9.5. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK, EGYENLETRENDSZEREK

Az egyenlet, azonosság fogalma – megoldások

1475 Állítások:

b) igaz; *d)* igaz; *e)* hamis; *g)* hamis.

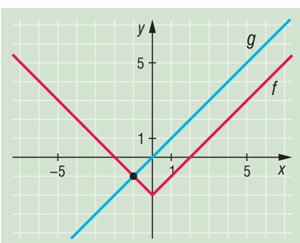
1476 *a)* A konvex négyszögek halmaza.
b) {97}
c) A bolygók halmaza.
d) Nincs megoldás.
e) Nincs megoldás.
f) {másodfokú; abszolút érték}.
g) {Duna; Tisza}

1477 *a)* A … 5-nél kisebb pozitív egész szám.
b) A … prímszám.
c) A … legfeljebb 19.
d) A … minimum 2 és maximum 7.
e) A … nagyobb –3-nál és kisebb 5-nél.
f) A … a legnagyobb egész szám.
g) A … természetes szám.

1478 *a)* $x = 3x - 6 \quad (x = 3)$.
b) $x = 2x + 8 \quad (x = -8)$.
c) $3x + 4 = 25 \quad (x = 7)$.
d) $3x - 2x = x \quad (x \in \mathbb{R})$.
e) $5x - 8 = 3x + 10 \quad (x = 9)$.

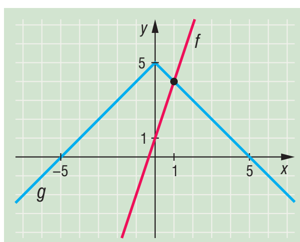
Az egyenlet megoldásának grafikus módszere – megoldások

1479 *a)*



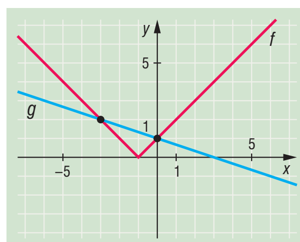
$x = -1$.

b)



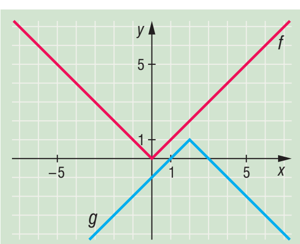
$x = 1$.

c)



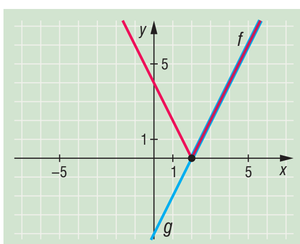
$x_1 = -3,\ x_2 = 0$.

d)



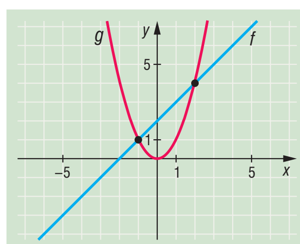
Nincs megoldás.

e)

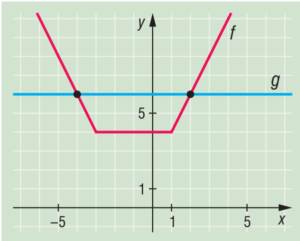


$x \geq 2$.

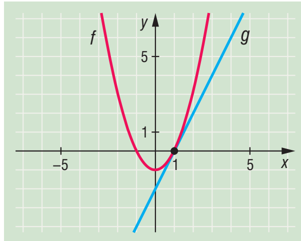
f)



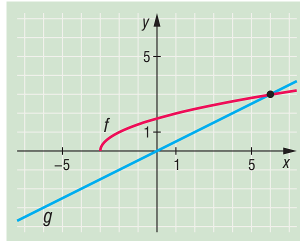
$x_1 = -1,\ x_2 = 2$.

g)


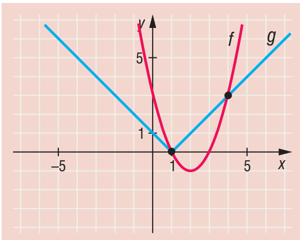
$x_1 = -4,\ x_2 = 2.$

h)


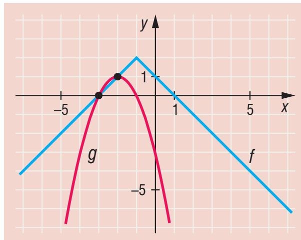
$x = 1.$

i)


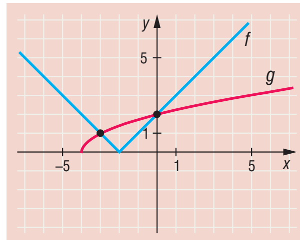
$x = 6.$

1480 *a)*


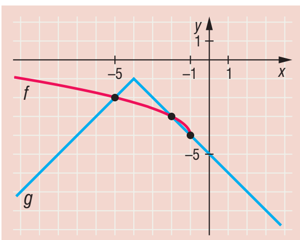
$x_1 = 1,\ x_2 = 4.$

b)


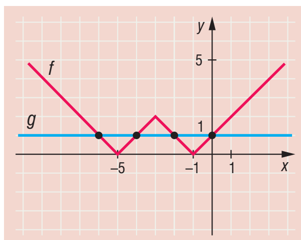
$x_1 = -3,\ x_2 = -2.$

c)


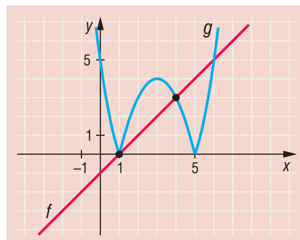
$x_1 = -3,\ x_2 = 0.$

d)


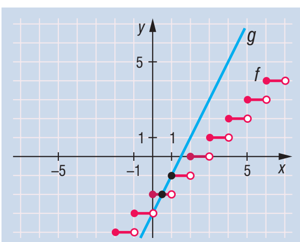
$x_1 = -5,\ x_2 = -2,\ x_3 = -1.$

e)


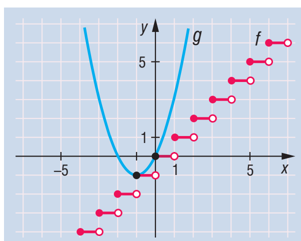
$x_1 = -6,\ x_2 = -4,$
$x_3 = -2,\ x_4 = 0.$

f)


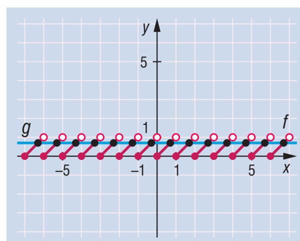
$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6.$

1481 *a)*


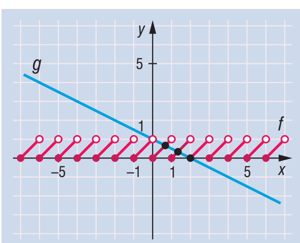
$x_1 = 0{,}5,\ x_2 = 1.$

b)


$x_1 = -1,\ x_2 = 0.$

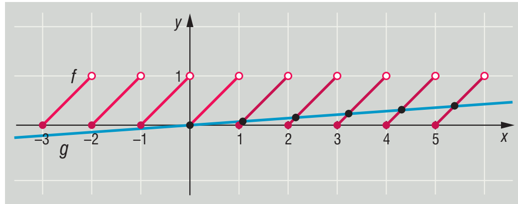
c)


$x = k + 0{,}7;\ k \in \mathbb{Z}.$

d)


$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{4}{3},\ x_3 = 2.$

1482 Megoldás a 0, valamint 1-től 2008-ig minden egész szám és a nála nagyobb egész szám között van egy megoldás. Összesen tehát 2009 megoldás van.



Az egyenlet értelmezési tartományának és értékkészletének vizsgálata – megoldások

1483 *a)* $x = 4.$ *b)* $x = \frac{3}{2}.$ *c)* $x = \frac{1}{4}.$

d) $x = \frac{5}{8}.$ *e)* Nincs megoldás. *f)* $x = \frac{7}{3}.$

g) Nincs megoldás. *h)* Nincs megoldás. *i)* Nincs megoldás.

1484 *a)* Mindkét gyök alatti kifejezés nemnegatív: $x \geq \frac{5}{3}$ és $x \leq 2p$, akkor nem lesz megoldás, ha $2p < \frac{5}{3}$, azaz $p < \frac{5}{6}$.

b) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < -\frac{3}{2}$.

c) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < \frac{9}{4}$.

d) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < -\frac{5}{28}$.

e) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p > 0$.

f) Az *a)* esethez hasonló gondolatmenettel: $p < \frac{5}{6}$.

1485 *a)* Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. Nincs megoldás.

b) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = 2$, $y = 1$.

c) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = -6$, $y = -24$.

d) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{13}{3}$.

e) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = -\frac{17}{21}$, $y = -\frac{5}{7}$.

f) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = 3$, $y = -8$.

