Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

MEGOLDÁSOK

10

TARTALOMJEGYZÉK

Megoldások – 10. évfolyam

10.1. *Gondolkodási módszerek* (2001–2091)

10.2. *A gyökvonás* (2092–2148)

10.3. *A másodfokú egyenlet* (2149–2248)

10.4. *Geometria* (2249–2632)

10.5. *Szögfüggvények* (2633-2730)

10.6. *Valószínűség-számítás* (2731-2814)

10.1. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel – megoldások

2001 *a)* Prím után csak az irracionális, $\sqrt{2}$, 2, 2^2 *nem* kerülhet.
Természetes mögött egész, racionális, valós állhat.
Egész után racionális, valós állhat.
Racionális vagy irracionális mögött csak valós állhat.
$\sqrt{2}$ után irracionális vagy valós állhat.
2 után az irracionálist, $\sqrt{2}$, 2^2-t kivéve bármi állhat.
2^2 mögött természetes, egész, racionális, valós állhat.

b) Négyzet után lehet bármi.
Téglalap után paralelogramma vagy trapéz állhat.
Paralelogramma után trapéz állhat.
Rombusz után trapéz, deltoid, paralelogramma állhat.
Trapéz és deltoid után nem írhatunk semmit a listából.

c) Bármit is írunk előre, utána kerülhet az 1.
1 után nem írhatunk mást.
Prím mögé csak az 1-et írhatjuk.
10 után 5, 2 állhat.
9 után 3 állhat.
8 után 4, 2 állhat.
6 után 3, 2 állhat.
4 mögött 2 állhat.

d) A 9 és a prímek nem állhatnak elöl.
Elöl: 21, utána 7 állhat.
Elöl: 15, utána 5 állhat.

2002 *a)* Ha valami bogár, akkor rovar. *b)* Ha valami holló, akkor (az) fekete.

2003 *a)* Minden négyzet egyenlő oldalú. *b)* Minden 6-tal osztható szám osztható 3-mal is.

2004 *a)* Moziba viszi. *b)* Bármit tehet.

2005 *a)* Igen. *b)* Igen. *c)* Nem. *d)* Igen.

2006 *a)* $0:0$, $1:0$, $2:0$. b) $0:0$ és valamelyik csapatnak $1:0$, ill. $2:1$.
c) $0:0$ és valamelyik csapatnak $1:0$.

2007 *a)* Nem igaz.
b) Az állítás megfordítása igaz: *Ha a négyszög paralelogramma, akkor van párhuzamos oldalpárja.*
c) Trapézra.

2008 Ha egy háromszög derékszögű, akkor két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.

Ha egy háromszögben két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

A tétel feltételeit teljesítő háromszög oldalai közül a két rövidebbet befogóknak, a hosszabbat átfogónak nevezzük. Mivel egy háromszögben a 180º-os szögösszeg miatt csak egy 90º-os szög lehet, ráadásul ez a legnagyobb, ezért a derékszögnek a legnagyobb oldallal szemben kell lennie.

2009 *a)* A: Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor paralelogramma.

B: Ha egy háromszög szabályos, akkor tengelyesen szimmetrikus.

C: Ha egy háromszög köré írt kör középpontja az egyik oldal felezőpontja, akkor a háromszög derékszögű.

b) B hamis, az összes többi igaz.

c) Egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha a köré írt kör középpontja az egyik oldal felezőpontja. Átfogó, Thalész-tétel.

2010 Két dolgot kell megfigyelnünk. Egyrészt az öt kosárban összesen 95 darab virág van. Másrészt Rózsa kijelentése *(kétszer annyi piros, mint fehér)* azt jelenti, hogy a virágok száma három többszöröse. Azaz olyan kosárra gondolt, amit 95-ből levonva hárommal osztható számot ad. Ilyen csak egy van, a 29 virágot tartalmazó. Bazsa Rózsa az első kosárra gondolt.

2011 Két megoldást mutatunk, tessék továbbiakat keresni!

Mindent elismétel, amit csak hall. Másképp: Ha hall valamit, akkor azt elismétli. Tudjuk hogy amint a következtetés első fele, vagyis a feltétel nem teljesül, az állítás nem lehet hazugság. Ez bekövetkezhet például akkor, ha a papagáj *süket.*

Mindent elismétel, amit csak hall… *Majd egy év múlva.* Az időtényezőről nem állított semmit a kereskedő!

2012 Próbáljuk ki a játékot, szerezzünk tapasztalatokat. A tapasztalat az lesz, hogy ezzel a módszerrel nem lehet egyenlővé tenni a két kupacot. Miért?

Legyen a két kupac különbsége n. Ha a kisebb kupacból veszünk el x darabot, akkor a nagyobb kupacba teszünk $2x$-et. A kupacok különbsége $n + 3x$-re változik. Ha a nagyobból veszünk el x-et és a kisebbikbe rakunk $2x$-et, akkor a különbség $n - 3x$-re változik. Mi a közös a két esetben? A $3x$: bármennyit is veszünk el bármelyik kupacból, a kupacok különbsége három többszörösével változik. Mivel eredetileg 2 volt, három többszöröseinek hozzáadásával vagy elvételével nem lehet 0.

Megjegyzés: A feladat megoldása során találtunk egy változatlan *(invariáns)* mennyiséget, ennek segítségével igazoltuk a sejtést. Az eljárást szokás *invariáns módszernek* is nevezni.

2013 Szedjük elemeire a kérdést. Két szereplője van: a *mindent megtanuló diák* és a *megtanulhatatlan matematika.* Bontsuk két következtetésre: először képzeljük el, milyen az, amikor van mindent megtanuló diák. Nyilvánvaló, hogy ő mindent megtanul, tehát nincs megtanulhatatlan. Ha van *mindent megtanuló diák,* akkor nincs *megtanulhatatlan matematika* (sem).

Most fordítsuk meg a dolgot. Induljunk ki abból, hogy a matematika megtanulhatatlan. Akkor viszont nincs egy diák sem, aki meg tudná tanulni. Ha a *matematika megtanulhatatlan,* akkor nincs *mindent megtanuló diák.*

Összegezve: azt nem jelenthetjük ki, hogy van mindent megtanuló diák, vagy hogy a matematika megtanulhatatlan. Ezt nem tudjuk eldönteni. Csak annyit jelenthetünk ki biztosan, hogy a kettő egyszerre nem létezhet, mert kizárják egymást.

Megjegyzés: A feladat alapja ez a ma már klasszikusnak számító kérdés Raymond Smullyantól: *Mi történik, ha egy megállíthatatlan ágyúgolyó egy megmozdíthatatlan oszlopnak ütközik?*

2014 Érdemes játszani a játékot, és úgy tapasztalatokat szerezni a lefolyásáról. Ha már kijátszottuk magunkat, és nem tudjuk a nyerő stratégiát, akkor gondolkodjunk! A játékot körökre oszthatjuk, minden körben a kezdő az első. Bármennyi szálat is vesz el az első egy-egy körben, a második mindig tud úgy elvenni, hogy a gyufák száma 9-cel csökkenjen. Így viszont 11 kör után 1 szál gyufa marad, amit az első a szabályok szerint nem tud elvenni, tehát a második – Péter – nyert.

Megjegyzés: Ebben a feladatban is az invariáns módszert alkalmaztuk, invariáns mennyiség az egy körben elvett gyufák száma.

2015 A játékot osszuk körökre. Egy kör alatt mind a két játékos egyszer vesz el a kupacból. Figyeljük meg, hogy mivel 3, 4 vagy 5 szálat vehetnek el, az egyik a másik által elvett gyufák számát mindig ki tudja egészíteni 8-ra. Így 12 teljes kört tudnak lejátszani, azonban 4 szál marad, ami a kezdő győzelmét jelenti. Valóban, ebben a játékban a kezdőnek van nyerő stratégiája. Mégpedig a következő: első lépésben vegyen el 3 szálat, majd a második által elvett gyufákat egészítse ki 8-ra. A módszerrel 11 kör után (amiben mindig ő a második) $100-(12\cdot 8+3)=1$ szál gyufa marad az asztalon, azaz az utoljára lépő nyert. Gabi tehát biztosan nyerni fog, ha kezd, és a fent leírt módszerrel játszik.

Megjegyzés: Ebben a feladatban is az invariáns módszert alkalmaztuk, invariáns mennyiség az egy körben elvett gyufák száma.

2016 Mivel valakinek mindig vissza kell vinni a lámpát, célszerű a gyorsabb hölgyekkel megoldatni ezt a feladatot. Másrészt viszont a két fiút érdemes együtt átküldeni, így akkor csak egy hosszabb, 10 perces séta lesz (nincs külön 5 perces is). A kettőt csak úgy kombinálhatjuk, ha először a hölgyek mennek át (2 perc), majd Irma visszaviszi a fiúknak a lámpát (1 perc). Utána áthaladnak az urak (10 perc) és Vilma viszi vissza a lámpát (2 perc). Végül Irma és Vilma együtt átkelnek (2 perc). Így összesen 17 perc alatt átérnek a túloldalra.

2017 Nem. Figyeljünk a számok paritására! Három esetünk lehet:

A: Ha két páros számot töröl le az illető, akkor párost is ír vissza.

B: Ha két páratlant, akkor is párost ír vissza.

C: Ha egy párost és egy páratlant, akkor páratlant ír vissza.

Tekintsük át az eseteket, hogyan változik a páros és páratlan számok száma! *A*: –1 páros; *B*: –2 páratlan, +1 páros; *C*: –1 páros. Így a páratlan számok száma csak párosával változhat (egész pontosan kettővel csökken vagy nem változik). 1-től 30-ig a számok fele páros és páratlan, azaz 15 darab páratlan szám szerepel a táblán. Ahhoz, hogy az utolsó szám a 0 legyen, el kell tűnnie a páratlan számoknak, azaz számuknak 0-ra kell csökkenni. Azonban ha csak párosával csökkenhet a számuk, akkor soha nem érheti el 15-ről a nullát.

Megjegyzések: Az invariáns módszert alkalmaztuk, invariáns mennyiség a páratlan számok darabszámának paritása.

A tanár természetesen a játék után úgy módosítja a feladatot, hogy aki kitalálja, miért nem ér véget a játék, annak mégiscsak beír egy ötöst. Így végül jószívű is lesz…

Skatulyaelv – megoldások

2018 *a)* Skatulyák: hét napjai. *b)* Skatulyák: hónap napjai.

2019 *a)* Skatulyák: év napjai. *b)* Skatulyák: hetek.

c) Az aktuális év heteinek számától függően: $52\cdot 11+1=573$ vagy $53\cdot 11+1=584$.

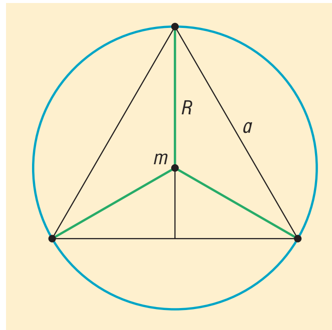
2020 *a)* 6; *b)* 37.

2021 $6 \cdot 7 = 42$.

2022 Skatulyák: 1, 3, 7, 9 végződések.

2023 Ebben a feladatban a skatulyák számát nem ismerjük. Kezdjük el képzeletben kettesével feltölteni a skatulyákat. Az 5.-nél már elfogyott $5 \cdot 2 = 10$ virgács, tehát a feladat szerint nem folytathatjuk a feltöltést. A 11. virgácsot pedig a már meglévő skatulyák egyikében kell elhelyezni, vagyis a skatulyák – így a virgácsfajták – száma 5. Ebből persze azt is tudjuk, hogy mindegyik fajta virgácsból 6 darab van a krampusz zsákjában.

2024 *a)* Egy játékos három nyilat dob el egy fordulóban. Osszuk fel a táblát három egybevágó 120º-os körcikkre úgy, hogy valamelyik nyíl éppen egy felosztó sugárra essen. Egy-egy ilyen körcikkben a két legtávolabbi pont a körív két végpontja. Számoljuk ki a távolságukat. A három vékony szakasz éppen szabályos háromszöget határoz meg. A feladat másképp megfogalmazva: adjuk meg a szabályos háromszög oldalát, ha ismerjük a köré írt kör sugarát.



Tudjuk, hogy $R = 16{,}75$ cm, és hogy a súlypont $1:2$ arányban osztja a súlyvonalat (a súlypont itt egybeesik a magasságponttal).

Először számoljuk ki a magasságot az oldalból a Pitagorasz-tétel segítségével:

$$m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2,$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a.$$

Ennek kétharmada a sugár, vagyis:

$$\frac{2}{3} \cdot m = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = R = 16{,}75.$$

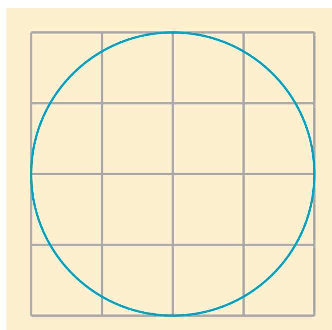
Ebből megkapjuk a-t: $a \approx 29$ cm.

Ha a fennmaradó két nyíl egy körcikkbe esik, akkor távolságuk 29 cm-nél kisebb.

Ha a fennmaradó két nyíl külön-külön körcikkbe esik, akkor legalább az egyik olyan körcikkben van, amelyik határoló sugarán van az elsőnek kijelölt dobás.

b) A táblában ekkor $6 \cdot 3 = 18$ nyíl van. Tekintsük a kör köré írható négyzetet (amelynek minden oldala érinti a kört). Ezt a négyzetet osszuk fel 16 egybevágó négyzetre. Egy négyzeten belül a legtávolabbi pontok a szemközti csúcsok, távolságuk a Pitagorasz-tétellel meghatározható:

$$\sqrt{2} \cdot 8{,}375 \approx 11{,}844.$$



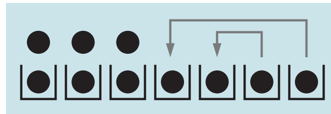
A 16 négyzetben csak úgy lehet 18 nyíl, ha vagy 3, vagy 2-2 egy négyzetbe esik. Bármelyik eset is következik be, lesz 2-2 nyíl, amelyek távolsága biztosan kisebb, mint 11,9 cm.

2025 *a)* Az állítás biztosan teljesül: a skatulyák a hét napjai, a megkérdezettek száma pedig ennél több.

b) Ez az állítás hamis. Képzeljük el például, hogy a sorban egymás után megkérdezettek mindig a következő napot mondják: hétfő, kedd, szerda, csütörtök, péntek, szombat, vasárnap, hétfő, kedd, szerda. Nincs olyan nap, amit háromszor hallottunk volna.

c) Ez a kijelentés is hamis. Ha ugyanis mindenki ugyanazt a napot mondja, akkor nem teljesül.

d) Érdekes módon ez a kijelentés azt kívánja tőlünk, hogy fordítsuk meg a skatulyaelvet. Nem azt kell igazolnunk, hogy legalább mennyi elem kerül egy skatulyába, hanem hogy legfeljebb mennyi kerülhet legalább mennyi skatulyába.



Osszuk szét először a lehető legegyenletesebben az embereket a skatulyákban. Ekkor van három, amelybe 2-2-2 fő került. A leosztást csak úgy tudjuk változtatni, ha valahonnan elveszünk és azt máshova tesszük. Az állítás cáfolatához a kettes skatulyák számát akarjuk növelni, ezért vegyünk el valamelyik egyesből és tegyük is egyesbe. A második után elfogytak az egyes skatulyák, maradt kettő üres. Tovább nem tudjuk csökkenteni a legfeljebb egy főt tartalmazó skatulyák számát. Utolsó állításunk tehát igaz.

Megjegyzés: Más úton hamarabb célhoz érünk a *d)* kijelentésnél. Tételezzük fel az állítás ellenkezőjét, miszerint maximum egy olyan nap van, amit legfeljebb egy fő mond. Ehhez azonban legalább $6 \cdot 2 = 12$ főt kellett volna meginterjúvolnunk, így ez nem teljesülhet. Ha állításunk ellenkezője nem igaz, akkor állításunknak kell igaznak lennie.

Az előbb bemutatott gondolatmenetet *indirekt bizonyításnak* nevezzük.

2026 A feladat megoldásához először azt kell észrevennünk, hogy a négyzetszámok utolsó számjegyei nem lehetnek akármilyen számjegyek. Az utolsó számjegy csak 0, 1, 4, 5, 6, illetve 9 lehet:

$$1^2 = 1,\quad 2^2 = 4,\quad 3^2 = 9,\quad 4^4 = 16,\quad 5^2 = 25,\quad 6^2 = 36,$$
$$7^2 = 49,\quad 8^2 = 64,\quad 9^2 = 81,\quad 10^2 = 100 \quad \text{stb.}$$

A feladat szerint két eset van.

Ha van köztük öttel osztható, akkor annak végződése 0 vagy 5.

Ha nincs köztük öttel osztható, akkor lehetséges végződésnek marad $1, 4, 6, 9$. Ezek között kell lennie kettő azonosnak, hiszen öt számot adtunk meg. A kettő azonos különbsége pedig 10-zel osztható.

2027 Egy szám 7-tel osztva csak 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 maradékot adhat. Másképp fogalmazva $7k + 0$, $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 5$, $7k + 6$ alakú lehet (ahol k egész szám). A 7-tel való oszthatóság szempontjából ezek négyzetei csak $0, 1, 2, 4$ maradékot adhatnak. Közülük a zérus 7-tel osztható számot jelöl, a többi három nem. Így a válasz: $n = 4$. Ugyanis 4 négyzetszám között vagy van 7-tel osztható (0 maradék); vagy ha nincs (1, 2, 4 maradék), akkor a négy szám között van kettő, ami azonos maradékot ad. Ezek különbsége pedig 0 maradékot ad, ami 7-tel osztható számot jelent.

Sorba rendezés I. (különböző elemek) – megoldások

2028 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6.$

2029 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$

2030 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24.$

2031 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24.$

2032 $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120.$

2033 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$

2034 $11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11! = 39\,916\,800.$

Sorba rendezés II. (több típusba tartozó azonos elemek) – megoldások

2035 $\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10.$

2036 $\dfrac{9!}{4!\cdot 5!}=126.$

2037 $\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}=21.$

2038 $\dfrac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 4!}=1260.$

2039 $\dfrac{10!}{4!\cdot 5!\cdot 1!}=1260.$

2040 *a)* $7! = 5040;$ *b)* $\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10;$ *c)* $\dfrac{12!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=39916800.$

2041 $\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10.$

2042 *a)* Robinak $4 + 6 + 2 = 12$ filmje van DVD-n. Ezeket sorba $12! = 479\,001\,600$-féleképpen rendezheti.

b) Előrevéve a vígjátékokat, azokat 4!-féleképp helyezheti el. Utána a sci-fiket 6!, majd a krimiket 2!-féleképpen rendezheti sorba. Mivel a különböző típusú filmek sorrendjei nem függnek egymástól, ezért össze kell őket szoroznunk. Az eredmény: $4!\cdot 6!\cdot 2! = 34\,560$.

c) A *b)* részfeladatban kapott eredményt meg kell szoroznunk még annyival, ahányféleképpen a három típust sorba tudja rakni a polcon. Mivel ez $3!$ lehetőség, így ennél a kérdésnél az eredmény: $3!\cdot 4!\cdot 6!\cdot 2! = 207\,360$.

d) Nincs kikötve, hogy az azonos típusú filmek egymás mellé kerülnek. Ha minden filmet megkülönböztetünk, akkor $12!$-t kapunk. Mivel közöttük 4, 6, illetve 2 azonos van, így ezek maguk közötti sorrendjeit (4!, 6!, 2!) le kell számolnunk: $\dfrac{12!}{4!\cdot 6!\cdot 2!}=13\,860.$

2043 *a)* Sorban az ajtóhoz 4, az ablakhoz 3, a fal mellé 2, a kandalló elé 1 fő ülhet: $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4! = 24$.

b) Ültessük le valahogy a négy főt képzeletben, majd kérjük meg őket, hogy üljenek át eggyel jobbra. Így a feladatban kérdezett asztal körüli sorrendjük nem változott. Mivel minden összeállításban négy egyforma ültetés van, az előző megoldást el kell osztanunk 4-gyel: $3! = 6$.

c) Legyen a négy fő A, B, C, D. Szemeljük ki magunknak A-t, viszonyítsuk hozzá a többieket. A-nak két szomszédja lehet: B és C; vagy B és D; vagy C és D személyében (ekkor a negyedik fő már meghatározott). Ez összesen 3 lehetőség.

2044 *a)* Az első oszlopba egyféleképpen kerülhet egyetlen 1-es. A második oszlopot már $2!$-, a harmadikat $3!$-féleképp tölthetjük ki. Ezek egymástól függetlenek, tehát $3!\cdot 2!\cdot 1! = 12$.

b) A négyfokú lépcsőnél nem változik semmi a gondolatmenetben: $4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1! = 288$.

c) Az eddigiek alapján n fokú lépcsőnél az eredmény: $n!\cdot (n-1)!\cdot \ldots \cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!$.

