumának helye: $x = 0$, értéke: $y = 1$.
Paritása: páros függvény.

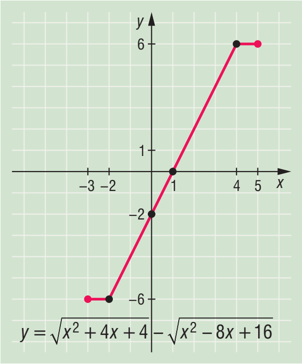


h) Az eredeti hozzárendelési szabály átalakítható: $x \mapsto |x^2 - 1|$.
Értékkészlete: $[0; 3]$.
Zérushelyei: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$.
Menete: $[-2; -1]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[-1; 0]$-ban szigorúan monoton nő;
$[0; 1]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[1; 2]$-ban szigorúan monoton nő.
Szélsőértékei: minimumai: $x_1 = -1$ helyen értéke: $y_1 = 0$; $x_2 = 1$ helyen értéke: $y_2 = 0$;
maximumai: $x_1 = -2$ helyen értéke: $y_1 = 3$; $x_2 = 2$ helyen értéke: $y_2 = 3$;
helyi maximuma van az $x = 0$ helyen, értéke $y = 1$.
Paritása: páros függvény.

1229 *a)* $x = 2$; *b)* $x = 4$; *c)* $x = 3$;
d) $x = 3$; *e)* $x = 8$.

1230 A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

$$y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 8x + 16} =$$
$$= \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(x-4)^2} = |x+2| - |x-4|.$$

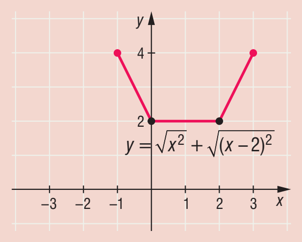


Értékkészlete: $[-6; 6]$.
Zérushelye: $x = 1$.
Menete: $[-3; -2]$-ban konstans;
$[-2; 4]$-ban szigorúan monoton nő;
$[4; 5]$-ban konstans.
Szélsőértékei: $[-3; -2]$-ban minimuma, értéke: $y = -6$;
$[4; 5]$-ban maximuma, értéke: $y = 6$.

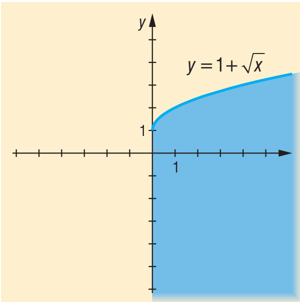
1231 A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

$$y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} = |x| + |x-2|.$$

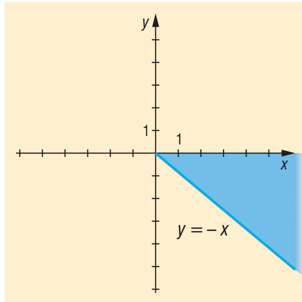
A legkisebb érték a 2, amit a $[0; 2]$-ban vesz fel.
A legnagyobb érték a 4, amit a -1 és a 3 helyen vesz fel.



1232 *a)*



b)

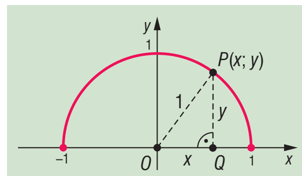


1233 *a)* $x + 1 \geq 0$, azaz $x \geq -1$;
b) $x - x^2 \geq 0$, azaz $0 \leq x \leq 1$;
c) $2 + x - x^2 \geq 0$, azaz $-1 \leq x \leq 2$;
d) $-x \geq 0$, azaz $x \leq 0$, és $2 + x > 0$, azaz $x > -2$, tehát $-2 < x \leq 0$.

1234 Pitagorasz tétele alapján az OPQ háromszögből $x^2 + y^2 = 1$, innen (figyelembe véve, hogy $y \geq 0$):

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

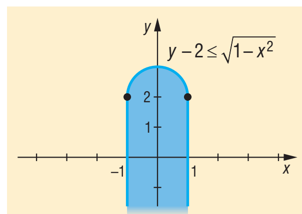
A függvény grafikonja tehát egy 0 középpontú 1 sugarú félkör, ahol a félkör pontjai az $y \geq 0$ félsíkban vannak.



1235 A feltételt írjuk át így:

$$y \leq \sqrt{1 - x^2} + 2.$$

Az 1234. feladat megoldása alapján $-1 \leq x \leq 1$, és így a keresett pontok halmaza az ábrán látható.

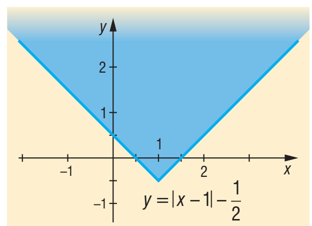


1236 Az adott feltételt így írhatjuk át ekvivalens átalakítással:

$$y + \frac{1}{2} > |x - 1|,$$

$$y > |x - 1| - \frac{1}{2}.$$

A megfelelő pontok halmaza az ábrán látható.

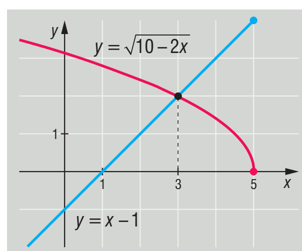


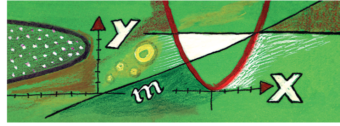
1237 Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$$x \mapsto \sqrt{10 - 2x}, \quad x \leq 5 \qquad (1)$$

$$x \mapsto x - 1, \quad x \leq 5 \qquad (2)$$

Vegyük észre, hogy mivel a bal oldal csak nemnegatív lehet, ezért a jobb oldal is! Így szükséges még megjegyezni, hogy $x - 1 \geq 0$, azaz $x \geq 1$. Mivel az (1) csökken, a (2) nő, legfeljebb egy gyök van. Az ábráról leolvasható és könnyen ellenőrizhető, hogy $x = 3$ jó gyök.





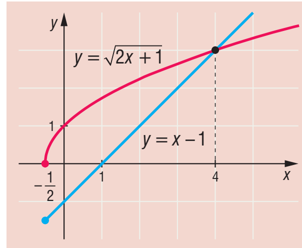
1238 A következő függvényeket ábrázoljuk:

$$x \mapsto \sqrt{2x+1},\ x \geq -\frac{1}{2};$$

$$x \mapsto x-1, \qquad x \geq -\frac{1}{2}.$$

A bal oldal csak nemnegatív lehet, ezért a jobb oldal is: $x \geq 1$.

A függvények tulajdonságai miatt csak $x = 4$ jó gyök.



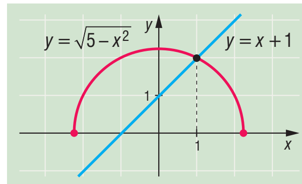
1239 Az alábbi függvényeket ábrázoljuk:

$$x \mapsto \sqrt{5-x^2},\ x^2 \leq 5;$$

$$x \mapsto x+1.$$

A bal oldal csak nemnegatív lehet, ezért a jobb oldal is: $x \geq -1$.

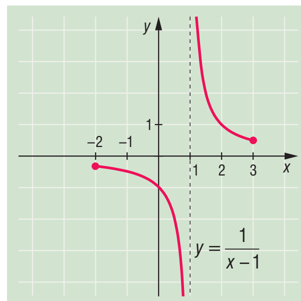
A függvények tulajdonságai miatt csak $x = 1$ az egyetlen jó gyök.



Lineáris törtfüggvények – megoldások

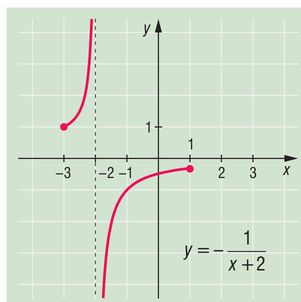
1240 *a)* A $[-2;\ 1[$-ban és az $]1;\ 3]$-ban is csökken, nincs sem legnagyobb, sem legkisebb értéke.

Zérushelye nincs.



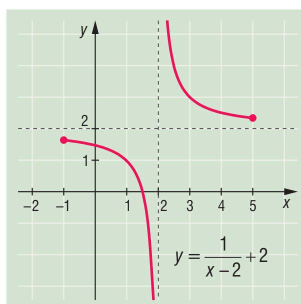
b) A $[-3;\ -2[$-ban és a $]-2;\ 1]$-ban is nő, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye nincs.



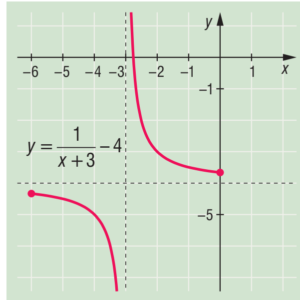
c) A $[-1;\ 2[$-ban és a $]2;\ 5]$-ban is csökken, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye: $x = \frac{3}{2}$.



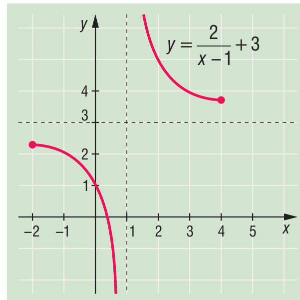
d) A $[-6; -3[$-ban és a $]-3; 0]$-ban is csökken, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye: $x = -\dfrac{11}{4}$.

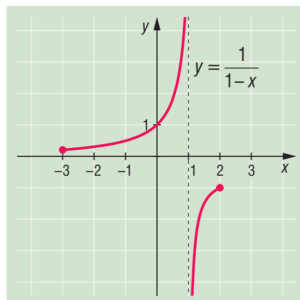


e) A $[-2; 1[$-ban és az $]1; 4]$-ban is csökken, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

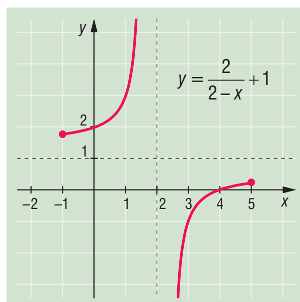
Zérushelye: $x = \dfrac{1}{3}$.



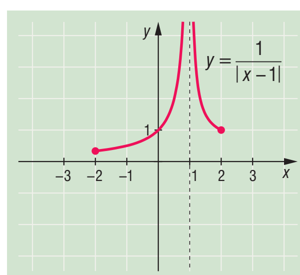
f) A $[-3; 1[$-ban és az $]1; 2]$-ban is nő, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.
Zérushelye nincs.

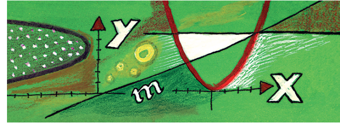


g) A $[-1; 2[$-ban és a $]2; 5]$-ban is nő, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.
Zérushelye: $x = 4$.



h) A $[-2; 1[$-ban nő, az $]1; 2]$-ban csökken, legnagyobb értéke nincs, legkisebb értéke -2-nél van, és ez $\dfrac{1}{3}$.
Zérushelye nincs.



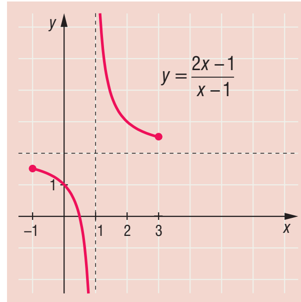


1241 *a)* A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

$$y=\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}.$$

A $[-1;\,1[$-ban és az $]1;\,3]$-ban csökken, nincs legnagyobb és legkisebb értéke sem.

Zérushelye: $x=\dfrac{1}{2}$.

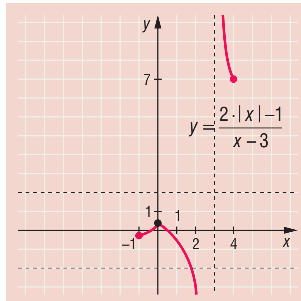


b) A függvény átalakítható:

$$\frac{2\cdot|x|-1}{x-3}=\begin{cases}2+\dfrac{5}{x-3}, & \text{ha} \quad x\ge 0,\\[2mm] -2-\dfrac{7}{x-3}, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$

A $[-1;\,0]$-ban nő, a $[0;\,3[$-ban és a $]3;\,4]$-ban csökken, nincs legnagyobb és legkisebb értéke.

Zérushelyei: $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=-\dfrac{1}{2}$.

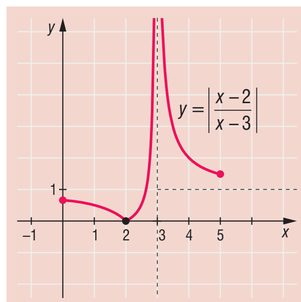


c) A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

$$y=\left|\frac{x-2}{x-3}\right|=\left|1+\frac{1}{x-3}\right|.$$

A $[0;\,2]$-ban és a $]3;\,5]$-ban csökken, a $[2;\,3[$-ban nő, legkisebb értéke 0, ezt a 2 helyen veszi fel, legnagyobb értéke nincs.

Zérushelye: $x=2$.

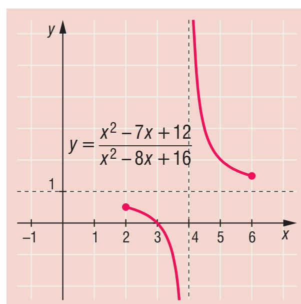


d) A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

$$y=\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+16}=1+\frac{1}{x-4}.$$

A $[2;\,4[$-ban és a $]4;\,6]$-ban csökken, nincs legnagyobb és legkisebb értéke.

Zérushelye: $x=3$.

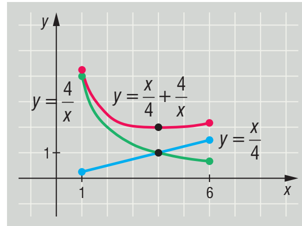


1242 *a)* $x>3$ és $-\dfrac{9}{2}<x<-2$; *b)* $x_1=-5,\ x_2=5$;

c) $2<x<6$; *d)* $x>-1$.

1243 $f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{x},\ x\ne 0,\ x\ne 1;$ $f(f(f(x)))=x,\ x\ne 0,\ x\ne 1.$

1244 Alakítsuk át így a függvényt értelmező kifejezést:

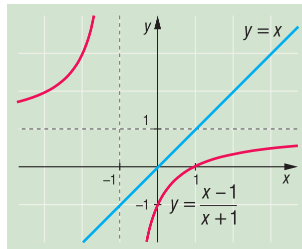


$$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{4}{x},\ 1\le x\le 6.$$

Az $x\mapsto\frac{x}{4}$ és $x\mapsto\frac{4}{x}$ függvények grafikonja segítségével könnyen vázolhatjuk f grafikonját.

Látható, hogy $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\ge 2$, mert $4x>0$-val szorozva és rendezve ezt kapjuk: $x^2-8x+16\ge 0$, azaz $(x-4)^2\ge 0$, ami igaz és a lépések megfordíthatók.

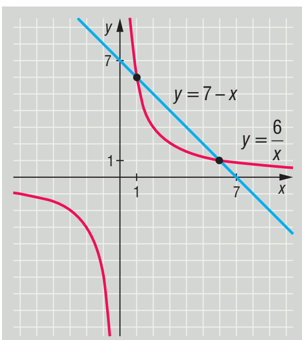
1245 Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:



$$x\mapsto\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1},\ x\ne -1$$
$$x\mapsto x.$$

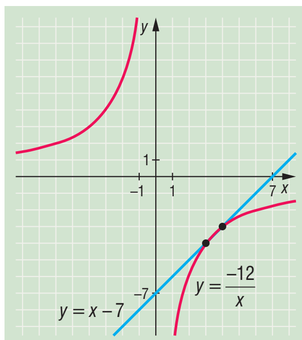
A grafikon alapján világos, hogy $x>-1$ esetén igaz az egyenlőtlenség.

1246 *a)*



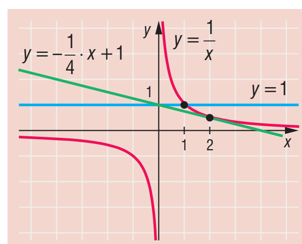
$x_1=1,\ y_1=6;$
$x_2=6,\ y_2=1;$

b)



$x_1=3,\ y_1=-4;$
$x_2=4,\ y_2=-3.$

1247 Két p érték jó: $p=0$ és $p=-\frac{1}{4}$.



1248 Vezessük be a következő jelölést:

$$z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\quad \text{ekkor}\quad z^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2.$$

Ezzel a kifejezés így írható le:

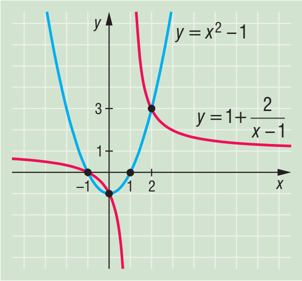
$$4\cdot(z^2-2)-12z+17=4z^2-12z+9=(2z-3)^2\ge 0.$$

1249 Az $f(x) = x^2 - 1$ és a $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ átalakításokkal könnyű a megfelelő grafikonokat ábrázolni:

a) $f(x) = g(x)$, ha $x = -1, 0, 2$;

b) $f(x) < g(x)$, ha $-1 < x < 0$, vagy $1 < x < 2$;

c) $f(x) > g(x)$, ha $x < -1$, vagy $0 < x < 1$, vagy $x > 2$.



1250 Az egyenletet így is írhatjuk:

$$2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy - 1)^2 = 0.$$

Mivel $\left(x^2 - y^2\right)^2 \geq 0$ és $(2xy - 1)^2 \geq 0$, az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha

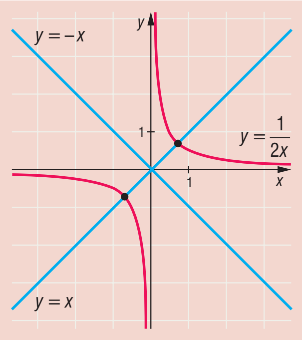
$$x^2 = y^2; \qquad (1)$$

$$xy = \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Ábrázoljuk a síkon azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik (1)-et és (2)-t.

A megoldások:

$$x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad x_2 = y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



1251 Adjuk össze a két egyenletet:

$$x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 6x + 6y = 0,$$

$$(x - y - 3)^2 = 0,$$

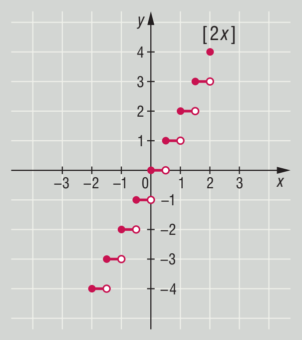
$$y = x - 3.$$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk: $x^2 = 18$, azaz

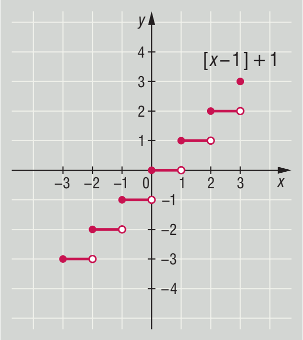
$$x = \pm 3 \cdot \sqrt{2} \quad \text{és} \quad y = \pm 3 \cdot \sqrt{2} - 3.$$

Az egészrész-, a törtrész- és az előjelfüggvény – megoldások

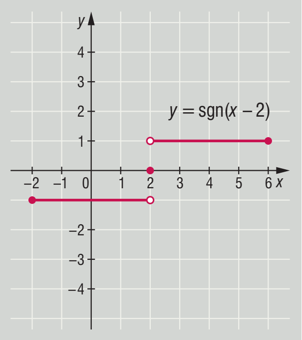
1252 *a)*

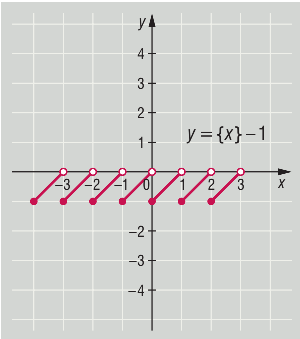


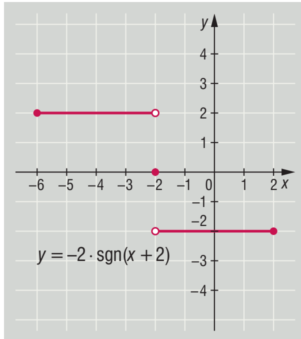
b)

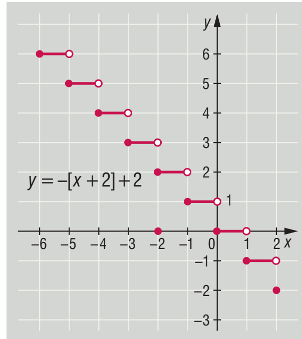


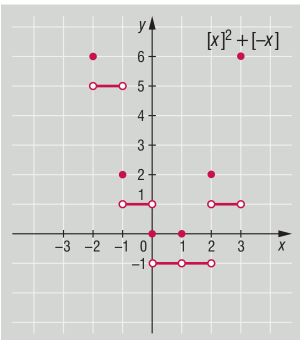
c)

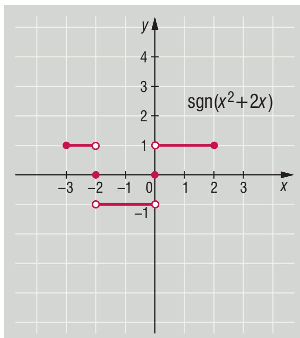


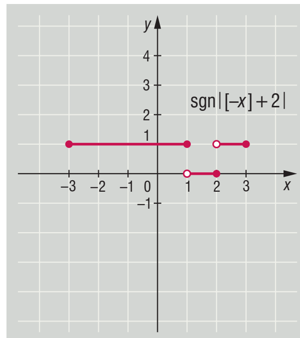
d)


e)


f)


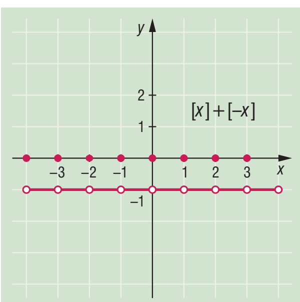
g)


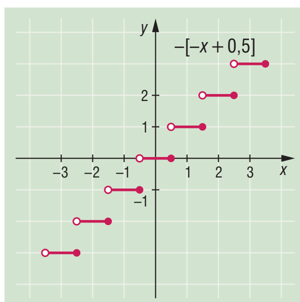
h)


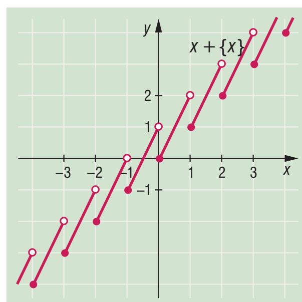
i)


1253 *a)* $n \le x < n+\dfrac{1}{2},\ n \in \mathbb{Z}$; *b)* $x \in \mathbb{R}$;

c) $n+\dfrac{1}{2} \le x < n+1$, ha $n \in \mathbb{Z}$; *d)* $x \in \mathbb{R}$.

1254 *a)*


b)


c)


Vegyes feladatok – megoldások

1255 *a)* A függvény a $[-3;\,3]$-ban nő; a -3 helyen minimuma van, minimum értéke -4; a 3 helyen maximuma van, maximum értéke 2; zérushelye: $x=-1$.

b) A függvény a $[-3;\,0]$-ban csökken, a $[0;\,3]$-ban nő; a -3 helyen maximuma van, maximum értéke 3; a 0 helyen minimuma van, minimum értéke 0; zérushelye: $x=0$.

c) A függvény a $[-3;\,1]$-ban nő, az $[1;\,3]$-ban csökken; a -3 helyen minimuma van, minimum értéke -2; az 1 helyen maximuma van, maximum értéke 2; zérushelyei: $x_1=0$ és $x_2=2$.

d) A függvény a $[-3; -2]$ és $[1; 3]$-ban csökken, a $[-2; 1]$-ban nő; minimuma van a -2 és 3 helyeken, a minimum értéke 0; maximuma van az 1 helyen, maximum értéke 2; zérushelyei: $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$.

e) A függvény a $[-3; 1]$ és $[1; 3]$-ban nő, a $[-1; 1]$-ban csökken; az 1 helyen minimuma van, minimum értéke -2; a -1 helyen maximuma van, maximum értéke 4; zérushelyei: $x_1 = -2$ és $x_2 = 0$.

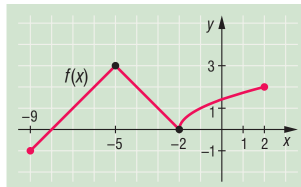
f) A függvény a $[-3; -1]$ és $[0; 1]$-ban nő, a $[-1; 0]$ és $[1; 3]$-ban csökken; a -3 és 3 helyeken minimuma van, minimum értéke -1; a -1 helyen maximuma van, maximum értéke 3; zérushelyei: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 2$.

g) A függvény a $[-3; -2]$ és $[0; 2]$-ban nő, a $[-2; 0]$ és $[2; 3]$-ban csökken; a 0 helyen minimuma van, minimum értéke -1; a 2 helyen maximuma van, maximum értéke 2; zérushelyei: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ és $x_4 = 3$.

h) A függvény a $[-3; -2]$, $[-1; 1]$ és $[2; 3]$-ban csökken, a $[-2; -1]$ és $[1; 2]$-ban nő; az 1 és 3 helyeken minimuma van, minimum értéke -1; a -3 és -1 helyeken maximuma van, maximum értéke 1; zérushelyei: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 2$.

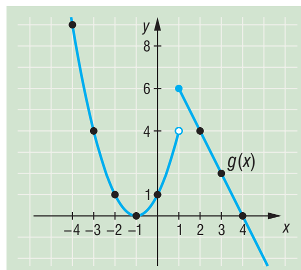
1256 *a)* Az f függvény grafikonja az ábrán látható:

$$f\colon [-9; 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -|x+5|+3, & \text{ha } x < -2, \\ \sqrt{x+2}, & \text{ha } x \geq -2. \end{cases}$$



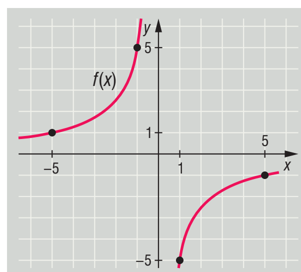
b) A g függvény grafikonja az ábrán látható:

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 2\cdot(4-x), & \text{ha } x \geq 1, \\ (x+1)^2, & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$



1257 *a)* $f\colon x \mapsto \dfrac{-5}{x}$

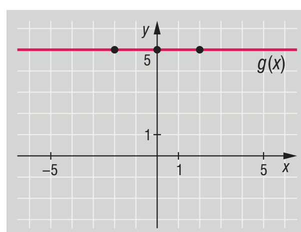
Nincs a koordináta-tengelyekre illeszkedő pontja.



b) $g\colon x \mapsto 5$

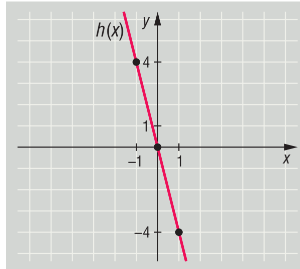
Nincs az x tengelyre illeszkedő pontja. (Mert konstans függvény, és párhuzamos az x tengellyel.)

Az y tengelyre illeszkedő pontja: $(0; 5)$.



c) $h\colon x \mapsto -4x$

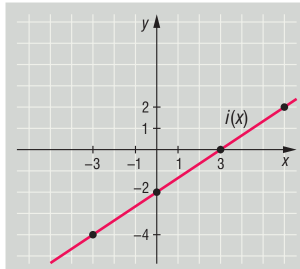
A koordináta-tengelyeket a (0; 0) pontban metszi. Így az x és y tengelyekre illeszkedő pontja: (0; 0).



d) $i\colon x \mapsto \dfrac{2x-6}{3} \quad \Rightarrow \quad x \mapsto \dfrac{2}{3}\cdot x - 2$

Az x tengelyre illeszkedő pontja: (3; 0).

Az y tengelyre illeszkedő pontja: (0; –2).



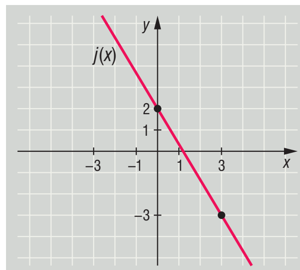
e) $j\colon x \mapsto 2 - \dfrac{5}{3}\cdot x \quad \Rightarrow \quad x \mapsto -\dfrac{5}{3}\cdot x + 2$

Az y tengelyre illeszkedő pontja: (0; 2).

Az x tengelyre illeszkedő pontját számolással határozhatjuk meg. Az $y = 0$ helyen x értéke:

$$y = -\frac{5}{3}\cdot x + 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{5}{3}\cdot x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{5}.$$

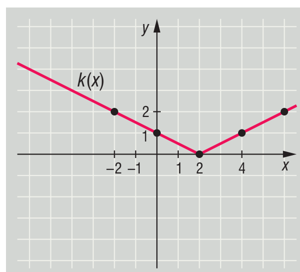
Az x tengelyre illeszkedő pontja: $\left(\dfrac{6}{5};\ 0\right)$.



f) $k\colon x \mapsto \dfrac{1}{2}\cdot |x-2|$

Az x tengelyre illeszkedő pontja: (2; 0).

Az y tengelyre illeszkedő pontja: (0; 1).



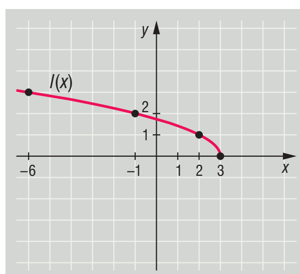
g) $l\colon x \mapsto \sqrt{3-x} \quad \Rightarrow \quad x \mapsto \sqrt{-(x-3)} \qquad x \le 3$

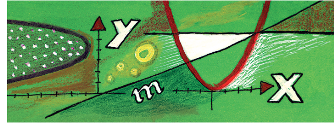
Az x tengelyre illeszkedő pontja: (3; 0).

Az y tengelyre illeszkedő pontját számolással határozhatjuk meg. Az $x = 0$ helyen a függvényérték:

$$y = \sqrt{3-x} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}.$$

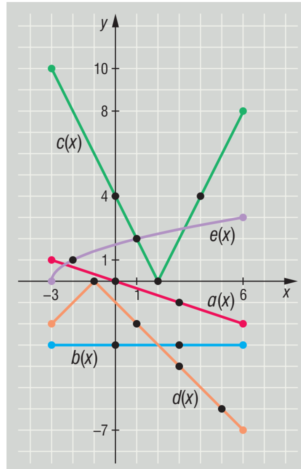
Az y tengelyre illeszkedő pontja: $\left(0;\ \sqrt{3}\right)$.





1258 *a)* $f_1(x)$; *b)* $f_5(x)$; *c)* $f_2(x)$;
d) $f_3(x)$; *e)* $f_4(x)$; *f)* $f_4(x)$;
g) $f_2(x)$, $f_4(x)$; *h)* $f_3(x)$-nek, $(-3; -1)$ pont; *i)* $x = 5$ helyen;
j) $m = 0$, mert konstans; *k)* $f_1(1) = 3$; *l)* igaz.

1259 Az adott intervallumon ábrázolva a függvényeket:



a) $a(x)$ minimumának helye: $x = 6$, értéke: $y = -2$;
maximumának helye: $x = -3$, értéke: $y = 1$.
$a(x) > 0$: $x \in [-3; 0[$-on.

b) $b(x)$-nek nincs szélsőértéke.
$b(x) > 0$: nincs megoldás.

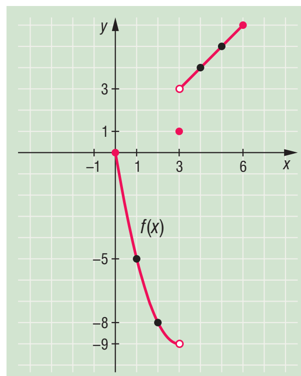
c) $c(x)$ minimumának helye: $x = 2$, értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = -3$, értéke: $y = 10$.
$c(x) > 0$: $x \in [-3; 6] \setminus \{2\}$.

d) $d(x)$ minimumának helye: $x = 6$, értéke: $y = -7$;
maximumának helye: $x = -1$, értéke: $y = 0$.
$d(x) > 0$: nincs megoldás.

e) $e(x)$ minimumának helye: $x = -3$, értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = 6$, értéke: $y = 3$.
$e(x) > 0$: $x \in]-3; 6]$-on.

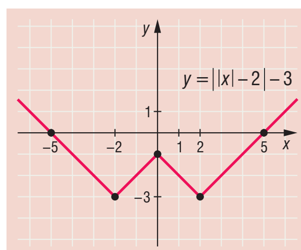
1260 A függvény grafikonja az ábrán látható.

$$f\colon [0; 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x, & \text{ha} \quad x < 3, \\ 1, & \text{ha} \quad x = 3, \\ x, & \text{ha} \quad x > 3. \end{cases}$$



a) A függvény zérushelye: $x = 0$.
b) A függvény negatív, vagyis $f(x) < 0$ a $]0; 3[$-on.
c) A függvény nő a $]3; 6]$-on.

1261 Az ábráról leolvashatók az értékek:



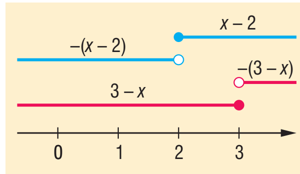
$f(x) = -3$ $x = -2$ és $x = 2$;
$f(x) = -2$ $x = -3$ és $x = -1$ és $x = 1$ és $x = 3$;
$f(x) = -1$ $x = 0$;
$f(x) = 0$ $x = -5$ és $x = 5$;
$f(x) = 1$ $x = -6$ és $x = 6$;

A függvény páros.

1262 Bontsuk fel az $f(x) = |x-2| - |3-x|$ függvényünket két függvényre:

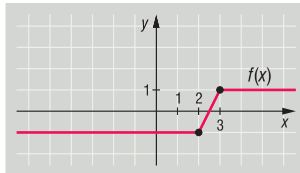
$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{ha} \quad x \geq 2, \\ -(x-2), & \text{ha} \quad x < 2; \end{cases}$$

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{ha} \quad x \leq 3, \\ -(3-x), & \text{ha} \quad x > 3. \end{cases}$$



Az ábrázolt intervallumok segítségével f átalakítható:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x < 2, \\ 2x-5, & \text{ha} \quad 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{ha} \quad x \geq 3. \end{cases}$$



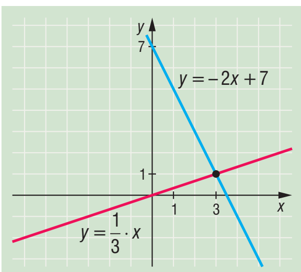
Ezután a kérdések könnyen megválaszolhatók.

a) $f(4) = 1$, $f(2) = -1$, $f(0) = -1$.

b) Az 1 értéket a $[3; \infty[$-ban veszi fel.

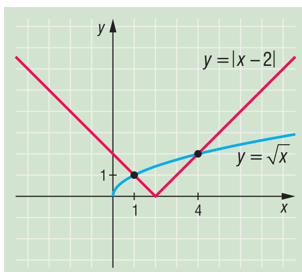
c) Csak a $2x - 5 = 0$ egyenletet kell megoldanunk: $x = \dfrac{5}{2}$.

1263 *a)*



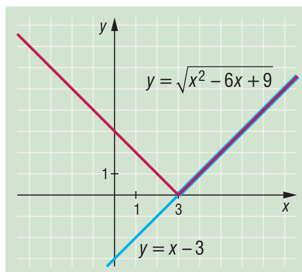
$x = 3$;

b)



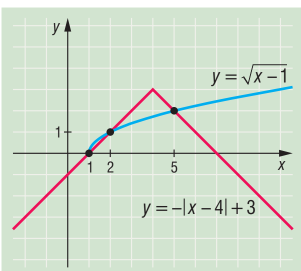
$x_1 = 1$, $x_2 = 4$;

c)



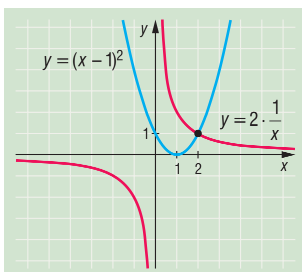
$[3; \infty]$;

d)



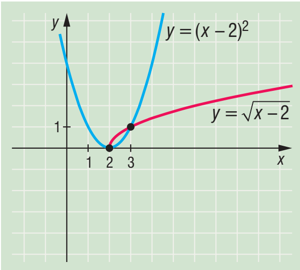
$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$;

e)



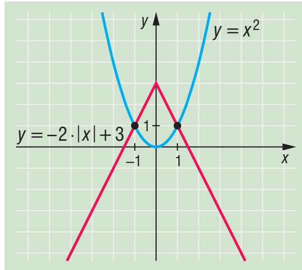
$x = 2$.

1264 *a)*



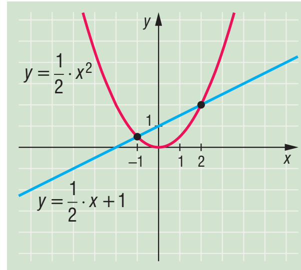
$2 < x < 3$, azaz $]2; 3[$;

b)



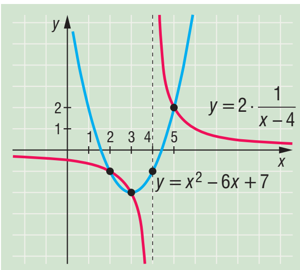
$-1 \le x \le 1$, azaz $[-1; 1]$;

c)



$-1 \le x \le 2$, azaz $[-1; 2]$;

d)



$2 < x < 3$ és $4 < x < 5$,
azaz $]2; 3[\cup]4; 5[$.

1265 Jelöljük x-szel a bontás után keletkező egyik részt, ahol $x \in \mathbb{Z}^+$. Így az $x^2 + (30 - x)^2$ kifejezés minimumát keressük. Végezzük el a négyzetre emelést, és alakítsuk át a kifejezést:

$$x^2 + (30 - x)^2 = x^2 + 900 - 60x + x^2 = 2x^2 - 60x + 900 = 2 \cdot (x - 15)^2 + 450.$$

Ez akkor minimális, ha $x = 15$. Tehát a 30-at két egyenlő részre kell osztani.

1266 A két függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = x + 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 4.$$

A háromszög magasságát a C pont koordinátáinak segítségével kapjuk meg. C a két függvény metszéspontja:

$$x + 1 = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Mivel $f(2) = 2 + 1 = 3$, ezért C koordinája $(2; 3)$, amiből a háromszög magassága 3 egység.
A háromszög alapjához meg kell határoznunk az $f(x)$ és a $g(x)$ zérushelyét:

$$f(x) = 0, \quad 0 = x + 1 \qquad \Rightarrow \quad x = -1,$$

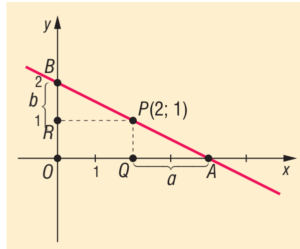
$$g(x) = 0, \quad 0 = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 8.$$

A háromszög alapja tehát $1 + 8$ egység hosszú.
A háromszög területe:

$$T = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5 \text{ egység}.$$

1267 $x + x^2 = (x + 0{,}5)^2 - 0{,}25 \ge -0{,}25, \quad x = -0{,}5.$

1268 Az OAB háromszög területére felírható:



$$T_{OAB\triangle}=\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{(2+a)\cdot(1+b)}{2}.$$

Mivel $QAP\triangle \sim RPB\triangle$, ezért:

$$\frac{QA}{PQ}=\frac{RP}{RB}\quad\Rightarrow\quad\frac{a}{1}=\frac{2}{b}\quad\Rightarrow\quad a=\frac{2}{b}.$$

Visszahelyettesítve a területre kapott kifejezésbe:

$$T_{OAB\triangle}=\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{2}{b}\right)\cdot(1+b)=\frac{1}{2}\cdot\left(2+2b+\frac{2}{b}+2\right)=1+b+\frac{1}{b}+1=2+b+\frac{1}{b}.$$

Ekkor keressük a $2+b+\frac{1}{b}$ minimumát, ahol $b>0$. Mivel $b+\frac{1}{b}\ge 2$, ennek legkisebb értéke 2. Így a $2+b+\frac{1}{b}$ akkor minimális, ha $b=1$ és $a=2$. Ekkor a terület:

$$T_{OAB\triangle}=\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{4\cdot 2}{2}=4.$$

A és B koordinátája: $A(4;\,0)$ és $B(0;\,2)$, a megfelelő egyenes egyenlete: $y=-\frac{1}{2}\cdot x+2.$

1269 $f(x-1)=x^2$, $f(x+1)=f\big((x+2)-1\big)=(x+2)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

1270 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

1271 *a)* $f(x)=(x-1)^2-3\cdot(x-1)+2=x^2-5x+6;$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}};$

c) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2,\ f(x)=x^2-2.$

1272 *a)* $f^{-1}(x)=\dfrac{x-3}{2},\ x\in\mathbb{R};$

b) $f^{-1}(x)=\sqrt{x},\ x\ge 0;$

c) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x},\ x\ge 0;$

d) $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x},\ x\ne -1;$

e) $f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x^2},\ x\in[0;\,1];$

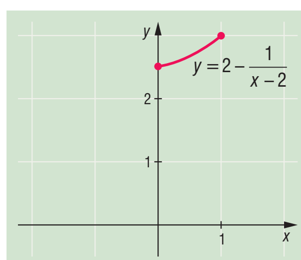
f) $f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2},\ x\in[0;\,1].$

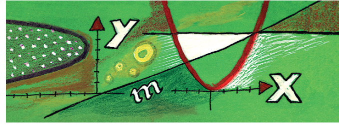
1273 *a)* A függvénynek legnagyobb értéke nincs, legkisebb értéke 2, ezt az $[1;\,3]$ intervallumban veszi fel.

b) Ábrázoljuk a függvényt:

$$x\mapsto\frac{2x-5}{x-2}=2-\frac{1}{x-2},\ 0\le x\le 1.$$

A függvény nő. Minimuma a 0 helyen 2,5, maximuma pedig az 1 helyen van, értéke 3.

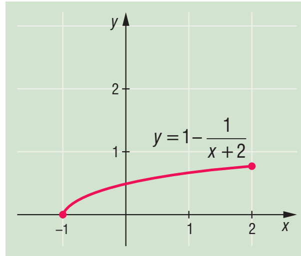




c) Ábrázoljuk a függvényt:

$$x \mapsto \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}, \ -1 \le x \le 2.$$

A függvény nő, minimuma a -1 helyen 0, maximuma pedig a 2 helyen van, értéke 0,75.



1274 Gyöktelenítsük a számlálót és egyszerűsítsük:

$$\frac{2x}{1+\sqrt{1-4x^2}} \le 1.$$

Ha $-\frac{1}{2} \le x < 0$, akkor a bal oldal negatív, tehát az egyenlőtlenség igaz.

Ha $0 < x \le \frac{1}{2}$, a számláló a bal oldalon nem nagyobb 1-nél, a nevező nagyobb vagy egyenlő, mint 1, így az egyenlőtlenség igaz.

1275 Már igazoltuk, hogy mivel $x^2 > 0$, $x \ne 0$, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \ge 2$, és csak akkor igaz az egyenlőség, ha $x^2 = 1$, azaz $x = 1$, vagy $x = -1$. Innen

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 1 \ge 4 + 1 = 5,$$

és csak $x = 1$, vagy $x = -1$ esetén lesz igaz az egyenlőség.

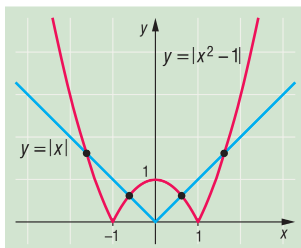
Mivel $y^2 \ge 0$, $1 + y^2 \ge 1$, így $\frac{5}{1+y^2} \le 5$, és az egyenlőség csak akkor igaz, ha $y = 0$.

Tehát az egyenlet megoldásai az $x = 1$, $y = 0$, és az $x = -1$, $y = 0$ számpárok.

1276 Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket:

$$x \mapsto |x^2 - 1| \quad \text{és} \quad x \mapsto |x|.$$

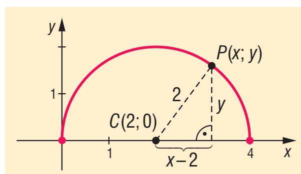
A függvények tulajdonságai alapján látható, hogy az egyenletnek 4 gyöke van.



1277 *a)* Pitagorasz tétele alapján a grafikon tetszőleges $P(x; y)$ pontjának távolsága a $C(2; 0)$ ponttól:

$$PC = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + 4 + x^2 - 4x} = 2,$$

mert $y \ge 0$ és $x^2 - 4x = -y^2$.

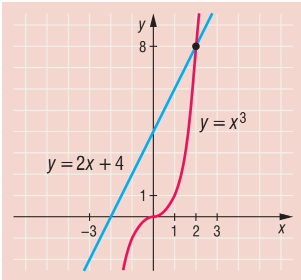


b) Az *a)* feladat eredménye szerint az

$$x \mapsto \sqrt{x \cdot (4-x)} = \sqrt{4x - x^2}, \ 0 \le x \le 4$$

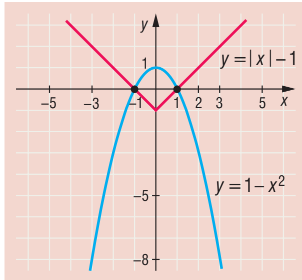
függvény grafikonja az $y \ge 0$, felső félsíkba eső 2 sugarú (2; 0) középpontú félkör. Ennek az x tengelytől legtávolabb lévő pontja a (2; 2) pont. Az x tengelyen a félkör két végpontja van: (0; 0) és (4; 0). Tehát a függvény legnagyobb értéke 2, legkisebb értéke 0.

1278 *a)*



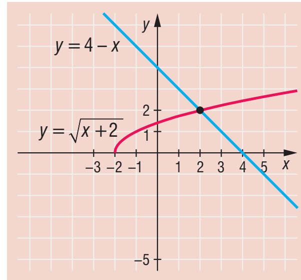
megoldás: $x = 2$;

b)



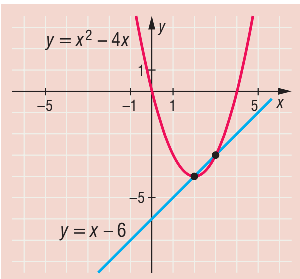
megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;

c)



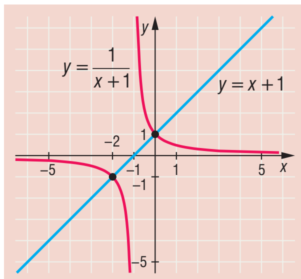
megoldás: $x = 2$;

d)



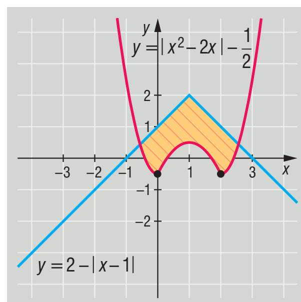
megoldások: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$;

e)



megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$;
(elég az $\dfrac{1}{x+1} = x + 1$
egyenletet vizsgálni).

1279 Az ábrán vonalazással jelöltük azt a tartományt, amelyben lévő pontok koordinátáira mindkét egyenlőség teljesül. (A határvonal nem tartozik hozzá.)



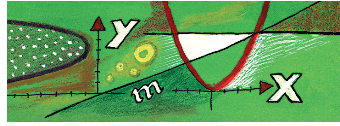
1280 *a)* $f(-x) = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2} = -f(x)$, tehát f páratlan függvény.

b) $f(-x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(x)$, tehát f páros függvény.

c) $f(-x) = f(x)$, tehát f páros függvény.

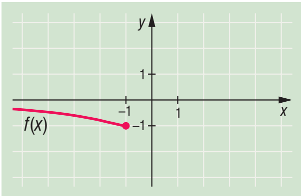
d) f se nem páros, se nem páratlan.

e) f páratlan függvény.

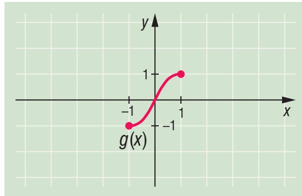


1281 A megadott függvények grafikonja:

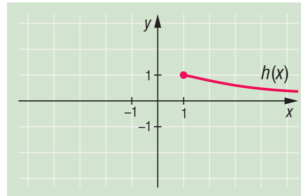
a)



b)



c)



A megfelelő inverz függvények:

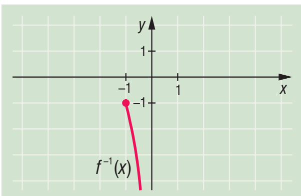
$f^{-1}(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x\in[-1;0[$;

$g^{-1}(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, $x\in[-1;1]$;

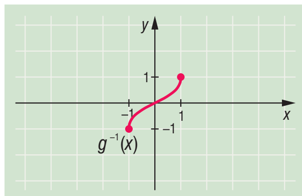
$h^{-1}(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x\in]0;1[$.

Az inverz függvények grafikonja:

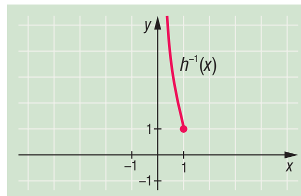
a)



b)



c)



1282 Az f páros függvény, mivel $f(-x)=f(x)$. Elég megmutatni, hogy $[0;+\infty[$-ban korlátos a függvény. Ha $x\geq 1$, akkor $x^2\leq x^4$, ezért

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}\leq 1.$$

Ha $0\leq x\leq 1$, akkor $x^2\leq 1$, és mivel $1+x^4\geq 1$, így

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}\leq 1+x^2\leq 2.$$

Tehát f az egész számegyenesen korlátos.

9.4. HÁROMSZÖGEK, NÉGYSZÖGEK, SOKSZÖGEK

Néhány alapvető geometriai fogalom (pont, egyenes, sík, távolság, szög) – megoldások

1283 *a)* Egy egyenes 4 különböző pontja 5 részre osztja az egyenest.
b) Egy egyenes 4 különböző pontja 6 szakaszt határoz meg az egyenesen.

1284 *a)* A síkon egy szabályos ötszög csúcsai 10 egyenest határoznak meg.
b) A síkon egy szabályos hatszög csúcsai 15 egyenest határoznak meg.

1285 *a)* A síkot egy szabályos ötszög oldalegyenesei 16 részre osztják.
b) A síkot egy szabályos hatszög oldalegyenesei 19 részre osztják.

1286 *a)* Párhuzamosak: AB és CD egyenesei.
b) Kitérők: AB és EG, AB és CG, CG és BD; DC és EG, valamint EG és BD egyenesei.

1287 Két megoldás lehetséges: $1200 + 800 = 2000$ m vagy $1200 - 800 = 400$ m.

1288 *a)* A távolság: 7,5 cm. *b)* A távolság: 2,5 cm.

1289 *a)* A távolság: $\frac{a+b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$. *b)* A távolság: $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ $(a > b)$.

1290 A szakaszok: $AP = 18$ cm és $PB = 12$ cm.

1291 A szakaszok: $AP = a \cdot \frac{p}{p+q}$ és $PB = a \cdot \frac{q}{p+q}$.

1292 *a)* 19,4°; *b)* 42,55°; *c)* 92,755°.

1293 *a)* 32°30'; *b)* 123°9'; *c)* 9°25'12".

1294 A szögek nagysága: 32°, 52°, 72°, 92°, 112°.

1295 A szög 40°.

1296 A két szög: 120° és 60°.

1297 A derékszögű háromszög minden hegyesszögéhez találhatunk merőleges szárú szögpárt.

1298 A $CBD\sphericalangle = 24°$.

1299 A merőlegesek az eredeti szögtartomány szögfelezőjével 106°25'30", illetve 73°34'30" nagyságú szöget zárnak be.

1320 A kismutató óránként 30°-ot fordul pozitív irányban, vagyis percenként 0,5°-ot. A nagymutató óránként 360°-ot fordul pozitív irányban, vagyis percenként 6°-ot. Az óramutatók

a) $40 \cdot 6° - 220 \cdot 0{,}5° = 130°$; *b)* $625 \cdot 0{,}5° - 25 \cdot 6° = 162{,}5° = 162°30'$;

c) $372 \cdot 0{,}5° - 12 \cdot 6° = 114°$

nagyságú szöget zárnak be.

1301 Tegyük fel, hogy x perc múlva a két mutató elfordulása 12 órához képest egyenlő. Az 1300. feladat alapján a $(240+x)\cdot 0{,}5 = x\cdot 6$ egyenletet kell megoldanunk. Ebből:

$$x = \frac{240}{11} \approx 21{,}82.$$

Tehát $\frac{240}{11}$ perccel 4 után fedik egymást a mutatók.

1302 A 9 pont $3\cdot 6+2=20$ egyenest határoz meg.

1303 *a)* Metszéspontok száma: $\frac{8\cdot 7}{2}=28.$

b) Az 5 páronként nem párhuzamos egyenes egymással $\frac{5\cdot 4}{2}$ metszéspontot hoz létre, illetve az 5 egyenes mindegyike minden párhuzamos egyenest metsz. Így a metszéspontok száma: $\frac{5\cdot 4}{2}+5\cdot 3=25.$

c) Metszéspontok száma: $\frac{4\cdot 3}{2}+4\cdot 4=22.$

d) Metszéspontok száma: $\frac{3\cdot 2}{2}+3\cdot 5=18.$

1304 *a)* Páronként párhuzamosak az egyenesek.

b) Egy ponton haladnak át az egyenesek, vagy kettő párhuzamos egyenes metsz egy harmadikat.

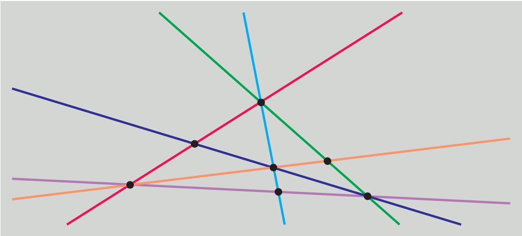
c) A három egyenes három különböző pontban metszi egymást.

1305 Hét óra után először x perc múlva zárjon be a két mutató ugyanakkora szöget a vízszintessel. Ekkor a kismutató vízszintessel bezárt szöge $60° - x\cdot 0{,}5°$, a nagymutató vízszintessel bezárt szöge pedig $90° - x\cdot 6°$. A két szög egyenlőségéből:

$$60 - x\cdot 0{,}5 = 90 - x\cdot 6 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11} \approx 5{,}45.$$

Kati 7 óra után $5\frac{5}{11}$ perccel indul az iskolába.

1306 Az ábrán látható 6 egyenes és metszéspontjaik megfelelnek a feladat feltételeinek.



1307 Legyen $OA=a,\ OB=b,\ OC=c.$ Az egyenlőség bal oldala:

$$OM\cdot AB + ON\cdot BC = \frac{a+b}{2}\cdot(b-a) + \frac{b+c}{2}\cdot(c-b) = \frac{c^2-a^2}{2}.$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$OP\cdot AC = \frac{c+a}{2}\cdot(c-a) = \frac{c^2-a^2}{2}.$$

A egyenlőség jobb és bal oldala egyenlő, tehát az egyenlőség igaz.

1308 Tekintsük az egyenest egy számegyenesnek, a szakaszok végpontjait a számegyenesen egy-egy valós számnak. Az intervallumok bal végpontjainak megfelelő valós számok közül a legnagyobb legyen a, jobb végpontjainak megfelelő valós számok közül a legkisebb pedig b. (Véges sok intervallum van, tehát a és b létezik.) Mivel bármely két intervallumnak van közös pontja, teljesül, hogy $a \le b$. Ha $a = b$, akkor a közös pont a, egyébként minden a és b közötti pont közös pont.

Háromszögek oldalai, szögei – megoldások

1309 A helyesen kitöltött táblázat:

α	β	γ	α'	β'	γ'
20°	40°	120°	160°	140°	60°
70°	80°	30°	110°	100°	150°
30°	60°	90°	150°	120°	90°

1320 A háromszög hiányzó szögei: 82°33' és 55°2'.

1311 *a)* Derékszögű a háromszög. *b)* Hegyesszögű a háromszög.
c) Tompaszögű a háromszög.

1312 A háromszög szögei lehetnek: 78°, 78°, 24°; vagy 78°, 51°, 51°.

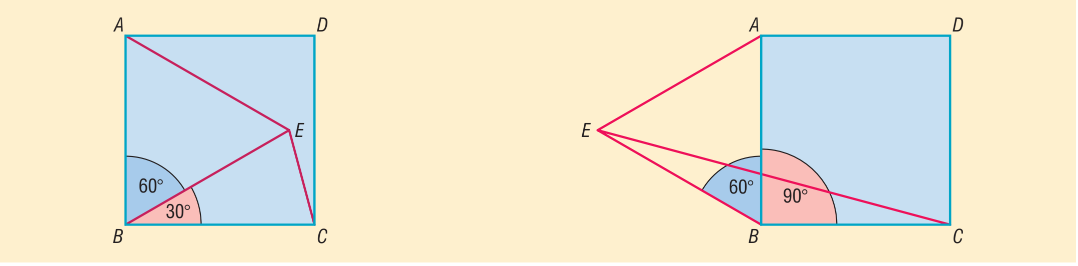
1313 Az ABE szabályos háromszög EBA szöge 60°.
Ha az E pont a háromszögön belül van, akkor az EBC egyenlő szárú háromszög B-nél lévő szöge $90° - 60° = 30°$, így a

$$BEC\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

Ha az E pont a háromszögön kívül van, akkor a BEC egyenlő szárú háromszög B-nél lévő szöge $90° + 60° = 150°$, így a

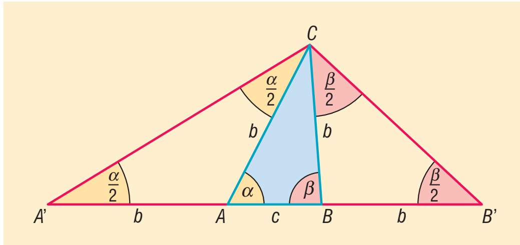
$$BEC\sphericalangle = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

A BEC szög tehát lehet 75° vagy 15°.

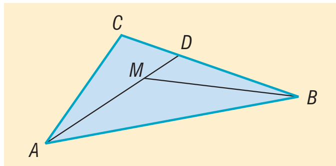


1314 *a)* Az $AA'C$ háromszög egyenlő szárú, így az A'-nél lévő belső szög az A-nál lévő külső szög fele, vagyis $AA'C\sphericalangle = 20°$. Ugyanígy $BB'C\sphericalangle = 35°$.
A háromszög szögei: 20°, 35°, és 125°.

b) Az *a)* részben levezetettek alapján az $AA'C$ háromszögben az A'-nél lévő belső szög az A-nál lévő külső szög fele, tehát $AA'C\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.
Ugyanígy $BB'C\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$.
A háromszög szögei: $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $180° - \frac{\alpha+\beta}{2}$.



1315 Az AM egyenese a BC oldalt D pontban metszi. Ismert, hogy egy háromszög külső szöge mindig nagyobb, mint a nem mellette lévő valamelyik belső szög.
Az ADC háromszög külső szöge $MDB\sphericalangle$, tehát $ACB\sphericalangle < MDB\sphericalangle$.
Az MBD háromszög külső szöge $AMB\sphericalangle$, tehát $MDB\sphericalangle < AMB\sphericalangle$.
Összevetve: $ACB\sphericalangle < MDB\sphericalangle < AMB\sphericalangle$, vagyis igaz a feladat állítása.



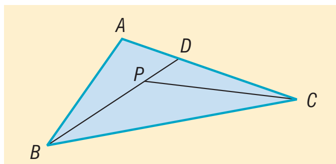
1316 A háromszög-egyenlőtlenség alapján:
a) létezik ilyen háromszög; *b)* nem létezik ilyen háromszög;
c) nem létezik ilyen háromszög.

1317 A harmadik oldal 10 vagy 4 cm. Ha a harmadik oldal 4 cm lenne, akkor nem teljesülne a háromszög-egyenlőtlenség. A harmadik oldal 10 cm. (Ilyen háromszög létezik.)

1318 A háromszög-egyenlőtlenségek alapján a harmadik oldal nagyobb, mint $10 - 6 = 4$ cm, és kisebb, mint $10 + 6 = 16$ cm. A harmadik oldal tehát lehet $5, 6, \ldots, 15$ cm. Tehát 11 ilyen háromszög van.

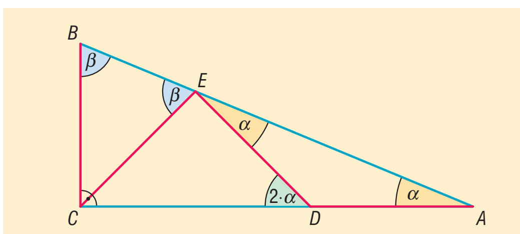
1319 A feltétel szerint: $2a = a + a \geq b + c$. A háromszög-egyenlőtlenség nem teljesül a $2a$, b, és c hosszúságú szakaszokra, így nem létezik ilyen háromszög.

1320 A BP egyenese az AC oldalt egy belső D pontban metszi. Az ABD háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség:
$$AB + AD > BD = BP + PD.$$
A PDC háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség:
$$PD + DC > PC.$$



A két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk, hogy:
$$(AB + AD) + (PD + DC) > (BP + PD) + PC.$$
Mivel
$$AD + DC = AC \quad \Rightarrow \quad AB + PD + AC > BP + PD + PC.$$
Innen már adódik az állítás:
$$AB + AC > PB + PC.$$

1321 Legyen az ábra szerinti ABC derékszögű háromszög A csúcsánál lévő szöge α, B csúcsánál levő pedig β.
Az ADE háromszög egyenlő szárú, tehát
$$DEA\sphericalangle = \alpha.$$
A BCE háromszög egyenlő szárú, tehát
$$BEC\sphericalangle = \beta.$$



Mivel $\alpha + \beta = 90°$, az E pontnál csak akkor lehet egyenes szög, ha $CED\sphericalangle = 90°$. Tehát a CED háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, és $CDE\sphericalangle = 45°$.

A CDE szög viszont EDA háromszög külső szöge, ami egyenlő a nem mellette lévő két belső szög összegével:

$$CDE\sphericalangle = 2 \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 22{,}5°.$$

A háromszög hegyesszögei: $22{,}5°$ és $67{,}5°$.

1322 *a)* Az AOC egyenlő szárú háromszögben AOC szög $180°$ $\frac{3}{5}$ része:

$$AOC\sphericalangle = \frac{3}{5} \cdot 180° = 108° \quad \text{és} \quad CAO\sphericalangle = ACO\sphericalangle = \frac{180° - 108°}{2} = 36°.$$

A DOC egyenlő szárú háromszögben DOC szög $180°$ $\frac{1}{5}$ része:

$$DOC\sphericalangle = \frac{1}{5} \cdot 180° = 36° \quad \text{és} \quad DCO\sphericalangle = ODC\sphericalangle = \frac{180° - 36°}{2} = 72°.$$

A DMC háromszögben

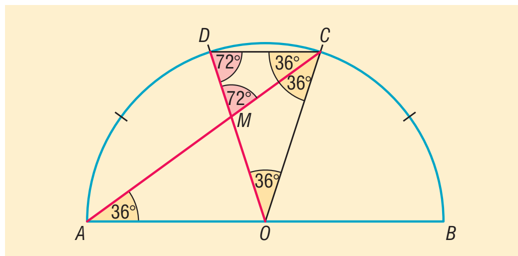
$$DCM\sphericalangle = 72° - 36° = 36° \quad \text{és} \quad DMC\sphericalangle = 180° - 72° - 36° = 72°.$$

b) Az előbbiek alapján DMC háromszög egyenlő szárú, mert szögei $72°$, $72°$ és $36°$. A háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, tehát $MC = DC = 10$ cm.

Az OMC háromszög is egyenlő szárú, mert $MOC\sphericalangle = MCO\sphericalangle = 36°$, ezért

$$OM = MC = 10 \text{ cm}.$$

Tehát $OM = 10$ cm.



1323 Nem. A háromszög-egyenlőtlenség alapján az egyik e átlóra teljesülnie kell:

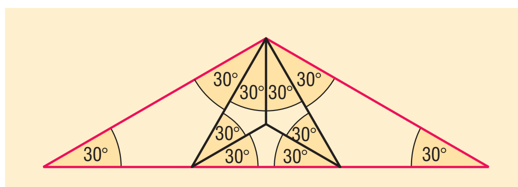
$$e < 7 + 8 = 15 \quad \text{és} \quad e < 11 + 9 = 20.$$

Tehát az egyik átlónak 15 cm-nél kisebbnek kell lennie. A másik f átlóra szintén teljesülnie kell, hogy

$$f < 8 + 11 = 19 \quad \text{és} \quad f < 9 + 7 = 16.$$

Tehát a másik átlónak 16 cm-nél kisebbnek kell lennie.

1324 Az ábrán látható felosztás megfelel a feladat feltételeinek.

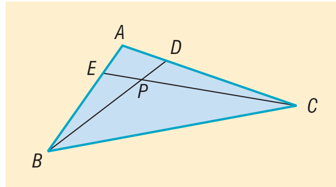


1325 Az $ABCD$ négyszögben az átlók metszéspontja legyen M. Az ABM, illetve CDM háromszögben a háromszög-egyenlőtlenségek:

$$AM + BM > AB, \quad \text{illetve} \quad CM + DM > CD.$$

Innen az állítás közvetlen adódik, hiszen $AM + BM + CM + DM$ éppen az átlók összege.

1326 Az ABD háromszögben az A-nál levő szög nem hegyesszög, tehát BD a háromszög legnagyobb oldala: $BD > BA$. Hasonlóan az AEC háromszög legnagyobb oldala CE, tehát $CE > AC$.



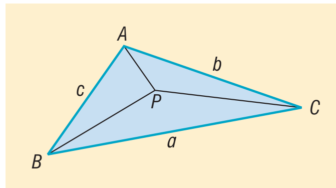
A két egyenlőtlenségből adódik:

$$BD + CE > BA + AC = (BE + EA) + (AD + DC) =$$
$$= BE + DC + (EA + AD).$$

Az AED háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség: $EA + AD > ED$. Tehát

$$BD + CE > BE + DC + ED.$$

1327 Az ábrán látható ABC háromszögben az oldalak a szokásos jelöléssel a, b és c.



Az APB, APC, illetve BPC háromszögekben a háromszög-egyenlőtlenség:

$$PA + PB > c, \quad PC + PB > a \quad \text{és} \quad PA + PC > b.$$

Ezekből következik, hogy:

$$2PA + 2PB + 2PC > a + b + c,$$
$$PA + PB + PC > \frac{a + b + c}{2}.$$

A P pontnak a csúcsoktól vett távolságösszege a háromszög félkerületénél nagyobb. Mivel P pont a háromszög egy belső pontja, az 1320. feladat alapján teljesül, hogy

$$PA + PB < a + b, \quad PC + PB < c + b \quad \text{és} \quad PA + PC < a + c.$$

Ezekből következik, hogy:

$$2PA + 2PB + 2PC < 2a + 2b + 2c,$$
$$PA + PB + PC < a + b + c.$$

A P pontnak a csúcsoktól vett távolságösszege a háromszög kerületénél kisebb.

Pitagorasz-tétel – megoldások

1328 A megadott adatokból a következő táblázatot kapjuk (➡):

Egyik befogó	Másik befogó	Átfogó
12 cm	5 cm	13 cm
65 cm	7,2 dm	970 mm
$\sqrt{3} \cdot a$	a	$2a$
b	b	$\sqrt{2} \cdot b$

1329 *a)* Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

b) Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

c) Nem lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

d) Lehetnek derékszögű háromszög oldalai.

1330 A Pitagorasz-tétel alapján nem lehet, mert a két páratlan befogó négyzetösszege páros, ami nem lehet a páratlan átfogó négyzete.

1331 A két ferde rúd hossza együtt $2 \cdot \sqrt{150^2 + 100^2} \approx 360{,}56$ cm.

1332 Az alaphoz tartozó magasság 6 cm.

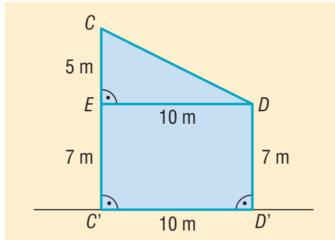
1333 Az ellensúly a tartóoszlop lábától 41 méterre, a darugém vége a tartóoszlop lábától 44 méterre van.

1334 A monitor képátmérője 17”.

1335 Az ábrán a két fát jelölje CC' és DD' szakasz. A CDE derékszögű háromszögben DC szakasz hosszát kell kiszámítani.

$$DC = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5 \cdot \sqrt{5} \approx 11{,}18,$$

tehát a két fa csúcsa megközelítőleg 11,18 m távol van egymástól.



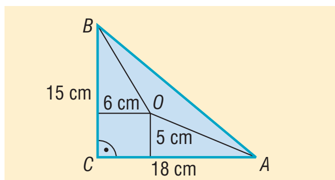
1336 *a)* Az OBC háromszög területe az ABC derékszögű háromszög területének harmadrésze. Mivel a két háromszög BC oldala közös, az OBC háromszög BC oldalhoz tartozó magassága az AC befogó harmada, vagyis $\frac{18}{3} = 6$ cm.

Hasonlóan az OAC háromszög területe az ABC derékszögű háromszög területének harmadrésze, így az OAC háromszög AC oldalhoz tartozó magassága a BC befogó harmada, vagyis $\frac{15}{3} = 5$ cm.

Az O pontnak a befogóktól vett távolsága tehát 6 és 5 cm.

b) Az előzőek alapján OC egy 6 és 5 cm oldalú téglalap átlója. Pitagorasz tétele alapján

$$OC = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} \approx 7{,}81 \text{ cm.}$$



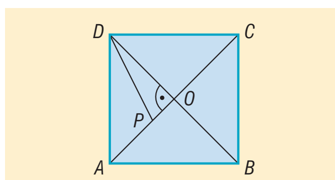
1337 A háromszög területe egy b oldalú szabályos háromszög területével egyenlő:

$$T = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

1338 A küzdőtér legyen egy 8 m oldalú $ABCD$ négyzet. Tegyük fel, hogy a sportoló az AC átló A-hoz közelebbi P harmadolópontjában tartózkodik.

A P pontnak az A csúcstól vett távolsága az átló harmada:

$$AP = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \approx 3{,}77 \text{ m.}$$



A P pontnak a C csúcstól vett távolsága az átló kétharmada:

$$CP = \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \approx 7{,}54 \text{ m.}$$

A négyzet átlóinak metszéspontja legyen O. Mivel a négyzet átlói merőlegesen felezik egymást, a DOP háromszög derékszögű, és a DO szakasz a négyzet átlójának a fele:

$$DO = 4 \cdot \sqrt{2}.$$

A PO szakasz a négyzet átlójának a hatoda:

$$PO = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}.$$

A DOP háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt adódik, hogy

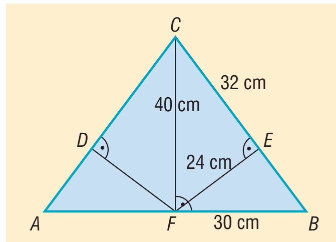
$$PD = \sqrt{PO^2 + OD^2} = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{5} \approx 5{,}96 \text{ m}.$$

Hasonlóan:

$$PB = 5{,}96 \text{ m}.$$

A sportoló a küzdőtér négy sarkától 3,77, 5,96, 7,54 és 5,96 m távolságra van.