1486 *a)* Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindhárom tagja 0. $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

b) Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindhárom tagja 0. $x = \frac{1}{3}$, $y = 1$, $z = 9$.

c) Alakítsunk teljes négyzetté: $(x + y)^2 + (x + 1)^2 = 0$. Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindkét tagja 0. $x = -1$, $y = 1$.

d) Teljes négyzeteket kialakítva: $(x - 2z)^2 + (2y - z)^2 + (y - 1)^2 = 0$. Csak akkor van megoldás, ha az összeg mindhárom tagja 0. $x = 4$, $y = 1$, $z = 2$.

Egyenlet megoldása szorzattá alakítással – megoldások

1487 *a)* $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$.

b) $x_1 = 3$, $x_2 = 11$, $x_3 = 2$, $x_4 = -8$.

c) A nevező nem lehet 0. A megoldások: $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = 7$, $x_3 = -\frac{1}{3}$.

d) A nevező nem lehet 0. A megoldások: $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{5}{3}$.

e) Kiemelés után: $(x+1)\cdot(5x-5) = 0$, a megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

f) Kiemelés után: $(x-4)\cdot(5x-4) = 0$, a megoldások: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4}{5}$.

g) Kiemelés után: $(2x+1)\cdot 2x = 0$, a megoldások: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$.

h) Kiemelés után: $(5x-3)\cdot(6x+6) = 0$, a megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{5}$.

i) Kiemelés után: $(8x+5)\cdot(4x-10) = 0$, a megoldások: $x_1 = -\frac{5}{8}$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

j) Kiemelés után: $(4-2x)\cdot 6 = 0$, a megoldás: $x = 2$.

1488 Az öt egymást követő szám szorzata:

$$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4) = 0.$$

Ha $x = 0$, a számok 0; 1; 2; 3; 4; összegük 10.
Ha $x+1 = 0$, a számok –1; 0; 1; 2; 3; összegük 5.
Ha $x+2 = 0$, a számok –2; –1; 0; 1; 2; összegük 0.
Ha $x+3 = 0$, a számok –3; –2; –1; 0; 1; összegük –5.
Ha $x+4 = 0$, a számok –4; –3; –2; –1; 0; összegük –10.

1489 *a)* Átrendezés és kiemelés után: $(3x-1)\cdot(6-x) = 0$, a megoldások: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 6$.

b) Két tényező kiemelése után: $x\cdot(x+1)\cdot(-x-6) = 0$, a megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -6$.

c) Az $x-1$ kiemelhető: $(x-1)\cdot(3x+7+2x+6-6x-6) = 0$, a megoldások: $x_1 = 1$, $x_2 = 7$.

1490 Legyenek a téglalap oldalai a és b egész számok, $a < b$.
A terület és kerület közötti összefüggés alapján:

a) $a\cdot b = 2\cdot(2a+2b)$ egyenlet írható fel.

Rendezzük a bal oldalra és alakítsunk ki szorzatot:

$$ab - 4a - 4b = 0,$$
$$a\cdot(b-4) - 4\cdot(b-4) - 16 = 0,$$
$$(a-4)\cdot(b-4) = 16.$$

Mivel a és b pozitív egészek, elég megkeresnünk a 16 osztópárjait: $16 = 1\cdot 16 = 2\cdot 8 = 4\cdot 4$, ezekből adódnak a megoldások.
Mivel $a < b$, a lehetséges esetek:

$$a_1 = 5,\ b_1 = 20; \quad a_2 = 6,\ b_2 = 12; \quad a_3 = 8,\ b_3 = 8.$$

b) $a \cdot b = 3 \cdot (2a + 2b)$ egyenletből rendezve és szorzattá alakítva:

$$ab - 6a - 6b = 0,$$
$$a \cdot (b-6) - 6 \cdot (b-6) - 36 = 0,$$
$$(a-6) \cdot (b-6) = 36.$$

A 36 osztópárjaiból kapjuk a megoldásokat: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6.$

Mivel $a < b$, a lehetséges esetek:

$a_1 = 7,\ b_1 = 42;\quad a_2 = 8,\ b_2 = 24;\quad a_3 = 9,\ b_3 = 18;\quad a_4 = 10,\ b_4 = 15;\quad a_5 = 12,\ b_5 = 12.$

1491 *a)* Két lépésben alakítsunk szorzattá:

$$2x \cdot (2y+3) - 3 \cdot (2y+3) + 9 = 10,$$
$$(2y+3) \cdot (2x-3) = 1.$$

Az 1 kétféleképpen írható fel egész számok szorzataként: $1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$.

Ha $\left.\begin{array}{l} 2y+3=1 \\ 2x-3=1 \end{array}\right\}$, akkor $x_1 = 2,\ y_1 = -1$; ha $\left.\begin{array}{l} 2y+3=-1 \\ 2x-3=-1 \end{array}\right\}$, akkor $x_2 = 1,\ y_2 = -2$.

b) Két lépésben alakítsunk szorzattá:

$$3x \cdot (2y+5) - 2 \cdot (2y+5) + 10 = 21,$$
$$(3x-2) \cdot (2y+5) = 11.$$

A 11-et szorzattá alakíthatjuk: $11 = 1 \cdot 11 = 11 \cdot 1 = (-1) \cdot (-11) = (-11) \cdot (-1)$.

Ha $\left.\begin{array}{l} 3x-2=1 \\ 2y+5=11 \end{array}\right\}$, akkor $x_1 = 1,\ y_1 = 3$.

Ha $\left.\begin{array}{l} 3x-2=11 \\ 2y+5=1 \end{array}\right\}$, akkor $x = \dfrac{13}{3},\ y = -2$, nem megoldás, mert x nem egész szám.

Ha $\left.\begin{array}{l} 3x-2=-1 \\ 2y+5=-11 \end{array}\right\}$, akkor $x = \dfrac{1}{3},\ y = -8$, nem megoldás, mert x nem egész szám.

Ha $\left.\begin{array}{l} 3x-2=-11 \\ 2y+5=-1 \end{array}\right\}$, akkor $x_2 = -3,\ y_2 = -3$.

Az első és negyedik esetből kapott számpárok a megoldások.

Egyenletek megoldása lebontogatással, mérlegelvvel – megoldások

1492 *a)* $x = 4$; *b)* $x = -2{,}4$; *c)* $x = 0$; *d)* $x = 1$;
e) $x = 0$; *f)* $x = 2$; *g)* $x = 3$; *h)* $x = -3$;
i) $x = 1$; *j)* $x = 23$; *k)* $x = \dfrac{47}{11}$; *l)* $x = \dfrac{21}{68}$;
m) $x = -4$; *n)* $x = -3$; *o)* $x = -1$; *p)* $x = 6$;
q) $x \in \mathbb{R},\ x \neq 2$; *r)* $x = -5$.

1493 Ha a harmadik napra 4000 Ft maradt, ez az első napról maradt pénz kétharmad része. Az első nap után 6000 Ft maradt, ez a teljes összeg kétharmad része, tehát 9000 Ft-tal indult el a kirándulásra. Az első napon elköltött 3000 Ft-ot, a másodikon 2000 Ft-ot, a harmadikra 4000 Ft maradt.

1494 Ha egy füzet ára x forint, akkor 8 füzet $8x$ forintba kerül, ennyiért most 13 füzetet vehetek, tehát egy füzetért $\frac{8x}{13} = 0{,}6154x$ forintot kell fizetnem, ami $1 - 0{,}6154 = 0{,}3846$ rész csökkenést, vagyis 38,46%-os leértékelést jelent.

1495 *a)* A közös nevező 100, beszorzás után $x = -\frac{13}{6}$.

b) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \neq -2$, a közös nevező $2 \cdot (x + 2)$, ezzel beszorozva kapjuk: $x = -1$.

c) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \neq 4$ és $x \neq -3$, a közös nevező $(x - 4) \cdot (x + 3)$, ezzel beszorozva adódik: $x = 1$.

1496 *a)* A törtek miatt az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq 3$.

Mivel $6 - 2x = 2 \cdot (3 - x)$, ezzel szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned} 1 - 2x - 2 \cdot (3x - 4) &= 4 \cdot (6 - 2x), \\ 1 - 2x - 6x + 8 &= 24 - 8x, \\ 9 &= 24. \end{aligned}$$

Az egyenletnek nincs megoldása.

b) A törtek miatt az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq -2$ és $x \neq 5$.