Megjegyzés: A *c)* részfeladat eredményét később teljes indukcióval igazolhatjuk.

2045 Tegyük fel, hogy Ernőnek eddig n érméje van, mind különböző. Ezeket $n!$-féleképpen teheti sorba. Ha még szerez hozzá kettőt, akkor $n + 2$ érméje lesz, amit $(n + 2)!$-féleképpen tud majd sorba rakni (a két új érmével együtt sem változik az a feltétel, hogy minden érme különböző).

Felírhatunk egy egyszerű egyenletet:

$$20 \cdot n! = (n + 2)!$$

Mivel a faktoriális szorzatot jelent, így a mindkét oldalon meglévő tényezőkkel tudunk egyszerűsíteni:

$$20 = (n + 1) \cdot (n + 2).$$

Mivel a 20 csak $4 \cdot 5$ formában bontható fel két egymást követő pozitív egész szám szorzatára, $n = 3$ a megoldás. Ernőnek tehát eddig összesen három érmét sikerült gyűjtenie. Tényleg nemrég kezdhette.

2046 A felső sarokból az alsó sarokba hat lépésben juthat le a katicabogár. A hat lépés során egyszer fog ferdén előre (a), kétszer ferdén jobbra (b) és háromszor ferdén balra (c) lépni. Minden lejutást egy a, b, b, c, c, c típusú sorozat fog jellemezni, ahol a betűk valamilyen sorrendje szerepel. Ha hat különböző elem lenne, 6! lenne a megoldás, viszont a két b-t 2!, a három c-t 3!-féleképp lehet sorba rakni. Az eredmény tehát $\dfrac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = 60$.

Megjegyzés: A feladat térbeli megfelelője a gyakorlópéldák között található Barnabás-féle 2037. feladatnak.

2047 *a)* Mivel az egyes körcikkeket megkülönböztetjük, így az eredmény $n!$.

b) Ha csak a sorrendre koncentrálunk, akkor az elforgatással egymásba vihető színezések nem különböznek. (Tipikus körberakási feladat.) Azonban a vásznat n-féleképpen forgathatjuk, így az eredmény: $(n - 1)!$.

c) Azt kell észrevennünk, hogy a szomszédság nem változik, ha a körüljárási sorrendet megfordítjuk. Vagyis a *b)* részfeladatban kapott eredményt el kell osztanunk kettővel: $\dfrac{(n-1)!}{2}$.

Megjegyzések: A feladat általánosítása a kör alakú asztalka melletti négy székről szóló feladatnak (2043. feladat).

A *b)* részt úgy is meggondolhatjuk, hogy az egyik szín helyét rögzítjük, majd ahhoz képest színezzük a többit: $(n - 1)!$.

2048 Elsőnek azt kell meggondolnunk, hányféleképpen állíthatjuk elő a kilencet egyesek és kettesek összegeként, majd meg kell számolnunk, hogy az egyes eseteket hányféle különböző sorrendben írhatjuk fel. Végül az összes esetet össze kell adnunk. Például 5 egyes és 2 kettes összegét $\dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$-féle sorrendben állíthatjuk elő. Vigyünk rendszert a felírásba táblázat segítségével.

1-esek száma	9	7	5	3	1
2-esek száma	0	1	2	3	4
Sorrendjük formulával	1	$\dfrac{8!}{7! \cdot 1!}$	$\dfrac{7!}{5! \cdot 2!}$	$\dfrac{6!}{3! \cdot 3!}$	$\dfrac{5!}{1! \cdot 4!}$
Sorrendjük számszerűen	1	8	21	20	5

Hogy a feladatban feltett kérdést megválaszoljuk, össze kell adnunk az utolsó sor számait. A kilencfokú lépcsőt tehát 55-féleképp mászhatjuk meg, ha egyesével vagy kettesével lépkedünk.

2049 Legyen a megvásárolni kívánt érmék száma n. Ekkor az $n + 3$ darab érmét, amiből n, illetve három egyforma,

$$\frac{(n+3)!}{n!\cdot 3!} = \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$$

sorrendben lehet egymás mellé tenni a polcra. (A 84-t az üzleti partnertől tudjuk.) Alakítsuk át az utolsó egyenlőséget:

$$(n + 3)\cdot(n + 2)\cdot(n + 1) = 504.$$

Ha elvégezzük a szorzást, harmadfokú egyenletet kapunk, amelyet nem tudunk megoldani. Azonban most is csak pozitív egészek között keressük az n-t: bontsuk hát prímtényezők szorzatára az 504-et, ha a bal oldal már úgyis szorzat formában van:

$$504 = 2^3\cdot 3^2\cdot 7.$$

A három zárójel olvasható úgy is, hogy három egymás utáni szám szorzata. Ki tudjuk úgy osztani 504 prímtényezőit, hogy ilyen számokat kapjunk? Igen, ránézésre adódik:

$$3^2 = 9 = n + 3,\quad 2^3 = 8 = n + 2,\quad 7 = n + 1.$$

Készen vagyunk, $n = 6$. Ernő tehát összesen 6 érmére alkudozott.

Megjegyzések: Mivel egymás utáni számok szorzatáról van szó, írhattuk volna $(N + 1)\cdot N\cdot(N - 1)$ alakban is őket, ekkor $N = n + 2$. Azonban összeszorozva így is csak egy $N^3 - N$ alakhoz jutunk, ami továbbra is harmadfokú egyenletre vezet.

A feladatot természetesen próbálkozással is megoldhatjuk. Mivel a három tényező közel van egymáshoz, az eredménynek 504 köbgyöke: $\sqrt[3]{504} \approx 7{,}958$ körül kell lennie. Valóban: a középső számnak 8-at kaptunk.

2050 *a)* A feladatban bár szerepel a „legalább” szó, nem érdemes áttérni az ellentett eseményre. Ugyanis 8-nak a fele 4, így nem lenne kevesebb a megvizsgálandó esetek száma.

Elsőként vizsgáljuk meg, hányféleképpen áll elő a 8 három pozitív egész szám összegeként, ahol az egyik szám legalább 4. Készítsünk egy táblázatot. A feltételek mellett a lehetőségek:

Csirkefalat	4	4	4	5	5	6
Szalonna	1	2	3	1	2	1
Gyümölcs	3	2	1	2	1	1
Sorrend a nyárson	$\frac{8!}{4!\cdot 1!\cdot 3!}$	$\frac{8!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}$	$\frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!}$	$\frac{8!}{5!\cdot 1!\cdot 2!}$	$\frac{8!}{5!\cdot 2!\cdot 1!}$	$\frac{8!}{6!\cdot 1!\cdot 1!}$

Az utolsó sorban összegyűjtöttük, hogy az egyes esetekben szereplő ételdarabkákat hányféle sorrendben tűzhetjük a nyársra. A feladat megoldását az alsó sorban levő számok összege adja:

$$280 + 420 + 280 + 168 + 168 + 56 = 1372.$$

Kriszta tehát az általa elkészíteni kívánt nyársat 1372-féleképpen állíthatja össze.

b) Csirkefalatokból:

$$4\cdot(280 + 420 + 280) + 5\cdot(168 + 168) + 6\cdot 56 = 5936$$

darabot kell szeletelnie, ami $10\cdot 5936 = 59\,360$ g $= 59{,}36$ kg.

Szalonnából a szükséges mennyiség:

$$1\cdot 280 + 2\cdot 420 + 3\cdot 280 + 1\cdot 168 + 2\cdot 168 + 1\cdot 56 = 2520$$

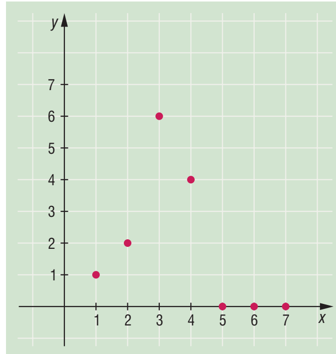
darab, ami $10\cdot 2520 = 25\,200$ g $= 25{,}2$ kg.

Gyümölcsből pontosan annyi darabka kell, mint szalonnából, így tömege is ugyanaz.

2051 *a)* Tudjuk, hogy n különböző elemet $n!$-féleképpen lehet sorba rendezni. Kezdjük el kiszámolgatni őket sorban:

$$1! = \mathbf{1},\quad 2! = \mathbf{2},\quad 3! = \mathbf{6},\quad 4! = 2\mathbf{4},\quad 5! = 12\mathbf{0},$$
$$6! = 72\mathbf{0},\quad 7! = 5\,04\mathbf{0},\quad 8! = 40\,32\mathbf{0},\ \ldots$$

Figyeljük meg, hogy $n = 5$-től mindegyik érték 0-ra végződik. Ez természetes: mivel minden szorzatban vannak páros számok, és legalább egy 5-ös, valamint megjelenik a 10. Így $A = \{0; 1; 2; 4; 6\}$, azaz $|A| = 5$.



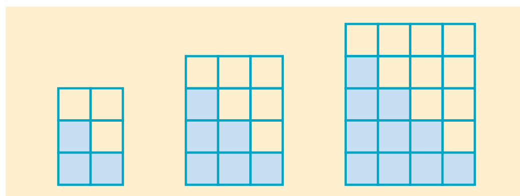
b) Az előző részfeladat alapján már könnyen ábrázoljuk a csak pontokból álló függvényt. A függvény $x = 5$ után minden egész helyen 0 értéket vesz fel.

2052 *a)* Az $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ összeget kell meghatároznunk. Ezt többféle trükkel is megtehetjük. Írjuk például az összeg alá még egyszer ugyanezen értékeket visszafelé, majd adjuk őket össze oszloponként:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n \\ n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 1 \\ \hline n+1 & + & n+1 & + & n+1 & n+1 & \ldots & n+1 & n+1. \end{array}$$

A vonal alatt n-szer szerepel $n + 1$. A keresett összeg ennek fele: $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Másik lehetőség, ha rajzolunk (ha már úgyis lépcsőről van szó). Mindegyik lépcsőt kiegészíthetjük téglalappá, ha elforgatjuk és saját maga mellé illesztjük. A téglalap egyik oldala n, a másik $n + 1$, nekünk viszont csak a fele kell.



Megjegyzések: Később rekurzív sorozatként is hivatkozhatunk a fenti összegre: az n. összeget megkapjuk, ha n-t adunk az $(n – 1)$. összeghez.

Ha tanuljuk majd, használhatjuk a *teljes indukciót* is a megsejtett formula igazolására.

b) Egy n-fokú lépcsőt $n! \cdot (n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \ldots \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$-féleképpen tölthetünk ki számokkal. Írjuk át a szorzatot más alakba, soronként kifejtve a faktoriálisokat:

$$\begin{array}{l} \ \ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \,\cdot \\ \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \,\cdot \\ \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \,\cdot \\ \cdot \vdots \\ \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \,\cdot \\ \cdot 1 \cdot 2 \,\cdot \\ \cdot 1. \end{array}$$

Egy ilyen szorzat egyetlen n, kettő $(n – 1)$, három $(n – 2)$, …, $n – 2$ darab 3-as, $n – 1$ darab 2-es és n darab 1-es tényezőt tartalmaz. Azaz így is írható:

$$n \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)^3 \cdot \ldots \cdot 3^{n-2} \cdot 2^{n-1} \cdot 1^n.$$

Azt, hogy egy szám végén mennyi 0 van, a benne megtalálható 2 és 5 prímtényező-párok száma dönti el. Ebben a szorzatban pontosan öt darab $2 \cdot 5$ párnak kell lennie. Mivel 2-ből mindig több lesz, mint 5-ből, hiszen minden második szám páros, ezért koncentráljunk az 5-re. Még inkább az 5 kitevőjére: pontosan 5-nek kell lennie. Mivel a kitevők egyesével csökkennek, így az ötös előtt még négy számnak kell állnia, tehát $n = 9$. Ellenőrizzük: $9^1 \cdot 8^2 \cdot 7^3 \cdot 6^4 \cdot 5^5 \cdot 4^6 \cdot 3^7 \cdot 2^8 \cdot 1^9$.

Ebben a szorzatban pontosan 5 darab 5-ös prímtényező szerepel. Ezekhez párosítva ketteseket, éppen öt nullára fog végződni a szám. (9-nél kevesebb nem lehet n, mert akkor az 5 kitevője is csökken.)

c) Az előző elgondolás alapján nem lehetséges, hiszen ha eggyel tovább lépünk $n = 10$-re, akkor $10^1 \cdot 9^2 \cdot 8^3 \cdot 7^4 \cdot 6^5 \cdot 5^6 \cdot 4^7 \cdot 3^8 \cdot 2^9 \cdot 1^{10}$ szorzatban van 6 darab 5-ös prímtényező az 5^6-ban, de van egy a 10-ben is. Azaz nem tudunk pontosan 6 darab 5-öst tartalmazó szorzatot készíteni.

Kiválasztás és sorba rendezés I. (különböző elemek) – megoldások

2053 $5 \cdot 4 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = 20.$

2054 $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \dfrac{9!}{(9-5)!} = 15\,120.$

2055 $7 \cdot 6 \cdot 5 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = 210.$

2056 *a)* $21! \approx 5{,}1 \cdot 10^{19}$; *b)* $21 \cdot 20 \cdot 19 = \dfrac{21!}{(21-3)!} = 7\,980.$

2057 $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = \dfrac{36!}{(36-7)!} = 42\,072\,307\,200.$

2058 $20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 = \dfrac{20!}{(20-8)!} = 5\,079\,110\,400.$

2059 $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = \dfrac{30!}{(30-6)!} = 427\,518\,000.$

2060 $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{7!}{(7-4)!} = 840.$

Kiválasztás és sorba rendezés II. (lehetnek azonos elemek is) – megoldások

2061 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243.$

2062 $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729.$

2063 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7 = 2187$ (ha üresen is hagyhat: $4^7 = 16\,384$).

2064 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$

2065 $37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 = 37^5 = 69\,343\,957.$

2066 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81.$

2067 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$

2068 *a)* Panna 4 tisztséget szeretne kiosztani az osztályban (ez nem könnyű feladat). Valamilyen sorrendet felállít a tisztségek között, majd húznak: az első tisztségre 28-ból, a másodikra 27-ből, a harmadikra 26-ból, végül 25-ből választanak. Vagyis:

$$28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = \frac{28!}{(28-4)!} = 491\,400$$

lehetőségük van, ha visszatevés nélkül húznak.

b) Ha visszateszik az éppen kihúzott nevét, akkor ő újra indul a következő választáson is. Ekkor az egyes húzások egymástól függetlenek. A kérdésre:

$$28 \cdot 28 \cdot 28 \cdot 28 = 28^4 = 614\,656$$

lehetőség adódik (bár így az is lehet, hogy egyetlen személy lesz a titkár, a gazdaságis, a kultúros és a sportos).

2069 *a)* Minden tárcsát 7 állapotba forgathatunk egymástól függetlenül, így a válasz:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401.$$

b) Négyjegyű számot akarunk előállítani, vagyis az első jegy nem lehet zérus. Arra marad 6 lehetőség, a többi számjegy viszont akármi lehet. Az eredmény:

$$6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2058.$$

2070 *a)* Ha mindenki másféle fagyit kért, akkor az első 20-féléből választott, a következő 19, aztán 18, 17, 16-féléből választottak (képzeljük úgy, hogy minden fagyiból csak egy gombóc volt). A válasz:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = \frac{20!}{(20-5)!} = 1\,860\,480.$$

b) Ha legalább ketten azonost kértek, akkor kérhettek ketten, hárman, négyen vagy akár öten is egyformát. Még felsorolni is sok eset (bár vannak közöttük egyszerűek). Próbáljuk meg ellenkezőleg! Számoljuk ki, mennyi eset ez összesen (bárki kérhet bármit), majd vonjuk ki azt, amikor mindenki másfajta fagyit kér (az előző eset). Számszerűen:

$$20^5 - \frac{20!}{(20-5)!} = 1\,339\,520.$$

Megjegyzés: Sokszor érdemes az esetek összeszámolásánál áttérnünk az ellenkező, komplementer események összeszámolására. A feladat szövegében a „legalább”, „legfeljebb” szavak árulkodnak általában arról, hogy így könnyebb lesz a feladatot megoldani.

2071 *a)* Ha van kettő, akkor lehet három, négy, öt vagy akár hat egyforma is (ráadásul lehet többféle számjegyből is több). Térjünk át a komplementer eseményre, azaz amikor minden számjegy különböző. Mivel 0-t nem írhatunk az első számjegy helyére, az összes esetek száma:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^5 = 900\,000.$$

Ebből vonjuk le a csak különböző jegyeket tartalmazó hatjegyű számokat:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136\,080$$

(elsőnek 0-t nem írhatunk, másodiknak viszont nem írhatjuk az elsőt, de 0-t igen). A válasz a kettő különbsége: $763\,920$.

b) A hatos számrendszerben hat számjegy van: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ezek közül nem tudunk úgy 12 jegyű számot készíteni, hogy ne legyen legalább egy jegy többször (már hétjegyűt sem tudnánk).

Mivel minden szám ilyen, számoljuk össze őket. Első helyen 0 nem állhat, utána viszont bármi:

$$5 \cdot 6^{11} = 1\,813\,985\,280.$$

c) A 12-es számrendszerben 12 számjegy van. Első helyre 0-t nem írhatunk, másodiknak pedig nem írhatjuk az elsőt, de 0-t már igen. Aztán a felhasznált jegyekkel csökken a további lehetőségek száma:

$$11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 609\,840.$$

Megjegyzés: A *b)* részfeladatban milyen *elvet* használunk?

2072 *a)* 26 betű kétszer, illetve 10 számjegy négyszer alkalmazva, egymástól függetlenül:

$$26^2 \cdot 10^4 = 6\,760\,000.$$

b) A mai rendszámhoz a régiben egy számot betűre cseréltek, azaz eredményünket 10-zel osztanunk és 26-tal szoroznunk kell. Vagyis 2,6-szer több rendszámot lehet (elvileg) az új rendszerben kiadni.

Megjegyzés: Természetesen nem minden kombinációt engedélyeznek a hatóságok, illetve vannak extra rendszámok is (egy betű-öt szám például).

2073 Két megoldást is adunk. Elsőnek kedvezzünk a formulák szerelmeseinek.

I. megoldás. Tételezzük fel, hogy Ernő n darabot állíthat ki érméi közül ($0 < n \le 15$). Ezeket $\dfrac{15!}{(15-n)!}$-féleképpen teheti sorba a vitrinben. Ha eggyel növekszik a kiállítható érmék száma, akkor sorba rakásukra $\dfrac{15!}{\big(15-(n+1)\big)!}$ lehetőség lesz. Adódik egy egyszerű egyenlet, ahol 15!-sal egyszerűsíthetünk, majd mindkét oldalt megszorozhatjuk $\big(15-(n+1)\big)!$-sal:

$$12 \cdot \frac{15!}{(15-n)!} = \frac{15!}{\big(15-(n+1)\big)!},$$

$$\frac{12}{15-n} = 1,$$

$$n = 3.$$

II. megoldás. Ennél jóval egyszerűbb, ha elkezdjük a szorzást elvégezni: az első helyre 15-féle, a másodikra 14-féle stb. érmét tehet Ernő. A kérdés: meddig menjünk el, hogy 12-szeresére növekedjen a szorzat? A válasz: 13-ig, $12 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$. Vagyis Ernő 3 érmét állíthat ki.

2074 Tegyük fel először, hogy p darab betűt (az abc elejéről) és q darab számot (0-val kezdve) akarunk felhasználni egymástól függetlenül. A három betű-három szám kombináció így összesen $p^3 \cdot q^3 = 8000$ lehetőséget ad. Ezt a kétismeretlenes egyenletet kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán.

Bontsuk fel 8000-t prímtényezőkre: $8000 = 2^6 \cdot 5^3$. A kapott szorzatot állítsuk elő két harmadik hatvány szorzataként. A lehetőségek a következők:

p^3	1^3	2^3	$(2\cdot 2)^3$	5^3	$(2\cdot 5)^3$	$(2\cdot 2\cdot 5)^3$
q^3	$(2\cdot 2\cdot 5)^3$	$(2\cdot 5)^3$	5^3	$(2\cdot 2)^3$	2^3	1^3

Mivel q a számjegyeket jelöli, nem lehet 10-nél több. Ezért az első lehetőség kiesik. Marad a (2; 10), (4; 5), (5; 4), (10; 2) és (20; 1) a $(p; q)$ párokra. Tehát öt megoldás is adódik a távoli bolygó távoli kis országának a rendszámtáblák kidolgozására.

Megjegyzések: A p értéke sem lehet 26-nál több, de ez most nem volt érdekes. Az egyenletet *diofantoszi egyenletnek* nevezzük, ha csak egész megoldásokat keresünk. Ha nem jut eszünkbe a 8000 prímtényezőkre bontása, kísérletezéssel is megtalálhatjuk a megoldásokat.