1339 A CFB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel számítható BC oldal: $BC = 50$ cm.



A CFB háromszögben FE a CB oldalhoz tartozó magasság, így a háromszög területét kétféleképpen felírva FE-re adódik:

$$\frac{50 \cdot FE}{2} = \frac{40 \cdot 30}{2},$$

$$FE = 24 \text{ cm}.$$

A CFE derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$CE = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32 \text{ cm}.$$

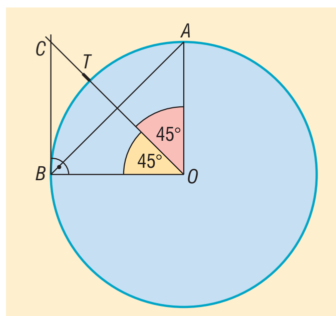
A $CEFD$ négyszög kerülete FE és CE szakaszok összegének a kétszerese:

$$2 \cdot (24 + 32) = 112 \text{ cm}.$$

A $CEFD$ négyszög területe az EFC derékszögű háromszög területének kétszerese:

$$2 \cdot \frac{24 \cdot 32}{2} = 768 \text{ cm}^2.$$

1340 Legyen az indulási pont A, az érkezési pont B, a gömb középpontja O.



a) A bolygó felszínén megtett út a főkör kerületének a negyed része:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} = \pi \approx 3{,}14 \text{ km}.$$

b) Az alagút hossza az AOB egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója. Mivel a háromszög befogója 2 km, Pitagorasz-tétel alapján:

$$AB = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}82 \text{ km}.$$

Az alagút hossza tehát 2,82 km.

c) A B érkezési pontból akkor nem láthatjuk a tornyot, ha a torony T ponttal jelölt teteje a főkörhöz B-ben húzott érintő egyenesének arra az oldalára esik, amelyik oldalon a kör van.

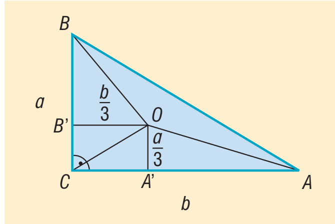
A T pont az AOB szög szögfelezőjén O-tól $2 + 0{,}1 = 2{,}1$ km-re van.

A szögfelező és az érintő metszéspontja legyen C. Az OBC egyenlő szárú derékszögű háromszögben a befogó 2 km, így

$$OC = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}82 \text{ km}.$$

Mivel $OC > OT$, a tornyot a kis herceg nem láthatja.

1341 Legyen $AC = b$ és $BC = a$. Az O pont AC-re, illetve BC-re eső merőleges vetülete legyen A', illetve B'.



Az 1336. feladat gondolatmenete alapján a területekből következik, hogy

$$OA' = \frac{a}{3} \quad \text{és} \quad OB' = \frac{b}{3}.$$

Az $OB'CA'$ téglalap átlójára felírva Pitagorasz tételét:

$$OC^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{9}.$$

Mivel $AA' = \frac{2b}{3}$, az AOA' derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele:

$$OA^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2.$$

Mivel $BB' = \frac{2a}{3}$, a BOB' derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele:

$$OB^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2.$$

Az előbbieket felhasználva:

$$OA^2 + OB^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{9}\right) = 5 \cdot OC^2.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

1342 Ha a derékszögű háromszög másik befogója b, és az átfogója c, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$225 + b^2 = c^2,$$
$$c^2 - b^2 = 225,$$
$$(c - b) \cdot (c + b) = 225.$$

Mivel $c - b$ kisebb, mint $c + b$, 225 lehetséges szorzattá alakításai a tényezők sorrendjét is figyelembe véve: $1 \cdot 225 = 3 \cdot 75 = 5 \cdot 45 = 9 \cdot 25$.

Ha $a - b = 1$ és $a + b = 225$, akkor $a = 113$ és $b = 112$.
Ha $a - b = 3$ és $a + b = 75$, akkor $a = 39$ és $b = 36$.
Ha $a - b = 5$ és $a + b = 45$, akkor $a = 25$ és $b = 20$.
Ha $a - b = 9$ és $a + b = 25$, akkor $a = 17$ és $b = 8$.

Tehát négy ilyen háromszög van.

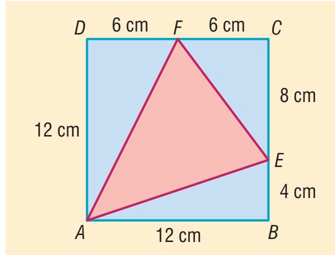
Négyszögek – megoldások

1343 A konvex négyszögnek lehet, hogy:
- nincs hegyesszöge, például téglalap;
- egy hegyesszöge van, például egy deltoid, melynek szögei 60°, 90°, 120°, 90°;
- két hegyesszöge van, például egy trapéz, melynek szögei 60°, 120°, 60°, 120°;
- három hegyesszöge van, például egy deltoid, melynek szögei 60°, 80°, 60°, 160°.

Négy hegyesszöge nem lehet, mert ekkor nem teljesülne, hogy a belső szögek összege 360°.

1344 Hamisak: *a*), *b*), *c*), *e*), *f*), *g*). Igazak: *d*), *h*).

1345 A háromszög oldalait Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:



$$AE = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4 \cdot \sqrt{10} \approx 12{,}65,$$

$$EF = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

$$AF = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6 \cdot \sqrt{5} \approx 13{,}42.$$

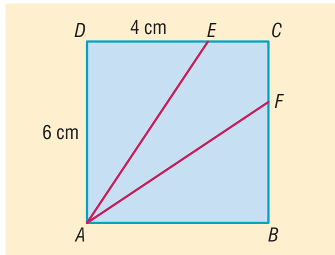
Az *AEF* háromszög kerülete:

$$AE + EF + AF = 36{,}07 \text{ cm.}$$

Az *AEF* háromszög területét megkaphatjuk úgy, hogy a négyzet területéből kivonjuk az *ABE*, *EFC* és *AFD* háromszögek területét:

$$12^2 - \frac{12 \cdot 4}{2} - \frac{8 \cdot 6}{2} - \frac{12 \cdot 6}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$

1346 Legyen *ABCD* a 6 cm oldalú négyzet. Az *A* csúcson áthaladó, a területet harmadoló egyenesek közül az egyik a *DC* oldalt *E*-ben, a másik a *BC* oldalt *F*-ben metszi.



Az *ADE* háromszög területe a négyzet területének harmada, tehát 12 cm^2.

$$\frac{6 \cdot DE}{2} = 12 \quad \Rightarrow \quad DE = 4 \text{ cm.}$$

Pitagorasz-tételt használva az *ADE* háromszögben:

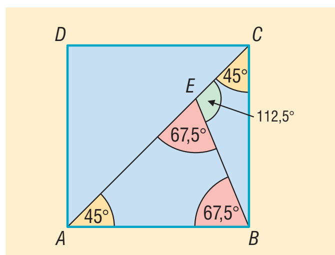
$$AE = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7{,}21 \text{ cm.}$$

Ugyanígy:

$$AF = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7{,}21 \text{ cm.}$$

Tehát a két egyenesnek a négyzet belsejébe eső szakasza 7,21 cm.

1347 Tekintsük az *ABCD* négyzetet. Az *AC* átlójára mérjük fel a négyzet oldalának a hosszát *A*-ból kiindulva, így az *E* pontot kapjuk.



Mivel a négyzet átlói az oldalakkal 45°-os szöget zárnak be, az *ABE* egyenlő szárú háromszög szárszöge 45°, az alapon lévő szögei:

$$\frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°.$$

Ennek a szögnek a külső szöge 112,5°.

Az *EBC* háromszög *EC* oldalán fekvő szögek: 112,5° és 45°.

Ezek alapján a szerkesztést az *EBC* háromszöggel kezdjük, mert adott az *EC* oldala, és ismerjük a rajta fekvő két szöget. Az *EBC* háromszögnek a *BC* oldala a négyzet oldala, aminek ismeretében a négyzet már szerkeszthető.

A feladatnak mindig van megoldása.

1348 A téglalap átlói az oldalakkal:

a) 35° és 55°; *b*) $\frac{\varphi}{2}$ és $90° - \frac{\varphi}{2}$ nagyságú szöget zárnak be.

1349 A rombusz szögei $48°$ és $132°$.

1350 A rombusz szögei $30°$ és $150°$.

1351 Három eset lehetséges:

a) $102°$, $109°$, $40°$ és $109°$; *b)* $40°$, $102°$, $116°$ és $102°$; *c)* $102°$, $40°$, $178°$ és $40°$.

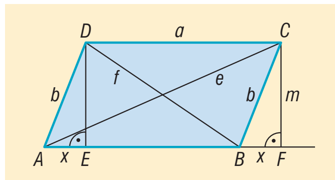
1352 A hosszabbik átló a 10 cm-es átlót két egyenlő részre osztja. A hosszabbik átló szeletei az arányból adódóan 15 cm és 9 cm. Pitagorasz tétele alapján az oldalak:

$$a = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106} \approx 10{,}30 \text{ cm} \quad \text{és} \quad b = \sqrt{5^2 + 15^2} = 5 \cdot \sqrt{10} \approx 15{,}81 \text{ cm}.$$

1353 A paralelogramma belső szögei $80°$, $100°$.

1354 A paralelogramma belső szögei $108°$ és $72°$.

1355 Az $ABCD$ paralelogrammának az A csúcsánál levő szöge legyen hegyesszög. A paralelogramma oldalai $AB = a$ és $BC = b$, átlói $AC = e$ és $BD = f$, az AB oldalhoz tartozó magassága m.



Húzzunk merőlegest a C és a D csúcsokból az AB oldal egyenesére. A merőlegesek talppontjai legyenek F és E. Az F pont az AB oldalon kívül, az E pont az oldalon van.

Jelölje az AE és a BF egyenlő szakaszok hosszúságait x.

A BFC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$b^2 = m^2 + x^2.$$

Az AFC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$e^2 = m^2 + (a + x)^2.$$

A BED derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$f^2 = m^2 + (a - x)^2.$$

Ezeket felhasználva az átlók négyzetösszege:

$$e^2 + f^2 = 2m^2 + (a + x)^2 + (a - x)^2 = 2m^2 + 2x^2 + 2a^2 =$$
$$= 2 \cdot (m^2 + x^2) + 2a^2 = 2b^2 + 2a^2.$$

Ha a paralelogrammának az A csúcsánál levő szöge tompaszög, a bizonyítás hasonló módon történik.

Ha a paralelogramma téglalap, akkor is az átlók négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő.

1356 Mivel a paralelogramma köré kör írható, átlói egyenlő hosszúak, tehát téglalap.

A téglalap átlójának hossza Pitagorasz-tétellel számítható:

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}.$$

A téglalap köré írható kör sugara az átló fele, vagyis 6,5 cm.

1357 Nincs konkáv trapéz, mert a trapéz egy száron nyugvó belső szögeinek összege $180°$.

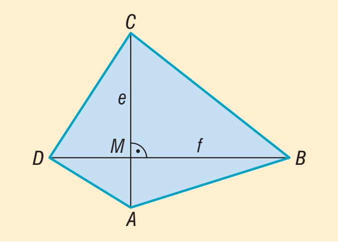
1358 Mivel a két adott szög összege nem $180°$, ezért ezek a szögek nem lehetnek egy száron nyugvó szögek. A trapéz másik két szöge: $180° - 38° = 142°$ és $180° - 102° = 78°$.

1359 Két megoldás lehetséges, amelyek a következő táblázatból olvashatók ki. Felhasználtuk az oldalhosszak kiszámításánál, hogy ha egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója a, akkor az átfogója $a \cdot \sqrt{2}$.

Derékszögű szár	Másik szár	Rövidebb alap	Hosszabb alap
6 cm	$6 \cdot \sqrt{2}$ cm	10 cm	16 cm
6 cm	$6 \cdot \sqrt{2}$ cm	16 cm	22 cm

1360 Az $ABCD$ konvex négyszögben az átlók metszéspontja legyen M.A négyszöget az átlói négy derékszögű háromszögre bontják.

A négyszög területét a négy derékszögű háromszög területének összegeként számíthatjuk:

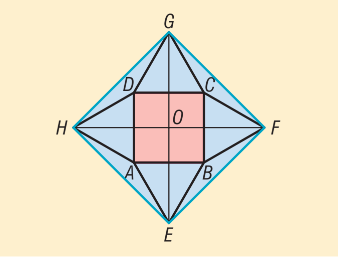


$$T=\frac{AM\cdot BM}{2}+\frac{BM\cdot CM}{2}+\frac{CM\cdot DM}{2}+\frac{DM\cdot AM}{2}=$$
$$=\frac{BM}{2}\cdot(AM+CM)+\frac{DM}{2}\cdot(CM+AM)=$$
$$=\frac{(AM+CM)\cdot(BM+DM)}{2}=\frac{AC\cdot BD}{2}.$$

Tehát a négyszög területe $\frac{e\cdot f}{2}$.

A feladat állítása akkor is igaz, ha a négyszög nem konvex.

1361 Tekintsük az ábrán látható jelöléseket.



Az $EFGH$ négyszög négyzet, mert átlói egyenlő hosszúak, illetve merőlegesek egymásra.

Az $EFGH$ négyzetben a HF átló az $ABCD$ négyzet oldalának és két 18 cm oldalú szabályos háromszög magasságának az összege:

$$HF=18+2\cdot\frac{18\cdot\sqrt{3}}{2}=18\cdot\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Az $EFGH$ négyzet területe az átlók szorzatának a fele:

$$T_{EFGH\text{ négyzet}}=\frac{HF^2}{2}\approx 1209{,}18\text{ cm}^2.$$

Az $EFGH$ négyzet EF oldala az EOF egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója. Ennek a háromszögnek a befogója:

$$OF=\frac{HF}{2}=9\cdot\left(1+\sqrt{3}\right).$$

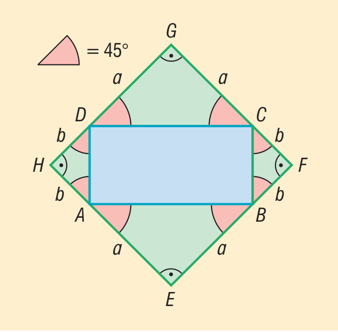
Az EOF egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója a befogó $\sqrt{2}$-szerese,

$$EF=OF\cdot\sqrt{2}\approx 34{,}77\text{ cm}.$$

Az $EFGH$ négyzet kerülete:

$$K_{EFGH\text{ négyzet}}=4\cdot EF\approx 4\cdot 34{,}77=139{,}08\text{ cm}.$$

1362 Az ábrán látható $ABCD$ téglalap oldalaira rajzolt egyenlő szárú derékszögű háromszögek csúcsai E, F, G és H.



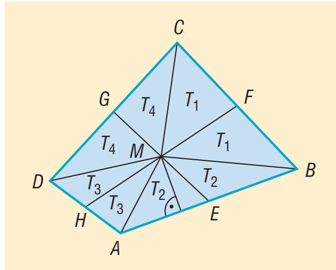
Mivel az egyenlő szárú derékszögű háromszög alapon fekvő szögei 45°-osak, F, C és G pontok egy egyenesbe esnek. Hasonlóan igaz ez a többi ponthármas esetében is.

A téglalap és a háromszögek négyszöget határoznak meg.

Ennek az $EFGH$ négyszögnek minden szöge derékszög, tehát téglalap.

Az ábra jelöléseit használva az $EFGH$ téglalap minden oldala $a+b$ hosszúságú, tehát négyzet.

1363 Az $ABCD$ négyszög oldalainak felezőpontjai az ábra jelöléseit használva E, F, G és H. A szemben levő oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok metszéspontja M.



Az AME és a BME háromszögek területe egyenlő, mivel AE, illetve BE oldalai egyenlő hosszúak, valamint ezen oldalakhoz tartozó magasságok megegyeznek.

A többi háromszög esetében is ezt végiggondolva adódik, hogy:

$t_{MEBF \text{ négyszög}} + t_{MGDH \text{ négyszög}} = t_{MFCG \text{ négyszög}} + t_{MHAE \text{ négyszög}}.$

A feladatban három négyszög területét adták meg, így a hiányzó negyedik négyszög területére a következő összefüggések valamelyike érvényes:

$$15 + 20 = 25 + x \quad \Rightarrow \quad x = 10 \quad \Rightarrow \quad t_{ABCD \text{ négyszög}} = 70 \text{ cm}^2,$$
$$15 + 25 = 20 + y \quad \Rightarrow \quad y = 20 \quad \Rightarrow \quad t_{ABCD \text{ négyszög}} = 80 \text{ cm}^2,$$
$$25 + 20 = 15 + z \quad \Rightarrow \quad z = 30 \quad \Rightarrow \quad t_{ABCD \text{ négyszög}} = 90 \text{ cm}^2.$$

A négyszög területe lehet 70, 80 vagy 90 cm^2.

1364 Az átlók metszéspontja a megfelelő pont.

A négyszög csúcsai legyenek A, B, C és D. A sík egy P pontjára igaz, hogy $PA + PC \geq AC$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P pont rajta van az AC átlón;

Hasonlóan $PB + PD \geq BD$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P pont rajta van a BD átlón.

Ebből következik, hogy
$$PA + PC + PB + PD \geq AC + BD.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha P rajta van az AC, illetve a BD átlók mindegyikén, vagyis P pont éppen az átlók metszéspontja.

Sokszögek – megoldások

1365 A helyesen kitöltött táblázat:

A sokszög oldalainak száma	A sokszög egyik csúcsából kiinduló átlóinak a száma	A sokszög belső szögeinek összege
10	7	1440°
18	15	2880°
24	21	3960°
n	$n-3$	$(n-2)\cdot 180°$
$a+3$	a	$(a+1)\cdot 180°$
$\frac{\varphi}{180°}+2$	$\frac{\varphi}{180°}-1$	φ

1366 Egy n oldalú konvex sokszög egy külső szöge mindig kisebb, mint 180°, és a belső szögeinek összege 180° egész számú többszöröse: $(n-2)\cdot 180°$.

Mivel $2283° = 12 \cdot 180° + 123° = (14-2)\cdot 180° + 123°$, a külső szög csak 123° lehet, és a sokszög 14 oldalú.

1367 Az *a)* és *c)* igaz, a *b)* és *d)* hamis.

1368 A helyesen kitöltött táblázat:

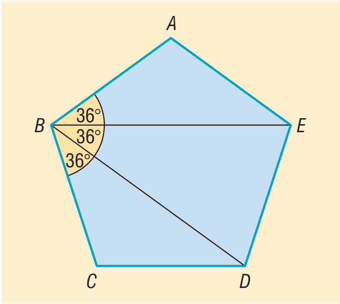
A szabályos sokszög oldalainak száma	A szabályos sokszög egy belső szöge	A szabályos sokszög egy külső szöge
20	162°	18°
10	144°	36°
9	140°	40°
n	$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$	$\frac{360°}{n}$
$\frac{360°}{180°-\alpha}$	α	$180°-\alpha$
$\frac{360°}{\beta}$	$180°-\beta$	β

1369 Egy konvex hatszög átlóinak legfeljebb 15 darab csúcsoktól különböző metszéspontja lehet.

1370 Egy szabályos hatszög átlóinak pontosan 13 darab csúcsoktól különböző metszéspontja van.

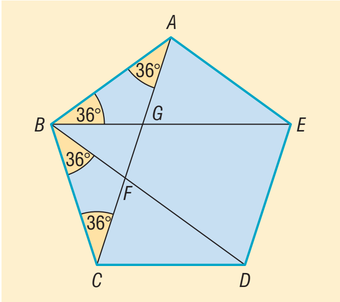
1371 A legrövidebb átló és a szabályos hatszög két oldala olyan egyenlő szárú háromszöget határoz meg, amelynek szárszöge 120°. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

1372 A szabályos ötszög egy csúcsából kiinduló átlói 36°-os szöget zárnak be.



1373 Az 1372. feladat alapján $ABG\sphericalangle = GAB\sphericalangle = 36°$. A $BGF\sphericalangle$ a BGA háromszög külső szöge, tehát $36° + 36° = 72°$. Ugyanígy megmutatható, hogy $GFB\sphericalangle = 72°$.

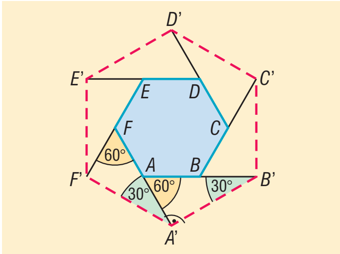
Tehát a BGF háromszög szögei: 72°, 72°, 36°.



1374 *a)* Az $ABCDEF$ szabályos hatszög egy külső szöge $F'FA'\sphericalangle = 60°$ és $FA' = 2FF'$. Ebből következik, hogy az $F'FA'$ háromszög fél szabályos háromszög, amelynek az A'-nél lévő szöge 30°.

Ugyanígy az $A'AB'$ háromszög is fél szabályos háromszög, és az A'-nél lévő szöge 90°. Ez azt jelenti, hogy az $A'B'C'D'E'F'$ hatszögnek az A'-nél lévő szöge $30° + 90° = 120°$-os.

A hatszög többi szögéről hasonló módon belátható, hogy szintén 120°-os.



b) A keletkezett hatszög minden oldala egy 24 cm oldalú szabályos háromszög magassága, vagyis

$$24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \sqrt{3} \text{ cm.}$$

Az $A'B'C'D'E'F'$ hatszög minden szöge és minden oldala egyenlő, tehát szabályos. Így a kerület:

$$K_{A'B'C'D'E'F' \text{ hatszög}} = 6 \cdot 12 \cdot \sqrt{3} \approx 124{,}71 \text{ cm.}$$

c) Az $A'B'C'D'E'F'$ hatszög területe 6 darab $12 \cdot \sqrt{3}$ cm oldalú szabályos háromszög területének az összege:

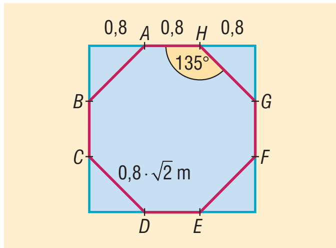
$$T_{A'B'C'D'E'F' \text{ hatszög}} = 6 \cdot \frac{\left(12 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 648 \cdot \sqrt{3} \approx 1122{,}37 \text{ cm}^2.$$

1375 *a)* A nyolcszög minden szöge 135°.

b) Nem szabályos a nyolcszög, mert oldalai nem egyenlő hosszúak. Ugyanis BC a négyzet oldalának harmadrésze, AB pedig a harmadrész $\sqrt{2}$-szöröse.

c) A kerület:

$$K_{\text{nyolcszög}} = 4 \cdot 0{,}8 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 7{,}73 \text{ m.}$$

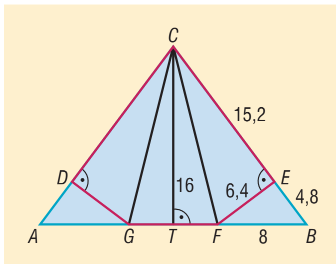


d) A nyolcszög területét megkapjuk úgy, hogy az eredeti négyzet területéből kivonjuk két 0,8 m oldalú négyzet területét.

$$T_{\text{nyolcszög}} = 2{,}4^2 - 2 \cdot 0{,}8^2 = 4{,}48 \text{ m}^2.$$

1376 Legyen T az AB alap felezéspontja. A Pitagorasz-tétel alapján a BCT derékszögű háromszögből $BC = 20$ cm.

Az FBC háromszög FB oldala 8 cm, a hozzá tartozó CT magasság 16 cm. Az FBC háromszög BC oldala 20 cm, a hozzá tartozó magassága FE. Ennek a háromszögnek a területe kétféleképpen számolható:



$$\frac{8 \cdot 16}{2} = \frac{FE \cdot 20}{2} \quad \Rightarrow \quad FE = 6{,}4 \text{ cm.}$$

A BEF derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$EB = \sqrt{8^2 - 6{,}4^2} = 4{,}8 \quad \Rightarrow \quad CE = 15{,}2 \text{ cm.}$$

Hasonlóan $DG = 6{,}4$ cm és $DC = 15{,}2$ cm.

A $CEFGD$ ötszög területe a GDC, FEC és FGC háromszögek területének összege:

$$T_{CEFGD \text{ ötszög}} = \frac{8 \cdot 16}{2} + 2 \cdot \frac{6{,}4 \cdot 15{,}2}{2} = 161{,}28 \text{ cm}^2.$$

A $CEFGD$ ötszög kerülete:

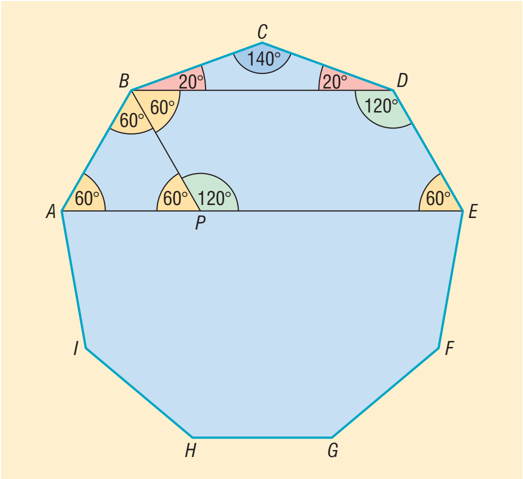
$$K_{CEFGD \text{ ötszög}} = GF + 2 \cdot (FE + CE) = 51{,}2 \text{ cm.}$$

1377 A 25 háromszög belső szögeinek összege $25 \cdot 180°$. Az ötszög belsejében lévő egy háromszög-csúcsnál a szögek összege 360°. Ha n csúcs esik az ötszögön belül, akkor a háromszög belső szögeinek összegét úgy is számolhatjuk, hogy 360° n-szereséhez hozzáadjuk az ötszög belső szögeinek összegét. Így n-re a következő egyenlethez jutunk:

$$25 \cdot 180° = n \cdot 360° + 540° \quad \Rightarrow \quad n = 11.$$

Az ötszög belsejébe 11 háromszög-csúcs esik.

1378 Az ábrán látható $ABCDEFGHI$ szabályos kilencszög egy belső szöge 140°. Egyik legrövidebb átlója BD, egyik leghosszabb átlója pedig AE.



A BCD egyenlő szárú háromszög szárszöge egyúttal a szabályos kilencszög egyik belső szöge is, tehát 140°. Továbbá: $BDC\sphericalangle = CBD\sphericalangle = 20°$, valamint $BDE\sphericalangle = DBA\sphericalangle = 140° - 20° = 120°$.

A szabályos kilencszög C csúcsán áthaladó szimmetriatengelyére merőleges a sokszög BD és AE átlója, tehát az $ABDE$ négyszög olyan húrtrapéz, amelynek belső szögei 60°, illetve 120°.

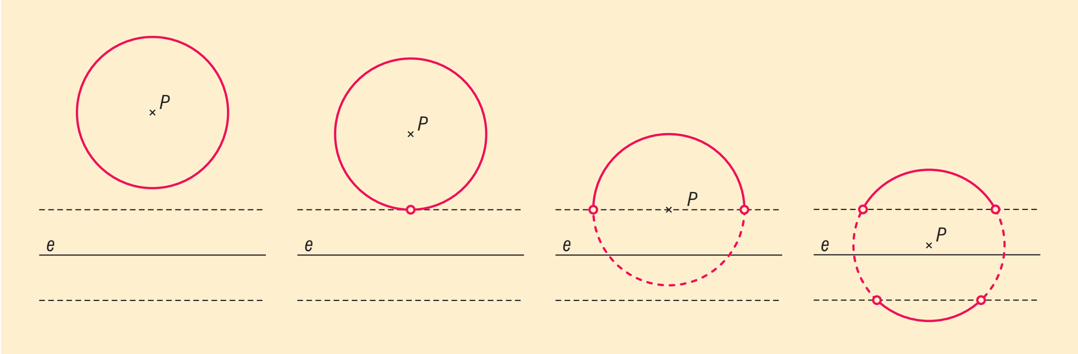
Legyen az AE leghosszabb átlónak P egy olyan belső pontja, amelyre igaz, hogy a $BDEP$ négyszög paralelogramma. A szögekből adódóan az APB háromszög szabályos, és az oldala éppen a kilencszög egy oldala.

Mivel a paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak, EP a legrövidebb átlóval egyenlő hosszú, és a szabályos háromszögből adódóan PA a szabályos kilencszög oldala.

Mivel $AE = AP + PE$, az állításunk igaz.

Nevezetes ponthalmazok – megoldások

1379 Legyen az adott pont P, az adott egyenes e.



Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm-nél nagyobb, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 5 cm sugarú körvonal pontjai.

Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 5 cm sugarú körvonal pontjai, kivéve a kör e-hez legközelebbi pontját.

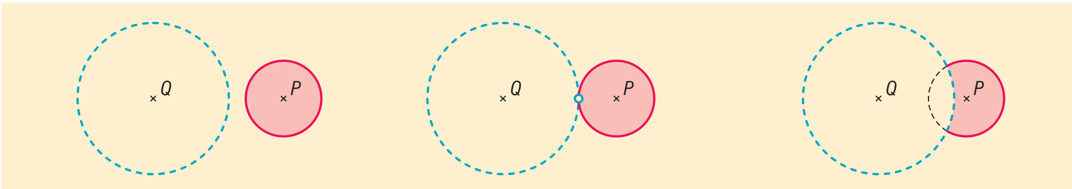
Ha a pont és az egyenes távolsága 8 cm-nél kisebb, de 2 cm-nél nem kisebb, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 5 cm sugarú körvonal egy nyílt ívének pontjai.

Ha a pont és egyenes távolsága 2 cm-nél kisebb, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 5 cm sugarú körvonal két nyílt ívének pontjai.

1380 A pontok halmaza az a körvonal, amelynek középpontja a két koncentrikus kör közös középpontja, sugara a két kör sugarának számtani közepe.

1381 Ha P és Q távolsága nagyobb, mint 10 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 4 cm sugarú zárt körlap pontjai.

Ha P és Q távolsága 10 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 4 cm sugarú zárt körlap pontjai, kivéve a körlap Q-hoz legközelebb eső pontját.



Ha P és Q távolsága kisebb, mint 10 cm, de nagyobb, mint 2 cm, akkor az adott tulajdonságú pontok a P körül írt 4 cm sugarú zárt körlapnak az ábrán látható pontjai.

Ha P és Q távolsága 2 cm-nél kisebb vagy egyenlő, nincs ilyen pont.

1382 Egy szakasz mint alap fölé emelt egyenlő szárú háromszög harmadik csúcsa, egyenlő távol van az alap két végpontjától, így a harmadik csúcs az alap felezőmerőlegesén van.

Ha a két szakasz nem párhuzamos, akkor a két szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja az egyenlő szárú háromszögek közös pontja.

Ha a két szakasz párhuzamos, és felezőmerőlegeseik egybeesnek, akkor a közös felezőmerőleges minden pontja megfelel a közös csúcsnak, kivéve a két szakasz felezőpontja.

Ha a két szakasz párhuzamos, és felezőmerőlegeseik párhuzamosak, de nem esnek egybe, akkor nem lehet ilyen háromszögeket szerkeszteni.

1383 Egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így a szerkesztendő kör középpontja rajta van az egyenesre E-ben állított merőlegesen.

Ismert, hogy egy kör húrjának felezőmerőlegese tartalmazza a kör középpontját, így a PE szakasz felezőmerőlegese tartalmazza a szerkesztendő kör középpontját.

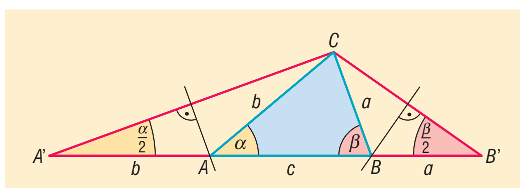
Ezek alapján a szerkesztés menete:

1. az adott egyenesre E-ben merőlegest állítunk;
2. megszerkesztjük a PE szakasz felezőmerőlegesét;
3. a két egyenes metszéspontja lesz a kör középpontja, sugara a középpont és E távolsága;
4. ez alapján a körvonal megrajzolható.

A feladatnak mindig egy megoldása van.

1384 Az 1314. feladat alapján történhet a szerkesztés.

Mivel az $A'AC$ háromszög egyenlő szárú, így az A csúcs rajta van az $A'C$ szakasz felezőmerőlegesén. Hasonlóan a B csúcs rajta van a $B'C$ szakasz felezőmerőlegesén.



A szerkesztés menete:

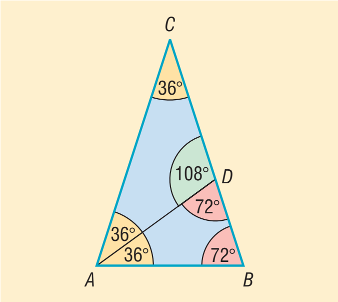
1. Szerkesszük meg azt az $A'B'C$ háromszöget, amelynek az $A'B'$ oldala a kerülettel egyenlő hosszú, és az A'-nél lévő szöge $\frac{\alpha}{2}$, a B'-nél lévő szöge $\frac{\beta}{2}$.
2. Az $A'C$ szakasz felezőmerőlegesének az $A'B'$-vel való metszéspontja adja A pontot.
3. A $B'C$ szakasz felezőmerőlegesének az $A'B'$-vel való metszéspontja adja B pontot.

A feladatnak mindig van megoldása, ha a két megadott szög összege 180°-nál kisebb.

1385 Kettő olyan pont van, amelyik mind a három egyenestől egyenlő távol van.

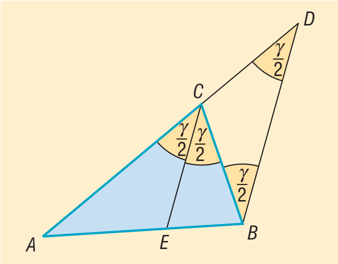
1386 Az AD átfogójú fél szabályos háromszögből adódóan $AD = 10$ cm.

1387 Ha a szárszög 36°, akkor az alapon fekvő szögek 72°-osak. Az alapon lévő egyik szög szögfelezője az ábrán látható módon két egyenlő szárú háromszögre bontja az eredeti háromszöget.



1388 Mivel CE párhuzamos BD-vel, párhuzamos szárú szögek keletkeznek. A CBD szög és a CDB szög is a C csúcsnál lévő szög fele, vagyis a BCD háromszög egyenlő szárú. (➡)

Egy háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, tehát $DC = BC$.



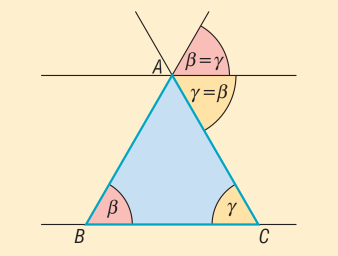
1389 A négyzet átfogóra eső csúcsa egyenlő távol van a két befogótól, így rajta van a derékszögű csúcs szögfelezőjén. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

1390 A félkör középpontja, amely a háromszög egyik oldalára esik, egyenlő távol van a másik két oldaltól, így a félkör középpontja rajta van a másik két oldal által bezárt belső szög szögfelezőjén. Ez alapján a szerkesztés elvégezhető.

1391 Tekintsük az ábra jelöléseit. (➡)

A párhuzamosságból következik, hogy az A-nál lévő külső szög éppen a B-nél, illetve a C-nél lévő belső szögeknek is kétszerese. Ebből adódik, hogy a B-nél és C-nél levő belső szögek egyenlők.

Az ABC háromszög egyenlő szárú és $AB = AC$.



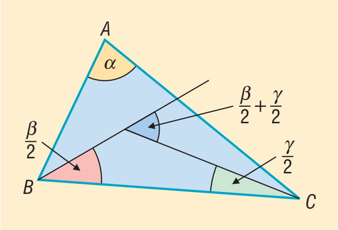
1392 A szögfelezők által bezárt szög 57°.

1393 *a)* A másik két belső szög szögfelezőinek hajlásszöge 66°.

b) Az ABC háromszög szögei a szokásos jelölésekkel legyen α, β és γ. A β és γ szögek szögfelezőinek metszéspontját jelölje O.

Az OBC háromszög B-nél és C-nél lévő belső szöge $\frac{\beta}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$.

Ennek a háromszögnek az O csúcsnál levő külső szöge $\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}$, ami éppen a két szögfelező hajlásszöge.



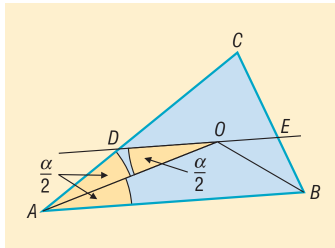
Mivel az ABC háromszög belső szögeinek összege 180°, a két szögfelező hajlásszöge:

$$\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

1394 A külső szögek rendre 132°, 106°, illetve 122°. A külső szögfelezők által meghatározott háromszög belső szögei ezek felének páronként vett összegét egészítik ki 180°-ra. Így a szögek:

$$180° - \frac{132° + 106°}{2} = 61°, \quad 180° - \frac{132° + 122°}{2} = 53°, \quad 180° - \frac{122° + 106°}{2} = 66°.$$

1395 Az ABC háromszög A és B csúcsnál lévő belső szögfelezők metszéspontja legyen O. Mivel DE párhuzamos AB-vel, a DOA és az OAB szögek váltószögek:

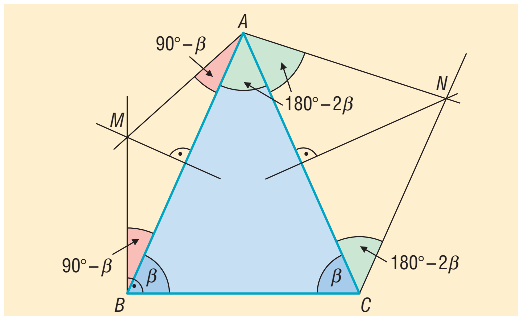


$$DOA\sphericalangle = OAB\sphericalangle = DAO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az ADO háromszög egyenlő szárú. Egy háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, ezért $DO = DA = 5$ cm. Ugyanígy adódik, hogy $OE = EB = 4$ cm.

Tehát a DE szakasz hossza 9 cm.

1396 Ha az ábrán látható ABC háromszögben az $ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \beta$, akkor a $BAC\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \beta$.



Mivel az MB merőleges a háromszög BC oldalára, $ABM\sphericalangle = 90° - \beta$.

Az M pont rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén, tehát az AMB háromszög egyenlő szárú: $MBA\sphericalangle = BAM\sphericalangle = 90° - \beta$.

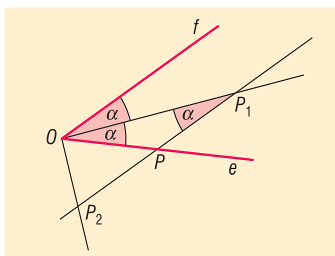
Az NC párhuzamos AB-vel, tehát az ACN és a BAC szögek váltószögek: $BAC\sphericalangle = ACN\sphericalangle =$ $= 180° - 2 \cdot \beta$.

Az N pont rajta van az AC szakasz felezőmerőlegesén, tehát az ACN háromszög is egyenlő szárú: $ACN\sphericalangle = CAN\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \beta$.

Az A csúcsnál lévő szögek összege $2 \cdot (180° - 2 \cdot \beta) + 90° - \beta = 450° - 5 \cdot \beta$, ami éppen 120° a feladat feltétele szerint. Ebből $\beta = 66°$.

A háromszög szögei: 66°, 66°, 48°.

1397 A szög csúcsa legyen O, a szögszárak pedig e, illetve f félegyenesek. A P pont az e szögszár egy tetszőleges pontja.



Legyen P_1 a szögtartományban az a pont, amelyre PP_1 párhuzamos az f szögszárral és $PP_1 = OP$.

Az OPP_1 háromszög egyenlő szárú, és az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak: $PP_1O\sphericalangle = P_1OP\sphericalangle = \alpha$.

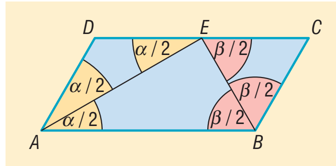
A párhuzamosság miatt az f szögszár az OP_1 egyenesével, szintén α nagyságú szöget zár be, tehát P_1 pont rajta van a szögfelezőn.

Tekintsük a szögfelező egy tetszőleges Q pontját. Húzzunk párhuzamost Q-n keresztül az f szögszárral, és vegyük a párhuzamos és e egyenes metszéspontját. A metszéspontból kiindulva, a feladat utasításait követve éppen a Q ponthoz jutunk. Tehát a szögfelező minden pontja hozzá tartozik az adott tulajdonságú pontok halmazához.

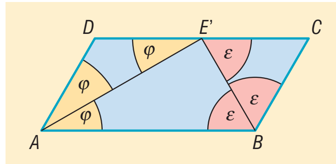
Legyen P_2 a szögtartományon kívül az a pont, amelyre PP_2 párhuzamos az f szögszárral és $PP_2 = OP$. Belátható, hogy a P_2 pontok halmaza az adott szög mellékszögének szögfelezője.

A feladatban szereplő pontok halmaza a szögtartomány szögfelezője és a mellékszögének szögfelezője. (A szög és mellékszög közös szögszára tartalmazza P-t.)

1398 Ha a szögfelezők a DC oldal E felezőpontjában metszik egymást, akkor a szögfelezés miatt $BAE\sphericalangle = EAD\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Mivel a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak, a BAE és a DEA szögek váltószögek, tehát $BAE\sphericalangle = DEA\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Ez azt jelenti, hogy az AED háromszög egyenlő szárú, vagyis $DE = AD$. Ugyanígy $BC = CE$, tehát $DC = 2BC$.



Ha $DC = 2BC$, és E' pont a DC felezőpontja, akkor $AD = DE'$, vagyis az ADE' háromszög egyenlő szárú. A háromszögben az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, tehát $DAE'\sphericalangle = DE'A\sphericalangle = \varphi$. Mivel AB párhuzamos DC-vel, $DE'A$ és $E'AB$ szögek váltószögek, tehát $DE'A\sphericalangle = E'AB\sphericalangle = \varphi$. Hasonlóan $ABE'\sphericalangle = E'BC\sphericalangle = \varepsilon$.



Tehát AE' a BAD, és BE' az ABC szög szögfelezője, vagyis az ABC és BAD szögek szögfelezői DC felezőpontjában, E'-ben metszik egymást.

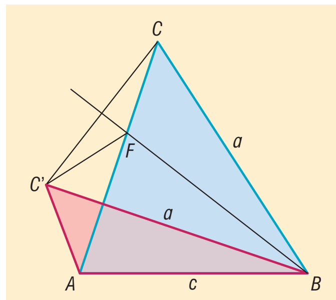
1399 Az ABC, illetve az ABC' háromszögekben $BC = BC'$. A két háromszög közül az elsőben legyen nagyobb a B-nél lévő szög, mint a másodikban. Bizonyítandó, hogy $AC' < AC$.

A CBC' szög felezője az ABC' háromszögön kívül halad, és messe az AC oldalt egy F pontban. Ekkor igaz, hogy $CF = C'F$.

Az $AC'F$ háromszögben felírva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$AC' < AF + FC' = AF + FC = AC.$$

Ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.

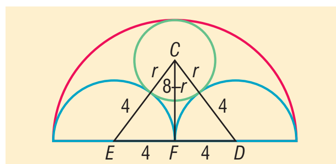


1400 Használjuk a következő ábra jelöléseit.

A kis kör sugara legyen r.

A kisebbik félkörök sugara 4 cm, tehát $FE = FD = 4$ cm.

A kis kör belülről érinti a nagy félkört, ezért középpontjaik távolsága: $CF = 8 - r$.



A kis kör kívülről érinti a kisebbik félköröket, ezért középpontjaik távolsága: $CE = CD = 4 + r$.

A CFE derékszögű háromszögben felírva Pitagorasz tételét:

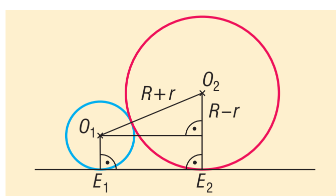
$$(4 + r)^2 = (8 - r)^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{8}{3}.$$

A legkisebb kör sugara $\frac{8}{3}$ cm.

1401 *a)* Az $r = 4$ cm sugarú kör középpontja O_1, az egyenessel vett érintési pontja E_1.

Az $R = 9$ cm sugarú kör középpontja O_2, az egyenessel vett érintési pontja E_2.

Az $O_1O_2E_2E_1$ négyszög derékszögű trapéz, alapjai r és R. A nem derékszögű szár hossza $r + R$.

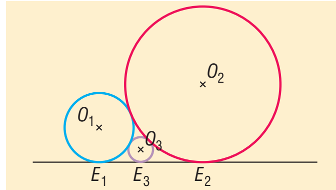


A derékszögű szárat az ábra alapján Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$E_1E_2 = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = \sqrt{4 \cdot R \cdot r} = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} \quad \Rightarrow \quad E_1E_2 = 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 9} = 12 \text{ cm}.$$

Az érintési pontok távolsága 12 cm.

b) Ha két r és R sugarú kör érint egy egyenest és érintik egymást is, akkor az előző gondolatmenet alapján az érintési pontok távolsága:



$$E_1E_2 = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}.$$

Ha a keresett kör x sugara kisebb mind a két kör sugaránál, és az egyenessel vett érintési pontja E_3, akkor az előzőek alapján:

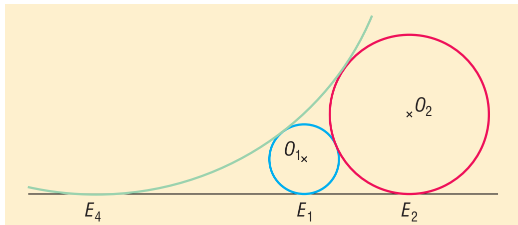
$$E_1E_3 = 2 \cdot \sqrt{4x} = 4 \cdot \sqrt{x}, \quad E_3E_2 = 2 \cdot \sqrt{9x} = 6 \cdot \sqrt{x}, \quad E_1E_2 = 12.$$

Így:

$$E_1E_3 + E_3E_2 = E_1E_2 \;\Rightarrow\; 4 \cdot \sqrt{x} + 6 \cdot \sqrt{x} = 12 \;\Rightarrow\; x = 1{,}44 \text{ cm}.$$

A kisebb keresett kör sugara 1,44 cm.

Ha a keresett kör y sugara nagyobb mind a két kör sugaránál, és az egyenessel vett érintési pontja E_4, akkor az előzőek alapján:



$$E_4E_1 = 2 \cdot \sqrt{4y} = 4 \cdot \sqrt{y},$$
$$E_4E_2 = 2 \cdot \sqrt{9y} = 6 \cdot \sqrt{y},$$
$$E_1E_2 = 12.$$

Így:

$$E_4E_2 - E_4E_1 = E_1E_2 \;\Rightarrow\; 6 \cdot \sqrt{y} - 4 \cdot \sqrt{y} = 12 \;\Rightarrow\; y = 36 \text{ cm}.$$

A nagyobb keresett kör sugara 36 cm.

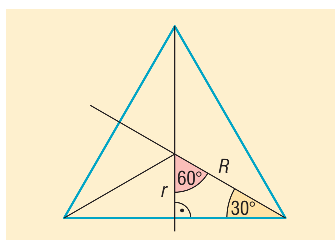
Háromszög beírt és köré írt köre – megoldások

1402 A beírt kör középpontját a belső szögfelezők metszéspontja, a körülírt kör középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontja adja.

1403 *a)* A szerkesztés elvégezhető, ha figyelembe vesszük, hogy ha a körülírt kör középpontját összekötjük a csúcsokkal, akkor ezek a sugarak 120°-os szöget zárnak be egymással.

b) A szerkesztés elvégezhető, ha figyelembe vesszük, hogy ha a beírt kör középpontját összekötjük az oldalakkal vett érintési pontokkal, akkor ezek a sugarak 120°-os szöget zárnak be egymással.

1404 A szabályos háromszög oldalfelező merőlegesei és belső szögfelezői egybeesnek, így a háromszög beírt és köré írt körének középpontja is ugyanaz a pont. Ez a pont a háromszög két csúcsával egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek szárszöge 120°. Ezt a háromszöget az alaphoz tartozó magassága két fél szabályos háromszögre bontja, amelyről tudjuk, hogy a rövidebb befogója fele az átfogónak.



Mivel az átfogó éppen a körülírt kör sugara, a befogó a beírt kör sugara, a feladat állítása igaz.

1405 Az 1404. feladatból következik, hogy az a oldalú szabályos háromszög magassága éppen a beírt és körülírt kör sugarának összege, és hosszuk aránya $1:2$.

Tehát a beírt kör sugara: $\frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$, a körülírt kör sugara: $\frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$.

1406 Ha egy háromszög köré írt körének sugara R, középpontja O, egy oldala a, akkor az O pontnak az a oldaltól vett d távolságát Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk:

$$d=\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Mivel egy adott háromszög esetén R állandó, a gyök alatti mennyiség akkor a legkisebb, ha a a legnagyobb.

Tehát bebizonyítottuk, hogy egy háromszög köré írt körének középpontja a legnagyobb oldalhoz van a legközelebb.

1407 A helyesen kitöltött táblázat:

Háromszög kerülete	Háromszög területe	Beírt kör sugara
60 cm	125 cm^2	$\frac{25}{6}$ cm
30 cm	30 cm^2	2 cm
k	$\frac{k\cdot r}{2}$	r

1408 A befogók legyenek $a=30$ cm, $b=40$ cm, és a Pitagorasz-tételből az átfogó $c=50$ cm.

a) A beírt kör sugarára ismert a következő összefüggés:

$$r=\frac{a+b-c}{2}=10\text{ cm}.$$

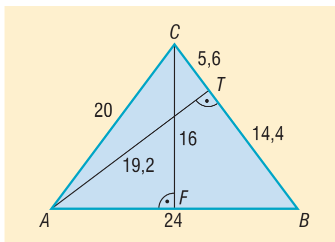
b) Az átfogóhoz írt kör sugara:

$$r_c=\frac{a+b+c}{2}=60\text{ cm}.$$

c) A befogókhoz írt körök sugara:

$$r_a=\frac{a-b+c}{2}=20\text{ cm}\quad\text{és}\quad r_b=\frac{b-a+c}{2}=30\text{ cm}.$$

1409 Az ABC egyenlő szárú háromszögben az ábrának megfelelően AB az alap, F az alap felezőpontja.



a) A CFB háromszögben a Pitagorasz-tételt használva:

$$AB=2\cdot FB=2\cdot\sqrt{20^2-16^2}=24\text{ cm}.$$

b) Legyen a szárhoz tartozó magasság m. Az ABC háromszög területére igaz:

$$\frac{24\cdot 16}{2}=\frac{20\cdot m}{2}.$$

Innen a szárhoz tartozó magasság 19,2 cm.

c) A BC szárhoz tartozó magasság talppontja legyen T. Az ABT háromszögben Pitagorasz tétele:

$$TB^2+19{,}2^2=24^2\quad\Rightarrow\quad TB=14{,}4\quad\Rightarrow\quad TC=20-14{,}4=5{,}6.$$

A szárhoz tartozó magasság a szárat 14,4 és 5,6 cm-re osztja.

d) Ha a beírt kör sugara r, a háromszög területét kétféleképpen felírhatjuk:

$$\frac{24\cdot 16}{2}=r\cdot\left(\frac{20+20+24}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad r=6\text{ cm}.$$

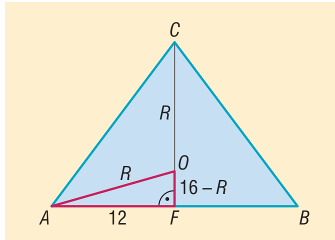
e) Legyen a háromszög köré írható körének sugara R, a kör középpontja O. Az O pont rajta van az alaphoz tartozó magasságon.

Az AFO derékszögű háromszögben $OF = 16 - R$, $AO = R$ és $AF = 12$.

Pitagorasz tétele az AFO háromszögre:

$$R^2 = 12^2 + (16 - R)^2.$$

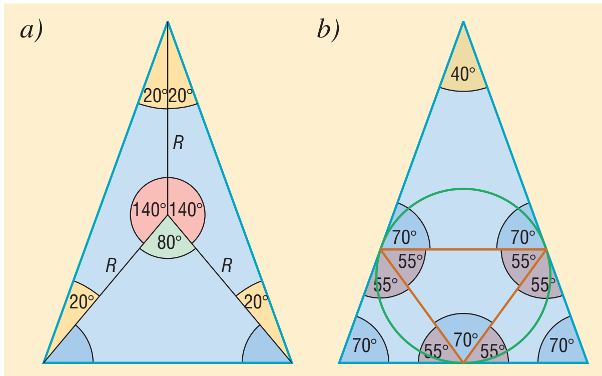
Az egyenletet megoldva: $R = 12{,}5$ cm.



1410 A háromszög egyenlő szárú, mert szögeinek nagysága 70º, 70º és 40º.

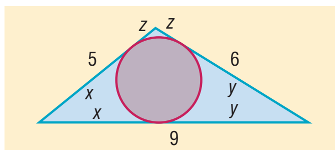
a) A bal oldali ábráról leolvasható, hogy az egyenlő szárú háromszög oldalai 140º, 140º és 80º-os szögben látszanak a körülírható kör középpontjából.

b) Külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlőségéből az egyenlő szárú háromszögekben adódnak a jobb oldali ábrán látható szögek. Annak a háromszögnek a szögei, amelyet a beírt körnek az oldalakkal vett érintési pontjai határoznak meg: 70º, 55º és 55º.



1411 Az ábra alapján a háromszög csúcsaiból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ y + z &= 6 \\ x + z &= 5 \end{aligned}\right\}.$$



Az egyenletrendszer megoldásai: $x = 4$, $y = 5$, $z = 1$.

Tehát az érintési pontok az 5 cm-es oldalt 4 és 1 cm-es szakaszokra, a 6 cm-es oldalt 6 és 1 cm-es szakaszokra, a 9 cm-es oldalt 4 és 5 cm-es szakaszokra osztják.

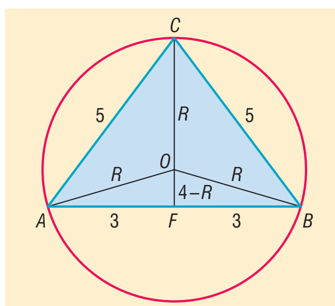
1412 *a)* A háromszöget lefedő legkisebb sugarú kör éppen a háromszög köré írt kör.

Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = AC = 5$ cm.

Ha az alap felezőpontja F, akkor $AF = 3$ cm. Az AFC háromszögben Pitagorasz tétele alapján $CF = 4$ cm.

Legyen az ABC háromszög köré írt körének sugara R, a kör középpontja O. Az O pont rajta van az ABC háromszög alapjához tartozó magasságán.

Az AFO derékszögű háromszögben $OF = 4 - R$, $AO = R$, valamint $AF = 3$. Pitagorasz tétele erre a háromszögre:



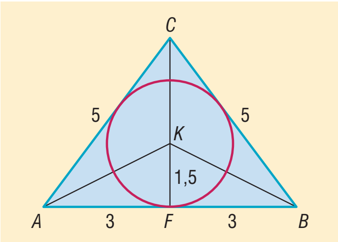
$$R^2 = 3^2 + (4 - R)^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{25}{8} = 3{,}125.$$

A háromszöget lefedő körlap sugara legalább 3,125 cm.

b) A beírt kör K középpontja az ABC háromszög alaphoz tartozó magasságán van.

Ha a beírt kör sugara r, a háromszög területét kétféleképpen írhatjuk fel:

$$\frac{4\cdot 6}{2}=r\cdot\left(\frac{5+5+6}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad r=1{,}5.$$



Így $CK = 4 - 1{,}5 = 2{,}5$ cm.

Az AKF derékszögű háromszögben $AF = 3$ cm, $KF = r = 1{,}5$ cm.

Az AKF derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$AK=\sqrt{3^2+1{,}5^2}\approx 3{,}35 \text{ cm}.$$

Hasonlóan adódik: $BK = 3{,}35$ cm.

A beírt kör középpontja a csúcsoktól 2,5, 3,35 és 3,35 cm-re van.

1413 *a)* A doboz alapélének hosszát annak a szabályos háromszögnek az oldala adja, amelybe 13 cm sugarú kör írható. Az 1405. feladat alapján:

$$13=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}\quad\Rightarrow\quad a=\frac{78}{\sqrt{3}}\approx 45{,}03 \text{ cm}.$$

A háromszög alapú doboz alapéle 45,03 cm.

b) A doboz alapélének hosszát annak a négyzetnek az oldala adja, amelybe 13 cm sugarú kör írható. A négyzet alapú doboz alapéle $2\cdot 13 = 26$ cm.

c) Az első esetben az alaplap területe:

$$\frac{\left(\frac{78}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{78^2\cdot\sqrt{3}}{12}\approx 878{,}15 \text{ cm},$$

míg a kerülete:

$$3\cdot\frac{78}{\sqrt{3}}\approx 135{,}1 \text{ cm}.$$

A második esetben az alaplap területe:

$$26^2 = 676 \text{ cm}^2,$$

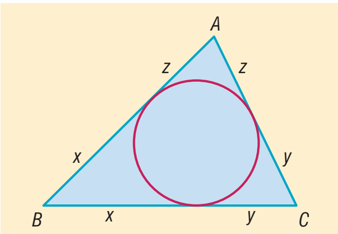
a kerülete pedig:

$$4\cdot 26 = 104 \text{ cm}.$$

Mivel a dobozok magassága egyenlő, a második csomagolási módot érdemes választani.

1414 Az ábra segítségével a háromszög csúcsaiból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=a\\ y+z&=b\\ x+z&=c \end{aligned}\right\}.$$



Az egyenletrendszer megoldásai (s a háromszög félkerülete):

$$x=\frac{a+c-b}{2}=s-b,\qquad y=\frac{a+b-c}{2}=s-c,\qquad z=\frac{b+c-a}{2}=s-a.$$

Tehát az érintési pontok az oldalakat a következő hosszúságú szakaszokra osztják:

a oldalt $s-b$ és $s-c$; b oldalt $s-a$ és $s-c$; c oldalt $s-a$ és $s-b$.

1415 Ha a háromszög befogói a, b és az átfogója c, akkor a Pitagorasz-tétel alapján $a^2 + b^2 = c^2$.

Ha a két befogó mindegyike páratlan, akkor az átfogó páros. Ha a két befogó mindegyike páros, akkor az átfogó páros. Ha a két befogó különböző paritású, akkor az átfogó páratlan. Tehát mindegyik esetben $a + b - c$ páros.

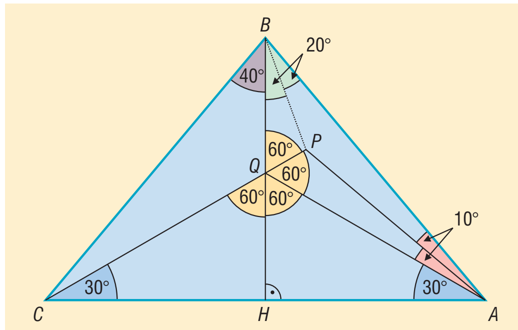
A derékszögű háromszög beírt körének sugarára ismert a következő összefüggés:

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Mivel a tört számlálója páros, r egész.

1416 Az ábrán látható ABC egyenlő szárú háromszögben:

$$BAC\sphericalangle = BCA\sphericalangle = 50°.$$



Rajzoljuk meg az alaphoz tartozó BH magasságot, ennek CP-vel való metszéspontja legyen Q.

Az ACQ egyenlő szárú háromszögben:

$$QAC\sphericalangle = QCA\sphericalangle = 30° \quad \text{és} \quad AQC\sphericalangle = 120°.$$

A QAB háromszögben:

$$BAQ\sphericalangle = 50° - 30° = 20°,$$
$$QBA\sphericalangle = 40° \quad \text{és} \quad BQA\sphericalangle = 120°.$$

Vizsgáljuk meg a QAB háromszögben PQ, illetve PA mekkora részekre osztja a Q-nál, illetve az A-nál lévő szögeket.

Mivel $PAC\sphericalangle = 40°$, $QAP\sphericalangle = 40° - 30° = 10°$, a PA egyenese felezi az A-nál lévő szöget. Az ACQ háromszög Q-nál lévő külső szöge $PQA\sphericalangle = 60°$, vagyis PQ egyenese felezi a Q-nál levő szöget.

Megvizsgálva QAB háromszögben, P pont a háromszög két belső szögfelezőjének metszéspontja, amelyen áthalad a harmadik szögfelező is. Tehát:

$$PBQ\sphericalangle = PBA\sphericalangle = \frac{40°}{2} = 20°.$$

A PCB háromszögben tehát ismert két szög:

$$PBC\sphericalangle = 20° + 40° = 60° \quad \text{és} \quad PCB\sphericalangle = 50° - 30° = 20°.$$

Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°, a harmadik BPC szög 100°.

Thalész tétele – megoldások

1417 A háromszög köré írt körének sugara:

a) $4 \cdot \sqrt{10}$ cm; *b)* $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

1418 A szerkesztés Thalész tétele segítségével történhet. Az érintőszakasz hossza 6 cm.

1419 Legyen P egy olyan pont, amelyből r hosszúságú érintő húzható az O középpontú körhöz.

A körön lévő egyik érintési pont, a kör középpontja és P olyan derékszögű háromszöget határoznak meg, amely befogóinak hossza r, ezért Pitagorasz tétele alapján P pont $r \cdot \sqrt{2}$ távolságra van a kör középpontjától. A P rajta van az O középpontú $r \cdot \sqrt{2}$ sugarú körön.

Ez utóbbi kör minden pontja rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy abból r hosszúságú érintő húzható az O középpontú r sugarú körhöz.

Az adott pontok halmaza tehát O középpontú $r \cdot \sqrt{2}$ sugarú kör.

1420 Egy egyenlő szárú háromszög AB alapjának felezőmerőlegese tartalmazza a háromszög C csúcsát. Ismert, hogy egy tetszőleges háromszög bármely csúcsából kiinduló két oldal egyenese, a beírt kör egy-egy érintője.

Ez alapján a szerkesztés menete:

1. Vegyük fel az egyenlő szárú háromszög AB alapját, és szerkesszük meg a szakasz felezőmerőlegesét.
2. Szerkesszük meg azt a kört, amely az alapot az alap felezőpontjában érinti, és sugara a beírt kör sugarával egyenlő.
3. Thalész-kör segítségével az alap A pontján áthaladó, a beírt kört érintő másik egyenest szerkesszük meg.
4. Ez utóbbi érintő és az AB felezőmerőlegesének metszéspontja adja a háromszög C csúcsát.

1421 A deltoid két szemben levő szöge 90°.

1422 Az átfogó két végpontja mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-kör és az egyenes metszéspontja szolgáltatja a háromszög derékszögű csúcsát.

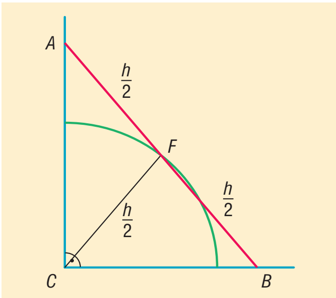
Ha az adott egyenesre nem illeszkedik az átfogó egyik végpontja sem, akkor:

– ha az adott egyenesnek az átfogó felezőpontjától vett távolsága kisebb, mint az átfogó fele, akkor két háromszöget kapunk megoldásként;
– ha az adott egyenesnek az átfogó felezőpontjától vett távolsága éppen az átfogó fele, akkor egy ilyen háromszöghöz jutunk;
– egyébként a feladatnak nincs megoldása.

Ha az adott egyenes csak az átfogó egyik végpontjára illeszkedik, és nem merőleges a két adott pont által meghatározott egyenesre, akkor egy háromszöget tudunk szerkeszteni, ha merőleges, akkor nincs megoldása a feladatnak.

Ha az adott egyenes az átfogó mindkét végpontját tartalmazza, szintén nincs megoldás.

1423 Legyen a derékszög csúcsa C, a szakasz végpontjai A és B, a szakasz felezőpontja F.

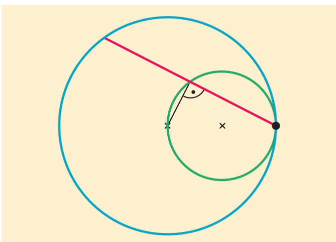


Thalész tételének megfordítása alapján F pont az ABC derékszögű háromszög köré írható körének középpontja. Az FC távolság a kör sugara, ami éppen az adott h hosszúságú szakasz hosszának fele. Tehát F pont rajta van a C középpontú $\frac{h}{2}$ sugarú körön.

A körnek minden olyan pontja, amely a derékszögű szögtartományba esik, előáll valamely h hosszúságú szakasz felezőpontjaként.

Az adott tulajdonságú pontok halmaza a derékszögű szögtartományba eső C középpontú $\frac{h}{2}$ sugarú negyed körív. (Az ív határoló pontjai is hozzá tartoznak a halmazhoz.)

1424 Tudjuk, hogy egy kör tetszőleges húrjának felezőmerőlegese áthalad a kör középpontján. Tehát a húr felezőpontja, a kör középpontja és a húr egyik végpontja derékszögű háromszöget határoznak meg.



A kör adott pontján áthaladó húrok felezőpontjai Thalész tételének megfordítása alapján rajta vannak az adott pont és a kör középpontja fölé mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-körön. A Thalész-kör minden, az adott ponttól különböző pontja előáll valamely húr felezőpontjaként.

1425 Thalész tételének megfordítása alapján a talppontok rajta vannak a PC szakasz mint átmérő fölé írt Thalész-körön.

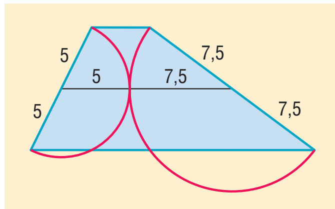
A talppontok, valamint P és C pontok egy körön helyezkednek el.

1426 Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű. A derékszögű háromszög köré írt körének sugara az átfogó hosszának a fele, tehát 6,5 cm.

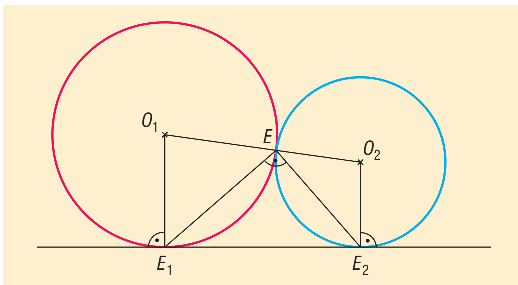
1427 Adott átfogójú derékszögű háromszög derékszögű csúcsa rajta van az átfogó mint átmérő fölé írt Thalész-körön.

Egy háromszögnek a területét számolhatjuk az $\frac{a \cdot m_a}{2}$ képlettel. Mivel az átfogó adott, annak a háromszögnek a legnagyobb a területe, amelyiknek az átfogóhoz tartozó magassága a legnagyobb, vagyis amelyiknek a derékszögű csúcsa legtávolabb van az átfogótól. Ez akkor teljesül, amikor a derékszögű csúcs rajta van az átfogó felezőmerőlegesén, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

1428 A két Thalész-kör sugara egy-egy szár hosszának a fele: 5 és 7,5 cm. A két Thalész-kör kívülről érinti egymást, tehát középpontjaikat összekötő szakasz hossza, ami a szárak felezőpontjait összekötő szakasz hossza is, éppen a két kör sugarának összege. A szárak felezőpontjait összekötő szakasz hossza tehát 12,5 cm.



1429 Az egyik kör középpontja legyen O_1, a másik kör középpontja O_2, és az egyenessel vett érintési pontjaik rendre E_1 és E_2. A két kör az E pontban érintse egymást.



Az $O_1E_1E_2O_2$ négyszög derékszögű trapéz, amelynek az O_1O_2 szárán E egy olyan pont, amelyre igaz, hogy

$$O_1E = O_1E_1, \quad \text{illetve} \quad O_2E = O_2E_2.$$

Az O_1EE_1 egyenlő szárú háromszögben az

$$O_1EE_1\sphericalangle = \frac{180° - E_1O_1E\sphericalangle}{2}.$$

Az O_2EE_2 egyenlő szárú háromszögben az

$$O_2EE_2\sphericalangle = \frac{180° - E_2O_2E\sphericalangle}{2}.$$

Mivel egy trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180°, ez utóbbi két szög összege:

$$\frac{180° - E_2O_2E\sphericalangle}{2} + \frac{180° - E_1O_1E\sphericalangle}{2} = 180° - \frac{E_2O_2E\sphericalangle + E_1O_1E\sphericalangle}{2} = 90°.$$

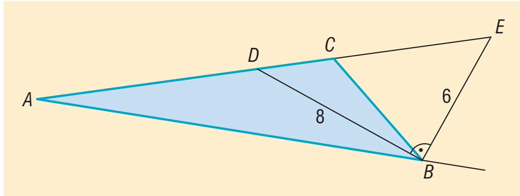
Ez azt jelenti, hogy az E_2EE_1 háromszög derékszögű háromszög. Thalész tételének megfordítása alapján az E_2E_1 átfogó felezőpontja a derékszögű csúcstól fele olyan távolságra van, mint E_2E_1 hossza.

Az érintési pontok által meghatározott E_1E_2 szakasz felezőpontjának az E ponttól vett távolsága tehát 10 cm.

1430 *a)* $DBE\sphericalangle = 90°$, mivel egy szögnek és a mellékszögének felezői egymásra merőlegesek.

A BDE háromszögben Pitagorasz tétele alapján a DE átfogó 10 cm.

Thalész tételének megfordítása alapján a BDE háromszög köré írt körének sugara az átfogó fele: 5 cm.



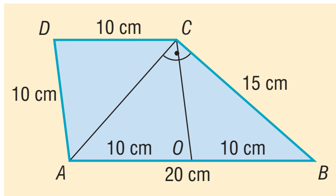
b) A háromszög területét kétféleképpen számolva:

$$\frac{6\cdot 8}{2} = \frac{(6+8+10)\cdot r}{2}.$$

Ebből a beírt kör sugara 2 cm.

1431 Az $ABCD$ trapéz AB alapjának felezőpontja legyen O. Az $AOCD$ négyszög 10 cm oldalhosszúságú rombusz. Az O pontnak A-tól, B-től és C-től vett távolsága egyaránt 10 cm. Thalész tétele értelmében az ABC háromszög derékszögű, és C csúcsnál van a derékszög. Pitagorasz tételét felírva:

$$AC = \sqrt{20^2 - 15^2} = \sqrt{175} \approx 13{,}23 \text{ cm}.$$

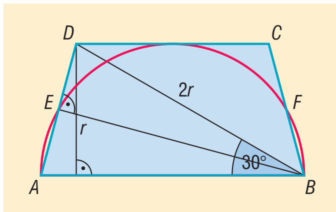


1432 A trapéz BC és AD szárainak felezőpontjai legyenek rendre F és E, valamint az AB alap fölé mint átmérő fölé írt kör sugara r.

Thalész tétele alapján AEB szög 90°, és mivel E felezéspont, az ABD háromszög egyenlő szárú: $AB = BD = 2r$.

A trapéz DC alapját érinti a félkör, tehát a trapéz magassága r.

A trapéz r magassága a $2r$ hosszú BD átlóval egy fél szabályos háromszöget határoz meg. Ennek a háromszögnek a kisebbik hegyesszöge $DBA\sphericalangle = 30°$.