Mivel $(x + 2) \cdot (x - 5) = x^2 - 3x - 10$, ez a szorzat legyen a közös nevező, amivel beszorozva:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (x - 5) + 4 \cdot (x + 2) &= 28, \\ 7x &= 35, \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Ami az értelmezés miatt nem megoldás.

c) Érdemes a nevezőket szorzattá alakítani:

$$\begin{aligned} 2 - 2x^2 &= 2 \cdot (1 - x^2) = 2 \cdot (1 - x) \cdot (1 + x); \\ x^2 - 1 &= (x - 1) \cdot (x + 1); \\ 2 - 2x &= 2 \cdot (1 - x). \end{aligned}$$

Egyrészt kiolvashatjuk, hogy az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq 1$ és $x \neq -1$. Másrészt látható, hogy a $2 \cdot (1 - x) \cdot (1 + x)$ szorzatot érdemes közös nevezőnek választani. Ezzel beszorozva:

$$\begin{aligned} x + 1 - (-2) \cdot (2x - 1) + 6 \cdot 2 \cdot (1 - x) + 1 + x &= 0, \\ x + 1 + 4x - 2 + 12 - 12x + 1 + x &= 0, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Ellenőrzés után kiderül, hogy a megoldás valóban $x = 2$.

d) Alakítsuk szorzattá a nevezőket:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 2 &= 2 \cdot (x - 1)^2; \\ x^2 - 2x + 1 &= (x - 1)^2; \\ 3 - 3x &= 3 \cdot (1 - x). \end{aligned}$$

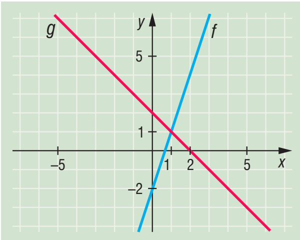
Az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \neq 1$. Közös nevezőnek a $6 \cdot (x - 1)^2$ szorzatot érdemes választani, ezzel beszorozva az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2x - 7) + 6 \cdot (x + 1) - (-2) \cdot (x - 1) &= 2 \cdot 6 \cdot (x - 1), \\ 6x - 21 + 6x + 6 + 2x - 2 &= 12x - 12, \\ x &= 2{,}5. \end{aligned}$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy az egyenlet megoldása $x = 2{,}5$.

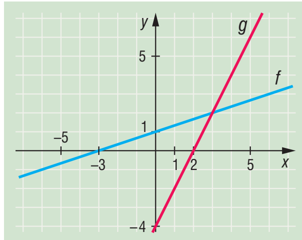
Egyenlőtlenségek – megoldások

1497 *a)*



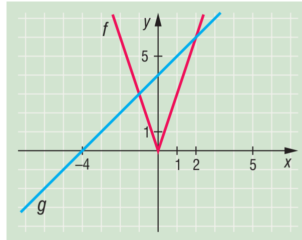
$x \le 1.$

b)



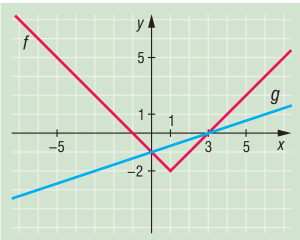
$x \le 3.$

c)



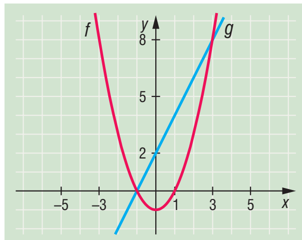
$-1 < x < 2.$

d)



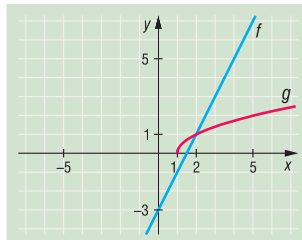
$x \le 0$ vagy $x \ge 3.$

e)



$x < -1$ vagy $x > 3.$

f)



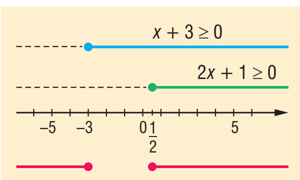
$x \ge 2.$

1498 *a)* $x \ge \frac{1}{3}$; *b)* $x < -\frac{7}{5}$; *c)* $x > \frac{11}{6}$;

d) $x \in \mathbb{R}$; *e)* $x < -2{,}5$; *f)* $x \le 4{,}5$;

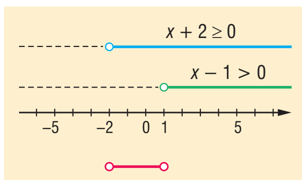
g) Nincs megoldás; *h)* $x \le -\frac{15}{2}$.

1499 *a)*



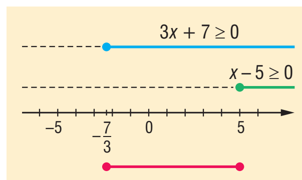
$x \le -3$ vagy $x \ge \frac{1}{2}$;

b)



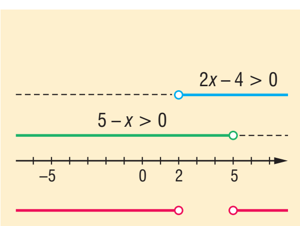
$-2 < x < 1$;

c)



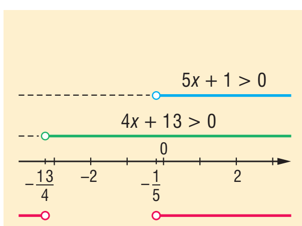
$-\frac{7}{3} \le x \le 5$;

d)



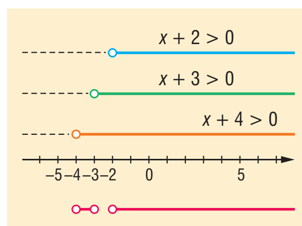
$x < 2$ vagy $x > 5$;

e)



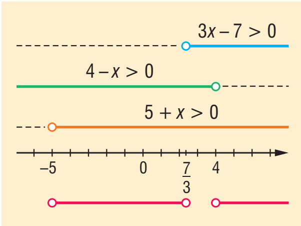
$x < -\frac{13}{4}$ vagy $x > -\frac{1}{5}$;

f)



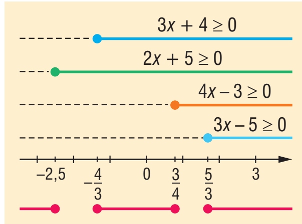
$-4 < x < -3$ vagy $-2 < x$;

g)



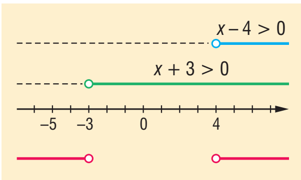
$-5 < x < \frac{7}{3}$ vagy $4 < x$;

h)



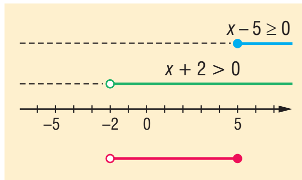
$x \leq -\frac{5}{2}$ vagy $-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}$ vagy $\frac{5}{3} \leq x$.

1500 *a)*



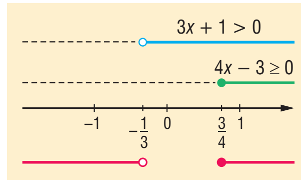
$x < -3$ vagy $4 < x$;

b)



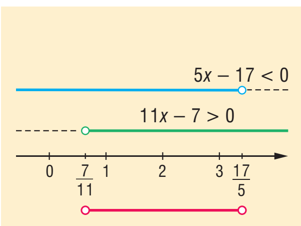
$-2 < x \leq 5$;

c)



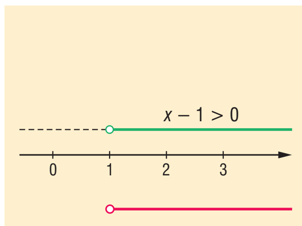
$x < -\frac{1}{3}$ vagy $\frac{3}{4} \leq x$;

d)



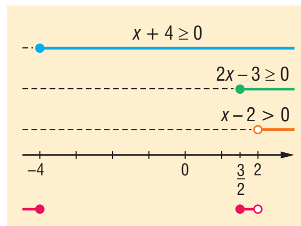
$\frac{7}{11} < x < \frac{17}{5}$;

e)



$x > 1$;

f)



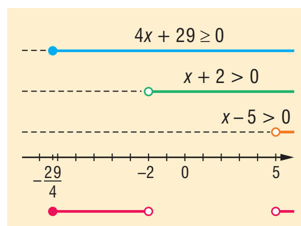
$x \leq -4$ vagy $\frac{3}{2} \leq x < 2$.