2075 A feladat szövege tartalmazza a „legalább” kifejezést. Ebből azt sejtjük, hogy érdemes áttérni a komplementer eseményre. Az ellentett esemény az, ha a kapus nem végez el egyetlen szabadrúgást sem. Az összes eset pedig, ha bármelyik szabadrúgást bármelyik játékos rúghatja a 11-ből. Vagyis a kérdésre a válasz: $11^5 - 10^5 = 61\,051$-féleképpen végezhették el az öt szabadrúgást a csapat játékosai.

Megjegyzés: Ha nem térünk át a komplementer eseményre, akkor is nekiállhatunk a számításoknak. Vegyük sorba, hány szabadot rúghatott a kapus! Menjünk visszafelé: ha mind az ötöt ő rúgta, azt egyféleképpen tehette meg. Ha négyet, akkor egyet más játékos rúgott: $5 \cdot 10 = 50$ lehetőség. Ha hármat rúgott a kapus, akkor az összesen $\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 10^2 = 1000$ lehetőség. Ha kettőt, akkor majdnem az előzőt kapjuk, $\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 10^3 = 10\,000$. Végül ha csak egyet, akkor $5 \cdot 10^4 = 50\,000$. Ezek összege ismét $61\,051$.

2076 Ha legfeljebb ötöt rúgott a legendás Bekkem, akkor rúghatott 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 szögletet. Ennél jóval egyszerűbb a komplementer eseményt összeszámolni, abban ugyanis csak kettő eset van: ha hat, vagy hét szögletet adott be. Mind a hetet egyféleképpen rúghatta Dávid. Hatot pedig $7 \cdot 9 = 63$-féleképpen (ne feledjük, a hétből egyet rúgott valaki más és Bekkemen kívül még 9 mezőnyjátékos van nagypályán). Azaz eseteink száma:

$$10^7 - (1 + 63) = 9\,999\,936.$$

Megjegyzés: Ha mégis nekiállunk az eredeti esetek összeszámolásához, akkor a

$$9^7 + 7 \cdot 9^6 + \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 9^5 + \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 9^4 + \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 9^3 + \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot 9^2$$

összeget kell meghatároznunk.

2077 Most is érdemes áttérni az ellentett események összeszámolására. (Eredetileg 0, 1, 2, 3 vagy 4 csirkefalat lehet – érdemesebb helyettük 5, 6 vagy 7-t tekinteni.) Ha a nyárson minden falat csirke, azt egyféleképpen állíthatja össze Kriszta. Ha hat, akkor $7 \cdot 2 = 14$ lehetősége van. Ha öt, akkor a lehetőségek száma $\frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot 2^2 = 84$. Ezek összegét kell levonnunk az összes lehetőségből, ami most 3^7 (mivel a nyárs összes helyére háromféle ételből kerülhet egy). Ezek alapján az eredmény:

$$2187 - (1 + 14 + 84) = 2088.$$

Megjegyzés: Nem térve át a komplementerre:

$$2^7 + 7 \cdot 2^6 + \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 2^5 + \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 2^4 + \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 2^3 = 2088.$$

Vegyes feladatok – megoldások

2078 *a)* Ha tavasz van, akkor a madarak csicseregnek.

b) Ha a madarak csicseregnek, akkor tavasz van.

c) Akkor és csak akkor van tavasz, ha a madarak csicseregnek.

2079 *a)* Négy oldala egyenlő; mind a négy szöge 90° és mind a négy oldala 3 cm; mind a négy oldala egyenlő hosszúságú és mind a négy szöge 90°-os.

b) Páros; osztható 24-gyel; osztható 3-mal és 4-gyel.

2080 Skatulyák: percek.

2081 $6! = 720$.

2082 $10! = 3\,628\,800$.

2083 $\dfrac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$.

2084 $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \dfrac{6!}{(2!)^3} = 90$.

2085 $4 \cdot 7 = 28$.

2086 *a)* $32! \approx 2{,}631 \cdot 10^{35}$; *b)* $\dfrac{32!}{(8!)^4} \approx 9{,}956 \cdot 10^{16}$; *c)* $\dfrac{32!}{(4!)^8} \approx 2{,}39 \cdot 10^{24}$.

2087 *a)* $3^8 = 6561$; *b)* $3 \cdot 2^7 = 384$.

2088 $2^{10} = 1024$.

2089 $\dfrac{30!}{(30-6)!} = 427\,518\,000$.

2090 $\dfrac{10!}{(10-4)!} = 5040$.

2091 4 db: $\dfrac{12!}{(12-4)!} = 11\,880$; 3 db: $\dfrac{12!}{(12-3)!} = 1320$; 2 db: $\dfrac{12!}{(12-2)!} = 132$; 1 db: $\dfrac{12!}{(12-1)!} = 12$.

Mindösszesen:

$$11\,880 + 1320 + 132 + 12 = 13\,344.$$

10.2. A GYÖKVONÁS

Racionális számok, irracionális számok – megoldások

2092 *a)* $2{,}625$; *b)* $2{,}3125$; *c)* $4{,}8\dot{3}$;
d) $0{,}58\dot{3}$; *e)* $0{,}\dot{4}\dot{5}$; *f)* $1{,}\dot{4}2857\dot{1}$;
g) $1{,}\dot{5}3846\dot{1}$; *h)* $0{,}\dot{2}94117647058823\dot{5}$.

2093 *a)* $\frac{191}{250}$; *b)* $\frac{21\,973}{10\,000}$; *c)* $\frac{23}{9}$;
d) $\frac{413}{99}$; *e)* $\frac{764}{999}$; *f)* $\frac{172}{225}$;
g) $\frac{757}{990}$; *h)* $\frac{31\,531}{9\,999}$; *i)* $6=\frac{6}{1}$.

2094 Mindegyik bizonyítás indirekt úton történhet.

2095 *a)* A derékszögű háromszög átfogója 2, befogói 1 és $\sqrt{3}$.
b) A derékszögű háromszög befogói 1 és 2, átfogója $\sqrt{5}$.
c) A derékszögű háromszög átfogója 4, az egyik befogója 1, a másik $\sqrt{15}$.
d) A derékszögű háromszög átfogója 5, az egyik befogója 1, a másik $\sqrt{24}$.
e) A derékszögű háromszög befogói 3 és $\sqrt{2}$, átfogója $\sqrt{11}$, ebből 2-t elvesszük.
f) 3-ból elvesszük az *a)* részben szerkesztett $\sqrt{3}$-t.
g) A derékszögű háromszög befogói 2 és $\sqrt{3}$, átfogója $\sqrt{7}$, ezt megfelezzük és elvesszük a 2-ből.
h) A derékszögű háromszög átfogója 8, az egyik befogója 2, a másik $\sqrt{60}$.
i) A derékszögű háromszög befogói 44 és $\sqrt{73}$ (egy másik derékszögű háromszögből szerkeszthető, melynek befogói 8 és 3), az átfogó $\sqrt{2009}$.

2096 *a)* Például: 1,23112311123111123…; 1,23223222322223…; 1,21213213321333…
b) Például: 11,123112311123…; 12,212112111211112…; 13,1331333133331…
c) Például: 31,21221222122221…; 32,213211321113…; 33,3133133313331…

2097 *a)* $\frac{41}{16}=2{,}5625$; a 2009-dik jegy 0. *b)* $\frac{11}{3}=3{,}\dot{6}$; a 2009-dik jegy 6.
c) $\frac{13}{6}=2{,}1\dot{6}$; a 2009-dik jegy 6. *d)* $\frac{5}{9}=0{,}\dot{5}$; a 2009-dik jegy 5.
e) $\frac{25}{7}=3{,}\dot{5}7142\dot{8}$; 6 jegy ismétlődik, mivel $2009 = 334\cdot 6 + 5$, a keresett jegy 2.
f) $\frac{12}{17}=0{,}\dot{7}05882352941176\dot{4}$; 16 jegy ismétlődik, mivel $2009 = 125\cdot 16 + 9$, a keresett jegy 2.

2098 Racionális például: 5,991; 5,992; 5,993.
Irracionális például: 5,9912112111211112…; 5,99232232223…; 5,99565565556…

2099 *a)* Igaz.
b) Hamis, például $(1+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=4$.
c) Igaz.
d) Igaz, például $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}=2$.
e) Hamis, például $(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)=1$.
f) Igaz, lásd az előző példát.
g) Igaz.
h) Hamis, minden racionális szám reciproka racionális.
i) Hamis.

A négyzetgyökvonás azonosságai, alkalmazásaik – megoldások

2100 *a)* $x\ge\frac{1}{2}$; *b)* $x\ge 0$; *c)* $x\le 0$;
d) $x\le\frac{3}{2}$; *e)* $x\in\mathbb{R}$; *f)* $\{\}$;
g) $x<-3$ vagy $x\ge\frac{1}{5}$; *h)* $x\ge\frac{1}{5}$; *i)* $x\ge 2$;
j) $x\le -3$ vagy $2\le x$; *k)* $x\le -1$ vagy $x\ge 1$.

2101 *a)* 6; *b)* 3; *c)* 14;
d) 2; *e)* 5; *f)* 15;
g) 3; *h)* 15; *i)* 3;
j) 25; *k)* 16; *l)* $\frac{1}{7}$;
m) 2401; *n)* 121; *o)* 9;
p) 2; *q)* 12.

2102 *a)* $\sqrt{50}>\sqrt{45}$; *b)* $\sqrt{77}<\sqrt{78}$; *c)* $\sqrt{20}=\sqrt{20}$;
d) $\sqrt{20}<\sqrt{21}$; *e)* $\sqrt{13}<\sqrt{14}$; *f)* $\sqrt{30}=\sqrt{30}$;
g) $\sqrt{23}<\sqrt{24}$; *h)* $\sqrt{27}<\sqrt{30}$; *i)* $\sqrt{\frac{1}{10}}>\frac{1}{5}$.

2103 *a)* $24+11\cdot\sqrt{6}$; *b)* $5\cdot\sqrt{2}+1$; *c)* 1;
d) 12; *e)* 14; *f)* 4;
g) $34-24\cdot\sqrt{2}$; *h)* $48+24\cdot\sqrt{3}$; *i)* $45-20\cdot\sqrt{5}$;
j) $19+4\cdot\sqrt{21}$.

2104 *a)* 2; *b)* 5; *c)* 5;
d) 4; *e)* 5; *f)* 6;
g) 30; *h)* 2; *i)* 56;
j) $2\cdot\sqrt{89}-18$; *k)* $2\cdot\sqrt{41}-12$.

2105 *a)* $\sqrt{75} > \sqrt{72}$; *b)* $\sqrt{108} > \sqrt{98}$; *c)* $\sqrt{500} > \sqrt{486}$;
d) $\sqrt{99} > \sqrt{92}$; *e)* $\sqrt{72} = \sqrt{72}$; *f)* $\sqrt{448} < \sqrt{450}$;
g) $\sqrt{2} = \sqrt{2}$; *h)* $\sqrt{\frac{15}{2}} < \sqrt{\frac{38}{5}}$; *i)* $\sqrt{\frac{7}{10}} > \sqrt{\frac{2}{3}}$;
j) $\sqrt{\frac{7}{3}} < \sqrt{\frac{12}{5}}$.

2106 *a)* 0; *b)* $6\cdot\sqrt{3}$; *c)* 0; *d)* $\sqrt{2}$; *e)* $\sqrt{3}$; *f)* 1;
g) 2; *h)* 47; *i)* 17; *j)* $3\cdot\sqrt{a}$; *k)* 0; *l)* $14\cdot\sqrt{2x}$.

2107 *a)* $\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}$; *b)* $\frac{9\cdot\sqrt{2}}{2}$; *c)* $4\cdot\sqrt{3}$;
d) $3\cdot\sqrt{7}$; *e)* $\frac{\sqrt{6}}{4}$; *f)* $\frac{2\cdot\sqrt{3}}{5}$;
g) $\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}$; *h)* $\frac{13\cdot\sqrt{10}}{30}$; *i)* $\frac{y\cdot\sqrt{x}}{x}$, $x>0$;
j) $\frac{5\cdot\sqrt{x}}{2}$, $x>0$; *k)* $\frac{a\cdot\sqrt{y}}{3y}$, $y>0$; *l)* $\frac{\sqrt{y}}{5}$, $y>0$.

2108 *a)* $8\cdot(\sqrt{5}-2)$; *b)* $6\cdot(\sqrt{3}+1)$; *c)* $-5\cdot(2+\sqrt{7})$;
d) $2\cdot(\sqrt{6}-1)$; *e)* $2\cdot(2\cdot\sqrt{3}+1)$; *f)* $11\cdot(3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{17})$;
g) $2\cdot(4\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{3})$; *h)* $5\cdot\sqrt{7}+6\cdot\sqrt{3}$; *i)* $19+6\cdot\sqrt{10}$;
j) $\frac{5\cdot(\sqrt{x}-1)}{x-1}$, $x\ge 0$; *k)* $\frac{a\cdot(\sqrt{a}+1)}{a-1}$, $a\ge 0, a\ne 1$; *l)* $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$, $x, y>0, x\ne y$.

2109 *a)* $2-3\cdot\sqrt{2}$; *b)* $6+\sqrt{3}$; *c)* $\frac{7-\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}} = \frac{7\cdot\sqrt{5}-5}{10}$;
d) 1; *e)* $5+\sqrt{21}$; *f)* 34;
g) $-\frac{4}{11}$; *h)* $\frac{3\cdot\sqrt{a}+1}{a-1}$, $a\ge 0, a\ne 1$; *i)* $\frac{2\cdot\sqrt{x}-6}{x-1}$, $x\ge 0, x\ne 1$;
j) $\frac{5-3\cdot\sqrt{y}}{y-1}$, $y\ge 0, y\ne 1$.

2110 *a)* $\sqrt{5}$; *b)* $\sqrt{15}$; *c)* $\sqrt{\frac{1}{10}}$; *d)* $\sqrt{6}$; *e)* $\sqrt{x^3}$; *f)* $\sqrt{y^5}$;
g) $\sqrt{12a^5b}$; *h)* $\sqrt{ab}$; *i)* $\sqrt{b^3}$.

2111 A nevezőt gyöktelenítve:
a) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \sqrt{6}+\sqrt{5}$, ezért $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} < 2\cdot\sqrt{6}$;
b) $\frac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}} = 2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}$, ezért $3\cdot\sqrt{3} < \frac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}$.

2112 *a)* Gyöktelenítés után:

$$\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2\cdot(20-2\cdot\sqrt{84})}{4}=\frac{(10+2\cdot\sqrt{21})\cdot 2\cdot(10-\sqrt{84})}{4}=$$

$$=\frac{(10+\sqrt{84})\cdot(10-\sqrt{84})}{2}=\frac{100-84}{2}=\frac{16}{2}=8.$$

b) A nevező átalakításával:

$$\left(\frac{6}{\sqrt{5}+2}+\frac{2}{2\cdot(\sqrt{5}-2)}\right)\cdot(10+7\cdot\sqrt{5})=(7\cdot\sqrt{5}-10)\cdot(7\cdot\sqrt{5}+10)=49\cdot 5-100=145.$$

2113 A behelyettesítés előtt végezzünk átalakításokat:

a) $$\frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}=\frac{(\sqrt{x}+2)\cdot(\sqrt{x}-3)+(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+3)}{x-9}=\frac{2x-12}{x-9}=\frac{29}{22};$$

b) $$\frac{3\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}-5}+\frac{3\cdot\sqrt{x}-1}{5+2\cdot\sqrt{x}}=\frac{(3\cdot\sqrt{x}+1)\cdot(2\cdot\sqrt{x}+5)+(3\cdot\sqrt{x}-1)\cdot(2\cdot\sqrt{x}-5)}{4x-25}=$$

$$=\frac{12x+10}{4x-25}=-\frac{62}{121}.$$

2114 A bal oldali tört nevezőjét gyöktelenítsük:

$$\frac{125+51\cdot\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}=\frac{(125+51\cdot\sqrt{6})\cdot(5+\sqrt{6})}{25-6}=49+20\cdot\sqrt{6}.$$

A jobb oldalon levő nevezőt gyöktelenítés után emeljük négyzetre:

$$\left(\frac{1}{5-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2=(5+2\cdot\sqrt{6})^2=49+20\cdot\sqrt{6}.$$

2115 Mivel $\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{(2x-3)^2}=|2x-3|$, ezért:

a) $|2x-3|=2x-3$, ha $x\ge\frac{3}{2}$;

b) $|2x-3|=3-2x$ ha $x\le\frac{3}{2}$.

2116 *a)* A háromszög oldalai: $a=3$; $b=\sqrt{72}=6\cdot\sqrt{2}$; $c=9$ egység.

b) A két befogó $\sqrt{15}$ és $\sqrt{210}$ egység, az átfogó 15 egység.

c) A Pitagorasz-tétel alapján:

$$c^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x\cdot(2x+1)}\right)^2,$$

ahonnan:

$$c^2=4x^2+4x+1,$$
$$c^2=(2x+1)^2,$$
$$c=2x+1.$$

Mivel $x\in\mathbb{N}^+$, az átfogó hossza pozitív egész szám.

2117 *a)* Gyöktelenítsük a törtek nevezőit:

$$A=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}=\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+2;$$

$$B=\frac{\sqrt{20}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{20}-\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}=2\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{10}-2\cdot\sqrt{6}+4.$$

Nézzük a két kifejezés különbségét:

$$A-B=-\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{10}+3\cdot\sqrt{6}-2=\left(3\cdot\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)+\left(3\cdot\sqrt{6}-2\right)>0.$$

Mert mindkét zárójelben pozitív szám áll.

Tehát $A>B$.

b) Egyszerűsítsünk:

$$A=5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3};$$

$$B=\frac{20-4\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{10-2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{\left(10-2\cdot\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{2}}{2}=5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}.$$

Tehát $A=B$.

c) Hozzunk létre a gyökök alatt teljes négyzeteket:

$$A=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(4-2\cdot\sqrt{3}\right)}=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}};$$

$$B=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(4+2\cdot\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

Tehát $A=B$.

2118 Vegyük észre a gyökök alatt a teljes négyzeteket:

$$\sqrt{35+2\cdot\sqrt{34}}-\sqrt{35-2\cdot\sqrt{34}}=\sqrt{\left(\sqrt{34}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{34}-1\right)^2}=$$
$$=\left|\sqrt{34}+1\right|-\left|\sqrt{34}-1\right|=2.$$

2119 *a)* Gyöktelenítsük a nevezőket:

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3},\quad \text{és}\quad b=2+\sqrt{3}.$$

Behelyettesítés:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{9-3}+\frac{3-\sqrt{3}}{9-3}=1.$$

b) Előbb a nevezők gyöktelenítésével hozzuk egyszerűbb alakra az eredeti kifejezést:

$$\frac{(1+a)\cdot\left(1-\sqrt{1+a}\right)}{1-(1+a)}+\frac{(1-a)\cdot\left(1+\sqrt{1-a}\right)}{1-(1-a)}=$$

$$=\frac{1+a-\sqrt{1+a}-a\cdot\sqrt{1+a}-1+a-\sqrt{1-a}+a\cdot\sqrt{1-a}}{-a}=$$

$$=\frac{-2a+a\cdot\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}}{a}. \qquad (1)$$

Mielőtt helyettesítenénk, számítsuk ki a két kritikus kifejezést:

$$\sqrt{1-a}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2};$$

$$\sqrt{1+a}=\ldots=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Ezeket az eredményeket írjuk be (1)-be:

$$\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.$$

2120 *a)* A törtek és gyökök miatt $a\neq 0,\ a\neq b,\ b>0.$

$$\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a^2\cdot b^5}}{a\cdot(b-a)^2\cdot\sqrt{b^3}}=\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-|a|\cdot b^2\cdot\sqrt{b}}{a\cdot(b-a)^2\cdot b\cdot\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{a^2-|a|\cdot b}{a\cdot(b-a)^2}=\begin{cases}\dfrac{a\cdot(a-b)}{a\cdot(b-a)^2}=\dfrac{1}{a-b}, & \text{ha}\quad a>0,\\[2ex] \dfrac{a\cdot(a+b)}{a\cdot(b-a)^2}=\dfrac{a+b}{(b-a)^2}, & \text{ha}\quad a<0.\end{cases}$$

b) A gyök miatt $a\geq 0$, a tört miatt $a-5\cdot\sqrt{a}+6\neq 0$. Helyettesítsünk: $x=\sqrt{a}$.

$$x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=$$
$$=x\cdot(x-2)-3\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x-3),$$

tehát $a\neq 4,\ a\neq 9$.