Az ABD egyenlő szárú háromszögből:

$$BAD\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

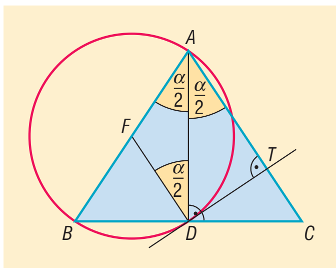
Hasonlóan az $ABC\sphericalangle = 75°$.

A trapéz szögei: 75°, 105°, 105°, 75°.

1433 Az ABC háromszög A csúcsánál lévő szöge α, D-ből AC-re állított merőleges talppontja legyen T.

A háromszög egyenlő szárú, tehát $DAB\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.

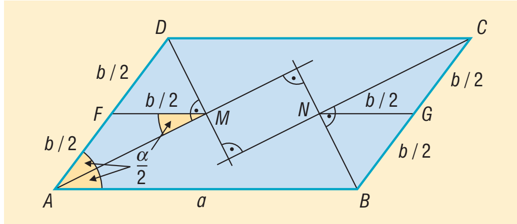
Az ABD háromszög derékszögű, így körülírható köre az AB mint átmérő fölé írt Thalész kör. A kör középpontja az AB átmérő F felezőpontja, és az FA, illetve az FD szakaszok a kör sugarával egyenlő hosszúságúak. Ez alapján FAD háromszög egyenlő szárú, tehát $FAD\sphericalangle = FDA\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.



Tehát a DAC és az FDA szögek egyenlők, vagyis FD párhuzamos AC-vel.

Mivel DT merőleges AC-re, merőleges a vele párhuzamos FD-re is.

Az ABD háromszög körülírható körének sugara FD, és láttuk, hogy merőleges DT egyenesére, tehát a DT egyenes érinti az ABD háromszög körülírható körét.



1434 Mivel a paralelogramma oldalai nem egyenlő hosszúak, két-két szögfelező metszéspontja különböző, tehát a belső szögfelezők metszéspontjai négyszöget határoznak meg.

Két szomszédos belső szög szögfelezői olyan szögeket feleznek, amelyeknek összege 180º, tehát ezek derékszögben metszik egymást, vagyis a négy metszéspont olyan négyszöget határoz meg, amelynek szögei 90º-osak, tehát téglalap.

Legyen $AD = b$ és az AD oldal felezéspontja F, valamint az A és a D csúcsnál lévő belső szögfelezők metszéspontja M.

Az előbbiek alapján az AMD háromszög derékszögű. Thalész tételének megfordításából következik, hogy $FM = FA = \frac{AD}{2} = \frac{b}{2}$. Az AFM háromszög egyenlő szárú, tehát az $FAM\sphericalangle = AMF\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

Az AMF és az MAB szögek egyenlők, vagyis FM párhuzamos AB-vel.

Ugyanígy belátható a B, illetve a C csúcsnál lévő belső szögfelezőknek N metszéspontjára, hogy az N pont a BD oldal G felezéspontjától $\frac{b}{2}$ távolságra van, és hogy GN párhuzamos AB-vel.

Ha a paralelogramma hosszabbik oldala a, akkor $FG = a$ és FG párhuzamos a paralelogramma a hosszúságú oldalával.

Tehát az M és az N pontok FG szakaszra esnek, valamint

$$MN = FG - FM - GN = a - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = a - b.$$

Tehát a téglalap átlója $a - b$ hosszúságú.

Érintőnégyszög, érintősokszög – megoldások

1435 A rombusz érintőnégyszög, beírható körének középpontja az átlók metszéspontja. Ebből közvetlenül adódik az állítás.

1436 A rombusz oldala $24 \cdot \sqrt{2}$ cm.

1437 A rombusz szemben lévő oldalai párhuzamosak, tehát a szemben lévő érintési pontokat összekötő szakasz felezőpontja a beírt kör középpontja.

A rombusz magassága mindkét párhuzamos oldalpár esetén ugyanolyan hosszú, tehát a szemben lévő érintési pontokat összekötő szakaszok egyenlő hosszúak.

Tehát a beírt kör érintési pontjai által meghatározott négyszög átlói egyenlők és felezik egymást, vagyis téglalap.

A beírt kör érintési pontjai által meghatározott négyszög átlói ugyanakkora szöget zárnak be, mint a rombusz hegyesszöge, tehát 60º-ot.

1438 Kössük össze az a, b, c, d oldalú érintőnégyszög csúcsait a beírt kör középpontjával. Az így kapott háromszögek mindegyikének magassága a beírt kör sugara. A négy háromszög területének összegeként írjuk fel a négyszög területét:

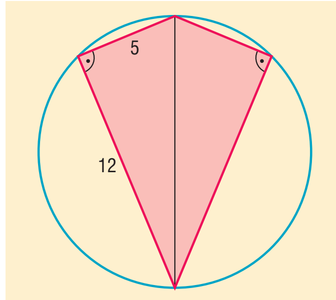
$$t_{\text{négyszög}} = \frac{a}{2} \cdot r + \frac{b}{2} \cdot r + \frac{c}{2} \cdot r + \frac{d}{2} \cdot r = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r = \frac{k}{2} \cdot r.$$

1439 Mivel a deltoid köré kör írható, ennek a körnek a középpontja rajta van a szimmetriaátlón. Thalész tételének alapján a deltoid két szomszédos, különböző hosszúságú oldala merőleges egymásra.

Legyen a beírható kör sugara r. A deltoid területét kétféleképpen számolva:

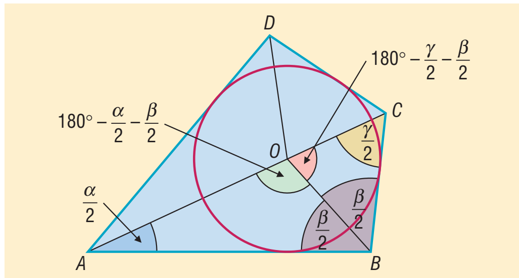
$$\frac{12\cdot 5}{2}\cdot 2 = r\cdot\frac{2\cdot 12 + 2\cdot 5}{2} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{60}{17}\approx 3{,}53 \text{ cm.}$$

A beírható kör sugara 3,53 cm.



1440 *a)* Vegyük fel a két szomszédos oldal által közbezárt szöget, és szerkesszük meg a szög szárait érintő, a beírt kör sugarával egyenlő sugarú kört.

A szög száraira mérjük fel a két adott oldal hosszúságát, majd a végpontokból szerkesszünk a körhöz érintőket. Az adott szög száraitól különböző érintők metszéspontja adja a négyszög negyedik csúcsát.



b) Az $ABCD$ érintőnégyszög szögfelezőinek metszéspontja O pont. Az A, B és C csúcsoknál lévő szögek rendre α, β és γ. Az AOB és BOC szögek nagysága:

$$AOB\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}, \quad \text{illetve} \quad BOC\sphericalangle = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Ez alapján, ha adott α, β és γ, valamint a beírt kör sugara, a szerkesztést így hajthatjuk végre:

1. Vegyük fel a B csúcsú β szöget, és szerkesszük meg a szög szárait érintő, a beírt kör sugarával egyenlő sugarú kört.
2. A kör O középpontjában mérjük fel OB félegyenesre $180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ szöget, így az A csúcsot kapjuk.
3. A kör O középpontjában mérjük fel OB félegyenesre a másik oldalra $180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ szöget, így a C csúcsot kapjuk.
4. A negyedik csúcsot az A és a C pontokból a körhöz húzott érintők szerkesztésével kapjuk.

1441 A negyedik oldal lehet 6 cm, 18 cm vagy 22 cm.

1442 Mivel kör írható a hatszögbe:

$$AB + CD + EF = BC + ED + FA.$$

Behelyettesítve:

$$6 + 8 + 10 = 8 + 7 + FA \quad\Rightarrow\quad FA = 9 \text{ cm.}$$

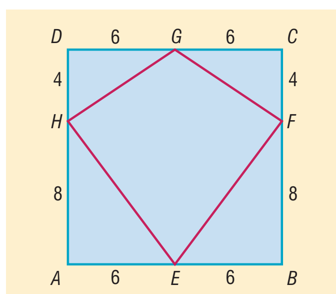
1443 *a)* Mivel $HG = FG$ és $HE = FE$, a négyszög deltoid.

b) A deltoid területét kétféleképpen számolhatjuk. Egyrészt a négyzet területének a fele: $T = 72\ \text{cm}^2$.

Másrészt, mivel a deltoid érintőnégyszög, a beírt kör r sugarával számolva, a terület:

$$T = r\cdot\frac{k}{2} = r\cdot\frac{2\cdot(HG + HE)}{2} =$$

$$= r\cdot\left(\sqrt{6^2+4^2} + \sqrt{6^2+8^2}\right) = r\cdot\left(\sqrt{52}+10\right).$$

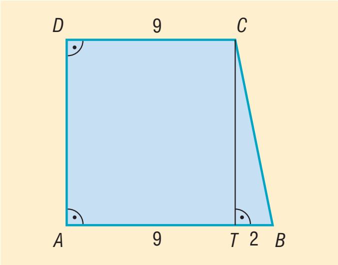


A két érték megegyezik, ezért:

$$r \cdot \left(\sqrt{52}+10\right) = 72 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{72}{\sqrt{52}+10} \approx 4{,}18 \text{ cm.}$$

A négyszög beírt körének sugara 4,18 cm.

1444 Használjuk az ábra jelöléseit. Az $ABCD$ derékszögű trapéz derékszögű szára AD, alapjai pedig $AB = 11$ cm és $CD = 9$ cm. Az érintőnégyszögek tétele alapján:



$$AD + BC = 9 + 11 = 20 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad BC = 20 - AD.$$

A CTB háromszög egyik befogója CT, a másik befogója pedig $TB = 11 - 9 = 2$ cm. Mivel $AD = CT$, a BC átfogó $20 - CT$. A háromszögben felírva Pitagorasz tételét:

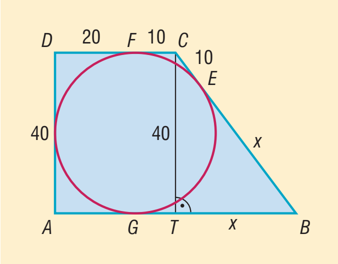
$$CT^2 + TB^2 = CB^2.$$

Behelyettesítve és rendezve az egyenletet:

$$CT^2 + 2^2 = (20 - CT)^2 \quad \Rightarrow \quad CT = \frac{396}{40} = 9{,}9 \text{ cm.}$$

A trapéz magassága 9,9 cm.

1445 A derékszögű szár 40 cm, a másik szár ennél nagyobb, így csak a rövidebbik alap lehet 30 cm. Az ábra jelöléseit használva, a C pontból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségéből:



$$CE = CF = 30 - 20 = 10 \text{ cm.}$$

Legyen a B pontból húzott érintőszakasz hossza x. $BE = BG = x$.

A TCB háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$(10 + x)^2 = 40^2 + (x - 10)^2.$$

Az egyenletet rendezve $x = 40$.

A trapéz alapjainak hossza tehát 30 cm és 60 cm, magassága 40 cm.

A trapéz területe:

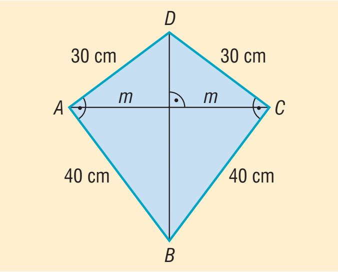
$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(30+60)\cdot 40}{2} = 1800 \text{ cm}^2.$$

A beírt kör sugara $\frac{40}{2}$ cm, területe:

$$T_{\text{kör}} = 20^2 \cdot \pi = 400\pi \text{ cm}^2.$$

Tehát a trapéz területének $\frac{1800 - 400\pi}{1800} \cdot 100 = 30{,}19\%$ -a esik a körön kívül.

1446 Mivel a négyszögnek két-két oldala egyenlő, de két szemben lévő szöge nem egyenlő, a négyszög deltoid.



Egy négyszög belső szögeinek összege 360°. A deltoid két szemben levő, nem egyenlő szögének az összege 180°, tehát a két egyenlő nagyságú szöge 90°.

A deltoid két olyan derékszögű háromszögből áll, amelynek befogói 30 és 40 cm hosszúak.

Tekintsük az ábra jelöléseit.

a) A hurkapálcák hosszának meghatározásához szükségünk van a BCD derékszögű háromszög átfogójának, illetve az átfogóhoz tartozó m magasságának a hosszára.

A Pitagorasz-tételből az átfogó hossza 50 cm, ami a deltoid egyik átlójának a hossza.

A derékszögű háromszög területét kétféleképpen számíthatjuk:

$$\frac{30\cdot 40}{2}=\frac{50\cdot m}{2} \quad\Rightarrow\quad m=24.$$

Mivel a deltoid átlói merőlegesek egymásra, a másik átló hossza $2m = 48$ cm.

A merevítéshez egy 50 cm és egy 48 cm hosszú hurkapálcára van szükségünk.

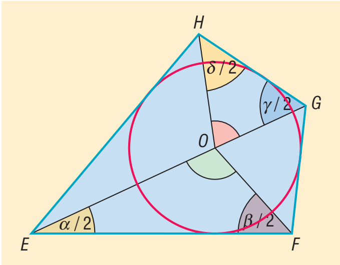
b) A deltoid területe a két derékszögű háromszög területének az összegeként számítható:

$$2\cdot\frac{30\cdot 40}{2}=1200\ \text{cm}^2.$$

A sárkány elkészítéséhez felhasznált papírmennyiség:

$$\frac{1200}{80}\cdot 100=1500\ \text{cm}^2=15\ \text{dm}^2.$$

c) A deltoid belső szögfelezőinek metszéspontja lesz a kör középpontja, sugara ennek a pontnak valamely oldaltól vett távolsága.



d) Az AOB és a COD szögek nagyságának összege 180°.

e) Az $EFGH$ érintőnégyszög E, F, G és H csúcsnál levő szögei legyenek rendre α, β, γ és δ. Mivel a beírt kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja, ezért:

$$EOF\sphericalangle=180^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{és} \quad GOH\sphericalangle=180^\circ-\frac{\gamma+\delta}{2}.$$

Az $EFGH$ négyszög belső szögeinek összege 360°, tehát:

$$EOF\sphericalangle+GOH\sphericalangle=180^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}+180^\circ-\frac{\gamma+\delta}{2}=360^\circ-\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=180^\circ.$$

Az $ABCD$ érintőnégyszögben az AOB és a COD szögek nagyságának összege 180°.

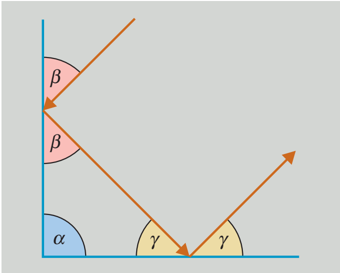
Vegyes feladatok – megoldások

1447 Két 60°-os és két 120°-os szöge van a trapéznak.

1448 A harmadik csúcshoz tartozó magasság és szögfelező 11°-os szöget zár be egymással.

1449 A háromszög harmadik csúcsánál lévő belső szöge 84°.

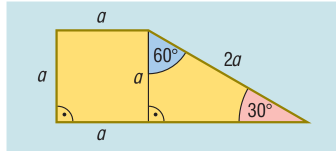
1450 Az ábra jelöléseit használva, tegyük fel, hogy a beeső fénysugár β szöget zár be az első tükörrel, és a visszaverődő fénysugár γ szöget zár be a második tükörrel.



Ha ez a két fénysugár párhuzamos, akkor $180^\circ-2\beta$ és $180^\circ-2\gamma$ 180°-ra egészítik ki egymást:

$$180^\circ-2\beta+180^\circ-2\gamma=180^\circ \quad\Rightarrow\quad \beta+\gamma=90^\circ \quad\Rightarrow\quad \alpha=90^\circ.$$

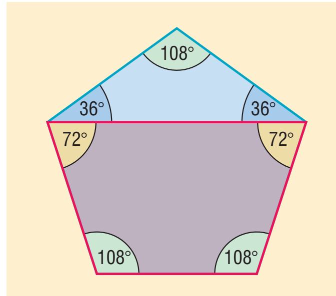
A két síktükör merőleges egymásra.



1451 A derékszögű trapéz felbontható egy a oldalú négyzetre és egy $2a$ oldalú fél szabályos háromszögre.

a) A trapéz negyedik oldala $a + a \cdot \sqrt{3}$.

b) A trapéz szögei: 90°, 90°, 150° és 30°.



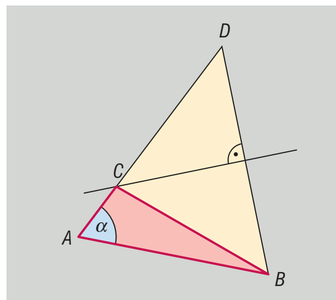
1452 A négyszög két szöge egyenlő a szabályos ötszög egy belső szögével, azaz 108°-osak. A fennmaradó két szög nagyságát megkapjuk úgy, hogy 108°-ból kivonjuk annak az egyenlő szárú háromszögnek az alapon fekvő szögét, amelynek szárszöge 108°. (➡)

A másik két szög nagysága:

$$108° - 36° = 72°.$$

1453 A háromszög harmadik csúcsa egyenlő távol van az alap két végpontjától, így az alap felezőmerőlegesének és a szárnak a metszéspontja szolgáltatja a háromszög harmadik csúcsát.

A szerkesztés akkor végezhető el, ha a szár egyenese áthalad a megadott pontok valamelyikén, illetve nem merőleges az alap egyenesére.



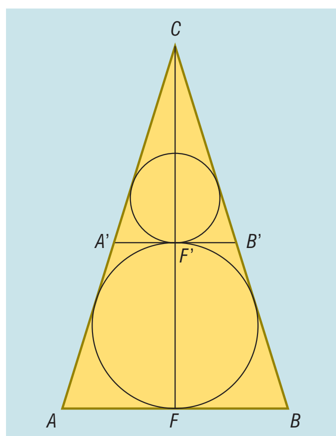
1454 Induljunk ki a kész ábrából. Mérjük fel az ABC háromszög BC oldalának hosszát CA oldal egyenesére C-n túl. Így D ponthoz jutunk. Mivel BCD háromszög egyenlő szárú, a C csúcs rajta van DB szakasz felezőmerőlegesén.

Ez alapján a szerkesztés az ABD háromszög szerkesztésével kezdődik. (Ez végrehajtható, mivel adott két oldalának hossza, valamint a közbezárt szög nagysága.) A háromszög C csúcsát a BD szakasz felezőmerőlegesének és az AD szakasznak a közös pontja szolgáltatja.

1455 *a)* Két szemközti csúcsának távolsága a köré írt kör sugarának kétszerese, azaz 36 cm.

b) Két szemközti oldalának távolsága egy 18 cm oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese:

$$2 \cdot \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{2} = 18 \cdot \sqrt{3}\text{ cm}.$$



1456 Induljunk ki a kész ábrából. Az F és F' pontok az ABC egyenlő szárú háromszög beírt körének és a háromszög alaphoz tartozó magasságának metszéspontjai.

A háromszög beírt körét a szerkesztendő kör az F' pontban érinti.

Ez alapján a szerkesztés lépései a következők:

1. Szerkesszük meg az adott ABC háromszög beírt körét.
2. A beírt körhöz F' pontban szerkesszünk érintőt, ennek a szárakkal való metszéspontjai legyenek A' és B'.
3. Az $A'B'C$ háromszög beírt körét szerkesszük meg.

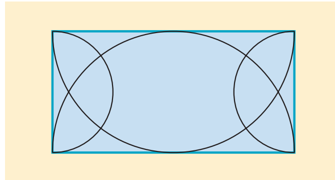
A szerkesztés mindig végrehajtható.

1457 A kör középpontja a szakasztól 5 cm távolságra van.

1458 A C végpontú átmérők másik végpontjait összekötő szakasz áthalad a két kör másik metszéspontján, tehát A és B nem különböző pontok.

1459 A téglalap oldalai fölé rajzolt Thalész-köröknek a téglalap csúcsaitól különböző metszéspontjait kell összeszámlálnunk.

Hat olyan pont van a téglalap belsejében, amelyből valamelyik két oldal derékszög alatt látszik.



1460 A paralelogrammák közül érintőnégyszög csak a rombusz lehet. A rombusz magassága a beírt körének az átmérője, 20 cm.

Mivel a rombusz egyik szöge 45°, az oldala $20 \cdot \sqrt{2}$ cm hosszú.

A rombusz kerülete $80 \cdot \sqrt{2} \approx 113{,}14$ cm.

A rombusz területe $20 \cdot 20 \cdot \sqrt{2} = 400 \cdot \sqrt{2} \approx 565{,}69\ \text{cm}^2$.

1461 Legyen a két hiányzó oldal hossza a és $a + 4$. Az érintőnégyszögek tétel szerint:

$$10 + 12 = a + a + 4 \quad \Rightarrow \quad a = 9.$$

A négyszög két hiányzó oldalának hossza 9 és 13 cm hosszú.

1462 Ha n oldalú a sokszög, akkor

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 20 \quad \Rightarrow \quad n \cdot (n-3) = 40.$$

Figyelembe véve, hogy n pozitív egész és nagyobb, mint $n - 3$, 40 lehetséges szorzatalakjai:

$$40 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 8 \cdot 5.$$

Mivel a két tényező különbségének 3-nak kell lennie, a $8 \cdot 5$ a megfelelő szorzatalak.

A szabályos sokszög 8 oldalú és egy belső szöge 135°.

1463 Ha a kép szélessége $16x$, magassága $9x$, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$(16x)^2 + (9x)^2 = 81^2 \quad \Rightarrow \quad x \approx 4{,}41.$$

A televízió méretei megközelítőleg:

szélesség: $16 \cdot 4{,}41 + 2 \cdot 10 = 90{,}56$ cm, magasság: $9 \cdot 4{,}41 + 10 + 18 = 67{,}69$ cm.

Nem fér be a készülék a szekrényünkbe, mivel a magassága 65 cm-nél nagyobb.

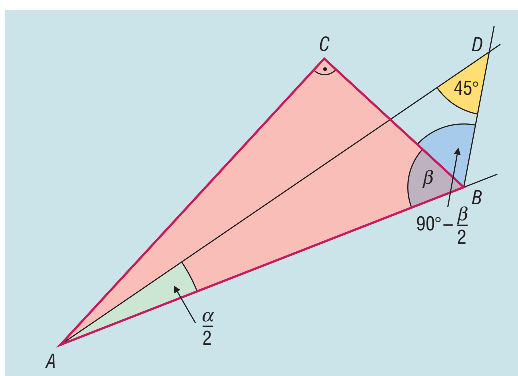
1464 Messe az A csúcsból kiinduló belső szögfelező a B csúcsból kiinduló külső szögfelezőt egy D pontban.

Az ABD háromszög belső szögeinek összege:

$$\frac{\alpha}{2} + \left(\beta + 90° - \frac{\beta}{2}\right) + 45° = 180°,$$

amiből $\alpha + \beta = 90°$.

Tehát az ABC háromszög C csúcsánál lévő belső szöge 90°. Thalész tételének megfordítása alapján a háromszög köré írt körének sugara az AB átfogó hosszának a fele, vagyis 10 cm.



1465 A váza távolságát a terítő széleitől a rombusz beírható körének r sugara adja meg, amelyet a következő összefüggés segítségével határozhatunk meg:

$$t_{\text{rombusz}} = r \cdot \frac{k_{\text{rombusz}}}{2}.$$

A rombusz oldalának hosszát Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$a = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad k_{\text{rombusz}} = 200 \text{ cm}.$$

A rombusz területét az átlók szorzatának fele adja meg:

$$t_{\text{rombusz}} = \frac{60 \cdot 80}{2} = 2400 \text{ cm}^2,$$

$$2400 = r \cdot \frac{200}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 24.$$

A váza a terítő széleitől 24 cm távolságra van.

1466 Számoljuk össze a háromszögeket aszerint, hogy oldalai a szabályos nyolcszög oldalai közül hány oldalt fognak közre.

Ezek szerint a közrefogott oldalak száma lehet:

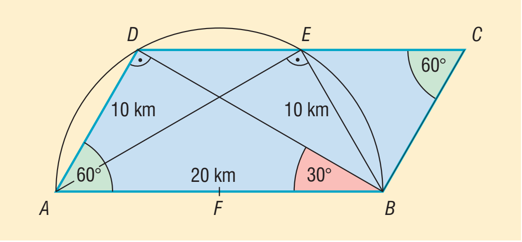
1, 1 és 6; 1, 2 és 5; 1, 3 és 4; 2, 2 és 4; 2, 3 és 3.

Tehát 5 különböző háromszöget alkothatnak a szabályos nyolcszög csúcsai.

Egy háromszög akkor derékszögű, ha egyik oldala a köré írt körének az átmérője. Mivel a szabályos nyolcszög köré írható kör, azok a háromszögek lesznek derékszögűek, amelyeknek egyik oldala a nyolcszög négy oldalát fogja közre.

E szerint két derékszögű háromszög van.

1467 Legyen az $ABCD$ paralelogramma két hosszabbik oldala AB és CD, valamint BAC szög 60°.



Keressük a paralelogramma kerületén azokat a pontokat, amelyekből az AB oldal 90°-os szög alatt látszik.

Az ABD háromszögben az A csúcsánál levő szöge 60° és $AB = 2 \cdot AD \Rightarrow$ fél szabályos háromszög $\Rightarrow$ D-nél derékszög van $\Rightarrow$ D csúcs rajta van AB Thalész körén.

Legyen a DC oldal felezéspontja E.

A BCE háromszög szabályos háromszög ($BC = CE$ és a BCE szög 60°).

Az AEB háromszög is egy fél szabályos háromszög, mivel a B csúcsánál levő szöge $120° - 60° = 60°$ és $AB = 2 \cdot EB \Rightarrow E$ csúcs is rajta van AB Thalész körén.

Mivel egy egyenesnek és egy körnek legfeljebb két metszéspontja lehet, a paralelogramma kerületén csak az E és D pontokból látszik az AB oldal 90°-os szögben.

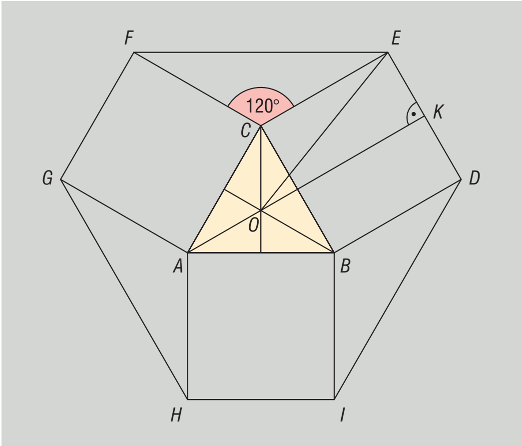
Hasonlóan adódik, hogy DC oldal az AB oldal B végpontjából és F felezéspontjából látszik derékszög alatt.

A kincs a paralelogramma kerületén négy helyen lehet: a két tompaszögű csúcsban, vagy a hosszabbik oldalak felezéspontjaiban.

1468 Legyen az ABC szabályos háromszög beírható körének középpontja O. Ismert, hogy a szabályos háromszög beírt köre sugarának hossza:

$$\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}=\frac{24\cdot\sqrt{3}}{6}=4\cdot\sqrt{3}.$$

Az ábra jelöléseit használva ED oldal K felezéspontjának O-tól vett távolsága $24+4\cdot\sqrt{3}$.



A KOE derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$OE^2=\left(24+4\cdot\sqrt{3}\right)^2+12^2=768+192\cdot\sqrt{3},$$

amiből

$$OE=\sqrt{768+192\cdot\sqrt{3}}\approx 33{,}17 \text{ cm}.$$

Hasonlóan számítható:

$$OD=OF=OG=OH=OI\approx 33{,}17 \text{ cm}.$$

a) Mivel a hatszög csúcsainak O ponttól vett távolsága ugyanakkora, ezért a hatszög köré írható kör.

b) A hatszög köré írható kör sugara megközelítőleg 33,17 cm.

c) A hatszög oldalai közül $DE=FG=HI=24$ cm hosszú.

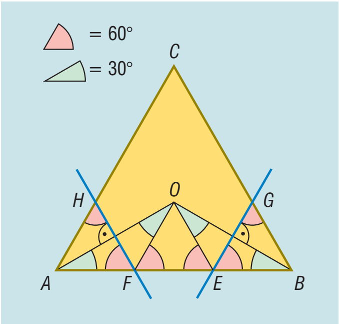
A hatszög FE oldala egy olyan egyenlő szárú háromszögnek az alapja, amelynek a szárszöge 120°, és a szárai 24 cm hosszúak. Tehát az FE oldal egy 24 cm oldalú szabályos háromszög magasságának a kétszerese, vagyis

$$\frac{24\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot 2=24\cdot\sqrt{3}\approx 41{,}57 \text{ cm}.$$

A hatszög EF, GH és ID oldalainak hossza:

$$24\cdot\sqrt{3}\approx 41{,}57 \text{ cm}.$$

1469 Az OA, illetve OB szakaszok felezőmerőlegesei az AB oldalt F és E, a BC oldalt G, az AC oldalt H pontban metszik. Az ábrán látható szabályos, illetve egyenlő szárú háromszögeket figyelembe véve AF, FO, FE, OE, EB, AH és BG szakaszok hossza egyaránt 6 cm.



a) Az F és E pontok három 6 cm-es részre, a H és G pontok egy 6 és egy 12 cm-es részre osztják a háromszög oldalait.

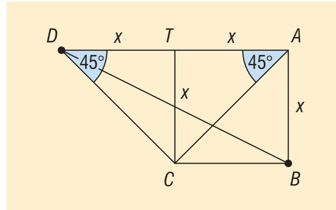
b) Az AFH és BGE háromszögek területe egyenlő:

$$\frac{6^2\cdot\sqrt{3}}{4}=9\cdot\sqrt{3}\approx 15{,}59 \text{ cm}^2.$$

Az $EGCHF$ ötszög területe:

$$\frac{18^2\cdot\sqrt{3}}{4}-2\cdot 9\cdot\sqrt{3}=81\cdot\sqrt{3}-18\cdot\sqrt{3}=63\cdot\sqrt{3}\approx 109{,}12 \text{ cm}^2.$$

1470 A hajó induljon az A pontból, a világítótornyok helyzetét jelezze B és D pont, a hajó két óra múlva legyen a C pontban. A feladat szövege szerint $DB = 50$ km.



Az ACD háromszögben két 45°-os szög van, és $CT = DT = TA = x$.

DBA háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$x^2 + 4x^2 = 50^2 \quad \Rightarrow \quad x = 10 \cdot \sqrt{5} \approx 22{,}36 \text{ km}.$$

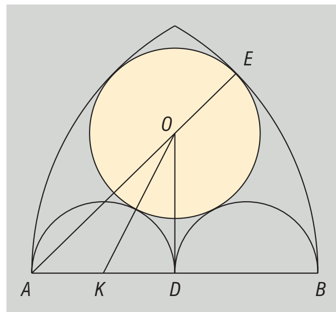
A CTA háromszögből:

$$CA = 10 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{10} \approx 31{,}62 \text{ km}.$$

A hajó átlagsebessége:

$$\frac{10 \cdot \sqrt{10}}{2} = 5 \cdot \sqrt{10} \approx 15{,}81 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

1471 Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen a keresett kör sugarának hossza r, a középpontja O.



Ez a kör belülről érinti az A középpontú 80 cm sugarú kört, ezért

$$AO = 80 - r.$$

A kérdéses kör kívülről érinti a K középpontú 20 cm sugarú félkört, ezért

$$KO = 20 + r.$$

Az AOD derékszögű háromszögben:

$$OD^2 = AO^2 - AD^2 = (80 - r)^2 - 40^2 = 4800 - 160r + r^2.$$

A KOD derékszögű háromszögben:

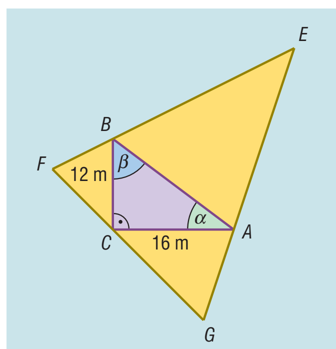
$$OD^2 = KO^2 - KD^2 = (20 + r)^2 - 20^2 = 40r + r^2.$$

Ezek alapján a keresett kör sugara a következő egyenletből számolható:

$$4800 - 160r + r^2 = 40r + r^2 \quad \Rightarrow \quad r = 24.$$

A keresett kör sugara 24 cm.

1472 Az ábrán látható jelöléseket használva legyen a telek az EFG háromszög, a rá épített ház az ABC háromszög.



A feladat feltételei szerint az $FEG\sphericalangle = 45°$, illetve $BC = 12$ m és $AC = 16$ m.

Az ABC háromszög A és B csúcsánál lévő külső szögek nagysága $180° - \alpha$, illetve $180° - \beta$. Ezen külső szögek szögfelezői által bezárt szög:

$$180° - \frac{(180° - \alpha)}{2} - \frac{(180° - \beta)}{2} =$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2} = 45° \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90°.$$

Tehát az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van.

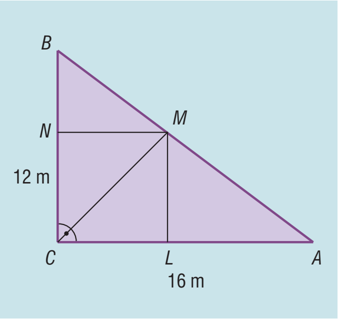
a) A háznak a telek 45°-os szögével szemközti oldala a Pitagorasz-tétel alapján:

$$AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ m}.$$

b) Ha a négyszög alakú szobának minden fala a ház 12 vagy 16 méteres oldalával párhuzamos, és minden oldala egyenlő hosszú, akkor annak az *LMNC* négyzetnek a területét kell meghatároznunk, amelynek *N* és *L* csúcsa az *ABC* háromszög befogóira, *M* csúcs pedig az átfogóra illeszkedik.

Legyen a négyzet oldalának hossza a. Az *ABC* derékszögű háromszög területe előáll a *BCM* és *ACM* háromszögek területének összegeként:

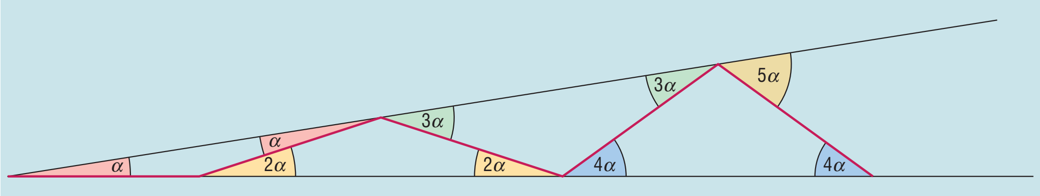
$$\frac{12\cdot 16}{2}=\frac{12a}{2}+\frac{16a}{2} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{48}{7}.$$



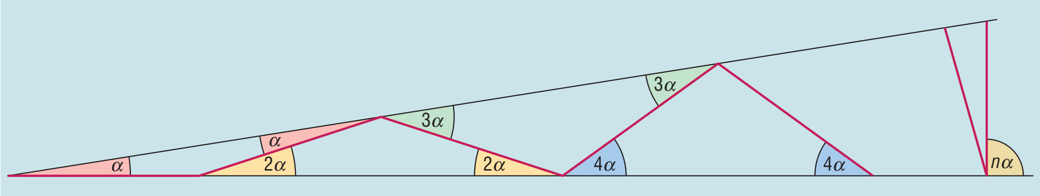
Legfeljebb $\left(\frac{48}{7}\right)^2 \approx 47\ \text{m}^2$ lehet annak a négyszög alakú szobának az alapterülete, amelynek minden fala a ház 12 vagy 16 méteres oldalával párhuzamos.

1473 *a)* A β szög nagysága 36º.

b) Az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei számíthatók: $\alpha, 2\cdot\alpha, 3\cdot\alpha, \ldots$ A kilencedik szakaszt még meg kell tudnunk rajzolni, így $9\cdot\alpha$ legfeljebb 90º lehet. Tehát az α szög nagysága legfeljebb 10º.



c) Az előzőek alapján az n-edik szakasz után már nem tudunk újabb szakaszt berajzolni, ha az ábrán jelölt szög 90º-nál nagyobb. Tehát α szög nagysága legfeljebb $\frac{90^\circ}{n}$.

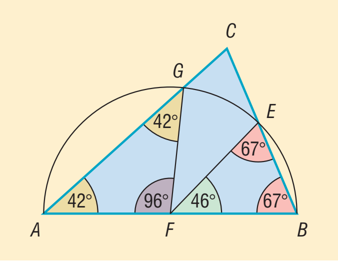


1474 A derékszögű *ABE* és *ABG* háromszögek *E* és *G* csúcsai Thalész tételének megfordítása alapján rajta vannak az *AB* mint átmérő fölé írt körön.

Az *FA*, *FG*, *FE* és *FB* szakaszok a Thalész-kör sugarai, tehát egyenlő hosszúak.

Az *AFG* egyenlő szárú háromszög alapon levő szögei 42º-osak, tehát az $AFG\sphericalangle = 180^\circ - 2\cdot 42^\circ = 96^\circ$.

Az *EBF* egyenlő szárú háromszög alapon levő szögei 67º-osak, tehát az $EFB\sphericalangle = 180^\circ - 2\cdot 67^\circ = 46^\circ$.



Ezek alapján az *EFG* egyenlő szárú háromszög szárszöge $180^\circ - 46^\circ - 96^\circ = 38^\circ$.

Az *EFG* háromszög szögei 38º, 71º és 71º.

9.5. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK, EGYENLETRENDSZEREK

Az egyenlet, azonosság fogalma – megoldások

1475 Állítások:

b) igaz; *d)* igaz; *e)* hamis; *g)* hamis.

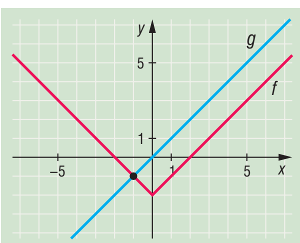
1476 *a)* A konvex négyszögek halmaza.
b) {97}
c) A bolygók halmaza.
d) Nincs megoldás.
e) Nincs megoldás.
f) {másodfokú; abszolút érték}.
g) {Duna; Tisza}

1477 *a)* A … 5-nél kisebb pozitív egész szám.
b) A … prímszám.
c) A … legfeljebb 19.
d) A … minimum 2 és maximum 7.
e) A … nagyobb –3-nál és kisebb 5-nél.
f) A … a legnagyobb egész szám.
g) A … természetes szám.

1478 *a)* $x = 3x - 6 \quad (x = 3)$.
b) $x = 2x + 8 \quad (x = -8)$.
c) $3x + 4 = 25 \quad (x = 7)$.
d) $3x - 2x = x \quad (x \in \mathbb{R})$.
e) $5x - 8 = 3x + 10 \quad (x = 9)$.

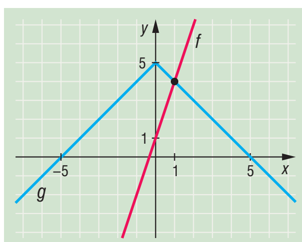
Az egyenlet megoldásának grafikus módszere – megoldások

1479 *a)*



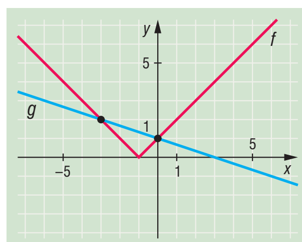
$x = -1$.

b)



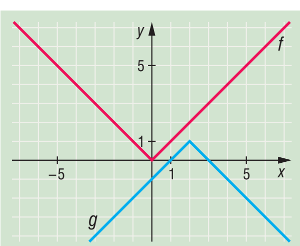
$x = 1$.

c)



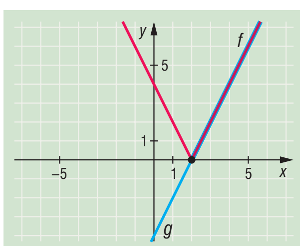
$x_1 = -3,\ x_2 = 0$.

d)



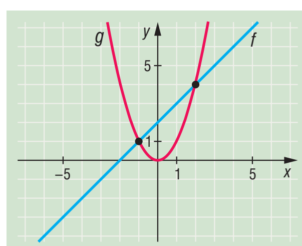
Nincs megoldás.

e)

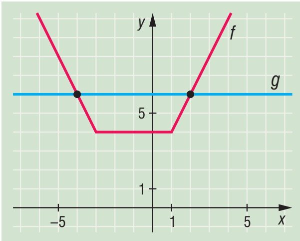


$x \geq 2$.

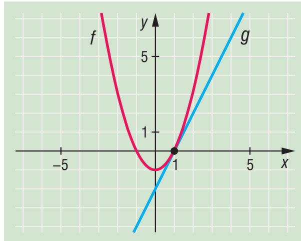
f)



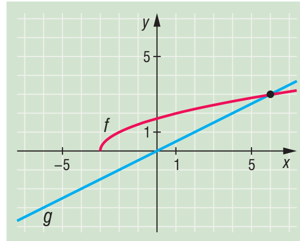
$x_1 = -1,\ x_2 = 2$.

g)


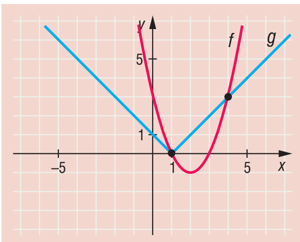
$x_1 = -4,\ x_2 = 2.$

h)


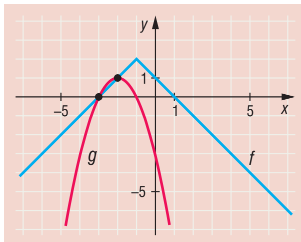
$x = 1.$

i)


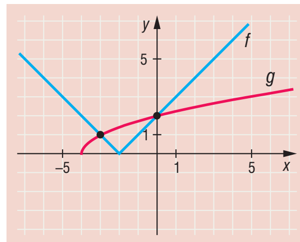
$x = 6.$

1480 *a)*


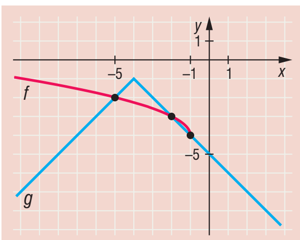
$x_1 = 1,\ x_2 = 4.$

b)


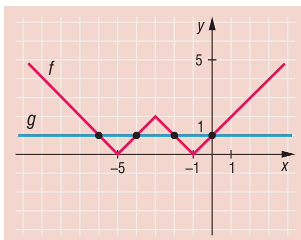
$x_1 = -3,\ x_2 = -2.$

c)


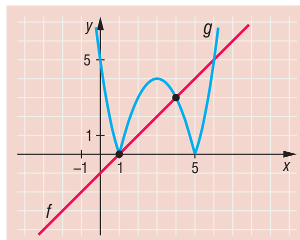
$x_1 = -3,\ x_2 = 0.$

d)


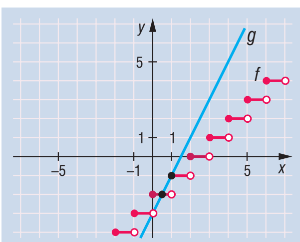
$x_1 = -5,\ x_2 = -2,\ x_3 = -1.$

e)


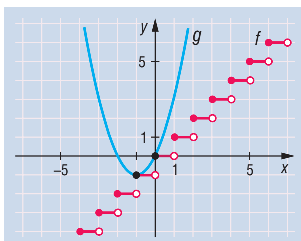
$x_1 = -6,\ x_2 = -4,$
$x_3 = -2,\ x_4 = 0.$

f)


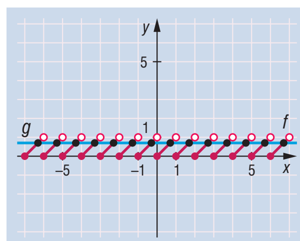
$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6.$

1481 *a)*


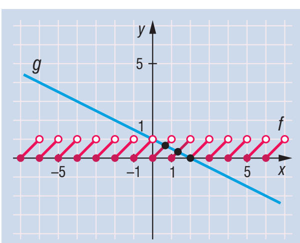
$x_1 = 0{,}5,\ x_2 = 1.$

b)


$x_1 = -1,\ x_2 = 0.$

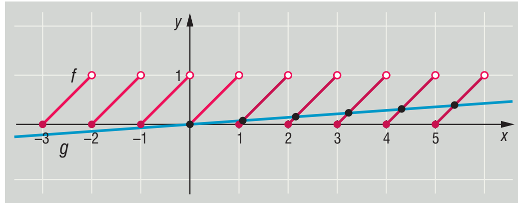
c)


$x = k + 0{,}7;\ k \in \mathbb{Z}.$

d)


$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{4}{3},\ x_3 = 2.$

1482 Megoldás a 0, valamint 1-től 2008-ig minden egész szám és a nála nagyobb egész szám között van egy megoldás. Összesen tehát 2009 megoldás van.



Az egyenlet értelmezési tartományának és értékkészletének vizsgálata – megoldások

1483 *a)* $x = 4$. *b)* $x = \frac{3}{2}$. *c)* $x = \frac{1}{4}$.

d) $x = \frac{5}{8}$. *e)* Nincs megoldás. *f)* $x = \frac{7}{3}$.

g) Nincs megoldás. *h)* Nincs megoldás. *i)* Nincs megoldás.

1484 *a)* Mindkét gyök alatti kifejezés nemnegatív: $x \geq \frac{5}{3}$ és $x \leq 2p$, akkor nem lesz megoldás, ha $2p < \frac{5}{3}$, azaz $p < \frac{5}{6}$.

b) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < -\frac{3}{2}$.

c) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < \frac{9}{4}$.

d) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < -\frac{5}{28}$.

e) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p > 0$.

f) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < \frac{5}{6}$.

1485 *a)* Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. Nincs megoldás.

b) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = 2$, $y = 1$.

c) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = -6$, $y = -24$.

d) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{13}{3}$.

e) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = -\frac{17}{21}$, $y = -\frac{5}{7}$.

f) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = 3$, $y = -8$.

1486 *a)* Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindhárom tagja 0. $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

b) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindhárom tagja 0. $x = \frac{1}{3}$, $y = 1$, $z = 9$.

c) Alakítsunk teljes négyzetté: $(x + y)^2 + (x + 1)^2 = 0$. Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = -1$, $y = 1$.

d) Teljes négyzeteket kialakítva: $(x - 2z)^2 + (2y - z)^2 + (y - 1)^2 = 0$. Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindhárom tagja 0. $x = 4$, $y = 1$, $z = 2$.

Egyenlet megoldása szorzattá alakítással – megoldások

1487 *a)* $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$.

b) $x_1 = 3$, $x_2 = 11$, $x_3 = 2$, $x_4 = -8$.

c) A nevező nem lehet 0. A megoldások: $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = 7$, $x_3 = -\frac{1}{3}$.

d) A nevező nem lehet 0. A megoldások: $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{5}{3}$.

e) Kiemelés után: $(x+1)\cdot(5x-5) = 0$, a megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

f) Kiemelés után: $(x-4)\cdot(5x-4) = 0$, a megoldások: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4}{5}$.

g) Kiemelés után: $(2x+1)\cdot 2x = 0$, a megoldások: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$.

h) Kiemelés után: $(5x-3)\cdot(6x+6) = 0$, a megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{5}$.

i) Kiemelés után: $(8x+5)\cdot(4x-10) = 0$, a megoldások: $x_1 = -\frac{5}{8}$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

j) Kiemelés után: $(4-2x)\cdot 6 = 0$, a megoldás: $x = 2$.

1488 Az öt egymást követő szám szorzata:

$$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4) = 0.$$

Ha $x = 0$, a számok 0; 1; 2; 3; 4; összegük 10.
Ha $x+1 = 0$, a számok –1; 0; 1; 2; 3; összegük 5.
Ha $x+2 = 0$, a számok –2; –1; 0; 1; 2; összegük 0.
Ha $x+3 = 0$, a számok –3; –2; –1; 0; 1; összegük –5.
Ha $x+4 = 0$, a számok –4; –3; –2; –1; 0; összegük –10.

1489 *a)* Átrendezés és kiemelés után: $(3x-1)\cdot(6-x) = 0$, a megoldások: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 6$.

b) Két tényező kiemelése után: $x\cdot(x+1)\cdot(-x-6) = 0$, a megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -6$.

c) Az $x-1$ kiemelhető: $(x-1)\cdot(3x+7+2x+6-6x-6) = 0$, a megoldások: $x_1 = 1$, $x_2 = 7$.

1490 Legyenek a téglalap oldalai a és b egész számok, $a < b$.
A terület és kerület közötti összefüggés alapján:

a) $a\cdot b = 2\cdot(2a+2b)$ egyenlet írható fel.

Rendezzük a bal oldalra és alakítsunk ki szorzatot:

$$ab - 4a - 4b = 0,$$
$$a\cdot(b-4) - 4\cdot(b-4) - 16 = 0,$$
$$(a-4)\cdot(b-4) = 16.$$

Mivel a és b pozitív egészek, elég megkeresnünk a 16 osztópárjait: $16 = 1\cdot 16 = 2\cdot 8 = 4\cdot 4$, ezekből adódnak a megoldások.

Mivel $a < b$, a lehetséges esetek:

$$a_1 = 5,\ b_1 = 20; \quad a_2 = 6,\ b_2 = 12; \quad a_3 = 8,\ b_3 = 8.$$

b) $a \cdot b = 3 \cdot (2a + 2b)$ egyenletből rendezve és szorzattá alakítva:

$$ab - 6a - 6b = 0,$$
$$a \cdot (b - 6) - 6 \cdot (b - 6) - 36 = 0,$$
$$(a - 6) \cdot (b - 6) = 36.$$

A 36 osztópárjaiból kapjuk a megoldásokat: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$.

Mivel $a < b$, a lehetséges esetek:

$a_1 = 7,\ b_1 = 42$; $a_2 = 8,\ b_2 = 24$; $a_3 = 9,\ b_3 = 18$; $a_4 = 10,\ b_4 = 15$; $a_5 = 12,\ b_5 = 12$.

1491 *a)* Két lépésben alakítsunk szorzattá:

$$2x \cdot (2y + 3) - 3 \cdot (2y + 3) + 9 = 10,$$
$$(2y + 3) \cdot (2x - 3) = 1.$$

Az 1 kétféleképpen írható fel egész számok szorzataként: $1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$.

Ha $\left.\begin{aligned} 2y + 3 &= 1 \\ 2x - 3 &= 1 \end{aligned}\right\}$, akkor $x_1 = 2,\ y_1 = -1$; ha $\left.\begin{aligned} 2y + 3 &= -1 \\ 2x - 3 &= -1 \end{aligned}\right\}$, akkor $x_2 = 1,\ y_2 = -2$.

b) Két lépésben alakítsunk szorzattá:

$$3x \cdot (2y + 5) - 2 \cdot (2y + 5) + 10 = 21,$$
$$(3x - 2) \cdot (2y + 5) = 11.$$

A 11-et szorzattá alakíthatjuk: $11 = 1 \cdot 11 = 11 \cdot 1 = (-1) \cdot (-11) = (-11) \cdot (-1)$.

Ha $\left.\begin{aligned} 3x - 2 &= 1 \\ 2y + 5 &= 11 \end{aligned}\right\}$, akkor $x_1 = 1,\ y_1 = 3$.

Ha $\left.\begin{aligned} 3x - 2 &= 11 \\ 2y + 5 &= 1 \end{aligned}\right\}$, akkor $x = \frac{13}{3}$, $y = -2$, nem megoldás, mert x nem egész szám.

Ha $\left.\begin{aligned} 3x - 2 &= -1 \\ 2y + 5 &= -11 \end{aligned}\right\}$, akkor $x = \frac{1}{3}$, $y = -8$, nem megoldás, mert x nem egész szám.

Ha $\left.\begin{aligned} 3x - 2 &= -11 \\ 2y + 5 &= -1 \end{aligned}\right\}$, akkor $x_2 = -3,\ y_2 = -3$.

Az első és negyedik esetből kapott számpárok a megoldások.

Egyenletek megoldása lebontogatással, mérlegelvvel – megoldások

1492 *a)* $x = 4$; *b)* $x = -2{,}4$; *c)* $x = 0$; *d)* $x = 1$;
e) $x = 0$; *f)* $x = 2$; *g)* $x = 3$; *h)* $x = -3$;
i) $x = 1$; *j)* $x = 23$; *k)* $x = \frac{47}{11}$; *l)* $x = \frac{21}{68}$;
m) $x = -4$; *n)* $x = -3$; *o)* $x = -1$; *p)* $x = 6$;
q) $x \in \mathbb{R},\ x \neq 2$; *r)* $x = -5$.

1493 Ha a harmadik napra 4000 Ft maradt, ez az első napról maradt pénz kétharmad része. Az első nap után 6000 Ft maradt, ez a teljes összeg kétharmad része, tehát 9000 Ft-tal indult el a kirándulásra. Az első napon elköltött 3000 Ft-ot, a másodikon 2000 Ft-ot, a harmadikra 4000 Ft maradt.

1494 Ha egy füzet ára x forint, akkor 8 füzet $8x$ forintba kerül, ennyiért most 13 füzetet vehetek, tehát egy füzetért $\frac{8x}{13} = 0,6154x$ forintot kell fizetnem, ami $1 - 0,6154 = 0,3846$ rész csökkenést, vagyis 38,46%-os leértékelést jelent.

1495 *a)* A közös nevező 100, beszorzás után $x = -\frac{13}{6}$.

b) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \neq -2$, a közös nevező $2 \cdot (x + 2)$, ezzel beszorozva kapjuk: $x = -1$.

c) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \neq 4$ és $x \neq -3$, a közös nevező $(x - 4) \cdot (x + 3)$, ezzel beszorozva adódik: $x = 1$.

1496 *a)* A törtek miatt az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq 3$.

Mivel $6 - 2x = 2 \cdot (3 - x)$, ezzel szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$1 - 2x - 2 \cdot (3x - 4) = 4 \cdot (6 - 2x),$$
$$1 - 2x - 6x + 8 = 24 - 8x,$$
$$9 = 24.$$

Az egyenletnek nincs megoldása.

b) A törtek miatt az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq -2$ és $x \neq 5$.

Mivel $(x + 2) \cdot (x - 5) = x^2 - 3x - 10$, ez a szorzat legyen a közös nevező, amivel beszorozva:

$$5 \cdot (x - 5) + 4 \cdot (x + 2) = 28,$$
$$7x = 35,$$
$$x = 5.$$

Ami az értelmezés miatt nem megoldás.

c) Érdemes a nevezőket szorzattá alakítani:

$$2 - 2x^2 = 2 \cdot (1 - x^2) = 2 \cdot (1 - x) \cdot (1 + x);$$
$$x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1);$$
$$2 - 2x = 2 \cdot (1 - x).$$

Egyrészt kiolvashatjuk, hogy az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq 1$ és $x \neq -1$.

Másrészt látható, hogy a $2 \cdot (1 - x) \cdot (1 + x)$ szorzatot érdemes közös nevezőnek választani. Ezzel beszorozva:

$$x + 1 - (-2) \cdot (2x - 1) + 6 \cdot 2 \cdot (1 - x) + 1 + x = 0,$$
$$x + 1 + 4x - 2 + 12 - 12x + 1 + x = 0,$$
$$x = 2.$$

Ellenőrzés után kiderül, hogy a megoldás valóban $x = 2$.

d) Alakítsuk szorzattá a nevezőket:

$$2x^2 - 4x + 2 = 2 \cdot (x - 1)^2;$$
$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2;$$
$$3 - 3x = 3 \cdot (1 - x).$$

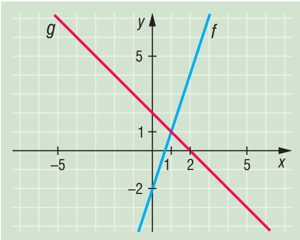
Az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq 1$. Közös nevezőnek a $6 \cdot (x - 1)^2$ szorzatot érdemes választani, ezzel beszorozva az egyenlet mindkét oldalát:

$$3 \cdot (2x - 7) + 6 \cdot (x + 1) - (-2) \cdot (x - 1) = 2 \cdot 6 \cdot (x - 1),$$
$$6x - 21 + 6x + 6 + 2x - 2 = 12x - 12,$$
$$x = 2,5.$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy az egyenlet megoldása $x = 2,5$.

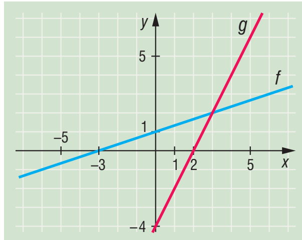
Egyenlőtlenségek – megoldások

1497 *a)*



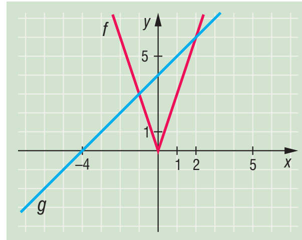
$x \le 1.$

b)



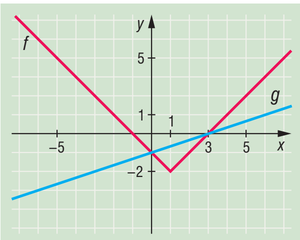
$x \le 3.$

c)



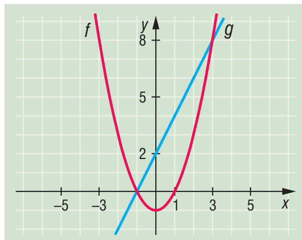
$-1 < x < 2.$

d)



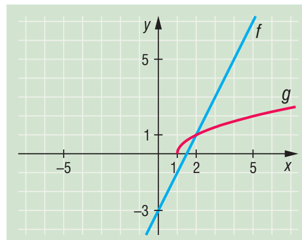
$x \le 0$ vagy $x \ge 3.$

e)



$x < -1$ vagy $x > 3.$

f)



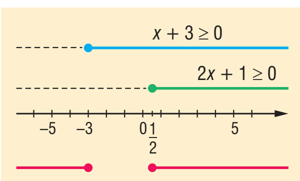
$x \ge 2.$

1498 *a)* $x \ge \frac{1}{3}$; *b)* $x < -\frac{7}{5}$; *c)* $x > \frac{11}{6}$;

d) $x \in \mathbb{R}$; *e)* $x < -2{,}5$; *f)* $x \le 4{,}5$;

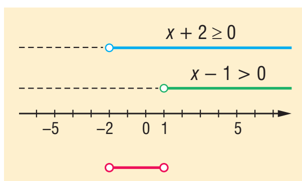
g) Nincs megoldás; *h)* $x \le -\frac{15}{2}$.

1499 *a)*



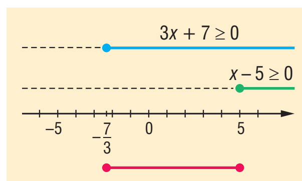
$x \le -3$ vagy $x \ge \frac{1}{2}$;

b)



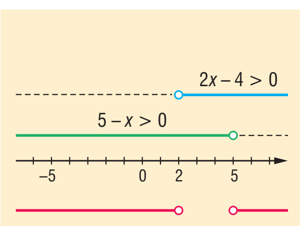
$-2 < x < 1$;

c)



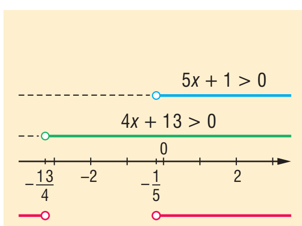
$-\frac{7}{3} \le x \le 5$;

d)



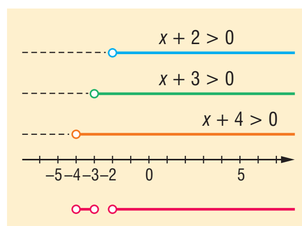
$x < 2$ vagy $x > 5$;

e)



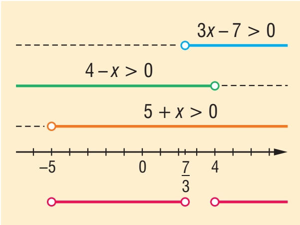
$x < -\frac{13}{4}$ vagy $x > -\frac{1}{5}$;

f)



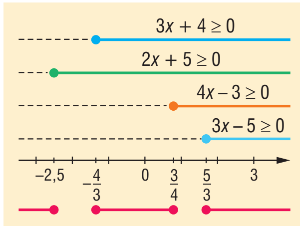
$-4 < x < -3$ vagy $-2 < x$;

g)



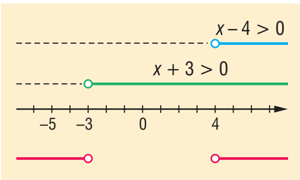
$-5 < x < \frac{7}{3}$ vagy $4 < x$;

h)



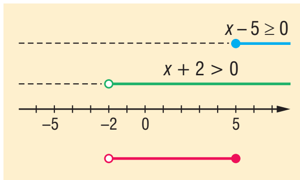
$x \le -\frac{5}{2}$ vagy $-\frac{4}{3} \le x \le \frac{3}{4}$ vagy $\frac{5}{3} \le x$.

1500 *a)*



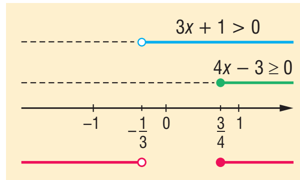
$x < -3$ vagy $4 < x$;

b)



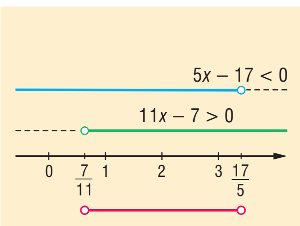
$-2 < x \le 5$;

c)



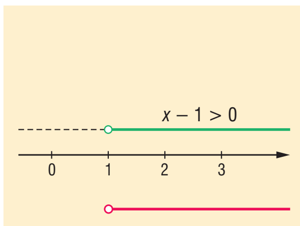
$x < -\frac{1}{3}$ vagy $\frac{3}{4} \le x$;

d)



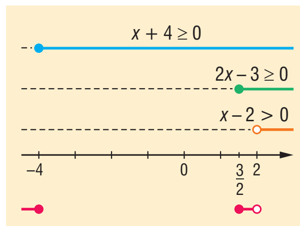
$\frac{7}{11} < x < \frac{17}{5}$;

e)



$x > 1$;

f)



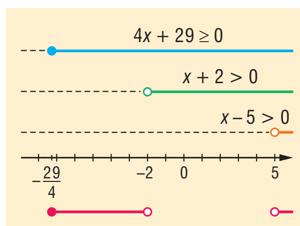
$x \le -4$ vagy $\frac{3}{2} \le x < 2$.

1501 *a)* A jobb oldalra rendezve:

$$0 \le \frac{4x + 29}{(x+2)\cdot(x-5)}.$$

Ennek megoldása:

$$-\frac{29}{4} \le x < -2 \quad \text{vagy} \quad 5 < x.$$

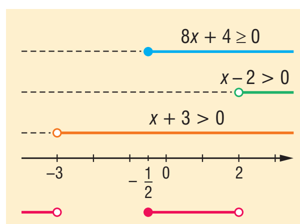


b) A bal oldalra rendezve:

$$\frac{8x + 4}{(x-2)\cdot(x+3)} \le 0.$$

A megoldás:

$$x < -3 \quad \text{vagy} \quad -\frac{1}{2} \le x < 2.$$

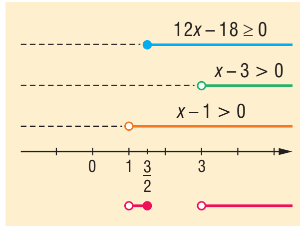


c) A bal oldalra rendezve:

$$\frac{12x-18}{(x-3)\cdot(x-1)}\ge 0.$$

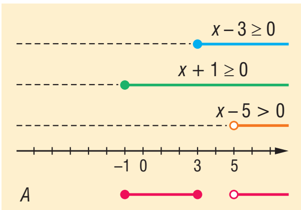
A megoldás:

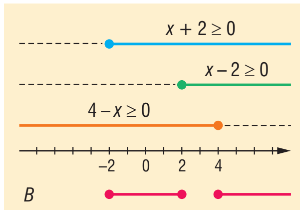
$$1<x\le\frac{3}{2}\quad\text{vagy}\quad 3<x.$$

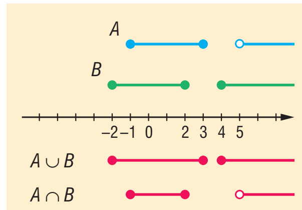


1502 A két halmaz: $A=[-1;3]\cup\,]5;\infty[$ és $B=[-2;2]\cup[4;\infty[$.

a) $A\cup B=[-2;3]\cup[4;\infty[$, $A\cap B=[-1;2]\cup\,]5;\infty[$.







b) Mivel az 5 nincs benne az A halmazban, ezért nem igaz, hogy $P\subset A$.

c) Azokat a számjegyeket keressük, amelyek nem elemei B-nek. A keresett halmaz: $\{3\}$.

1503 Írjunk y helyére $(1-x)$-et, és alakítsuk a bizonyítandó állítást:

$$\frac{1+x}{x}\cdot\frac{2-x}{1-x}\ge 9.$$

Mivel $x>0$ és $y=1-x>0$ átszorzás után:

$$(1+x)\cdot(2-x)\ge 9x\cdot(1-x),$$
$$2-x+2x-x^2\ge 9x-9x^2,$$
$$8x^2-8x+2\ge 0,$$
$$4x^2-4x+1\ge 0,$$
$$(2x-1)^2\ge 0.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az állítás minden valós x-re igaz.

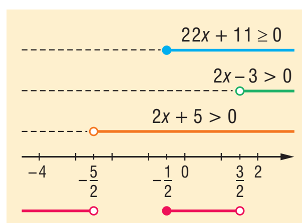
Egyenlőség $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ esetén áll fenn.

1504 A bal oldalra rendezve:

$$\frac{22x+11}{(2x-3)\cdot(2x+5)}\le 0.$$

Megoldása:

$$H=\left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\cup\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[.$$



a) A H halmaznak sem legnagyobb, sem legkisebb eleme nincs, mert a $\frac{3}{2}$ nem eleme a halmaznak.

b) A természetes számok közül csak a 0 és az 1 eleme a H halmaznak.

c) Egy lehetséges megoldás:

$$A=\left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\quad\text{és}\quad B=\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[.$$

Abszolút értéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek – megoldások

1505 *a)* $x = 4,\ x = -4$; *b)* $x = 4,\ x = -12$; *c)* $x \le -4$ vagy $x \ge 4$; *d)* $x \le -12$ vagy $x \ge 4$;

e) $x = \frac{7}{2},\ x = -\frac{7}{2}$; *f)* $x = 2,\ x = -8$; *g)* $-\frac{13}{2} \le x \le \frac{7}{2}$; *h)* $x \in \mathbb{R}$.

1506 *a)* $x = \frac{2}{3}$, ha $x \le 0$ nincs megoldás. *b)* $x = -3$, ha $x \ge 0$ nincs megoldás.

c) $x = 3{,}5,\ x = -\frac{7}{4}$. *d)* $x = \frac{10}{7},\ x = -\frac{30}{19}$.

e) $x = -\frac{2}{3}$, ha $x \ge 3$ nincs megoldás. *f)* Nincs megoldás.

g) $x = 2,\ x = 4$. *h)* $x = \frac{3}{5}$, ha $x > \frac{7}{2}$ nincs megoldás.

1507 *a)* Ha $x \ge 0$, nincs megoldás, ha $x < 0$, a megoldás $x < -\frac{1}{2}$.

b) Ha $x \ge 0$, akkor $x > -\frac{1}{3}$ adódik, ami azt jelenti, hogy $x \ge 0$ a megoldás.

Ha $x < 0$, akkor $x > -\frac{1}{7}$ adódik, tehát a megoldás: $-\frac{1}{7} < x < 0$.

A végeredmény: $-\frac{1}{7} < x$.

c) Ha $x \ge 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $x < 0$, akkor $x < -\frac{4}{7}$ adódik.

A megoldás: $x < -\frac{4}{7}$.

d) Ha $x \ge -3$, akkor $x \le 4$ adódik, azaz $-3 \le x \le 4$ a megoldás.

Ha $x < -3$, akkor $x \ge -\frac{16}{3}$ adódik, azaz $-\frac{16}{3} \le x < -3$ a megoldás.

A végeredmény: $-\frac{16}{3} \le x \le 4$.

e) Ha $x \ge 1$, akkor $x \ge 11$ a megoldás.
Ha $x < 1$, akkor $x \le -1$ adódik, azaz $x \le -1$ a megoldás.
A végeredmény: $x \le -1$ vagy $x \ge 11$.

f) Ha $x \ge \frac{4}{5}$, akkor $x < \frac{5}{2}$ adódik, azaz $\frac{4}{5} \le x < \frac{5}{2}$ a megoldás.

Ha $x < \frac{4}{5}$, akkor $\frac{3}{8} < x$ adódik, azaz $\frac{3}{8} < x < \frac{4}{5}$ a megoldás.

A végeredmény: $\frac{3}{8} < x < \frac{5}{2}$.

1508 *a)* Ha $x \geq 2$, akkor $x = 5$.

Ha $-3 \leq x < 2$, akkor nincs megoldás.

Ha $x \leq -3$, akkor $x = -6$.

b) Ha $x \geq 1$, akkor minden szám megoldás.

Ha $-4 \leq x < 1$, akkor nincs megoldás.

Ha $x < -4$, akkor nincs megoldás.

A végeredmény: $x \geq 1$.

c) Ha $|x+2| - 3 = 2$, akkor $x = 3$ vagy $x = -7$.

Ha $|x+2| - 3 = -2$, akkor $x = -1$ vagy $x = -3$.

d) Ha $|x-4| - 4 = 4$, akkor $x = 12$ vagy $x = -4$.

Ha $|x-4| - 4 = -4$, akkor $x = 4$.

1509 *a)* Ha $x \geq 0$, akkor $x \geq 1$ adódik.

Ha $-5 \leq x < 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $x < -5$, akkor $x \leq -6$.

A végeredmény: $x \leq -6$ vagy $x \geq 1$.

b) Ha $x \geq 3$, akkor $-5 \leq 5$ adódik, azaz minden szám megoldás.

Ha $-2 \leq x < 3$, akkor $-2 \leq x$.

Ha $x < -2$, akkor $5 \leq 5$, azaz minden szám megoldás.

Végeredmény: $x \in \mathbb{R}$.

c) Ha $x \leq \frac{3}{2}$, akkor $x \geq 2$ adódik, ami megoldás.

Ha $-6 \leq x < \frac{3}{2}$, akkor $x \leq 0$-t kapunk, azaz $-6 \leq x \leq 0$.

Ha $x < -6$, akkor $x \leq -4$ adódik, azaz $x < -6$.

A végeredmény: $x \leq 0$ vagy $x \geq 2$.

d) Ha $x \geq \frac{5}{4}$, akkor $x \leq \frac{11}{9}$, mivel $\frac{11}{9} = \frac{44}{36} < \frac{45}{36} = \frac{5}{4}$ nincs megoldás.

Ha $\frac{4}{5} \leq x < \frac{5}{4}$, akkor $x \leq 1$, azaz $\frac{4}{5} \leq x \leq 1$.

Ha $x < \frac{4}{5}$, akkor $x \geq \frac{7}{9}$, mivel $\frac{7}{9} = \frac{35}{45} < \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$, a megoldás: $\frac{7}{9} \leq x < \frac{4}{5}$.