1501 *a)* A jobb oldalra rendezve:

$$0 \leq \frac{4x + 29}{(x + 2) \cdot (x - 5)}.$$

Ennek megoldása:

$$-\frac{29}{4} \leq x < -2 \quad \text{vagy} \quad 5 < x.$$

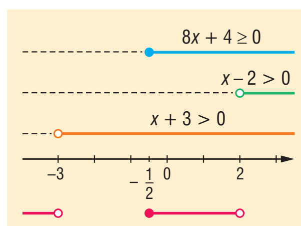


b) A bal oldalra rendezve:

$$\frac{8x + 4}{(x - 2) \cdot (x + 3)} \leq 0.$$

A megoldás:

$$x < -3 \quad \text{vagy} \quad -\frac{1}{2} \leq x < 2.$$

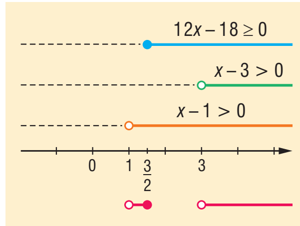


c) A bal oldalra rendezve:

$$\frac{12x-18}{(x-3)\cdot(x-1)}\geq 0.$$

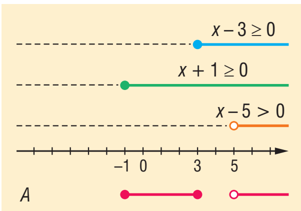
A megoldás:

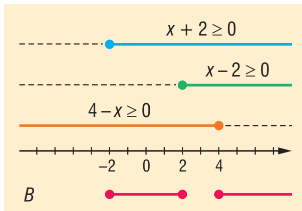
$$1<x\leq\frac{3}{2}\quad \text{vagy}\quad 3<x.$$

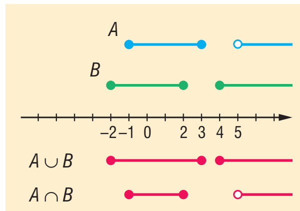


1502 A két halmaz: $A=[-1;3]\cup\,]5;\infty[$ és $B=[-2;2]\cup[4;\infty[$.

a) $A\cup B=[-2;3]\cup[4;\infty[$, $A\cap B=[-1;2]\cup\,]5;\infty[$.







b) Mivel az 5 nincs benne az A halmazban, ezért nem igaz, hogy $P\subset A$.

c) Azokat a számjegyeket keressük, amelyek nem elemei B-nek. A keresett halmaz: $\{3\}$.

1503 Írjunk y helyére $(1-x)$-et, és alakítsuk a bizonyítandó állítást:

$$\frac{1+x}{x}\cdot\frac{2-x}{1-x}\geq 9.$$

Mivel $x>0$ és $y=1-x>0$ átszorzás után:

$$\begin{aligned}(1+x)\cdot(2-x)&\geq 9x\cdot(1-x),\\ 2-x+2x-x^2&\geq 9x-9x^2,\\ 8x^2-8x+2&\geq 0,\\ 4x^2-4x+1&\geq 0,\\ (2x-1)^2&\geq 0.\end{aligned}$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az állítás minden valós x-re igaz.

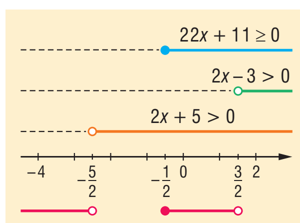
Egyenlőség $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ esetén áll fenn.

1504 A bal oldalra rendezve:

$$\frac{22x+11}{(2x-3)\cdot(2x+5)}\leq 0.$$

Megoldása:

$$H=\left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\cup\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[.$$



a) A H halmaznak sem legnagyobb, sem legkisebb eleme nincs, mert a $\frac{3}{2}$ nem eleme a halmaznak.

b) A természetes számok közül csak a 0 és az 1 eleme a H halmaznak.

c) Egy lehetséges megoldás:

$$A=\left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\quad\text{és}\quad B=\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[.$$

Abszolút értéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek – megoldások

1505 *a)* $x = 4,\ x = -4;$ *b)* $x = 4,\ x = -12;$ *c)* $x \le -4$ vagy $x \ge 4;$ *d)* $x \le -12$ vagy $x \ge 4;$

e) $x = \frac{7}{2},\ x = -\frac{7}{2};$ *f)* $x = 2,\ x = -8;$ *g)* $-\frac{13}{2} \le x \le \frac{7}{2};$ *h)* $x \in \mathbb{R}.$

1506 *a)* $x = \frac{2}{3}$, ha $x \le 0$ nincs megoldás. *b)* $x = -3$, ha $x \ge 0$ nincs megoldás.

c) $x = 3{,}5,\ x = -\frac{7}{4}.$ *d)* $x = \frac{10}{7},\ x = -\frac{30}{19}.$

e) $x = -\frac{2}{3}$, ha $x \ge 3$ nincs megoldás. *f)* Nincs megoldás.

g) $x = 2,\ x = 4.$ *h)* $x = \frac{3}{5}$, ha $x > \frac{7}{2}$ nincs megoldás.

1507 *a)* Ha $x \ge 0$, nincs megoldás, ha $x < 0$, a megoldás $x < -\frac{1}{2}.$

b) Ha $x \ge 0$, akkor $x > -\frac{1}{3}$ adódik, ami azt jelenti, hogy $x \ge 0$ a megoldás.

Ha $x < 0$, akkor $x > -\frac{1}{7}$ adódik, tehát a megoldás: $-\frac{1}{7} < x < 0.$

A végeredmény: $-\frac{1}{7} < x.$

c) Ha $x \ge 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $x < 0$, akkor $x < -\frac{4}{7}$ adódik.

A megoldás: $x < -\frac{4}{7}.$

d) Ha $x \ge -3$, akkor $x \le 4$ adódik, azaz $-3 \le x \le 4$ a megoldás.

Ha $x < -3$, akkor $x \ge -\frac{16}{3}$ adódik, azaz $-\frac{16}{3} \le x < -3$ a megoldás.

A végeredmény: $-\frac{16}{3} \le x \le 4.$

e) Ha $x \ge 1$, akkor $x \ge 11$ a megoldás.
Ha $x < 1$, akkor $x \le -1$ adódik, azaz $x \le -1$ a megoldás.
A végeredmény: $x \le -1$ vagy $x \ge 11.$

f) Ha $x \ge \frac{4}{5}$, akkor $x < \frac{5}{2}$ adódik, azaz $\frac{4}{5} \le x < \frac{5}{2}$ a megoldás.

Ha $x < \frac{4}{5}$, akkor $\frac{3}{8} < x$ adódik, azaz $\frac{3}{8} < x < \frac{4}{5}$ a megoldás.

A végeredmény: $\frac{3}{8} < x < \frac{5}{2}.$

1508 *a)* Ha $x \geq 2$, akkor $x = 5$.
Ha $-3 \leq x < 2$, akkor nincs megoldás.
Ha $x \leq -3$, akkor $x = -6$.
b) Ha $x \geq 1$, akkor minden szám megoldás.
Ha $-4 \leq x < 1$, akkor nincs megoldás.
Ha $x < -4$, akkor nincs megoldás.
A végeredmény: $x \geq 1$.
c) Ha $|x+2| - 3 = 2$, akkor $x = 3$ vagy $x = -7$.
Ha $|x+2| - 3 = -2$, akkor $x = -1$ vagy $x = -3$.
d) Ha $|x-4| - 4 = 4$, akkor $x = 12$ vagy $x = -4$.
Ha $|x-4| - 4 = -4$, akkor $x = 4$.

1509 *a)* Ha $x \geq 0$, akkor $x \geq 1$ adódik.
Ha $-5 \leq x < 0$, akkor nincs megoldás.
Ha $x < -5$, akkor $x \leq -6$.
A végeredmény: $x \leq -6$ vagy $x \geq 1$.
b) Ha $x \geq 3$, akkor $-5 \leq 5$ adódik, azaz minden szám megoldás.
Ha $-2 \leq x < 3$, akkor $-2 \leq x$.
Ha $x < -2$, akkor $5 \leq 5$, azaz minden szám megoldás.
Végeredmény: $x \in \mathbb{R}$.
c) Ha $x \leq \frac{3}{2}$, akkor $x \geq 2$ adódik, ami megoldás.
Ha $-6 \leq x < \frac{3}{2}$, akkor $x \leq 0$-t kapunk, azaz $-6 \leq x \leq 0$.
Ha $x < -6$, akkor $x \leq -4$ adódik, azaz $x < -6$.
A végeredmény: $x \leq 0$ vagy $x \geq 2$.
d) Ha $x \geq \frac{5}{4}$, akkor $x \leq \frac{11}{9}$, mivel $\frac{11}{9} = \frac{44}{36} < \frac{45}{36} = \frac{5}{4}$ nincs megoldás.
Ha $\frac{4}{5} \leq x < \frac{5}{4}$, akkor $x \leq 1$, azaz $\frac{4}{5} \leq x \leq 1$.
Ha $x < \frac{4}{5}$, akkor $x \geq \frac{7}{9}$, mivel $\frac{7}{9} = \frac{35}{45} < \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$, a megoldás: $\frac{7}{9} \leq x < \frac{4}{5}$.
A végeredmény: $\frac{7}{9} \leq x \leq 1$.

1510 *a)* Ha $x \geq 2$, akkor $x \geq -\frac{13}{3}$, tehát $x \geq 2$.
Ha $-4 \leq x < 2$, akkor $x \geq -\frac{9}{5}$, tehát $-\frac{9}{5} \leq x < 2$.
Ha $x < -4$, akkor $x \leq -15$, tehát $x \leq -15$.
A végeredmény: $x \leq -15$ vagy $-\frac{9}{5} \leq x$.

b) Ha $x \geq 4$, akkor $x \leq 2{,}5$ adódik, azaz nincs megoldás.
Ha $1 \leq x < 4$, akkor $x \leq 3$, tehát $1 \leq x \leq 3$.
Ha $-2 \leq x < 1$, akkor $x \leq 7$, a megoldás $-2 \leq x < 1$.
Ha $x < -2$, akkor $-6{,}5 \leq x$, a megoldás $-6{,}5 \leq x < -2$.
A feladat megoldása: $-6{,}5 \leq x \leq 3$.