A számlálót is alakítsuk szorzattá:

$$x^2-x-2=x^2+x-2x+2=$$
$$=x\cdot(x+1)-2\cdot(x+1)=(x+1)\cdot(x-2).$$

Visszahelyettesítve az eredeti tört:

$$\frac{(\sqrt{a}+1)\cdot(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)\cdot(\sqrt{a}-3)}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-3}.$$

c) A gyökök és a törtek is értelmezhetők, ha $x>a^2$ és $a\neq 0$. A zárójelen belül hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}\right)^2}{x-(x-a^2)}-\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}\right)^2}{x-(x-a^2)}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\frac{x+x-a^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}-x-x+a^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}{a^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\frac{-4\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}{a^2}=-\frac{4x}{a^2}.$$

d) A gyökök és a törtek értelmezéséhez az kell, hogy $a \geq 0,\ b \geq 0$ és $a \neq b$ teljesüljön. Előbb a számlálóban hozzunk közös nevezőre, majd próbáljunk egyszerűsíteni.

$$\frac{\dfrac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{a\cdot b}}{a-b}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}-a\cdot\sqrt{b}-b\cdot\sqrt{a}}{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\cdot(a-b)-\sqrt{b}\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1.$$

2121 Az utolsó szorzatot írjuk át az $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ azonosság alapján:

$$2009\cdot 2011 = 2010^2-1.$$

Ezzel a kifejezés:

$$\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot\sqrt{1+2008\cdot 2010}}}.$$

Alkalmazzuk újra az előző módszert:

$$\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot\sqrt{1+2008\cdot 2010}}}=\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot 2009}}=$$

$$=\sqrt{1+2006\cdot 2008}=2007.$$

2122 *a)* Előbb a gyökök alatti kifejezéseket hozzuk egyszerűbb alakra:

$$x-3=\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}-3=\frac{a^4+8a^2+16}{4a^2}=\frac{(a^2+4)^2}{4a^2};$$

$$x-7=\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}-7=\frac{a^4-8a^2+16}{4a^2}=\frac{(a^2-4)^2}{4a^2}.$$

Ezek után helyettesítsünk:

$$f(a)=\sqrt{\frac{(a^2+4)^2}{4a^2}}+\sqrt{\frac{(a^2-4)^2}{4a^2}}=\frac{a^2+4}{2\cdot|a|}+\frac{|a^2-4|}{2\cdot|a|}.$$

A feltételek miatt $|a|=a$ és $|a^2-4|=4-a^2$,

$$f(a)=\frac{a^2+4}{2a}+\frac{4-a^2}{2a}=\frac{8}{2a}=\frac{4}{a}.$$

b) Kövessük az előbbi módszert:

$$1-\frac{a^2}{x^2}=1-\frac{a^2}{\dfrac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4b^2}}=1-\frac{4a^2\cdot b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{a^4+2a^2\cdot b^2+b^4-4a^2\cdot b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2},$$

ezt behelyettesítve:

$$g(x)=\frac{2b^2}{a^2+b^2}-\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}}=\frac{2b^2}{a^2+b^2}-\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}.$$

Ebből:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{3b^2-a^2}{a^2+b^2}, & \text{ha} \quad a\ge b,\\[2ex] \dfrac{2b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, & \text{ha} \quad b>a.\end{cases}$$

c) Előbb csak az (x^2-1)-et írjuk fel a-val:

$$x=\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}},$$

$$x^2-1=\frac{(a+1)^2}{4a}-1=\frac{a^2+2a+1-4a}{4a}=\frac{(a-1)^2}{4a}.$$

Gyöktelenítsük $h(x)$ nevezőjét:

$$h(x)=\frac{2\cdot\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{2\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-(x^2-1)}=2\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),$$

ebbe az alakba helyettesítsünk be:

$$h(x)=2\cdot\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4a}}\cdot\left(\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4a}}\right)=2\cdot\frac{|a-1|}{2\cdot\sqrt{a}}\cdot\left(\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\frac{|a-1|}{2\cdot\sqrt{a}}\right).$$

Ebből:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}\cdot\left(\dfrac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\dfrac{a-1}{2\cdot\sqrt{a}}\right)=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2a}{2\cdot\sqrt{a}}=a-1, & \text{ha} \quad a\ge 1,\\[2ex] \dfrac{1-a}{\sqrt{a}}\cdot\left(\dfrac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\dfrac{1-a}{2\cdot\sqrt{a}}\right)=\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2}{2\cdot\sqrt{a}}=\dfrac{1-a}{a}, & \text{ha} \quad 0<a<1.\end{cases}$$

2123 Vizsgáljuk meg a k-adik tagot:

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$

Az összeg tagjait átírva:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=9,$$

ugyanazok a tagok pozitív és negatív előjellel is megjelennek,

$$\sqrt{n}-1=9,$$

$$n=100.$$

2124 Alakítsuk át $f(x)$-et a számláló gyöktelenítésével:

$$f(x)=\sqrt{x^2+100}-\sqrt{x^2+1}=\frac{(x^2+100)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+100}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{99}{\sqrt{x^2+100}+\sqrt{x^2+1}}.$$

Az $f(x)$ függvény páros, mert $f(x)=f(-x)$.

Ha $x\ge 0$ a függvény szigorúan monoton csökken, maximuma van, ha $x=0$, ekkor $f(0)=9$.

Mivel $f(x)>0$, a lehetséges egész értékek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (ezeket két helyen veszi fel) és a 9.

Tehát összesen $8\cdot 2+1=17$ helyen vesz fel egész értéket.

Számok *n*-edik gyöke, a gyökvonás azonosságai – megoldások

2125 *a)* 3; *b)* -1; *c)* -2; *d)* -4;
e) 3; *f)* 5; *g)* 10; *h)* 7;
i) -7; *j)* 10; *k)* -100; *l)* 2;
m) 4; *n)* 2; *o)* -4; *p)* 8;
q) $-\frac{3}{4}$; *r)* $-\frac{2}{3}$; *s)* $-\frac{1}{10}=-0{,}1$; *t)* $\frac{1}{2}$;
u) $0{,}3$; *v)* $\frac{5}{2}$; *w)* $\frac{2}{3}$.

2126 *a)* x; *b)* $|a|$; *c)* b; *d)* $-x$;
e) $|x|$; *f)* x^2; *g)* x^7; *h)* x^3;
i) x^4; *j)* a^2; *k)* $|x^5|$; *l)* $|x^5|$;
m) $-4x^5$; *n)* $27x^3$; *o)* $|x|$.

2127 *a)* 15; *b)* 6; *c)* 12; *d)* 15;
e) $2b$; *f)* $\frac{xy}{2}$; *g)* 2; *h)* $\frac{4}{3}$;
i) $2x$; *j)* $2xy\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{27}}$.

2128 *a)* 3; *b)* 4; *c)* 5; *d)* -2;
e) 2; *f)* 3; *g)* -2; *h)* -1.

2129 *a)* $\sqrt[3]{184}<\sqrt[3]{189}$; *b)* $\sqrt[3]{135}<\sqrt[3]{136}$; *c)* $\sqrt[3]{1377}>\sqrt[3]{1375}$; *d)* $\sqrt[4]{405}>\sqrt[4]{400}$;
e) $\sqrt[4]{1024}<\sqrt[4]{1053}$; *f)* $\sqrt[5]{3159}<\sqrt[5]{3168}$.

2130 *a)* 0; *b)* 0; *c)* 0; *d)* $5\cdot\sqrt[4]{2}$;
e) $4x\cdot\sqrt[3]{x}$; *f)* $4x\cdot\sqrt[4]{x^3}$; *g)* $6a\cdot\sqrt[5]{a}$; *h)* $6a^3\cdot\sqrt[3]{a}$.

2131 *a)* $\sqrt[12]{7^5}$; *b)* $\sqrt[12]{7^7}$; *c)* $\sqrt[10]{3^3}$; *d)* $\sqrt[8]{2^7}$;
e) $a\ge 0$, $\sqrt[6]{a^8}=\sqrt[3]{a^4}$; *f)* $b\in\mathbb{R}$, $\sqrt[9]{b^7}$; *g)* $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt[35]{x^{16}}$; *h)* $x\ge 0$, $\sqrt[12]{x^{10}}=\sqrt[6]{x^5}$;
i) $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt[75]{x^{54}}=\sqrt[25]{x^{18}}$; *j)* $x\ge 0$, $\sqrt[6]{x^{13}}$; *k)* $x>0$, $\sqrt[12]{\frac{1}{x}}$; *l)* $x>0$, $\sqrt[20]{x^{33}}$;
m) $x>0$, $\sqrt[60]{x^{31}}$.

2132 *a)* $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$; *b)* $2\cdot\sqrt[4]{3^3}$; *c)* $3\cdot\sqrt[5]{5^4}$; *d)* $5\cdot\sqrt[4]{3}$;
e) $5\cdot\sqrt[5]{5^3}$; *f)* $6\cdot\sqrt[6]{2^5}$; *g)* $\frac{5\cdot\sqrt[3]{a^2}}{3}$; *h)* $\frac{3\cdot\sqrt[3]{a}}{2}$;
i) $\frac{7\cdot\sqrt[5]{a^2}}{6a}$.

2133 *a)* $\sqrt[3]{2}$; *b)* $\sqrt{2}$; *c)* $\sqrt[3]{3}$; *d)* $\sqrt{10}$;
e) $\sqrt{2x^2y^9z^3}$; *f)* $\sqrt[5]{a^2b^3c^4}$; *g)* $\sqrt{2a^4b^6c^3}$.

2134 Egyrészt $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}.$

Alakítsunk ki közös gyökkitevőket:

$$\sqrt{2} = \sqrt[30]{2^{15}}, \qquad \sqrt[3]{3} = \sqrt[30]{3^{10}}, \qquad \sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^{6}}.$$

Elég összehasonlítani a gyök alatti hatványokat:

$$5^6 = 25^3 < 32^3 = 2^{15} = 8^5 < 9^5 = 3^{10}.$$

Tehát növekvő sorrendben:

$$\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}.$$

2135 *a)* Igaz.

b) Hamis, mert $\sqrt[4]{(-11)^4} = 11.$

c) Hamis, mert $\sqrt[5]{a^{15}} = a^3.$

d) Hamis, mert $\sqrt[3]{(-a)^{12}} = (-a)^4 = a^4.$

2136 A bal oldalon:

$$\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2} + \sqrt{4 - 4x + x^2} = \sqrt[3]{(x-1)^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} = x - 1 + |x| + |x-2|.$$

a) $x - 1 + |x| + |x-2| = x + 1,$ ha $0 \le x \le 2.$

b) $x - 1 + |x| + |x-2| = 3x - 3,$ ha $x \ge 2.$

c) $x - 1 + |x| + |x-2| = 1 - x,$ ha $x \le 0.$

2137 *a)* Értelmezés: $x \ne \pm 1.$ A gyökjel alá bevitel után használjuk fel, hogy $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2 = \sqrt[3]{x^4}.$

$$\frac{x\cdot\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} + 3\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x\cdot\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} + 3\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^4}-1} = \sqrt[3]{x^2} + 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}+1} = \frac{\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)^2 + 3}{\sqrt[3]{x^2}+1}.$$

Egyszerűbb alakban:

$$\frac{\sqrt[3]{x^4} + 2\cdot\sqrt[3]{x^2} + 4}{\sqrt[3]{x^2}+1} = \frac{x\cdot\sqrt[3]{x} + 2\cdot\sqrt[3]{x^2} + 4}{\sqrt[3]{x^2}+1}.$$

b) Értelmezés: $a - x > 0$ és $a + x > 0.$

A zárójelben lévő kifejezést hozzuk közös nevezőre:

$$\frac{a\cdot(a+x) - x\cdot(a-x) - 2x^2}{\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}} = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}} = \frac{(a-x)\cdot(a+x)}{\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}} = \sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}.$$

Az eredeti kifejezés:

$$\frac{\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}}{\sqrt[4]{(a-x)\cdot(a-x)\cdot(a+x)}} = \frac{\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt[4]{a+x}} = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt[4]{a+x}} = \sqrt[4]{\frac{(a+x)^2}{(a+x)}} = \sqrt[4]{a+x}.$$

c) Értelmezés: $a \ge 0;\ x \ge 0;\ a \ne x.$

Első lépésben alakítsuk a zárójelben lévő törtet:

$$\frac{a + \sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ax}} = \frac{\sqrt[4]{a}\cdot\left(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{x^3}\right)}{\sqrt[4]{a}\cdot\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x}\right)} = \frac{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{ax} + \sqrt[4]{x^2}\right)}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{ax} + \sqrt[4]{x^2}.$$

Az első tört is egyszerűsíthető:

$$\frac{a - x}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \sqrt{a} + \sqrt{x}.$$

Az eredetibe behelyettesítve:

$$\sqrt{a} + \sqrt{x} - \left(\sqrt[4]{a^2} - 2\cdot\sqrt[4]{ax} + \sqrt[4]{x^2}\right) = 2\cdot\sqrt[4]{ax}.$$

d) Értelmezés: $a \geq 0$; $b \geq 0$; $x \geq 0$; de a és x egyszerre nem lehet 0.
A zárójelben lévő törtet alakítsuk:

$$\frac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt[4]{bx}\cdot\left(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{a^2}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\sqrt[4]{bx}.$$

Ezt beírva, és elvégezve a négyzetre emelést:

$$\frac{4\cdot\sqrt{bx}+bx+3}{\sqrt{bx}+3}=\frac{\left(\sqrt{bx}+3\right)\cdot\left(\sqrt{bx}+1\right)}{\sqrt{bx}+3}=\sqrt{bx}+1.$$

2138 *a)* A gyök alatti kifejezéseket alakítsuk teljes négyzetté:

$$\sqrt[4]{17+12\cdot\sqrt{2}}-\sqrt[4]{17-12\cdot\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt[4]{\left(3-2\cdot\sqrt{2}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{3+2\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}.$$

Alkalmazzuk az előző módszert:

$$\sqrt{3+2\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=$$
$$=\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=2.$$

b) Legyen $\sqrt[4]{a+b\cdot\sqrt{c}}-\sqrt[4]{a-b\cdot\sqrt{c}}=x$ pozitív egész szám.

$$x^2=\sqrt{a+b\cdot\sqrt{c}}+\sqrt{a-b\cdot\sqrt{c}}-2\cdot\underbrace{\sqrt[4]{a^2-b^2c}}_{\text{a feltétel miatt 1}},$$
$$x^2+2=\sqrt{a+b\cdot\sqrt{c}}+\sqrt{a-b\cdot\sqrt{c}},$$
$$(x^2+2)^2=a+b\cdot\sqrt{c}+a-b\cdot\sqrt{c}+2\cdot\underbrace{\sqrt{a^2-b^2c}}_{\text{a feltétel miatt 1}},$$
$$(x^2+2)^2=2a+2.$$

Eredményünk szerint x páros szám.
Legyen $x=2k$, $x\in\mathbb{N}^+$.

$$(x^2+2)^2=(4k^2+2)^2=16k^4+16k^2+4=2a+2,$$

amiből:

$$a-1=8k^4+8k^2=8k^2\cdot(k^2+1).$$

Mivel k^2 és k^2+1 szomszédos számok, a szorzatuk páros, ezek szerint $16\mid a-1$.
Tehát az a szám 16-tal osztva 1-et ad maradékul.

Vegyes feladatok – megoldások

2139 *a)* Igaz.
b) Igaz.
c) Igaz.
d) Hamis, az 1-nél kisebb számok esetén nem.
e) Hamis, a –1-nél kisebb számok esetén nem.
f) Igaz.
g) Hamis: $\sqrt[18]{3^8}<\sqrt[18]{3^9}$.
h) Igaz.

2140 a) $a \in \mathbb{R}$; b) $b \geq 0$; c) $c \in \mathbb{R}$; d) $d \leq 0$; e) $x \geq 0$.

2141 a) $\sqrt[20]{5^5} > \sqrt[20]{4^4}$; b) $\sqrt[6]{2^2} < \sqrt[6]{3^3}$; c) $\sqrt[6]{2^9 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{2^9 \cdot 3^2}$.

2142 a) 33; b) 6; c) $1 + 4 \cdot \sqrt{15}$;
d) $6 \cdot \sqrt[3]{9}$; e) -1; f) 2;
g) $\sqrt[60]{\dfrac{1}{a}}$; h) $\sqrt[3]{x^4} - 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2x - 1$; i) $\dfrac{4 \cdot \sqrt{a}}{a-1}$.

2143 a) $\sqrt[6]{243}$; b) $\sqrt[6]{500}$; c) $\sqrt[30]{5^{31}}$;
d) $\sqrt[6]{\dfrac{2}{3}}$; e) $\sqrt[12]{\left(\dfrac{6}{5}\right)^5}$; f) $\sqrt[10]{54}$;
g) $\sqrt[6]{b}$; h) $\sqrt[12]{\dfrac{b^3}{a}}$.

2144 a) $5 + 5 \cdot \sqrt[6]{5} - 5 \cdot \sqrt[4]{5}$; b) $\sqrt[12]{2^{11}}$; c) $a - a \cdot \sqrt[6]{a} + a \cdot \sqrt[4]{a}$.

2145 Mivel $a = \dfrac{10}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = 2 \cdot \left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)$, behelyettesítve $a^2 - 4 \cdot \sqrt{7} \cdot a = -20$.

2146 Ha a befektetést b-vel, a hasznot h-val, az arányossági tenyezőt pedig q-val jelöljük:

$$h = q \cdot \sqrt[3]{b}.$$

a) Az $500 = q \cdot \sqrt[3]{1\,000\,000}$ egyenletből: $q = 5$.

b) $h = 5 \cdot \sqrt[3]{2\,000\,000} \approx 630$ Ft.

c) Az $1500 = 5 \cdot \sqrt[3]{b}$ egyenletből: $b = 300^3 = 27\,000\,000$ Ft.

2147 a) A fonálinga lengésideje $\dfrac{t_1}{t} = \dfrac{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{2l}{g}}}{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}}} = \sqrt{2}$-szeresére növekszik.

b) A fonálinga lengésideje $\dfrac{t_1}{t} = \dfrac{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{\frac{1}{3} \cdot l}{g}}}{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$-szorosára csökken.

c) Ha $t_1 = 3t$, akkor $\dfrac{3t}{t} = \dfrac{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l_1}{g}}}{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}}}$, amiből $3 = \sqrt{\dfrac{l_1}{l}}$, vagyis $l_1 = 9l$.

Tehát a fonálinga hosszát 9-szeresére kell növelnünk, ha a lengésidejét meg akarjuk háromszorozni.

2148 *a)* H tartalmazza az egész számokat, a kifejezés értéke a, ha $b = 0$.

b) Legyen $x = a + b \cdot \sqrt{2}$, $y = c + d \cdot \sqrt{2}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ekkor:

$$x + y = (a + c) + (b + d) \cdot \sqrt{2} \in H,$$
$$x \cdot y = (ac + 2bd) + (ad + bc) \cdot \sqrt{2} \in H.$$

c) A megadott szám eleme H-nak, mert:

$$\sqrt{27 - 10 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{25 - 10 \cdot \sqrt{2} + 2} = \sqrt{\left(5 - \sqrt{2}\right)^2} = |5 - \sqrt{2}| = 5 + (-1) \cdot \sqrt{2} \in H.$$

d) A szám reciproka:

$$\frac{1}{a + b \cdot \sqrt{2}} = \frac{a - b \cdot \sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2} \cdot \sqrt{2}.$$

Akkor kapunk egész számokat, ha a törtek nevezőinek értéke 1 vagy –1. Ennek megfelelő a és b értékek, például $a = 3$, $b = 2$ vagy $a = 7$, $b = 5$, természetesen ezek ellentettjei is megoldások:

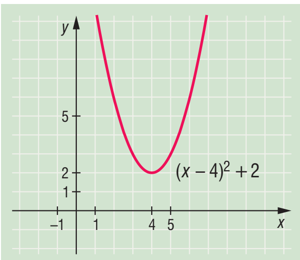
$$\frac{1}{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} = 3 - 2 \cdot \sqrt{2}; \qquad \frac{1}{7 - 5 \cdot \sqrt{2}} = -7 - 5 \cdot \sqrt{2}.$$

10.3. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

A másodfokú egyenlet és függvény – megoldások

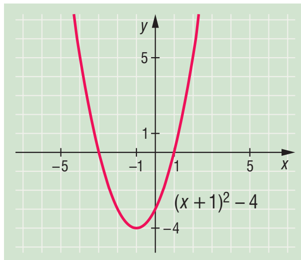
2149 *a)* $(x-1)^2+3$; *b)* $(x-3)^2+1$; *c)* $(x+2)^2-3$; *d)* $(x-6)^2-25$;
e) $(x+8)^2-60$; *f)* $(x-10)^2-93$; *g)* $(x-1{,}5)^2-0{,}25$; *h)* $(x+2{,}5)^2-5{,}25$;
i) $2\cdot(x-2)^2+5$; *j)* $3\cdot(x-2)^2-5$; *k)* $-(x+5)^2+27$; *l)* $-(x-4)^2+19$.