A végeredmény: $\frac{7}{9} \leq x \leq 1$.

1510 *a)* Ha $x \geq 2$, akkor $x \geq -\frac{13}{3}$, tehát $x \geq 2$.

Ha $-4 \leq x < 2$, akkor $x \geq -\frac{9}{5}$, tehát $-\frac{9}{5} \leq x < 2$.

Ha $x < -4$, akkor $x \leq -15$, tehát $x \leq -15$.

A végeredmény: $x \leq -15$ vagy $-\frac{9}{5} \leq x$.

b) Ha $x \geq 4$, akkor $x \leq 2{,}5$ adódik, azaz nincs megoldás.
Ha $1 \leq x < 4$, akkor $x \leq 3$, tehát $1 \leq x \leq 3$.
Ha $-2 \leq x < 1$, akkor $x \leq 7$, a megoldás $-2 \leq x < 1$.
Ha $x < -2$, akkor $-6{,}5 \leq x$, a megoldás $-6{,}5 \leq x < -2$.
A feladat megoldása: $-6{,}5 \leq x \leq 3$.

Paraméteres egyenletek – megoldások

1511 *a)* $x = 3$, ha $a \neq 0$. Ha $a = 0$, minden valós szám megoldás.

b) $x = \dfrac{3-b}{b}$, ha $b \neq 0$. Ha $b = 0$, nincs megoldás.

c) $x = \dfrac{4}{2-c}$, ha $c \neq 2$. Ha $c = 2$, nincs megoldás.

d) $x = \dfrac{7a-4}{a+4}$, ha $a \neq -4$. Ha $a = -4$, nincs megoldás.

e) $x = 1$, ha $d \neq -1$. Ha $d = -1$, minden valós szám megoldás.

f) $x = a + 3$, ha $a \neq 3$. Ha $a = 3$, minden valós szám megoldás.

g) $x = b - 2$, ha $b \neq 2$. Ha $b = 2$, minden valós szám megoldás.

h) $x = c - 4$, ha $c \neq -4$. Ha $c = -4$, minden valós szám megoldás.

i) $x = \dfrac{d+1}{d}$, ha $d \neq 0$ és $d \neq -1$. Ha $d = 0$, nincs megoldás. Ha $d = -1$, minden valós szám megoldás.

1512 *a)* $x = a - 3$, ha $a \neq 3$. Ha $a = 3$, minden valós szám megoldás.

b) $x = 2a + 4$, ha $a \neq 2$. Ha $a = 2$, minden valós szám megoldás.

c) $x = \dfrac{a+2}{3}$, ha $a \neq 2$. Ha $a = 2$, minden valós szám megoldás.

d) $x = \dfrac{3a-12}{4a-3}$, ha $a \neq \dfrac{3}{4}$. Ha $a = \dfrac{3}{4}$, akkor nincs megoldás.

1513 A találkozásig eltelt idő legyen t, a két futó együtt megteszi a 200 métert.
A következő egyenlet írható fel:

$$v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = 200.$$

A megoldás:

$$t = \frac{200}{v_1 + v_2}.$$

1514 Legyen x az idő, ahány óra múlva utoléri a gyorsabb kerékpáros a társát. A távolságot írjuk át km-be.
A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$38x = 32x + \frac{s}{1000}.$$

A megoldás:

$$x = \frac{s}{6000}\ \text{óra} = \frac{s}{100}\ \text{perc},$$

ennyi idő múlva éri utol az egyik kerékpáros a másikat.

1515 *a)* A zárójelek felbontása után rendezve, elvégezve a szorzattá alakításokat:

$$(a+b)\cdot(a-b)\cdot x=(a+b)^2,$$

ahonnan:

$$x=\frac{a+b}{a-b},\quad \text{ha } |a|\neq|b|.$$

Ha $a=b$, nincs megoldás, csak ha $a=b=0$, ekkor minden valós szám megoldás.

Ha $a=-b$, minden valós szám megoldás.

b) A zárójelek felbontása után rendezve, elvégezve a szorzattá alakításokat:

$$(2a-3b)\cdot x=(2a-3b)^2,$$

amiből:

$$x=2a-3b,\quad \text{ha } 2a\neq 3b \Rightarrow a\neq\frac{3}{2}\cdot b.$$

Ha $a=\frac{3}{2}\cdot b$, minden valós szám megoldás.

c) Rendezve az egyenletet:

$$x\cdot a\cdot(7-a)=4\cdot(7-a),$$

amiből:

$$x=\frac{4}{a},\quad \text{ha } a\neq 0 \text{ és } a\neq 7.$$

Ha $a=7$, minden valós szám megoldás.

Ha $a=0$, nincs megoldás.

d) A törtek miatt $x\neq 3a$ és $x\neq b$.

Beszorzás után:

$$ab-ax=6a-2x,$$
$$(a-2)\cdot x=a\cdot(b-6).$$

I. Ha $a=2$ és $b=6$, minden valós szám megoldás, kivéve a 6.

Ha $a=2$ és $b\neq 6$, nincs megoldás.

II. Ha $a\neq 2$, leosztás után: $x=\dfrac{a\cdot(b-6)}{a-2}$.

Az értelmezés miatt $x\neq 3a$ és $x\neq b$, a fenti tört csak akkor megoldás, ha $\dfrac{a\cdot(b-6)}{a-2}\neq 3a$ és $\dfrac{a\cdot(b-6)}{a-2}\neq b$, vagyis $a\neq 0$ és $b\neq 3a$.

Ha $a=0$, nincs megoldás.

Ha $b=3a$, nincs megoldás.

e) A törtek miatt az egyenletnek csak $x\neq a$ és $x\neq -a$ esetén van értelme.

Legyen a közös nevező az $(x+a)\cdot(x-a)=x^2-a^2$ szorzat, ezzel beszorozva az egyenlet mindkét oldalát:

$$x\cdot(x-a)-(a+x)^2=-1\cdot(x-a+4a^2).$$

Rendezés és kiemelés után:

$$x\cdot(1-3a)=a\cdot(1-3a).$$

Ha $a=\frac{1}{3}$, mindkét oldal 0, tehát minden valós szám megoldás, kivéve: $x=\frac{1}{3}$ és $x=-\frac{1}{3}$.

Ha $a\neq\frac{1}{3}$, leosztás után $x=a$, ami az értelmezés miatt nem megoldás.

f) A törtek miatt $x \neq 2$ és $x \neq 3$. Beszorozva:

$$(x-a)\cdot(x-3)+(x-b)\cdot(x-2)=2\cdot(x-2)\cdot(x-3),$$
$$x\cdot(5-a-b)=12-3a-2b.$$

I. Ha $a+b=5$, és $a=2$, $b=3$, akkor $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, $x \neq 3$.
Ha $a+b=5$, és $a \neq 2$, akkor nincs megoldás.

II. Ha $a+b \neq 5$, akkor $x=\dfrac{12-3a-2b}{5-a-b}$.
A fenti tört csak akkor megoldás, ha $\dfrac{12-3a-2b}{5-a-b} \neq 2$ és $\dfrac{12-3a-2b}{5-a-b} \neq 3$, vagyis $a \neq 2$ és $b \neq 3$.
Ha $a+b \neq 5$ és $a=2$ vagy $b=3$, nincs megoldás.

g) A törtek miatt $a \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq -1$. Mivel $(x+1)\cdot(x+2)=x^2+3x+2$, közös nevezőnek érdemes az $(a-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$ szorzatot választani, ezzel beszorozva:

$$(2a-5)\cdot(x+1)-3\cdot(a-1)\cdot(x+2)=(3x+4)\cdot(a-1),$$
$$x\cdot(4a-1)=5-8a.$$

Ha $a=\dfrac{1}{4}$, nincs megoldás.

Ha $a \neq \dfrac{1}{4}$, $x=\dfrac{5-8a}{4a-1}$.

Az értelmezés miatt: $\dfrac{5-8a}{4a-1} \neq -2$ és $\dfrac{5-8a}{4a-1} \neq -1$. Az első minden a-ra igaz, a másodikból $a \neq 1$, amit az értelmezésnél már kizártunk.

Tehát a tört minden $a \neq \dfrac{1}{4}$ és $a \neq 1$ esetén megoldás.

1516 Legyen x százalékos az oldat. Az oldott anyag mennyiségére felírható egyenlet:

$$a\cdot\frac{p}{100}+b\cdot\frac{q}{100}=(a+b)\cdot\frac{x}{100}.$$

Mivel $a+b \neq 0$, beszorzás után rendezve:

$$x=\frac{ap+bq}{a+b}.$$

1517 A törtek miatt $a \neq 0$. Beszorozva és rendezve:

$$x\cdot(2-a)=3a+7.$$

Ha $a=2$, nincs megoldás.

Ha $a \neq 2$, $x=\dfrac{3a+7}{2-a}$.

Keressük azon a paraméter értékeket, amelyekre:

$$\frac{3a+7}{2-a}<-5,$$
$$\frac{3a+7}{2-a}+\frac{5\cdot(2-a)}{2-a}<0,$$
$$\frac{17-2a}{2-a}<0.$$

A számláló és nevező akkor lesz különböző előjelű, ha $2<a<8{,}5$, ilyen paraméter értékek esetén lesz a megoldás (-5)-nél kisebb.

1518 A törtnek akkor van értelme, ha $x \neq m$. Rendezzünk egy oldalra, és hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{mx - 1 - x + m}{x - m} > 0,$$

$$\frac{m \cdot (x+1) - 1 \cdot (x+1)}{x - m} > 0,$$

$$\frac{(m-1) \cdot (x+1)}{x - m} > 0.$$

Vizsgáljuk a tényezők előjelét.

Ha $m - 1 > 0$, azaz $m > 1$, akkor a másik két tényező azonos előjelű kell hogy legyen, mivel a hányadosnak pozitívnak kell lennie. Ez akkor teljesül, ha $x < -1$ és $m < x$.

Ha $m = 1$, nincs megoldás.

Ha $m - 1 < 0$, azaz $m < 1$, akkor a másik két tényező ellentétes előjelű kell hogy legyen, hiszen $m - 1$ negatív. Attól függően, hogy m (–1)-nél nagyobb vagy kisebb adódnak a megoldások:

ha $x + 1 > 0$ és $x - m < 0$, $x > -1$ és $x < m$, $-1 < x < m$;

ha $x + 1 < 0$ és $x - m > 0$, $x < -1$ és $x > m$, $m < x < -1$.

Kérdés lehet még, hogy x-re kaphatunk-e (–1)-et. Nem, mivel $(x + 1)$ értéke 0 lenne, de az nem megoldása az egyenlőtlenségnek (ezzel az $m \neq -1$ esetet nem kell vizsgálni, mert $x \neq m$).

Egyenletekkel megoldható feladatok – megoldások

1519 A háromszög szögei: 70º, 90º, 20º.

1520 A kétjegyű szám: 84.

1521 A keresett kétjegyű szám: 52.

1522 A keresett szám a 165.

1523 Az eredeti ár 18 000 Ft volt.

1524 A táska ára eredetileg 4 000 Ft volt.

1525 *a)* 3 kg 40%-os és 1 kg 80%-os oldatot. *b)* $\frac{4}{3}$ kg *c)* 12 kg *d)* 62,2%

1526 *a)* 15 km, $6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ *b)* $8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ *c)* 15 órakor, 48 km

1527 *a)* 62,5 másodperc múlva találkoznak.

b) A lekörözésig 1000 másodperc = 16 perc 40 másodperc telik el.

1528 437,5 méter előny esetén érnek egyszerre célba.

1529 Az anya 48 éves, fia 19 éves.

1530 *a)* 19 óra 48 perckor *b)* 20 óra 36 perckor *c)* 22 óra 30 perckor

1531 *a)* Együtt $\frac{48}{7} = 6\frac{6}{7} \approx 6{,}86$ óra alatt vágják fel a tűzifát.

b) Ebben az esetben $\frac{52}{7} = 7\frac{4}{7} \approx 7{,}43$ óra alatt végeznek a munkával.

c) A munka, a kezdéstől, 9 órát vesz igénybe.

1532 Oldjuk meg a feladatot következtetéssel:

9 kályhában 1 m³ fa $\frac{5{,}5}{12}$ nap alatt ég el.

1 kályhában 1 m³ fa $\frac{5{,}5}{12}\cdot 9$ nap alatt ég el.

12 kályhában 1 m³ fa $\frac{\frac{5{,}5}{12}\cdot 9}{12}=\frac{5{,}5\cdot 9}{12^2}$ nap alatt ég el.

12 kályhában 9 m³ fa $\frac{\frac{5{,}5}{12}\cdot 9}{12}\cdot 9=\frac{5{,}5\cdot 9}{12^2}\cdot 9=\frac{5{,}5\cdot 9^2}{12^2}\approx 3{,}09$ nap alatt ég el.

1533 **I. megoldás.** Ha a nevezett versenyzők száma n, akkor eredetileg $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ mérkőzés lett volna. $n-1$ versenyzővel $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ mérkőzésre kerül sor, 2-t lejátszott a kieső versenyző, 15 mérkőzés pedig elmaradt. Így a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}=\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}+2+15.$$

Megoldás: $n=18$.

II. megoldás. A kiesett versenyző 2-t játszott és 15 mérkőzése elmaradt, összesen 17 mérkőzést játszott volna, ami azt jelenti, hogy 18 versenyző indult eredetileg a versenyen.

1534 Legyen a termelés kezdetben t; ekkor az első üzem termelése $0{,}3\cdot t$, a másodiké $0{,}7\cdot t$.
A növekedés után a termelés:

$$0{,}3\cdot t\cdot 1{,}21+0{,}7\cdot t\cdot 1{,}2=1{,}203\cdot t.$$

Tehát 20,3%-kal növekedett a termelés.

1535 *a)* Az osztályban 20 lány van.

b) Legyen az osztálylétszám x. A következő egyenlet írható fel:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{2}+12=x,$$
$$x=36.$$

Az osztályban 36 tanuló van, tehát a fiúk száma 16.

1536 *a)* Legyen a híd hossza x, a következő egyenlet írható fel:

$$x=\left(\frac{x}{3}-20\right)+\left(\frac{x}{4}-5\right)+\left(\frac{x}{2}-30\right).$$

Ebből a híd hossza 660 méter.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

b) A kamion annyi idő alatt ér át, amíg megtesz 678 métert:

$$t=\frac{0{,}678\text{ km}}{30\,\frac{\text{km}}{\text{óra}}}=0{,}0226\text{ óra}=1{,}356\text{ perc}.$$

1537 *a)* A 25 000 Ft-os szemüvegkeret ára $25\,000 \cdot 0{,}83 = 20\,750$ Ft lesz.

$\dfrac{80\,750}{85\,000} = 0{,}95$, tehát 5%-kal lesz olcsóbb a szemüveg.

b) A teljes árat $85\,000 \cdot 0{,}17 = 14\,450$ Ft-tal szeretnénk csökkenteni.

A kedvezmény mértéke $\dfrac{14\,450}{25\,000} = 0{,}578$, tehát ezt egy 58 éves ember teheti meg.

c) Legyen a keresett keret ára x. A következő egyenlet írható fel:

$$60\,000 + x \cdot 0{,}83 = (60\,000 + x) \cdot 0{,}9,$$
$$x = 85\,714.$$

Tehát egy 85 714 Ft-os keret esetén csökkenthetné az árat 10%-kal a 17 éves vásárló.

1538 A sebességek: gyalog $6\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, kerékpárral $18\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Jelölje a találkozásig eltelt időt, órában mérve, x.

a) A megfelelő egyenlet:

$$6x + 18x = 6,$$
$$x = \frac{1}{4}.$$

Tehát 6 óra 15 perckor találkoztak.

b) Az egyenlet:

$$6x + 18 \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right) = 6,$$
$$x = \frac{3}{8}.$$

Tehát 7 óra után 22,5 perccel találkoztak.

c) Tímea $5 + 5 + 5 = 15$ perccel indul később. A megfelelő egyenlet:

$$6x + 18 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) = 6,$$
$$x = \frac{7}{16}.$$

Tehát 8 óra után 26,25 perccel találkoztak.

1539 *a)* Ha a feltöltés ideje x, akkor $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{6} = 1$, megoldása: $x = 2$. Tehát a nyitás előtt 2 órával, azaz legkésőbb 6 órakor meg kell nyitni a csapokat.

b) A második csap 2 órán keresztül tölti a medencét, az együttes munka idejét jelölje x. Egyenletünk: $\dfrac{2}{6} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{6} = 1$, megoldása: $x = \dfrac{4}{3}$. Tehát a második csap bekapcsolása után 3 óra 20 perccel telik meg a medence.

c) A lefolyó fél óráig engedte ki a vizet, a megfelelő egyenlet: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{6} - \dfrac{0{,}5}{4} = 1$. A megoldás $x = \dfrac{9}{4}$, tehát ebben az esetben a csapoknak 2 óra 15 percre van szükségük a feltöltéshez.

1540 A tízes számrendszerbeli alakokat átírva:

$$1111a + 111b + 11c + d = 2010.$$

Az a értéke csak 1 lehet, ebből

$$111b + 11c + d = 899.$$

Mivel $0 \le 11c + d \le 108$, csak $b = 8$ lehet: $11c + d = 11$. Ennek egyetlen megoldása van: $c = 1$ és $d = 0$.

A keresett négyjegyű szám: 1810.

1541 Legyen a bankban elhelyezett két összeg x és $6 \cdot 10^6 - x$.

A kisebb fiú pénze 7 évi kamatozás után: $x \cdot 1{,}12^7$.

A másik fiú pénze: $(6 \cdot 10^6 - x) \cdot 1{,}12^5$.

A feltétel szerint:

$$x \cdot 1{,}12^7 = (6 \cdot 10^6 - x) \cdot 1{,}12^5,$$
$$1{,}12^2 \cdot x = 6 \cdot 10^6 - x,$$
$$x = 2\,661\,462.$$

Tehát a 11 éves fiú nevére 2 661 462 Ft, a 13 éves fiú nevére 3 338 538 Ft összegeket kell a bankban elhelyezni.

1542 *a)* Az előadott dalok számára vonatkozóan felírható egyenlet: $\frac{x}{4} + \frac{x}{10} + \frac{3x}{5} + 1 = x.$ Megoldása: $x = 20$, tehát összesen 20 dalt adtak elő.

b) Szilvia énekelt $5 + 12 + 1 = 18$ dal előadásában, ez $\frac{18}{20} = 0{,}9$, azaz 90%.

c) Szilvia gitározott $2 + 12 = 14$ dal előadásában, Tünde gitározott $5 + 12 = 17$ esetben. A kapott összeget $\frac{14}{17}$ arányban kell elosztani. $62\,000 : 31 = 2\,000$.

Tehát Szilvia 28 000, Tünde pedig 34 000 Ft-ot kap.

1543 Mivel a születési év számjegyeinek összege nem lehet több 28-nál, a születési év első két jegye lehet 19. Az utolsó két jegy legyen x, y. Ha a születési év $\overline{19xy}$, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\overline{19xy} + 1 + 9 + x + y = 2010,$$
$$1900 + 10x + y + 10 + x + y = 2010,$$
$$11x + 2y = 100,$$
$$11x = 2 \cdot (50 - y).$$

Az egyenlőség úgy teljesülhet, ha x páros számjegy, de nem lehet kisebb 8-nál, mert akkor y kétjegyű lenne. Így $x = 8$, $y = 6$, tehát a születési év 1986. A feladat kérdésére a válasz a mindenkori évszámtól függ.

1544 Az út 11 órát vett igénybe. Legyen x annak az útszakasznak a hossza, amit oda és vissza is vízszintes úton tesznek meg, y annak az útnak a hossza, amelyet oda úton felfelé, vissza pedig lejtőn lefelé haladva tesznek meg, z pedig az a szakasz, amelyet oda úton lefelé, vissza pedig felfelé tesznek meg. A következő egyenlet írható fel:

$$\left(\frac{x}{20} + \frac{y}{15} + \frac{z}{30}\right) + \left(\frac{x}{20} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15}\right) = 11.$$

Beszorzás és összevonás után:

$$3x + 4y + 2z + 3x + 2y + 4z = 660,$$
$$6 \cdot (x + y + z) = 660,$$
$$x + y + z = 110.$$

A kapott összeg az egyik irányban megtett út. Tehát ezen a napon a kerékpárosok összesen 220 km-t tettek meg.

1545 Azért fogynak el 41 nappal előbb a történetek, mert bizonyos napokon 3-mal, máskor 4-gyel több került elolvasásra a tervezettnél. Legyen x azoknak a napoknak a száma, amikor 4 történetet olvasott el, y pedig azoké, amikor 5-öt. A következő egyenlet írható fel:

$$3x + 4y = 41.$$

Ennek az egyenletnek keressük a pozitív egész megoldásait.

Mivel x és y pozitív számok, nem lehetnek tetszőlegesen nagyok:

$$0 < x \le 18 \quad \text{és} \quad 0 < y \le 10.$$

Az egyenletből:

$$x = \frac{41 - 4y}{3}.$$

A 41-et 3-mal osztva 2-t kapunk maradékul, tehát $4y$-nak 3-mal osztva szintén 2-t kell adnia maradékként. $4y$-ra a lehetséges számok:

$$4, \quad 8, \quad 12, \quad 16, \quad 20, \quad 24, \quad 28, \quad 32, \quad 36, \quad 40.$$

Ezekből a számokból a 8, a 20 és a 32 adnak 3-mal osztva 2-t maradékul. Így a megoldások:

$$4y = 8 \;\Rightarrow\; y_1 = 2, \; x_1 = 11;$$
$$4y = 20 \;\Rightarrow\; y_2 = 5, \; x_2 = 7;$$
$$4y = 32 \;\Rightarrow\; y_3 = 8, \; x_3 = 3.$$

Tehát a fenti három esetben fordulhatott elő, hogy 4, illetve 5 történetet olvasott el az illető.

1546 Az 5 t teherbírású teherautó x, a másik y menetet hajtson végre:

$$5x + 7y = 99,$$
$$x = \frac{99 - 7y}{5}, \quad x \in \mathbb{Z}^+.$$

Tehát első lépésben keressük azokat a 7-tel osztható, 99-nél nem nagyobb pozitív egész számokat, amelyek majd $7y$ értékét adják.

A 99-et kizárjuk, mert nem osztható 7-tel, és ekkor x amúgy is 0 lenne. $7y$ értékei lehetnek:

$$7, \quad 14, \quad 21, \quad 28, \quad 35, \quad 42, \quad 49, \quad 56, \quad 63, \quad 70, \quad 77, \quad 84, \quad 91, \quad 98.$$

Mivel $(99 - 7y)$-nál a 99-et 5-tel osztva 4 maradékot kapunk, így a fenti számok közül olyat kell kiválasztani, amelyik 5-tel osztva szintén 4 maradékot ad. (Mert így a $99 - 7y$ nem ad 5-tel osztva maradékot.)

Ezek a „nyertes számok” $7y$ értékére a 14, a 49 és a 84. A megoldások:

$$7y = 14 \;\Rightarrow\; y_1 = 2, \quad x_1 = 17;$$
$$7y = 49 \;\Rightarrow\; y_2 = 7, \quad x_2 = 10;$$
$$7y = 84 \;\Rightarrow\; y_3 = 12, \; x_3 = 3.$$

Az egyes teherautók által megtett menetek száma a fenti három eset valamelyike kell, hogy legyen.

Egyenletrendszerek – megoldások

1547 *a)* $x = 3,\ y = 1$; *b)* $x = 0,\ y = -1$; *c)* $x = -2,\ y = 1$; *d)* $x = 2,\ y = 1$.

1548 *a)* $x = 1,\ y = -2$; *b)* $x = 1,\ y = 7$; *c)* $x = \frac{1}{3},\ y = 5$; *d)* $x = -3,\ y = \frac{5}{2}$;
e) $x = 9,\ y = -6$; *f)* nincs megoldás; *g)* $x = 9,\ y = 1$; *h)* $x = 20,\ y = 30$.

1549 *a)* $x = -2,\ y = 1$; *b)* $x = 4,\ y = 2$; *c)* $x = -1,\ y = 3$; *d)* $x = 4,\ y = 5$;
e) $x = 8,\ y = \frac{7}{5}$; *f)* $x = \frac{2}{3},\ y = -6$; *g)* végtelen sok megoldás van; *h)* nincs megoldás.

1550 Legyen a muskátli palánták ára x, a petúnia palántáké y.

$$\left.\begin{aligned} 12x + 25y &= 9840 \\ 21x + 14y &= 10\,080 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldások: $x = 320$ és $y = 240$.
Tehát a muskátli palánták 320 Ft-ba, a petúnia palánták 240 Ft-ba kerülnek.
Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

1551 Legyen a motorcsónak sebessége állóvízben x, a folyó sebessége y.
A folyón felfelé megtett út 9 órát vett igénybe:

$$9 \cdot (x - y) = 72.$$

Lefelé a folyón 6 óra volt az út:

$$6 \cdot (x + y) = 72.$$

Az $\left.\begin{aligned} x - y &= 8 \\ x + y &= 12 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai: $x = 10,\ y = 2$.
Tehát a motorcsónak állóvízben $10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességre képes, a folyó pedig $2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel folyik.

1552 Az első sóoldat legyen x százalékos, a második y százalékos.
A feltételek szerint:

$$4 \cdot \frac{x}{100} + 12 \cdot \frac{y}{100} = 16 \cdot \frac{50}{100}, \quad \text{illetve} \quad 12 \cdot \frac{x}{100} + 4 \cdot \frac{y}{100} = 16 \cdot \frac{30}{100}.$$

Ha 100-zal beszorzunk a $\left.\begin{aligned} 4x + 12y &= 800 \\ 12x + 4y &= 480 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk.
Osszunk 4-gyel, majd megoldva: $x = 20,\ y = 60$.
Tehát az első sóoldat 20%-os, a második 60%-os.

1553 Legyen a szám első jegye x, a második y $(y < x)$.
A feladatban megadott, a maradékos osztásra vonatkozó feltételek szerint:

$$\frac{10x + y - 6}{x + y} = 7 \quad \text{és} \quad \frac{10x + y - 3}{x - y} = 16.$$

Beszorozva és rendezve az $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ -6x + 17y &= 3 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk.
Megoldva: $x = 8,\ y = 3$.
A keresett kétjegyű szám a 83, a megoldás helyességéről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.

1554 Mivel a kacsák és nyulak számának aránya $3:2$, legyen a kacsák száma $3x$, a nyulak száma $2x$, a tyúkok száma pedig y.

A fejek száma:

$$y + 2x + 3x = 38.$$

A lábak száma:

$$2y + 4 \cdot 2x + 2 \cdot 3x = 92.$$

Az $\left.\begin{aligned} y + 5x &= 38 \\ 2y + 14x &= 92 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk.

A második egyenlet 2-vel való osztása után az egyenlő együtthatók módszerével megoldva:

$$x = 4 \quad \text{és} \quad y = 18.$$

Tehát a baromfiudvarban 18 tyúk, 12 kacsa és 8 nyúl van.

Az ellenőrzés azt mutatja, hogy a megoldás helyes.

1555 Az első gép x, a második y, a harmadik z nap alatt végezné el a munkát.

A feltételek alapján a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{aligned} \frac{7,2}{x} + \frac{7,2}{y} &= 1 \\ \frac{9}{x} + \frac{9}{z} &= 1 \\ \frac{12}{y} + \frac{12}{z} &= 1 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{számlálókkal osztva}} \left.\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{36} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{9} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{12} \end{aligned}\right\}.$$

Az első két egyenlet különbségéből: $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{36}$, majd ehhez hozzáadva a harmadik egyenletet: $\frac{2}{y} = \frac{4}{36}$, amiből $y = 18$.

Visszahelyettesítve: $z = 36$, $x = 12$.

Tehát külön-külön a gépek 12 nap, 18 nap, illetve 36 nap alatt végeznék el a munkát.

1556 Legyen a háromjegyű szám: $\overline{xyz}$.

A feltételek szerint:

$$x + y + z = 20. \quad (1)$$

Tudjuk továbbá, hogy

$$\begin{aligned} \overline{xyz} - 16 &= 2 \cdot \overline{zyx}, \\ 100x + 10y + z - 16 &= 200z + 20y + 2x, \\ 98x - 16 &= 199z + 10y. \end{aligned}$$

(1)-ből $y = 20 - x - z$ behelyettesíthető:

$$\begin{aligned} 98x - 16 &= 199z + 200 - 10x - 10z \\ 108x - 216 &= 189z, \\ 108 \cdot (x - 2) &= 189z, \end{aligned}$$

Mivel a bal oldal osztható 4-gyel, ezért a jobb oldal is. A z lehetséges értékei 0, 4, 8.

Ha $z = 0$, (2)-ből $x = 2$; (1)-ből $y = 18$, nem megoldás.

Ha $z = 4$, (2)-ből $x = 9$; (1)-ből $y = 7$.

Ha $z = 8$, (2)-ből $x = 16$, nem megoldás.

A feladat feltételeinek a 974 felel meg, az ellenőrzés igazolja, hogy valóban jó a megoldás.

1557 *a)* A grafikus megoldásra gondolva rendezzük az egyenleteket:

$$y = 2x - 3, \quad \text{illetve} \quad y = -\frac{1}{b} \cdot x + \frac{b-2}{b}.$$

Akkor nincs megoldás, ha a két egyenes párhuzamos, ami teljesül, ha $-\frac{1}{b} = 2$ és $\frac{b-2}{b} \neq -3$.

Az elsőből $b = -\frac{1}{2}$, a másodikból $b \neq \frac{1}{2}$.

Tehát ha $b = -\frac{1}{2}$, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek.

b) A behelyettesítő módszerrel megoldva az egyenletrendszert:

$$x = \frac{4b-2}{2b+1}, \quad y = \frac{2b-7}{2b+1}.$$

$x = \frac{4b-2}{2b+1} > 0$, ha $b < -\frac{1}{2}$ vagy $b > \frac{1}{2}$.

$y = \frac{2b-7}{2b+1} > 0$, ha $b < -\frac{1}{2}$ vagy $b > \frac{7}{2}$.

Mindkét megoldás pozitív, ha $b < -\frac{1}{2}$ vagy $b > \frac{7}{2}$.

1558 Az első egyenletből

$$x = 12 - 3y. \quad (1)$$

Ha $x \geq 0$, akkor $y \leq 4$ kell lennie, tehát

$$0 \leq y \leq 4. \quad (2)$$

(1)-et a második egyenletbe helyettesítve: $252 - y = m$.

A (2) feltétel alapján $248 < m < 252$, tehát m lehetséges egész értékei: 248, 249, 250, 251, 252.

1559 Alakítsuk szorzattá a bal oldali kifejezést:

$$(x - 2y) \cdot (x + 2y) = 116.$$

Akkor van megoldás, ha $x - 2y$ és $x + 2y$ a 116 osztópárjai.

A 116 prímtényezős felbontása: $116 = 2^2 \cdot 29$. Két eset lehet: $4 \cdot 29$ vagy $2 \cdot 58$.

A $4 \cdot 29$-es felbontás esetében:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ x + 2y &= 29 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x = 33;\ \text{mivel } x \notin \mathbb{Z}^+, \text{ ezért ez nem lehet megoldás.}$$

A $2 \cdot 58$-es felbontás esetében:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ x + 2y &= 58 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x = 60, \text{ amiből } x = 30 \text{ és } y = 14;\ x, y \in \mathbb{Z}^+, \text{ ezért ez megoldás.}$$

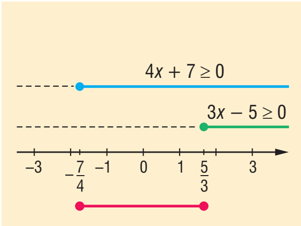
Az ellenőrzésből kiderül, hogy ez a számpár valóban megoldás.

Vegyes feladatok – megoldások

1560 *a)* $x = 6$; *b)* $x = \frac{40}{141}$; *c)* $x = \frac{1}{2}$; *d)* $x = 0$.

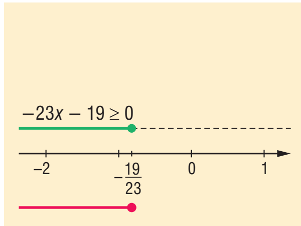
1561 *a)* $x_1 = -\frac{13}{6}$, $x_2 = \frac{13}{2}$; *b)* $x_1 = \frac{17}{5}$, $x_2 = 7$; *c)* $x = \frac{45}{17}$, ha $x < -3$, nincs megoldás.

1562 *a)*



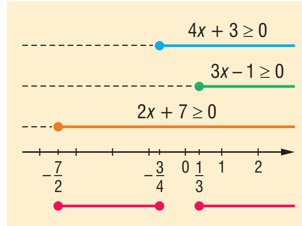
$-\frac{7}{4} \le x \le \frac{5}{3}$;

b)



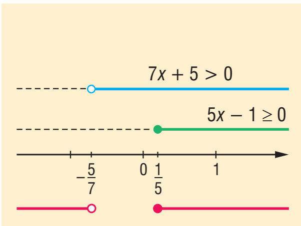
$x \le -\frac{19}{23}$;

c)



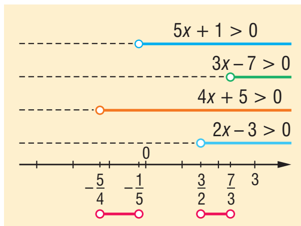
$-\frac{7}{2} \le x \le -\frac{3}{4}$ vagy $\frac{1}{3} \le x$;

d)



$x < -\frac{5}{7}$ vagy $\frac{1}{5} \le x$;

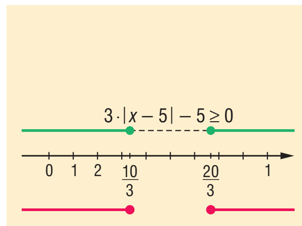
e)



$-\frac{5}{4} < x < -\frac{1}{5}$

vagy $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$;

f)



$x \le \frac{10}{3}$ vagy $x \ge \frac{20}{3}$.

1563 *a)* $x = \frac{5p-3}{p-4}$, ha $p \ne 4$. Ha $p = 4$, nincs megoldás.

b) $x = 2$, ha $p \ne \frac{1}{3}$. Ha $p = \frac{1}{3}$, minden valós szám megoldás.

c) $x = p - 5$, ha $p \ne -5$. Ha $p = -5$, minden valós szám megoldás.

1564 *a)* Az egyik kerékpáros 8 óra, illetve 6 óra alatt teszi meg az utat.

b) A falu és a város távolsága 144 km.

1565 A tengervízből 2 literre van szükség.

1566 Ha a harmadik jegy x, akkor a következő egyenletet kell megoldani:

$$1900 + 10x + x + 1 - 1761 = 190 + x.$$

A születési év 1956, 2010-ben 54 éves.

1567 Ha a legidősebb testvér mai életkora x, akkor az egyenletünk:

$$x + (x-3) + \left(\frac{x-1}{2} + 1\right) = 35.$$

Az egyenlet megoldásából a testvérek életkora 15, 12 és 8 év.

1568 Ha az utasok száma $5x$ és $4x$, akkor az alábbi egyenletet kell megoldani:

$$\frac{5x-10}{4x+10} = \frac{5}{7}.$$

A kirándulók száma összesen 72.

1569 Ha a fiúk száma x, a lányoké pedig y, akkor az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=9 \\ 4000x+5000y&=39000 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldása után: Juliska mamának 3 lány és 6 fiú unokája van.

1570 Legyen eredetileg x darab piros és y darab kék golyó a dobozban. Egyenletrendszerünk:

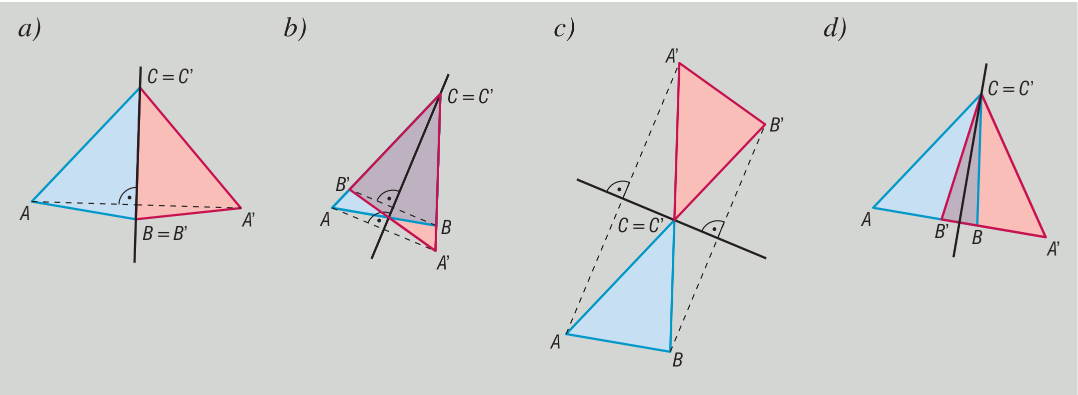
$$\left.\begin{aligned} x+y&=200 \\ y+27&=x+53 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldásából azt kapjuk, hogy 87 piros és 113 kék golyó volt eredetileg a dobozban.

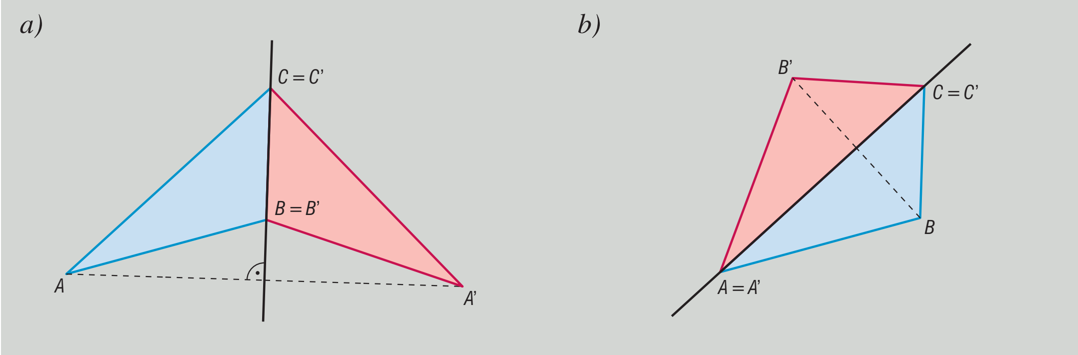
9.6. EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK

Tengelyes tükrözés – megoldások

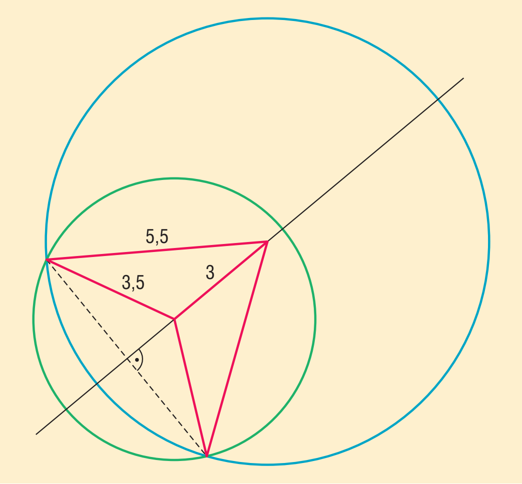
1571



1572 Az *a)* feladatban konkáv, a *b)* feladatban konvex deltoidot kapunk eredményül.



1573 A megoldás az ábrán látható. (➡)



1574 *a)* $A'(3; -1)$, $B'(-2; -5)$, $C'(-4; 2)$.
b) $A'(-3; 1)$, $B'(2; 5)$, $C'(4; -2)$.

1575 Az x tengelyre vonatkozó tükrözés után $A'(x; -y)$, majd az y tengelyre vonatkozó tükrözés után $A''(-x; -y)$. A két tengelyre vonatkozó tükrözés az origóra vonatkozó középpontos tükrözéssel helyettesíthető.

Általában is érvényes, hogy két merőleges egyenesre vonatkozó tükrözés egymás utáni elvégzése, a tengelyek metszéspontjára vonatkozó középpontos tükrözéssel egyenértékű transzformáció.

1576 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz.
e) Hamis. *f)* Igaz. *g)* Igaz. *h)* Igaz.
i) Hamis. *j)* Hamis. *k)* Igaz. *l)* Hamis.
m) Hamis. *n)* Hamis. *o)* Igaz. *p)* Hamis.
q) Hamis. *r)* Hamis.

1577 A szerkesztés lépései:

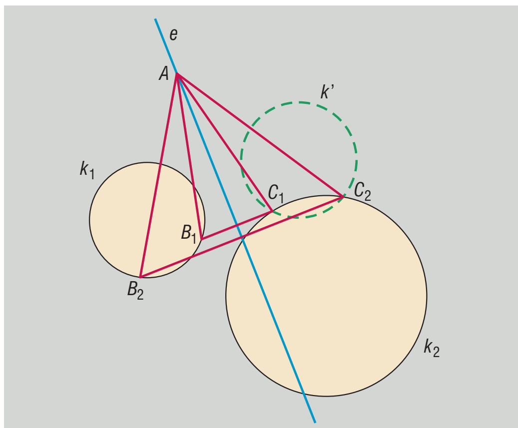
1. Tükrözzük az f egyenest az e egyenesre, a tükörképet jelöljük f_1-gyel, így kapjuk az f_1 és a g egyenesek B metszéspontját.
2. A B pontot tükrözzük az e egyenesre, így kapjuk az A pontot, amely f-re illeszkedik.
3. A szabályos ABC háromszög C csúcsát az A középpontú, B ponton átmenő kör metszi ki az e egyenesből (C_1; C_2).

A szerkeszthetőség feltétele: a g egyenes metssze az f egyenes e egyenesre vonatkozó f_1 tükörképét.

A megoldások száma attól függ, hogy van-e az f_1 és a g egyeneseknek metszéspontja. Ha a két egyenes nem metszi egymást, akkor nincs megoldása a feladatnak. Ha az f_1 és g egyenesek egybeesnek, akkor a B pont helyzete nem egyértelmű, így végtelen sok megoldása van a feladatnak. Ha az f_1 és a g egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor a feladatnak két megoldása van, amelyek az AB egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel egymásba vihetők.

1578 A szerkesztés lépései:

1. A k_1 kört tükrözzük az e egyenesre; a tükörkép k'. A k' és a k_2 körök metszéspontjai az ábrán C_1 és C_2.
2. A C_1 és C_2 pontok tükrözése az e egyenesre; a tükörképek B_1 és B_2, melyek illeszkednek k_1-re.
3. Az e egyenesen egy tetszőleges A pont szerkesztése.



A szerkesztés eredménye az AB_1C_1 és az AB_2C_2 háromszög.

A szerkeszthetőség feltétele: a k' és a k_2 körök metszéspontjainak vagy érintési pontjának létezése. A megoldások száma lehet 0, ha a két körnek nincs közös pontja, minden más esetben a feladatnak végtelen sok megoldása van, mivel az A pont az e egyenes tetszőleges pontja lehet.

1579 A szerkesztés lépései:

1. A szimmetriatengelyre illeszkedő két csúcson (A és C) átmenő t egyenes szerkesztése.
2. Az egyik kör t egyenesre vonatkozó tükörképének szerkesztése.
3. A tükörképként kapott kör, valamint a másik kör metszéspontjainak megjelölése; a metszéspontok egyikét jelölje B.
4. A B pont t egyenesre vonatkozó tükörképének szerkesztése; a kapott pont D.

A szerkesztés eredménye az $ABCD$ deltoid.

A szerkeszthetőség feltétele: a harmadik lépésben vett két körnek legyen legalább 1 közös pontja. A megoldások száma attól függ, hogy a két körnek hány közös pontja van. Ezek alapján a feladatnak lehet 0, 1, 2, esetleg végtelen sok megoldása.

1580 *a)* A szerkesztés lépései:

1. A szimmetriatengelyre illeszkedő két csúcson átmenő t egyenes szerkesztése.
2. Az adott szög megfelezése.
3. A megfelezett szög másolása a t egyenesre, a deltoid megfelelő csúcsához.
4. A deltoid adott oldalát körzőnyílásba vesszük, majd kört szerkesztünk, melynek középpontja a deltoid megfelelő csúcsa. A kör az átmásolt szög szárából kimetszi a deltoid harmadik csúcsát.
5. A kapott csúcs t egyenesre vonatkozó tükörképe a deltoid negyedik csúcsa.

b) A szerkesztés lépései:

1. A szimmetriatengelyre illeszkedő két csúcson átmenő t egyenes szerkesztése.
2. Az adott szög megfelezése.
3. A megfelezett szög másolása a t egyenesre, a deltoid megfelelő csúcsához, és a szögszár meghosszabbítása.
4. A deltoid adott oldalát körzőnyílásba vesszük, majd kört szerkesztünk, melynek középpontja a deltoid szintén adott, de a szóban forgó oldalegyenesre nem illeszkedő csúcsa.
5. A szerkesztett kör metszi ki a 3. pontban szerkesztett szögszárból a deltoid harmadik csúcsát.
6. A kapott csúcs t egyenesre vonatkozó tükörképe a deltoid negyedik csúcsa.

1581 A szerkesztés lépései:

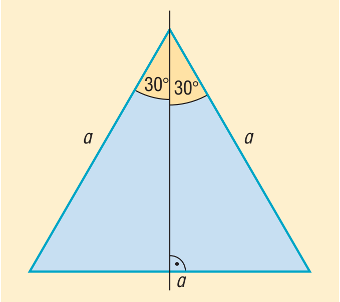
1. Az adott átló két végpontját összekötő szakasz, majd a szakasz felezőmerőlegesének szerkesztése.
2. Az adott szög megfelezése.
3. A megfelezett szög átmásolása az átlóra annak valamelyik végpontjában.
4. A szögszár kimetszi az átló felezőmerőlegeséből a rombusz harmadik csúcsát.
5. A kapott csúcs átlóra vonatkozó tükörképe a rombusz negyedik csúcsa.

1582 A szerkesztés lépései:

1. Az egyik kör adott egyenesre vonatkozó tükörképének szerkesztése.
2. A tükörkép kör másik körrel való metszéspontjainak szerkesztése; a kapott pontokat összekötő szakasz a trapéz egyik szára.
3. A szerkesztett metszéspontok tükrözése az adott szimmetriatengelyre; a kapott pontok a trapéz másik szárának végpontjai.

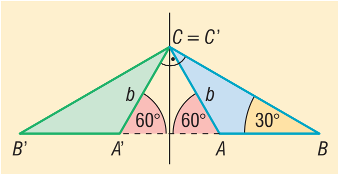
A megoldások száma attól függ, hogy az 1. pontban szerkesztett kör a másik körrel milyen helyzetű. Ha a két körnek nincs közös pontja, vagy érintő helyzetűek, akkor a feladatnak nincs megoldása. Ha a metszéspontok száma 2, akkor a feladatnak 1 megoldása van. Ha két kör egybeesik, akkor végtelen sok megoldás van.

1583 Tükrözzük a háromszöget a 30°-os szög melletti befogó egyenesére. A két háromszög egyesítése olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárszöge 60°, így a háromszög szabályos, oldalai a derékszögű háromszög a átfogójával egyenlőek. Mivel a tükörtengelyre merőleges oldalt a tengely felezi, ezért a derékszögű háromszög 30°-os szögével szemben valóban $\frac{a}{2}$ hosszúságú oldal van. (➡)



1584 Mindhárom szakasz hossza 6 cm.

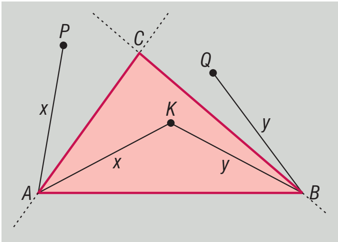
1585 A feltételek szerint $CA'A\sphericalangle = 60°$, továbbá a tükrözés tulajdonságai alapján $CA = CA'$. Ebből adódóan az $AA'C$ háromszög szabályos, és így $A'AC\sphericalangle = 60°$. Mivel $A'AC\sphericalangle$ az ABC háromszög külső szöge, így a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, amiből azonnal adódik, hogy $BCA\sphericalangle = 30°$. Ekkor az ABC háromszög két szöge egyenlő, ezért valóban egyenlő szárú háromszög.



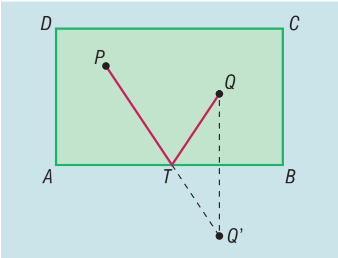
1586 A két téglalap közös része rombuszt alkot.

1587 Tegyük fel, hogy $AP = BQ$. A tükrözés távolságtartó tulajdonsága alapján $AP = AK = x$, továbbá $BK = BQ = y$. A feltételek szerint azonban $x = y$, ami azt is jelenti, hogy a K pont az A és B pontoktól ugyanolyan távol található. Ebből adódóan K valóban illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére.

Tegyük fel, hogy K illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére, azaz $AK = BK$. Ekkor tükörképeik, azaz AP és BQ is egyenlő hosszúak. Ezzel az állítást igazoltuk.



1588 A megfelelő T pontot a PQ' szakasz metszi ki az AB falból, ahol Q' a Q pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe.



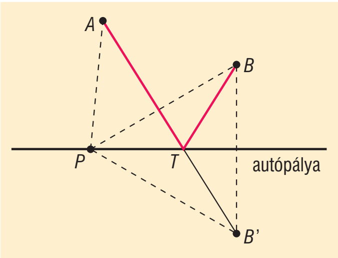
1589 A bevásárlóközpont T helyét az AB' egyenes metszi ki az autópályából, ahol B' a B pont tükörképe az autópálya egyenesére vonatkozóan. Valóban:

$$AT + TB = AT + TB' = AB',$$

továbbá ha P az autópálya mellett egy T-től különböző pont, akkor

$$AP + PB = AP + PB' > AB'.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség a háromszög-egyenlőtlenség közvetlen következménye az $AB'P$ háromszögben.



1590 Vegyük fel az A csúcshoz tartozó külső szögfelezőn (f) az A-tól különböző P pontot, majd tükrözzük f-re a C pontot, így kapjuk C'-t. Mivel a szögfelezőre vonatkozó tükrözés során a szögszárak egymásba mennek át, ezért a C' pont illeszkedik a BA félegyenesre, továbbá $AC' = AC = b$, illetve $PC' = PC$.

Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a $BC'P$ háromszög BC' oldalára:

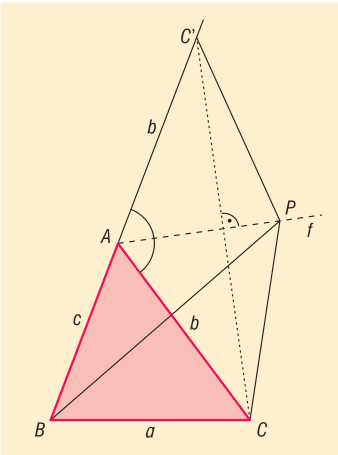
$$BC' < PC' + PB,$$

$$c + b < PC + PB.$$

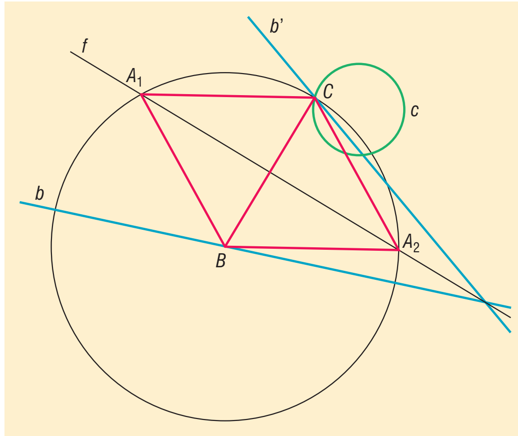
Mindkét oldalhoz az ABC háromszög $a = BC$ oldalát hozzáadva azt kapjuk, hogy

$$a + c + b < BC + PC + PB,$$

ami mutatja, hogy a PBC háromszög kerülete valóban nagyobb, mint az ABC háromszög kerülete.

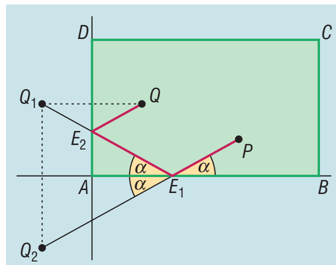


1591 Adottak az A csúcshoz tartozó belső szögfelező (f), továbbá a B csúcsot tartalmazó b egyenes és a C csúcsot tartalmazó c kör. A szerkesztendő háromszög tengelyesen szimmetrikus az f egyenesre vonatkozóan, ezért a B csúcs tükörképe illeszkedik a c körre. Ezt az észrevételt felhasználva, a szerkesztés lépései a következők:



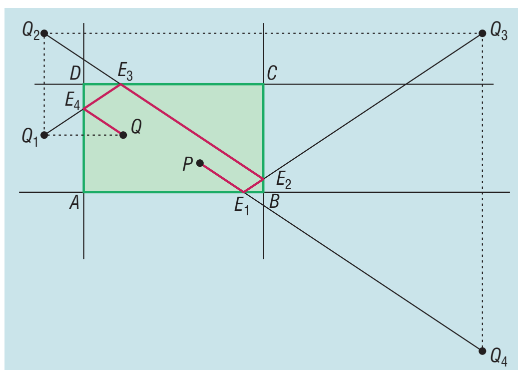
1. A b egyenest tükrözzük az f egyenesre, a tükörkép b'.
2. A b' egyenes és a c kör metszéspontjának (metszéspontjainak) szerkesztése, a metszéspont C. Az ábrán a jobb áttekinthetőség érdekében csak egy metszéspontot rajzoltunk be.
3. A C pont tükrözése az f egyenesre, a tükörkép B.
4. A B középpontú, C-t tartalmazó kör szerkesztése.
5. A kör és az f egyenes metszéspontjainak szerkesztése, a metszéspontok A_1 és A_2. Az A_1BC, A_2BC háromszögek szabályosak, és a feladat feltételeinek megfelelnek.

1592 *a)* Feltételezzük, hogy a falról visszapattanó golyó ugyanakkora szögben pattan vissza, mint amekkora szögben a falhoz érkezik, vagyis az ábrán azonos módon jelölt szögek megegyeznek. Ezt másként úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha a visszapattanó golyó útját a falra tükrözzük, akkor az egy egyenesbe esik a visszapattanás előtti útjával. Ezek alapján a golyó útját a következőképpen szerkeszthetjük meg. Tükrözzük a Q pontot az AD falra, a tükörképet jelöljük Q_1-gyel. A Q_1 pontot tovább tükrözzük, ezúttal az AB fal egyenesére, a tükörképet jelöljük Q_2-vel. A PQ_2 szakasz kimetszi a falból a keresett út első érintési pontját, amit az ábrán E_1-gyel jelöltünk. Az AD fallal való E_2 metszéspontot az E_1Q_1 szakasz metszi ki az AD falból.



b) Az *a)* feladatban felhasznált módszert fejlesztjük tovább. Tükrözzük a Q pontot a DA egyenesre, a tükörképet Q_1-gyel jelöljük. Ezt a Q_1 pontot a CD egyenesre tükrözzük, így kapjuk a Q_2 pontot, amelynek BC egyenesre vonatkozó tükörképe Q_3. Végül a Q_3 pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe Q_4.

A golyót a PQ_4 szakasz mentén kell ellökni; a szakasz kimetszi az AB falból az első érintési pontot, E_1-et. Az E_1Q_3 szakasz kimetszi a BC falból a második érintési pontot, E_2-t. Az E_2Q_2 szakasz CD fallal való metszéspontja a harmadik érintési pont (E_3), végül E_4-et az E_3Q_1 szakasz és a DA oldal metszéspontjaként kapjuk meg.

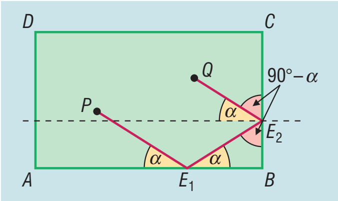


1593 Ha a golyó az AB falat az E_1, a BC falat az E_2 pontban érinti, és az ábra jelöléseinek megfelelően $PE_1A\sphericalangle = \alpha$, akkor a golyó az AB fallal az első visszapattanás után is α szöget bezáró úton halad tovább, azaz $E_2E_1B\sphericalangle = \alpha$. Az E_1E_2B derékszögű háromszög mutatja, hogy a golyó

$90° - \alpha$ szögben érkezik a BC falhoz, és ezért onnan ugyanakkora szögben verődik vissza, azaz

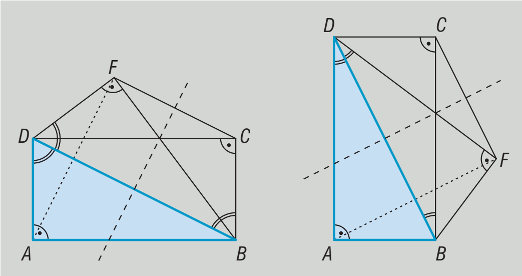
$$QE_2C\sphericalangle = 90° - \alpha.$$

Ha párhuzamost húzunk az E_2 ponton át az AB oldallal, akkor könnyen látható, hogy az E_2Q szakasz a párhuzamossal α szöget zár be, ami igazolja, hogy PE_1 és E_2Q párhuzamos egymással.



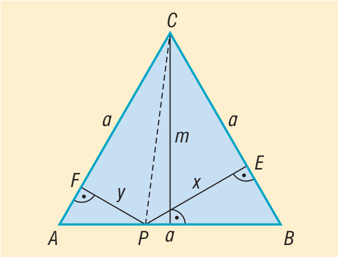
1594 *a)* A BDA háromszög BD egyenesre vonatkozó tükörképe a BDF háromszög. A tengelyes tükrözés megtartja a szögeket, ezért $DFB\sphericalangle = DAB\sphericalangle = 90°$, így DF és BF valóban merőlegesek egymásra.

b) A B, F, C és D pontok az $ABCD$ téglalap oldalainak hosszától függően kétféle sorrendben alkothatnak szimmetrikus trapézt. A két esetet az ábrák szemléltetik. A bizonyítást az első ábra alapján végezzük el, a másik esetben értelemszerű módosításokkal juthatunk célhoz.



Vegyük észre, hogy az ábra azonos módon jelölt szögei megegyeznek! Ez részint abból következik, hogy az $ADB\sphericalangle$ BD egyenesre vonatkozó tükörképe az $FDB\sphericalangle$, részint pedig abból, hogy az $ADB\sphericalangle$ és a $CBD\sphericalangle$ váltószögpárt alkotnak. Ekkor viszont a BD szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tengelyes tükrözés során a D pont képe a B pont, míg $DF = BC$ miatt az F pont a C pontba megy át, vagyis a $BCFD$ négyszög szimmetrikus trapéz.

1595 **I. megoldás.** Jelöljük az ABC háromszög oldalának hosszát a-val, a P pont BC, valamint CA oldalalakra eső merőleges vetületét E-vel, valamint F-fel. Legyen továbbá $PE = x$, $PF = y$. Ekkor az ACP és BCP háromszögek területének összege megegyezik az ABC háromszög területével, azaz ha az ABC háromszög magasságát m-mel jelöljük, akkor



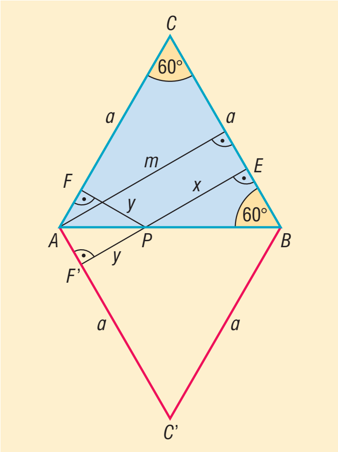
$$\frac{a \cdot y}{2} + \frac{a \cdot x}{2} = \frac{a \cdot m}{2}.$$

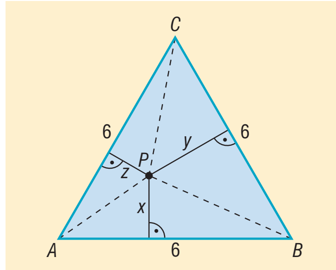
A lehetséges egyszerűsítések elvégzése után azt kapjuk, hogy $y + x = m$. Ez azt jelenti, hogy a P pontnak az AC és BC oldalaktól mért távolságösszege a P pont helyzetétől függetlenül megegyezik az ABC háromszög magasságával.

II. megoldás. Mivel $APF\sphericalangle = BPE\sphericalangle = 30°$, ezért ha a PF szakaszt tükrözzük az AB egyenesre, akkor E, P, valamint az F pont F' tükörképe egy egyenesre illeszkednek. Ha nemcsak a PF szakaszt, hanem az ABC háromszöget is tükrözzük, akkor az eredeti és a képháromszög egyesítése rombusz, melyben az EF' szakasz a magasság. A rombusz és az ABC háromszög magassága természetesen megegyezik, ezért

$$x + y = EP + PF = EP + PF' = EF' = m,$$

ami a P helyzetétől függetlenül valóban állandó.



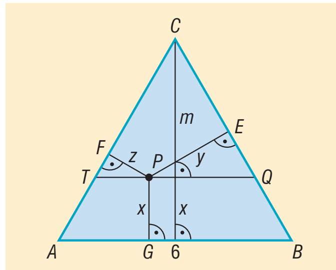


1596 **I. megoldás.** Ha P pontnak a háromszög oldalaitól mért távolságát x, y, z jelöli, akkor az ABP, BCP és CAP háromszögek területének összege megegyezik az ABC háromszög területével, így

$$\frac{6 \cdot x}{2} + \frac{6 \cdot y}{2} + \frac{6 \cdot z}{2} = \frac{6 \cdot M}{2},$$

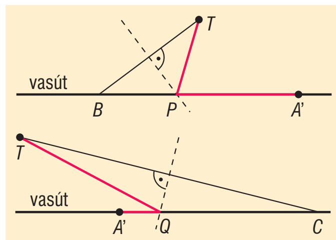
ahol M az ABC háromszög magassága. Az egyszerűsítések elvégzése után $x + y + z = M$ adódik.

A szabályos háromszög magassága az oldalának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese, így $x + y + z = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5{,}2$ cm.



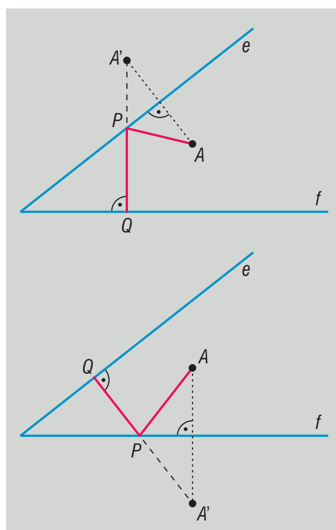
II. megoldás. Húzzunk a P ponton át párhuzamost az AB szakasszal; a párhuzamos az ábra jelöléseinek megfelelően a T és Q pontokban metssze az AC és BC oldalakat. A TQC háromszög minden szöge 60º-os, ezért a háromszög szabályos. A P pont a TQ oldal egy belső pontja, ezért az 1595. feladat eredményét alkalmazhatjuk a P pontra, valamint a TQC háromszögre. Így kapjuk, hogy $y + z = m$, ahol m a háromszög magassága.

Ekkor $x + y + z = x + m = M$, ahol M immár az ABC háromszög magassága (ld. ábra).



1597 Mérjünk fel a megépítendő út teljes 8 km-es hosszával megegyező távolságot a vasút mentén, az A' állomástól kiindulva. Az út végpontját jelöljük B-vel a bal oldali ábrának megfelelően. Mivel a BT szakasz szimmetriatengelyén lévő pontok ugyanolyan távolságra vannak a T településtől, mint a B ponttól. Ha P jelöli a szimmetriatengely és vasút metszéspontját, akkor $TP = BP$ miatt $TP + PA' = BP + PA' = 8$ km, ezért a P pont megfelel az EU-s pályázatban foglalt feltételeknek.

Ha a jobb oldali ábrának megfelelően a 8 km-es utat az állomástól kiindulva a másik irányba mérjük fel, akkor az így kapott C ponttal megismételhetjük a szerkesztést, és egy további, a feladat feltételeinek szintén megfelelő Q pontot kapunk eredményül.

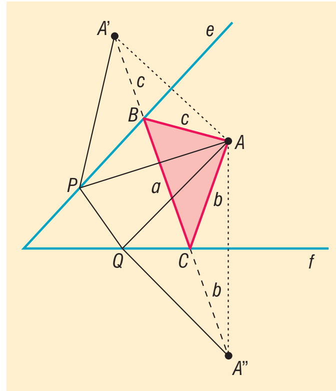


1598 A feladat nem rendelkezik arról, hogy a szerkesztendő APQ törött vonal milyen sorrendben érintse az adott szög szárait, ezért két lehetséges sorrendet is vizsgálnunk kell.

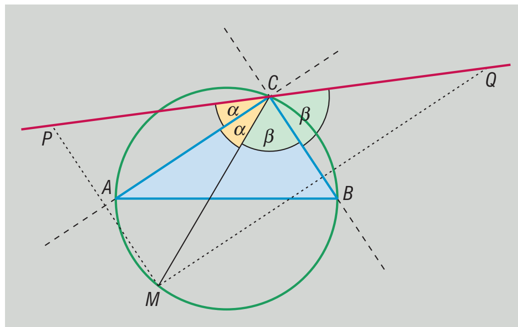
Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a P pont az e szögszárra illeszkedik. Tükrözzük az A pontot az e szögszárra, a tükörképet jelöljük A'-vel. Mivel a tengelyes tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért $AP = A'P$, így $AP + PQ = A'P + PQ$. A feladat tehát arra redukálódik, hogy szerkesszünk az A' pontból olyan utat az f szögszárig, amely metszi az e szögszárat, és hossza a lehető legrövidebb. Az ilyen út szerkesztéséhez elegendő az A' pontból merőlegest állítanunk az f szögszárra. A merőleges kimetszi az e szögszárból a megfelelő P pontot.

Ha a szerkesztendő törött vonal előbb az f szögszárat érinti, akkor az A pontot értelemszerűen az f-re kell tükrözni. A szerkesztés eredményét ebben az esetben az alsó ábra mutatja.

1599 Legyen P az e, Q az f szögszár egy-egy pontja, az A pont e-re, valamint f-re vonatkozó tükörképe A', valamint A''. A tükrözés távolságtartó tulajdonsága alapján az APQ háromszög kerületére teljesül, hogy $AP + PQ + QA = A'P + PQ + QA''$. Mivel A' és A'' a P és Q pontok helyzetétől függetlenül állandó, ezért feladatunk úgy is megfogalmazható, hogy szerkesszünk olyan $A'BCA''$ törött vonalat, amelynek B és C pontjai egy-egy szögszárra illeszkednek, továbbá a törött vonal hossza a lehető legrövidebb. Mivel a törött vonal hossza pontosan akkor lesz a legrövidebb, ha belső pontjai illeszkednek az $A'A''$ szakaszra, ezért a minimális hosszúságú vonal B és C pontjait az $A'A''$ szakasz metszi ki a szögszárakból. Az ABC háromszög kerülete megegyezik az $A'A''$ szakasz hosszával.



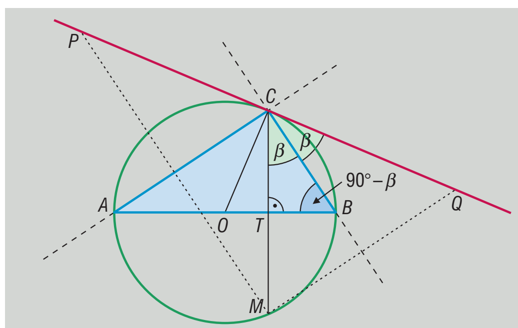
1600 *a)* Ha nemcsak az M pontot, hanem az MC szakaszt is tükrözzük, akkor a következő megállapításokat tehetjük. A C pont mindkét tükrözés után helyben marad, továbbá a szögtartó tulajdonság alapján $MCA\sphericalangle = PCA\sphericalangle = \alpha$, valamint $MCB\sphericalangle = QCB\sphericalangle = \beta$. Ekkor persze $PCQ\sphericalangle = 2\cdot\alpha + 2\cdot\beta = 2\cdot(\alpha+\beta) = 180°$, mivel az ABC háromszög derékszögű. A C csúcsnál kialakuló egyenesszög mutatja, hogy a P, C, Q pontok az M pont helyzetétől függetlenül egy egyenesre illeszkednek.



b) A tengelyes tükrözés távolságtartó tulajdonságából következik, hogy $MC = PC$, illetve $MC = QC$, aminek egyszerű következményeként $PQ = PC + QC = 2\cdot MC$ adódik. Ez azt is jelenti, hogy a PQ szakasz akkor a lehető legrövidebb, amikor az MC szakasz is ilyen tulajdonságú, ez pedig pontosan akkor következik be, amikor az M pont egybeesik az ABC háromszög rövidebb befogójának C-től különböző végpontjával (a fenti ábrán ez éppen a B pont). A minimális hosszúságú PQ szakasz kétszer olyan hosszú, mint az ABC háromszög rövidebb befogója. Megjegyezzük, hogy ha az ABC háromszög egyenlő szárú, akkor az átfogó mindkét végpontjára minimálisnak adódik a PQ szakasz hossza.

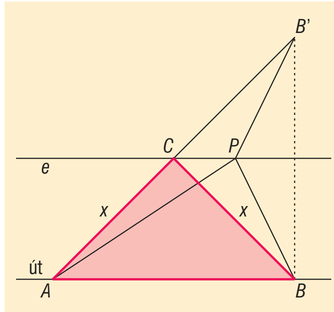
Előző gondolatmenetünk egy másik következménye, hogy a PQ szakasz akkor a lehető leghosszabb, amikor M az ABC háromszög köré írt kör C-vel átellenes pontja. Ekkor a PQ szakasz hossza az AB átfogó hosszának kétszerese.

c) Ha az M pont egybeesik a C pont AB egyenesre vonatkozó tükörképével, akkor a CM szakasz éppen az ABC háromszög átfogóhoz tartozó magasságának T talppontjában metszi az átfogót. Ha $MCB\sphericalangle = \beta$, akkor egyrészt a tükrözés miatt $BCQ\sphericalangle = \beta$, másrészt a CTB derékszögű háromszögből $CBT\sphericalangle = 90 - \beta$. Ha O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, akkor a BCO háromszög egyenlő szárú, így BC alapján fekvő szögei megegyeznek, azaz $OCB\sphericalangle = CBO\sphericalangle = CBT\sphericalangle = 90° - \beta$.



Végül egyszerű szögszámolással láthatjuk, hogy $OCQ\sphericalangle = OCB\sphericalangle + BCQ\sphericalangle = (90° - \beta) + \beta = 90°$, vagyis OC és CQ merőlegesek egymásra. Ez csak úgy lehetséges, ha a CQ egyenes az ABC háromszög köré írt kör érintője.

1601 *a)* Jelöljük a birtok bekötőúttal határos szakaszának végpontjait A-val és B-vel. A feladat szerint olyan C pontot kell keresnünk, amelyre az ABC háromszög kerülete a lehető legkisebb.