Paraméteres egyenletek – megoldások

1511 *a)* $x = 3$, ha $a \neq 0$. Ha $a = 0$, minden valós szám megoldás.

b) $x = \dfrac{3-b}{b}$, ha $b \neq 0$. Ha $b = 0$, nincs megoldás.

c) $x = \dfrac{4}{2-c}$, ha $c \neq 2$. Ha $c = 2$, nincs megoldás.

d) $x = \dfrac{7a-4}{a+4}$, ha $a \neq -4$. Ha $a = -4$, nincs megoldás.

e) $x = 1$, ha $d \neq -1$. Ha $d = -1$, minden valós szám megoldás.
f) $x = a + 3$, ha $a \neq 3$. Ha $a = 3$, minden valós szám megoldás.
g) $x = b - 2$, ha $b \neq 2$. Ha $b = 2$, minden valós szám megoldás.
h) $x = c - 4$, ha $c \neq -4$. Ha $c = -4$, minden valós szám megoldás.

i) $x = \dfrac{d+1}{d}$, ha $d \neq 0$ és $d \neq -1$. Ha $d = 0$, nincs megoldás. Ha $d = -1$, minden valós szám megoldás.

1512 *a)* $x = a - 3$, ha $a \neq 3$. Ha $a = 3$, minden valós szám megoldás.
b) $x = 2a + 4$, ha $a \neq 2$. Ha $a = 2$, minden valós szám megoldás.

c) $x = \dfrac{a+2}{3}$, ha $a \neq 2$. Ha $a = 2$, minden valós szám megoldás.

d) $x = \dfrac{3a-12}{4a-3}$, ha $a \neq \dfrac{3}{4}$. Ha $a = \dfrac{3}{4}$, akkor nincs megoldás.

1513 A találkozásig eltelt idő legyen t, a két futó együtt megteszi a 200 métert.
A következő egyenlet írható fel:
$$v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = 200.$$
A megoldás:
$$t = \frac{200}{v_1 + v_2}.$$

1514 Legyen x az idő, ahány óra múlva utoléri a gyorsabb kerékpáros a társát. A távolságot írjuk át km-be.
A következő egyenletet kell megoldanunk:
$$38x = 32x + \frac{s}{1000}.$$
A megoldás:
$$x = \frac{s}{6000}\ \text{óra} = \frac{s}{100}\ \text{perc},$$
ennyi idő múlva éri utol az egyik kerékpáros a másikat.

1515 *a)* A zárójelek felbontása után rendezve, elvégezve a szorzattá alakításokat:

$$(a+b)\cdot(a-b)\cdot x=(a+b)^2,$$

ahonnan:

$$x=\frac{a+b}{a-b},\quad \text{ha } |a|\neq|b|.$$

Ha $a=b$, nincs megoldás, csak ha $a=b=0$, ekkor minden valós szám megoldás.

Ha $a=-b$, minden valós szám megoldás.

b) A zárójelek felbontása után rendezve, elvégezve a szorzattá alakításokat:

$$(2a-3b)\cdot x=(2a-3b)^2,$$

amiből:

$$x=2a-3b,\quad \text{ha } 2a\neq 3b \Rightarrow a\neq\frac{3}{2}\cdot b.$$

Ha $a=\frac{3}{2}\cdot b$, minden valós szám megoldás.

c) Rendezve az egyenletet:

$$x\cdot a\cdot(7-a)=4\cdot(7-a),$$

amiből:

$$x=\frac{4}{a},\quad \text{ha } a\neq 0 \text{ és } a\neq 7.$$

Ha $a=7$, minden valós szám megoldás.

Ha $a=0$, nincs megoldás.

d) A törtek miatt $x\neq 3a$ és $x\neq b$.

Beszorzás után:

$$ab-ax=6a-2x,$$
$$(a-2)\cdot x=a\cdot(b-6).$$

I. Ha $a=2$ és $b=6$, minden valós szám megoldás, kivéve a 6.

Ha $a=2$ és $b\neq 6$, nincs megoldás.

II. Ha $a\neq 2$, leosztás után: $x=\frac{a\cdot(b-6)}{a-2}$.

Az értelmezés miatt $x\neq 3a$ és $x\neq b$, a fenti tört csak akkor megoldás, ha $\frac{a\cdot(b-6)}{a-2}\neq 3a$ és $\frac{a\cdot(b-6)}{a-2}\neq b$, vagyis $a\neq 0$ és $b\neq 3a$.

Ha $a=0$, nincs megoldás.

Ha $b=3a$, nincs megoldás.

e) A törtek miatt az egyenletnek csak $x\neq a$ és $x\neq -a$ esetén van értelme.

Legyen a közös nevező az $(x+a)\cdot(x-a)=x^2-a^2$ szorzat, ezzel beszorozva az egyenlet mindkét oldalát:

$$x\cdot(x-a)-(a+x)^2=-1\cdot(x-a+4a^2).$$

Rendezés és kiemelés után:

$$x\cdot(1-3a)=a\cdot(1-3a).$$

Ha $a=\frac{1}{3}$, mindkét oldal 0, tehát minden valós szám megoldás, kivéve: $x=\frac{1}{3}$ és $x=-\frac{1}{3}$.

Ha $a\neq\frac{1}{3}$, leosztás után $x=a$, ami az értelmezés miatt nem megoldás.

f) A törtek miatt $x \neq 2$ és $x \neq 3$. Beszorozva:

$$(x-a)\cdot(x-3)+(x-b)\cdot(x-2)=2\cdot(x-2)\cdot(x-3),$$
$$x\cdot(5-a-b)=12-3a-2b.$$

I. Ha $a+b=5$, és $a=2$, $b=3$, akkor $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, $x \neq 3$.
Ha $a+b=5$, és $a \neq 2$, akkor nincs megoldás.

II. Ha $a+b \neq 5$, akkor $x=\dfrac{12-3a-2b}{5-a-b}$.
A fenti tört csak akkor megoldás, ha $\dfrac{12-3a-2b}{5-a-b} \neq 2$ és $\dfrac{12-3a-2b}{5-a-b} \neq 3$, vagyis $a \neq 2$ és $b \neq 3$.
Ha $a+b \neq 5$ és $a=2$ vagy $b=3$, nincs megoldás.

g) A törtek miatt $a \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq -1$. Mivel $(x+1)\cdot(x+2)=x^2+3x+2$, közös nevezőnek érdemes az $(a-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$ szorzatot választani, ezzel beszorozva:

$$(2a-5)\cdot(x+1)-3\cdot(a-1)\cdot(x+2)=(3x+4)\cdot(a-1),$$
$$x\cdot(4a-1)=5-8a.$$

Ha $a=\dfrac{1}{4}$, nincs megoldás.

Ha $a \neq \dfrac{1}{4}$, $x=\dfrac{5-8a}{4a-1}$.

Az értelmezés miatt: $\dfrac{5-8a}{4a-1} \neq -2$ és $\dfrac{5-8a}{4a-1} \neq -1$. Az első minden a-ra igaz, a másodikból $a \neq 1$, amit az értelmezésnél már kizártunk.

Tehát a tört minden $a \neq \dfrac{1}{4}$ és $a \neq 1$ esetén megoldás.

1516 Legyen x százalékos az oldat. Az oldott anyag mennyiségére felírható egyenlet:

$$a\cdot\frac{p}{100}+b\cdot\frac{q}{100}=(a+b)\cdot\frac{x}{100}.$$

Mivel $a+b \neq 0$, beszorzás után rendezve:

$$x=\frac{ap+bq}{a+b}.$$

1517 A törtek miatt $a \neq 0$. Beszorozva és rendezve:

$$x\cdot(2-a)=3a+7.$$

Ha $a=2$, nincs megoldás.

Ha $a \neq 2$, $x=\dfrac{3a+7}{2-a}$.

Keressük azon a paraméter értékeket, amelyekre:

$$\frac{3a+7}{2-a}<-5,$$
$$\frac{3a+7}{2-a}+\frac{5\cdot(2-a)}{2-a}<0,$$
$$\frac{17-2a}{2-a}<0.$$

A számláló és nevező akkor lesz különböző előjelű, ha $2<a<8{,}5$, ilyen paraméter értékek esetén lesz a megoldás (-5)-nél kisebb.

1518 A törtnek akkor van értelme, ha $x \neq m$. Rendezzünk egy oldalra, és hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{mx-1-x+m}{x-m}>0,$$

$$\frac{m\cdot(x+1)-1\cdot(x+1)}{x-m}>0,$$

$$\frac{(m-1)\cdot(x+1)}{x-m}>0.$$

Vizsgáljuk a tényezők előjelét.