2150 *a)*



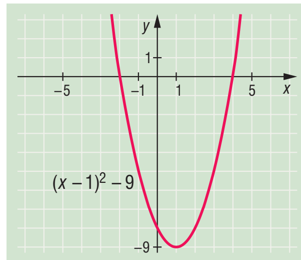
Zérushelye nincs.
Minimum értéke: $y=2$,
helye: $x=4$.

b)



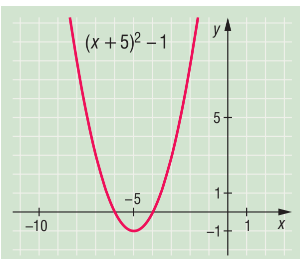
Zérushely: $x_1=-3$, $x_2=1$.
Minimum értéke: $y=-4$,
helye: $x=-1$.

c)



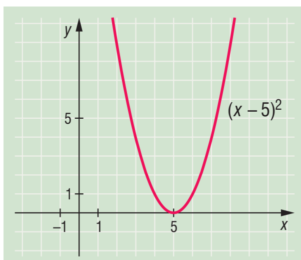
Zérushely: $x_1=4$, $x_2=-2$.
Minimum értéke: $y=-9$,
helye: $x=1$.

d)



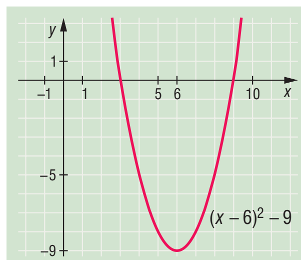
Zérushely: $x_1=-6$, $x_2=-4$.
Minimum értéke: $y=-1$,
helye: $x=-5$.

e)



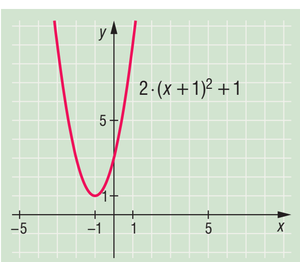
Zérushely: $x=5$.
Minimum értéke: $y=0$,
helye: $x=5$.

f)



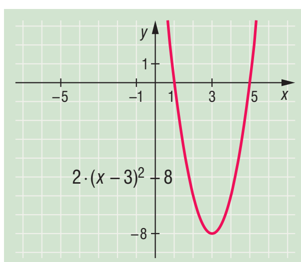
Zérushely: $x_1=3$, $x_2=9$.
Minimum értéke: $y=-9$,
helye: $x=6$.

g)



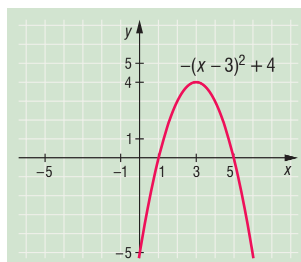
Zérushelye nincs.
Minimum értéke: $y=1$,
helye: $x=-1$.

h)



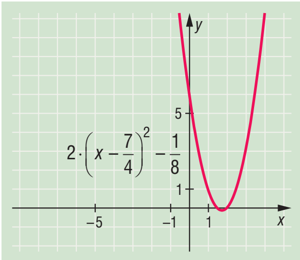
Zérushely: $x_1=1$, $x_2=5$.
Minimum értéke: $y=-8$,
helye: $x=3$.

i)



Zérushely: $x_1=1$, $x_2=5$.
Maximum értéke: $y=4$,
helye: $x=3$.

j)

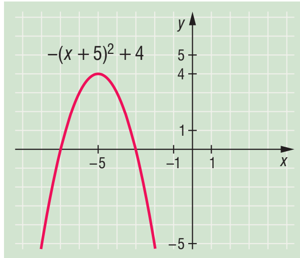


Zérushely: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 2$.

Minimum értéke: $y = -\frac{1}{8}$,

helye: $x = \frac{7}{4}$.

k)

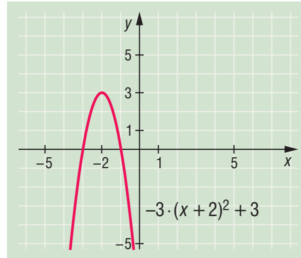


Zérushely: $x_1 = -7$, $x_2 = -3$.

Maximum értéke: $y = 4$,

helye: $x = -5$.

l)



Zérushely: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$.

Maximum értéke: $y = 3$,

helye: $x = -2$.

2151 *a)* $a(x) = x^2 - 1$, zérushelyek: $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$.

b) $b(x) = (x+1)^2 + 1$, nincs zérushely.

c) $c(x) = (x-2)^2$, zérushely: $x = 2$.

d) $d(x) = (x+3)^2 - 1$, zérushelyek: $x_1 = -4$ és $x_2 = -2$.

e) $e(x) = (x-4)^2 - 1$, zérushelyek: $x_1 = 3$ és $x_2 = 5$.

f) $f(x) = (x+2)^2 - 4$, zérushelyek: $x_1 = 0$ és $x_2 = -4$.

g) $g(x) = 2\cdot(x-1)^2 - 2$, zérushelyek: $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$.

h) $h(x) = -(x+4)^2 + 9$, zérushelyek: $x_1 = -1$ és $x_2 = -7$.

2152 *a)* $f(x) = (x+3)^2 + c - 9$.

Nincs zérushely, ha $c > 9$. Egy zérushely van, ha $c = 9$. Két zérushely van, ha $c < 9$.

b) $g(x) = (x-4)^2 + c - 16$.

Nincs zérushely, ha $c > 16$. Egy zérushely van, ha $c = 16$. Két zérushely van, ha $c < 16$.

c) $h(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + c - \frac{25}{4}$.

Nincs zérushely, ha $c > \frac{25}{4}$. Egy zérushely van, ha $c = \frac{25}{4}$. Két zérushely van, ha $c < \frac{25}{4}$.

2153 *a)* $x^2 - 14x + p = (x-7)^2 - 49 + p$ minden valós helyen pozitív, ha $p > 49$.

b) $2x^2 - 6x + p = 2\cdot\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + p$ minden valós helyen pozitív, ha $p > \frac{9}{2}$.

c) $5x^2 - 8x + p = 5\cdot\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{16}{5} + p$ minden valós helyen pozitív, ha $p > \frac{16}{5}$.

2154 *a)* $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$. Tehát $b = -4$; $c = 5$.

b) $f(x) = (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Tehát $b = -10$; $c = 25$.

c) $f(x) = (x+3)^2 - 3 = x^2 + 6x + 6$. Tehát $b = 6$; $c = 6$.

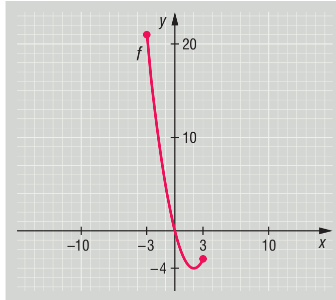
2155 $f(x) = (x-2)^2 - 4$, a függvény grafikonja az ábrán látható.

a) Az adott intervallumon egy zérus helyvan: $x = 0$.

b) Az adott intervallumon maximum található az $x = -3$ helyen, értéke: $y = 21$.

Minimum az $x = 2$ helyen van, értéke: $y = -4$.

c) A függvény szigorúan monoton csökken, ha $x \in [-3; 2]$, növekszik, ha $x \in [2; 3]$.



2156 *a)* $2 \cdot 3^2 - b \cdot 3 + 18 = 0$, ebből $b = 12$.

b) $f(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{8} + 18$. Nincs zérushely, ha $18 - \frac{b^2}{8} > 0$, $-12 < b < 12$.

c) $f(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{8} + 18$. $\frac{b}{4} = 1$, tehát $b = 4$ esetén lesz az $x = 1$ helyen a minimum, ekkor $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 + 16$, a minimum érték 16 és nem 10. Tehát nincs a feltételnek megfelelő b.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete – megoldások

2157 *a)* $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; *b)* $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 5$; *c)* $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 3$;
d) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}$; *e)* $x_1 = 20$, $x_2 = -20$; *f)* $x_1 = 12$, $x_2 = -12$;
g) $x_1 = 13$, $x_2 = -13$; *h)* nincs megoldás; *i)* $x_1 = 10$, $x_2 = -10$;
j) $x_1 = 7$, $x_2 = -7$; *k)* $x_1 = 4$, $x_2 = -4$; *l)* $x_1 = 11$, $x_2 = -11$.

2158 *a)* $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; *b)* $x_1 = 0$, $x_2 = -7$; *c)* $x_1 = 0$, $x_2 = -3$;
d) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$; *e)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{15}{4}$; *f)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$;
g) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{9}{7}$; *h)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{17}{3}$.

2159 *a)* $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; *b)* $x_1 = 2$, $x_2 = -6$; *c)* $x_1 = -2$, $x_2 = -6$;
d) $x_1 = -3$, $x_2 = -9$; *e)* nincs megoldás; *f)* $x_1 = -1$, $x_2 = -9$;
g) $x_1 = 1$, $x_2 = -9$; *h)* $x_1 = 3$, $x_2 = 13$; *i)* $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.

2160 *a)* $x_1 = -4$, $x_2 = 1$; *b)* $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; *c)* $x_1 = 5$, $x_2 = 3$;
d) $x_1 = -3$, $x_2 = 7$; *e)* $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{3}{2}$; *f)* $x = 5$;
g) $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{3}{2}$; *h)* $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$; *i)* $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{2}{3}$;
j) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -4$; *k)* $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = \frac{5}{3}$; *l)* nincs megoldás;

m) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$; *n)* $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$; *o)* $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = -\frac{1}{7}$;

p) $x = 7$; *q)* $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{4}{3}$; *r)* $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{7}{4}$.

2161 *a)* $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; *b)* $x_1 = 4$, $x_2 = -5$; *c)* $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$;

d) $x_1 = 1$, $x_2 = -4$; *e)* $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{5}$; *f)* $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -8$;

g) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$; *h)* $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{8}$; *i)* $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{3}{2}$;

j) $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{5}{2}$; *k)* $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; *l)* $x_1 = 3$, $x_2 = -1$;

m) $x_1 = 2$, $x_2 = -15$; *n)* $x_1 = 3$, $x_2 = -1$; *o)* $x = -5$;

p) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

2162 *a)* $x \neq 5$ és $x \neq -5$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $2x^2 - 50 = 0$. Nincs megoldás.

b) $x \neq 4$ és $x \neq -4$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $x^2 - 6x + 8 = 0$.
Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $x = 2$.

c) $x \neq \frac{1}{3}$ és $x \neq -\frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $6x^2 + 4x + 1 = 0$. Nincs megoldás.

d) $x \neq \frac{1}{2}$ és $x \neq -\frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $x^2 - 3x - 10 = 0$.
Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $x_1 = 5$ és $x_2 = -2$.

e) $y \neq \pm 2$, $y \in \mathbb{R}^-$. Átalakítás után:

$$1 - \frac{6-y}{3\cdot(y+2)\cdot(y-2)} = \frac{-2}{y-2}.$$

Rendezve: $3y^2 + 7y - 6 = 0$, amiből: $y_1 = \frac{2}{3}$ és $y_2 = -3$.
Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $y = -3$.

f) $a \neq \pm 3$, $a \in \mathbb{R}^+$. Átalakítás után:

$$\frac{24+12a}{(a+3)\cdot(a-3)} - \frac{5a}{a+3} - \frac{a+7}{a-3} = 0.$$

Rendezve: $6a^2 - 17a - 3 = 0$, amiből: $a_1 = 3$ és $a_2 = -\frac{1}{6}$.
Az egyenletnek az adott számhalmazon nincs megoldása.

g) $b \neq \pm 2$, $b \in \mathbb{Q}$. Átalakítás után:

$$\frac{16+2b}{3\cdot(b+2)\cdot(b-2)} - \frac{b-1}{2\cdot(b+2)} - \frac{2b+1}{3\cdot(b-2)} = 0.$$

Rendezve: $7b^2 - 3b - 22 = 0$, amiből: $b_1 = 2$ és $b_2 = -\frac{11}{7}$.

Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $b = -\frac{11}{7}$.

h) $d \neq 0,\ d \neq \pm 2,\ d \in \mathbb{N}$. Átalakítás után:

$$\frac{4}{d\cdot(d+2)} = \frac{d}{(d+2)\cdot(d-2)} - \frac{1}{d\cdot(d-2)}.$$

Rendezve: $d^2 - 5d + 6 = 0$, amiből: $d_1 = 3$ és $d_2 = 2$.

Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $d = 3$.

i) $e \neq 5,\ e \neq -2,\ e \in \mathbb{N}$. Átalakítás után:

$$\frac{21}{(e-5)^2} - \frac{2e}{e-5} + \frac{3\cdot(2+e)}{e+2} = 0.$$

Rendezve: $e^2 - 20e + 96 = 0$, amiből: $e_1 = 12$ és $e_2 = 8$.

Az egyenletnek mindkét gyöke megoldás az adott számhalmazon.

j) $y \neq -1,\ y \neq 3,\ y \in \mathbb{Z}^-$. Átalakítás után:

$$\frac{y}{y-3} - \frac{2}{y+1} - \frac{4y}{(y-3)\cdot(y+1)} = 0.$$

Rendezve: $y^2 - y - 6 = 0$, amiből: $y_1 = 3$ és $y_2 = -2$.

Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $y = -2$.

2163 Az egyenlet diszkriminánsa: $16 - 20c$.

a) Két különböző valós megoldás van, ha $16 - 20c > 0$, vagyis $c < \frac{4}{5}$.

b) Egy valós megoldás van, ha $16 - 20c = 0$, vagyis $c = \frac{4}{5}$.

c) Nincs valós megoldás, ha $16 - 20c < 0$, vagyis $c > \frac{4}{5}$.

2164 *a)* $a\cdot(-3)^2 + 6\cdot(-3) - 1 = 0$, ha $a = \frac{19}{9}$.

b) Az egyenlet diszkriminánsa: $36 + 4a$.

Egy valós megoldás van:

I. Ha az egyenlet elsőfokú: $a = 0$, ekkor $x = \frac{1}{6}$.

II. Ha $a \neq 0$, $D = 36 + 4a = 0$, vagyis $a = -9$. Ebben az esetben $x = \frac{1}{3}$.

c) Két különböző valós megoldás van, ha $a \neq 0$ és $36 + 4a > 0$, vagyis ha $a > -9$, de $a \neq 0$.

d) Nincs valós megoldás, ha $36 + 4a < 0$, vagyis ha $a < -9$.

2165 Az egyenlet diszkriminánsa $(2m+1)^2 - 4m\cdot(m-3) = 16m + 1$.

a) Egy valós megoldás van:

I. Ha az egyenlet elsőfokú, azaz $m = 0$, ekkor $x = -3$.

II. Ha $m \neq 0$, a diszkrimináns $16m + 1 = 0$, amiből $m = -\frac{1}{16}$.

Az egyenlet: $-\frac{1}{16}\cdot x^2 - \frac{14}{16}\cdot x - \frac{49}{16} = 0$, a megoldása $x = -7$.

b) Két megoldás van, ha $16m + 1 > 0$, azaz $m > -\frac{1}{16}$, de $m \neq 0$.

c) Nincs megoldás, ha $16m + 1 < 0$, azaz $m < -\frac{1}{16}$.

2166 Vizsgáljuk meg az egyenlet diszkriminánsát:

$$D = 4 \cdot (5k + 3)^2 - 20 \cdot (5k^2 + 6k + 1) = 16.$$

Eredményünk azt mutatja, hogy könnyen megkaphatjuk az egyenlet gyökeit:

$$x_1 = \frac{2 \cdot (5k+3)+4}{10} = \frac{10k+10}{10} = k+1 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{2 \cdot (5k+3)-4}{10} = \frac{10k+2}{10} = k+\frac{1}{5}.$$

A gyökök különbsége: $x_1 - x_2 = \frac{4}{5}$, valóban független k-tól.

2167 Ha van valós gyök, akkor az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív:

$$D = 4 \cdot (a - b + c)^2 - 12 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \ge 0.$$

Átalakítva:

$$4 \cdot [(a - b + c)^2 - 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)] = -8 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc).$$

Teljes négyzeteket kialakítva:

$$D = -4 \cdot [(a + b)^2 + (a - c)^2 + (b + c)^2],$$

ez a kifejezés soha nem pozitív, csak akkor van megoldás, ha 0-val egyenlő.

Ekkor $a + b = 0$, $a - c = 0$ és $b + c = 0$.

Mindhárom feltétel teljesül, ha $a = c = -b$.

Ekkor a c helyére a-t, és b helyére $(-a)$-t helyettesítve és 3-mal osztva azt az egyenletet kapjuk, hogy $a^2x^2 + 2ax + 1 = 0$, ahol $a \ne 0$.

Az egyenlet egyetlen megoldása $x = -\frac{1}{a}$.

A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés – megoldások

2168 *a)* $(x - 2) \cdot (x + 3)$; *b)* $(x + 4) \cdot (x + 3)$; *c)* $(x - 5) \cdot (x + 7)$;
d) $(x + 10) \cdot (x + 6)$; *e)* $(x - 8)^2$; *f)* nincs megfelelő szorzat;
g) $(2x + 3) \cdot (x - 3)$; *h)* $2 \cdot (x + 7)^2$; *i)* $(3x + 2) \cdot (x + 2)$;
j) $(2x - 1) \cdot (3x + 5)$; *k)* $(3 - 2x) \cdot (x + 6)$; *l)* $(4 - 3x) \cdot (4x + 1)$.

2169 *a)* $x^2 - 7x + 12 = 0$; *b)* $x^2 - 5x - 14 = 0$; *c)* $x^2 + 9x + 18 = 0$;
d) $x^2 + 4x - 5 = 0$; *e)* $x^2 - 36 = 0$; *f)* $x^2 - 33x + 252 = 0$;
g) $x^2 + 4x = 0$; *h)* $6x^2 - 7x + 2 = 0$; *i)* $15x^2 + x - 2 = 0$;
j) $20x^2 + 19x + 3 = 0$; *k)* $30x^2 + 19x - 28 = 0$; *l)* $72x^2 - 41x - 91 = 0$.

2170 Például:
a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; *b)* $x^2 + 2x - 3 = 0$; *c)* $3x^2 + x - 2 = 0$;
d) $4x^2 + 7x + 3 = 0$; *e)* $13x^2 - 35x + 22 = 0$; *f)* $x^2 - 3 = 0$;
g) $x^2 - 4x + 1 = 0$; *h)* $x^2 - 14x + 31 = 0$.

2171 *a)* $\frac{x^2+7x+12}{x^2+2x-8} = \frac{(x+4)\cdot(x+3)}{(x+4)\cdot(x-2)} = \frac{x+3}{x-2}$; *b)* $\frac{3x^2-13x-10}{2x^2-7x-15} = \frac{(3x+2)\cdot(x-5)}{(2x+3)\cdot(x-5)} = \frac{3x+2}{2x+3}$;

c) $\frac{2x^2+3x-5}{2x^2+11x+15} = \frac{(2x+5)\cdot(x-1)}{(2x+5)\cdot(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}$; *d)* $\frac{10x^2-13x-3}{-8x^2+14x-3} = \frac{(5x+1)\cdot(2x-3)}{(3-2x)\cdot(4x-1)} = \frac{5x+1}{1-4x}$.

2172 *a)* $x_1 + x_2 = -\dfrac{5}{2}$;

b) $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{1}{2}$;

c) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = 5$;

d) $x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = \dfrac{29}{4}$;

e) $x_3 + x_4 = -(x_1 + x_2) = \dfrac{5}{2}$, $x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{1}{2}$, az egyenlet: $2x^2 - 5x - 1 = 0$.

f) Ha $x_3 = x_1 - 2$ és $x_4 = x_2 - 2$, akkor:

$$x_3 + x_4 = x_1 + x_2 - 4 = -\frac{13}{2} \qquad \text{és} \qquad x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot (x_1 + x_2) + 4 = \frac{17}{2}.$$

Az egyenlet: $2x^2 + 13x + 17 = 0$.