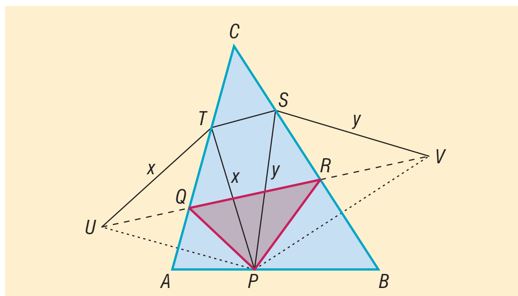


A szöveg alapján $AB = 200$ méter, továbbá a háromszög területe 1 hektár $= 10\,000\ \text{m}^2$. Az adatokból kiszámolható, hogy a háromszög AB oldalhoz tartozó magassága 100 méter, így a C pont az AB-vel párhuzamos, attól 100 méter távolságra haladó e egyenesen található.

Tekintsük az e egyenes egy tetszőleges P pontját, majd tükrözzük a PB szakaszt az e egyenesre. A tükrözés során a P pont helyben marad, a B pont képe B', a távolságtartó tulajdonság miatt $PB = PB'$. Az ABP háromszög kerülete $200 + AP + PB = 200 + AP + PB'$. Mivel a B' pont helyzete független a P pont helyétől, ezért a kerület láthatóan akkor a lehető legkisebb, amikor az APB' törött vonal hossza minimális, ami akkor következik be, ha az A, P, B' pontok egy egyenesre illeszkednek. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a legkisebb kerületű háromszög C csúcsát az AB' szakasz metszi ki az e egyenesből.

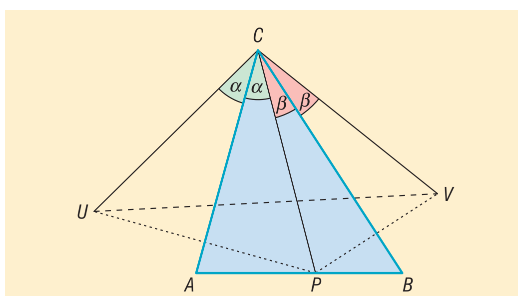
b) Mivel $AB = BB' = 200$ méter, ezért az ABB' háromszög egyenlő szárú és derékszögű. A tükrözés tulajdonságai miatt a $BB'C$ háromszög is egyenlő szárú, melynek BB' alapján ezek szerint 45°-os szögei vannak. Ekkor viszont az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van, amiből következik, hogy az ABC háromszög is derékszögű és egyenlő szárú. Ha $AC = BC = x$, akkor Pitagorasz tétele alapján $x^2 + x^2 = 200^2$, amiből $x = 100 \cdot \sqrt{2}$ méter. Az ABC háromszög kerülete $200 + 200 \cdot \sqrt{2}$, így Géza bácsinak legalább $1{,}05 \cdot \left(200 + 200 \cdot \sqrt{2}\right) \approx 507$ méter kerítést kell vásárolnia.

1602 *a)* Legyen az AC oldal egy pontja T, a BC oldal egy pontja pedig S. Tükrözzük a PT szakaszt az AC, a PS szakaszt pedig a BC oldal egyenesére, a P pont tükörképeit pedig jelölje rendre U, V (ld. ábra). A tükrözés tulajdonságai miatt $PT = UT = x$ és $PS = VS = y$, amiből következik, hogy a PTS háromszög kerülete megegyezik az $UTSV$ törött vonal hosszával. Mivel az U és V pontok helyzete független a T és S pontok választásától, ezért



a törött vonal hossza akkor lesz a legkisebb, amikor T és S illeszkedik az UV szakaszra. Az eddigi gondolatmenetünk alapján könnyen szerkeszthető a minimális kerületű beírt PQR háromszög, hiszen annak Q és R csúcsait az U és V pontokat összekötő szakasz metszi ki a háromszög megfelelő oldalaiból. A PQR háromszög kerülete természetesen megegyezik az UV szakasz hosszával.

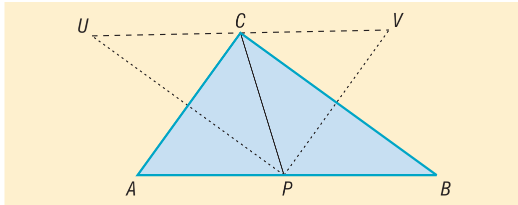
b) A feladat kérdése arra vonatkozik, hogy miként kell az AB oldal P pontját megválasztani, ha azt akarjuk, hogy a kapott PQR háromszög kerülete, azaz az UV szakasz hossza a lehető legkisebb legyen. Mivel a tükrözés megtartja a szögek nagyságát, ezért az ábrán azonos módon jelölt szögek egyenlők. Mivel a tükrözés a távolságot is megtartja, ezért $CU = CV = CP$. Eszerint az UVC háromszög a P pont tetszőleges



választása mellett egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárak által bezárt szög $2\cdot(\alpha+\beta)$, ahol $\alpha+\beta$ az ABC háromszög C csúcsnál lévő szögét jelöli.

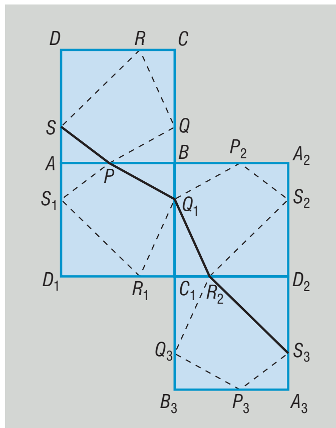
Az ilyen háromszögek UV alapja pontosan akkor minimális, amikor a háromszög szára, vagyis a CU szakasz, a lehető legkisebb. A $CU = CP$ szakasz pedig akkor a legkisebb, amikor P az ABC háromszög C csúcsból induló magasságvonalának talppontja. Gondolatmenetünk egy nem túl bonyolult következménye, hogy egy hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a lehető legkisebb.

c) Ha az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van, akkor $UCV\sphericalangle = 180°$, ami azt jelenti, hogy a C pont illeszkedik az UV szakaszra. Ebben az esetben tehát UV nem belső pontokban metszi a háromszög AC és BC oldalait, így nem létezik minimális kerületű beírt háromszög sem.



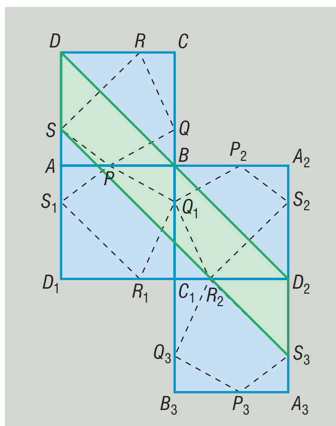
Hasonló a helyzet tompaszögű háromszög esetén is; ekkor az UV szakasz egyáltalán nem metszi a háromszög oldalait.

1603 *a)* Az $ABCD$ téglalapba az alábbi ábra szerint beírtuk a $PQRS$ négyszöget. Feladatunk a legkisebb kerületű négyszög szerkesztése. A továbbiakban „kiterítjük” a beírt négyszög oldalait egy törött vonalba. Tükrözzük a téglalapot a beírt sokszöggel együtt az AB egyenesre, az így kapott tükörképeket 1 indexszel láttuk el. További két tükrözéssel (az ábrán a k-adik tükrözés után kapott pontok k indexet kaptak) sikerül kiteríteni a $PQRS$ négyszög oldalait; a négyszög kerülete megegyezik az $SPQ_1R_2S_3$ törött vonal hosszával. Ennek hossza akkor minimális, amikor szakasszá fajul, ami azt jelenti, hogy a minimális kerületű beírt négyszög kerülete egyenlő az SS_3 szakasz hosszával.



Az SS_3 szakasz hossza látszólag függ az S pont választásától. A tükrözés távolságtartó voltából fakadóan azonban könnyen végiggondolhatjuk, hogy $SD = S_1D_1 = S_2D_2 = S_3D_2$, továbbá SD és S_3D_2 párhuzamosak, amiből következik, hogy a DSS_3D_2 négyszög paralelogramma, így az SS_3 szakasz hossza megegyezik a DD_2 szakasz hosszával, ami viszont épp az eredeti téglalap átlójának kétszerese.

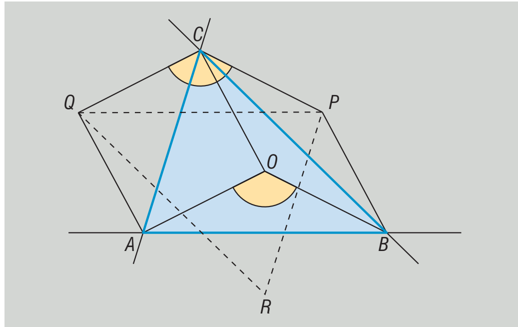
Ezzel igazoltuk, hogy a P pontot csúcsként tartalmazó, a téglalapba beírt négyszögek kerületének minimuma épp a téglalap átlójának kétszerese, ami valóban független a P pont helyzetétől.



b) A téglalap oldalainak ismeretében Pitagorasz tételével az átlóra 35 m adódik, ezért a telek elkerítéséhez 70 m kerítés szükséges.

c) Az előzőek alapján már nem túlságosan nehéz a minimális kerületű beírt négyszög szerkesztése. Húzzunk a DD_2 szakasszal párhuzamost a P ponton át. Ez a D_2A_3 szakaszból kimetszi a minimális kerületű beírt $PQRS$ négyszög S pontjának S_3 harmadik tükörképét, a C_1D_2 szakaszból kimetszi az R pont R_2 második tükörképét, míg a BC_1 szakaszból kimetszi a Q pont Q_1 első tükörképét. Ezáltal a $PQRS$ négyszög szerkeszthető.

1604 *a)* Ha az ABC háromszög köré írt kör középpontját O jelöli, akkor $AO = BO = CO$, hiszen mindhárom szakasz a körülírt kör sugara. A tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért az említett szakaszok tükörképei is, így például az ábrán szereplő AQ, CQ, CP, BP szakaszok mindegyike a körülírt kör sugarával egyenlő hosszú. Ekkor viszont az $AOCQ$ és $BOCP$ négyszögek rombuszok, ezért szemközti oldalaik párhuzamosak egymással, azaz CQ párhuzamos OA-val, CP párhuzamos OB-vel, amiből következik, hogy $QCP\sphericalangle = AOB\sphericalangle$. Eddigi eredményeink alapján a QPC és ABO háromszögek egybevágók (két oldal + közbezárt szög), ezért $QP = AB$. Hasonló gondolatmenettel láthatjuk be, hogy a PQR háromszög minden oldala egyenlő az ABC háromszög egy-egy oldalával, ezért a két háromszög valóban egybevágó egymással.



b) Az *a)* feladatban láttuk, hogy a QPC és ABO háromszögek egybevágóak, továbbá két-két oldaluk párhuzamos, amiből következik, hogy harmadik oldalaik, azaz QP és AB is párhuzamos egymással. Ugyanígy; PR és CA, valamint QR és CB is párhuzamos egymással. Mivel a QO egyenes merőleges az AC egyenesre, így merőleges a PR egyenesre is, így a QO egyenes a PRQ háromszög magasságvonala, O pedig a magasságpontja. Észrevételünket felhasználva az ABC háromszög szerkesztésének a lépései a következők lehetnek. Megszerkesztjük a PQR háromszög O magasságpontját. Ezután megszerkesztjük az OQ, OR, OP szakaszok felezőmerőlegeseit. A megszerkesztett egyenesek egyben az ABC háromszög oldalegyenesei is, ezért az ABC háromszög csúcsai már könnyen szerkeszthetők.

Középpontos tükrözés – megoldások

1605 A tükörképek az egyes esetekben:

a) $A'(-3; -1)$, $B'(2; -5)$, $C'(4; 2)$;

b) $A'(-3; 7)$, $B'(2; 3)$, $C'(4; 10)$;

c) $A'(-1; 1)$, $B'(4; -3)$, $C'(6; 4)$;

d) $A'(1; -3)$, $B'(6; -7)$, $C'(8; 0)$;

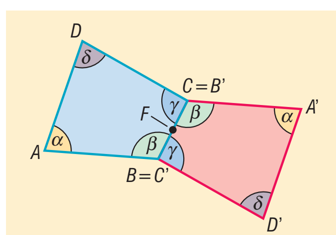
e) $A'(-5; -5)$, $B'(0; -9)$, $C'(2; -2)$;

f) $A'(-5; 13)$, $B'(0; 9)$, $C'(2; 16)$.

1606 A két háromszög egyesítése paralelogrammát határoz meg, mert a kapott négyszög középpontosan szimmetrikus.

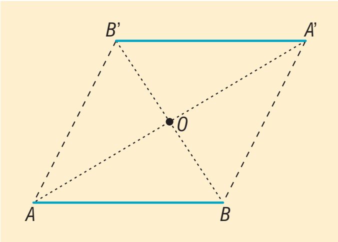
1607 A két trapéz egyesítése paralelogrammát határoz meg, mert a kapott négyszög középpontosan szimmetrikus.

1608 Ha az $ABCD$ négyszög BC oldalának F felezőpontjára tükrözünk, akkor a szokásos jelölések mellett az $ABD'A'CD$ hatszög szögei α, $\beta + \gamma$, δ, α, $\beta + \gamma$, δ. A középpontos tükrözés során a szakasz és tükörképe párhuzamos egymással, ezért a kapott hatszög szemközti oldalai valóban párhuzamosak.

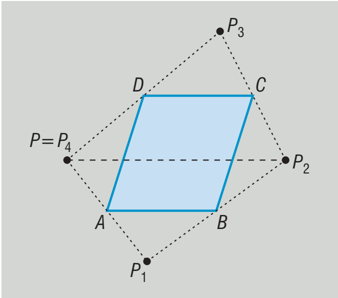


1609 Ha a két szakasz nem esik egy egyenesbe, akkor végpontjaik egy paralelogramma csúcsait alkotják. Ebben a paralelogrammában az átlók metszéspontjára vonatkozó tükrözés a szakaszokat egymásba viszi át.

Ha a két szakasz (AB és tükörképe $A'B'$) végpontjai egy egyenesre illeszkednek, akkor nem feszítenek ki paralelogrammát, de a tükrözés középpontja ebben az esetben is az AA' és a BB' szakaszok közös felezőpontja.

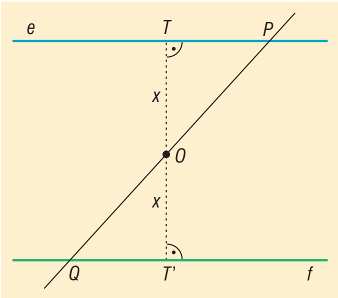


1610 A negyedik tükrözés után visszajutunk a kiindulásul vett pontba. Ha a P pontból indulunk ki, és a tükrözések eredményét rendre P_1, P_2, P_3 és P_4 jelöli, akkor ugyanis AB középvonal a PP_2P_1 háromszögben, amiből következik, hogy PP_2 párhuzamos AB-vel és hossza az AB hosszának kétszerese. Ugyanígy DC középvonal a $P_4P_2P_3$ háromszögben, amiből adódik, hogy P_4P_2 párhuzamos DC-vel és hossza a DC hosszának kétszerese. Mivel $ABCD$ paralelogramma, ezért AB és DC párhuzamosak, illetve egyenlő hosszúak, így ugyanez érvényes PP_2-re és P_4P_2-re is. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha $P = P_4$.



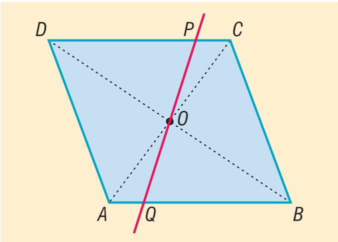
1611 A játékban Barnabásnak van nyerő stratégiája. Ehhez a következő szabály szerint érdemes játszania: az első pénzérmét úgy kell elhelyeznie, hogy középpontja egybeessen az asztal középpontjával. Ezek után nincs más dolga, csak ha András rakott, akkor a saját érméjét úgy helyezze el, hogy az asztal középpontjára vonatkozó tükörképe egybeessen az András által legutoljára elhelyezett pénzérmével. Ekkor a siker garantált, ha ugyanis András tud még rakni, akkor ez Barnabásnak is biztosan sikerülni fog.

1612 Az O pont e-re, illetve f-re vonatkozó merőleges vetületét az ábrán T-vel, illetve T'-vel jelöltük. A feltételek szerint $OT = OT' = x$. Vizsgáljuk az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés tulajdonságait. A T pont képe T', továbbá az e egyenes képe olyan egyenes, amely átmegy a T' ponton és párhuzamos e-vel. Ez az egyenes csakis az f egyenes lehet. Mivel a tükrözés O középpontja illeszkedik a PQ egyenesre, ezért a P pont képe illeszkedik a PQ egyenesre, továbbá illeszkedik az e egyenes f képére is, ezért csakis a két egyenes Q metszéspontja lehet. Pont és képe ugyanolyan távolságra van a tükrözés középpontjától, ezért $OP = OQ$.

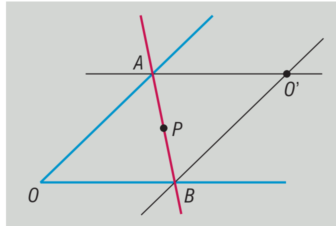


1613 Mindhárom négyszög tengelyesen szimmetrikus a négyszög egyik átlójának egyenesére, ezért mindhárom négyszög deltoid. A középen keletkező négyszög a négyzet középpontjára vonatkozó középpontos tükrözés során invariáns marad (képe önmaga), ezért paralelogramma. Mivel átlói illeszkednek a négyzet átlóira, ezért merőlegesek egymásra, így a középen keletkező négyszög rombusz.

1614 Az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés során az A pont képe C, a D pont képe pedig B. Az 1612. feladat eredménye alapján $OP = OQ$, ezért a P és Q pontok egymás tükörképei.

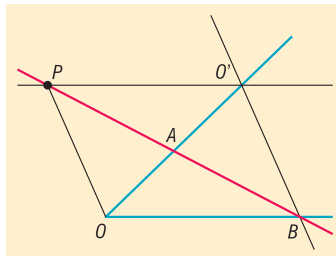


1615 A szerkesztés lépései:



1. Az adott szög O csúcsát tükrözzük az adott P pontra; a tükörképet O'-vel jelöltük.
2. Az O' ponton át párhuzamosokat szerkesztünk a szög száraival.
3. A párhuzamosok és a megfelelő szögszárak A és B metszéspontjainak szerkesztése.
4. Az AB egyenes szerkesztése. Az egyenes a kívánt tulajdonságokkal rendelkezik, hiszen az $OBO'A$ négyszög paralelogramma, ezért átlói felezik egymást, így $PA = PB$.

1616 A szerkesztés lépései:

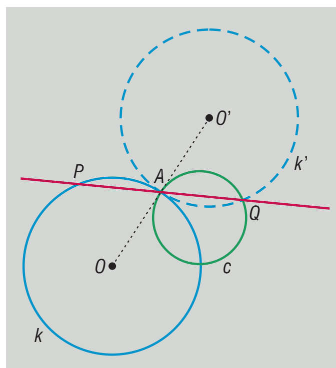


1. Az adott P ponton át a megfelelő szögszárral (amelyiket a szerkesztendő egyenes a P-től mérve távolabb metsz) párhuzamost szerkesztünk.
2. A párhuzamos és a másik szögszár O' metszéspontjának szerkesztése.
3. Az O' ponton keresztül párhuzamost szerkesztünk a PO szakasszal.
4. A szerkesztett párhuzamos másik szögszárral való B metszéspontjának szerkesztése.
5. A PB egyenes szerkesztése. Az egyenes a kívánt tulajdonságú lesz, hiszen a szerkesztés menete alapján az $OBO'P$ négyszög paralelogramma, amelyben az átlók felezik egymást.

1617

a) Igaz.	*b)* Igaz.	*c)* Hamis.
d) Hamis.	*e)* Hamis.	*f)* Igaz.
g) Igaz.	*h)* Igaz.	*i)* Igaz.
j) Hamis.	*k)* Hamis.	*l)* Igaz.
m) Hamis.	*n)* Hamis.	*o)* Igaz.

1618 Jelöljük a két kört k-val és c-vel, és tegyük fel, hogy az egyik metszéspontjukon (A) átmenő egyenes az A-tól különböző P és Q pontokban metszi a két kört (ld. ábra), valamint $AP = AQ$.



Ekkor az A pontra vonatkozó középpontos tükrözés a P pontot a Q pontba, az AP szakaszt pedig az AQ szakaszba viszi át. Ez a megállapítás lehetőséget ad a Q pont egyszerű szerkesztésére; a Q pontot a k kör A pontra vonatkozó k' tükörképe metszi ki a c körből. A P pontot megkaphatjuk, ha a Q pontot tükrözzük az A pontra.

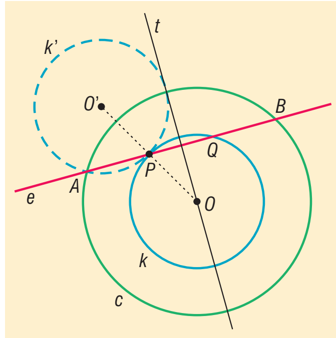
Mivel az így kapott AQ és AP szakaszok egy egyenesbe esnek, és a tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt hosszuk megegyezik, ezért a PQ egyenes megfelel a feladat minden feltételének.

A feltételekből következik, hogy a k' kör két pontban metszi a c kört, amelyek közül az egyik természetesen az A pont. Ebből adódóan a Q pont és így a P pont is egyértelműen szerkeszthető.

Újabb megoldást kapunk, ha a két kör másik metszéspontjára tükrözünk.

Vegyük végül észre, hogy a két metszésponton átmenő szelő nyilvánvalóan megfelel a feltételeknek, ezért a feladatnak három megoldása van!

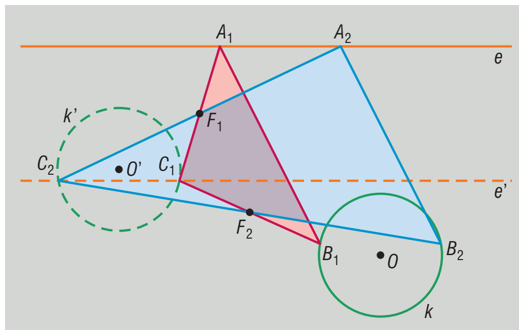
1619 A koncentrikus körök közül a belsőt k-val, a külsőt c-vel, a kisebb kör rögzített pontját P-vel jelöltük az ábrán. Tegyük fel, hogy az e egyenes a c kört A-ban és B-ben, a k kört P-ben és Q-ban metszi az ábrának megfelelően, továbbá $AP = PQ = QB$.



Ekkor a P pontra vonatkozó középpontos tükrözés során a Q pont az A pontba kerül, így a k kör képe olyan k' kör, amelynek a c körrel való egyik metszéspontja éppen A. Megállapításunk egyben eljárást ad az A pont szerkesztésére is. Az A és P pontok ismeretében az e egyenes már szerkeszthető. Nem kell aggódnunk amiatt sem, hogy esetleg QB nem lenne egyenlő AP-vel. Ugyanis ha $AP = PQ$, akkor $AP = QB$ is teljesül, amihez elegendő végiggondolnunk, hogy a PQ szakasz felezőmerőlegesére (az ábrán t jelöli) vonatkozó tengelyes tükrözés során a P pont képe Q, az A pont képe B, ezért $AP = QB$ valóban fennáll.

A szerkeszthetőség feltétele, hogy a k' kör és a c kör metssze egymást. Attól függően, hogy a két körnek hány metszéspontja van, a megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet. A két kör nem metszi egymást, ha a c kör sugara nagyobb, mint a k kör sugarának háromszorosa, egy metszéspont és így egy megoldás adódik, ha c kör sugara egyenlő a k kör sugarának háromszorosával, míg más esetekben két megoldást kapunk.

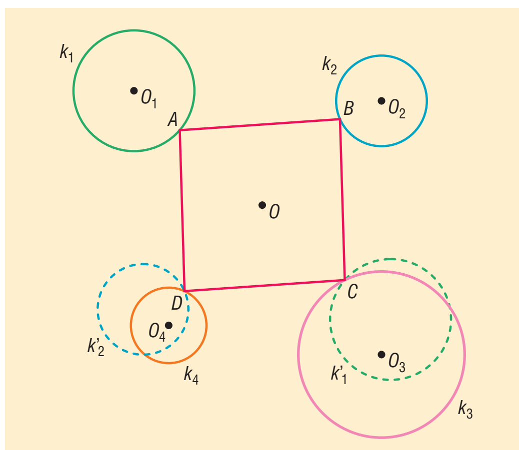
1620 A feltételek szerint az ABC háromszög A csúcsa illeszkedik az e egyenesre, továbbá F_1 az AC oldal felezőpontja, így a C csúcs illeszkedik az e egyenes F_1 pontra vonatkozó e' tükörképére. Hasonlóan; mivel a B csúcs illeszkedik a k körre, valamint F_2 a BC oldal felezőpontja, így a C csúcs illeszkedik a k kör F_2 pontra vonatkozó k' tükörképére. A tükrözött alakzatok metszéspontja eszerint épp a háromszög C csúcsával azonos. A hiányzó A, illetve B csúcsot megkapjuk, ha a C pontot tükrözzük az F_1, illetve F_2 pontra. A fent vázolt szerkesztés eredményét, valamint a megoldásul kapott $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögeket az ábrán láthatjuk.



A szerkeszthetőség feltétele, hogy az e' egyenes metssze a k' kört. A metszéspontok számától függően a feladatnak 0, 1 vagy 2 megoldása lehet.

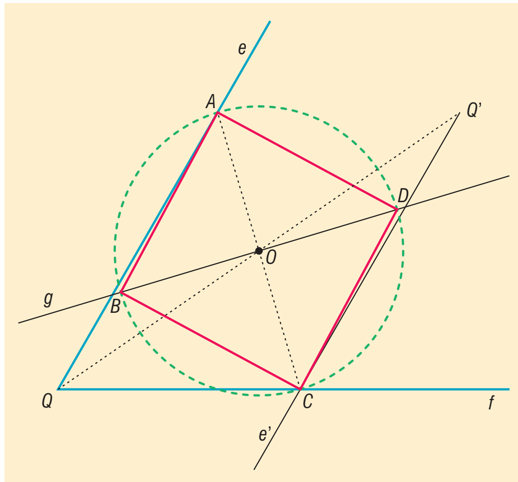
1621 Feladatunk olyan $ABCD$ paralelogramma szerkesztése, amelynek középpontja O, továbbá $A \in k_1$, $B \in k_2$, $C \in k_3$ és $D \in k_4$.

A szerkesztendő paralelogramma szimmetrikus az O pontra nézve, ezért középpontosan tükrözzük a k_1 kört az O pontra; a tükörképet jelölje k_1'. Világos, hogy a paralelogramma C csúcsa illeszkedik k_1'-re és k_3-ra, vagyis a C pont e két kör metszéspontjaként szerkeszthető. Az A pontot megkapjuk, ha a C pontot középpontosan tükrözzük az O pontra. A paralelogramma B és D csúcsainak szerkesztése ezzel analóg módon történhet, csak a k_2 és k_4 körökkel kell dolgoznunk.



A szerkeszthetőség feltételei, hogy a k_1' és a k_3, valamint a k_2' és a k_4 körök egyaránt metsszék egymást. Ha az említett körök közül valamelyik kettőnek nincs metszéspontja, akkor a feladatnak 0 megoldása van. A további estekben a megoldások száma a metszéspontok számától függ. Ennek értelmében a feladatnak lehet 1, 2, 4, esetleg végtelen sok megoldása. Ez utóbbi eset akkor következik be, ha k_1' kör a k_3 körrel, vagy a k_2' kör a k_4 körrel esik egybe.

1622 Jelöljük a szög szárait e-vel és f-fel, az adott pontot O-val. Ha az $ABCD$ négyzet A csúcsa illeszkedik az e szögszárra, valamint C csúcsa illeszkedik az f szögszárra (ld. ábra), akkor az A pont O pontra vonatkozó tükörképe, mely épp a C pont, illeszkedik az e szögszár O pontra vonatkozó tükörképére.

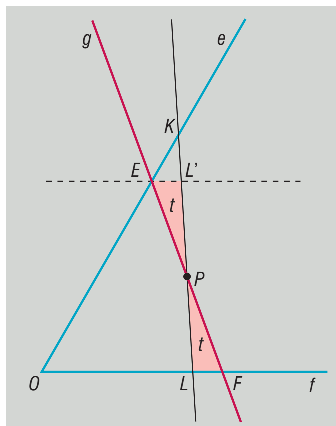


Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Középpontosan tükrözzük az e szögszárat az O pontra; így kapjuk e'-t.
2. Az e' félegyenes és az f szögszár metszéspontjának szerkesztése; a metszéspont C.
3. A C pont O pontra vonatkozó tükrözése; a tükörkép A.
4. Az AC szakaszfelező merőlegesének szerkesztése; a kapott egyenes g.
5. Az O középponttal, OC sugárral rajzolt kör szerkesztése.
6. A g egyenes és a szerkesztett kör metszéspontjainak szerkesztése; a keletkező metszéspontok B és D.

A feladatnak konvex szög esetén minden esetben egyetlen megoldása van.

1623 A szögszárakból lemetszett háromszög területe akkor a legkisebb, ha az adott pont felezi a metsző egyenesnek a szög szárai közé eső szakaszát. Jelöljük a szögszárakat e-vel és f-fel, az adott pontot P-vel, továbbá g-vel azt az egyenest, amely átmegy a P ponton és a szögszárak közé eső szakaszát a P pont megfelezi. Ha a g egyenes az e szögszárat E-ben, az f szögszárat F-ben metszi, akkor $PE = PF$ (ld. ábra). Megmutatjuk, hogy ha egy g-től különböző egyenes átmegy a P ponton, továbbá a szögszárakat K-ban és L-ben metszi, akkor az OKL háromszög területe nagyobb, mint az OEF háromszög területe. Mivel PK és PL semmiképpen nem egyenlő, ezért feltehetjük, hogy $PK > PL$.

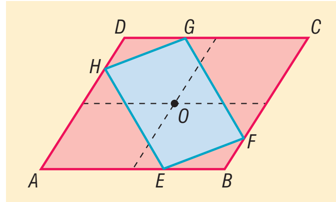


Tükrözzük a PLF háromszöget a P pontra. A tükrözés során a P pont helyben marad, az F pont képe E, mivel $PF = PE$, az L pont képe pedig a PK szakasz egy belső L' pontja. Az EL' és FL szakaszok párhuzamosak a középpontos tükrözés tulajdonságai alapján. Jelöljük a PLF és $PL'E$ háromszögek közös területét t-vel. Ekkor

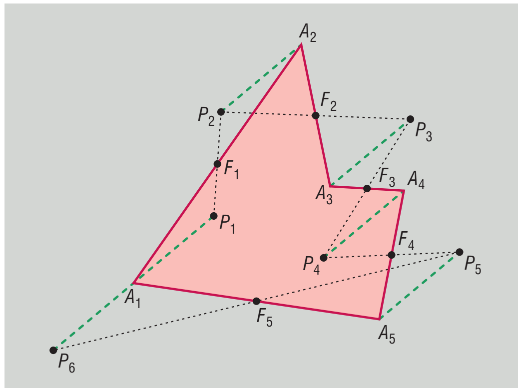
$$T_{OEF} = T_{OEPL} + t < T_{OEPL} + t + T_{EL'K} = T_{OKL}$$

amit épben bizonyítani akartunk. Az E és F pontok, valamint a g egyenes az 1622. feladatban ismertetett módon szerkeszthetők. Az ott alkalmazott jelölésekkel az EF szakasz egybeesik az $ABCD$ négyzet AC átlójával.

1624 Jelölje O az $ABCD$ paralelogrammába írt $EFGH$ paralelogramma középpontját (ld. ábra). Ekkor az O pontra vonatkozó tükrözés az E pontot a G pontba, az AB szakaszt vele párhuzamos szakaszba viszi át, hiszen a szakasz és tükör képe párhuzamos egymással. Mivel azonban a G pont illeszkedik CD szakaszra, így az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés az AB szakaszt csakis a CD egyenesre képezheti. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha az O pont egyenlő távolságra van az $ABCD$ paralelogramma AB és CD oldalaitól, amiből következik, hogy O illeszkedik az AB és a CD egyenesek középpárhuzamosára. Hasonlóan igazolhatjuk, hogy O az AD és a BC egyenesek középpárhuzamosára is illeszkedik, így O valóban megegyezik az $ABCD$ paralelogramma középpontjával.



1625 *a)* Tekintsük az ábrán látható $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszöget, melynek oldalfelező pontjai F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, valamint a sík egy tetszőleges P_1 pontját. Tükrözzük a P_1A_1 szakaszt előbb az F_1, majd a kapott tükörképet az F_2 pontra, és így tovább. Az i-edik tükrözés után így a $P_{i+1}A_{i+1}$ szakaszhoz jutunk ($A_1 = A_6$). A tükrözés tulajdonságai alapján bármely (i, j) számpárra ($1 \le i, j \le 6$) a P_iA_i és P_jA_j szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak, továbbá minden i-re P_iA_i és $P_{i+1}A_{i+1}$ ($1 \le i \le 5$) ellentétes irányúak. Az elmondottakból következik, hogy a P_1P_6 szakasznak A_1 a felezőpontja.

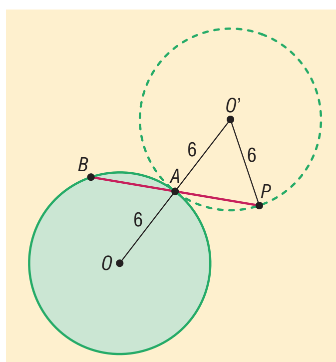


A fenti észrevételek alapján az ötszög könnyen szerkeszthető. Tükrözzük a sík egy tetszőleges P_1 pontját rendre az F_1, …, F_5 pontokra; így kapjuk a P_6 pontot. A P_1P_6 szakasz A_1 felezőpontját tükrözzük az F_1 pontra, így kapjuk A_2-t. Tükrözzük A_2-t az F_2 pontra; így kapjuk az A_3 pontot, és így tovább.

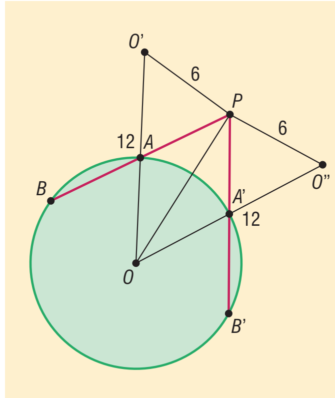
A feladatnak minden esetben egyértelmű megoldása van, bár előfordulhat, hogy a kapott ötszög hurkolt vagy elfajuló. A feladat fent vázolt megoldása minden páratlan n-re általánosítható.

b) Ha n páros, úgy a P_1A_1 és $P_{n+1}A_1$ szakaszok továbbra is párhuzamosak és egyenlők, csak ezúttal megegyező irányúak. Ebből következően a P_1 és P_{n+1} pontok egybeesnek, így ebben az esetben a feladat határozatlan.

1626 *a)* Jelöljük az erdő középpontját O-val, a falut P-vel. Olyan szelőt kell szerkesztenünk a P ponton át, amelynek a körrel való első metszéspontja (az ábrán A) felezi a hosszabb szelőszakaszt, azaz PB-t. Természetesen ekkor az A pontra vonatkozó középpontos tükrözés a P pontot a B pontba viszi át, csak kisebb kellemetlenséget okoz, hogy az A pont helyét nem ismerjük. Ha viszont egy pillanatra feltételezzük, hogy az A pont ismert, és a Kerekerdőt tükrözzük az A pontra, akkor eredményül olyan O’ középpontú kört kapunk, amelynek sugara 6 km, továbbá átmegy a P ponton, és az A pontban érinti a Kerekerdőt modellező kört. Az O’ pont ezek szerint a P ponttól 6, az O ponttól 12 km távolságra található, így a P és O pontok ismeretében megszerkeszthető. Az OO’szakasz kimetszi Kerekerdőből a keresett szelő A pontját, majd a P pont A-ra vonatkozó tükörképe megadja a B pont helyét.

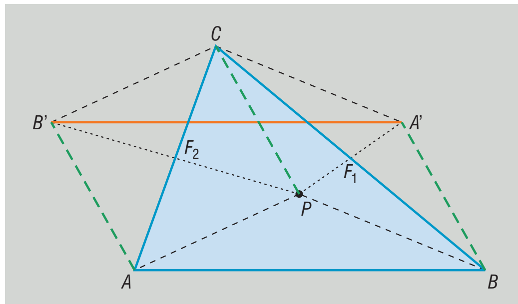


b) A feladat megoldása az OPO' háromszög szerkeszthetőségén alapul. Mivel a háromszög oldalai $OP = 10$ km, $OO' = 12$ km, $O'P = 6$ km, és $OO' + O'P > OP$, ezért az O középpontú 12 km sugarú, valamint a P középpontú 6 km sugarú kör két pontban metszi egymást (az ábrán O' és O''), így a feladatnak két megoldása van. A két út egymás tükörképe az OP egyenesre vonatkozóan.



c) A feladatnak $x \le 6$ esetén nincs megoldása, hiszen ebben az esetben a falu a Kerekerdő belsejében vagy határán helyezkedik el. Ha $6 < x < 18$, akkor a feladatnak két megoldása, $x = 18$ esetén egy megoldása van. Utóbbi esetben O' és O'' megegyezik, valamint illeszkedik az OP szakaszra. A feladatnak $x > 18$ esetén nem adódik megoldása.

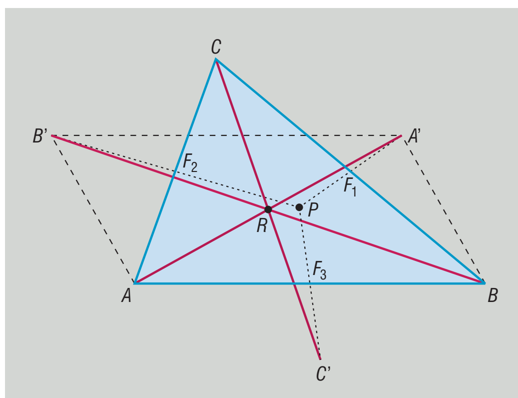
1627 *a)* Megmutatjuk, hogy a $B'A'$ szakasz hossza a P pont helyzetétől függetlenül megegyezik az AB oldal hosszával.



A tükrözésből következően az $APCB'$ négyszög paralelogramma (középpontosan szimmetrikus az AC oldal F_2 felezőpontjára vonatkozóan), ezért AB' párhuzamos PC-vel, továbbá $AB' = PC$. Ugyanilyen megfontolásból paralelogramma a $CPBA'$ négyszög is, ezért BA' párhuzamos PC-vel, továbbá $BA' = PC$. Azt kapjuk tehát, hogy AB' és BA' ugyanazzal a PC szakasszal párhuzamos, ezért a két szakasz egymással is párhuzamos. Természetesen $AB' = BA' = PC$ is teljesül. Ekkor viszont az $ABA'B'$ négyszögben két szemközti oldal párhuzamos és ugyanolyan hosszúságú, így $ABA'B'$ paralelogramma, amiből azonnal következik, hogy $B'A' = AB$, amit bizonyítani kívántunk.

Hasonlóan igazolható, hogy $A'C'$ az ABC háromszög CA, és $B'C'$ a CB oldalával egyenlő hosszúságú.

b) Az *a)* feladatban igazoltuk, hogy az $ABA'B'$ négyszög paralelogramma. Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért ha az AA' és BB' szakaszok egymást az R pontban metszik, akkor az R pont egybeesik mindkét szakasz felezőpontjával.



Természetesen ugyanígy paralelogramma az $AC'A'C$ négyszög is, ezért AA' és CC' is felezik egymást. Ezt másként is megfogalmazhatjuk: a CC' szakasz az AA' szakaszt annak R felezőpontjában metszi. Ezzel igazoltuk, hogy az AA', BB' és CC' szakaszok valóban egy pontban, a közös felezőpontjukban metszik egymást.

Háromszögek, négyszögek néhány nevezetes vonala (súlyvonal, magasságvonal, középvonal) – megoldások

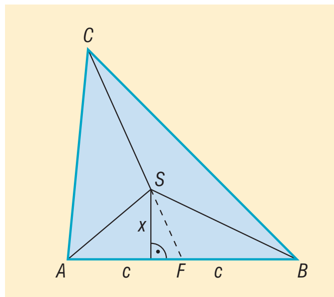
1628 *a)* A háromszög középvonalának hossza a végpontjait nem tartalmazó oldal hosszának felével egyenlő.
b) A paralelogramma középvonalának hossza a végpontjait nem tartalmazó oldal hosszával egyenlő.
c) A trapéz szárainak felezőpontjait összekötő középvonalának hossza az alapok hosszának számtani közepével egyenlő.

1629 Az eredeti háromszög kerülete 28,5 cm.

1630 A vadásznak összesen 97,5 perc szükséges az út megtételéhez.

1631 A háromszög súlyvonala a háromszöget két olyan háromszögre bontja, amelyeknek egy-egy oldala megegyezik, valamint az ezekhez tartozó magasságuk is egyenlő. Ebből adódóan a két háromszög területe is egyenlő.

1632 Az ABC háromszög súlypontját S-sel, az AB oldal felezőpontját F-fel, az $AF = FB$ szakasz hosszát c-vel jelöltük. Az előző feladat eredménye alapján $T_{AFC} = T_{FBC}$. Ugyanakkor az AFS és FBS háromszögekben egy-egy oldal egyenlő ($AF = FB = c$), a hozzájuk tartozó magasság pedig közös (x), ezért területük is megegyezik, így $T_{AFS} = T_{FBS}$. Ha egyenlő területű síkidomokból egyenlő területűeket veszünk el, akkor a visszamaradó síkidomok területe is megegyezik, azaz $T_{AFC} - T_{AFS} = T_{FBC} - T_{FBS}$, amiből azt kapjuk, hogy $T_{ASC} = T_{SBC}$. Hasonló gondolatmenettel láthatjuk, hogy $T_{SBC} = T_{ASB}$ is teljesül, amivel a feladat állítását igazoltuk.



1633 Megoldás lehet, ha a tortát a középvonalak mentén vágjuk fel. Mivel a keletkező négy tortaszeletben az oldalak páronként megegyeznek, ezért a területük is egyenlő.

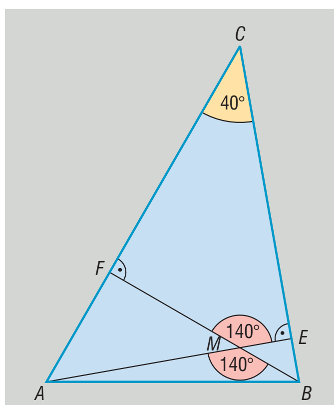
Szintén igazságos daraboláshoz jutunk, ha a háromszög egyik oldalát négy egyenlő részre osztjuk, majd az osztópontokat az oldallal szemközti csúcsokkal összekötjük. A négy keletkező háromszög egy-egy oldala egyenlő hosszúságú, az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságok pedig közösek, így a háromszögek területe valóban egyenlő.

1634 Az ilyen tulajdonságú pontok a rögzített oldallal párhuzamos középvonalon találhatók. A középvonal minden pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

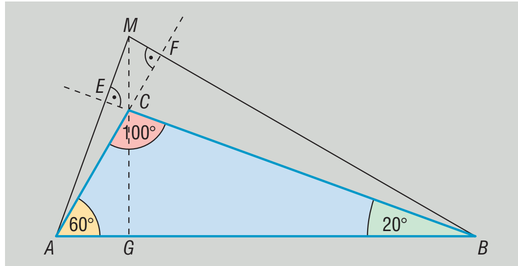
1635 *a)* A háromszög szabályos, így minden oldala 120°-os szögben látszik a magasságpontból.
b) Az ábra jelöléseivel $CAB\sphericalangle = 60°$, $CBA\sphericalangle = 80°$ így $ACB\sphericalangle = 40°$. A $CFME$ négyszögben ismert három szög nagysága, valamint az E és F csúcsoknál derékszögek vannak, ezért:

$$FME\sphericalangle = 180° - 40° = 140°.$$

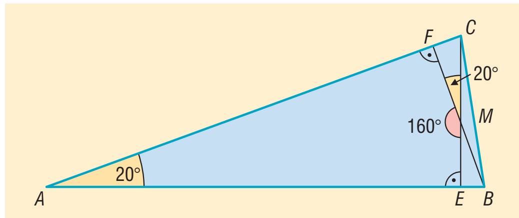
Mivel az $AMB\sphericalangle$ és $FME\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért egyenlők, így $AMB\sphericalangle = 140°$, és az AB oldal a magasságpontból 140°-os szög alatt látszik. Ugyanilyen gondolatmenettel számolható, hogy a BC oldal a magasságpontból 120°-os, míg az AC oldal 100°-os szög alatt látszik.



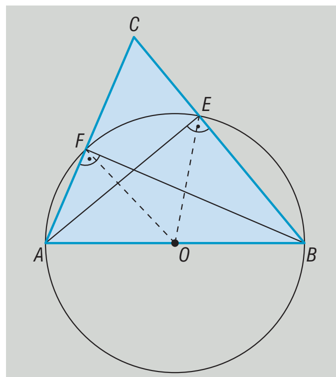
c) A háromszög ebben az esetben tompaszögű, ezért magasságpontja a háromszögön kívül található. Az *ECFM* négyszögben a *C* csúcsnál 100°-os, az *E* és *F* csúcsoknál 90°-os szögek vannak, ezért *EMF*∢ = *AMB*∢ = 80°, azaz az *AB* oldal a magasságpontból 80°-os szög alatt látszik. Az *AMG*∢, valamint az *EBA*∢ merőleges szárú szögpárt alkot, és mivel mindkettő hegyesszög, ezért megegyeznek, tehát az *AC* oldal a magasságpontból 20°-os szög alatt látszik. A *BC* oldal 60°-os szögben látható az *M* magasságpontból.



1636 Ha a *BF* és *CE* magasságvonalak 20°-os szögben metszik egymást, és *M* a háromszög magasságpontja, akkor az *AEMF* négyszögben az *E*, valamint *F* csúcsoknál 90°-os, az *M* csúcsnál 160°-os szögek vannak. Ebből adódóan az *ABC* háromszög *A* csúcsánál lévő szög 20°-os.

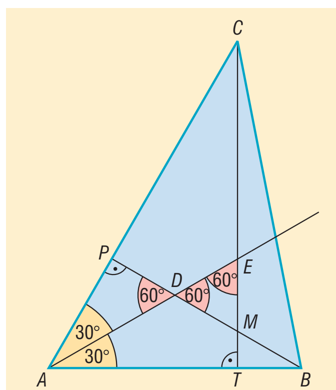


1637 Az *ABC* háromszög *BF* és *CE* magasságai két derékszögű háromszöget is kialakítanak a háromszögben; az *ABF* és *ABE* háromszögekben az átfogó közös, éppen az *AB* oldallal egyezik meg. Thalész tételének megfordítása alapján a derékszögű csúcsok, azaz *F* és *E* illeszkednek az *AB* átmérőjű körre. A kör középpontja egybeesik az *AB* oldal *O* felezőpontjával. Ekkor viszont *OF* és *OE* egy-egy sugár a körben, ezért hosszuk megegyezik.



1638 Ha a *B*-ből induló magasságvonal talppontját *P*, a *C*-ből indulóét *T* jelöli, akkor az *ADP* derékszögű háromszögben az *A* csúcsnál 30°-os, így a *D* csúcsnál 60°-os szög van. Az *EDM* háromszög *D* csúcsánál lévő szög szintén 60°-os, hiszen az előbbi szög csúcsszöge. Az *AET* derékszögű háromszögben az *A* csúcsnál 30°-os, ezért az *E* csúcsnál 60°-os szög van. Ezzel beláttuk, hogy az *EDM* háromszög két szöge is 60°-os, és így a háromszög valóban szabályos.

Megjegyezzük, hogy amennyiben az *ABC* háromszög szabályos, úgy az *E*, *D*, *M* pontok egybeesnek, ezért az *EDM* háromszög nem jön létre. Ha az *ABC* háromszög tompaszögű, akkor a bizonyítás a hegyesszögű esethez hasonlóan végezhető el.



1639 A feladatnak két megoldása van. Ha Peti a paralelogrammát a 12 cm-es oldallal párhuzamos középvonala mentén vágta szét, akkor a másik oldal hossza 13 cm. Ha szétvágás nem a 12 cm-es oldallal párhuzamos középvonal mentén történt, akkor a paralelogramma másik oldalának hossza 12,5 cm.

1640 A paralelogramma kerülete 60 cm.

1641 A paralelogrammát bármely középvonala, illetve bármely átlója két egyenlő területű részre vágja szét. Az 1614. feladat eredménye alapján bármely olyan egyenes, amely átmegy a paralelogramma középpontján, szintén egyenlő területű részekre bontja a paralelogrammát.

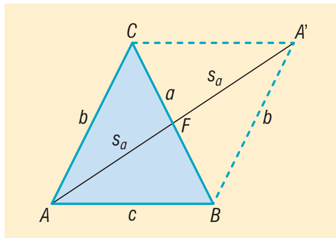
1642 A trapéz alapjait $2 \cdot x$, illetve $3 \cdot x$ alakban kereshetjük. A feltételek alapján

$$\frac{2 \cdot x + 3 \cdot x}{2} = 15 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

A trapéz alapjai tehát 12 cm, illetve 18 cm hosszúak.

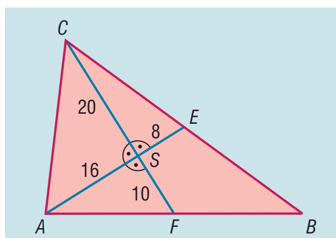
1643 A szárakat összekötő középvonal 9 cm hosszúságú. A keletkező két trapéz középvonalainak hossza 7 cm, illetve 11 cm.

1644 *a)* Tegyük fel, hogy az ABC háromszög A csúcsánál hegyesszög van. Tükrözzük középpontosan a háromszöget az a oldal F felezőpontjára. Eredményül az $ABA'C$ paralelogrammát kapjuk (ld. ábra). A paralelogramma egyik átlója az ABC háromszög a oldalával, másik átlója, vagyis az AA' szakasz pedig az a oldalhoz tartozó súlyvonalának kétszeresével egyenlő hosszúságú. A feltételek szerint az ABC háromszögben az A csúcsnál hegyesszög van, amiből következik, hogy az $AA'B$ háromszögben a B csúcsnál tompaszög van. Ennek belátásához elegendő emlékeznünk arra, hogy a paralelogramma egy oldalán fekvő szögeinek összege 180º. Az említett két háromszögben két-két oldal egyenlő, hiszen az AB oldal közös bennük, továbbá $AC = BA'$ a tükrözés tulajdonságai alapján. A két háromszög harmadik oldalai közül nyilvánvalóan az a nagyobb, amelyik a tompaszöggel szemközt van, azaz $2 \cdot s_a > a$, ami egyenértékű a bizonyítandó állítással.



b) A feladat állítása az *a)* feladatban bemutatott bizonyítás értelemszerű változtatásával igazolható.

1645 *a)* Legyenek a telek csúcsai A, B és C, a BC oldal felezőpontja E, az AB oldalé F. Tegyük fel továbbá, hogy $AE = 24$ méter, $CF = 30$ méter. Ha a két súlyvonal metszéspontja S, akkor lévén a súlypont $2:1$ arányban osztja fel a súlyvonalakat, azt kapjuk, hogy $AS = 16$, illetve $SE = 8$ méter, továbbá $CS = 20$, illetve $SF = 10$ méter. A feltételek alapján az ACS, ECS és AFS háromszögek mind derékszögűek, így azokban rendre alkalmazva Pitagorasz tételét az átfogókat kiszámolhatjuk. Nem túl bonyolult számolásokkal a megfelelő kerekítések után $AC = 25{,}6$ méter, $EC = 21{,}5$ méter, végül $AF = 18{,}9$ méter. A telek oldalai tehát 25,6 méter, 43 méter, 37,8 méter.



b) A telek körbekerítéséhez 25,6 + 43 + 37,8 = 106,4 méter kerítést kell Béla bácsinak vennie.

c) Sajnos Béla bácsit váratlan meglepetések érhetik, ha a *b)* feladatban kiszámolt hosszúságú kerítéssel próbálja körbekeríteni a telkét. Ha ugyanis a számolásokat nem egy tizedes pontossággal végezzük, akkor láthatjuk, hogy

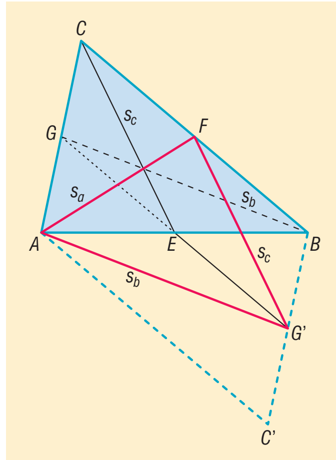
$$AC = \sqrt{656} > 25{,}61 \text{ m}; \quad EC = \sqrt{464} > 21{,}54 \text{ m}; \quad AF = \sqrt{356} > 18{,}86 \text{ m}.$$

A kapott egyenlőtlenségek felhasználásával a telek kerületére egy alsó becslést kaphatunk:

$$K_{ABC} > 25{,}61 + 2 \cdot 21{,}54 + 2 \cdot 18{,}86 = 106{,}41 \text{ méter},$$

ami mutatja, hogy a *b)* feladatban kapott 106,4 méter hosszú kerítés nem elegendő a körbekerítéshez. Béla bácsi szerencsésebben járt volna, ha a számításoknál ezúttal nem a kerekítés szabályait követte volna, hanem minden lépésben felfelé kerekít. Így elkerülhető az a rendkívül bosszantó helyzet, hogy a vásárolt kerítés pár centiméterrel rövidebb, mint a telek kerülete.

1646 Jelölje az ABC háromszög oldalainak felezőpontját E, F, G, súlyvonalait s_a, s_b, s_c az ábrának megfelelően. Tükrözzük az ABC háromszöget, valamint a G pontot az E pontra. A tükrözés során a B és A pontok „helyet cserélnek", a C pont képe C', továbbá a G pont képe a BC' szakasz G' felezőpontja. Az elmondottakból adódóan a $BG = s_b$ súlyvonal az AG' szakaszba megy át.

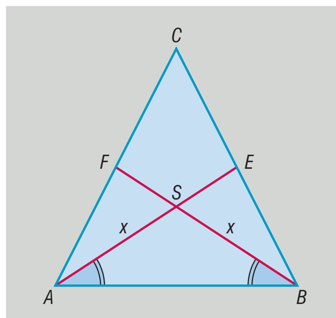


A továbbiakban megmutatjuk, hogy a $CEG'F$ négyszög paralelogramma. A középpontos tükrözés megtartja a szakaszok hosszát, ezért $EG = EG'$, továbbá természetesen E, G, G' egy egyenesre illeszkednek. Mivel EG az ABC háromszög egyik középvonala, ezért párhuzamos a megfelelő oldallal, azaz BC-vel, továbbá EG hossza BC hosszának fele, azaz $EG = CF$. Ezek szerint EG' és CF is megegyezik EG-vel, amiből persze azonnal következik, hogy $EG' = CF$. Természetesen CF nemcsak EG-vel, hanem a tartalmazó egyenesével is, így EG'-vel is párhuzamos. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $CEG'F$ négyszögben két szemközti oldal egyenlő, valamint párhuzamos, ezért valóban paralelogramma. De ha négyszögünk paralelogramma, akkor a másik két oldala is párhuzamos és egyenlő, így $G'F = CE = s_c$.

Tekintsük végül az $AG'F$ háromszöget. A háromszög oldalai: $AG' = s_b$, $G'F = s_c$, $FA = s_a$, ami szépen mutatja, hogy a háromszög súlyvonalaiból valóban lehet háromszöget szerkeszteni.

1647 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben az AE és BF súlyvonalakra $AE = BF = x$. Ha S a háromszög súlypontja, akkor S mindkét súlyvonalat $2:1$ arányban osztja fel, ezért:

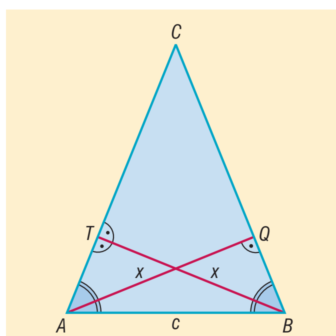
$$AS = BS = \frac{2}{3} \cdot x,$$



amiből azt kapjuk, hogy az ABS háromszög egyenlő szárú. Az egyenlő szárú háromszögekben az alapon fekvő szögek megegyeznek, így $SAB\sphericalangle = SBA\sphericalangle$. Ekkor az ABE és BAF háromszögekben két-két oldal, valamint az általuk bezárt szög megegyezik, ezért a két háromszög egybevágó, amiből persze következik, hogy $AF = BE$. Vegyük figyelembe, hogy E és F oldalfelező pontok, ezért $AC = BC$, azaz az ABC háromszög is egyenlő szárú. Azt kaptuk tehát, hogy ha egy háromszögben két súlyvonal egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Az iménti megállapításból azonnal következik, hogy ha egy háromszög mindhárom súlyvonala ugyanakkora, akkor a háromszög bármely két oldala megegyezik, azaz a háromszög valóban szabályos. Tehát csak a szabályos háromszögben egyezik meg a három súlyvonal hossza.

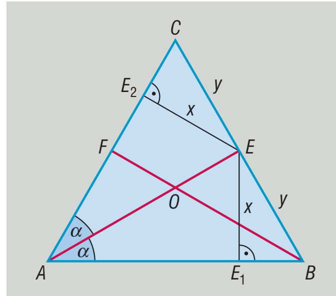
1648 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben az AQ és BT magasságokra $AQ = BT = x$. Ekkor az ABQ és BAT háromszögek derékszögűek, így bennük két-két oldal, valamint a nagyobbal szemközti szög megegyezik. A két háromszög tehát egybevágó, ezért a megfelelő befogóikkal szemközti hegyesszögeik is egyenlők, azaz $TAB\sphericalangle = QBA\sphericalangle$.



Megállapításunkból azonnal adódik, hogy az ABC háromszög AB oldalán fekvő szögei egyenlők, ezért az ABC háromszög egyenlő szárú és $AC = BC$. Azt kaptuk tehát, hogy ha egy háromszögben két magasság ugyanolyan hosszúságú, akkor azok az oldalak is megegyeznek, amelyekhez a magasságok tartoznak.

Ebből persze az is következik, hogy ha mindhárom magasság egyenlő, akkor mindhárom oldal is megegyezik, azaz a háromszög szabályos. Tehát csak a szabályos háromszögekben egyezik meg a három magasság hossza.

1649 Ha az ABC háromszögben a beírt kör O középpontja egyben súlypont is, akkor az AO szögfelező a BC oldalt az E felezőpontban metszi (ld. ábra), azaz $BE = CE$. Állítsunk merőlegest az E pontból az AB és az AC oldalakra, a talppontokat jelöljük E_1-gyel, illetve E_2-vel. Mivel az E pont az A csúcsból induló szögfelező egy pontja, ezért a szögszáraktól egyenlő távolságra van, azaz $EE_1 = EE_2$. Ekkor viszont az EE_1B és EE_2C derékszögű háromszögekben két-két oldal megegyezik, ezért pl. Pitagorasz tételének alkalmazásával belátható, hogy a harmadik oldalak is megegyeznek, azaz $BE_1 = CE_2$.

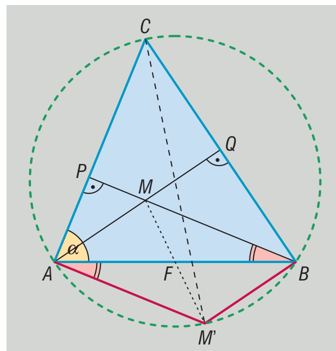


Ugyanezzel a gondolatmenettel belátható, hogy $AE_1 = AE_2$ is teljesül. Eredményeinket összefoglalva azt kapjuk, hogy $AB = AE_1 + BE_1 = AE_2 + CE_2 = AC$, azaz az ABC háromszög egyenlő szárú. Ha most abból indulnánk ki, hogy az O pont a B csúcsból induló szögfelezőnek is pontja, akkor azt kapnánk, hogy $AB = BC$, ami előző eredménnyel együtt mutatja, hogy az ABC háromszög szabályos.

1650 *a)* Jelöljük a B és A csúcsokhoz tartozó magasságvonalak talppontjait P-vel és Q-val. Mivel az F pontra vonatkozó tükrözés során az $MBA\sphericalangle$ képe az $M'AB\sphericalangle$, ezért $MBA\sphericalangle = M'AB\sphericalangle$. Az $AM'BC$ négyszög A csúcsánál lévő szög

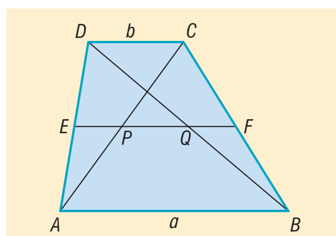
$$M'AC\sphericalangle = \alpha + M'AB\sphericalangle = \alpha + MBA\sphericalangle = 90°,$$

hiszen az utolsó egyenlőség bal oldalán álló szögek az ABP derékszögű háromszög hegyesszögei. Hasonló gondolatmenettel mutatható meg, hogy a B csúcsnál lévő szög szintén derékszög.



b) Az *a)* feladat eredményét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a CM' szakasz mind az A, mind a B pontból 90°-os szög alatt látszik. Thalész tételének megfordítása alapján ezért A és B rajta van a CM' szakaszon, mint átmérő fölé emelt körön. Ebből azonnal következik, hogy az M' pont az ABC háromszög köré írt körön található.

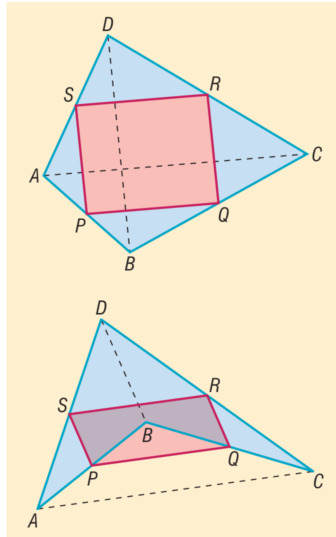
1651 Húzzuk meg az $ABCD$ trapéz szárainak felezőpontját összekötő EF középvonalát az ábrának megfelelően. Tegyük fel, hogy a középvonal az átlókat a P és Q pontokban metszi. A trapéz szárakat összekötő középvonala párhuzamos az alapokkal, ezért elegendő igazolnunk, hogy P az AC, Q a BD átló felezőpontja. Mivel azonban EP párhuzamos a DC alappal és E az AD oldal felezőpontja, ezért EP szükségképpen a CDA háromszög CD-vel párhuzamos középvonala, így P az AC szakasz felezőpontja. Hasonlóan igazolható, hogy Q a BD átló felezőpontja.



Kiszámítjuk a PQ szakasz hosszát. A trapéz megfelelő középvonalára $EF = \frac{a+b}{2}$, továbbá a CDA és CDB háromszögek EP és QF középvonalaira $EP = QF = \frac{b}{2}$. Innen PQ hossza már könnyen számolható, hiszen

$$PQ = EF - (EP + QF) = \frac{a+b}{2} - 2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2} \quad (a > b).$$

1652 *a)* Az $ABCD$ konvex négyszög oldalfelező pontjai az ábra jelöléseinek megfelelően legyenek P, Q, R, S.

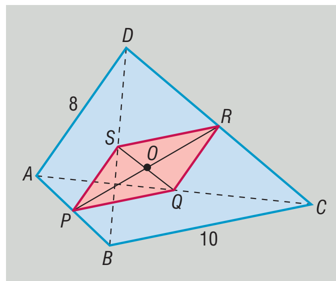


Az SR szakasz középvonala az ACD háromszögnek, ezért SR párhuzamos AC-vel, és hossza AC hosszának fele. Hasonlóan; a PQ szakasz középvonal az ACB háromszögben, ezért PQ is párhuzamos AC-vel, és PQ hossza is AC hosszának fele. Mivel SR és PQ ugyanazzal a szakasszal párhuzamosak, ezért SR és PQ párhuzamosak, és nyilván hosszuk is megegyezik. Azt kaptuk tehát, hogy a $PQRS$ négyszögben a szemközti oldalak párhuzamosak és egyenlők, ezért a négyszög paralelogramma, vagyis valóban középpontosan szimmetrikus.

Hasonló állítás érvényes konkáv négyszögekben is. A bizonyítás ugyanúgy végezhető, mint a konvex esetben.

b) Az $ABCD$ négyszög középvonalai a $PQRS$ paralelogramma átlói, amelyekről közismert, hogy felezik egymást. Ezért a négyszög középvonalai is felezik egymást.

1653 *a)* A PS szakasz középvonal az ADB háromszögben, illetve a QR szakasz középvonal az ADC háromszögben, ezért mind PS, mind QR párhuzamos az AD oldallal, hosszuk pedig az AD oldal hosszának fele, azaz 4 cm. Hasonlóan láthatjuk be, hogy PQ és SR párhuzamos a BC oldallal, hosszuk a BC oldal hosszának fele, azaz 5 cm.

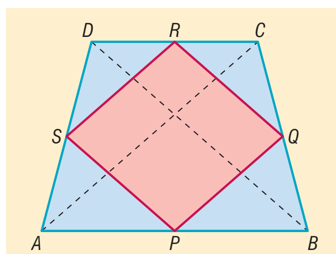


Az elmondottakból következik, hogy a $PQRS$ négyszög paralelogramma.

b) A $PQRS$ négyszög kerülete 18 cm.

c) Az 1652. feladat eredményei alapján tudjuk, hogy a négyszög középvonalai felezik egymást, ezért az $ABCD$ négyszög középvonalainak metszéspontja éppen a PR középvonal O felezőpontja. Másrészt a $PQRS$ paralelogramma átlói is felezik egymást, ezért az O pont egyben e paralelogramma átlóinak a metszéspontja is.

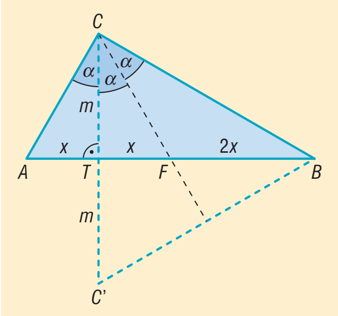
1654 Az 1652. feladat alapján a $PQRS$ négyszög paralelogramma, amelynek oldalai feleakkorák, mint az $ABCD$ négyszög megfelelő átlói. Mivel a szimmetrikus trapézban az átlók egyenlő hosszúak, ezért a $PQRS$ paralelogramma oldalai is egyenlők, azaz $PQRS$ rombusz. A négy pont akkor alkot négyzetet, ha az $ABCD$ trapéz átlói merőlegesek egymásra.



1655 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben a C csúcsból induló CT magasság, valamint a CF súlyvonal a C csúcsnál lévő szöget három egyenlő részre osztja. A CT szakasz az AFC háromszögben is magasság, ráadásul megfelezi az $ACF\sphericalangle$-et, ezért a háromszög egyenlő szárú, így az AF alaphoz tartozó magassága megfelezi az alapot is, azaz $AT = TF = x$. Mivel F az AB szakasz felezőpontja, ezért $FB = 2 \cdot x$.

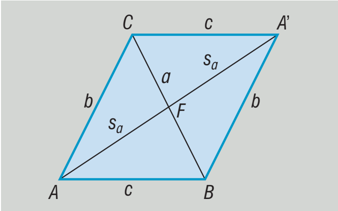
Tükrözzük a TBC háromszöget a TB egyenesre; a C pont képét jelöljük C'-vel. A $C'CB$ háromszög nyilvánvalóan egyenlő szárú ($CB = C'B$), így BT a háromszög egy súlyvonala és szögfelezője is

egyben. Vegyük észre, hogy az F pont a BT súlyvonalat éppen $2:1$ arányban osztja (a csúcstól számítva), amiből következik, hogy F a $C'CB$ háromszög súlypontja! Mivel a CF súlyvonal a C csúcsnál lévő szöget megfelezi, ezért CF szintén szögfelezője a háromszögnek.



Összefoglalva; a $C'CB$ háromszögben F súlypont és a szögfelezők metszéspontja, azaz a beírt kör középpontja is egyben. Az 1649. feladat állítása alapján a $C'CB$ háromszög szabályos, amiből $2 \cdot \alpha = 60°$, $\alpha = 30°$ adódik. Az ABC háromszög szögei már könnyen számolhatók: 60°, 90°, 30°.

1656 Tükrözzük az ABC háromszöget a BC oldal F felezőpontjára. A kapott háromszög az eredetivel együtt az $ABA'C$ paralelogrammát alkotja, amelynek oldalai b és c, átlói $AA' = 2 \cdot s_a$, $BC = a$ (ld. ábra).



A *Háromszögek, négyszögek, sokszögek* című fejezet 1355. feladatában igazoltuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő oldalainak négyzetösszegével.

Alkalmazva ezt a tételt az $ABA'C$ paralelogrammára, azt kapjuk, hogy

$$a^2 + (2 \cdot s_a)^2 = 2 \cdot (b^2 + c^2),$$

amiből az a oldalhoz tartozó súlyvonal négyzetét kifejezve adódik, hogy

$$s_a^2 = \frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Ehhez hasonlóan a háromszög másik két oldalának súlyvonalára felírhatjuk, hogy

$$s_b^2 = \frac{2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2}{4} \quad \text{és} \quad s_c^2 = \frac{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

A kapott egyenlőségek megfelelő oldalait összeadva, majd jobb oldalon a kijelölt műveleteket, illetve lehetséges összevonásokat elvégezve

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}{4},$$

amit éppen bizonyítani kellett.

1657 *a)* Az 1656. feladatban kifejeztük a háromszög súlyvonalait az oldalak segítségével. Az ott bebizonyított összefüggéseket felhasználva:

$$s_a^2 + s_b^2 = 5 \cdot s_c^2,$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2}{4} = 5 \cdot \frac{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

Mindkét oldalt 4-gyel megszorozva, majd a műveleteket elvégezve azt kapjuk, hogy

$$a^2 + b^2 + 4 \cdot c^2 = 10 \cdot a^2 + 10 \cdot b^2 - 5 \cdot c^2,$$

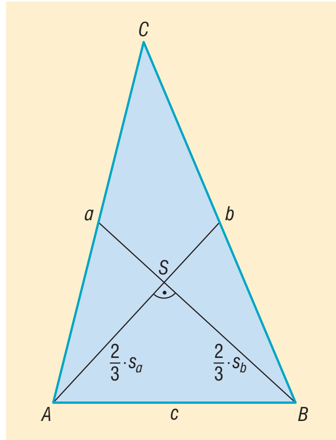
$$9 \cdot c^2 = 9 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2,$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Átalakításaink ekvivalensek voltak, így Pitagorasz tétele alapján a súlyvonalakra vonatkozó feltétel valóban akkor és csak akkor teljesül, ha a háromszög derékszögű.

b) Az ABC háromszög s_a és s_b súlyvonalai pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha az ASB derékszögű háromszög oldalai eleget tesznek a Pitagorasz-tétel feltételének, azaz

$$\left(\frac{2}{3}\cdot s_a\right)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot s_b\right)^2=c^2.$$



Mindkét oldalt 9-cel megszorozva, majd a súlyvonalak négyzete helyett az 1656. feladatban bizonyított összefüggéseket beírva azt kapjuk, hogy

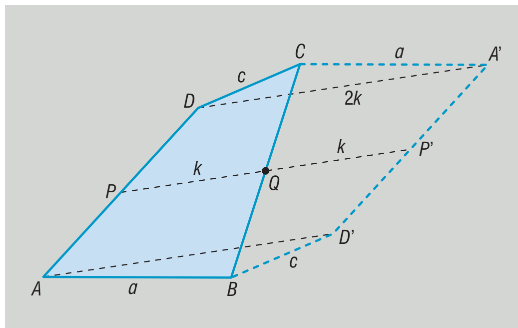
$$2\cdot(b^2+c^2)-a^2+2\cdot(a^2+c^2)-b^2=9\cdot c^2.$$

Az egynemű tagok összevonása után adódik, hogy

$$a^2+b^2=5\cdot c^2.$$

Átalakításaink ekvivalensek voltak, így a feladat állítását igazoltuk.