Ha $m-1>0$, azaz $m>1$, akkor a másik két tényező azonos előjelű kell hogy legyen, mivel a hányadosnak pozitívnak kell lennie. Ez akkor teljesül, ha $x<-1$ és $m<x$.

Ha $m=1$, nincs megoldás.

Ha $m-1<0$, azaz $m<1$, akkor a másik két tényező ellentétes előjelű kell hogy legyen, hiszen $m-1$ negatív. Attól függően, hogy m (–1)-nél nagyobb vagy kisebb adódnak a megoldások:

ha $x+1>0$ és $x-m<0$, $\quad$ ha $x+1<0$ és $x-m>0$,

$x>-1$ és $x<m$, $\quad$ $x<-1$ és $x>m$,

$-1<x<m$; $\quad$ $m<x<-1$.

Kérdés lehet még, hogy x-re kaphatunk-e (–1)-et. Nem, mivel $(x+1)$ értéke 0 lenne, de az nem megoldása az egyenlőtlenségnek (ezzel az $m \neq -1$ esetet nem kell vizsgálni, mert $x \neq m$).

Egyenletekkel megoldható feladatok – megoldások

1519 A háromszög szögei: 70°, 90°, 20°.

1520 A kétjegyű szám: 84.

1521 A keresett kétjegyű szám: 52.

1522 A keresett szám a 165.

1523 Az eredeti ár 18 000 Ft volt.

1524 A táska ára eredetileg 4 000 Ft volt.

1525 *a)* 3 kg 40%-os és 1 kg 80%-os oldatot. *b)* $\frac{4}{3}$ kg *c)* 12 kg *d)* 62,2%

1526 *a)* 15 km, $6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ *b)* $8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ *c)* 15 órakor, 48 km

1527 *a)* 62,5 másodperc múlva találkoznak.

b) A lekörözősig 1000 másodperc = 16 perc 40 másodperc telik el.

1528 437,5 méter előny esetén érnek egyszerre célba.

1529 Az anya 48 éves, fia 19 éves.

1530 *a)* 19 óra 48 perckor *b)* 20 óra 36 perckor *c)* 22 óra 30 perckor

1531 *a)* Együtt $\frac{48}{7}=6\frac{6}{7}\approx 6{,}86$ óra alatt vágják fel a tűzifát.

b) Ebben az esetben $\frac{52}{7}=7\frac{4}{7}\approx 7{,}43$ óra alatt végeznek a munkával.

c) A munka, a kezdéstől, 9 órát vesz igénybe.

1532 Oldjuk meg a feladatot következtetéssel:

9 kályhában $1\ \mathrm{m}^3$ fa $\dfrac{5,5}{12}$ nap alatt ég el.

1 kályhában $1\ \mathrm{m}^3$ fa $\dfrac{5,5}{12}\cdot 9$ nap alatt ég el.

12 kályhában $1\ \mathrm{m}^3$ fa $\dfrac{\frac{5,5}{12}\cdot 9}{12}=\dfrac{5,5\cdot 9}{12^2}$ nap alatt ég el.

12 kályhában $9\ \mathrm{m}^3$ fa $\dfrac{\frac{5,5}{12}\cdot 9}{12}\cdot 9=\dfrac{5,5\cdot 9}{12^2}\cdot 9=\dfrac{5,5\cdot 9^2}{12^2}\approx 3,09$ nap alatt ég el.

1533 **I. megoldás.** Ha a nevezett versenyzők száma n, akkor eredetileg $\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$ mérkőzés lett volna. $n-1$ versenyzővel $\dfrac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ mérkőzésre kerül sor, 2-t lejátszott a kieső versenyző, 15 mérkőzés pedig elmaradt. Így a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}=\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}+2+15.$$

Megoldás: $n=18$.

II. megoldás. A kiesett versenyző 2-t játszott és 15 mérkőzése elmaradt, összesen 17 mérkőzést játszott volna, ami azt jelenti, hogy 18 versenyző indult eredetileg a versenyen.

1534 Legyen a termelés kezdetben t; ekkor az első üzem termelése $0,3\cdot t$, a másodiké $0,7\cdot t$.
A növekedés után a termelés:

$$0,3\cdot t\cdot 1,21+0,7\cdot t\cdot 1,2=1,203\cdot t.$$

Tehát 20,3%-kal növekedett a termelés.

1535 *a)* Az osztályban 20 lány van.

b) Legyen az osztálylétszám x. A következő egyenlet írható fel:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{2}+12=x,$$
$$x=36.$$

Az osztályban 36 tanuló van, tehát a fiúk száma 16.

1536 *a)* Legyen a híd hossza x, a következő egyenlet írható fel:

$$x=\left(\frac{x}{3}-20\right)+\left(\frac{x}{4}-5\right)+\left(\frac{x}{2}-30\right).$$

Ebből a híd hossza 660 méter.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

b) A kamion annyi idő alatt ér át, amíg megtesz 678 métert:

$$t=\frac{0,678\ \text{km}}{30\ \dfrac{\text{km}}{\text{óra}}}=0,0226\ \text{óra}=1,356\ \text{perc}.$$

1537 *a)* A 25 000 Ft-os szemüvegkeret ára $25\,000 \cdot 0{,}83 = 20\,750$ Ft lesz.

$\frac{80\,750}{85\,000} = 0{,}95,$ tehát 5%-kal lesz olcsóbb a szemüveg.

b) A teljes árat $85\,000 \cdot 0{,}17 = 14\,450$ Ft-tal szeretnénk csökkenteni.

A kedvezmény mértéke $\frac{14\,450}{25\,000} = 0{,}578,$ tehát ezt egy 58 éves ember teheti meg.

c) Legyen a keresett keret ára x. A következő egyenlet írható fel:

$$60\,000 + x \cdot 0{,}83 = (60\,000 + x) \cdot 0{,}9,$$
$$x = 85\,714.$$

Tehát egy 85 714 Ft-os keret esetén csökkenthetné az árat 10%-kal a 17 éves vásárló.

1538 A sebességek: gyalog $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, kerékpárral $18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jelölje a találkozásig eltelt időt, órában mérve, x.

a) A megfelelő egyenlet:

$$6x + 18x = 6,$$
$$x = \frac{1}{4}.$$

Tehát 6 óra 15 perckor találkoztak.

b) Az egyenlet:

$$6x + 18 \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right) = 6,$$
$$x = \frac{3}{8}.$$

Tehát 7 óra után 22,5 perccel találkoztak.

c) Tímea $5 + 5 + 5 = 15$ perccel indul később. A megfelelő egyenlet:

$$6x + 18 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) = 6,$$
$$x = \frac{7}{16}.$$

Tehát 8 óra után 26,25 perccel találkoztak.

1539 *a)* Ha a feltöltés ideje x, akkor $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1,$ megoldása: $x = 2$. Tehát a nyitás előtt 2 órával, azaz legkésőbb 6 órakor meg kell nyitni a csapokat.

b) A második csap 2 órán keresztül tölti a medencét, az együttes munka idejét jelölje x. Egyenletünk: $\frac{2}{6} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1,$ megoldása: $x = \frac{4}{3}$. Tehát a második csap bekapcsolása után 3 óra 20 perccel telik meg a medence.

c) A lefolyó fél óráig engedte ki a vizet, a megfelelő egyenlet: $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{0{,}5}{4} = 1$. A megoldás $x = \frac{9}{4}$, tehát ebben az esetben a csapoknak 2 óra 15 percre van szükségük a feltöltéshez.

1540 A tízes számrendszerbeli alakokat átírva:

$$1111a + 111b + 11c + d = 2010.$$

Az a értéke csak 1 lehet, ebből

$$111b + 11c + d = 899.$$

Mivel $0 \le 11c + d \le 108$, csak $b = 8$ lehet: $11c + d = 11$. Ennek egyetlen megoldása van: $c = 1$ és $d = 0$.

A keresett négyjegyű szám: 1810.

1541 Legyen a bankban elhelyezett két összeg x és $6 \cdot 10^6 - x$.

A kisebb fiú pénze 7 évi kamatozás után: $x \cdot 1{,}12^7$.

A másik fiú pénze: $(6 \cdot 10^6 - x) \cdot 1{,}12^5$.

A feltétel szerint:

$$x \cdot 1{,}12^7 = (6 \cdot 10^6 - x) \cdot 1{,}12^5,$$
$$1{,}12^2 \cdot x = 6 \cdot 10^6 - x,$$
$$x = 2661462.$$

Tehát a 11 éves fiú nevére 2 661 462 Ft, a 13 éves fiú nevére 3 338 538 Ft összegeket kell a bankban elhelyezni.