2173 *a)* Az $x_1{}^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2{}^2$ kifejezést átalakítva: $x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2)$, majd ebbe helyettesítve a Vieté-formulákkal kapott eredményeket $(x_1 + x_2 = -7;\ x_1 \cdot x_2 = 12)$ kapjuk, hogy:

$$x_1{}^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2{}^2 = -84.$$

Vegyük észre, hogy $x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$. Ebbe helyettesítsük a Viéte-formulákkal kapott eredményeket $(x_1 + x_2 = -7;\ x_1 \cdot x_2 = 12)$. Így kapjuk, hogy:

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = 25.$$

b) Hasonlóan az *a)* feladathoz, kapjuk, hogy:

$$x_1{}^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2{}^2 = \frac{3}{2} \qquad \text{és} \qquad x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{25}{4}.$$

c) Hasonlóan az *a)* feladathoz, kapjuk, hogy:

$$x_1{}^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2{}^2 = \frac{15}{4} \qquad \text{és} \qquad x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{29}{4}.$$

2174 Az $x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$ átalakítást elvégezve, az egyenletbe helyettesítjük a Viéte-formulákkal kapott eredményeket $(x_1 + x_2 = -p;\ x_1 \cdot x_2 = -15)$, így kapjuk, hogy:

$$34 = (-p)^2 - 2 \cdot (-15), \quad \text{amiből} \quad p = \pm 2.$$

2175 Oldjuk meg a megfelelő egyenleteket paraméteresen, és alakítsuk szorzattá:

a) $\dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2} = \dfrac{(x + y) \cdot (x - 3y)}{(x - y) \cdot (x - 3y)} = \dfrac{x + y}{x - y}$;

b) $\dfrac{2x^2 + 5xy - 3y^2}{2x^2 + 3xy - 2y^2} = \dfrac{(2x - y) \cdot (x + 3y)}{(2x - y) \cdot (x + 2y)} = \dfrac{x + 3y}{x + 2y}$;

c) $\dfrac{x^2 + (3 - 2y) \cdot x - 6y}{x^2 - (1 + 2y) \cdot x + 2y} = \dfrac{(x - 2y) \cdot (x + 3)}{(x - 2y) \cdot (x - 1)} = \dfrac{x + 3}{x - 1}$;

d) $\dfrac{6x^2 + (15 + 4y) \cdot x + 10y}{6x^2 + (4y - 9) \cdot x - 6y} = \dfrac{(3x + 2y) \cdot (2x + 5)}{(3x + 2y) \cdot (2x - 3)} = \dfrac{2x + 5}{2x - 3}$.

2176 A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = p^2 - 2q,$$

$$y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 \cdot x_2 - 3x_1 \cdot x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) =$$
$$= (-p)^3 - 3q \cdot (-p) = -p^3 + 3p \cdot q.$$

A keresett egyenlet együtthatói szintén felírhatók a gyökökkel, ezért a megfelelő egyenlet:

$$y^2 - [(p^2 - 2q) + (3p \cdot q - p^3)] \cdot y + (p^2 - 2q) \cdot (3p \cdot q - p^3) = 0.$$

Felbontva a zárójeleket:

$$y^2 + (p^3 - p^2 - 3p \cdot q + 2q) \cdot y - p^5 + 5p^3 \cdot q - 6p \cdot q^2 = 0.$$

Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek, másodfokú egyenletrendszerek – megoldások

2177 *a)* $x^2 = 4$: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; vagy $x^2 = 1$: $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

b) $x^2 = 9$: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; vagy $x^2 = 1$: $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

c) $x^2 = 4$: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; vagy $x^2 = -5$: nincs megoldása.

d) $x^2 = 9$: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; vagy $x^2 = -1$: nincs megoldása.

e) $x^2 = 25$: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$; vagy $x^2 = -5$: nincs megoldása.

f) $x^2 = -4$ vagy $x^2 = -7$: nincs megoldása.

g) $x^2 = \frac{1}{4}$: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; vagy $x^2 = \frac{1}{16}$: $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = -\frac{1}{4}$.

h) $x^2 = \frac{1}{25}$: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$; vagy $x^2 = -3$: nincs megoldása.

i) $x^3 = -1$: $x_1 = -1$; vagy $x^3 = 8$: $x_2 = 2$.

j) $x^3 = 27$: $x_1 = 3$; vagy $x^3 = 1$: $x_2 = 1$.

k) $x^3 = -1$: $x_1 = -1$; vagy $x^3 = -8$: $x_2 = -2$.

l) $x^3 = -1$: $x_1 = -1$; vagy $x^3 = 5$: $x_2 = \sqrt[3]{5}$.

2178 *a)* $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{7}{4}$;

b) $x_1 = 8$, $y_1 = 4$; $x_2 = 3$, $y_2 = -1$;

c) $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -\frac{8}{3}$, $y_2 = \frac{23}{9}$;

d) $x_1 = 1$, $y_1 = -1$; $x_2 = -\frac{13}{10}$, $y_2 = -\frac{73}{50}$;

e) $x_1 = 5$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 5$;

f) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = -\frac{3}{2}$, $y_2 = -4$;

g) $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 6$, $y_2 = \frac{1}{3}$;

h) $x_1 = -\frac{1}{4}$, $y_1 = 8$; $x_2 = -2$, $y_2 = 1$;

i) $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = -3$, $y_2 = 1$;

j) $x_1 = \frac{8}{5}$, $y_1 = -\frac{31}{5}$; $x_2 = -4$, $y_2 = 5$.

2179 *a)* Ha $a = (x-2)^2$ az egyenlet: $a^2 - 5a + 4 = 0$. Megoldásai: $a = 1$ és $a = 4$.
Visszahelyettesítve: $(x-2)^2 = 1$, amiből $x_1 = 3$, $x_2 = 1$;
$(x-2)^2 = 4$, amiből $x_3 = 0$, $x_4 = 4$.

b) A $b = (x+3)^2$ helyettesítéssel: $b^2 - 7b - 18 = 0$, aminek megoldásai: $b_1 = 9$, $b_2 = -2$.
Visszahelyettesítve: $(x+3)^2 = 9$, ahonnan $x_1 = 0$, $x_2 = -6$;
$(x+3)^2 = -2$, aminek nincs megoldása.

c) A $c = (x+5)^2$ helyettesítéssel: $c^2 - 13c - 48 = 0$, aminek megoldásai: $c_1 = 16$, $c_2 = -3$.
Visszahelyettesítve: $(x+5)^2 = 16$, amiből $x_1 = -1$, $x_2 = -9$;
$(x+5)^2 = -3$, aminek nincs megoldása.

d) A $d = (x-3)^2$ helyettesítéssel: $36d^2 - 13d + 1 = 0$, aminek megoldásai: $d_1 = \frac{1}{4}$, $d_2 = \frac{1}{9}$.
Visszahelyettesítve: $(x-3)^2 = \frac{1}{4}$, amiből $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$;
$(x-3)^2 = \frac{1}{9}$, amiből $x_3 = \frac{10}{3}$, $x_4 = \frac{8}{3}$.

2180 *a)* Az $a = x^2 + 6x$ helyettesítéssel: $a \cdot (a+4) - 77 = 0$, aminek megoldásai: $a_1 = 7$, $a_2 = -11$.
Visszahelyettesítve: $x^2 + 6x = 7$, amiből $x_1 = 1$, $x_2 = -7$;
$x^2 + 6x = -11$, aminek nincs megoldása.

b) A $b = x^2 - 4x$ helyettesítéssel: $b \cdot (b-3) - 10 = 0$, aminek megoldásai: $b_1 = 5$, $b_2 = -2$.
Visszahelyettesítve: $x^2 - 4x = 5$, amiből $x_1 = 5$, $x_2 = -1$;
$x^2 - 4x = -2$, amiből $x_3 = 2 + \sqrt{2}$, $x_4 = 2 - \sqrt{2}$.

c) Az egyenlet átalakítható: $(x^2 - 2x)^2 - 11 \cdot (x^2 - 2x) + 24 = 0$.
A $c = x^2 - 2x$ helyettesítéssel: $c^2 - 11c + 24 = 0$, aminek megoldásai: $c_1 = 8$, $c_2 = 3$.
Visszahelyettesítve: $x^2 - 2x = 8$, amiből $x_1 = 4$, $x_2 = -2$;
$x^2 - 2x = 3$, amiből $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

2181 *a)* Az első egyenletbe helyettesítve a másodikat: $-8 - 2x + y = 2$, ebből y-t kifejezve és behelyettesítve a második egyenletbe: $x^2 + 5x + 4 = 0$, ebből $x_1 = -1$, $y_1 = 8$; $x_2 = -4$, $y_2 = 2$.

b) Az első egyenlethez hozzáadva a második 4-szeresét: $13x^2 = 117$, ebből: $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = 3$, $y_2 = -1$; $x_3 = -3$, $y_3 = 1$; $x_4 = -3$, $y_4 = -1$.

c) Az elsőből helyettesítve a másodikba, beszorzás után: $x^2 - 17x + 30 = 0$, ebből $x_1 = 15$, $y_1 = -10$; $x_2 = 2$, $y_2 = 3$.

d) A másodikból helyettesítve az elsőbe, beszorzás után: $2y^2 + 3y - 2 = 0$, ebből: $x_1 = 1$, $y_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 6$, $y_2 = -2$.

e) Az első egyenletből a másodikba helyettesítve az $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ egyenlet adódik, ebből $x_1 = 4$, $y_1 = -2$; $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; $x_3 = 2$, $y_3 = -4$; $x_4 = -2$, $y_4 = 4$.

f) Az első egyenletből a másodikba helyettesítve az $x^4 - 3x^2 - 54 = 0$ egyenlet adódik, ebből $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; $x_2 = -3$, $y_2 = -2$.

g) Összeadva az egyenleteket: $2x^2 + 2x = 60$, megoldva és visszahelyettesítve: $x_1 = 5$, $y_1 = 1$; $x_2 = 5$, $y_2 = -2$; $x_3 = -6$, $y_3 = 1$; $x_4 = -6$, $y_4 = -2$.

h) A két egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva és elosztva az elsőt a másodikkal: $\frac{x}{y} = -4$, ezt visszahelyettesítve: $x_1 = -4$, $y_1 = 1$; $x_2 = 4$, $y_2 = -1$.

2182 *a)* Mivel az $x = 0$ nem megoldás, eloszthatjuk mindkét oldalt x^2-tel:

$$2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

Helyettesítsük az $y = x + \frac{1}{x}$-et, ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Az egyenlet: $2 \cdot (y^2 - 2) - 9y + 14 = 0$. A megoldásai: $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = 2$.

Visszahelyettesítve: $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$. A megoldásai: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$;

$x + \frac{1}{x} = 2$. A megoldása: $x_3 = 1$.

b) Mivel az $x = 0$ nem megoldás, eloszthatjuk mindkét oldalt x^2-tel:

$$6 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Helyettesítsük az $y = x + \frac{1}{x}$-et, ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Az egyenlet: $6 \cdot (y^2 - 2) - 5y - 38 = 0$. A megoldásai: $y_1 = \frac{10}{3}$, $y_2 = -\frac{5}{2}$.

Visszahelyettesítve: $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$. A megoldásai: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$;

$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$. A megoldásai: $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

2183 *a)* Ha megvizsgáljuk az egyenletet, kiderül, hogy az $x_1 = 1$ megoldás, ennek megfelelően alakítsuk:

$$x^2 \cdot (x - 1) - x \cdot (x - 1) - 12 \cdot (x - 1) = 0,$$
$$(x - 1) \cdot (x^2 - x - 12) = 0.$$

A szorzat másik tényezője is lehet 0: $x^2 - x - 12 = 0$. A megoldásai: $x_2 = 4$, $x_3 = -3$.

b) Az egyenlet egyik megoldása az $x_1 = -1$. Alakítsuk szorzattá:

$$x^2 \cdot (x + 1) - x \cdot (x + 1) - 6 \cdot (x + 1) = 0,$$
$$(x + 1) \cdot (x^2 - x - 6) = 0.$$

Ha a másik tényező 0: $x^2 - x - 6 = 0$, aminek a megoldásai: $x_2 = 3$, $x_3 = -2$.

c) Az egyenlet egyik megoldása az $x_1 = 2$. Alakítsuk szorzattá:

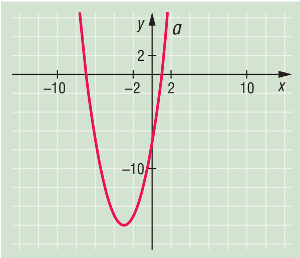
$$x^2 \cdot (x - 2) + 9x \cdot (x - 2) + 20 \cdot (x - 2) = 0,$$
$$(x - 2) \cdot (x^2 + 9x + 20) = 0.$$

A második tényezőből: $x^2 + 9x + 20 = 0$, aminek a megoldásai: $x_2 = -4$, $x_3 = -5$.

Másodfokú egyenlőtlenségek – megoldások

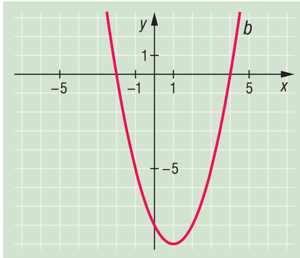
2184 *a)* $x < -7$ vagy $x > 7$; *b)* $-10 \le x \le 10$; *c)* $x \le -6$ vagy $x \ge 6$;
d) $-20 < x < 20$; *e)* $x \in \mathbb{R}$; *f)* nincs megoldás;
g) $-\sqrt{15} \le x \le \sqrt{15}$; *h)* $x \le -\sqrt{7}$ vagy $x \ge \sqrt{7}$; *i)* $x \le -3$ vagy $0 \le x$;
j) $-\frac{5}{2} < x < 0$; *k)* $x < 0$ vagy $x > \frac{8}{3}$; *l)* $0 \le x \le 5$.

2185 *a)*



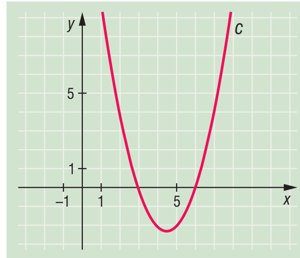
$-7 < x < 1$;

b)



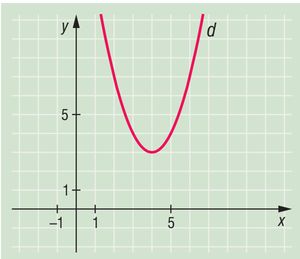
$x \leq -2$ vagy $4 \leq x$;

c)



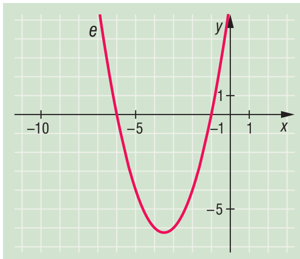
$3 < x < 6$;

d)



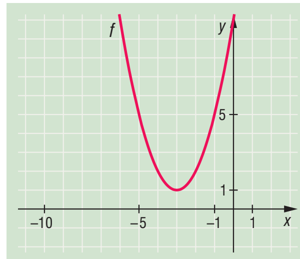
nincs megoldás;

e)



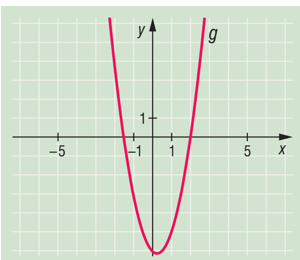
$x < -6$ vagy $-1 < x$;

f)



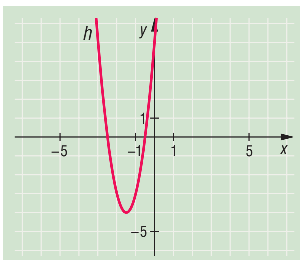
$x \in \mathbb{R}$;

g)



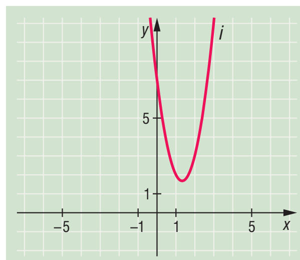
$-\dfrac{3}{2} \leq x \leq 2$;

h)



$-\dfrac{5}{2} < x < -\dfrac{1}{2}$;

i)

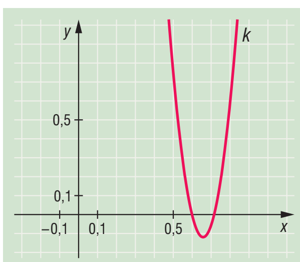


$x \in \mathbb{R}$;

j)

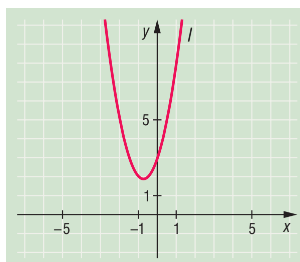
$x < -\dfrac{2}{5}$ vagy $-\dfrac{1}{3} < x$;

k)



$\dfrac{3}{5} \leq x \leq \dfrac{5}{7}$;

l)



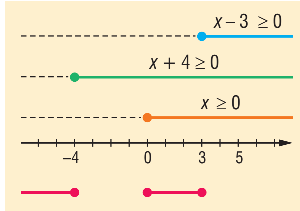
nincs megoldás.

2186 *a)* $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$; *b)* $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$;
c) $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; *d)* minden egész szám megoldás;
e) $\{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$; *f)* $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$;
g) $\{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$; *h)* $\{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$;
i) $\{-12; -11; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

2187 *a)* Az x kiemelése utáni másodfokú kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$x^3 + x^2 - 12x = x \cdot (x+4) \cdot (x-3) \le 0.$$

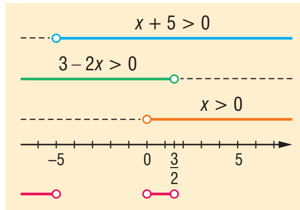
A megoldás: $x \le -4$ vagy $0 \le x \le 3$.



b) Az x kiemelése utáni másodfokú kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$-2x^3 - 7x^2 + 15x = x \cdot (3-2x) \cdot (x+5) > 0.$$

A megoldás: $x < -5$ vagy $0 < x < \dfrac{3}{2}$.

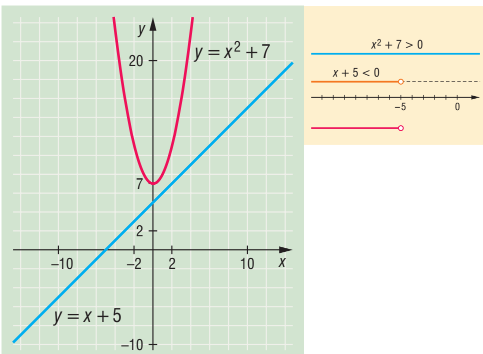


c) $x^2 \le -8$ vagy $x^2 \ge 4$, az elsőnek nincs megoldása, a másodikból: $x \le -2$ vagy $2 \le x$.

d) $1 < x^2 < 9$, amiből $-3 < x < -1$ vagy $1 < x < 3$.

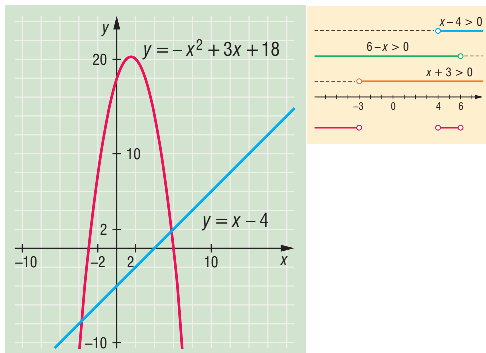
2188 *a)* A nevező: $x^2 + 7 > 0$.

A megoldás: $x < -5$.



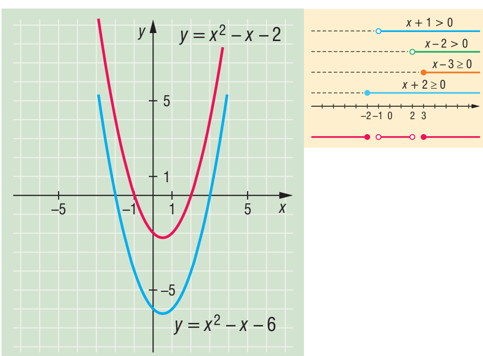
b) $\dfrac{-x^2 + 3x + 18}{x-4} = \dfrac{(x+3) \cdot (6-x)}{x-4} > 0.$

A megoldás: $x < -3$ vagy $4 < x < 6$.



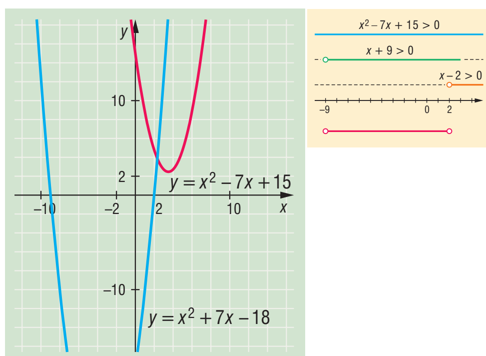
c) $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2} = \dfrac{(x+2) \cdot (x-3)}{(x-2) \cdot (x+1)} \ge 0,$

ezért: $x \le -2$ vagy $-1 < x < 2$ vagy $3 \le x$.



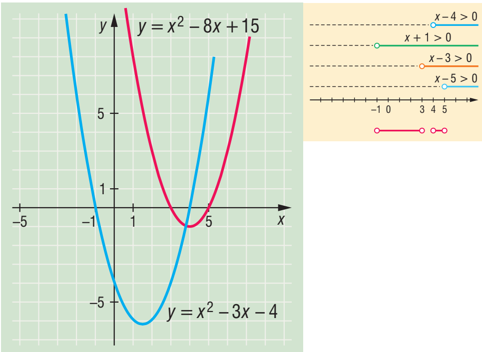
d) $\dfrac{x^2 - 7x + 15}{x^2 + 7x - 18} = \dfrac{x^2 - 7x + 15}{(x-2) \cdot (x+9)} \le 0.$

A megoldás: $-9 < x < 2$.