1658 *a)* A Q pontot tartalmazó középvonal másik végpontját P, a Q pontra vonatkozó tükörképét P', a PQ középvonal hosszát k jelöli az ábrán. A keletkező $ABD'A'CD$ hatszög származtatásából eredően középpontosan szimmetrikus és középpontja a Q pont. A középpontos tükrözés a szakaszt önmagával párhuzamos szakaszba visz át, ezért a hatszög szemközti oldalai párhuzamosak, a távolságtartó tulajdonság miatt pedig egymással egyenlő hosszúak.

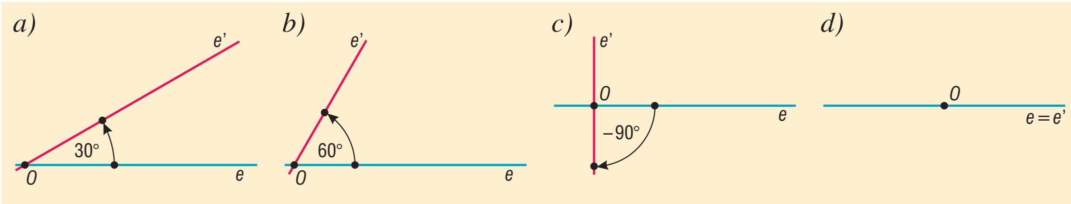


b) Tekintsük a $PP'A'D$ négyszöget. A négyszög PD és $P'A'$ oldalai párhuzamosak, és mindkettő feleakkora, mint az $ABCD$ négyszög AD oldala. Az elmondottakból adódóan a $PP'A'D'$ négyszög paralelogramma, ezért PP' és DA' is párhuzamos, valamint ugyanakkora hosszúságú. Mivel a középpontos tükrözésnél pont, annak képe, valamint a tükrözés középpontja egy egyenesre illeszkednek, ezért a PP' egyenes tartalmazza a Q pontot, amiből következik, hogy $PP'=2\cdot PQ=2\cdot k$, így végül $DA'=2\cdot k$ is teljesül. Ugyanilyen gondolatmenettel bebizonyítható, hogy $AD'=2\cdot k$. Eszerint az $ABD'A'CD$ hatszög AD' és DA' átlója is kétszer olyan hosszú, mint a PQ középvonal. Megjegyezzük, hogy többet mutattunk meg a feladat állításánál; a két átló nemcsak kétszer olyan hosszú, mint PQ, hanem párhuzamos is a középvonallal.

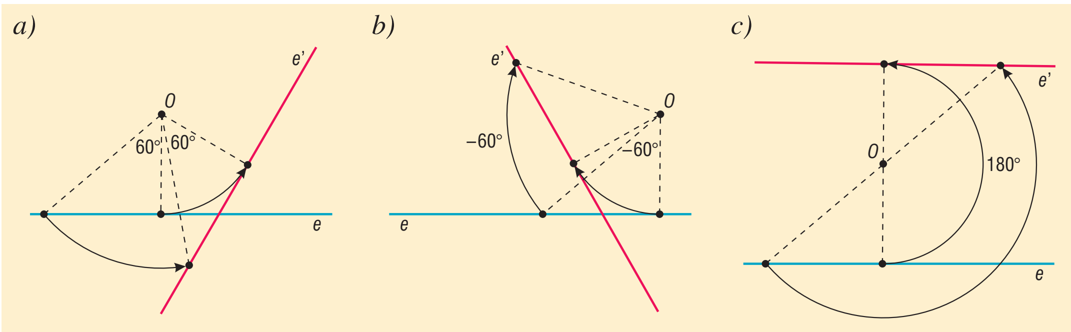
c) Ha alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget a $DA'C$ háromszögben, akkor azt kapjuk, hogy $2\cdot k\le a+c$, ahol a és c az $ABCD$ négyszög PQ középvonalának végpontjait nem tartalmazó oldalainak a hosszát jelöli. A felírt egyenlőtlenség mutatja, hogy a PQ középvonal hossza valóban nem lehet nagyobb a megfelelő oldalak számtani közepénél. Megjegyezzük, hogy egyenlőség esetében a $DA'C$ háromszög egy szakasszá fajul. Ez akkor fordul elő, ha AB, illetve CD párhuzamosak, azaz az $ABCD$ négyszög trapéz.

Forgatás – megoldások

1659

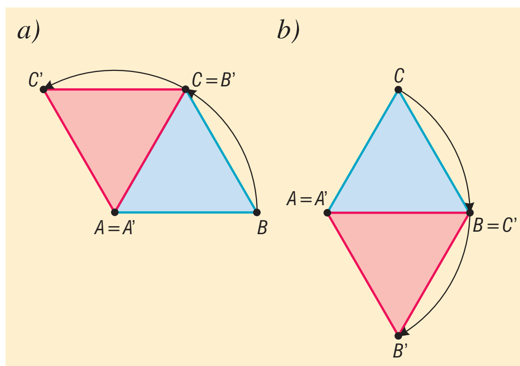


1660

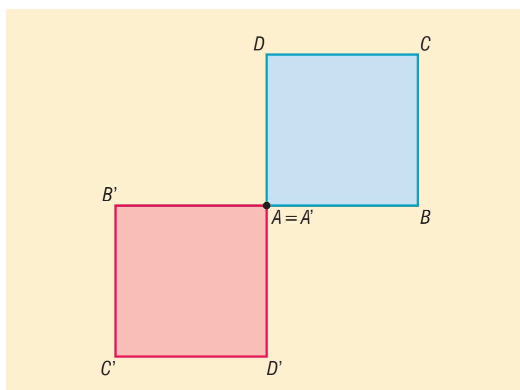


d) Mivel $300° = 360° - 60°$, és a 360°-os forgatás a helybenhagyással egyenértékű transzformáció, ezért a forgatás szöge $-60°$, így a feladat megoldása megegyezik a *b)* feladatéval.

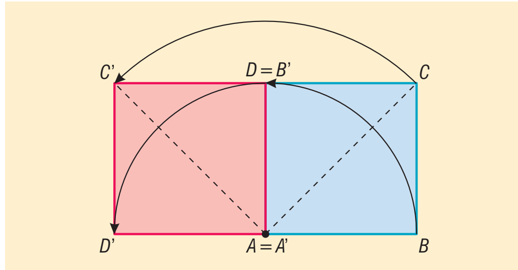
1661 A két háromszög egyesítése mindkét esetben rombuszt alkot, amelynek hegyesszöge 60°-os, tompaszöge 120°-os. Az ábrák az A csúcs körüli forgatások eredményét szemléltetik.



1662 *a)* $-1980° = 5 \cdot (-360°) - 180°$, ezért a forgatás szöge $-180°$-kal helyettesíthető. A szög mértéke mutatja, hogy gyakorlatilag az A csúcsra vonatkozó középpontos tükrözésről van szó.



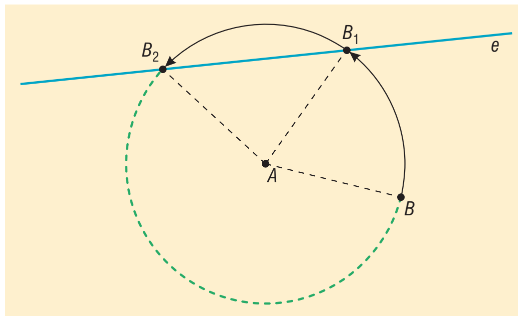
b) $4410° = 12 \cdot 360° + 90°$, ezért a forgatás szöge 90°-kal helyettesíthető. Az ábra az *A* csúcs körüli forgatás eredményét mutatja.



1663 *a)* $A'(-1; 3)$, $B'(-5; -2)$, $C'(2; -4)$; *b)* $A'(1; -3)$, $B'(5; 2)$, $C'(-2; 4)$;
c) $A'(-3; -1)$, $B'(2; -5)$, $C'(4; 2)$; *d)* $A'(-3; -1)$, $B'(2; -5)$, $C'(4; 2)$;
e) $A'(1; -3)$, $B'(5; 2)$, $C'(-2; 4)$; *f)* $A'(-1; 3)$, $B'(-5; -2)$, $C'(2; -4)$.

1664 A sík végtelen sok pontja tesz eleget a feltételeknek. A megfelelő pontok a két adott pont közti szakasz felezőmerőlegesének pontjai.

1665 A *B* pont képét az *A* középpontú, *B* ponton átmenő kör metszi ki az *e* egyenesből. Attól függően, hogy a kör és az egyenes milyen helyzetűek, 2, 1 vagy 0 olyan pont létezik az egyenesen, amelybe a *B* pont forgatással átvihető (ezeket az ábrán B_1 és B_2 jelöli). (➡)



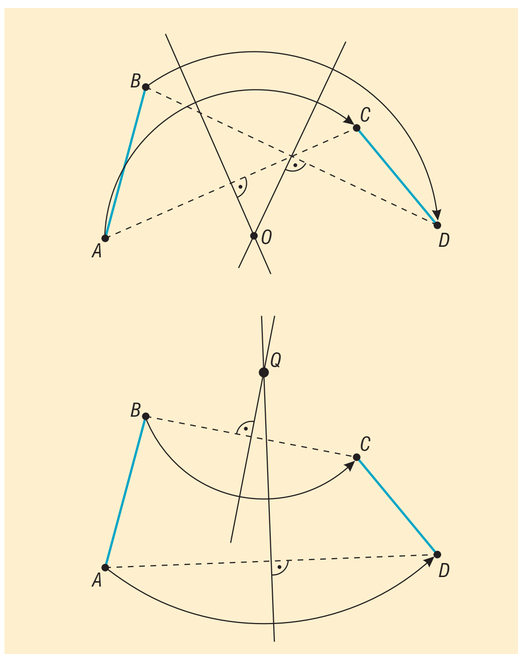
1666 Az *A* középpontú, *B* ponton átmenő kör kimetszi az *e* egyenesből azokat a pontokat, amelyek forgatással átvihetők a *B* pontba. A pontok ismeretében a forgatás szöge meghatározható.

Megjegyzés: A feladat nem hajtható végre, ha *B* közelebb van *A*-hoz, mint *e*.

1667 A két egyenlő hosszúságú szakaszt jelöljük *AB*-vel és *CD*-vel. A megfelelő forgatás középpontja egyenlő távolságra van az egymásnak megfelelő pontoktól, ezért pl. az *AC* és a *BD* szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontjaként kaphatjuk (a felső ábrán *O*-val jelöltük).

Szintén egy megfelelő forgatás középpontja a *BC* és az *AD* szakaszok felezőmerőlegesének *Q* metszéspontja (alsó ábra).

Az ismertetett szerkesztési eljárások nem adnak helyes megoldást, ha pl. a *BC* és *AD* szakaszok párhuzamosak egymással, hiszen ebben az esetben felezőmerőlegeseik egybeesnek. Ez akkor fordul elő, ha az *ABCD* négyszög húrtrapéz. Ebben az esetben az egyik forgatás középpontja a négyszög köré írható kör középpontja, a másik forgatás középpontja pedig a keletkező húrtrapéz szárait tartalmazó egyenesek metszéspontja.



1668 Az ilyen forgatás középpontja az A és B pontoktól egyenlő távolságra van, ezért illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére. Ugyanakkor a forgatás középpontjából az AB szakasz 90º-os szög alatt látszik, ezért illeszkedik az AB szakasz fölé emelt Thalész-körre is. A forgatás középpontját tehát a Thalész-kör és a szakaszfelező merőleges metszéspontjaként szerkeszthetjük. Látható, hogy a feladat feltételeinek két pont is eleget tesz.

1669 *a)* A szabályos háromszöget a körülírt körének középpontja körüli, $k \cdot 120°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatások hagyják helyben.

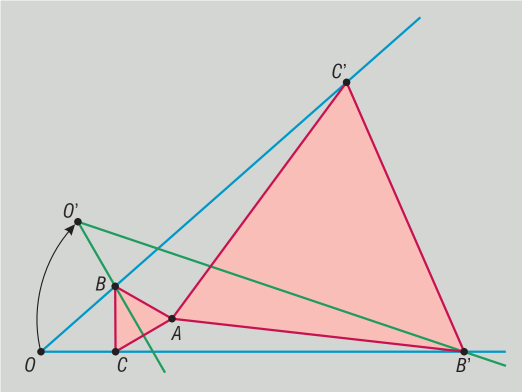
b) A négyzetet a középpontja körüli $k \cdot 90°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatások hagyják helyben.

c) A szabályos n szöget a középpontja körüli $k \cdot \frac{360°}{n}$ szögű forgatások hagyják helyben, ahol k egész számot jelöl.

1670 A szerkesztés lépései:

1. Az O csúcsú szöget az A pont körül elforgatjuk $-60°$-kal (vagy akár 60º-kal).
2. A szög elforgatott képe kimetszi az eredeti szög megfelelő száraiból a B és B' pontokat.
3. A B és B' pontokat az A pont körül 60º-kal ($-60°$-kal) elforgatjuk. A képpontok C és C'. Ekkor az ABC és $AB'C'$ háromszögek szabályosak.

Megjegyzés: A szerkeszthetőség feltétele, hogy az elforgatott szög valamely szára metssze az eredeti szög másik szárát.



1671 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Igaz. *d)* Hamis. *e)* Hamis. *f)* Igaz. *g)* Hamis. *h)* Igaz. *i)* Igaz. *j)* Igaz. *k)* Hamis. *l)* Hamis. *m)* Igaz.

1672 *a)* $\frac{\pi}{12}$; *b)* $\frac{\pi}{6}$; *c)* $\frac{\pi}{4}$; *d)* $\frac{\pi}{3}$; *e)* $\frac{\pi}{2}$; *f)* π; *g)* $\frac{4 \cdot \pi}{3}$; *h)* $\frac{125 \cdot \pi}{18}$; *i)* $42 \cdot \pi$.

1673 *a)* $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$; *b)* $3 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 171{,}9°$; *c)* 15º; *d)* 36º; *e)* 30º; *f)* 270º; *g)* 240º; *h)* 13 680º; *i)* 120 000º.

1674 *a)* Az óra nagymutatójának végpontja 20 perc alatt $\frac{5 \cdot \pi}{3} \approx 5{,}24$ cm utat tesz meg. Ezalatt a mutató körülbelül 6,54 cm^2 területet súrol.

b) Fél óra alatt a nagymutató végpontja $\frac{5 \cdot \pi}{2} \approx 7{,}85$ cm utat tesz meg, és a mutató által súrolt terület körülbelül 9,82 cm^2.

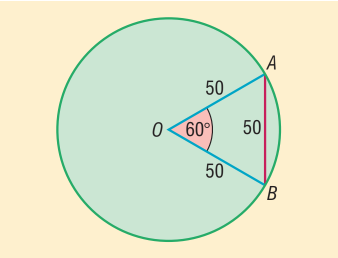
c) A mutató végpontja $\frac{35 \cdot \pi}{12} \approx 9{,}16$ cm utat tesz meg. A súrolt terület 11,45 cm^2.

d) A mutató végpontja $\frac{15 \cdot \pi}{4} \approx 11{,}78$ cm utat tesz meg. A súrolt terület 14,73 cm^2.

1675 Az ábra jelölései szerint az ABO háromszög szabályos, oldala 50 méter, ezért területe 1082,53 m^2. A rövidebb AB körívhez tartozó körcikk középponti szöge 60°-os, ezért területe a kör területének hatodrésze, azaz 1309 m^2. A kisebb körszelet területe ebből kifolyólag:

$$1309 - 1082{,}53 = 226{,}47 \text{ m}^2.$$

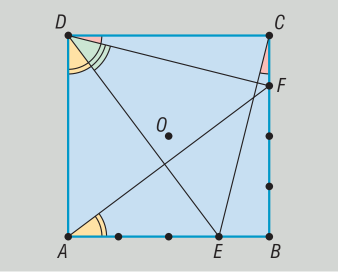
A nagyobb rész területe 7627,51 m^2.



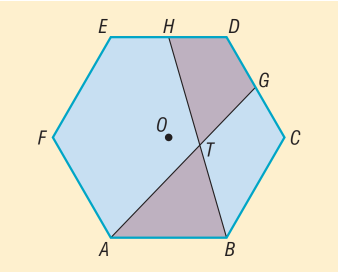
1676 A kör kerülete $8 \cdot \pi$ cm.

A körívek hossza $\frac{8 \cdot \pi}{5} \approx 5{,}03$ cm, $\frac{8 \cdot \pi}{3} \approx 8{,}38$ cm, illetve $\frac{56 \cdot \pi}{15} \approx 11{,}73$ cm.

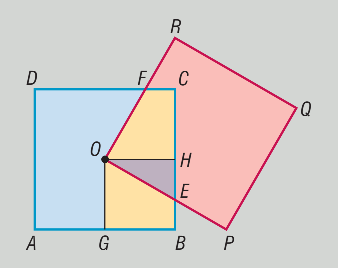
1677 A négyzet O középpontja körüli 90°-os forgatása CEB háromszöget a DFC háromszögbe viszi át, így $ECB\sphericalangle = FDC\sphericalangle$. Az O középpont körüli -90°-os forgatás az FAB háromszöget EDA háromszögbe viszi át, ezért $FAB\sphericalangle = EDA\sphericalangle$. A két forgatás után a három megjelölt szög összege éppen a négyzet egyik szögét adja, ami igazolja, hogy a szögek összege 90°.



1678 A hatszög O középpontja körüli 60°-os forgatás az $ABCG$ négyszöget a $BCDH$ négyszögbe viszi át, ezért a két négyszög területe megegyezik, azaz $T_{ABCG} = T_{BCDH}$. Ha a két négyszögből a közös részüket, vagyis a $BCGT$ négyszöget elvesszük, akkor a visszamaradó síkidomok területe is nyilvánvaló módon megegyezik, azaz $T_{ABT} = T_{GDHT}$.



1679 Jelöljük az OP és BC szakaszok metszéspontját E-vel, OR és CD metszéspontját F-fel, továbbá G-vel, illetve H-val az AB, illetve BC oldalak felezőpontját. Ezután forgassuk el az $OFCH$ négyszöget az O pont körül -90°-kal. A forgatás után a négyszög képe az $OEBG$ négyszög, melynek területe így megegyezik az $OFCH$ négyszög területével. Azt kaptuk tehát, hogy az $ABCD$ és $OPQR$ négyzetek közös részének, vagyis az $OECF$ négyszögnek a területe ugyanakkora, mint az $OEBG$ és az OEH síkidomok területének összege. Az ábráról azonnal leolvasható, hogy a területösszeg az $ABCD$ négyzet területének negyede: $\frac{a^2}{4}$.



1680 Az adott pontot A-val, a párhuzamos egyeneseket e-vel, illetve f-fel jelölve, a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Forgassuk el az e egyenest az A pont körül 60°-kal, az elforgatott egyenest jelöljük e'-vel.
2. Szerkesszük meg az e' és az f egyenes B metszéspontját.
3. Forgassuk el a B pontot az A pont körül -60°-kal; a keletkezett pontot jelöljük C-vel.

Az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek. Ha az 1. és 3. lépésben a forgatások szögének nagyságát nem, de irányát megváltoztatjuk, akkor egy újabb megoldást kapunk. Az ABC háromszög az adatok tetszőleges felvétele esetén szerkeszthető. Minden esetben két háromszöget kapunk eredményül.

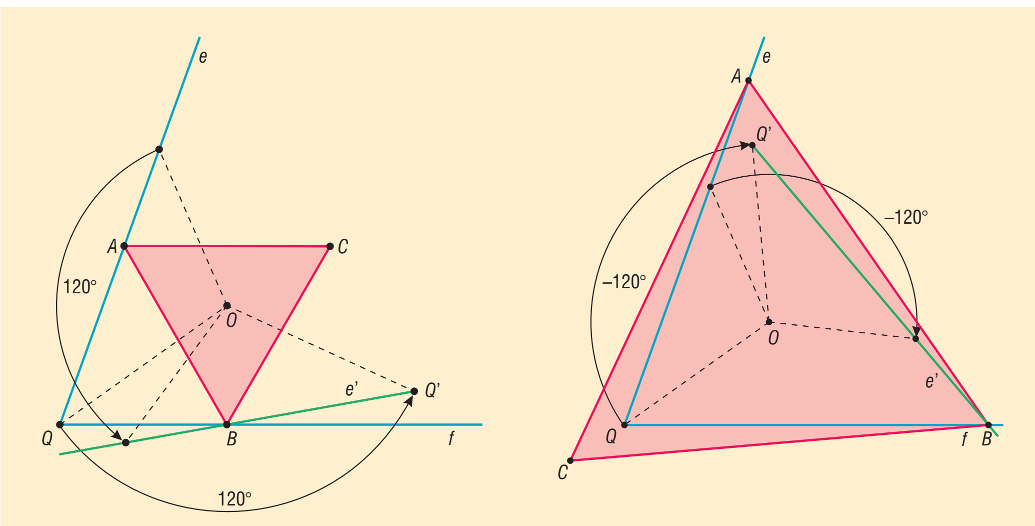
1681 Az adott pontot A-val, az egyenest e-vel, a kört k-val jelöljük. Ha a szabályos ABC háromszög B csúcsa illeszkedik a k körre, akkor a C csúcs illeszkedik a k kör A pont körüli 60°-kal (megfelelő irányban történő) elforgatott képére. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Forgassuk el az A pont körül 60°-kal a k kört; az eredmény a k' kör.
2. Szerkesszük meg a k' kör és az e egyenes metszéspontját vagy metszéspontjait. A metszéspontok egyikét jelöljük C-vel.
3. Forgassuk el a C pontot az A pont körül –60°-kal; a kapott pont B.

Az ABC háromszög megfelel a feladat minden feltételének. További megoldásokat kaphatunk, ha az 1. és 3. lépésben a forgatás irányát megváltoztatjuk. A szerkeszthetőség feltétele, hogy a k kör 60°-kal vagy –60°-kal elforgatott képének legalább egy közös pontja legyen az e egyenessel. A feladatnak 0, 1, 2, 3, 4 megoldása lehet.

1682 *a)* A szabályos háromszöget a középpontja körüli 120°-os forgatás önmagába viszi át, ezért ugyanez a forgatás az adott szög megfelelő szögszárát olyan félegyenesbe viszi, amelyik a háromszög egyik csúcsában fogja metszeni a másik szögszárat. A szögszárakat e-vel, f-fel, az adott pontot O-val jelölve, a szerkesztés lépései ezek alapján a következők lehetnek (bal oldali ábra):

1. Forgassuk el az e szögszárat az O pont körül 120°-kal, a kapott félegyenest jelöljük e'-vel.
2. Szerkesszük meg az e' és f félegyenesek B metszéspontját.
3. Forgassuk el a B pontot az O pont körül –120°-kal, a kapott pont A.
4. Forgassuk el a B pontot az O pont körül 120°-kal, a kapott pont C.



Az ABC háromszög a feladat feltételeinek megfelel.

Ha a forgatások szögének nagyságát nem, de irányát megváltoztatjuk, akkor egy újabb megoldást kapunk. Ezt a megoldást a jobb oldali ábra szemlélteti. Megjegyezzük, hogy a szerkeszthetőség feltétele, hogy az e' félegyenes metssze az f szögszárat.

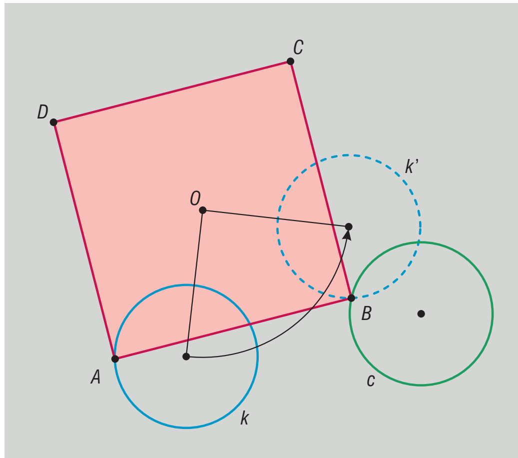
b) A szerkesztés lépései:

1. Forgassuk el az e szögszárat az O pont körül 90°-kal, az így kapott félegyenest jelöljük e'-vel.
2. Szerkesszük meg az e' és f félegyenesek B metszéspontját.
3. Forgassuk el a B pontot az O pont körül –90°-kal, a kapott pont A.
4. Tükrözzük a B pontot az O pontra, a tükörkép legyen D.
5. Tükrözzük az A pontot az O pontra, a tükörkép legyen C.

Az $ABCD$ négyszög négyzet, amely a feladat minden feltételének eleget tesz.

Az *a)* ponthoz hasonlóan itt is újabb megoldást kaphatunk, ha a forgatások irányát megváltoztatjuk.

1683 Az adott pontot O-val, a köröket k-val, illetve c-vel jelöljük. Ha az $ABCD$ négyzet középpontja O, továbbá az A csúcs a k kör, B a c kör egy pontja, akkor a szerkesztés lehetséges lépései a következők.



1. Forgassuk el a k kört az O pont körül 90°-kal, a kapott kör legyen k'.
2. Szerkesszük meg a k' és c körök egyik metszéspontját, B-t.
3. Forgassuk el a B pontot az O pont körül –90°-kal, így kapjuk az A csúcsot.
4. Tükrözzük a B pontot az O pontra, az eredmény D.
5. Tükrözzük az A pontot az O pontra, így kapjuk a C pontot.

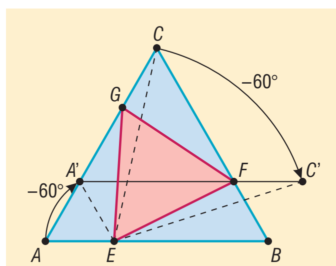
Az $ABCD$ négyzet a feltételek mindegyikének eleget tesz.

Előfordulhat, hogy a feladatnak több megoldása is van, hiszen a k' és a c körök eleve két metszésponttal is rendelkezhetnek.

A feladat további megoldásait kaphatjuk, ha a forgatások irányát megváltoztatjuk.

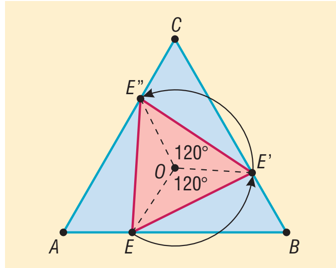
Kialakítható ugyanakkor egy elég speciális adatfelvétel, amikor a feladatnak végtelen sok négyzet is eleget tesz. Ez úgy lehetséges, ha a k kör elforgatott képe egybeesik a c körrel, ekkor ugyanis a B pont a c kör tetszőleges pontja lehet.

1684 *a)* Tegyük fel, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárási iránnyal rendelkezik, azaz a B pontot az A pont körüli +60°-os forgatással lehet a C pontba átvinni. Forgassuk el az E pont körül az AC szakaszt –60°-kal. A szerkesztendő szabályos háromszög megfelelő csúcsa (F) illeszkedik a kapott $A'C'$ szakaszra, valamint a BC oldalra is, ezért a két szakasz metszéspontjaként szerkeszthető. A háromszög hiányzó G csúcsa az F pont E pont körüli 60°-os elforgatásával szerkeszthető.



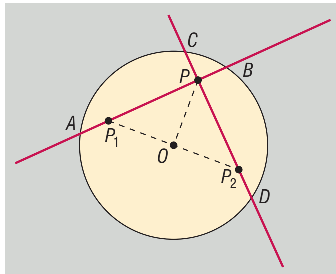
A feladat megoldásainak száma attól függ, hogy az $A'C'$ milyen helyzetű a BC szakaszhoz viszonyítva. Mivel a két szakasznak pontosan egy metszéspontja van, ezért bármely E pontból indulunk is ki, minden esetben egy megoldást kapunk.

b) Tegyük fel, hogy az EFG szabályos háromszög E csúcsa az ABC szabályos háromszög AB, F csúcsa a BC, G csúcsa a CA oldalra illeszkedik. Jelölje O az ABC háromszög középpontját. Forgassuk el az E pontot az O pont körül 120°-kal. Eredményül olyan E' pontot kapunk, amely a háromszög BC oldalára illeszkedik. Ha a kapott E' pontot tovább forgatjuk az O pont körül 120°-kal, akkor a CA oldal egy E'' pontjához jutunk. A pontok származtatásából azonnal következik, hogy az $EE'E''$ háromszög szabályos, amelynek természetesen az O pont a középpontja.



Az *a)* feladatban megmutattuk, hogy az E ponthoz egyetlen olyan szabályos háromszög tartozik, amelynek további csúcsai is az ABC háromszög oldalaira illeszkednek, ezért $E' = F$, $E'' = G$. Ezzel megmutattuk, hogy az O pont az EFG háromszög középpontja is egyben.

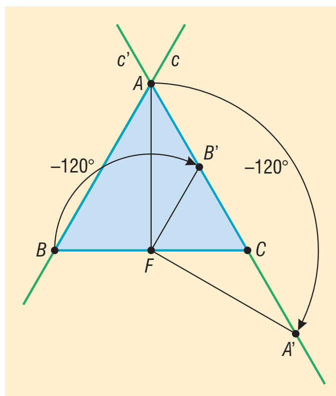
1685 A feladat megoldásához felhasználhatjuk, hogy ha a körben két húr egyenlő hosszúságú, akkor a kör középpontjától ugyanolyan távolságra haladnak, amiből pedig következik, hogy a kör középpontja körüli forgatással egymásba vihetők. Ha a két húr ráadásul merőleges egymásra, akkor a forgatás szöge 90°. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek.



1. Forgassuk el az adott P pontot a kör O középpontja körül 90°-kal mindkét irányba. A forgatások eredményeként az ábrán P_1-gyel és P_2-vel jelölt pontokat kapjuk.
2. Szerkesszük meg a P_1P, illetve a P_2P egyeneseket.
3. Szerkesszük meg a P_1P és a P_2P egyenesek körrel való metszéspontjait. A kapott metszéspontok megadják a keresett húrok végpontjait (ld. ábra).

A kívánt tulajdonságú húrok minden esetben szerkeszthetők. Ha a P pont és a kör O középpontja egybeesik, akkor végtelen sok megoldás van, mivel bármely két, egymásra merőleges átmérő megfelel a feltételeknek. Más esetekben a feladatnak egy megoldása van.

1686 A szerkesztések elvégzése után láthatjuk, hogy az F pont körüli –120°-os forgatás az A és B pontokat olyan A', illetve B' pontokba viszi át, amelyek illeszkednek az AC egyenesre (ld. ábra). Az ábra alaposabb elemzése után észrevehetjük, hogy a B' pont egybeesik az AC oldal felezőpontjával, valamint az A' pont egybeesik a B' pont C-re vonatkozó tükörképével. A fenti sejtések könnyen igazolhatók. Valóban, ha B' jelöli az AC szakasz felezőpontját, akkor az $FB'C$ háromszög szabályos, és ezért $FB' = FC = FB$, továbbá $BFB'\sphericalangle = 120°$, ami igazolja, hogy a B' pont egybeesik a B pont F pont körüli –120°-kal elforgatott képével.



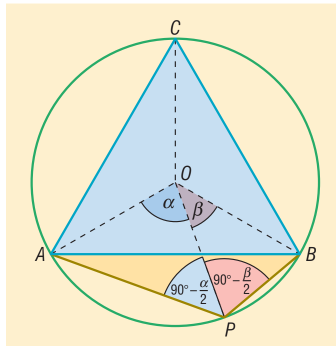
Megmutatjuk, hogy ha A' jelöli a B' pont C-re vonatkozó tükörképét, akkor A' egybeesik az A pont F körüli –120°-kal elforgatott képével. Valóban, hiszen B' a B pont elforgatott képe, továbbá $B'A' = BA$, valamint $FB'A'\sphericalangle = FBA\sphericalangle = 60°$, ezért a BA szakaszt a forgatás csakis a $B'A'$ szakaszba viheti át, így az A pont képe A'.

Fenti eredményeinket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az ABC szabályos háromszögben a BC oldal felezőpontja körüli –120°-os forgatás során az AB oldalegyenes az AC oldalegyenesbe megy át. E megállapítás alapján a szerkesztési feladat megoldása már nem túlságosan nehéz.

Ha adott az F felezőpont, továbbá a P és Q pontok, melyek közül P az AB, míg Q a BC oldalegyenesre illeszkedik, akkor az ABC háromszög szerkesztése a következőképpen végezhető el.

1. Forgassuk el a P pontot az F pont körül –120°-kal.
2. Fektessünk egyenest a P_1 képponton, valamint a Q ponton át. A kapott egyenes éppen az AC egyenessel egyezik meg.
3. Az ABC háromszög A csúcsát ezután az AC egyenes „visszaforgatott” (az F pont körül 120°-kal elforgatott) képe metszi ki az AC egyenesből.
4. A hiányzó háromszögcsúcsokat az AF szakaszra F-ben emelt merőleges egyenes metszi ki az oldalegyenesekből.

1687 *a)* Ha az ABC háromszög köré írt kör középpontját O jelöli, akkor az APO és BPO háromszögek egyenlő szárúak (AO, PO, BO a kör egy-egy sugara), ezért ha $AOP\sphericalangle = \alpha$, illetve $POB\sphericalangle = \beta$, akkor



$$APO\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}, \quad \text{illetve} \quad OPB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2},$$

így

$$APB\sphericalangle = APO\sphericalangle + OPB\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

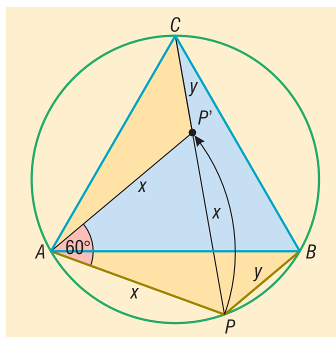
Az ABC háromszög szabályos, ezért az O pont nemcsak a körülírt kör középpontja, hanem egyben a belső szögfelezők metszéspontja is, ezért az ACO, illetve BCO egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei 30°-osak. Ebből azonnal következik, hogy $AOC\sphericalangle = BOC\sphericalangle = 120°$, majd

$$\alpha + \beta = 360° - 240° = 120°,$$

amit az $APB\sphericalangle$-re kapott összefüggésbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$APB\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 120°.$$

b) Forgassuk el az APB háromszöget az A pont körül 60°-kal. A forgatás során az A pont helyben marad, a B pont képe a C pont, a P pont képe P'.



Vizsgáljuk meg a keletkező APP' háromszöget. A forgatás távolságtartó tulajdonsága miatt $AP = AP' = x$, ezért a háromszög egyenlő szárú. Mivel a forgatás szöge 60°, ezért $P'AP\sphericalangle = 60°$, így az APP' háromszög egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárak egymással 60°-os szöget zárnak be. Egy ilyen háromszögben az alapon fekvő szögek összege 120°, ezért a háromszög szükségképpen szabályos is, így $P'P = x$, továbbá $AP'P\sphericalangle = 60°$.

A forgatás szögtartó tulajdonsága miatt $CP'A\sphericalangle = BPA\sphericalangle = 120°$, amint azt az *a)* feladatban megmutattuk. Ekkor viszont egyszerű szögszámolás mutatja, hogy

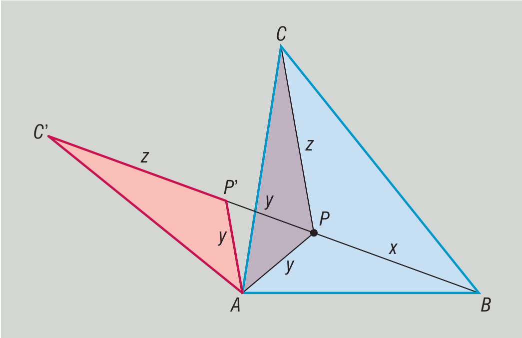
$$CP'P\sphericalangle = CP'A\sphericalangle + AP'P\sphericalangle = 120° + 60° = 180°,$$

amiből azonnal következik, hogy a C, P', P pontok egy egyenesre illeszkednek. Ismét a forgatás távolságtartó tulajdonsága miatt $CP' = BP = y$, ezért

$$PA + PB = x + y = PP' + P'C = PC,$$

amit éppen bizonyítani kívántunk.

1688 Vegyünk fel az ABC hegyesszögű háromszög belsejében egy P pontot, melyre $PA = y$, $PB = x$, $PC = z$ az ábra szerint. Feladatunk az $x + y + z$ összeg minimalizálása.

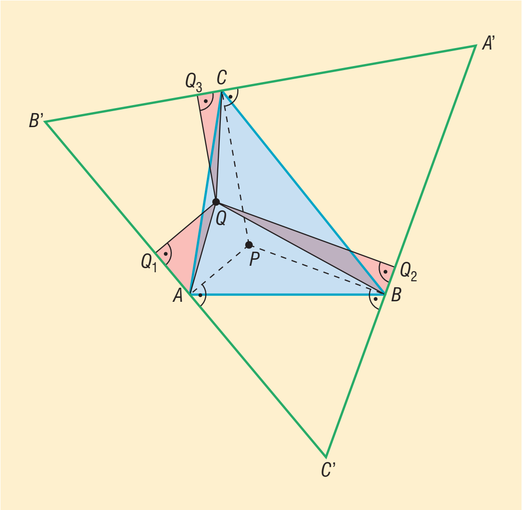


Az ilyenkor szokásos eljárást követjük; megpróbáljuk „kiteríteni" a három szakaszt egymás mellé. Ennek érdekében forgassuk el az ACP háromszöget az A pont körül 60°-kal. Az A pont helyben marad, a C pont képét C', a P pont képét P' jelöli az ábrán. A forgatás tulajdonságai miatt $AP' = AP = y$, továbbá $P'AP\sphericalangle = 60°$, ezért az APP' háromszög egyenlő szárú, melyben a szárak egymással 60°-os szöget zárnak be, így a háromszög szükségképpen szabályos is, amiből azt kapjuk, hogy $PP' = y$. A forgatás eredményeként tehát a $BPP'C'$ törött vonal hossza éppen a minimalizálni kívánt $x + y + z$ összeggel egyenlő. Mivel a C' pont helyzete a P pont választásától független, ezért a törött vonal hossza akkor a lehető legkisebb, ha a P' és P pontok illeszkednek a BC' szakaszra. Ez akkor következik be, ha a $CPA\sphericalangle = C'P'A\sphericalangle = 120°$, valamint a $BPA\sphericalangle = 120°$ összefüggések teljesülnek. Másként fogalmazva; a P pontnak a háromszög csúcsaitól mért távolságösszege akkor a lehető legkisebb, ha a P pontból a háromszög mindhárom oldala 120°-os szögben látszik. (A szóban forgó P pontot a háromszög izogonális pontjának nevezik.)

A keresett pont szerkesztésére a következő eljárást adhatjuk.

1. Forgassuk el a C pontot az A pont körül 60°-kal; így kapjuk a C' pontot.
2. Forgassuk el a B pontot a C pont körül szintén 60°-kal; így a B' ponthoz jutunk.
3. Szerkesszük meg a BC' szakaszt.
4. Szerkesszük meg az AB' szakaszt.
5. A BC' és az AB' szakaszok metszéspontja a háromszög keresett pontja.

Bemutatunk egy másik bizonyítást is arra vonatkozóan, hogy a $PA + PB + PC$ összeg valóban arra a P pontra minimális, amelyből az ABC háromszög oldalai 120°-os szögben látszanak.



Ehhez állítsunk az A csúcsban merőlegest a PA szakaszra, a B csúcsban a PB szakaszra, végül a C csúcsban a PC szakaszra. Ha a kapott egyenesek metszéspontjai az $A'B'C'$ háromszöget alkotják az ábra szerint, akkor egyszerű szögszámolás mutatja, hogy az $A'B'C'$ háromszög szabályos. Valóban, hiszen például az $APBC'$ négyszögben a P csúcsnál 120°-os, az A és B csúcsoknál pedig 90°-os szögek vannak, ezért

$$AC'B\sphericalangle = 360° - (120° + 90° + 90°) = 60°.$$

Hasonlóan igazolhatjuk, hogy a háromszög másik két szöge is 60°-os.

Az 1596. feladat eredménye alapján az $A'B'C'$ háromszög belsejében választott tetszőleges pontnak a háromszög oldalaitól mért távolságösszege ugyanakkora, éppen a háromszög magasságával egyenlő. Ezek szerint a $PA + PB + PC$ összeg megegyezik az $A'B'C'$ háromszög magasságának hosszával.

Válasszunk ezután az ABC háromszög belsejében egy P-től különböző Q pontot. Megmutatjuk, hogy

$$QA + QB + QC > PA + PB + PC.$$

Ha a Q pontnak az $A'B'C'$ háromszög oldalaira eső merőleges vetületeit Q_1, Q_2, Q_3 jelöli az ábrának megfelelően, akkor

$$QQ_1 < QA, \quad QQ_2 < QB \quad \text{és} \quad QQ_3 < QC.$$

Ennek igazolásához elegendő az ábrán satírozással megjelölt háromszögekre hivatkoznunk; például QQ_1 befogó, QA átfogó az AQQ_1 háromszögben, ami mutatja, hogy $QQ_1 < QA$ valóban teljesül. A felírt egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$$QA + QB + QC > QQ_1 + QQ_2 + QQ_3.$$

Vegyük észre, hogy a QQ_1, QQ_2, QQ_3 szakaszok hossza éppen a Q pontnak az $A'B'C'$ háromszög oldalaitól mért távolságaival egyenlők, ezért korábbi megjegyzésünk alapján összegük éppúgy a háromszög magasságával egyenlő, mint a $PA + PB + PC$ összeg, vagyis

$$QQ_1 + QQ_2 + QQ_3 = PA + PB + PC.$$

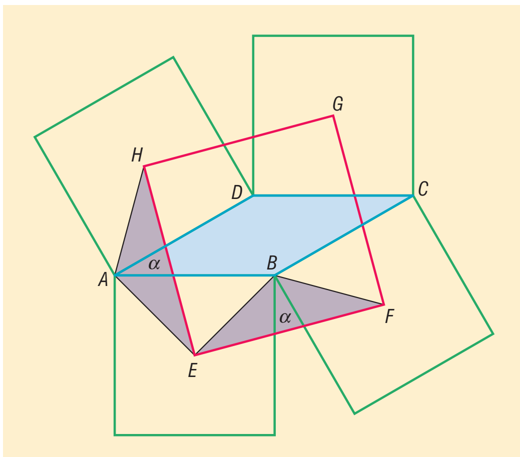
Ekkor viszont

$$QA + QB + QC > PA + PB + PC.$$

Ezzel igazoltuk, hogy bárhogyan is választjuk meg az ABC háromszög belsejében a P-től különböző Q pontot, annak a csúcsoktól mért távolságösszege nagyobb, mint a P pontnak a csúcsoktól mért távolságösszege.

Megjegyzés: Igaz a feladat állítása olyan tompaszögű háromszögben is, amelynek nincs 120°-nál nagyobb szöge.

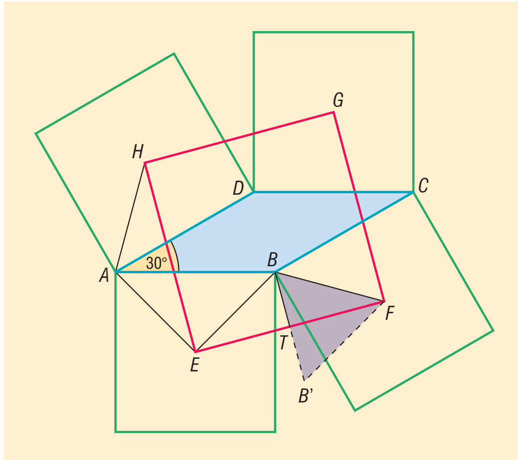
1689 *a)* Tegyük fel, hogy az $ABCD$ paralelogramma oldalaira kifelé rajzolt négyzetek középpontjai az ábra szerint az $EFGH$ négyszöget alkotják. Feladatunk annak igazolása, hogy az $EFGH$ négyszög négyzet.



Ennek érdekében forgassuk el az AEH háromszöget az E pont körül $-90°$-kal. A forgatás során az E pont természetesen helyben marad, az A pont képe pedig a B pont, mivel az AB oldalra rajzolt négyzetben $AE = BE$, és a két szakasz merőleges egymásra. Ezután megmutatjuk, hogy a H pont az F pontba kerül át. Először is gondoljuk végig, hogy az ábrán α-val jelölt szögek merőleges szárú szögpárt alkotnak, hiszen a B csúcsnál találkozó szögszárak közül az egyik merőleges AB-re, a másik pedig BC-re, így a vele párhuzamos AD-re is. A merőleges szárú szögek vagy megegyeznek, vagy egymást 180°-ra egészítik ki, de mivel mindkét szóban forgó szög szemlátomást hegyesszög, ezért csakis egyenlők lehetnek. Vegyük végül észre, hogy $EAH\sphericalangle = EBF\sphericalangle$, mert a négyzet átlója minden esetben 45°-os szöget zár be a négyzet oldalával, így mindkét szög nagysága $90° + \alpha$. A szögek egyenlősége mellett $AH = BF$ is teljesül, hiszen mindkét szakasz egy-egy ugyanakkora oldalú négyzetben az átló felével egyenlő. Eddigi eredményeink mutatják, hogy a forgatás a H pontot valóban az F pontba viszi át.

Ekkor viszont az EH szakaszt az E pont körüli $-90°$-os forgatással az EF szakaszba lehet átvinni, ezért $EH = EF$, továbbá a két szakasz egymásra merőleges. Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy az $EFGH$ négyszög bármely két szomszédos oldala egyenlő hosszú és 90°-os szöget zár be egymással, ezért a négyszög valóban négyzet.

b) Amennyiben az $ABCD$ rombusz, és az A csúcsnál 30º-os szög van, akkor az *a)* feladat eredményei alapján az EFB egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt szög 120º. Ha T jelöli az EF alap felezőpontját, akkor a BTF derékszögű háromszögben a B csúcsnál lévő szög 60º-os, így egy „félszabályos" háromszögről van szó.



Az ilyenkor szokásos módszer szerint, ha tükrözzük a B pontot az EF egyenesre, akkor a kapott $BB'F$ háromszög szabályos, amelyben FT a magasság. Ezek után már könnyen számolhatjuk az EF oldal hosszát. Mivel a rombusz oldala a feltételek szerint 10 cm, ezért a BC oldalra rajzolt négyzet átlója $10 \cdot \sqrt{2}$ cm, így $BF = 5 \cdot \sqrt{2}$ cm.

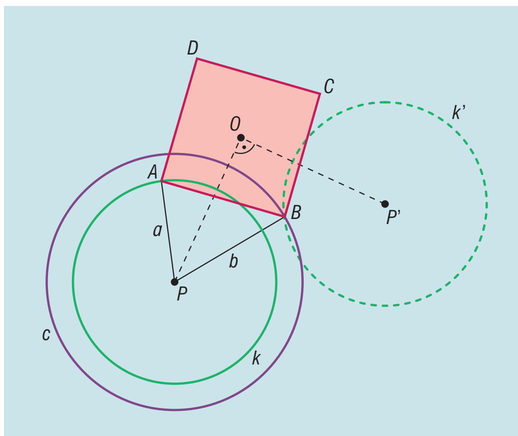
A $BB'F$ szabályos háromszög magasságára adódik:

$$FT = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{2} \text{ cm.}$$

Végül az $EFGH$ négyzet kerülete:

$$K = 8 \cdot FT = 20 \cdot \sqrt{6} \approx 48{,}99 \text{ cm.}$$

1690 Tegyük fel, hogy az $ABCD$ négyzet csúcsaira $PA = a$, $PB = b$ teljesül. Ekkor az A csúcs illeszkedik a P középpontú, a sugarú k körre, míg a B csúcs illeszkedik a szintén P középpontú, b sugarú c körre (ld. ábra). Másrészt az O középpontú 90º-os forgatás az A pontot a B pontba viszi át, ezért ha a k kört is forgatjuk, akkor eredményül olyan k' kört kapunk, amely tartalmazza a B pontot. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő lehet.



1. Megszerkesztjük a P középpontú, a sugarú k kört.
2. Megszerkesztjük a P középpontú, b sugarú c kört.
3. Elforgatjuk 90º-kal az O pont körül a k kört, így a k' kört kapjuk.
4. A négyzet B csúcsát a k' és a c körök metszéspontjaként szerkeszthetjük.
5. A B pontot az O pont körül –90º-kal elforgatva az A pontot kapjuk.
6. A B pontot az O pont körül 90º-kal elforgatva a C pontot kapjuk.
7. A D pontot a C pont O körüli 90º-kal történő elforgatásával kaphatjuk.

A megoldások száma a k' és c körök egymáshoz viszonyított helyzetétől függ. Megjegyezzük, hogy ha a k kört ellentétes irányba forgatjuk, majd az összes további forgatás irányát is megváltoztatjuk, akkor további megoldásokat is kapunk. Ha az OP távolságot x ($x > 0$) jelöli, akkor $PP' = x \cdot \sqrt{2}$, így a megoldások száma a következőképpen alakul ($b \geq a$ esetén).

Ha $x \cdot \sqrt{2} > a + b$, akkor k’ és c köröknek nincs közös pontjuk, ezért nincs megoldás.

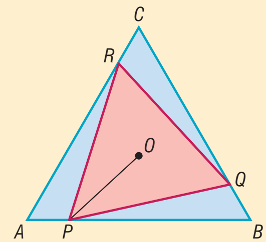
Ha $x \cdot \sqrt{2} = a + b$, akkor k’ és c érintik egymást, ezért összesen 2 megoldást kapunk.

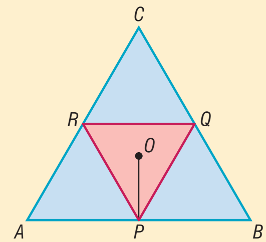
Ha $a + b > x \cdot \sqrt{2} > b - a$, akkor összesen 4 megoldást kapunk.

Ha $x \cdot \sqrt{2} = b - a$, akkor ismét 2 megoldás adódik, más esetekben nincs megoldás.

Ha az O és P pontok egybeesnek, akkor $a = b$ esetén végtelen sok megoldást kapunk, ha a és b különbözőek, akkor pedig nem adódik megoldás.

1691 *a)* Ha az ABC szabályos háromszögbe a PQR szintén szabályos háromszöget írjuk, akkor az 1684. feladat eredményei alapján a két háromszög középpontja egybeesik; a közös középpontot az ábrán O-val jelöltük. A szabályos háromszög középpontja egyben magasság- és súlypont is, ezért a PO szakasz $\frac{2}{3}$-szorosa a PQR háromszög magasságának (felső ábra).





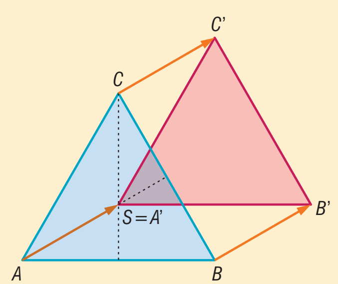
Béla bácsi végrendelete szerint a minimális területű PQR háromszöget keressük. Mivel a szabályos háromszög oldala és magassága egymással egyenesen arányos, ezért területe akkor a lehető legkisebb, ha magassága minimális, ami pontosan akkor következik be, ha a PO szakasz a lehető legrövidebb. A PO szakasz pedig akkor minimális, ha PO merőleges az AB szakaszra, azaz amikor P az AB szakasz felezőpontja. Ebben az esetben Q és R is felezőpontok a megfelelő oldalakon (alsó ábra). A minimális területű beírt szabályos háromszög oldalai tehát az ABC háromszög középvonalai egyben. Mivel a középvonalak négy egybevágó háromszögre bontják az ABC háromszöget, ezért a legkisebb területű beírt szabályos háromszög területe negyedrésze az ABC háromszög területének.

b) Az *a)* feladat eredményei alapján a PQR háromszög területe akkor a lehető legnagyobb, ha a PO szakasz hossza maximális. Az AB oldal belső pontjai között azonban nincsen olyan, amely legtávolabb lenne az O ponttól, azért valóban nem létezik maximális területű beírt szabályos háromszög, így minden valamirevaló bíróságnak el kell utasítania az örökös keresetét.

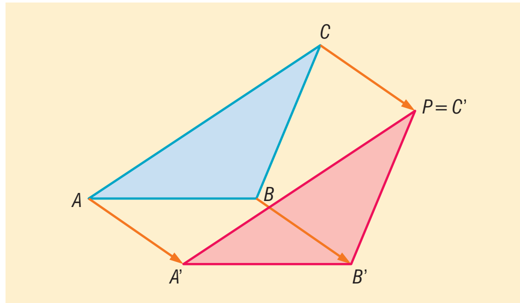
Megjegyezzük, hogy a beírt háromszög területe a $\left[\frac{T}{4}; T\right[$ intervallumban változik, ahol T az ABC háromszög területét jelöli.

Eltolás – megoldások

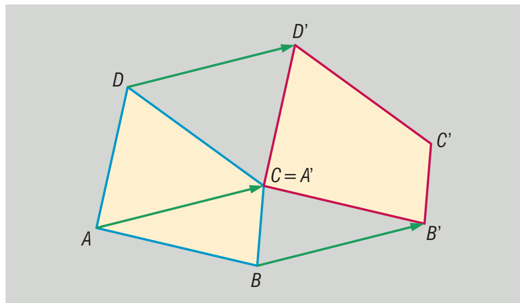
1692 A megfelelő eltolás az ábrán látható.



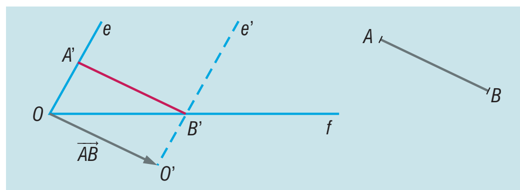
1693 A megfelelő eltolás az ábrán látható.



1694 Az $ABB'C$ négyszög paralelogramma.

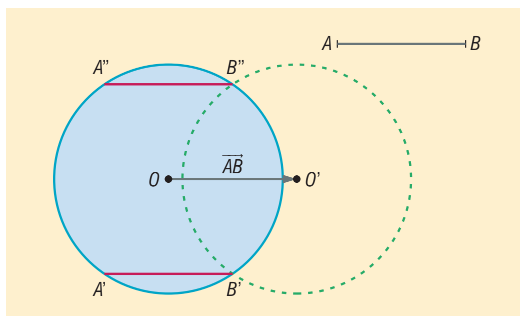


1695 Toljuk el az adott szög egyik (az ábrán e-vel jelölt) szárát az adott $\overrightarrow{AB}$-ral. Az eltolt e' félegyenes a szög másik (f-fel jelölt) szárából kimetszi a B' pontot. A B' pontot $\overrightarrow{BA}$-ral eltolva az e félegyenesen olyan A' pontot kapunk, amellyel az $A'B'$ szakasz megfelel a feltételeknek.



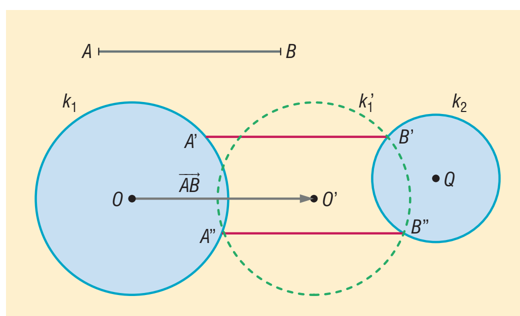
1696 Az adott kört toljuk el az adott $\overrightarrow{AB}$-ral. A kör eltolt képe kimetszi az eredeti körből a B' és B'' pontokat. A B' és B'' pontokat $\overrightarrow{BA}$-ral eltolva megkapjuk a feltételeknek megfelelő $A'B'$ és $A''B''$ szakaszok másik végpontját.

Ha az AB szakasz hossza kisebb, mint a kör átmérője, akkor a feladatnak két megoldása van. Ha az AB szakasz hossza éppen a kör átmérőjével egyenlő, akkor csak egy megoldás van, más esetekben a feladatnak nincsen megoldása.



1697 Toljuk el az adott k_1 kört az adott $\overrightarrow{AB}$-ral. A kör eltolt képe (k_1') a szintén adott k_2 körből kimetszi a B' és B'' pontokat, amelyeket a $\overrightarrow{BA}$-ral eltolva a k_1 kör olyan A' és A'' pontjait kapjuk, amelyekre az $A'B'$ és $A''B''$ szakaszok a feladat feltételeinek megfelelnek.

A feladatnak attól függően 0, 1, 2 vagy végtelen sok megoldása lehet, hogy a k_1 kör eltolt képe milyen helyzetű a k_2 körrel. Az utóbbi esetben az eltolt kör egybeesik a k_2 körrel.



1698 A feladat az 1697. feladat egy átfogalmazása. Az ott használt jelölésekkel az $AA'B'B$ és az $AA''B''B$ négyszögek paralelogrammák.

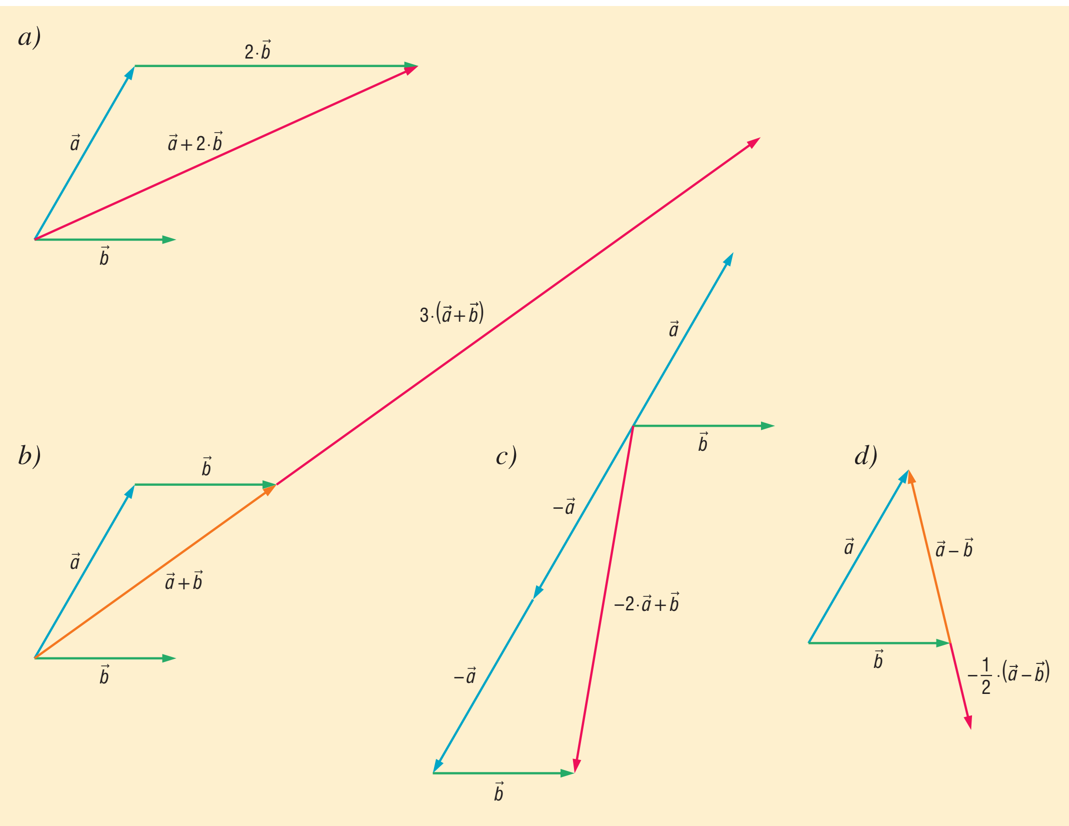
1699 *a)* $A'(4;\ 4)$, $B'(-1;\ 8)$, $C'(-3;\ 1)$;
b) $A'(1;\ 6)$, $B'(-4;\ 10)$, $C'(-6;\ 3)$;
c) $A'(-1;\ -2)$, $B'(-6;\ 2)$, $C'(-8;\ -5)$.

1700 *a)* $A(3;\ -2)$, $B(-2;\ 2)$, $C(-4;\ -5)$;
b) $A(5;\ -6)$, $B(0;\ -2)$, $C(-2;\ -9)$;
c) $A(7;\ 4)$, $B(2;\ 8)$, $C(0;\ 1)$.

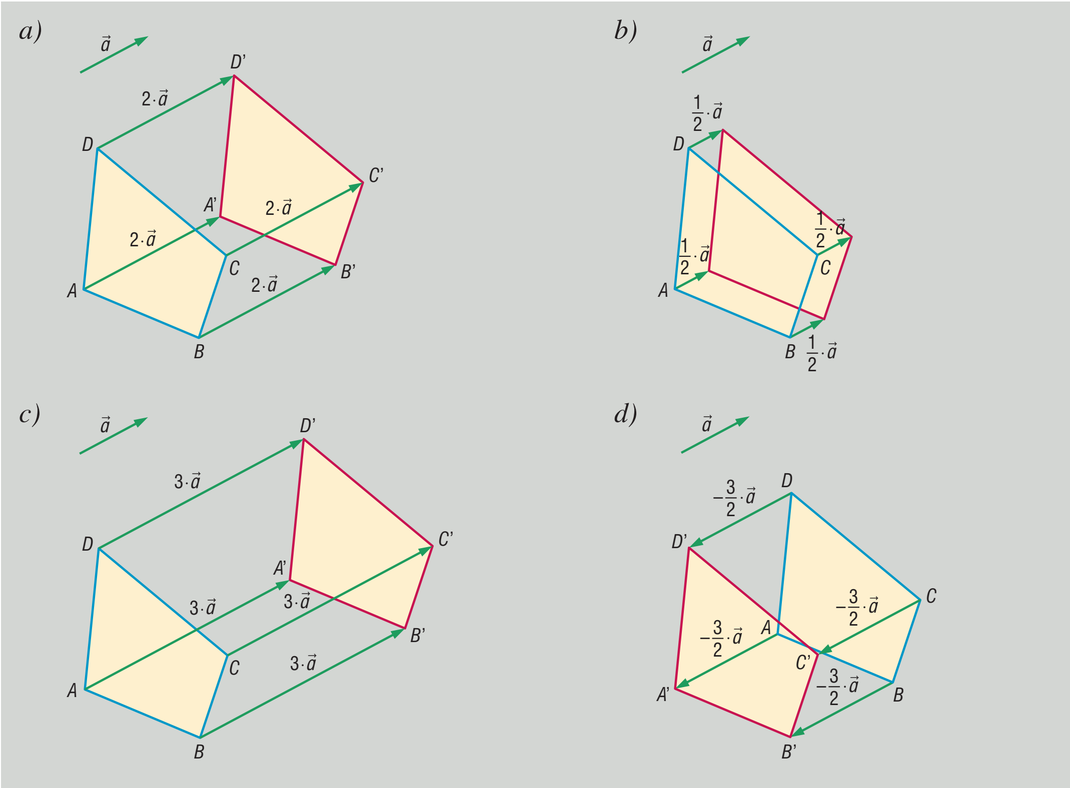
1701 *a)* $A''(-2;\ -1)$, $B''(4;\ 4)$, $C''(0;\ 9)$.
b) Ha az eltolásokat fordított sorrendben alkalmazzuk, akkor az első eltolás után a következő pontokhoz jutunk: $(-4;\ -5)$, $(2;\ 0)$, $(-2;\ 5)$. Ha a kapott pontokra alkalmazzuk a $(2;\ 4)$ koordinátájú vektorral történő eltolást, akkor a $(-2;\ -1)$, $(4;\ 4)$, $(0;\ 9)$ koordinátájú pontokhoz jutunk. Ugyanazokat a pontokat kaptuk, mint az *a)* feladatban, ami igazolja a két eltolás sorrendjének felcserélhetőségét.
c) A két eltolás egymás utáni elvégzése a $(-1;\ 2)$ koordinátájú vektorral történő eltolással helyettesíthető.

1702 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis.
e) Igaz. *f)* Hamis. *g)* Igaz.

1703



1704



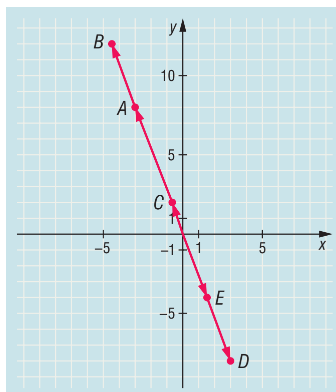
1705 a) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}(-3; 8)$;

b) $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2} \cdot \vec{a}\left(-\frac{9}{2}; 12\right)$;

c) $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4} \cdot \vec{a}\left(-\frac{3}{4}; 2\right)$;

d) $\overrightarrow{OD} = -\vec{a}(3; -8)$;

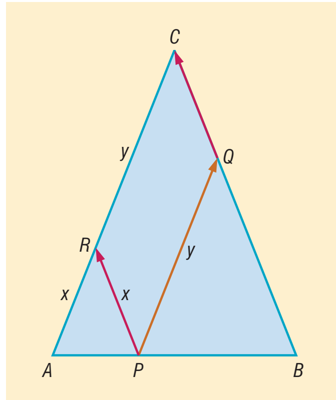
e) $\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{a}\left(\frac{3}{2}; -4\right)$.



1706 a) $\vec{a} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC}$; b) $\vec{b} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO}$;
c) $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$; d) $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FA}$.

1707 a) $\overrightarrow{AO} = \vec{b}$; b) $\overrightarrow{AD} = 2 \cdot \vec{b}$; c) $\overrightarrow{EO} = \vec{a} - \vec{b}$;
d) $\overrightarrow{BE} = 2 \cdot (\vec{b} - \vec{a})$; e) $\overrightarrow{FD} = \vec{a} + \vec{b}$; f) $\overrightarrow{FC} = 2 \cdot \vec{a}$;
g) $\overrightarrow{FB} = 2 \cdot \vec{a} - \vec{b}$; h) $\overrightarrow{EA} = \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$.

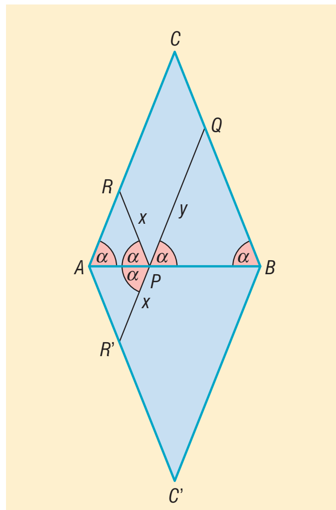
1708 a) $\overrightarrow{EF} = -\vec{a}$; b) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; c) $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;
d) $\overrightarrow{FG} = -\vec{b}$; e) $\overrightarrow{FH} = -(\vec{b} + \vec{c})$; f) $\overrightarrow{GE} = \vec{b} + \vec{a}$.



1709 **I. megoldás.** Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának egy tetszőleges pontját P-vel jelöltük. Ha a megfelelő párhuzamosok a háromszög szárait az ábrának megfelelően Q-ban, illetve R-ben metszik, akkor az APR háromszög szintén egyenlő szárú, ezért $AR = PR = x$. A PQ szakaszt a $\overrightarrow{PR}$ mentén történő eltolással az RC szakaszba lehet átvinni, ezért $PQ = RC = y$. A párhuzamosokból a háromszög oldalai által kimetszett szakaszok összege ezek szerint:

$$PR + PQ = x + y = AC,$$

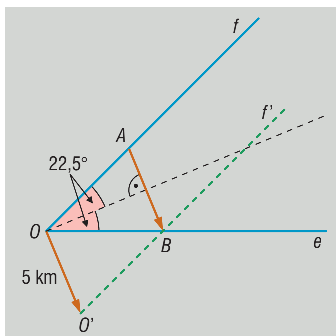
a P pont választásától függetlenül a háromszög szárával egyezik meg. Megjegyezzük, hogy az eltolás helyett elegendő lett volna arra hivatkoznunk, hogy a $PQCR$ négyszög paralelogramma.



II. megoldás. Tükrözzük az ABC háromszöget, valamint a PR szakaszt az AB egyenesre. A tükrözés után az $AC'BC$ rombuszt, valamint a PR' szakaszt kapjuk. Az ábrán azonos módon megjelölt szögek egyenlőségéből következik, hogy a Q, P, R' pontok egy egyenesre illeszkednek, ami mutatja, hogy

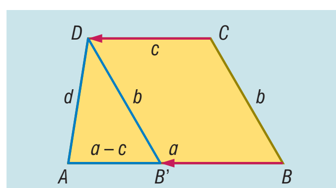
$$PR + PQ = PR' + PQ = R'Q,$$

ami a P pont helyzetétől függetlenül párhuzamos az $AC'BC$ rombusz AC oldalával, ezért hosszuk is megegyezik.



1710 A település központját O-val, a megépítendő útszakaszon kialakuló két új kereszteződést A-val és B-vel jelöltük. A feltételek szerint az ABO háromszög egyenlő szárú, ezért az AB alap merőleges az O csúcsból kiinduló szögfelezőre.

A fenti észrevétel alapján az AB út szerkesztése a következőképpen történhet. Először megszerkesztjük a már meglévő két út szögfelezőjét, majd az egyik utat (az ábrán az f-fel jelöltet) eltoljuk a szögfelezőre merőleges, 5 km hosszú vektorral. Az út eltolt képe (f') kimetszi a másik útból (e) a szerkesztendő B útkereszteződést. A B ponton át a szögfelezőre emelt merőleges kimetszi az f útból az A kereszteződést.



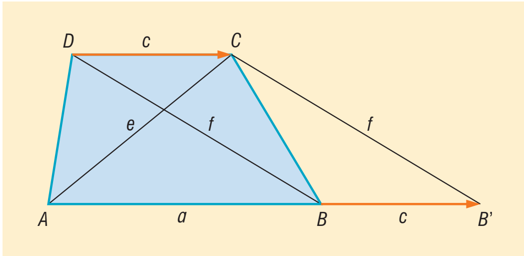
1711 Tekintsük az $ABCD$ trapézt, melynek alapjai a és c ($a > c$), szárai b és d. Toljuk el a BC szárat a $\overrightarrow{CD}$-ral. Ekkor a C pont átmegy a D pontba, a B pont átmegy az AB alap egy belső B' pontjába. Mivel a $B'BCD$ négyszög paralelogramma, ezért $B'B = c$, amiből következik, hogy $AB' = a - c$, és így az $AB'D$ háromszög oldalai: $a - c$, b, illetve d.