1542 *a)* Az előadott dalok számára vonatkozóan felírható egyenlet: $\frac{x}{4} + \frac{x}{10} + \frac{3x}{5} + 1 = x$. Megoldása: $x = 20$, tehát összesen 20 dalt adtak elő.

b) Szilvia énekelt $5 + 12 + 1 = 18$ dal előadásában, ez $\frac{18}{20} = 0{,}9$, azaz 90%.

c) Szilvia gitározott $2 + 12 = 14$ dal előadásában, Tünde gitározott $5 + 12 = 17$ esetben. A kapott összeget $\frac{14}{17}$ arányban kell elosztani. $62\,000 : 31 = 2\,000$.

Tehát Szilvia 28 000, Tünde pedig 34 000 Ft-ot kap.

1543 Mivel a születési év számjegyeinek összege nem lehet több 28-nál, a születési év első két jegye lehet 19. Az utolsó két jegy legyen x, y. Ha a születési év $\overline{19xy}$, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\overline{19xy} + 1 + 9 + x + y = 2010,$$
$$1900 + 10x + y + 10 + x + y = 2010,$$
$$11x + 2y = 100,$$
$$11x = 2 \cdot (50 - y).$$

Az egyenlőség úgy teljesülhet, ha x páros számjegy, de nem lehet kisebb 8-nál, mert akkor y kétjegyű lenne. Így $x = 8$, $y = 6$, tehát a születési év 1986. A feladat kérdésére a válasz a mindenkori évszámtól függ.

1544 Az út 11 órát vett igénybe. Legyen x annak az útszakasznak a hossza, amit oda és vissza is vízszintes úton tesznek meg, y annak az útnak a hossza, amelyet oda úton felfelé, vissza pedig lejtőn lefelé haladva tesznek meg, z pedig az a szakasz, amelyet oda úton lefelé, vissza pedig felfelé tesznek meg. A következő egyenlet írható fel:

$$\left(\frac{x}{20} + \frac{y}{15} + \frac{z}{30}\right) + \left(\frac{x}{20} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15}\right) = 11.$$

Beszorzás és összevonás után:

$$3x + 4y + 2z + 3x + 2y + 4z = 660,$$
$$6 \cdot (x + y + z) = 660,$$
$$x + y + z = 110.$$

A kapott összeg az egyik irányban megtett út. Tehát ezen a napon a kerékpárosok összesen 220 km-t tettek meg.

1545 Azért fogynak el 41 nappal előbb a történetek, mert bizonyos napokon 3-mal, máskor 4-gyel több került elolvasásra a tervezettnél. Legyen x azoknak a napoknak a száma, amikor 4 történetet olvasott el, y pedig azoké, amikor 5-öt. A következő egyenlet írható fel:

$$3x + 4y = 41.$$

Ennek az egyenletnek keressük a pozitív egész megoldásait.

Mivel x és y pozitív számok, nem lehetnek tetszőlegesen nagyok:

$$0 < x \le 18 \quad \text{és} \quad 0 < y \le 10.$$

Az egyenletből:

$$x = \frac{41 - 4y}{3}.$$

A 41-et 3-mal osztva 2-t kapunk maradékul, tehát $4y$-nak 3-mal osztva szintén 2-t kell adnia maradékként. $4y$-ra a lehetséges számok:

$$4,\ \ 8,\ \ 12,\ \ 16,\ \ 20,\ \ 24,\ \ 28,\ \ 32,\ \ 36,\ \ 40.$$

Ezekből a számokból a 8, a 20 és a 32 adnak 3-mal osztva 2-t maradékul. Így a megoldások:

$$4y = 8 \ \Rightarrow\ y_1 = 2,\ x_1 = 11;$$
$$4y = 20 \ \Rightarrow\ y_2 = 5,\ x_2 = 7;$$
$$4y = 32 \ \Rightarrow\ y_3 = 8,\ x_3 = 3.$$

Tehát a fenti három esetben fordulhatott elő, hogy 4, illetve 5 történetet olvasott el az illető.

1546 Az 5 t teherbírású teherautó x, a másik y menetet hajtson végre:

$$5x + 7y = 99,$$
$$x = \frac{99 - 7y}{5}, \quad x \in \mathbb{Z}^+.$$

Tehát első lépésben keressük azokat a 7-tel osztható, 99-nél nem nagyobb pozitív egész számokat, amelyek majd $7y$ értékét adják.

A 99-et kizárjuk, mert nem osztható 7-tel, és ekkor x amúgy is 0 lenne. $7y$ értékei lehetnek:

$$7,\ \ 14,\ \ 21,\ \ 28,\ \ 35,\ \ 42,\ \ 49,\ \ 56,\ \ 63,\ \ 70,\ \ 77,\ \ 84,\ \ 91,\ \ 98.$$

Mivel $(99 - 7y)$-nál a 99-et 5-tel osztva 4 maradékot kapunk, így a fenti számok közül olyat kell kiválasztani, amelyik 5-tel osztva szintén 4 maradékot ad. (Mert így a $99 - 7y$ nem ad 5-tel osztva maradékot.)

Ezek a „nyertes számok” $7y$ értékére a 14, a 49 és a 84. A megoldások:

$$7y = 14 \ \Rightarrow\ y_1 = 2,\ \ x_1 = 17;$$
$$7y = 49 \ \Rightarrow\ y_2 = 7,\ \ x_2 = 10;$$
$$7y = 84 \ \Rightarrow\ y_3 = 12,\ x_3 = 3.$$

Az egyes teherautók által megtett menetek száma a fenti három eset valamelyike kell, hogy legyen.

Egyenletrendszerek – megoldások

1547 *a)* $x=3,\ y=1;$ *b)* $x=0,\ y=-1;$ *c)* $x=-2,\ y=1;$ *d)* $x=2,\ y=1.$

1548 *a)* $x=1,\ y=-2;$ *b)* $x=1,\ y=7;$ *c)* $x=\frac{1}{3},\ y=5;$ *d)* $x=-3,\ y=\frac{5}{2};$

e) $x=9,\ y=-6;$ *f)* nincs megoldás; *g)* $x=9,\ y=1;$ *h)* $x=20,\ y=30.$

1549 *a)* $x=-2,\ y=1;$ *b)* $x=4,\ y=2;$ *c)* $x=-1,\ y=3;$ *d)* $x=4,\ y=5;$

e) $x=8,\ y=\frac{7}{5};$ *f)* $x=\frac{2}{3},\ y=-6;$ *g)* végtelen sok megoldás van; *h)* nincs megoldás.

1550 Legyen a muskátli palánták ára x, a petúnia palántáké y.

$$\left.\begin{aligned} 12x+25y&=9840\\ 21x+14y&=10080 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldások: $x=320$ és $y=240$.

Tehát a muskátli palánták 320 Ft-ba, a petúnia palánták 240 Ft-ba kerülnek.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

1551 Legyen a motorcsónak sebessége állóvízben x, a folyó sebessége y.

A folyón felfelé megtett út 9 órát vett igénybe:

$$9\cdot(x-y)=72.$$

Lefelé a folyón 6 óra volt az út:

$$6\cdot(x+y)=72.$$

Az $\left.\begin{aligned} x-y&=8\\ x+y&=12 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai: $x=10,\ y=2$.

Tehát a motorcsónak állóvízben $10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességre képes, a folyó pedig $2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel folyik.

1552 Az első sóoldat legyen x százalékos, a második y százalékos.

A feltételek szerint:

$$4\cdot\frac{x}{100}+12\cdot\frac{y}{100}=16\cdot\frac{50}{100},\quad\text{illetve}\quad 12\cdot\frac{x}{100}+4\cdot\frac{y}{100}=16\cdot\frac{30}{100}.$$

Ha 100-zal beszorzunk a $\left.\begin{aligned} 4x+12y&=800\\ 12x+4y&=480 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk.

Osszunk 4-gyel, majd megoldva: $x=20,\ y=60$.

Tehát az első sóoldat 20%-os, a második 60%-os.

1553 Legyen a szám első jegye x, a második y $(y<x)$.

A feladatban megadott, a maradékos osztásra vonatkozó feltételek szerint:

$$\frac{10x+y-6}{x+y}=7\quad\text{és}\quad\frac{10x+y-3}{x-y}=16.$$

Beszorozva és rendezve az $\left.\begin{aligned} x-2y&=2\\ -6x+17y&=3 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk.

Megoldva: $x=8,\ y=3$.

A keresett kétjegyű szám a 83, a megoldás helyességéről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.

1554 Mivel a kacsák és nyulak számának aránya $3:2$, legyen a kacsák száma $3x$, a nyulak száma $2x$, a tyúkok száma pedig y.

A fejek száma:
$$y + 2x + 3x = 38.$$
A lábak száma:
$$2y + 4\cdot 2x + 2\cdot 3x = 92.$$
Az $\left.\begin{aligned} y + 5x &= 38 \\ 2y + 14x &= 92 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk.

A második egyenlet 2-vel való osztása után az egyenlő együtthatók módszerével megoldva:
$$x = 4 \quad \text{és} \quad y = 18.$$
Tehát a baromfiudvarban 18 tyúk, 12 kacsa és 8 nyúl van.

Az ellenőrzés azt mutatja, hogy a megoldás helyes.