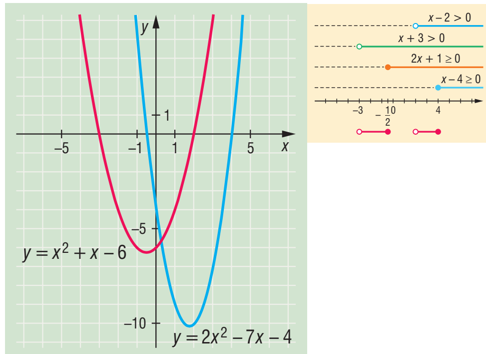
e) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-4}=\dfrac{(x-5)\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x-4)}<0.$

A megoldás: $-1<x<3$ vagy $4<x<5$.



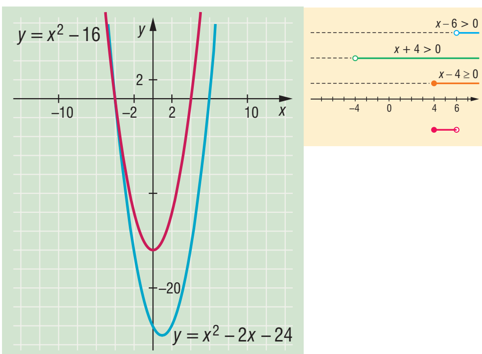
f) $\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-6}=\dfrac{(x-4)\cdot(2x+1)}{(x+3)\cdot(x-2)}\leq 0.$

A megoldás: $-3<x\leq -\dfrac{1}{2}$ vagy $2<x\leq 4$.



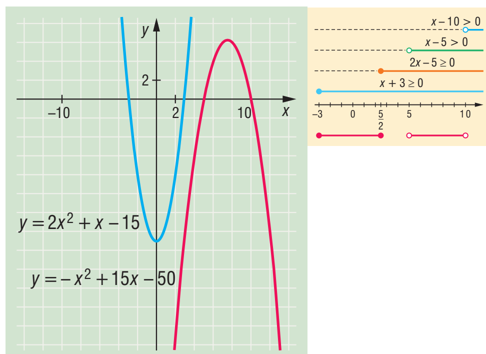
g) $\dfrac{x^2-16}{x^2-2x-24}=\dfrac{(x-4)\cdot(x+4)}{(x+4)\cdot(x-6)}\leq 0.$

A megoldás: $4\leq x<6$.



h) $\dfrac{2x^2+x-15}{-x^2+15x-50}=\dfrac{(x+3)\cdot(2x-5)}{-(x-5)\cdot(x-10)}\geq 0.$

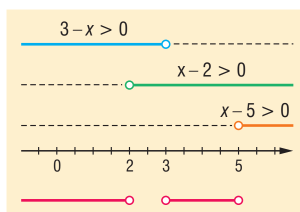
A megoldás: $-3\leq x\leq \dfrac{5}{2}$ vagy $5<x<10$.



2189 *a)* $\dfrac{(x-5)\cdot(x-2)}{3-x}>0,\ \ x\neq 3.$

Meghatározzuk, hogy a feladatban szereplő $(x-5)$, $(x-2)$ és $(3-x)$ kifejezések mely értékekre pozitívak, illetve negatívak.

Az ábra szerint a megoldás: $x<2$ vagy $3<x<5$.

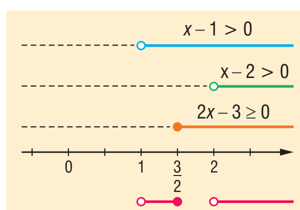


b) $\dfrac{x-1}{x-2}\geq\dfrac{x-2}{x-1},\ \ x\neq 2, x\neq 1.$

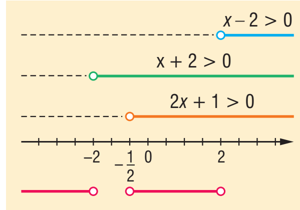
Redukáljuk nullára az egyenlőtlenséget, majd a közös nevezőre hozatal és összevonás után kapjuk:

$$\frac{2x-3}{(x-1)\cdot(x-2)}\geq 0.$$

A kifejezések előjelvizsgálata után a megoldás: $1<x\leq\dfrac{3}{2}$.



c) $1+\dfrac{5}{x-2}<\dfrac{x-1}{2+x}$, $x\neq\pm2$.

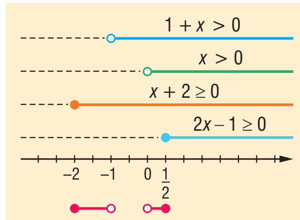


Redukáljuk nullára az egyenlőtlenséget, hasonlóan a *b)* feladat megoldásához. A közös nevezőre hozatal, és az összevonás után a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\frac{8x+4}{(x+2)\cdot(x-2)}<0,\ \text{melyből:}\ \frac{4\cdot(2x+1)}{(x+2)\cdot(x-2)}<0.$$

A hányadosban szereplő kifejezések előjelvizsgálata után kapjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása: $x<-2$ vagy $-\dfrac{1}{2}<x\leq 2$.

d) $1+\dfrac{3}{2+2x}\leq\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0, x\neq 1$.



Átalakítás után az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk:

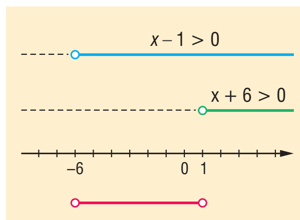
$$1+\frac{3}{2\cdot(1+x)}-\frac{1}{x}\leq 0,\ \text{melyből:}\ \frac{(2x-1)\cdot(x+2)}{2x\cdot(1+x)}\leq 0.$$

A kifejezések előjelvizsgálat után kapjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása: $-2\leq x<-1$ vagy $0<x\leq\dfrac{1}{2}$.

e) $\dfrac{-5}{4x^2-4x+1}>0$, $x\neq\dfrac{1}{2}$.

Mivel a számláló konstans és negatív, így a hányados akkor pozitív, ha a nevezője negatív. A nevezőt teljes négyzetté alakítva kapjuk: $(2x-1)^2$, amely kifejezés soha nem lesz negatív. Az egyenlőtlenségnek nincs tehát megoldása.

f) $\dfrac{6}{6-5x-x^2}\geq 0$, $x\neq -2, x\neq 1$.



Mivel a számláló konstans és pozitív, így a hányados akkor pozitív, ha a nevező pozitív. (Az egyenlőség soha nem teljesülhet.) A $6-5x-x^2$ kifejezést szorzattá alakítva: $-(x+6)\cdot(x-1)>0$, vagyis $(x+6)\cdot(x-1)<0$ egyenlőtlenséghez jutunk.

Előjelvizsgálatot tartunk. E szorzat akkor negatív, ha a két tényezője ellenkező előjelű (és ez egyszerre teljesül).

Az egyenlőtlenség megoldása: $-6<x<1$.

2190 Az $x^2-3x-10=0$, ha $x_1=5$, $x_2=-2$.

Az egyenlőtlenség különböző alakú lesz:

I. Ha $x\leq -2$ vagy $5\leq x$, akkor $x^2-3x-10\leq x+7$.
Azaz $x^2-4x-17\leq 0$, ennek megoldása: $2-\sqrt{21}\leq x\leq 2+\sqrt{21}$.
A feltétellel összevetve: $2-\sqrt{21}\leq x\leq -2$ vagy $5\leq x\leq 2+\sqrt{21}$.

II. Ha $-2<x<5$, akkor $-x^2+3x+10\leq x+7$.
Azaz $0\leq x^2-2x-3$, ennek megoldása: $x\leq -1$ vagy $3\leq x$.
A feltétellel összevetve: $-2<x\leq -1$ vagy $3\leq x<5$.

A végeredmény: $2-\sqrt{21}\leq x\leq -1$ vagy $3\leq x\leq 2+\sqrt{21}$.

2191 *a)* A törtnek és a gyököknek akkor van értelme, ha:

$$x^2 - 3x - 28 \geq 0 \quad \text{és} \quad x^2 + 3x - 18 > 0.$$

Az első megoldása:

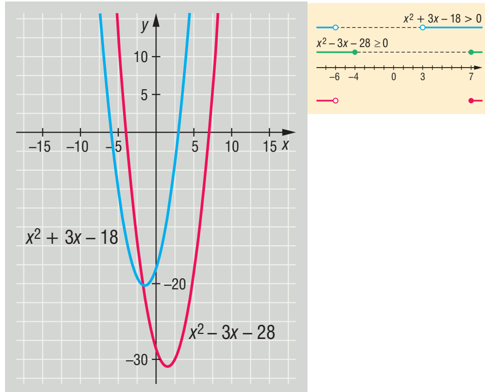
$$x \leq -4 \quad \text{vagy} \quad 7 \leq x.$$

A második megoldása:

$$x < -6 \quad \text{vagy} \quad 3 < x.$$

A közös megoldás:

$$x < -6 \quad \text{vagy} \quad 7 \leq x.$$



b) A gyöknek akkor van értelme, ha:

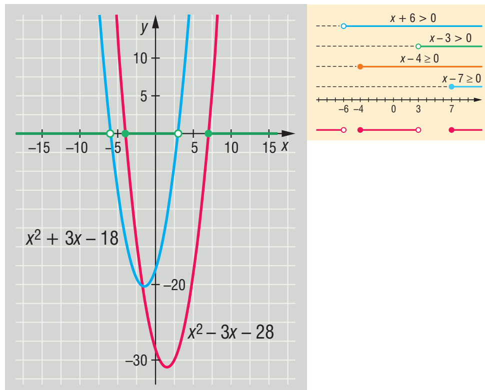
$$\frac{x^2 - 3x - 28}{x^2 + 3x - 18} \geq 0.$$

A számlálót és a nevezőt szorzattá alakítva:

$$\frac{(x-7)\cdot(x+4)}{(x-3)\cdot(x+6)} \geq 0.$$

A megoldás:

$$x < -6 \quad \text{vagy} \quad -4 \leq x < 3 \quad \text{vagy} \quad 7 \leq x.$$



2192 Mivel az egész számok körében keressük a megoldást, ha $x = 0$, akkor a harmadik egyenlőtlenség miatt $z = 0$, és a második miatt $y = 0$.

Általában is igaz, hogy ha valamelyik ismeretlen 0, akkor a másik kettő is az.

Ha egyik ismeretlen sem 0, adjuk össze a három egyenlőtlenséget:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \leq 3 + x^2 + y^2 + z^2,$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \leq 3,$$
$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \leq 3.$$

A teljes négyzetek nemnegatívak és az ismeretlenek 0-tól különböző egészek.

Csak akkor kaphatunk megoldást, ha:

$$(x+y)^2 \leq 1, \quad (y+z)^2 \leq 1, \quad (x+z) \leq 1.$$

A teljes négyzeteken belül a tagok nem lehetnek azonos előjelűek, mert akkor pl. $|x+y| \geq 2$ miatt $(x+y)^2 \geq 4$.

Tehát csak az fordulhat elő, hogy x és y ellentétes előjelű. Minden párra teljesülnie kellene az előbbinek, ami lehetetlen.

Tehát az egyenlőtlenség-rendszer egyetlen megoldása az egész számok körében a következő számhármas:

$$x = y = z = 0.$$

Paraméteres másodfokú egyenletek – megoldások

2193 Az adott egyenlet gyökei akkor egyenlőek, ha a diszkriminánsa 0. Tehát átalakítva az egyenletet, kapjuk, hogy:
$$x^2-2\cdot(4p-1)\cdot x+15p^2-2p-7=0.$$
Vagyis:
$$[-2\cdot(4p-1)]^2-4\cdot(15p^2-2p-7)=0.$$
Az egyenlet megoldásai: $p_1=4$ és $p_2=2$.

Valóban, a $p=4$ helyettesítéssel kapott egyenletünk: $x^2-30x+225=0$, ami $(x-15)^2=0$, így tehát a parabola érinti az x tengelyt.

A $p=2$ helyettesítéssel kapott egyenletünk: $x^2-14x+49=0$, vagyis $(x-7)^2=0$. Ez a parabola szintén érinti az x tengelyt.

2194 *a)* Az egyenlet diszkriminánsa: $81b^2$. Megoldásai: $x_1=2b$, $x_2=-7b$.

b) Az egyenlet diszkriminánsa: $9+24b+16b^2=(3+4b)^2$. Megoldásai: $x_1=4b$, $x_2=-3$.

c) Az egyenlet diszkriminánsa: $289b^2=(17b)^2$. Megoldásai: $x_1=\frac{b}{3}$, $x_2=-\frac{5b}{2}$.

d) Ha $b=0$, akkor az egyenlet elsőfokú, a megoldása: $x=0$.

Ha $b\neq 0$, akkor az egyenlet diszkriminánsa: $16b^4+16b^2+4=(4b^2+2)^2$, így a megoldások: $x_1=\frac{2}{b}$, $x_2=-4b$.

2195 *a)* Vizsgáljuk meg, hogy az egyenlet diszkriminánsa mikor nemnegatív:
$$(2b)^2-8\cdot(b+4)\geq 0,$$
$$b^2-2b-8\geq 0.$$
Ennek a megoldásai: $-2\geq b$ vagy $4\leq b$.

Tehát az egyenletnek nincs megoldása, ha $-2<b<4$;

1 megoldása van, ha $b=-2$, ekkor $x=1$,

vagy ha $b=4$, ekkor $x=-2$;

2 megoldása van, ha $-2>b$, vagy $4<b$.

b) Ha $b=0$, az egyenlet elsőfokú, egy megoldása van: $x=\frac{5}{4}$.

Ha $b\neq 0$, vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz a diszkrimináns nemnegatív:
$$64-4b\cdot(10-b)\geq 0,$$
$$b^2-10b+16\geq 0.$$
Megoldásai: $b\leq 2$ vagy $8\leq b$.

Tehát az egyenletnek nincs megoldása, ha $2<b<8$;

1 megoldása van, ha $b=0$, ekkor $x=\frac{5}{4}$,

ha $b=2$, ekkor $x=2$,

ha $b=8$, ekkor $x=\frac{1}{2}$;

2 megoldása van, ha $b<0$ vagy $0<b<2$ vagy $8<b$.

2196 *a)* A törtek miatt $x \neq 3b$ és $x \neq -3b$. A közös nevező az $(x-3b)\cdot(x+3b) = x^2 - 9b^2$ szorzat, ezzel beszorozva:

$$(4x+b)\cdot(x+3b) + (3x+7b)\cdot(x-3b) = 8x^2 + 6b^2.$$

Elvégezve a műveleteket:

$$x^2 - 11bx + 24b^2 = 0.$$

Megoldóképlettel megoldva: $x_1 = 8b$, $x_2 = 3b$, ez utóbbi nem megoldás, az előbbi pedig csak akkor, ha $b \neq 0$.

Tehát ha $b = 0$, az egyenletnek nincs megoldása, ha $b \neq 0$, akkor $x = 8b$.

b) Vizsgáljuk meg a nevezőket: $x^2 + bx + b^2 \neq 0$, mivel az $x^2 + bx + b^2 = 0$ egyenlet diszkriminánsa $-3b^2$, csak akkor van megoldás, ha $b = 0$, ekkor $x = 0$.

Az $x^3 - b^3 \neq 0$ és $b - x \neq 0$ mindkettő teljesül, ha $x \neq b$.

Tehát minden tört értelmezhető, ha $x \neq b$.

Legyen a közös nevező az $(x^2 + bx + b^2)\cdot(x-b) = x^3 - b^3$, ezzel beszorozva mindkét oldalt:

$$x\cdot(x-b) - 3b^2 = -(x^2 + bx + b^2).$$

Megoldások: $x_1 = b$, $x_2 = -b$, az első a feltételek miatt nem megoldás.

Tehát ha $b = 0$, az egyenletnek nincs megoldása, ha $b \neq 0$, akkor $x = -b$.

2197 *a)* A kifejezés minden valós számra pozitív, ha az $x^2 - 2bx + 2b + 15 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$(-2b)^2 - 4\cdot(2b+15) < 0,$$
$$b^2 - 2b - 15 < 0.$$

Megoldása: $-3 < b < 5$.

b) A kifejezés minden valós számra pozitív, ha $b > 0$ és a $bx^2 + bx - 4x + 4 - b = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$(b-4)^2 - 4b\cdot(4-b) < 0,$$
$$(b-4)\cdot(b-4+4b) < 0,$$
$$(b-4)\cdot(5b-4) < 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{4}{5} < b < 4$, és ez mindkét kezdeti feltételnek megfelel.

2198 *a)* A kifejezés minden valós számra negatív, ha $b < 0$ és a $bx^2 + bx + 3x + b + 3 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$(b+3)^2 - 4b\cdot(b+3) < 0,$$
$$(b+3)\cdot(3-3b) < 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldásai: $b < -3$ vagy $1 < b$.

Mindkét feltétel teljesül, ha $b < -3$.

b) A kifejezés minden valós számra negatív, ha $b < 0$ és a $bx^2 - 12x + 15 - b = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$144 - 4b\cdot(15-b) < 0,$$
$$b^2 - 15b + 36 < 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $3 < b < 12$.

Mivel a két kezdeti feltétel metszete az üres halmaz, nincs olyan b paraméterérték, amelyre a kifejezés minden valós helyen negatív értéket venne fel.

2199 Vizsgáljuk meg először az egyenlet diszkriminánsát: $D = (b+1)^2 + 8\cdot(b^2+1) > 0$, ezért minden valós b esetén két megoldása van az egyenletnek.

Nézzük a gyökök szorzatát: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-2}{b^2+1}$, negatív, mert $b^2+1>0$.

A szorzat negatív előjele azt jelenti, hogy megoldásaink ellentétes előjelűek, tehát a $]0;1[$ intervallumba legfeljebb az egyik gyök kerülhet, a pozitív előjelű.

Gondoljunk most az $f(x) = (b^2+1)\cdot x^2 + (b+1)\cdot x - 2$ másodfokú függvényre, melynek $b^2+1>0$ miatt minimuma van, és két zérushellyel rendelkezik.

A pozitív zérushely akkor kerül a $]0;1[$ intervallumba, ha a függvény a 0 és az 1 helyeken ellentétes előjelű értéket vesz fel.

Mivel $f(0) = -2$, ezért $f(1) = b^2+1+b+1-2 > 0$ kell teljesüljön.

Ebből $b^2 + b > 0$, ha $b < -1$ vagy $0 < b$.

Tehát $b < -1$ vagy $0 < b$ esetén teljesül, hogy az egyenletnek pontosan az egyik gyöke esik a $]0;1[$ intervallumba.

Négyzetgyökös egyenletek és egyenlőtlenségek – megoldások

2200 *a)* Értelmezési tartomány: $x \ge -4$, megoldás: $x = 5$.

b) Értelmezési tartomány: $x \ge 5$, megoldás: $x = 86$.

c) Értelmezési tartomány: $x \ge \frac{3}{2}$, megoldás: $x = 2$.

d) Értelmezési tartomány: $x \ge -\frac{3}{4}$, nincs megoldás.

e) Értelmezési tartomány: $x \ge -\frac{11}{4}$, megoldás: $x = 9{,}5$.

f) Értelmezési tartomány: $x \ge \frac{13}{8}$, megoldás: $x = \frac{77}{8}$.

g) Értelmezési tartomány: $x \ge \frac{5}{4}$, megoldás: $x = 2$.

h) Értelmezési tartomány: $x \ge -\frac{1}{7}$, megoldás: $x = 0$.

i) Értelmezési tartomány: $x \ge 2$, azt kapjuk, hogy $x = 1$, de ez nem megoldás.

j) Értelmezési tartomány: $x \ge -\frac{7}{6}$, megoldás: $x = -1$.

k) Értelmezési tartomány: $x \ge \frac{1}{8}$, megoldás: $x = \frac{8}{11}$.

l) Az értelmezési tartomány az üres halmaz, nincs megoldás.

2201 *a)* Értelmezési tartomány: $x \ge 0$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.
Csak $x = 3$ megoldás.

b) Értelmezési tartomány: $x \ge 4$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 7$, $x_2 = 2$.
Csak $x = 7$ megoldás.

c) Értelmezési tartomány: $x \geq 1$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$.
Csak $x = 5$ megoldás.

d) Értelmezési tartomány: $x \geq -4$. Megoldások: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, mindkettő megoldás.

e) Értelmezési tartomány: $x \leq 1$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.
Csak $x = -3$ megoldás.

f) Értelmezési tartomány: $x \geq 2$. Megoldások: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{3}{4}$, de csak az $x = 4$ megoldás.

g) Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{4}{5}$. Megoldások: $x_1 = 0$, $x = -\frac{3}{4}$, mindkettő megoldás.

h) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{5}{3}$. Megoldások: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, mindkettő megoldás.

i) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{2}$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{4}$.
Csak $x = 4$ megoldás.

j) Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{3}{2}$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{10}{3}$.
Csak $x = 0$ megoldás.

k) Értelmezési tartomány: $x \leq \frac{1}{2}$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = -2$.
Csak $x = -2$ megoldás.

l) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{8}{3}$. Megoldások: $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{11}{8}$, de csak az $x = 5$ megoldás.