Látható, hogy a háromszög a trapéz oldalainak ismeretében szerkeszthető. Ezek alapján a szerkesztés lehetséges lépései:

1. Megszerkesztjük az $AB'D$ háromszöget, amelynek mindhárom oldala ismert.
2. Megszerkesztjük a $\overrightarrow{DC}$-t, amely párhuzamos az AB' oldallal, egyállású az $\overrightarrow{AB'}$-ral, nagysága a trapéz rövidebb alapjának hosszával egyenlő.
3. Eltoljuk a $B'D$ szakaszt a $\overrightarrow{DC}$-ral, az eltolt szakasz végpontjaiként kapjuk a B és C pontokat.

A szerkeszthetőség feltétele, hogy az $AB'D$ háromszög szerkeszthető legyen. A háromszög pontosan akkor szerkeszthető, ha oldalaira a háromszög-egyenlőtlenség teljesül, vagyis ha az $a - c$, b, d szakaszok közül bármely kettő hosszának összege nagyobb a harmadik hosszánál. Ha a háromszög szerkeszthető, akkor a feladatnak – egybevágóságtól eltekintve – egy megoldása van, más esetekben a trapéz nem szerkeszthető.

1712 Ha az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = a$, $CD = c$, átlói pedig e és f (ld. ábra), akkor toljuk el a BD átlót a $\overrightarrow{DC}$-ral. Az eltolás után a D végpont átmegy a C pontba, a B pont képe az AB alap B-n túli meghosszabbításán található B' pont, amelyre $BB' = c$ teljesül. Ekkor az $AB'C$ háromszög oldalai $a + c$, e, f, azaz a háromszög szerkeszthető.

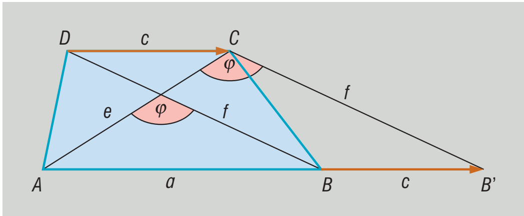


A trapéz szerkesztésének lépései ennek megfelelően a következők lehetnek:

1. Megszerkesztjük az $AB'C$ háromszöget, amelynek mindhárom oldala ismert.
2. Megszerkesztjük a B pontot, amelyet az AB' oldalból a B' középpontú, c sugarú kör metsz ki.
3. A trapéz hiányzó D csúcsát úgy kapjuk, hogy a C pontot eltoljuk a $\overrightarrow{B'B}$-ral.

A szerkesztés pontosan akkor végezhető el, ha az $a + c$, e, f oldalakból háromszög szerkeszthető, vagyis a három szakasz kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Ebben az esetben a feladatnak (egybevágóságtól eltekintve) egyetlen megoldása van, más esetekben a trapéz nem szerkeszthető.

1713 Toljuk el az $ABCD$ trapéz (az alapok AB és CD, $CD < AB$) BD átlóját a $\overrightarrow{DC}$-ral. Ekkor a D pont a C pontba kerül, a B pont B' képe az AB alap B-n túli meghosszabbításán található, továbbá $BB' = CD = c$. Mivel az eltolás a szakaszt önmagával párhuzamos szakaszba visz át, ezért $B'C$ párhuzamos BD-vel, így az ábrán azonos módon jelölt szögek egyenlők egymással (φ az átlók által bezárt szög kiegészítő szöge). Az $AB'C$ háromszögben ezért két oldal ($AC = e$, $B'C = f$), valamint az általuk bezárt szög ismert, amiből a háromszög már könnyen szerkeszthető.

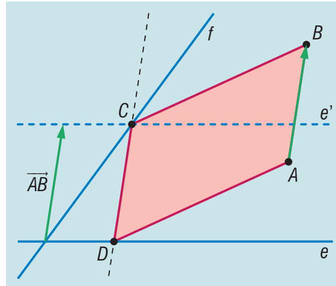


A trapéz szerkesztésének lépései a következők:

1. Megszerkesztjük az $AB'C$ háromszöget két oldalából, valamint az általuk bezárt szögből.
2. Az AB' oldalon megszerkesztjük a B pontot, amelyet a B' középpontú, c sugarú kör metsz ki az AB' szakaszból.
3. A trapéz hiányzó D csúcsát úgy kapjuk, hogy a C pontot eltoljuk a $\overrightarrow{B'B}$-ral.

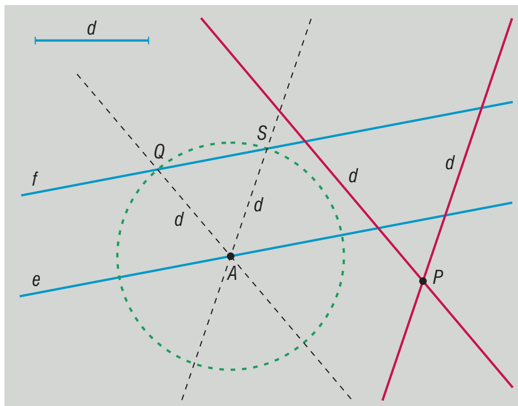
A szerkeszthetőség feltétele, hogy az $AB'C$ háromszög AB' oldala hosszabb legyen a trapéz rövidebb alapjának kétszeresénél.

1714 Ha az $ABCD$ paralelogramma C csúcsa az f, D csúcsa az e egyenesre illeszkedik, akkor az e egyenes $\overrightarrow{AB}$-ral eltolt e' képe tartalmazza a paralelogramma C csúcsát, így az szerkeszthető az f és e' egyenesek metszéspontjaként. A paralelogramma C csúcsának ismeretében a D csúcs is szerkeszthető, például azáltal, hogy a C ponton át párhuzamost szerkesztünk az $\overrightarrow{AB}$-ral, majd a párhuzamos kimetszi az e egyenesből a keresett D csúcsot (ld. ábra). Ehhez hasonló szerkesztéssel kaphatjuk meg azt a paralelogrammát, amelyben a C csúcs az e, míg a D csúcs az f egyenesre illeszkedik; ebben az esetben az e egyenest a $\overrightarrow{BA}$-ral kell eltolni, és előbb a D pont szerkesztése történik.



A feladatnak általában két megoldása van, ezek közül esetleg egyik elfajulhat szakasszá. Ha a két adott egyenes párhuzamos, és pl. az $\overrightarrow{AB}$-ral való eltolás az e egyenest átviszi az f egyenesbe, akkor a C pont helyzete nem egyértelmű, így a feladatnak végtelen sok megoldása is lehet. Megjegyezzük, hogy ha a két egyenes párhuzamos, akkor akár az is elképzelhető, hogy nincsen a feltételeknek eleget tevő paralelogramma. Ez akkor következik be, ha az e egyenes egyik eltolt képe sem esik egybe az f egyenessel.

1715 A két párhuzamost az ábrán e és f, az adott pontot P jelöli. A feladat megoldása előtt érdemes észrevenni, hogy a szerkesztendő egyenessel akárhogyan is húzunk párhuzamost, annak a párhuzamosok közé eső szakasza szintén d hosszúságú lesz. Ezt könnyen beláthatjuk, ha arra gondolunk, hogy a két párhuzamos az e és f egyenesekből egy paralelogrammát metsz ki, amelynek szemközti oldalai valóban megegyeznek.



Észrevételünk alapján a szerkesztési feladat megoldása a következő:

1. Az e egyenes egy tetszőleges A pontja, mint középpont körül d sugarú kört szerkesztünk.
2. Megjelöljük a kör és az f egyenes metszéspontjait (az ábrán Q és S).
3. Meghúzzuk az AQ, illetve AS egyeneseket.
4. Az AQ, illetve AS egyeneseket eltoljuk úgy, hogy azok a P ponton átmenjenek (AQ-val és AS-sel párhuzamosokat szerkesztünk a P ponton át). A szerkesztett egyenesek a feladat minden feltételének megfelelnek.

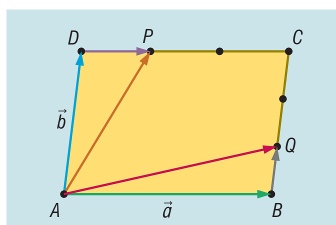
A szerkeszthetőség attól függ, hogy az A középpontú kör és az f egyenes milyen helyzetűek, vagyis az e és f egyenesek távolsága ne legyen nagyobb, mint d. Ha a két párhuzamos távolsága éppen d, akkor 1, ha d-nél kisebb, akkor 2 megoldást kapunk. Más esetben a feladatnak nincsen megoldása.

1716 *a)* Felhasználva, hogy P és Q harmadolópontok, azt kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{a},$$

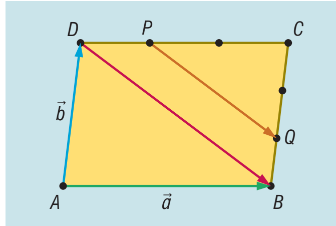
illetve

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b}.$$



b) Az *a)* feladat eredménye alapján

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot\vec{b}\right)-\left(\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right).$$



Mivel $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$, ezért $\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{DB}$, ami mutatja, hogy a két vektor párhuzamos.

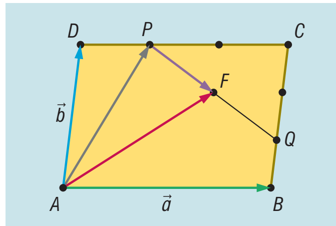
c) A *b)* feladat alapján: $\dfrac{PQ}{DB}=\dfrac{2}{3}.$

d) Jelöljük a PQ szakasz felezőpontját F-fel, majd bontsuk fel az $\overrightarrow{AF}$-t a következőképpen: $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}.$ Az $\overrightarrow{AP}$-t az *a)*, a $\overrightarrow{PQ}$-t a *b)* feladatban már kiszámoltuk, ezek alapján

$$\overrightarrow{PF}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right),$$

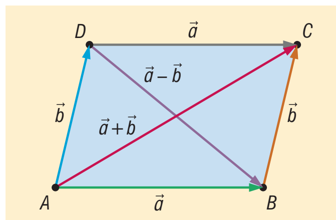
és

$$\overrightarrow{AF}=\left(\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$



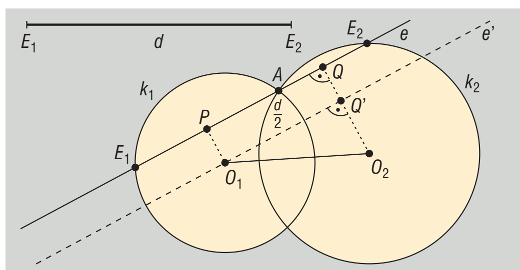
e) Az $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$, ami mutatja, hogy AF és AC valóban párhuzamos egymással.

1717 Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok párhuzamosak, akkor mindkét állítás egyszerűen következik a vektorműveletek értelmezéséből. Amennyiben a két vektor ráadásul egyirányú is, akkor az *a)*, míg ellentétes irányú vektorok esetén a *b)* feladat állításában teljesül egyenlőség.



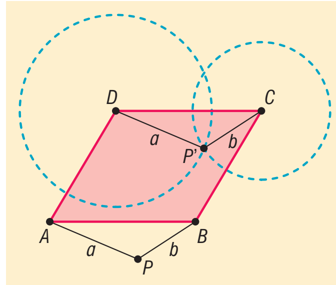
Ha a két vektor nem párhuzamos egymással, akkor indítsuk azokat közös kezdőpontból, majd szerkesszük meg az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}-\vec{b}$ vektorokat. A két vektor az $ABCD$ paralelogramma egy-egy átlóvektora (ld. ábra), azaz $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ és $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}.$ Ha alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az ABC, illetve az ABD háromszögekben, akkor éppen az *a)*, illetve a *b)* feladatok állítását kapjuk. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben egyik egyenlőtlenségben sem teljesülhet egyenlőség.

1718 Ha a k_1 és k_2 körök egyik metszéspontja A, továbbá az A ponton áthaladó e egyenes olyan E_1E_2 szakaszt metsz ki a körökből, amelynek hossza megegyezik az adott szakasz d hosszával, akkor az E_1A, ill. az AE_2 szakaszok P és Q felezőpontja közötti szakasz hossza $\dfrac{d}{2}$ (ld. ábra).



Tegyük fel, hogy a feladatot már megoldottuk, majd toljuk el az e egyenest úgy, hogy eltolt e' képe átmenjen a k_1 kör O_1 középpontján. Megmutatjuk, hogy az e' egyenes az adatokból megszerkeszthető. Ha az eltolás a Q pontot a Q' pontba viszi, akkor a $PO_1Q'Q$ négyszög paralelogramma, sőt téglalap, és így $PQ=O_1Q'=\dfrac{d}{2}$. Másrészt, az O_2Q szakasz merőleges az e és e' egyenesekre, amiből következik, hogy a Q' pont illeszkedik az O_1O_2 szakasz Thalész körére. A Q' pontot ezek alapján az O_1 középpontú $\dfrac{d}{2}$ sugarú kör metszi ki az említett Thalész-körből. Az e' egyenest ezután már könnyen szerkeszthetjük, hiszen két pontja már ismert. Az e' egyenes ismeretében az e egyenest úgy kaphatjuk, hogy az A ponton át párhuzamost szerkesztünk e'-vel.

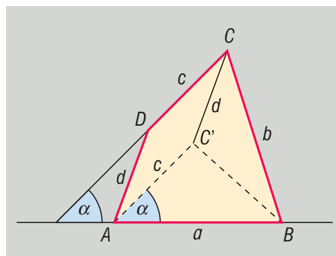
1719 Tegyük fel, hogy a feladatot sikerült megoldani, majd toljuk el az APB háromszöget az $ABCD$ paralelogramma $\overrightarrow{AD}$ oldalvektora mentén. Ekkor az A csúcs a D csúcsba, a B csúcs a C csúcsba, míg a P pont a P' pontba kerül át. Mivel az $APP'D$ és a $PBCP'$ négyszögek paralelogrammák, ezért $PA = P'D$ és $PB = P'C$. Minthogy a $PA = a$ és $PB = b$ szakaszok hossza adott, csakúgy mint a C és D pontok, ezért a $DP'C$ háromszög szerkeszthető; a P' pont a D középpontú a sugarú, és a C középpontú b sugarú körök metszéspontja (ld. ábra). Az $ABCD$ paralelogramma hiányzó A és B csúcsait a D és C pontok $\overrightarrow{P'P}$ vektorral eltolt képe adja meg.



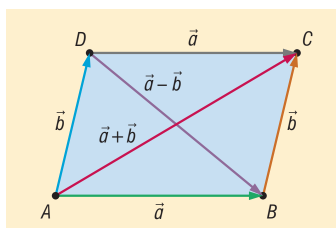
A szerkesztés diszkussziója elég nehéznek bizonyul. A megoldások száma a két kör egymáshoz viszonyított helyzetétől, valamint a P és P' pontok kölcsönös helyzetétől függ. Ha ugyanis a két kör valamelyik metszéspontja ugyanolyan távolságra van a DC egyenestől, mint a P pont, akkor a megfelelő $\overrightarrow{P'P}$ párhuzamos a DC oldallal, így a D és C pontok eltolt képe illeszkedik a DC egyenesre, ami azt jelenti, hogy az egyik megoldásul kapott paralelogramma szakasszá fajul el.

Amennyiben a P pont és a körök érintési pontja vagy metszéspontjai különböző távolságra van(nak) a CD egyenestől, úgy a metszéspontok száma a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésétől függően a következőképpen alakul. Ha $a > b$ és $DC > a + b$, akkor 0, ha $DC = a + b$, akkor 1, ha $a - b < DC < a + b$, akkor 2, ha $DC = a - b$, akkor megint 1, végül ha $DC < a - b$, akkor ismét 0 megoldás adódik.

1720 Az ábrán a szerkesztendő $ABCD$ négyszög oldalait adott sorrendben $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ és $DA = d$, az AB és CD egyenesek hajlásszögét α jelöli. Tegyük fel, hogy a feladatot sikerült megoldani, és elemezzük a kész ábrát. Toljuk el a négyszög CD oldalát úgy, hogy a D pont az A pontba kerüljön. Ha a C pont képét C' jelöli, akkor az $AC'CD$ négyszög paralelogramma, ezért $AC' = DC = c$, továbbá az AC' szakasz és a DC egyenes párhuzamossága miatt $C'AB\sphericalangle = \alpha$. Észrevételünk lehetőséget ad a C' pont szerkesztésére, hiszen az ABC' háromszögben két oldal, valamint az általuk bezárt szög adott. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő lehet. Felvesszük az AB szakaszt, majd az A csúcshoz átmásoljuk az adott α szöget. A szerkesztett szögszárra rámérve a szintén adott c távolságot, megkapjuk a C' pontot. A következő lépésben a C pontot szerkeszthetjük, hiszen egyrészt $C'C = d$ miatt C illeszkedik a C' középpontú, d sugarú körre, másrészt $BC = b$ miatt C illeszkedik a B középpontú b sugarú körre, így a két kör metszéspontjaként a C pont valóban szerkeszthető. A négyszög hiányzó D csúcsa az A pont $\overrightarrow{C'C}$-ral történő eltolásával szerkeszthető. Megjegyezzük, hogy a feladatnak – egybevágóságtól eltekintve – legfeljebb két megoldása lehet. Az adatok felvételétől függően előfordulhat, hogy a kapott $ABCD$ négyszög konkáv, esetleg hurkolt.



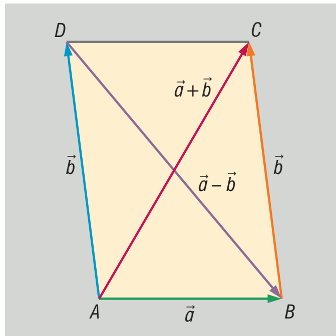
1721 Ha a két vektor közül valamelyik a nullvektorral egyenlő, akkor az $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ egyenlőség nyilvánvalóan teljesül. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok merőlegesek egymásra, hiszen a nullvektort bármely vektorra merőlegesnek tekintjük.



Ha a két vektor párhuzamos egymással és egyik sem a nullvektor, akkor egyirányú vektorok esetén $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$, ellentétes irányú vektorok esetén pedig $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$, ezért egyenlőség nem teljesülhet.

Más esetekben az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}-\vec{b}$ vektorok az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma egy-egy átlóvektorai (ld. ábra), ezért a hosszuk akkor és csak akkor egyezik meg, ha az *ABCD* paralelogramma átlói ugyanolyan hosszúak. Mivel az *ABC* és *ABD* háromszögekben két-két oldal megegyezik, ezért harmadik oldalaik akkor és csak akkor egyenlők, ha a két háromszög egybevágó. A két háromszög egybevágóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a paralelogramma *A* és *B* csúcsánál lévő belső szögei megegyezzenek. Mivel a két szög összege 180º, ezért csak úgy lehetnek egyenlők, ha mindkettő 90º-os, azaz a paralelogramma téglalap. Azt kaptuk tehát, hogy $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ teljesülésének szükséges és elegendő feltétele, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egymásra merőlegesek legyenek.

1722 Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok valamelyike nullvektor, akkor természetesen $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$. Ha a két vektor egyirányú, akkor $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$, ha viszont ellentétes irányúak a vektorok, akkor $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$.



Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok nem párhuzamosak és közös kezdőpontból indítva az *ABCD* paralelogrammát feszítik ki (ld. ábra), akkor $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, valamint $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$. Az *ABC* és *ABD* háromszögekben két-két oldal megegyezik, mivel $BC=AD$, valamint az *AB* oldal közös. A harmadik oldalak közül az a rövidebb, amellyel szemben kisebb szög van, ezért $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$ pontosan akkor teljesül, ha $ABC\sphericalangle < BAD\sphericalangle$. Mivel a két szög az *ABCD* paralelogramma *AB* oldalán nyugszik, ezért összegük 180º, ezért $ABC\sphericalangle < BAD\sphericalangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha az $ABC\sphericalangle$ hegyesszög és $BAD\sphericalangle$ tompaszög.

Eredményeinket összefoglalva azt kapjuk, hogy az $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$ összefüggés akkor és csak akkor teljesül, ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok tompaszöget vagy egyenesszöget zárnak be egymással.

Geometriai transzformációk – megoldások

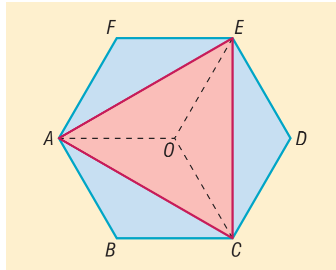
1723 *a)* A két háromszög nem feltétlenül egybevágó.
b) A két háromszög nem feltétlenül egybevágó.
c) A két háromszög egybevágó.
d) A két háromszög egybevágó.

1724 *a)* A két téglalap egybevágó.
b) A két téglalap egybevágó.
c) A két téglalap egybevágó.
d) A két téglalap nem feltétlenül egybevágó.

1725 *a)* A két paralelogramma nem feltétlenül egybevágó.
b) A két paralelogramma nem feltétlenül egybevágó.
c) A két paralelogramma egybevágó.
d) A két paralelogramma egybevágó.

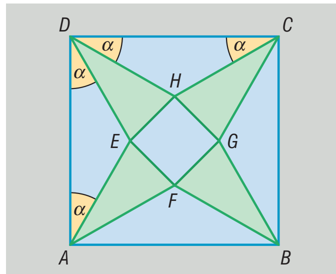
1726 *a)* A két rombusz nem feltétlenül egybevágó.
b) A két rombusz egybevágó.
c) A két rombusz egybevágó.
d) A két rombusz egybevágó.

1727 *a)* Az AEF, ECD, CAB háromszögek egybevágók egymással (az O középpont körüli forgatással vihetők egymásba). Ebből adódóan $AE = EC = AC$, azaz az AEC háromszög szabályos.



b) Az AEC háromszög, valamint az $ABCDEF$ hatszög területének aránya $1:2$. Ez azonnal belátható, ha behúzzuk az OA, OC, OE szakaszokat. Ezzel a hatszöget három egybevágó rombuszra osztottuk. Az AEC háromszög oldalai átlók egy-egy ilyen rombuszban, így megfelezik a rombuszok területét.

1728 *a)* Mivel az ADE, DCH, CBG, BAF háromszögek egybevágók és egyenlő szárúak, ezért száraik megegyeznek, ami igazolja, hogy a kialakuló EHD, GHC, FGB, EFA háromszögek szintén egyenlő szárúak. Mivel az utóbbi háromszögekben a szárszög $90° - 2 \cdot \alpha$, ezért e háromszögek páronként egybevágók.

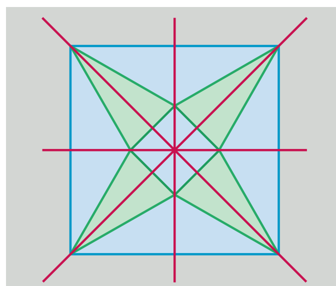


Megmutatjuk, hogy az $EHGF$ négyszög négyzet. Az eddigiekből már következik, hogy a négyszög oldalai megegyeznek. Jelöljük az $ABCD$ négyzet oldalaira emelt egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögeit α-val. Ekkor egyszerű szögszámolás mutatja, hogy az egyenlő szárú EHD háromszögben $EDH\sphericalangle = 90° - 2 \cdot \alpha$ és $DEH\sphericalangle = 45° + \alpha$. Ugyanígy láthatjuk be, hogy $AEF\sphericalangle = 45° + \alpha$ szintén teljesül. Végül az ADE egyenlő szárú háromszögben $DEA\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \alpha$. Számoljuk ki az $EHGF$ négyszög E csúcsánál kialakuló szöget:

$$HEF\sphericalangle = 360° - 2 \cdot (45° + \alpha) - (180° - 2 \cdot \alpha) = 90°.$$

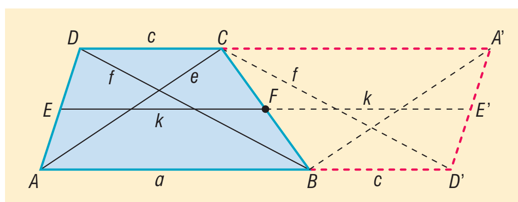
Természetesen ugyanilyen módszerrel megmutatható, hogy a négyszög többi szöge is 90°-os, ezért az $EHGF$ négyszög valóban négyzet.

b) Az ábrán bejelölt egyenesek az ábra tükörtengelyei, így összesen 4 ilyen egyenes van.



c) Az ábrán szereplő két négyzet közös középpontja körüli $k \cdot 90°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatások az ábrán szereplő alakzatot önmagába viszik át.

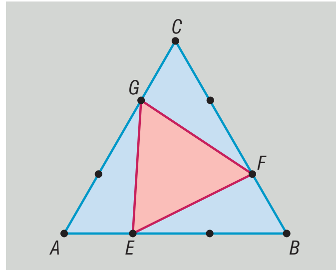
1729 Tükrözzük az $ABCD$ trapézt BC szárának F felezőpontjára. A tükrözés során a B és C csúcsok „helyet cserélnek”, a BD átló átmegy a CD' szakaszba. Az ábra jelöléseit használva láthatjuk, hogy az $AD'C$ háromszög oldalaira $AD' = a + c$, $AC = e$ (a trapéz egyik átlója), $D'C = f$ (a trapéz másik átlója).



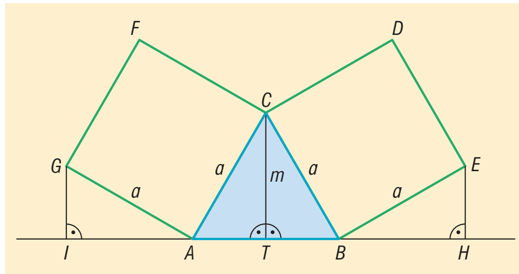
A háromszögben bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal, ezért $AC + D'C > AD'$, azaz $e + f > a + c$. Tekintettel arra, hogy a trapéz középvonalának hossza az alapok hosszának számtani közepével egyenlő, adódik, hogy $e + f > 2 \cdot k$, amiből valóban azt kapjuk, hogy

$$k < \frac{e + f}{2}.$$

1730 Az ábra jelöléseit használva beláthatjuk, hogy az AEG, BFE, CGF háromszögek egybevágók egymással. Ehhez csak annyit kell észrevennünk, hogy a háromszögekben két-két oldal (pl. $AE = BF$, $AG = BE$), valamint az általuk bezárt szög megegyezik (ez utóbbi mindhárom esetben 60º). Az egybevágóságból következik, hogy a háromszögek harmadik oldala is megegyezik, ami igazolja, hogy az EFG háromszög szabályos.



1731 *a)* Az ABC háromszög CT magassága két egybevágó, derékszögű háromszögre bontja a háromszöget. Megmutatjuk, hogy az AGI és BEH háromszögek egybevágóak a keletkező háromszögekkel.



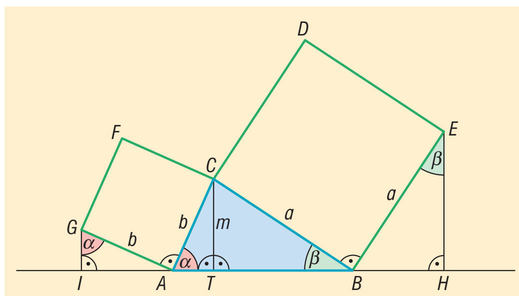
Az ACT háromszög átfogója egyenlő az ABC háromszög a oldalával, továbbá hegyesszögei 60º, illetve 30º-osak. Az AGI és BEH háromszögek átfogója szintén a hosszúságú, továbbá az A, illetve a B csúcsoknál lévő hegyesszögeik 180º – 90º – 60º = 30º-osak, ezért a két háromszög valóban egybevágó az ACT háromszöggel.

Az egybevágóságból következik, hogy a további megfelelő oldalaik is megegyeznek, azaz

$$AI = CT = m, \quad \text{illetve} \quad BH = CT = m.$$

b) Az ABC háromszög köré írt kör középpontja illeszkedik az AB oldal felezőmerőlegesére. Mivel $TH = TB + BH = TB + m$, valamint $TI = TA + AI = TA + m$, továbbá $TB = TA$, ezért a T pont nemcsak az AB, hanem a HI szakasz felezőpontja is egyben. Ekkor azonban az AB szakasz, valamint a HI szakasz felezőmerőlegese egybeesik, így az ABC háromszög köré írt kör középpontja valóban illeszkedik a HI szakasz felezőmerőlegesére.

c) Ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor az AIG háromszög egybevágó a CTA háromszöggel, továbbá a BEH háromszög egybevágó a CBT háromszöggel. Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $AG = CA$, mindkét háromszög derékszögű, $IGA\sphericalangle = TAC\sphericalangle = \alpha$, mivel a szögek szárai páronként merőlegesek egymásra, és mindkettő hegyesszög (merőleges szárú szögpár). Összefoglalva azt kaptuk, hogy az AIG és a CTA háromszögekben két-két szög egyenlő, továbbá a nagyobbal szemközti oldalak is megegyeznek, tehát a két háromszög valóban egybevágó egymással.



Ekkor viszont a további megfelelő oldalaik is megegyeznek, azaz $AI = CT = m$, és éppen ezt kellett bizonyítani. Értelemszerű módosításokkal igazolható, hogy $BH = CT = m$ szintén teljesül.

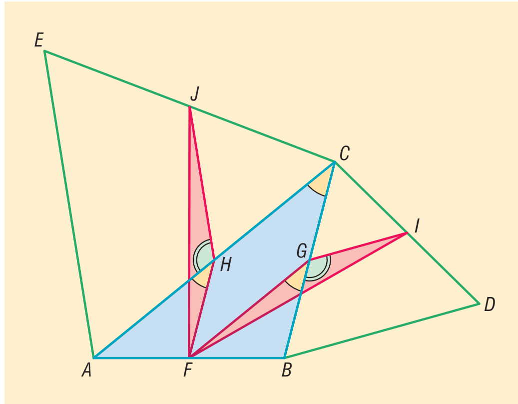
A *b)* feladat állításának igazolásához elegendő arra hivatkoznunk, hogy az AB szakasz felezőpontja ugyanolyan távolságra van az I ponttól, mint a H ponttól, mivel $AI = BH$. Ebből következik, hogy az AB szakasz és az IH szakasz felezőmerőlegese ezúttal is egybeesik, és így az ABC háromszög köré írható kör középpontja illeszkedik az IH szakasz felezőmerőlegesére is.

1732 *a)* Az FH szakasz középvonal a BCA háromszögben, ezért

$$FH = \frac{BC}{2}.$$

A GI szakasz középvonal a BDC háromszögben, így

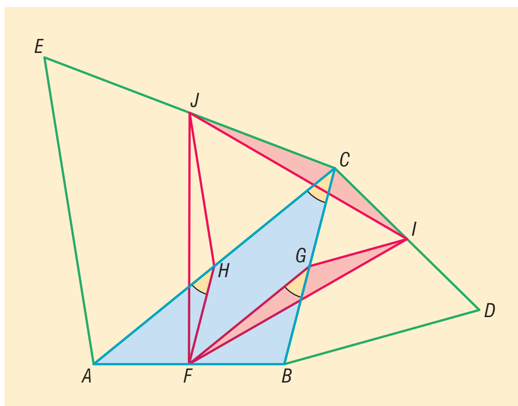
$$GI = \frac{BD}{2}.$$



A BDC háromszög szabályos, ezért $BD = BC$, amiből következik, hogy $FH = GI$. Hasonlóan látható be, hogy $JH = GF$. Láthatjuk, hogy az FHJ és FGI háromszögekben két-két oldal megegyezik. Megmutatjuk, hogy az egyenlő oldalak által közrefogott szögek is megegyeznek, amiből azonnal következik, hogy a két háromszög egybevágó. Használjuk fel, hogy az ABC háromszög HF középvonala párhuzamos a BC oldallal, amiből következik, hogy $AHF\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \gamma$ (egyállású szögpár). Hasonló mondható a háromszög GF középvonaláról és AC oldaláról, ezért $FGB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \gamma$ is teljesül. Vegyük észre, hogy az $AHJE$ és a $BDIG$ négyszögek trapézok, hiszen JH és GI középvonalak a megfelelő szabályos háromszögekben. A trapéz szárán fekvő szögei 180º-ra egészítik ki egymást, és mivel mindkét trapézban a hosszabb alapon fekvő szögek 60º-osak, ezért $AHJ\sphericalangle = BGI\sphericalangle = 120º$. Ekkor $JHF\sphericalangle = 120º + \gamma = FGI\sphericalangle$, amit bizonyítani akartunk. Megjegyezzük, hogy ha $\gamma = 60º$, akkor $JHF\sphericalangle = FGI\sphericalangle = 180º$, ami mutatja, hogy ebben az esetben mindkét háromszög szakasszá fajul.

b) Az *a)* feladatban bizonyítottak alapján az FHJ és FGI háromszögek egybevágók, amiből azonnal következik, hogy az FIJ háromszög egyenlő szárú, és $FJ = FI$. Tekintsük a CJI háromszöget. Mivel J az EC oldal felezőpontja, ezért $JC = HC = GF$, és hasonlóan $CI = GI$. Egyszerű szögszámolás mutatja, hogy

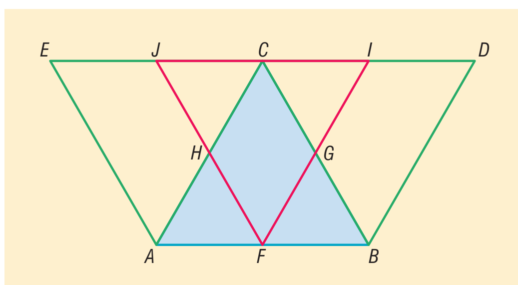
$$JCI\sphericalangle = 60º + \gamma + 60º = 120º + \gamma.$$



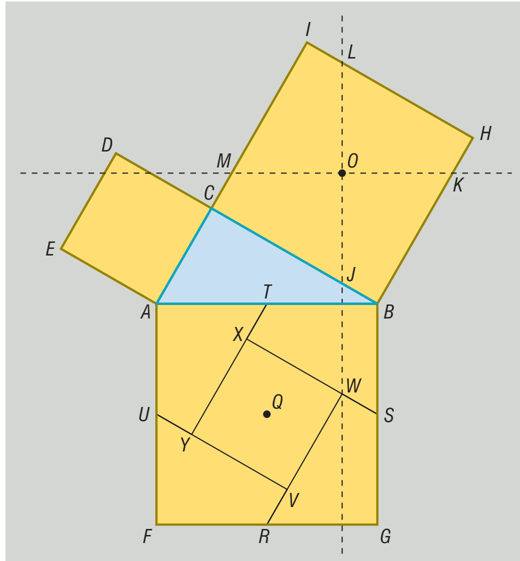
Korábbi eredményünk alapján $JCI\sphericalangle = FGI\sphericalangle$, ezért a JCI és az FGI háromszögekben két-két oldal, valamint az általuk közrezárt szögek megegyeznek, és ebből adódóan a két háromszög egybevágó egymással. A háromszögekben ekkor a harmadik oldalak is megegyeznek, azaz $JI = FI = FJ$, tehát az FIJ háromszög valóban szabályos.

c) Amennyiben az ABC háromszög szabályos, úgy az FIJ háromszög egybevágó az ABC háromszöggel, amint azt az ábra is mutatja. Ebben az esetben az FI oldal is a hosszúságú, így például Pitagorasz tételével kiszámolható az FIJ háromszög magassága, majd a magasságból a területe:

$$m = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}, \quad T = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$



1733 *a)* A feladat Pitagorasz tételének egy kevésbé gyakori, geometriai transzformációkkal dolgozó bizonyítását kéri. Az ábra jelöléseit használva megmutatjuk, hogy a befogókra rajzolt négyzetek részeiből átfedés nélkül, hézagmentesen kitölthető az átfogóra rajzolt négyzet.



Az átfedéshez eltolásokat használunk fel; az $IMOL$ négyszöget a $WRGS$ négyszögbe, az $MCJO$ négyszöget a $TXSB$ négyszögbe, az $OJBK$ négyszöget az $AUYT$ négyszögbe, az $LOKH$ négyszöget az $UFRV$ négyszögbe, és végül az $EACD$ négyzetet az $YVWX$ négyzetbe visszük át.

Vizsgáljuk először a BC befogóra rajzolt négyzetet. Az O pont körüli 90°-os forgatás a négyzetet önmagába viszi át, az O-n átmenő két merőleges egyenest pedig egymásba. Ebből következik, hogy a két egymásra merőleges „vágás” négy egybevágó részre bontja a négyzetet.

Ezután toljuk el az $IMOL$ négyszöget a $WRGS$ négyszögbe. Mivel MO és OL merőlegesek egymásra, ezért az eltolás megvalósítható; az R pont az FG, az S pont a GB oldalra illeszkedik. Toljuk most az $LOKH$ négyszöget az $UFRV$ négyszögbe. Ez pontosan akkor tehető meg, ha $MO + OK = AB$. Ez azonban teljesül, hiszen az $ABKM$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, így ez a négyszög paralelogramma. Ebből következően $MO + OK = AB$, vagyis a két szakasz hosszának összege valóban kiadja a háromszög átfogójának hosszát. Mivel IM és HK párhuzamosak, ezért eltolt képeik is párhuzamosak, ami igazolja, hogy a V pont illeszkedik az RW szakaszra, azaz az R pontnál sem hézag, sem átfedés nem alakul ki.

Ezután toljuk az $MCJO$ négyszöget a $TXSB$ négyszögbe. Ahhoz, hogy ez megtehető, meg kell mutatnunk, hogy $LJ = LO + OJ = AB$. Említettük, hogy az O körüli 90°-os forgatás az O-n átmenő merőlegeseket egymásba viszi át, amiből azonban az is következik, hogy LJ elforgatott képe MK, ezért $LJ = MK$. Már láttuk, hogy $MK = AB$, így $LJ = AB$ is teljesül. Megjegyezzük, hogy az S pontnál ugyanúgy nem alakul ki sem átfedés, sem hézag, mint ahogy azt már az R pontnál láttuk.

Az eddigiekből már az is következik, hogy az $OJBK$ négyszöget az $AUYT$ négyszögbe tudjuk tolni úgy, hogy az $ABGF$ négyszög oldalai mentén sehol nem alakul ki átfedés és hézag.

Azt kell még megmutatnunk, hogy az $EACD$ négyzetet az $YVWX$ négyszögbe lehet tolni. Láttuk, hogy az $ABKM$ négyszög paralelogramma, és így $BK = AM$, amiből egyszerűen adódik, hogy

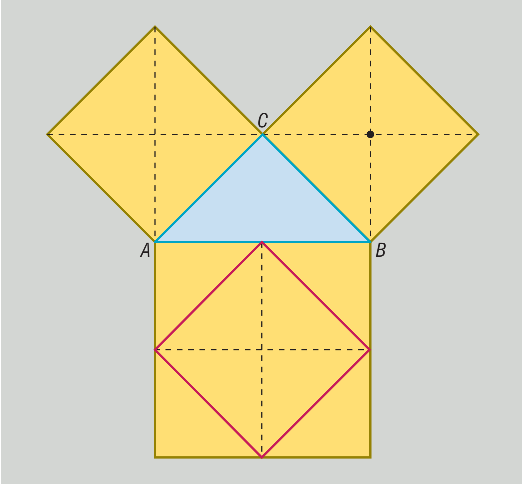
$$BK - MC = AM - MC = AC.$$

Mivel a már ismertetett eltolások a BK szakaszt az YT szakaszba, az MC szakaszt pedig az XT szakaszba viszik át, ezért

$$YX = YT - XT = BK - MC = AC.$$

Hasonlóan látható, hogy az $XYVW$ négyszög többi oldala is AC-vel egyenlő, ezért rombusz. Másrészt az eltolás minden szakaszt önmagával párhuzamos szakaszba visz át, így az YT és az UV szakaszok hajlásszöge megegyezik a BK és LH szakaszok hajlásszögével. Ez utóbbi kettő szakasz viszont a BC oldalú négyzet két szomszédos oldalára illeszkedik, így merőlegesek egymásra. Ez bizonyítja, hogy az $XYVW$ rombusz négyzet, amely egybevágó az $EACD$ négyzettel.

b) Jóval egyszerűbb az egyenlő szárú derékszögű háromszög esete. Ekkor a *BC* befogóra rajzolt négyzet nem négyszögekre, hanem egyenlő szárú derékszögű háromszögekre esik szét. Az átdarabolás természetesen ebben az esetben is működik, amit az alábbi ábrán megjelenített segédvonalak szépen szemléltetnek.



Vegyes feladatok – megoldások

1734 *a)* Szögeinek nagysága szerint három ilyen deltoid létezik. A szögek az egyes esetekben:

I. megoldás: 80°, 80°, 30°, 170°;

II. megoldás: 30°, 30°, 80°, 220°;

III. megoldás: 125°, 125°, 80°, 30°.

b) Szögeinek nagysága szerint két ilyen deltoid létezik. A szögek az egyes esetekben:

I. megoldás: 100°, 100°, 40°, 120°;

II. megoldás: 110°, 110°, 100°, 40°.

Ha a szimmetriatengely két oldalán 40°-os szögek vannak, akkor nem kapunk deltoidot, mivel a negyedik szögre 180° adódna.

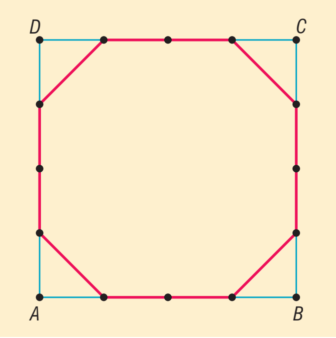
1735 A négyszög szögei: 30°, 30°, 150°, illetve 150°.

1736 Mivel $288° = 12 \cdot 24°$, ezért az állítás igaz.

1737 *a)* igen; *b)* nem; *c)* igen; *d)* igen; *e)* igen.

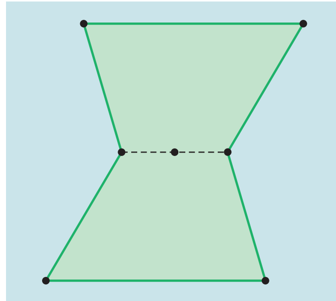
1738 A téglalapok, illetve a rombuszok.

1739 Van ilyen nyolcszög. Az ábrán egy négyzet oldalainak negyedelőpontjait kötöttük össze. A kapott nyolcszög természetesen nem szabályos, ugyanakkor a négyzet középpontja körüli 90°-os forgatás önmagába viszi át.

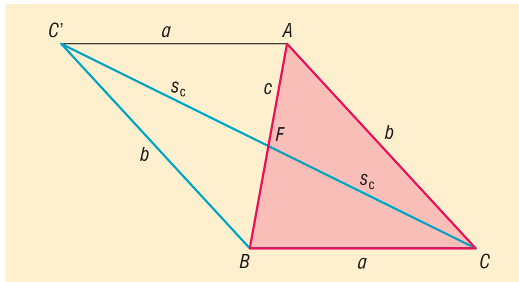


1740 *a)* Középpontosan szimmetrikus konkáv négyszög nem létezik, mivel egy ilyen négyszögnek szükségképpen két konkáv szöge is lenne, így a belső szögeinek összege nem lehetne 360°.

b) Középpontosan szimmetrikus konkáv hatszög létezik. Ilyet kapunk például, ha az ábrán is látható módon egy trapézt középpontosan tükrözünk rövidebb alapjának felezőpontjára.

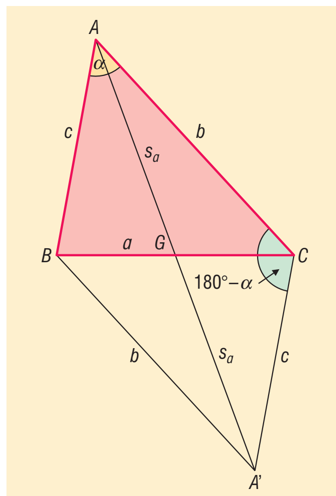


1741 *a)* Ha az ABC háromszöget tükrözzük AB oldalának F felezőpontjára, akkor a kapott $BCAC'$ paralelogramma oldalai a és b, egyik átlója $2 \cdot s_c$ hosszúságú. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők:



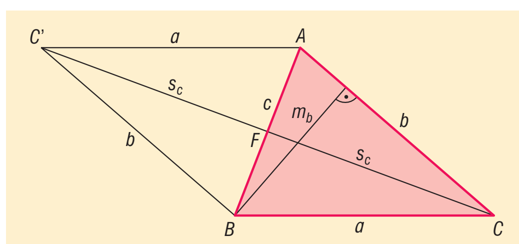
1. Megszerkesztjük a BCC' háromszöget, melynek oldalai ismertek: a, b és $2 \cdot s_c$.
2. Megszerkesztjük a CC' szakasz F felezőpontját.
3. Tükrözzük a B pontot az F pontra, így kapjuk az ABC háromszög hiányzó A csúcsát.

b) Ha tükrözzük az A pontot a BC oldal G felezőpontjára, akkor az $AA'C$ háromszög két oldala és egy szöge ismert, hiszen az $ABA'C$ négyszög paralelogramma, amiből következik, hogy $ACA'\sphericalangle = 180° - \alpha$. Ezek alapján a szerkesztés menete a következő.



1. Az adott $AC = b$ szakasz C végpontjához felmérjük a $180° - \alpha$ nagyságú szöget.
2. Az A pont – mint középpont körül – $2 \cdot s_a$ sugarú kört szerkesztünk.
3. A kör az 1. lépésben szerkesztett szögszárból kimetszi az A' pontot.
4. Megszerkesztjük az AA' szakasz G felezőpontját.
5. Az ABC háromszög hiányzó B csúcsát a C pont G-re vonatkozó tükrözésével kapjuk.

c) Az adott m_b szakasz nemcsak az ABC háromszögnek, hanem az $AC'BC$ paralelogrammának is magassága, ahol C' a C pontnak az AB szakasz F felezőpontjára vonatkozó tükörképe. A szerkesztés menete ezek alapján:

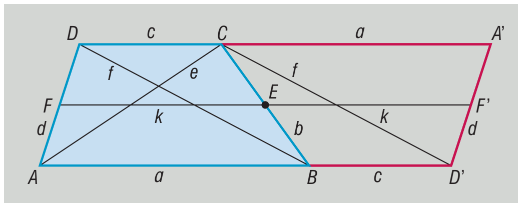


1. Az adott $AC = b$ szakasszal, attól m_b távolságra, párhuzamost szerkesztünk. A párhuzamos tartalmazza a B és C' pontokat.
2. A C' pontot a C középpontú, $2s_c$ sugarú kör metszi ki az 1. pontban szerkesztett párhuzamosból.
3. Megszerkesztjük a CC' szakasz F felezőpontját.
4. A B pontot úgy kapjuk, hogy az A pontot tükrözzük az F pontra.

d) A *c)* feladat ábrájának jelöléseit használva a szerkesztés lépései a következők:

1. Felvesszük a BC egyenest, majd kijelölünk rajta egy tetszőleges B pontot.
2. A BC egyenessel, attól m_a távolságra, párhuzamost szerkesztünk (e), amely tartalmazza az A és C' pontokat.
3. Megszerkesztjük a B középpontú, b sugarú k kört.
4. Az e egyenes és a k kör metszéspontjaként megjelöljük a C' pontot.
5. Megszerkesztjük a C' középpontú, $2 \cdot s_c$ sugarú c kört.
6. Megjelöljük a c kör és a BC egyenes C metszéspontját.
7. Megszerkesztjük a CC' szakasz F felezőpontját.
8. A hiányzó A csúcsot úgy kapjuk, hogy a B pontot tükrözzük az F pontra.

1742 Ha az $ABCD$ trapézt BC szárának E felezőpontjára tükrözzük, akkor az ábra szerinti $AD'A'D$ paralelogrammát kapjuk, amelynek AD' oldala az adott középvonal hosszának kétszerese. Ezt az észrevételt felhasználva a szerkesztés könnyen elvégezhető. A szerkesztési lépések leírása során az ábra jelöléseit használjuk.



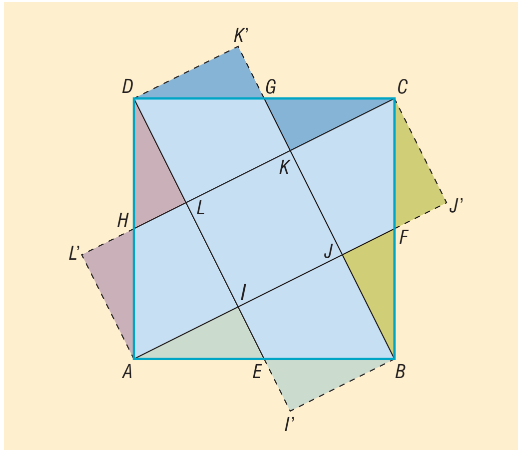
a) 1. Megszerkesztjük az $AD' = 2 \cdot k$ hosszúságú szakaszt.
2. Párhuzamost szerkesztünk az AD' szakasszal, attól az adott magassággal egyenlő távolságra.
3. A trapéz D csúcsát az A középpontú, d sugarú kör metszi ki a 2. lépésben szerkesztett párhuzamosból.
4. Megszerkesztjük a DD' szakasz E felezőpontját.
5. A trapéz B csúcsát az E középpontú $\frac{b}{2}$ sugarú kör metszi ki az AD' szakaszból.
6. A trapéz hiányzó C csúcsát a BE egyenes, valamint a 2. lépésben szerkesztett párhuzamos metszéspontjaként szerkeszthetjük meg.

b) 1. Megszerkesztjük az $AD' = 2 \cdot k$ hosszúságú szakaszt.
2. Párhuzamost szerkesztünk az AD' szakasszal, attól az adott magassággal egyenlő távolságra.
3. Az AD' szakasz A végpontjában felmérjük az AD és AB oldalak által bezárt szöget.
4. A 3. lépésben szerkesztett szögszár kimetszi az AD' egyenessel párhuzamos egyenesből a D pontot.
5. Megszerkesztjük a DD' szakasz E felezőpontját.
6. Az E ponton át olyan egyenest szerkesztünk, amely a BC és BA oldalak ismert szögét zárja be a BA oldallal.
7. A 6. lépésben szerkesztett egyenes kimetszi az AD' szakaszból a B csúcsot, az AD'-vel párhuzamos egyenesből a C csúcsot.

c) 1. Megszerkesztjük az $AD'C$ háromszöget, melynek oldalai ismertek: AD' a középvonal kétszerese, másik két oldala az $ABCD$ trapéz egy-egy átlója.
2. A B csúcsot a C középpontú, b sugarú kör metszi ki az AD' szakaszból.
3. Megszerkesztjük a BC szakasz E felezőpontját.
4. A D csúcsot a D' pont E középpontra való tükrözésével kapjuk.

1743 Az ábra, és így a „belső” hatszög is forgásszimmetrikus az eredeti hatszög középpontja körüli $k \cdot 60°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatásokra nézve, ezért a kialakuló „belső” hatszög is szabályos.

1744 *a)* Az ábra, és így a középen kialakuló négyszög is forgásszimmetriát mutat a négyzet középpontja körüli $k \cdot 90°$-os ($k \in \mathbb{Z}$) forgatásokra nézve, ami csak úgy lehetséges, hogy a „belső” négyszög is négyzet. Mivel szakasz és elforgatott képe egymással a forgatás szögét zárják be, ezért például DE merőleges CH-ra, továbbá CH merőleges GB-re, amiből az is következik, hogy DE és GB párhuzamosak. Ekkor viszont a $DLKG$ négyszögben DL és GK párhuzamosak, ezért a négyszög trapéz, amelyben az LK szár merőleges az alapokra. Hasonlóan látható be, hogy a $CKJF$, $BJIE$, $AILH$ négyszögek is ugyanilyen tulajdonságúak.

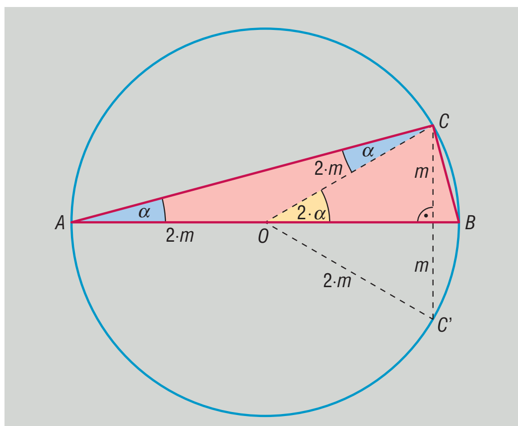


b) Forgassuk el a H pont körül a DHL derékszögű háromszöget 180°-kal; ekkor a H pont helyben marad, D képe A, L képe L' (ld. ábra). Megmutatjuk, hogy az $L'LIA$ négyszög négyzet.

Ehhez először is vegyük észre, hogy a HL szakasz párhuzamos az AI szakasszal, továbbá H a DA oldal felezőpontja, ezért HL egyben az AID háromszög középvonala is, így HL hossza az AI hosszának fele. Az elmondottakból következik továbbá, hogy $L'L = AI$, valamint $L'A = LD = LI$, ezért az $L'LIA$ négyszög szemközti oldalai egyenlő hosszúak, így $L'LIA$ paralelogramma. Másrészt a négyszög L' csúcsánál 90°-os szög van, így természetesen téglalap is egyben.

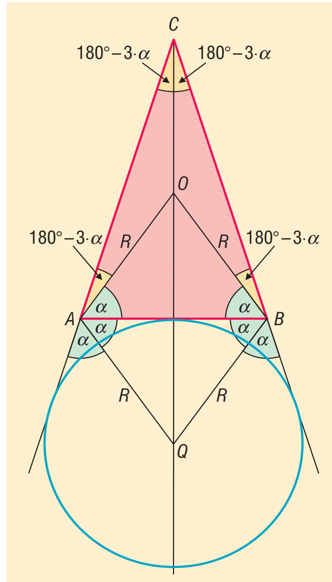
Végül vegyük észre, hogy az $ABCD$ négyzet középpontja körüli 90°-os forgatás a DL szakaszt az AI szakaszba viszi át, ezért $DL = AI$, másrészt $DL = L'A$, amiből $L'A = AI$ következik. Ez azt mutatja, hogy az $L'LIA$ téglalap két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú, ezért valóban négyzet. Ha ehhez hasonlóan az AEI, BFJ, CGK háromszögeket is 180°-kal elforgatjuk a megfelelő oldalfelező pontok körül, akkor ezzel az $ABCD$ négyzetet öt egybevágó négyzetté daraboljuk át. Ez viszont azt jelenti, hogy az $IJKL$ és az $ABCD$ négyzetek területének aránya $1:5$.

1745 Thalész tételének megfordítása alapján az ABC derékszögű háromszög C csúcsa az AB átfogó fölé rajzolt körön található, amiből az következik, hogy az AOC háromszög egyenlő szárú ($OA = OC$, mindkettő a Thalész-kör sugara). Az egyenlő szárú háromszög alapján ugyanakkora nagyságú szögek találhatók, emiatt $CAO\sphericalangle = ACO\sphericalangle = \alpha$, ebből következően az AOC háromszög külső szögére $COB\sphericalangle = 2 \cdot \alpha$ teljesül. Ha az ABC háromszög AB átfogójához tartozó magasságát m jelöli, akkor $AB = 4 \cdot m$ miatt $AO = CO = 2 \cdot m$.



Tükrözzük a C pontot az AB egyenesre. A kapott $CC'O$ háromszög minden oldala $2 \cdot m$ hosszúságú, ezért a háromszög szabályos. A CO és a $C'O$ oldalak a tükrözés AB tengelyével ugyanakkora szöget zárnak be, ezért $2 \cdot \alpha = 30°$, amiből az ABC háromszög hegyesszögei már könnyen számolhatók: 15°, illetve 75°.

1746 A háromszög alapjához írt kör középpontja (Q) a háromszög csúcsából induló belső szögfelezőre, továbbá a másik két külső szögének szögfelezőire is illeszkedik. Ha a Q pontnak az alap egyenesére vonatkozó tükörképe egybeesik a háromszög köré írt kör O középpontjával, akkor az AQ, BQ, AO, BO szakaszok mindegyike a háromszög köré írt kör sugarával egyenlő hosszúságú, így az $AQBO$ négyszög rombusz. A rombusz szögeit az átlók megfelezik, ezért $OAB\sphericalangle = BAQ\sphericalangle = \alpha$. Mivel a Q pont az ABC háromszög A csúcsánál lévő külső szög felezőjének egy pontja, ezért a külső szög nagysága $2 \cdot \alpha$, így az ABC háromszög alapon fekvő szögei $180^\circ - 2 \cdot \alpha$ nagyságúak. Egyszerű szögszámolás mutatja, hogy a háromszög szárszögére:



$$ACB\sphericalangle = 180^\circ - 2 \cdot (180^\circ - 2 \cdot \alpha) = 4 \cdot \alpha - 180^\circ.$$

Vegyük észre ugyanakkor, hogy $CAO\sphericalangle = 180^\circ - 3 \cdot \alpha$, és mivel az ACO háromszög is egyenlő szárú, ezért

$$ACO\sphericalangle = CAO\sphericalangle = 180^\circ - 3 \cdot \alpha.$$

Ebből a háromszög szárszögét kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$ACB\sphericalangle = 2 \cdot (180^\circ - 3 \cdot \alpha) = 360^\circ - 6 \cdot \alpha.$$

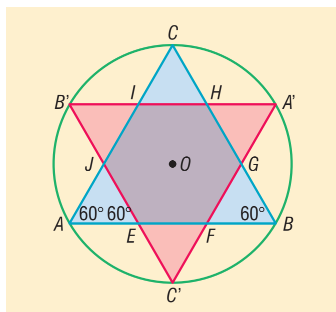
Az ABC háromszög szárszögére kapott két eredmény összehasonlításából adódik:

$$4 \cdot \alpha - 180^\circ = 360^\circ - 6 \cdot \alpha,$$
$$\alpha = 54^\circ.$$

A háromszög szögei ennek megfelelően:

$$CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 72^\circ \quad \text{és} \quad ACB\sphericalangle = 36^\circ.$$

1747 A két háromszög közös része szabályos hatszög. Ehhez előbb megmutatjuk, hogy szögei megegyeznek, majd utána hogy oldalai is egyenlők.



Mivel a tükrözés során szakasz és képe párhuzamos egymással, ezért $B'C'$ és BC egyaránt 60°-os szöget zár be az ABC szabályos háromszög AB oldalával (ld. ábra). Ebből következően a keletkező $EFGHIJ$ hatszög E csúcsnál lévő belső szöge 120°-os. Hasonlóan belátható, hogy a hatszög minden szöge 120°-os.

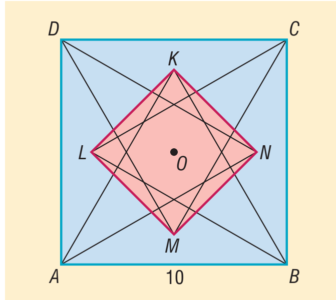
Az $EFGHIJ$ hatszög nyilvánvalóan középpontosan szimmetrikus, középpontja az ABC háromszög köré írt kör O középpontja. A szimmetriából következik, hogy szemközti oldalai megegyeznek, azaz $EJ = HG$, $EF = IH$, $FG = IJ$. Ugyanakkor a CC' egyenes közös szimmetriatengelye a hatszögnek, továbbá az ABC és $A'B'C'$ háromszögeknek. A tengelyes szimmetria következményeként $EJ = FG$. A BB' egyenes is szimmetriatengely, így $EJ = HI$. Eredményeinket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a hatszög oldalai is megegyeznek. Ebből adódóan a hatszög szabályos.

1748 Ha a háromszög magasságai $m_a = 5$ cm, $m_b = 10$ cm, $m_c = 15$ cm, akkor a háromszög területét háromféleképpen kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$\frac{a \cdot 5}{2} = \frac{b \cdot 10}{2} = \frac{c \cdot 15}{2} \qquad \text{és} \qquad a = 2 \cdot b = 3 \cdot c.$$

Ekkor $b + c = \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot a = \frac{5}{6} \cdot a < a$, így nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, ezért ilyen háromszög nem létezik.

1749 *a)* Az $ABCD$ négyzet O középpontja körüli 90º-os forgatás az ABK háromszöget a BCL háromszögbe, a BCL háromszöget a CDM háromszögbe, a CDM háromszöget a DAN háromszögbe, míg a DAN háromszöget az ABK háromszögbe viszi át. Ebből következik, hogy a $KLMN$ négyszög forgásszimmetrikus az O pont körüli 90º-os forgatásra nézve. Egyetlen ilyen tulajdonságú négyszög van, a négyzet.



b) Jelöljük x-szel a $KLMN$ négyzet oldalának hosszát. Ekkor a négyzet átlójára

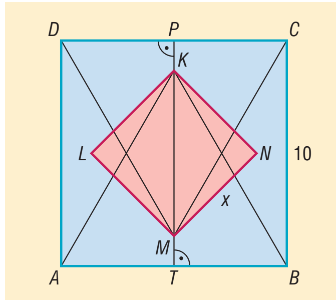
$$KM = x \cdot \sqrt{2}.$$

Ha a KM egyenes az $ABCD$ négyzet AB és CD oldalát a T és P pontokban metszi (ld. ábra), akkor a KT szakasz az ABK szabályos háromszög magassága, ezért

$$KT = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3},$$

amiből

$$PK = 10 - KT = 10 - 5 \cdot \sqrt{3}.$$



A PT szakasz ugyanolyan hosszú, mint az $ABCD$ négyzet oldala, továbbá

$$PT = PK + KM + MT = 2 \cdot PK + x \cdot \sqrt{2}.$$

Felhasználva, hogy az imént PK-t már kiszámoltuk, valamint hogy az $ABCD$ négyzet oldala 10 cm, azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot \left(10 - 5 \cdot \sqrt{3}\right) + x \cdot \sqrt{2} = 10,$$

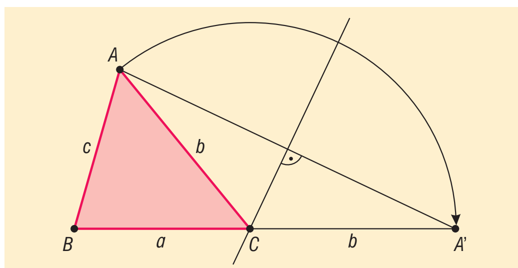
$$x \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{3} - 10,$$

$$x = \frac{10 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{2}}$$

$$x = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 5{,}18.$$

A $KLMN$ négyzet oldala tehát körülbelül 5,18 cm hosszúságú.

1750 A feladatok megoldásához hasznosak lehetnek a következő észrevételek. Ha az ABC háromszög A csúcsát a C pont körül elforgatjuk úgy, hogy a kapott A' pont illeszkedjen a BC oldal C-n túli meghosszabbítására, akkor a kapott $BA'A$ háromszögben $BA' = a + b$, továbbá az $AA'C$ háromszög egyenlő szárú, amelynek ebből kifolyólag C csúcsa illeszkedik az AA' szakasz felezőmerőlegesére.

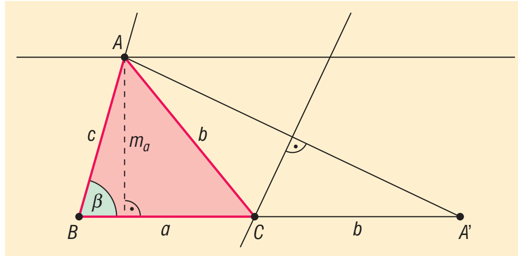


Vegyük még észre, hogy az $AA'C$ egyenlő szárú háromszögben a C csúcsnál lévő külső szög a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, amiből következik, hogy

$$AA'C\sphericalangle = A'AC\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}.$$

A megoldás minden esetben a $BA'A$ háromszög szerkeszthetőségén alapul.

a) A szerkesztés lépései:



1. Az adott $a+b$ hosszúságú BA' szakasztól m_a távolságra párhuzamost szerkesztünk.
2. A B csúcsban a BA' szakaszra átmásoljuk az adott β szöget.
3. A kapott szögszár a BA'-vel párhuzamos egyenesből kimetszi a szerkesztendő háromszög A csúcsát.
4. Az AA' szakasz felezőmerőlegese kimetszi a BA' szakaszból a hiányzó C csúcsot.

A kapott ABC háromszög a feladat feltételeinek megfelel. A feladatnak minden esetben egy megoldása van.

Ezzel egybevágó megoldást kapunk, ha a párhuzamost, valamint a β szöget a BA' szakasz másik partján is megszerkesztjük. A két háromszög a BA' egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel vihető át egymásba.

b) A szerkesztés lépései:

1. Az adott $a+b$ hosszúságú BA' szakasztól m_a távolságra párhuzamost szerkesztünk.
2. B középponttal, c sugárral kört szerkesztünk.
3. A kör kimetszi a BA'-vel párhuzamos egyenesből a háromszög A csúcsát.
4. Az AA' szakasz felezőmerőlegese kimetszi a BA' szakaszból a hiányzó C csúcsot.

A feladatnak 0, 1, 2 megoldása lehet, attól függően, hogy a B középpontú kör milyen helyzetű a BA'-vel párhuzamos egyenessel.

További megoldások adódnak, ha a metszéspontokat a BA' szakasz másik oldalán is megszerkesztjük. Az így adódó megoldások a korábban megkapott megoldások BA' egyenesre vonatkozó tükörképei.

c) A szerkesztés lépései:

1. Az adott $a+b$ hosszúságú BA' szakasztól m_a távolságra párhuzamost szerkesztünk.
2. Az A' csúcsban a BA' szakasszal $\frac{\gamma}{2}$ nagyságú szöget bezáró félegyenest szerkesztünk.
3. A kapott félegyenes kimetszi a BA'-vel párhuzamos egyenesből az A csúcsot.
4. A háromszög hiányzó C csúcsát az AA' szakasz felezőmerőlegese metszi ki a BA' szakaszból.

A feladatnak minden esetben 1 megoldása van.

A kapott megoldás BA' egyenesre vonatkozó tükörképét megkaphatjuk, ha a párhuzamost, valamint a szöget a BA' szakasz másik oldalán is megszerkesztjük.

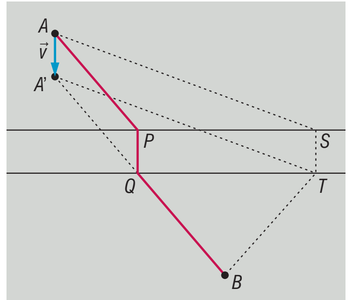
d) A szerkesztés lépései:

1. Az adott $a+b$ hosszúságú BA' szakasz B csúcsához átmásoljuk a β nagyságú szöget.
2. Az A' csúcsban a BA' szakasszal $\frac{\gamma}{2}$ nagyságú szöget bezáró félegyenest szerkesztünk.
3. A két szerkesztett szögszár metszéspontjaként megkapjuk a háromszög A csúcsát.
4. A háromszög hiányzó C csúcsát az AA' szakasz felezőmerőlegese metszi ki a BA' szakaszból.

A feladatnak 1 megoldása van.

A megoldás BA' egyenesre vonatkozó tükörképét megkaphatjuk, ha a szögszárakat a BA' szakasz másik oldalán szerkesztjük meg.

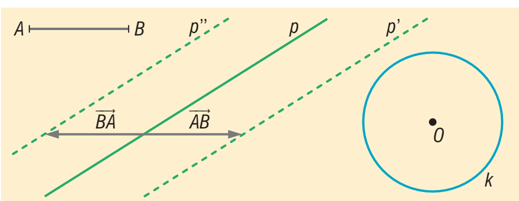
1751 Jelöljük a két települést A-val és B-vel, továbbá legyen $ASTB$ egy olyan út a két település között, amelynek ST darabja az autópályára merőleges (ld. ábra). Toljuk el az A pontot az $\overrightarrow{ST} = \vec{v}$ vektorral. Ha az eltolt pont A', akkor az $AA'TS$ négyszög paralelogramma, ezért az $ASTB$ törött vonal hossza megegyezik az $AA'TB$ törött vonal hosszával, így a feltételek szerint ennek hosszát kell a lehető legrövidebbnek választanunk. Mivel a szóban forgó törött vonalban az AA' szakasz az S pont helyzetétől függetlenül mindig ugyanakkora, ezért elegendő az $A'TB$ törött vonal hosszát minimalizálnunk, ahol a T pont az autópálya B-hez közelebbi határvonalán változik. Tegyük fel, hogy a határvonalból az $A'B$ szakasz a Q pontot metszi ki. Ekkor $A'Q + QB = A'B < A'T + TB$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt, ami mutatja, hogy az $A'QB$ „törött vonal” hossza soha nem lehet nagyobb, mint az $A'TB$ törött vonal hossza, akárhol is vesszük fel a T pontot (Q és T persze különbözőek). Utóbbi észrevételünk lehetőséget ad a szerkesztés elvégzésére.



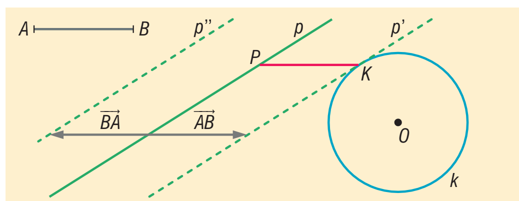
1. Toljuk el az A pontot a $\vec{v}$ vektorral, jelöljük az eltolt pontot A'-vel.
2. Jelöljük meg az $A'B$ szakasz és az autópálya B-hez közelebbi határvonalának Q metszéspontját.
3. Állítsunk merőlegest a Q ponton át az autópálya határvonalaira.
4. Az iménti merőleges kimetszi az A-hoz közelebbi autópálya határvonalából a P pontot.
5. Az $APQB$ törött vonal megfelel a feladat feltételeinek.

1752 A megoldáshoz toljuk el a p egyenest az $\overrightarrow{AB}$-ral, majd a megfelelő K pontot vagy pontokat a kapott p' egyenes és a k kör metszéspontja(i)ként szerkeszthetjük. A K pont(ok) ismeretében a PK szakasz másik végpontja a K pont $\overrightarrow{BA}$-ral történő eltolásával szerkeszthető. További megoldást vagy megoldásokat kaphatunk, ha a p egyenest nemcsak az $\overrightarrow{AB}$, hanem a $\overrightarrow{BA}$ vektor mentén is eltoljuk. Az így kapott egyenest az ábrákon p'' jelöli.

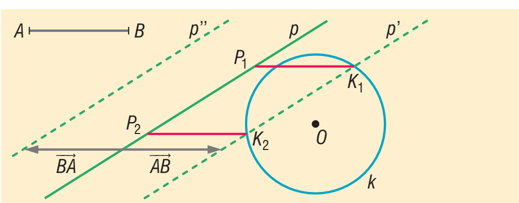
Ezúttal a megoldások számának elemzése okozza a legtöbb nehézséget.



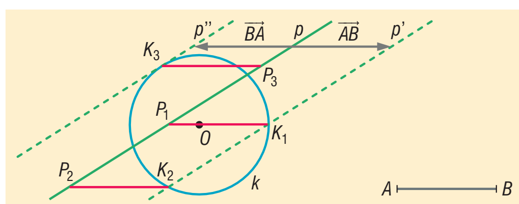
Ha az eltolt egyenesek egyike sem metszi a k kört, akkor a feladatnak nincsen megoldása.



Ha az egyik eltolt egyenes érinti a k kört, a másik elkerüli, akkor 1 megoldást kapunk.



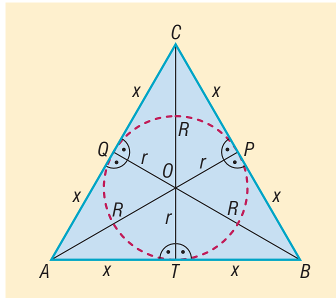
Ha az egyik eltolt egyenes két pontban metszi a k kört, a másik elkerüli, akkor két megoldást kapunk. Szintén 2 megoldás adódik, ha mindkét eltolt egyenes érinti a k kört.