1555 Az első gép x, a második y, a harmadik z nap alatt végezné el a munkát.

A feltételek alapján a következő egyenletrendszer írható fel:
$$\left.\begin{aligned} \frac{7{,}2}{x} + \frac{7{,}2}{y} &= 1 \\ \frac{9}{x} + \frac{9}{z} &= 1 \\ \frac{12}{y} + \frac{12}{z} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \overset{\text{számlálókkal osztva}}{\Rightarrow} \quad \left.\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{36} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{9} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{12} \end{aligned}\right\}.$$
Az első két egyenlet különbségéből: $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{36}$, majd ehhez hozzáadva a harmadik egyenletet: $\frac{2}{y} = \frac{4}{36}$, amiből $y = 18$.

Visszahelyettesítve: $z = 36$, $x = 12$.

Tehát külön-külön a gépek 12 nap, 18 nap, illetve 36 nap alatt végeznék el a munkát.

1556 Legyen a háromjegyű szám: $\overline{xyz}$.

A feltételek szerint:
$$x + y + z = 20. \quad (1)$$
Tudjuk továbbá, hogy
$$\begin{aligned} \overline{xyz} - 16 &= 2\cdot\overline{zyx}, \\ 100x + 10y + z - 16 &= 200z + 20y + 2x, \\ 98x - 16 &= 199z + 10y. \end{aligned}$$
(1)-ből $y = 20 - x - z$ behelyettesíthető:
$$\begin{aligned} 98x - 16 &= 199z + 200 - 10x - 10z \\ 108x - 216 &= 189z, \\ 108\cdot(x - 2) &= 189z, \end{aligned}$$
Mivel a bal oldal osztható 4-gyel, ezért a jobb oldal is. A z lehetséges értékei 0, 4, 8.

Ha $z = 0$, (2)-ből $x = 2$; (1)-ből $y = 18$, nem megoldás.

Ha $z = 4$, (2)-ből $x = 9$; (1)-ből $y = 7$.

Ha $z = 8$, (2)-ből $x = 16$, nem megoldás.

A feladat feltételeinek a 974 felel meg, az ellenőrzés igazolja, hogy valóban jó a megoldás.

1557 *a)* A grafikus megoldásra gondolva rendezzük az egyenleteket:

$$y = 2x - 3, \quad \text{illetve} \quad y = -\frac{1}{b} \cdot x + \frac{b-2}{b}.$$

Akkor nincs megoldás, ha a két egyenes párhuzamos, ami teljesül, ha $-\frac{1}{b} = 2$ és $\frac{b-2}{b} \neq -3$.

Az elsőből $b = -\frac{1}{2}$, a másodikból $b \neq \frac{1}{2}$.

Tehát ha $b = -\frac{1}{2}$, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek.

b) A behelyettesítő módszerrel megoldva az egyenletrendszert:

$$x = \frac{4b-2}{2b+1}, \quad y = \frac{2b-7}{2b+1}.$$

$x = \frac{4b-2}{2b+1} > 0$, ha $b < -\frac{1}{2}$ vagy $b > \frac{1}{2}$.

$y = \frac{2b-7}{2b+1} > 0$, ha $b < -\frac{1}{2}$ vagy $b > \frac{7}{2}$.

Mindkét megoldás pozitív, ha $b < -\frac{1}{2}$ vagy $b > \frac{7}{2}$.

1558 Az első egyenletből

$$x = 12 - 3y. \quad (1)$$

Ha $x \geq 0$, akkor $y \leq 4$ kell lennie, tehát

$$0 \leq y \leq 4. \quad (2)$$

(1)-et a második egyenletbe helyettesítve: $252 - y = m$.

A (2) feltétel alapján $248 < m < 252$, tehát m lehetséges egész értékei: 248, 249, 250, 251, 252.

1559 Alakítsuk szorzattá a bal oldali kifejezést:

$$(x - 2y) \cdot (x + 2y) = 116.$$

Akkor van megoldás, ha $x - 2y$ és $x + 2y$ a 116 osztópárjai.

A 116 prímtényezős felbontása: $116 = 2^2 \cdot 29$. Két eset lehet: $4 \cdot 29$ vagy $2 \cdot 58$.

A $4 \cdot 29$-es felbontás esetében:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ x + 2y &= 29 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x = 33; \text{ mivel } x \notin \mathbb{Z}^+, \text{ ezért ez nem lehet megoldás.}$$

A $2 \cdot 58$-es felbontás esetében:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ x + 2y &= 58 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x = 60, \text{ amiből } x = 30 \text{ és } y = 14;\ x, y \in \mathbb{Z}^+, \text{ ezért ez megoldás.}$$

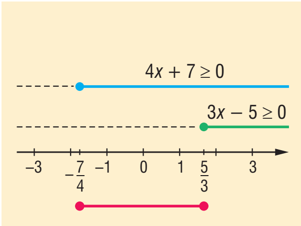
Az ellenőrzésből kiderül, hogy ez a számpár valóban megoldás.

Vegyes feladatok – megoldások

1560 *a)* $x = 6$; *b)* $x = \frac{40}{141}$; *c)* $x = \frac{1}{2}$; *d)* $x = 0$.

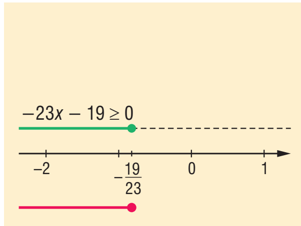
1561 *a)* $x_1 = -\frac{13}{6}$, $x_2 = \frac{13}{2}$; *b)* $x_1 = \frac{17}{5}$, $x_2 = 7$; *c)* $x = \frac{45}{17}$, ha $x < -3$, nincs megoldás.

1562 *a)*



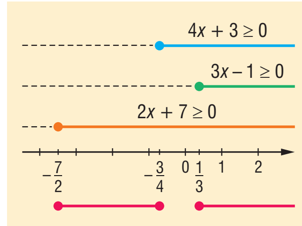
$-\frac{7}{4} \le x \le \frac{5}{3}$;

b)



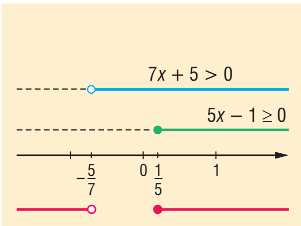
$x \le -\frac{19}{23}$;

c)



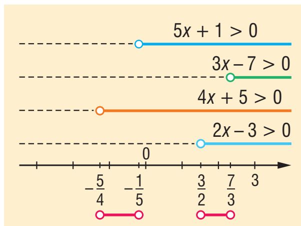
$-\frac{7}{2} \le x \le -\frac{3}{4}$ vagy $\frac{1}{3} \le x$;

d)



$x < -\frac{5}{7}$ vagy $\frac{1}{5} \le x$;

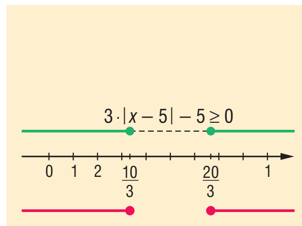
e)



$-\frac{5}{4} < x < -\frac{1}{5}$

vagy $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$;

f)



$x \le \frac{10}{3}$ vagy $x \ge \frac{20}{3}$.

1563 *a)* $x = \frac{5p - 3}{p - 4}$, ha $p \ne 4$. Ha $p = 4$, nincs megoldás.

b) $x = 2$, ha $p \ne \frac{1}{3}$. Ha $p = \frac{1}{3}$, minden valós szám megoldás.

c) $x = p - 5$, ha $p \ne -5$. Ha $p = -5$, minden valós szám megoldás.

1564 *a)* Az egyik kerékpáros 8 óra, illetve 6 óra alatt teszi meg az utat.

b) A falu és a város távolsága 144 km.

1565 A tengervízből 2 literre van szükség.

1566 Ha a harmadik jegy x, akkor a következő egyenletet kell megoldani:

$$1900 + 10x + x + 1 - 1761 = 190 + x.$$

A születési év 1956, 2010-ben 54 éves.

1567 Ha a legidősebb testvér mai életkora x, akkor az egyenletünk:

$$x + (x - 3) + \left(\frac{x - 1}{2} + 1\right) = 35.$$

Az egyenlet megoldásából a testvérek életkora 15, 12 és 8 év.

1568 Ha az utasok száma $5x$ és $4x$, akkor az alábbi egyenletet kell megoldani:

$$\frac{5x - 10}{4x + 10} = \frac{5}{7}.$$

A kirándulók száma összesen 72.

1569 Ha a fiúk száma x, a lányoké pedig y, akkor az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ 4000x + 5000y &= 39000 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldása után: Juliska mamának 3 lány és 6 fiú unokája van.

1570 Legyen eredetileg x darab piros és y darab kék golyó a dobozban. Egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 200 \\ y + 27 &= x + 53 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldásából azt kapjuk, hogy 87 piros és 113 kék golyó volt eredetileg a dobozban.