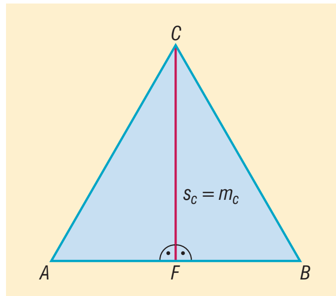
Ha az egyik eltolt egyenes 2 pontban metszi, a másik érinti a k kört, akkor három megoldás adódik.

Végül négy megoldást kapunk, ha mindkét eltolt egyenes 2 pontban metszi a kört.

1753 *a)* A beírt és körülírt körök középpontja csak a szabályos háromszögben esik egybe. Jelöljük az ABC háromszög beírt és körülírt körének közös középpontját O-val, beírt körének sugarát r-rel, körülírt körének sugarát R-rel. Ha a beírt kör a háromszög oldalait az ábra szerint a T, P, Q pontokban érinti, akkor az AOT, BOT, BOP, COP, COQ háromszögek mind egybevágóak egymással, hiszen mindegyik derékszögű, átfogójuk hossza R, egyik befogójuk hossza r. Ezek alapján az ABC háromszög oldalaira eső befogóik is megegyeznek; ennek hosszát az ábrán x-szel jelöltük. Láthatjuk, hogy az ABC háromszög minden oldala egyenlő hosszúságú, így a háromszög valóban szabályos.

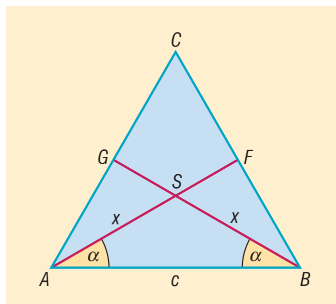


b) A súlypont és a magasságpont csak a szabályos háromszögben esik egybe. Ha ugyanis a háromszög súlypontja és magasságpontja azonos, akkor a súlyvonalak egyben a megfelelő oldalhoz tartozó magasságvonalak is, amiből következik, hogy bármely magasságvonal megfelezi a háromszög megfelelő oldalát. Ha viszont az ABC háromszög CF magasságvonala megfelezi az AB oldalt, akkor az AFC és BFC derékszögű háromszögekben a befogók megegyeznek, így a két háromszög egybevágó, amiből azonnal adódik, hogy $AC = BC$, vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú. Mivel bármely magasságvonalat kiválasztva azt kapjuk, hogy a magasságvonalat közrefogó oldalak megegyeznek, ezért a háromszög valóban szabályos.



c) Ha az ABC háromszögben a súlypont egybeesik a körülírt kör középpontjával, akkor a háromszög szabályos. Ugyanis ha S súlypont és a körülírt kör középpontja is egyben, akkor $AS = BS$, hiszen mindkettő a körülírt kör sugarával egyenlő. Az ABS háromszögben így két oldal egyenlő, tehát a háromszög egyenlő szárú, amiből $SAB\sphericalangle = SBA\sphericalangle = \alpha$.

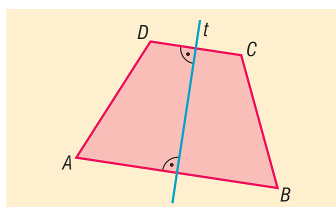
Az $AS = BS$ egyenlőségnek egy további következményeként az AF és BG súlyvonalak is megegyeznek, hiszen a súlypont a súlyvonalat $2:1$ arányban osztja, ezért mindkét szakasz másfélszerese a körülírt kör sugarának. Ekkor a BFA és AGB háromszögekben két-két oldal megegyezik ($AF = BG$ és AB közös oldal), továbbá az egyenlő oldalak által bezárt szög is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó egymással. Ez azt is jelenti, hogy $AG = BF$, amiből $AC = BC$ következik, azaz az ABC háromszög egyenlő szárú.



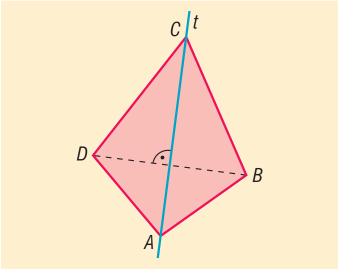
Mivel háromszögünkben bármely két súlyvonal egyenlő hosszúságú, ezért ugyanez érvényes az oldalakra is, amiből tényleg következik, hogy a háromszög szabályos.

1754 Tegyük fel, hogy az $ABCD$ konvex négyszög tengelyesen szimmetrikus. Mivel a tengelyre vonatkozó tükrözés során a négyszög minden csúcsa a négyszög valamely csúcsába megy át, ezért két eset lehetséges; a tengely a négyszögnek 0 vagy 2 csúcsát tartalmazza.

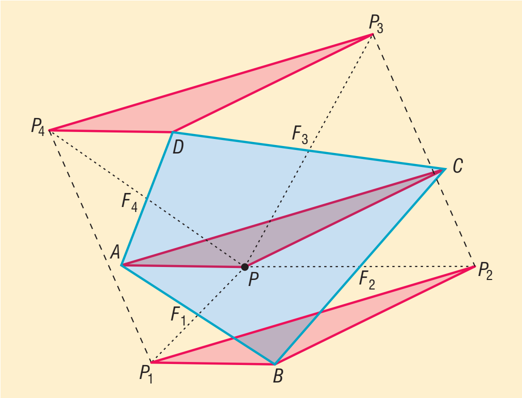
Ha a négyszög egyetlen csúcsa sem illeszkedik a t tengelyre, akkor a t mindkét partján a négyszög két-két csúcsa helyezkedik el. Ekkor a t egyenesre vonatkozó tükrözés az A csúcsot a B, a D csúcsot a C pontba viszi át. A tükrözés tulajdonságai alapján pont és képe közti szakasz merőleges a tükörtengelyre, ezért DC és AB egyaránt merőleges a t egyenesre, és így egymással párhuzamosak. Az $ABCD$ négyszög tehát szimmetrikus trapéz.



Ha a t tengely a négyszög két csúcsát, A-t és C-t tartalmazza, akkor a tengely szükségképpen szétválasztja a négyszög másik két csúcsát, B-t és D-t. A t egyenesre vonatkozó tükrözés során az AB szakasz képe AD, a CB szakasz képe CD, ezért a távolságtartó tulajdonság alapján $AB = AD$, továbbá $CB = CD$. Az $ABCD$ négyszögben $AB + CD = AD + CB$, azaz a szemközti oldalak összege megegyezik. Mivel a feltételek alapján az $ABCD$ négyszög konvex, ezért az érintőnégyszögek tételének megfordításából következik, hogy az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.



1755 *a)* Az ábra jelöléseit használva megmutatjuk, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszögben P_1P_2 és P_4P_3 párhuzamosak és egyenlő hosszúak, így a négyszög valóban paralelogramma.

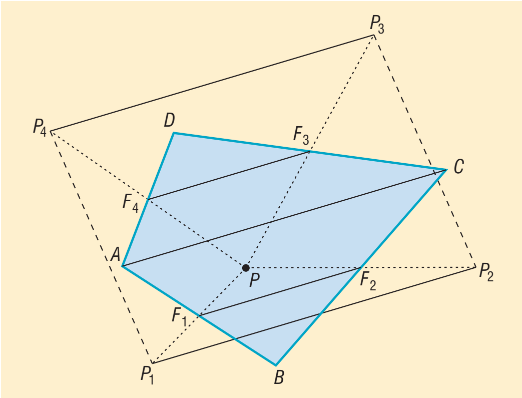


Az AP szakasznak az F_1 felezőpontra vonatkozó tükörképe P_1B, így AP és P_1B párhuzamos egymással, továbbá hosszuk megegyezik. Ehhez hasonlóan a PC szakasznak az F_2 felezőpontra vonatkozó tükörképe P_2B, így PC és P_2B párhuzamos egymással, és ugyanolyan hosszúak. Tekintsük ezután az APC és P_1BP_2 háromszögeket. Láttuk, hogy a két háromszögben két-két oldal párhuzamos egymással, amiből következik, hogy $APC\sphericalangle = P_1BP_2\sphericalangle$ (egyállású szögpár). Mivel a két háromszögben a két-két párhuzamos oldal hossza is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó egymással. Az egybevágóság következményeként $AC = P_1P_2$, és e két oldal is párhuzamos egymással.

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel azt is beláthatjuk, hogy az APC és P_4DP_3 háromszögek is egybevágók, csak ezúttal az F_4, illetve F_3 pontokra vonatkozó középpontos tükrözés tulajdonságait kell felhasználni. Az egybevágóságból adódik, hogy $AC = P_4P_3$, továbbá a két szakasz párhuzamos is egymással.

Eredményeinket összefoglalva elmondhatjuk, hogy a P_1P_2 és P_4P_3 szakaszok párhuzamosak az $ABCD$ négyszög AC átlójával, továbbá $P_1P_2 = P_4P_3 = AC$. Ezzel beláttuk, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög paralelogramma, amelynek két-két oldala az $ABCD$ négyszög egy-egy átlójával egyenlő, és azzal párhuzamos.

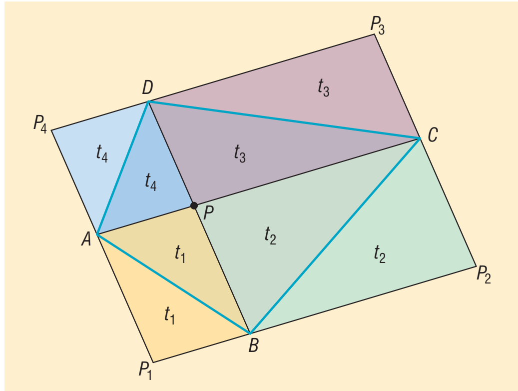
A háromszög középvonalára vonatkozó ismeretekkel a P_1P_2 és P_4P_3 szakaszok párhuzamossága, valamint egyenlősége a következő módszerrel igazolható. Az F_1F_2 szakasz középvonal a P_1P_2P és az ACB háromszögekben, ezért P_1P_2 és AC is párhuzamos F_1F_2-vel, amiből adódóan a két szakasz persze egymással is párhuzamos. Mivel a háromszög oldala kétszer olyan hosszú, mint a párhuzamos középvonala, ezért $AC = P_1P_2 = 2 \cdot F_1F_2$.



Hasonlóan; F_4F_3 középvonal az ACD és a P_4P_3P háromszögekben is, ezért $P_4P_3 = AC$, és a két szakasz párhuzamos is egymással.

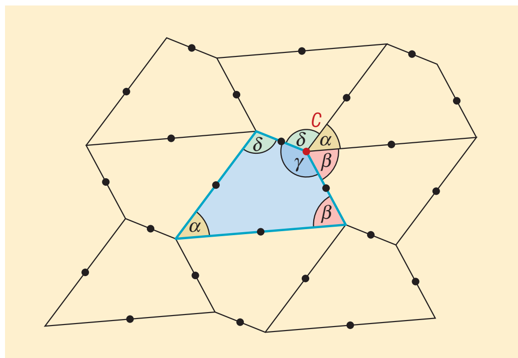
Az eredményeket összefoglalva azt kapjuk, hogy $P_4P_3 = P_1P_2$, továbbá mindkettő párhuzamos AC-vel, ami bizonyítja, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög paralelogramma.

b) Láttuk, hogy a P pont helyzetétől függetlenül a $P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma két-két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő az $ABCD$ négyszög átlóival. Ebből adódóan a $P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma területe független a P ponttól. Érdemes ezért egy olyan P pontot választani, amelyből kiindulva a kapott $P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma területe könnyen kifejezhető az $ABCD$ négyszög területével. Ilyen pontnak tűnik az átlók metszéspontja (ld. ábra). Ebben az esetben a $P_1P_2P_3P_4$ paralelogrammát az AC és BD átlók négy kisebb paralelogrammára bontják, melyekben az $ABCD$ négyszög oldalai egy-egy átlót alkotnak. Az átló a paralelogramma területét megfelezi, ezért az ábrán azonos módon megjelölt területrészek egyenlők. Ebből következően a $P_1P_2P_3P_4$, valamint az $ABCD$ négyszögek területaránya 2.



c) A bizonyítás során sehol nem használtuk fel, hogy a P az $ABCD$ négyszög belső pontja, ezért következtetéseink külső pontra is érvényesek.

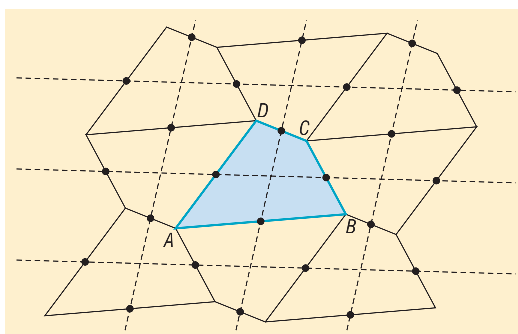
1756 *a)* A hézagmentes, átfedés nélküli parkettázáshoz be kell látnunk, hogy például a C csúcsnál keletkező szögek összegben pontosan 360°-ot tesznek ki. Ez azonban könnyen igazolható, hiszen a tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt, a keletkező szögek megegyeznek az eredeti négyszög belső szögeivel, amelyeknek összege valóban 360°. Az ábrán az eredeti négyszög szögeit, valamint a C csúcsnál kialakuló szögeket tüntettük fel, ugyanakkor az áttekinthetőség érdekében a pontok címkéjét már nem jelenítettük meg.



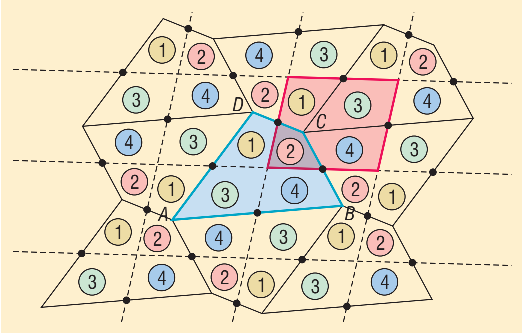
Szintén szükséges, hogy a négyszögrácsban szomszédos négyszögek érintkező oldalai ugyanakkorák legyenek. Ez is teljesül, mivel az érintkező négyszögoldalak minden esetben egymás tükörképei, és a tükrözés a szakaszok hosszát megtartja. Megjegyezzük, hogy gondolatmenetünk konkáv négyszögre is érvényes, így a sík azokkal is kiparkettázható.

A bizonyításon túl érdemes megvizsgálni, hogy milyen transzformációval vihetők egymásba a négyszögrács különböző elemei! Például a közös oldallal rendelkező négyszögeket középpontos tükrözéssel, a csúccsal érintkezőket eltolással tudjuk egymásba vinni. Az ábráról leolvasható, hogy két középpontos tükrözés egymás utáni elvégzése egy eltolással helyettesíthető.

b) Ha egy négyszög középvonalát valamelyik végpontjára tükrözzük, akkor a tükörkép, valamint a kiindulásul vett középvonal természetesen egy egyenesre illeszkednek. Ha a középvonalat a nem illeszkedő oldalak felezőpontjára tükrözzük, akkor a tükörkép és a középvonal a tükrözés tulajdonságai miatt párhuzamos egyenesekre illeszkednek. Ebből következik, hogy a középvonalak tartóegyenesei paralelogrammarácsot alkotnak (az ábrán szaggatott vonallal jelölve).



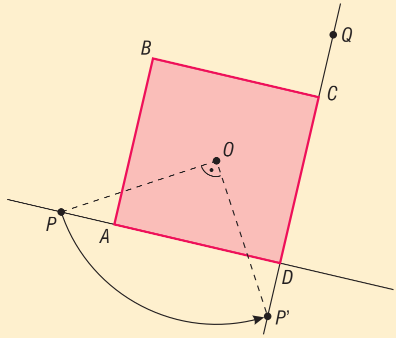
c) A középvonalakra illeszkedő egyenesek a parkettázásban szereplő minden négyszöget négy részre vágnak szét. Az ábrán nyomon követhető, hogy az *ABCD* négyszög egyes részei a tükrözések során mely négyszögekbe mennek át; az azonos számmal jelölt négyszögek egymással egybevágók. Láthatjuk, hogy az *ABCD* négyszög részeiből valóban átfedés nélkül, hézagmentesen kirakható a paralelogrammarács paralelogrammája (az ábrán piros színnel jelölve).

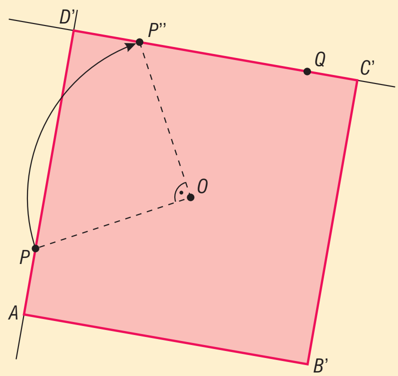


1757 *a)* A négyzet *O* középpontja körüli 90°-os (vagy –90°-os) forgatás az *AD* oldalegyenest a *CD* oldalegyenesbe viszi át, ezért ha a *P* pontot az *O* pont körül 90°-kal (vagy –90°-kal) elforgatjuk, akkor a keletkező *P*' pont illeszkedik a *CD* egyenesre. Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők lehetnek:

1. Elforgatjuk a *P* pontot az *O* pont körül 90°-kal, így kapjuk a *P*' pontot.
2. Megszerkesztjük a *QP*' egyenest.
3. A *P* ponton át merőlegest állítunk a *QP*' egyenesre.
4. A merőleges és a *QP*' egyenes metszéspontja a szerkesztendő négyzet *D* csúcsa.
5. A *D* pontot az *O* pont körül 90°-kal elforgatva megkapjuk a négyzet *C* csúcsát.
6. A *C* pontot az *O* pont körül 90°-kal elforgatva megkapjuk a négyzet *B* csúcsát.
7. A *B* pontot az *O* pont körül 90°-kal elforgatva megkapjuk a négyzet *A* csúcsát.

Ha a *P* pontot az 1. lépésben –90°-kal forgatjuk, és a többi forgatás irányát is megváltoztatjuk, akkor egy újabb, a feltételeknek szintén megfelelő négyzetet kapunk eredményül (alsó ábra).





b) Mint az *a)* feladatban láttuk, általában két megoldást kapunk. Ez alól a következő esetek jelentenek kivételt.

Ha a *P* vagy a *Q* pont valamelyike egybeesik az *O* ponttal, akkor értelemszerűen a feladatnak nincs megoldása.

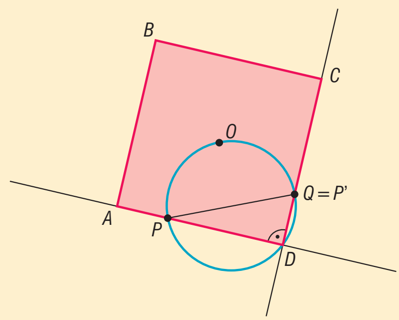
A két ellentétes irányú forgatás ugyanahhoz a négyzethez vezet azokban az esetekben, ha a *P* és a *Q* pontok egybeesnek, vagy ha a *PQ* szakasz felezőpontja az *O* pont. Az előbbi esetben a *P* pont megegyezik a négyzet *D* csúcsával. Az utóbbi esetben $P = A$ és $Q = C$. Ezekben az esetekben tehát a feladatnak csak 1 megoldása van.

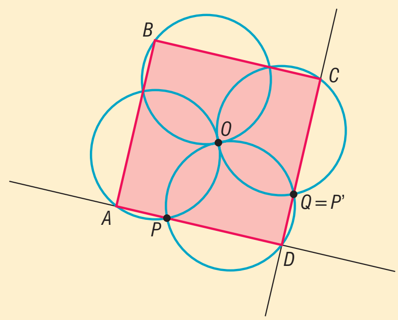
A feladat határozatlan, ha a 2. lépésben megadott *QP*' egyenes nem szerkeszthető. Ez akkor következik be, ha az *O* pont körüli 90°-os vagy –90°-os forgatás a *P* pontot a *Q* pontba viszi át. Ezt az esetet a *c)* feladatban tárgyaljuk.

c) Tegyük fel, hogy az O pont körüli 90°-os forgatás a P pontot a Q pontba viszi át. Ekkor a QP' egyenes nem szerkeszthető egyértelműen, hiszen $P' = Q$. Ha felveszünk a Q ponton át egy tetszőleges egyenest (kivéve OQ-t), akkor a szerkesztés további lépései minden gond nélkül végrehajthatóak, és eredményül egy, a feltételeknek megfelelő négyzetet kapunk. Az elmondottakból következik, hogy a Q ponton átmenő minden egyes egyeneshez (kivéve természetesen az OQ egyenest) egy megoldás tartozik, azaz a feladat feltételeinek végtelen sok négyzet tesz eleget.

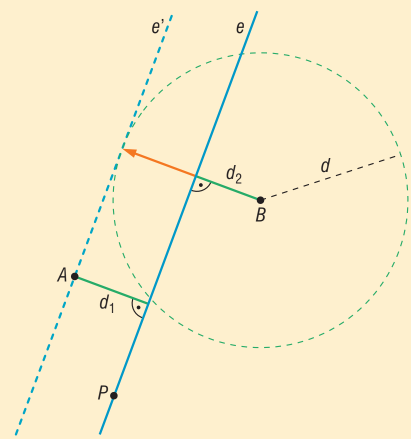
d) A PQD háromszögben a P és Q pontok rögzítettek, továbbá P az AD, Q a CD oldalegyenes egy-egy pontja, ezért $PDQ\sphericalangle = 90°$. Thalész tételének megfordítása alapján a D pont tehát illeszkedik a PQ szakaszra mint átmérő fölé emelt körre (ld. bal oldali ábra). E kör minden O-tól különböző pontja egy alkalmas négyzet D csúcsával egyezik meg.

A négyzet további csúcsai is egy-egy megfelelő Thalész-körre illeszkednek (ld. jobb oldali ábra). Ezeket a köröket úgy kapjuk, hogy a PQ szakasz fölé írt kört az O pont körül 90°-kal, 180°-kal, illetve 270°-kal elforgatjuk. Megjegyezzük, hogy például a B pont a P és Q pontok O középpontra vonatkozó tükörképei fölé emelt körre illeszkedik. A Thalész-körök közös O metszéspontja egyetlen négyzetnek sem lehet csúcspontja.





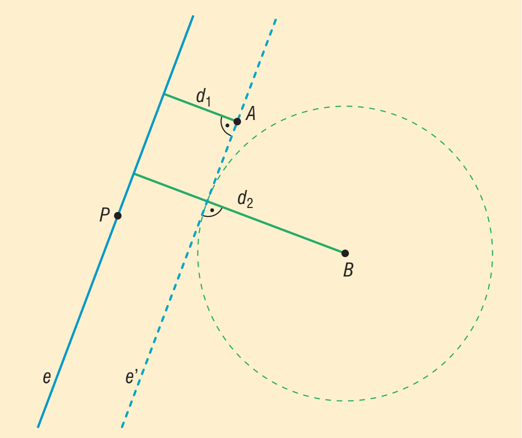
1758 Jelöljük a két tereptárgyat A-val, illetve B-vel, a falut P-vel. A feladat szerint a P ponton át olyan, az A és B pontokat szétválasztó e egyenest kell szerkesztenünk, amelynek az A és B pontoktól mért távolságösszege éppen az adott d hosszúsággal egyenlő (az ábrán $d_1 + d_2 = d$). Vegyük észre, hogy ha az e egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy az eltolt e' kép átmenjen az A ponton, akkor a B pont e' egyenestől mért távolsága éppen d, így lehetőségünk nyílik e' egyenes szerkesztésére; az e' egyenes ugyanis érinti a B középpontú d sugarú kört. Az e' egyenes ismeretében az e egyenes szerkesztése már nem okoz nehézséget, csak annyi dolgunk marad, hogy párhuzamost húzzunk a P ponton át az e' egyenessel.



Az út megépíthetőségének vizsgálata jóval nehezebb feladat, mint a tervezése. Ha az A pont a B középpontú d sugarú körnek belső pontja, akkor természetesen sem az e' egyenes, sem pedig a feltételeknek megfelelő út nem szerkeszthető.

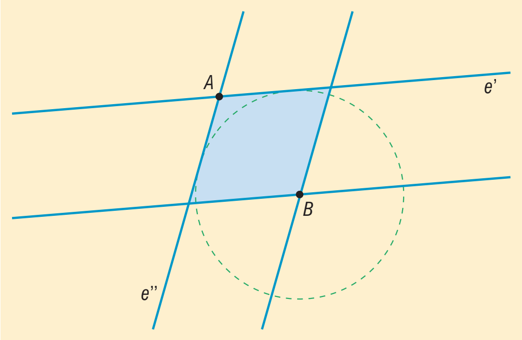
Ha az A pont a körnek külső pontja, akkor az A ponton keresztül két érintő is szerkeszthető a körhöz. A két érintő mindegyikéből elvileg egy-egy megfelelő utat is kapunk, amelyekből azonban nem feltétlenül mindegyik, sőt esetleg egyik sem tesz eleget a feladat feltételeinek.

Ha ugyanis például az e' érintő szétválasztja a B és P pontokat (az ábra egy ilyen esetet mutat), akkor a megfelelő e egyenesnek éppen a B és az A pontoktól mért távolságkülönbsége lesz egyenlő d-vel ($d_2 - d_1 = d$).

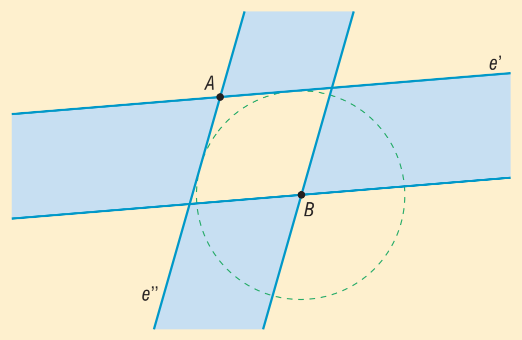


Hasonló helyzet áll elő akkor is, ha a B ponton keresztül e'-vel párhuzamosan húzott egyenes választja szét az A és P pontokat, csak akkor az A és B pontoktól mért távolságok különbsége egyenlő d-vel, azaz $d_1 - d_2 = d$.

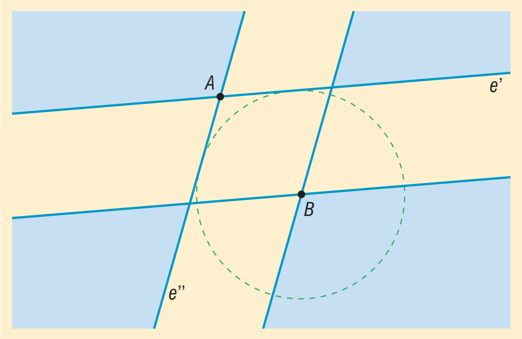
Fenti észrevételeink alapján a lehetséges megoldások:



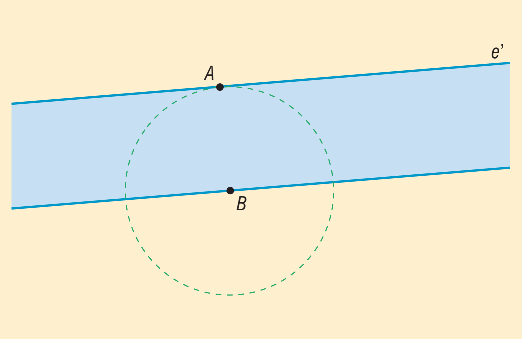
Az ábrán azt a tartományt jelöltük meg, amelyből kikerülő P pontokra mindkét út megfelel a feladat feltételeinek.



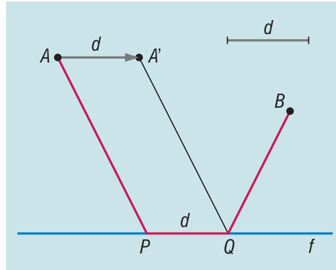
Az ábrán megjelölt tartomány pontjaira a feladatnak egy megoldása van.



Az ábrán megjelölt pontok esetén egyetlen megoldást sem kapunk.



Az A pont illeszkedik a B középpontú d sugarú körre. Ekkor az A ponton át egyetlen érintő szerkeszthető a körhöz. Ha a P pont az ábrán megjelölt sávba esik, akkor a feladatnak egy megoldása van, más esetben a feladatnak nincs megoldása.

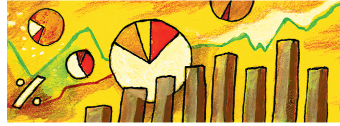


1759 A folyót f-fel, a két turistacsalogató látványosságot A-val és B-vel jelöltük az ábrán. Feladatunk az f egyenesen olyan P és Q pontok szerkesztése, amelyre az $APQB$ törött vonal hossza a lehető legkisebb, továbbá $PQ = d$, az előre adott távolság. Toljuk el az A pontot az f egyenessel párhuzamosan a B pont „irányába" d hosszúságú vektorral (ld. ábra). Ha a kapott pontot A' jelöli, akkor az $APQA'$ paralelogrammában $AP = A'Q$, $AA' = PQ$. Ekkor az $APQB$ törött vonal hosszára teljesül, hogy:

$$AP + PQ + QB = A'Q + AA' + QB = d + A'Q + QB,$$

amelyben a d hosszúságú rész a P és Q pontok helyzetétől függetlenül szerepel, ezért elegendő az $A'QB$ törött vonal hosszát minimalizálni. Ezzel a feladatot visszavezettük a következő, jól ismert problémára: adottak az f egyenes ugyanazon partján az A' és a B pontok. Szerkesszük meg az f egyenesen azt a Q pontot, amelyre az $A'Q$ és a QB szakaszok hosszának összege a lehető legkisebb.

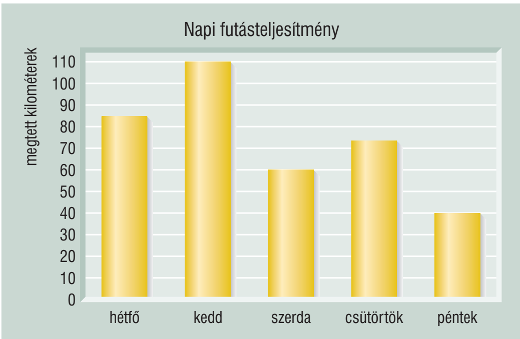
Az átfogalmazott problémát az 1589. feladatban már megoldottuk. A megoldáshoz tükrözzük a B pontot az f egyenesre, majd a kapott B' pontot kössük össze A' ponttal. Az $A'B'$ szakasz az f egyenesből kimetszi a keresett Q pontot. Visszatérve az eredeti feladathoz, a Q pont ismeretében a P pont már könnyen szerkeszthető; nincs más dolgunk, csak a Q pontot el kell tolnunk az $\overrightarrow{A'A}$-ral.



9.7. STATISZTIKA

Az adatok ábrázolása – megoldások

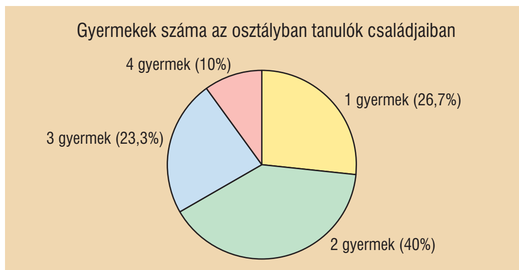
1760 Az oszlopdiagram kinézhet például úgy, mint a bal oldali ábra.



1761 Összes: 3 mázsa, jonatán: 0,5 mázsa, idared: 1,5 mázsa. A diagram a jobb oldalon látható.

1762 Egykék száma: 8, egy tanulóra 12° középponti szög jut. Készítsünk táblázatot:

Gyermekek száma	Tanuló	Középponti szög
1	8	$12° \cdot 8 = 96°$
2	12	$12° \cdot 12 = 144°$
3	7	$12° \cdot 7 = 84°$
4	3	$12° \cdot 3 = 36°$
összesen	**30**	**360°**



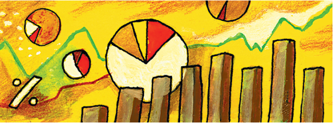
1763 Egy százalékra 3,6° középponti szög jut.

Kategória	busz	teherautó	furgon	személyautó	összesen
Középponti szög	$60° - 0° = 60°$	$150° - 60° = 90°$	$230° - 150° = 80°$	$360° - 230° = 130°$	360°
Százalékban	$60° : 3{,}6° = 16{,}67\%$	$90° : 3{,}6° = 25\%$	$80° : 3{,}6° = 22{,}22\%$	$130° : 3{,}6° = 36{,}11\%$	100%

1764 Minden járműre 5° középponti szög jut.

Kategória	busz	teherautó	furgon	személyautó	összesen
Középponti szög	100°	40°	90°	130°	360°
Darabszám	20	$40° : 5° = 8$	$90° : 5° = 18$	$130° : 5° = 26$	72

1765 A kereskedő megszakított értéktengellyel próbálta eltitkolni a csökkenés mértékét.
Megjegyzés: Azzal leginkább a pszichológia foglalkozik, hogy első ránézésre miért nem tűnik fel a három pont.



1766 *A* párt: nem javult nagymértékben a bűncselekmények felderítése. *B* párt: nagymértékben nőtt a hatékonyság.

Megjegyzés: Mindkét diagram sántít, hiszen nem a felderített bűncselekmények száma az érdekes, hanem azoknak az összes bűncselekményhez viszonyított aránya. (Nagyon nem mindegy, hogy 5%-os a felderítés aránya vagy 95%-os!)

1767 *a)* Kezdjük a táblázattal.

Érdemjegy	1	2	3	4	5
Fő	1	1	2	3	8

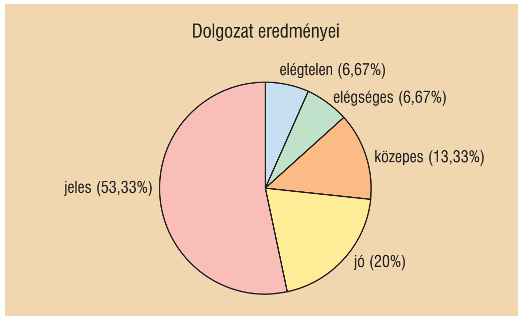
Százalékos határok (a felső határ már jobb jegyet ér):

0–26%: elégtelen, 26–42%: elégséges, 42–62%: közepes, 62–82%: jó, 82%-tól: jeles.

b) Mivel 15 tanulónk van, az egy tanulóra jutó középponti szög:

$$\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ.$$

Az első két kategóriára jutó középponti szög így 24°, a közepesre 48°, a jóra 72°, a jelesre pedig 192°. A diagram az ábrán látható.



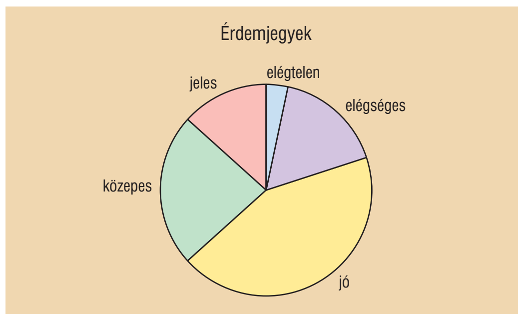
1768 *a)* A gyakorisági táblázat adatait az oszlopdiagramról olvashatjuk le:

Érdemjegy	1	2	3	4	5
Gyakoriság	1	5	13	7	4

b) Az egy tanulóra jutó középponti szög:

$$\frac{360^\circ}{30} = 12^\circ.$$

Így a jeles tanulókra 48°, a jókra 84°, a közepesekre 156°, az elégségesekre 60°, az elégteleneknek 12° jut.



1769 *a)* Anettnek ment az sms-ek

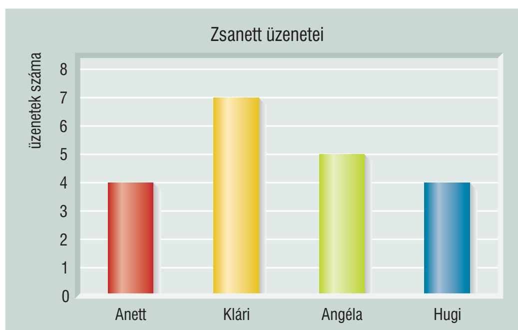
$$\frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot 100\% = 20\%\text{-a},$$

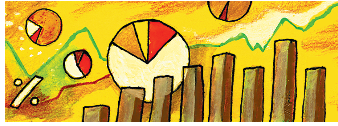
Klárinak pedig a 35%-a. Hugi ugyanannyi sms-t kapott, mint Anett, így Angélának marad az üzenetek 25%-a.

b) Ha Zsani 7 sms-t küldött Klárinak, akkor egy üzenetre

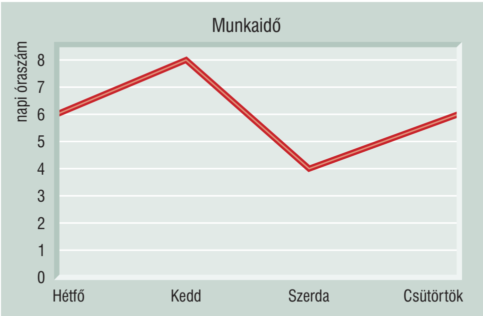
$$\frac{126^\circ}{7} = 18^\circ\text{-os}$$

középponti szög jut. Ugyanígy Anett és Hugi egyaránt 4-4 üzenetet kapott, Angéla pedig 5 darabot.

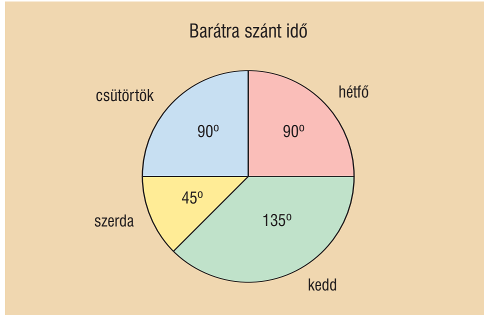




1770 *a)* A keresett vonaldiagram:



b) Az egyes szögek rendre 90º, 135º, 45º, 90º.



c) Össze kell adnunk az egyes napok oszlopait, hozzáadni az értékhez még nyolcat, és kivonni a kapott számot 24-ből.

Hét napjai	hétfő	kedd	szerda	csüt.
Maradó idő (óra)	5	3	8	5

1771 *a)* Első lépésben határozzuk meg, milyen összefüggések vannak a különböző oszlopok között. Ehhez jelöljük a lakónépességet A, a területet B, a népsűrűséget C, a települések számát D, a 100 km^2-re jutó települések számát E-vel.

A lakosság számát $1000 \cdot A$ adja meg. A népsűrűséghez a lakosság számát (fő) kell osztani a területtel (km^2). A 100 km^2-re jutó településszám mértékegysége $\dfrac{\text{település}}{100\ \text{km}^2}$. Így a megfelelő képletek:

$$C = \frac{1000 \cdot A}{B} \quad \text{és} \quad E = \frac{D}{\frac{B}{100}}.$$

A táblázat első sora teljes, így ott le is ellenőrizhetjük a képleteket.

$$\frac{2897300}{6916} = 418{,}9 \approx 419 \quad \text{és} \quad \frac{188}{69{,}16} = 2{,}718 \approx 2{,}7.$$

Nincs más dolgunk, mint behelyettesíteni a kitalált összefüggésekbe.

Az első öt kérdezett adat soronként lefelé haladva, figyelve a kért kerekítésekre:

$$C = \frac{1104800}{11116} = 99{,}3 \approx 99; \qquad E = \frac{655}{113{,}28} = 5{,}78 \approx 5{,}8;$$

$$B = \frac{960100}{68} = 14119{,}1 \approx 14119; \qquad D = 4{,}5 \cdot 134{,}33 = 604{,}4 \approx 604;$$

$$A = \frac{85 \cdot 17729}{1000} = 1506{,}96 \approx 1507.$$

A dél-alföldi régió sorában azzal szembesülünk, hogy egyszerre három adat is hiányzik (A, B, D) és csak kettő ismert (C, E). Ezekből nem tudjuk megállapítani az ismeretleneket. Ha a sor nem segít, keressünk olyan oszlopot, amelyben már elég információ áll rendelkezésünkre! Ilyen oszlop az első:

$$A = 10045{,}4 - (2897{,}3 + 1104{,}8 + 997{,}9 + 960{,}1 + 1236{,}7 + 1507{,}0) = 1341{,}6.$$

Így A és C-ből már a területet és a települések számát is kiszámíthatjuk a Dél-Alföld sorában:

$$B = \frac{1341600}{73} = 18378{,}08 \approx 18378; \quad D = 1{,}4 \cdot 183{,}78 = 257{,}2 \approx 257.$$

Az utolsó sor hiányzó B és D adatait egyszerű összegzéssel kapjuk meg:

$$B = 6916 + 11116 + 11328 + 14119 + 13433 + 17729 + 18378 = 93019;$$

$$D = 188 + 401 + 655 + 655 + 604 + 389 + 257 = 3149.$$

A C és E oszlopot pedig a képletekből kapjuk:

$$C = \frac{10045400}{93019} = 107{,}9 \approx 108; \quad E = \frac{3149}{930{,}19} = 3{,}38 \approx 3{,}4.$$

Megjegyzések: A képleteket az első sor megadott adataiból is kikövetkeztethetjük. Az eredeti, interneten is elérhető statisztika adatai nem pontosan illeszkednek a kiszámított értékekhez. Ez betudható a kerekítési hibáknak.

b) A térképről az 1000 lakosra jutó vállalkozások számát olvashatjuk le. Az előző feladatban éppen a lakosság száma (1000 fő) szerepelt az első oszlopban, így egyszerű szorzással megállapíthatjuk a vállalkozások számát. Például Nyugat-Dunántúlon:

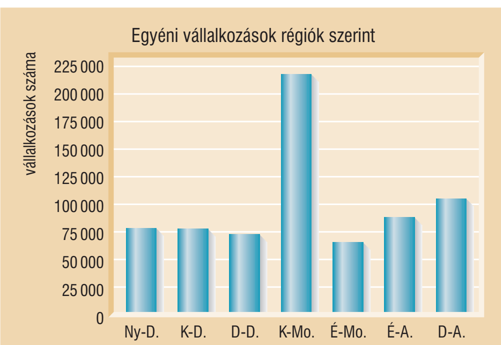
$$119 \cdot 997{,}9 = 118\,750{,}1 \approx 118\,750.$$

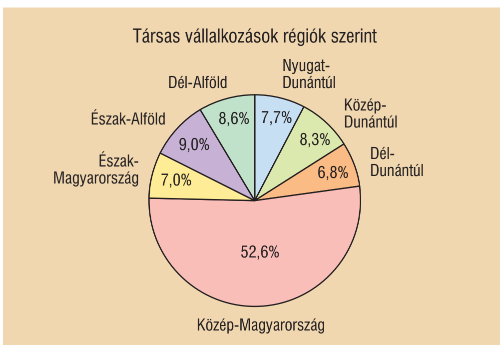
Foglaljuk ezt, illetve a diagramról leolvasott százalékokat táblázatba.

Régió	Vállalkozások száma	Ebből egyéni vállalkozók	Ebből társas vállalkozók
Nyugat-Dunántúl	118 750	78 375 (66%)	40 375 (34%)
Közép-Dunántúl	121 528	77 778 (64%)	43 750 (36%)
Dél-Dunántúl	108 491	72 689 (67%)	35 802 (33%)
Közép-Magyarország	495 438	217 993 (44%)	277 445 (56%)
Észak-Magyarország	102 646	65 693 (64%)	36 953 (36%)
Észak-Alföld	135 630	88 160 (65%)	47 470 (35%)
Dél-Alföld	150 259	105 181 (70%)	45 078 (30%)
Ország összesen	**1 232 742**	**705 869 (57%)**	**526 873 (43%)**

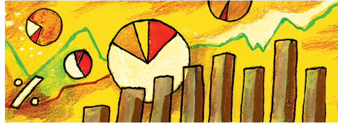
Mivel a százalékok a társas vállalkozások számát mutatják, először őket számítjuk ki, majd kivonással megkapjuk az egyéni vállalkozások számát. Az oszlopok összegzése adja az utolsó sort.

Megjegyzés: A százalékok minél pontosabb leolvasásához érdemes egy vonalzót illeszteni az oszlopok mellé.





c) Az oszlopdiagramban (bal oldali ábrán) a vállalkozások darabszámát szerepeltetjük az előző táblázatból.



d) A kördiagramhoz (jobb oldali ábrán) először is ki kell számolnunk az egyes régiókban levő társas vállalkozások százalékos arányát az összes társas vállalkozáshoz mérve. Az összes társas vállalkozások száma 526 873.

Így például a Nyugat-Dunántúlon működik az összes ilyen vállalkozás

$$\frac{40375}{526873} = 0{,}0766 \approx 0{,}077, \text{ azaz } 7{,}7\%\text{-a.}$$

Nyugat-Dunántúl kördiagramhoz szükséges középponti szöge:

$$\frac{40375}{526873} \cdot 360^\circ \approx 27{,}6^\circ.$$

Hasonlóan a többi érték:

Régió	Ny-D	K-D	D-D	K-M	É-M	É-A	D-A
Társas vállalkozás	7,7%; 27,6°	8,3%; 29,9°	6,8%; 24,5°	52,6%; 189,6°	7,0%; 25,2°	9,0%; 32,4°	8,6%; 30,8°

Megjegyzés: A megadott diagramról leolvasott értékek miatti kis eltérés nem róható fel hibának.

Az adatok jellemzése – megoldások

1772 A hőmérsékletek átlaga: 17,14 °C.

1773 A hibák átlaga: 0,4. A hibák terjedelme: 5.

1774 Nem.

1775 *a)* Nem, mert $30 \cdot 3{,}15 = 94{,}5$ nem egész.
b) 20 vagy 40.

1776 *a)* Nem változik.
b) 1-gyel csökken.
c) 1-gyel növekszik.

1777 300 kg

1778 Az egyszerre utazók számának mediánja: 2.

1779 Az építőjáték-darabkák hosszúságainak mediánja: 4,5.

1780 A túrós táskák darabszámának módusza: 6, terjedelme: 4.

1781 *a)* Oszlopdiagram vagy hisztogram.
b) A 180°-nál lévő kategóriaelem vagy ha éppen határ, akkor a két oldalon álló elemek számtani közepe.

1782 *a)* A bedobott érmék mediánja: 10. Módusz$_1$: 5, módusz$_2$: 10.
b) Az illetőnek legalább 4 darab, legfeljebb 8 darab 50-es érmét szabad a jegykiadó automatába dobnia.

1783 *a)* A módusz a 10 eurós.
b) Ha 30 db 10 eurós és 30 db 20 eurós címletet kivett és helyettük 6 db 50 eurós és 6 db 100 eurós címletet tett a kasszába, akkor az 5 eurósból lesz a legtöbb.

1784 Jelöljük J-vel az utolsó jegyet. Így a szöveg szerint:

$$\frac{3+4+3+5+J}{5} > 3{,}6, \text{ ahonnan } J > 3.$$

Így Katinak csak a 4-es vagy 5-ös jegy a megfelelő.

Megjegyzés: Mivel nagyon kevés a lehetőség, egyszerű próbálkozással is hamar célt érhetünk.

1785 Összesen 5 darab értéket kell megadnunk, amelyeknek mediánja 0 és módusza –1. Ebből adódóan a rangsorban a középső elemnek 0-nak, előtte viszont móduszként két –1-nek kell lenni. A medián utáni két elemet nem tudjuk meghatározni, csak annyi információnk van, hogy pozitív egész értékek és különbözőek. Illetve ismerjük az átlagukat:

$$\frac{-1+(-1)+0+x+y}{5} = 0{,}2, \text{ ahonnan } x+y=3.$$

A feltételek szerint ilyen érték csak az 1 °C és 2 °C. Tehát a heti hőmérsékletek rangsorban:

$$-1\ °\mathrm{C},\quad -1\ °\mathrm{C},\quad 0\ °\mathrm{C},\quad 1\ °\mathrm{C},\quad 2\ °\mathrm{C}.$$

1786 Kezdjük el felírni a rangsort. Tudjuk, hogy a legkisebb érték 2 °C, a legnagyobb 5 °C, a medián pedig 3 °C, így a rangsor:

$$2\ °\mathrm{C},\quad X\ °\mathrm{C},\quad 3\ °\mathrm{C},\quad Y\ °\mathrm{C},\quad 5\ °\mathrm{C}.$$

Mivel nem kell a $\frac{2+X+3+Y+5}{5}$ átlagot kerekíteni, $X+Y$-nak 5 többszörösének kell lennie.

Ráadásul a rangsorba is illeszkedniük kell, ezt pedig csak $X = 2$ °C és $Y = 3$ °C teszi lehetővé. Összegezve: az átlag 3 °C, a móduszok pedig 2 °C és 3 °C.

1787 *a)* Az utolsó fajtából

$$110 - (20 + 40 + 35) = 15$$

darab van a készletben. A táblázat:

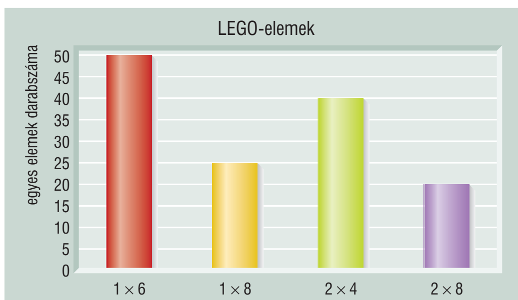
Építőelem	1×1	1×2	1×4	2×3	összesen
Darab	20	40	35	15	110

b) A módusz és a medián is az 1×2-es építőelem (a rangsort például az elemen levő bütykök száma alapján állíthatjuk fel).

1788 *a)* Készítsünk egy táblázatot az adatokról.

Építőelem	1×6	1×8	2×4	2×8	összesen
Darab	50	25	40	20	135

Az oszlopdiagram:



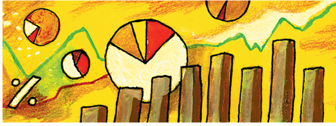
b) A bütykök átlagát kell számolnunk:

$$\frac{50\cdot 6+25\cdot 8+40\cdot 8+20\cdot 16}{135} = 8{,}44.$$

Mivel egészre kell kerekítenünk, a megoldás 8.

1789 *a)* A pontszámok átlaga:

$$\frac{3\cdot 38+1\cdot 33+4\cdot 26+3\cdot 20+5\cdot 18+2\cdot 15+2\cdot 7}{20} = 22{,}25.$$



b) A százalékok pontszámra fordítva:

$$40\cdot 0{,}3=12;\quad 40\cdot 0{,}45=18;$$
$$40\cdot 0{,}6=24;\quad 40\cdot 0{,}8=32.$$

Érdemjegy	1	2	3	4	5
Fő	2	2	8	4	4

Figyelembe véve, hogy a felső határ már jobb jegyet ér, a táblázat kitölthető.

Innen a jegyek módusza közepes, mediánja pedig a 10. és 11. elem átlaga:

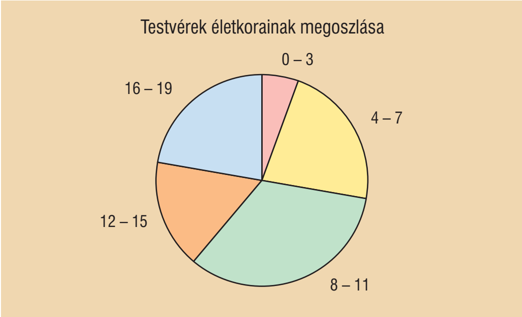
$$\frac{3+3}{2}=3.$$

1790 *a)* A feladat csak a táblázatban jelzetteket kérdezi, azaz nem kell hozzászámolnunk magukat a megkérdezett tanulókat. Összesen 18 főről van szó, így az egy főre jutó középponti szög:

$$\frac{360^\circ}{18}=20^\circ.$$

Az egyes kategóriákra jutó szögek:

0–3: 20°, 4–7: 80°, 8–11: 120°,
12–15: 60°, 16–19: 80°.



b) Mivel nem ismert, hogy egy-egy kategórián belül mi az életkorok megoszlása, a legkisebbet akkor hibázzuk, ha a kategóriahatárok számtani közepével számolunk:

$$\frac{1\cdot 1{,}5+4\cdot 5{,}5+6\cdot 9{,}5+3\cdot 13{,}5+4\cdot 17{,}5}{18}=10{,}6\dot{1}.$$

A testvérek átlagéletkora 10,6 év.

1791 Az egyik iskolának legyen N, a másiknak $N+40$ végzős tanulója. Mivel az összesített átlag (360) közelebb esik a 340-hez, ennek az iskolának nagyobb súllyal kell az átlagban szerepelnie, itt van több diák $(N+40)$. A két iskolában szerzett pontok száma $340\cdot(N+40)$, illetve $420\cdot N$. Az átlagból egy egyenletet írhatunk fel:

$$\frac{340\cdot(N+40)+420\cdot N}{2\cdot N+40}=360,$$

innen átrendezések után $N=20$. Azaz a 420 pontos átlagot produkáló intézményben 20 fő érettségizett, a 340 pontot produkálóban pedig 60.

Megjegyzés: Ha nem jut eszünkbe a feladat elején leírt „okoskodás”, az sem baj. Álljunk neki megvizsgálni a fordított esetet! Ekkor az egyenletből N-re negatív érték adódik, így ezt az esetet kizárhatjuk.

1792 *a)* Ha csak ennyit tudunk, akkor az átlag

$$3{,}32<\frac{6\cdot 5+n\cdot 4+9\cdot 3+4\cdot 2+3\cdot 1}{22+n}<3{,}39.$$

Innen akár próbálgatással, akár az alábbi számításokkal:

$$73{,}04+3{,}32n=3{,}32\cdot(22+n)<6\cdot 5+n\cdot 4+9\cdot 3+4\cdot 2+3\cdot 1<$$
$$<3{,}39\cdot(22+n)=74{,}58+3{,}39n.$$

Már külön kezelve a két oldalt:

$$73{,}04+3{,}32n<68+4n \quad \text{és} \quad 68+4n<74{,}58+3{,}39n.$$

Rendezve:

$$5{,}04<0{,}68n \quad \text{és} \quad 0{,}61n<6{,}58 \quad \Rightarrow \quad 7{,}4<n<10{,}8.$$

Ennyi információ tehát nem elég, n lehet 8, 9 vagy 10. Az osztály létszáma pedig lehet 30, 31 vagy 32 fő.

b) Legalább közepest írt $15+n$ fő. Átlaguk

$$\frac{6\cdot 5+n\cdot 4+9\cdot 3}{15+n}<3{,}87.$$

Innen

$$0{,}13n<1{,}05,\quad \text{vagyis}\quad n<8{,}07.$$

Ez már elég a pontos érték meghatározásához, $n=8$. Az osztály pedig 30 fős.

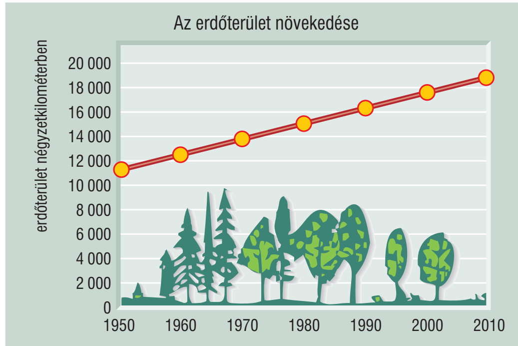
1793 *a)* $93\,000\ \text{km}^2\cdot 0{,}12=11\,160\ \text{km}^2$.

b) $93\,000\ \text{km}^2\cdot 0{,}2\ =\ 18\,600\ \text{km}^2$ a jelenlegi erdőterület. 1950 és 2010 között 6 darab tízéves periódus van. A közben lett erdőterületet kell osztanunk 6-tal:

$$\frac{18\,600-11\,160}{6}=1240.$$

A tízévenkénti átlagos növekedés $1240\ \text{km}^2$.

c) A vonaldiagramon összesen 7 értéket kell jelölnünk (az első periódus elejét és az utolsó végét is).



1794 *a)* Ha csak az *A* és *C* termék minősül vezetőnek, akkor kettejük átlaga:

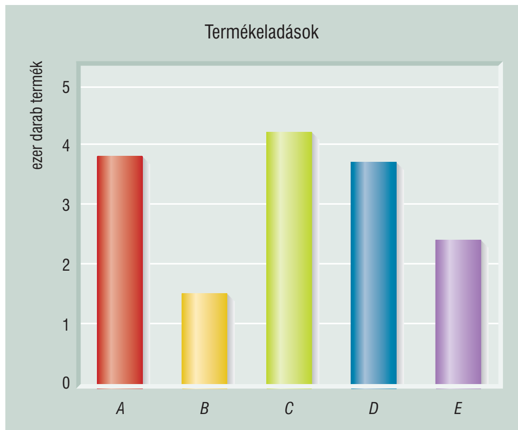
$$\frac{3800+4200}{2}=4000.$$

A megadott átlag azonban 3900, amiből az következik, hogy a *D* terméknek is vezető terméknek kell lennie. Az átlagból már meg tudjuk mondani *D* darabszámát is:

$$\frac{3800+4200+D}{3}=3900,$$

ahonnan $D=3700$.

b) A helyes oszlopdiagram az ábrán látható.



1795 *a)* Hárombetűs kódokat az *A*, *B*, *C* jegyekből $3\cdot 3\cdot 3=27$-féleképpen készíthetünk.

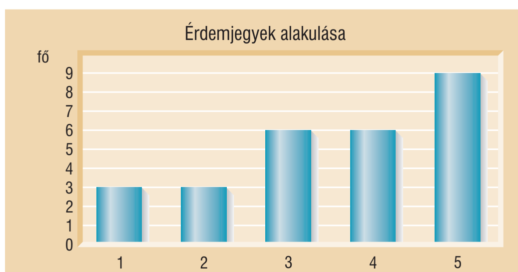
b) Ha 27-en járnak az osztályba, akkor egy főre

$$\frac{360^\circ}{27}=13\frac{1}{3}^\circ$$

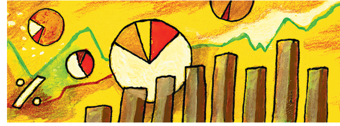
középponti szög jut. Így a táblázatunk:

Érdemjegy	1	2	3	4	5	összesen
Szög	40°	40°	80°	80°	120°	360°
Fő	3	3	6	6	9	27

A kitöltött táblázat alapján könnyen készíthetünk oszlopdiagramot.



c) A kördiagramon sorban jönnek egymás után a jegyek (rangsor), így a mediánt az egyenesszögnél találjuk (jó), a módusz pedig a legnagyobb területű rész (jeles).



1796 *a)* Jelöljük a megtérülési rátát M-mel, a dolgozók száma legyen D, a gyártott termékek ezres darabszáma T. A szövegből tudjuk, hogy $M = \frac{T}{D}$. Legyen mondjuk a babagyártó részleg rátája $M_b = 2{,}5$, a ruhagyártóé $M_r = 2$. Ismerve a képletet és azt, hogy mindkét részlegben $T = 40$, meg tudjuk adni a dolgozók számát is: $D_b = \frac{40}{2{,}5} = 16$ és $D_r = \frac{40}{2} = 20$.

b) A megtérülési ráta maga is egy átlag: azt mutatja meg, átlagosan hány ezer terméket gyártott le egyetlen dolgozó fél év alatt. A legegyszerűbben úgy kapjuk meg az egész gyárra vonatkozó értéket, ha vesszük az összes legyártott terméket és elosztjuk az összes dolgozók számával. Ez pedig két tizedesre kerekítve $M = \frac{80}{36} = 2{,}22$.

Megjegyzés: Számoljunk utána, hogy ez nem a két ráta számtani átlaga. Annak értéke ugyanis $\frac{2{,}5 + 2}{2} = 2{,}25$. Ha mindenképpen átlagolni akarunk, ún. harmonikus átlagot kell számolnunk:

$$\frac{2}{\frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{2}} = 2{,}22.$$

c) Érdemes a számolást a harmadik sorral kezdeni, onnan tudjuk, hogy egy csupasz baba ára 1500 Ft. Az üres babaruha ennek másfélszerese, azaz 2 250 Ft. Mivel babáik felét öltöztették csak saját ruhába, az üres babák és ruháik eladásából $20\,000 \cdot 1500 + 20\,000 \cdot 2250 = 75$ millió Ft bevételhez jutott a cég. A felöltöztetett babák viszont a babatest és a ruha együttes áránál annak 70%-val többért keltek el, vagyis $(1500 + 2250) \cdot 1{,}7 = 6375$ Ft-ért. Ebből is tudtak gyártani 20 000 darabot, 127 500 000 Ft-os bevételt értek el így. A cég összes bevétele a kettő összege, 202,5 millió Ft.

1797 *a)* A változás mértékének kiszámításánál az adott év termelését az előzőhöz viszonyítjuk: egyszerűen elosztjuk vele, és az eredményt kifejezzük százalékban. Ezek az arányok az évek során rendre

$$\frac{3}{2} = 1{,}5; \quad \frac{5}{3} = 1{,}66\dot{6}; \quad \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Százalékban megfogalmazva mondhatjuk ezt: a termelés az előző évinek 150%-a, 166,67%-a és 80%-a. Vagy mondhatjuk így is: az éves termelés először 50%-kal, majd 66,67%-kal növekedett, végül 20%-kal csökkent.

b) A változás átlagos mértéke az az egyetlen érték, amivel ha mindhárom évben növekszik (vagy csökken) a termelés, akkor ugyanott tart, mint a valóságban. Tudjuk, hogy a termelés 20 000 darab volt 2000-ben. Vagyis olyan számot keresünk, amire igaz:

$$20\,000 \cdot 1{,}50 \cdot 1{,}6667 \cdot 0{,}8 = 20\,000 \cdot q \cdot q \cdot q.$$

20 000-rel lehet egyszerűsíteni:

$$2 = q^3.$$

Innen – akár próbálgatással is – kapjuk:

$$q \approx 1{,}26.$$

Vagyis az átlagos évenkénti növekedés 26%, illetve az előző évinek mindig 126%-a.

Megjegyzés: Ez az átlag sem számtani átlag, hiszen az 1,322 lett volna. Ún. mértani vagy geometriai átlagot számoltunk, harmadik gyököt vontunk három szám szorzatából:

$$\sqrt[3]{1{,}5 \cdot 1{,}666\dot{6} \cdot 0{,}8} = 1{,}26.$$

c) Ha ebben a mértékben növekszik a termelés, akkor 2004-ben a 2003. évi darabszám 1,26-szorosát fogják termelni. Szám szerint $40\,000 \cdot 1{,}26 = 50\,400$ darabot.

1798 Jelölje az A kategóriába eső ügyfelek számát x, a B-be esőkét y, a C-be tartozókat pedig z (ne feledjük, hogy pozitív egész megoldásokat keresünk). Ekkor a szöveg szerint felírhatunk egy három egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x + z &= y + 25 \\ 2 \cdot (y - x) &= z \\ \frac{10x + 25y + 30z}{x + y + z} &= 20 \end{aligned}\right\}.$$

Ha az első egyenlet kétszereséhez hozzáadjuk a másodikat, akkor x és y kiesik, csak z ismeretlen marad. Innen $z = 50$. Ezt behelyettesítve mondjuk a második és a harmadik egyenletekbe, már csak kétismeretlenes rendszerünk van:

$$\left.\begin{aligned} y - x &= 25 \\ \frac{10x + 25y + 1500}{x + y + 50} &= 20 \end{aligned}\right\}.$$

Az első sorból kifejezve y-t és behelyettesítve a másodikba, ott egy egyismeretlenes egyenletet kapunk. Átrendezve

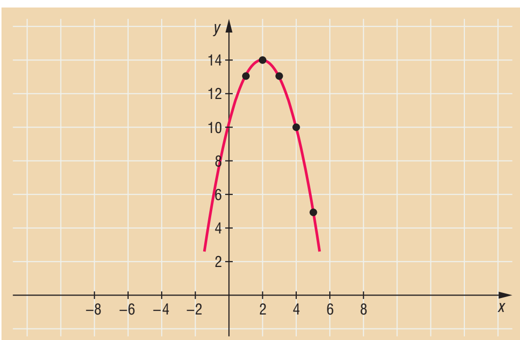
$$35x + 2125 = 40x + 1500$$

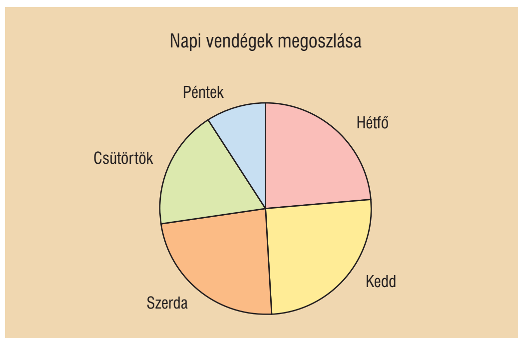
alakú, ahonnan

$$x = 125 \quad \text{és} \quad y = 150.$$

A kérdésre a válasz tehát $125 + 150 + 50 = 325$ főt kérdezett meg a közvélemény-kutató cég a mobilszolgáltató megbízásából.

1799 Bár a megadott függvény diszkrét pontokból áll, azért fel kell ismernünk a képletében a fordított állású parabolát: $f(x) = -(x - 2)^2 + 14$. Akár függvénytranszformációs lépésekkel, akár egyszerű behelyettesítéssel felrajzolhatjuk a függvényt. Az ábra tulajdonképpen egy oszlopdiagram (ha a pontokból merőlegeseket bocsátanánk az x tengelyre). A függvény értékei adják az ügyfelek számát, így a rajzról leolvashatjuk a megoldásokat.





a) A függvény $x = 2$ helyen veszi fel maximumát, így a kérdezett nap a kedd.

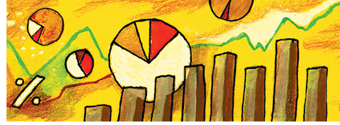
b) Az egyes napokon rendre 13, 14, 13, 10 és 5 vendég érkezik, összesen 55 fő. Az egy főhöz tartozó középponti szög:

$$\frac{360^\circ}{55} = 6{,}\dot{5}\dot{4}^\circ,$$

így az egyes napokon érkezőkhöz kb. 85,1°; 91,6°; 85,1°; 65,4° és 32,8° szög tartozik (a kördiagram a jobb oldali ábrán látható).

c) A napi átlag egyszerű számtani átlaggal kapható meg:

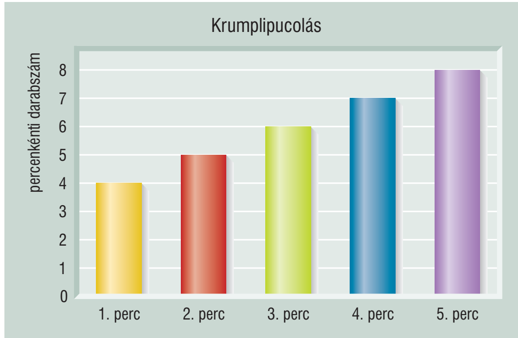
$$\frac{13 + 14 + 13 + 10 + 5}{5} = 11.$$



Vegyes feladatok – megoldások

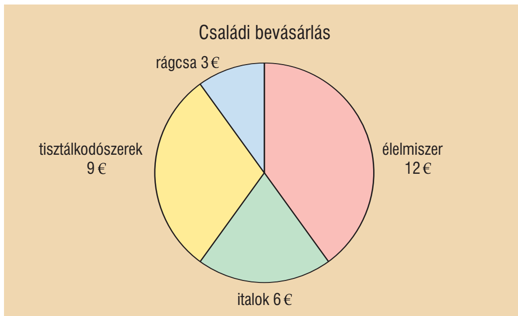
1800 *a)* Próbálgatással vagy az $1{,}5 \cdot n \cdot (n+1) = 30$ képletből: 5 perc, és ezalatt 4, 5, 6, 7, 8 darab krumpli.

b) Az oszlopdiagram az ábrán látható.



1801 *a)* Mivel rágcsálnivalókra a pénzének csak 10%-át költötte, élelmiszerre pedig 40%-ot, a helyes válasz a négyszeres szorzó.

b) A kördiagram (élelmiszer 12 €, italok 6 €, tisztálkodószer 9 € és rágcsa 3 €) az ábrán látható.

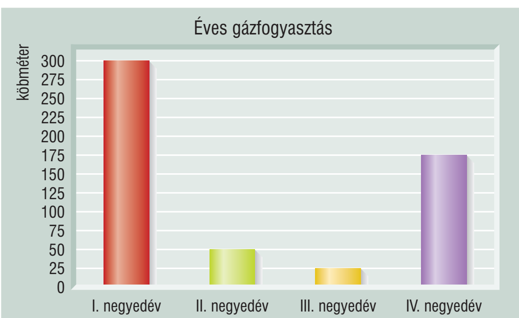


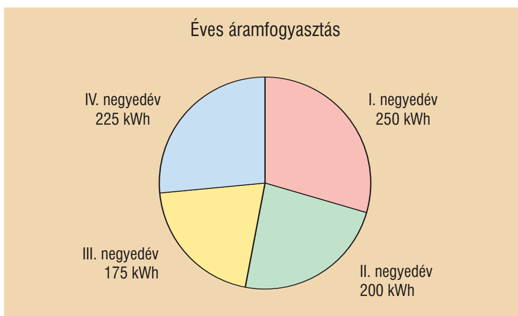
1802 *a)* Az oszlopdiagram a bal oldali ábrán látható.

b) Adjuk össze az egyes értékeket, de ne feledjük a 25-ös szorzót:

$$\frac{200+150+100+125}{25} = 23 \text{ m}^3.$$

c) A kördiagram a jobb oldali ábrán látható.





1803 *a)* A pénzek terjedelme: 9, mediánja: 2, módusza: 1.

b) Mivel a számtani átlag ≈ 3,54, így ez a címlet az 5 eurós.

1804 *a)* Az egyszerre eladott gombócok számának terjedelme: 3, módusza: 2.

b) A medián: 2,5. A számtani közép: $2{,}\dot{5}\dot{4}$.

1805 *a)* Medián = Módusz = 5.

b) A számtani átlag: 7,5.

1806 *a)* $3{,}1\dot{6}$ és 3,7 között változhat, ez körülbelül 9,5%-os visszaesést illetve 5,7%-os növekedést jelenthet.

b) A négy hiányzó írhatott 5, 5, 5, 2 vagy 5, 5, 4, 3 vagy 5, 4, 4, 4 érdemjegyű dolgozatot.

1807 *a)* Ha a kategóriaközepekkel számolunk (végül pedig 4,5-tel), akkor a becsült átlag: $1{,}8\dot{3}$. Két ok miatt lehet az átlag problémás: egyáltalán nem biztos, hogy a kategóriákon belül egyenletes a betétek megoszlása (pedig a középpel ezt tételezzük fel), illetve az utolsó kategória nincs lezárva, ott gyakorlatilag bármekkorák lehetnek a betétek.

b) Ha mindig az alsó határral számolunk, akkor az átlag = $1{,}\dot{3}$. Az eltérés így 0,5.

c) A pontos felső érték bármekkora lehet, hiszen az utolsó kategória felülről nincs lezárva.