2202 *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{1}{3}$. négyzetre emelés után: $x \geq 1$. A megoldás: $x \geq 1$.

b) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{2}$. Négyzetre emelés után: $x < \frac{19}{2}$. A megoldás: $\frac{3}{2} \leq x < \frac{19}{2}$.

c) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{4}$. Mivel az egyenlőtlenség bal oldala nemnegatív, a jobb oldala pedig negatív, ezért a megoldás: $x \geq \frac{3}{4}$.

d) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{2}{5}$. Négyzetre emelés után: $x > \frac{3}{5}$. A megoldás: $x > \frac{3}{5}$.

e) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{4}{3}$. A bal oldala nemnegatív, a jobb oldala negatív szám, ezért nincs megoldás.

f) Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{1}{7}$. Négyzetre emelés után: $x \leq \frac{8}{7}$. A megoldás: $-\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{8}{7}$.

g) Értelmezési tartomány: $x \leq 4$. Négyzetre emelés után: $x \leq -\frac{1}{2}$. A megoldás: $x \leq -\frac{1}{2}$.

h) Értelmezési tartomány: $x \leq 3$. Négyzetre emelés után: $x > -22$. A megoldás: $-22 < x \leq 3$.

2203 *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq 3$. Két négyzetre emelés után a megoldás: $x = 7$.

b) Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{6}{5}$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{5}{4}$. Csak az első megoldás.

c) Értelmezési tartomány: $x \geq -1$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 47$, $x_2 = -1$. Az ellenőrzésből kiderül, hogy csak a második megoldás.

d) Értelmezési tartomány: $x \geq 0$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 112{,}5$, $x_2 = 0{,}5$. Az ellenőrzésből kiderül, hogy csak a második megoldás.

e) Értelmezési tartomány: $x \geq -2$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = -2$, $x_2 = -6$. Csak az első megoldás.

f) Értelmezési tartomány: $-\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{11}$, mindkettő megoldás.

g) Értelmezési tartomány: $x \geq 6$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 7$, $x_2 = -3$. Csak az első megoldás.

h) Értelmezési tartomány: $-4 \leq x \leq \frac{1}{5}$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = \frac{5}{29}$, $x_2 = -3$. Csak a második megoldás.

2204 *a)* Vegyük észre, hogy a négyzetgyök alatt teljes négyzet alak áll, így az egyenlet: $2x^2 - |x-1| = 0$.

Az abszolút érték definíciója miatt: $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{ha} \quad x \geq 1, \\ -x+1, & \text{ha} \quad x < 1. \end{cases}$

Így $x \geq 1$ esetén az egyenlet: $2x^2 - x + 1 = 0$, amelynek a diszkriminánsa negatív, ekkor nincs megoldás.

Az $x < 1$ esetén az egyenletünk: $2x^2 + x - 1 = 0$, melynek az $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = -1$ gyökei, az adott egyenlet megoldásai.

b) Az *a)* feladathoz hasonlóan az egyenlet felírható $|x+1| = 2 \cdot |x| - 2$ alakban. Az abszolút érték definíciója miatt:

Ha $x < -1$, akkor az egyenlet: $-x - 1 = 2 \cdot (-x) - 2$, amiből $x = -1$. Ez nem megoldás az értelmezési tartományon.

Ha $-1 \leq x < 0$, akkor az egyenlet: $x + 1 = -2x - 2$, amiből $x = -1$. Ez megoldása az adott eredeti egyenletnek.

Ha $x \geq 0$, akkor az egyenlet: $x + 1 = -2x - 2$, amiből $x = 3$. Ez megoldása az adott egyenletnek.

Összefoglalva: az egyenlet megoldásai: $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$.

c) Az egyenlet felírható $|3-x| = 10 - |2-x|$ alakban. Az abszolút érték definíciója miatt:

Ha $x < 2$, akkor az egyenlet: $3 - x = 10 - (2 - x)$, amiből $x = -\frac{5}{2}$.

Ha $2 \leq x < 3$, akkor az egyenlet: $3 - x = 10 - (-2 + x)$, amiből $3 \neq 12$.

Ha $x \geq 3$, akkor az egyenlet: $-3 + x = 10 - (-2 + x)$, amiből $x = \frac{15}{2}$.

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = -\frac{5}{2}$ és $x_2 = \frac{15}{2}$.

2205 *a)* Értelmezési tartomány: $x^2 - 9 \geq 0$, ha $x \geq 3$ vagy $x \leq -3$. Vegyük észre, hogy a $\sqrt{x^2-9} = p$ helyettesítéssel a $p^2 - p - 6 = 0$ egyenlethez jutunk, amelyből $p_1 = 3$ és $p_2 = -2$.

Ha $p = 3$, akkor $\sqrt{x^2-9} = 3$, ekkor $x^2 = 18$, amiből $x = \pm 3 \cdot \sqrt{2}$.

Ha $p = -2$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, hiszen az $\sqrt{x^2-9} = -2$ egyenletben a bal oldal nemnegatív, a jobb oldal negatív.

Ellenőrzés – bal oldalon:

$$\sqrt{18-9} - (18-9) = \sqrt{9} - 9 = 3 - 9 = -6,$$

mellyel a jobb oldal eredményéhez jutottunk.

b) Értelmezési tartomány: $x \geq 0$. Vegyük észre, hogy mindkét oldal négyzetre emelése után a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{16}{x+2} - 8 + (x+2) = x, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{2}{3}.$$

Ez megoldása az eredeti egyenletnek.

Ellenőrzés – bal oldalon:

$$\frac{4}{\sqrt{\frac{8}{3}}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{3}{8} - \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Ezután az $\frac{1}{2}$-et vigyük be a gyökjel alá: $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. A jobb oldalon álló kifejezéshez jutottunk.

2206 *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{1}{3}$, ekkor a jobb oldal is pozitív. Négyzetre emelés és rendezés után: $0 > x^2 - x$, amiből a megoldás: $0 < x < 1$.

b) Értelmezési tartomány: $x \leq 5$, mindkét oldal nemnegatív, ha $3 \leq x \leq 5$. Négyzetre emelve és rendezve $0 \leq x^2 - 5x + 4$, ennek megoldása $x \leq 1$ vagy $x \leq 4$. A végeredmény: $4 \leq x \leq 5$.

c) Értelmezési tartomány: $x \leq \frac{13}{2}$.

Ha $x + 1 < 0$, azaz $x < -1$, a jobb oldal negatív, nincs megoldás.

Ha $x \geq -1$, négyzetre emelés után rendezve $0 \leq x^2 + 4x - 12$, amiből $x \leq -6$ vagy $2 \leq x$.

A végeredmény: $2 \leq x \leq \frac{13}{2}$.

d) Értelmezési tartomány: $x \geq -7{,}5$.

Ha $x > 0$, a jobb oldal negatív, teljesül az egyenlőtlenség.

Ha $x \leq 0$, négyzetre emelés és rendezés után: $0 > x^2 - 2x - 15$, amiből $-3 < x < 5$. Ebben az esetben a megoldás: $-3 < x \leq 0$.

A végeredmény: $-3 < x$.

e) A négyzetgyök alatti kifejezésnek nincs zérushelye, tehát minden valós számra értelmezhető.

Ha $2x - 1 < 0$, vagyis $x < \frac{1}{2}$, a jobb oldal negatív, az egyenlőtlenség teljesül.

Ha $x \geq \frac{1}{2}$, négyzetre emelés és rendezés után: $0 \geq x^2 - 2x - 3$, amiből $-1 \leq x \leq 3$, ebben az esetben a megoldás: $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

A végeredmény: $x \leq 3$.

f) Értelmezési tartomány: $x \leq -4$ vagy $2 \leq x$.

Ha $16 + 2x < 0$, azaz $x < -8$, a jobb oldal negatív, nincs megoldás.

Ha $x \geq -8$, négyzetre emelés és rendezés után: $0 \leq 3x^2 + 62x + 264$, amiből $x \leq -\frac{44}{3}$ vagy $-6 \leq x$. Csak a második ad megoldást.

A végeredmény: $-6 \leq x \leq -4$ vagy $2 \leq x$.

2207 *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{2}$. Négyzetre emelés után:

$$x - \sqrt{6x-9} + 2\cdot\sqrt{x^2-(6x-9)} + x + \sqrt{6x-9} = 36,$$
$$\sqrt{x^2-6x+9} = 18 - x.$$

Mivel a gyök alatt teljes négyzet áll:

$$|x-3| = 18 - x.$$

Ha $x \geq 3$, az egyenlet: $x - 3 = 18 - x$, megoldása: $x = 10{,}5$.

Ha $x < 3$, az egyenlet: $-x + 3 = 18 - x$, nincs megoldás.

b) Értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

Vezessünk be új változót: $y = \sqrt{2x^2-3x+5}$, ahol $y \geq 0$.

Az egyenlet: $y^2 - 6 + y = 0$, ennek megoldásai: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$, a második nem megoldás.

Az elsőt visszahelyettesítve:

$$2x^2 - 3x + 5 = 4,$$
$$2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Megoldások: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

c) Értelmezési tartomány: $x \geq 9$.

Alakítsuk át a gyök alatti kifejezéseket (érdemes a másodikkal kezdeni):

$$\sqrt{x-8-2\cdot\sqrt{x-9}} = \sqrt{x-9-2\cdot\sqrt{x-9}+1} = \sqrt{\left(1-\sqrt{x-9}\right)^2} = |1-\sqrt{x-9}|,$$
$$\sqrt{x-6\cdot\sqrt{x-9}} = \sqrt{x-9-6\cdot\sqrt{x-9}+9} = \sqrt{\left(3-\sqrt{x-9}\right)^2} = |3-\sqrt{x-9}|.$$

Az egyenlet:

$$|3-\sqrt{x-9}| + |1-\sqrt{x-9}| = 2.$$

Három esetre bontva:

I. Ha $\sqrt{x-9} < 1$, akkor $3 - \sqrt{x-9} + 1 - \sqrt{x-9} = 2$, amiből $\sqrt{x-9} = 1$, nincs benne a kiindulási halmazban.

II. Ha $1 \leq \sqrt{x-9} < 3$, akkor $3 - \sqrt{x-9} - 1 + \sqrt{x-9} = 2$, minden számra igaz, ami benne van a kiindulási halmazban.

III. Ha $3 \leq \sqrt{x-9}$, akkor $-3 + \sqrt{x-9} - 1 + \sqrt{x-9} = 2$, amiből $\sqrt{x-9} = 3$.

Tehát a megoldás: $1 \leq \sqrt{x-9} \leq 3$, amiből négyzetre emelés után $10 \leq x \leq 18$.

d) Értelmezési tartomány: $x \geq 3$, és láthatóan az $x = 3$ nem megoldás.

Alakítsuk a hatodik gyök alatti kifejezést:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = x^2\cdot(x-3) - 9\cdot(x-3) =$$
$$= (x-3)\cdot(x^2-9) = (x-3)^2\cdot(x+3).$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a nem nulla, $\sqrt[6]{(x-3)^2\cdot(x+3)}$ kifejezéssel.

Az egyenlet az osztás után:

$$\sqrt[6]{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2} + 6\cdot\sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}} = 7.$$

Vezessünk be új változót: $y = \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}}$.

Az új egyenlet: $\frac{1}{y^2} + 6y = 7$, beszorzás után: $6y^3 - 7y^2 + 1 = 0$.

Alakítsuk a bal oldalt:

$$6y^3 - 6y^2 - y^2 + 1 = 0,$$
$$6y^2 \cdot (y-1) - (y^2 - 1) = 0,$$
$$6y^2 \cdot (y-1) - (y-1) \cdot (y+1) = 0,$$
$$(y-1) \cdot (6y^2 - y - 1) = 0.$$

Ha $y = 1$, akkor nincs megoldás.

Ha $6y^2 - y - 1 = 0$, akkor $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{3}$, csak az első megoldás.

Visszahelyettesítve: $\sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}} = \frac{1}{2}$, amiből $x = \frac{65}{21}$, ami eleme az értelmezési tartománynak.

2208 Értelmezési tartomány: $x \geq 2$.

Az abszolút érték miatt az első tényező nemnegatív, csak akkor van megoldás, ha a második tényező pozitív: $-x^2 + 4x - 3 > 0$, aminek a megoldása: $1 < x < 3$.

Összevetve az értelmezéssel: $2 \leq x < 3$.

Ilyen x-ek esetén az első tényező: $0 < 1 - \sqrt{x-2} \leq 1$.

A második tényező: $0 < -x^2 + 4x - 3 = 1 - (x-2)^2 \leq 1$.

Mivel mindkét tényező legfeljebb 1, a szorzatuk csak úgy lehet 1, ha mindkét tényező 1-gyel egyenlő. Ez pedig csak akkor igaz, ha $x = 2$.

2209 Értelmezési tartomány: $x \geq -2$.

Mivel az egyenlet bal oldala nemnegatív, ezért $p \geq 2x$, ami azt jelenti, hogy $-2 \leq x \leq \frac{p}{2}$, ami csak akkor ad megoldásokat, ha $p \geq -4$.

Négyzetre emelés után rendezzük az egyenletet:

$$0 = 4x^2 - (4p+1) \cdot x + p^2 - 2.$$

Akkor van megoldás, ha a diszkrimináns nemnegatív:

$$D = (4p+1)^2 - 16 \cdot (p^2 - 2) = 8p + 33 \geq 0,$$

aminek a megoldása:

$$p \geq -\frac{33}{8}.$$

Összevetve a kezdeti feltétellel azt kapjuk, hogy $p \geq -4$ esetén lesz az egyenletnek megoldása.

Meg kell vizsgálnunk, hogy teljesül-e ilyen esetekben a megoldásokra az értelmezés $x \geq -2$ feltétele.

Ha $p \geq -4$, akkor $D \geq 1$, mivel a megoldások:

$$x_{1,2} = \frac{4p + 1 \pm \sqrt{D}}{8},$$

az egyik gyök:

$$x_1 = \frac{4p + 1 + \sqrt{D}}{8} \geq \frac{4p + 1 + 1}{8} = \frac{4p + 2}{8} \geq \frac{-14}{8} > -2.$$

Tehát ha $p \geq -4$, akkor az egyenletnek biztosan van megoldása.

A számtani és mértani közép, szélsőérték feladatok – megoldások

2210 *a)* A számtani közép: 15, a mértani közép 9, különbségük 6.
b) A számtani közép: 19,5, a mértani közép 18, különbségük 1,5.
c) A számtani közép: 32,5, a mértani közép 30, különbségük 2,5.
d) A számtani közép: 65, a mértani közép 60, különbségük 5.
e) A számtani közép:12,5, a mértani közép $\approx 12,25$, különbségük $\approx 0,25$.
f) A számtani közép: 21, a mértani közép $\approx 20,98$, különbségük $\approx 0,02$.
g) A számtani közép: 179, a mértani közép $\approx 66,97$, különbségük $\approx 112,03$.
h) A számtani közép: 1033, a mértani közép $\approx 335,5$, különbségük $\approx 697,5$.

2211 *a)* 26; *b)* 26,45; *c)* 30; *d)* 35,71.

2212 A négyzet oldala 12 cm.

2213 *a)* $v_{\text{átl.}} = \dfrac{150}{2,4} = 62,5\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$;

b) $v_{\text{átl.}} = \dfrac{60 + 2 \cdot 80}{3} = 73,3\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$;

c) $v_{\text{átl.}} = \dfrac{150}{\dfrac{50}{60} + \dfrac{50}{80} + \dfrac{50}{90}} = 74,5\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

2214 Átlagosan 12,4%-kal csökkent az üzemanyag ára.

2215 **I. megoldás.** Ha a négyzetek oldalának hossza a és b, akkor a kerület: $4a + 4b = 200$, amiből $a + b = 50$.
A területek négyzetösszege:

$$a^2 + b^2 = a^2 + (50 - a)^2 = 2a^2 - 100a + 2500 = 2 \cdot (a - 25)^2 + 1250.$$

Minimális, ha $a = 25$ cm, ekkor $b = 25$ cm.
Így a területösszeg minimuma 1250 cm^2.
II. megoldás. Az $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ minimális, ha $2ab$ maximális.
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$2ab \le 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1250,$$

akkor maximális a szorzat, ha $a = b = 25$.

2216 *a)* Ha a téglalap oldalainak hossza a és b, akkor $2a + 2b = 100$, vagyis $a + \mathrm{b} = 50$.
A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 625,$$

a szorzat maximális, ha $a = b = 25$, tehát a megoldás a négyzet.

b) Legyen a vízpartra merőleges oldal hossza x, akkor a másik oldal $100-2x$.
Keressük a $(100-2x)\cdot x$ szorzat maximumát.
A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$(100-2x)\cdot x=\frac{(100-2x)\cdot 2x}{2}\le\frac{\left(\frac{100-2x+2x}{2}\right)^2}{2}=1250,$$

a szorzat maximális, ha $100-2x=2x$, amiből $x=25$.
Tehát a téglalap oldalait 25 m és 50 m hosszúra kell választani.

2217 Legyen a és b a téglalap két oldalán elhelyezett járólapok száma.
a) Ebben az esetben $a\cdot b=100$. Keressük a $2\cdot(20a+20b)$ kifejezés minimumát.
A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$\frac{20a+20b}{2}\ge\sqrt{20a\cdot 20b}=200,$$

az összeg akkor minimális, ha $a=b=10$.
A minimális kerület 800 cm.
b) Most $a\cdot b=200$, és újra a $2\cdot(20a+20b)$ kifejezés minimumát keressük.
Alkalmazzuk az előző módszert:

$$\frac{20a+20b}{2}\ge\sqrt{20a\cdot 20b}=200\cdot\sqrt{2},$$

az összeg minimális, ha $a=b=\sqrt{200}\approx 14{,}14$.
Mivel a járólapokat nem vághatjuk el, ez nem valósítható meg.
Keressük az $a\cdot b=200$ egyenlet egész megoldásait, és vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz minimális a $2\cdot(20a+20b)$ kifejezés.
A lehetséges szorzatok:

$$200=1\cdot 200=2\cdot 100=4\cdot 50=5\cdot 40=8\cdot 25=10\cdot 20.$$

Rendre kiszámítva a kerületeket:

$$8040;\quad 4080;\quad 2160;\quad 1800;\quad 1320;\quad 1200.$$

Tehát akkor lesz a legkisebb a kirakott téglalap kerülete, ha a két különböző oldal mentén 10, illetve 20 darab járólapot helyezünk el.

2218 *a)* A hajók távolságát Pitagorasz-tétellel számolva:

$$d(12)=\sqrt{300^2+400^2}=500\text{ km},$$
$$d(13)=\sqrt{320^2+260^2}=412{,}3\text{ km}.$$

b) A távolság négyzete t idő múlva:

$$d(t)^2=(400-80t)^2+(300-40t)^2=$$
$$=8000t^2-88\,000t+250\,000=8000\cdot(t-5{,}5)^2+8000.$$

A hajók közötti távolság 5,5 óra múlva lesz a legkisebb.
c) A minimális távolság:

$$d_{\text{min.}}=\sqrt{8000}=89{,}44\text{ km}.$$

2219 Alakítsuk át a bizonyítandó állítás bal oldalát, ha $ab = 1$:

$$\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2a\cdot b}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2}{a-b}=(a-b)+\frac{2}{a-b}.$$

Mivel $a-b>0$, alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$(a-b)+\frac{2}{a-b}\ge 2\cdot\sqrt{(a-b)\cdot\frac{2}{a-b}}=2\cdot\sqrt{2}.$$

Akkor van egyenlőség, ha $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ és $b=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Ezzel az állítást beláttuk.

Másodfokú egyenletre vezető problémák – megoldások

2220 *a)* Az $x\cdot(x+12)=45$ egyenletből a két szám a 3 és 15 vagy a -15 és a -3.
b) Az $x^2+(x+12)^2=314$ egyenletből a két szám az 5 és 17 vagy a -17 és -5.
c) Az $\frac{x+12}{x}=x-10$ egyenletből a két szám a 12 és 24 vagy a -1 és 11.

2221 *a)* Az $x\cdot(20-x)=36$ egyenletből a két szám a 2 és 18.
b) Az $x^2+(20-x)^2=208$ egyenletből a két szám a 8 és 12.
c) Az $x^2-(20-x)^2=200$ egyenletből a két szám a 15 és 5.

2222 Az $x^2=3\cdot(x+3)+1$ egyenlet alapján a vásárolt sapkák száma 5.

2223 Az $(x+5)^2+x^2=493$ egyenletből a négyzetek oldala 13 cm és 18 cm.

2224 Az $\frac{x\cdot(x-1)}{2}=190$ egyenletből a bajnokságban résztvevő csapatok száma 20.

2225 Az $x^2+(3x+3)^2=(3x+4)^2$ egyenlet megoldásából a téglalap oldalai 7 cm és 24 cm.

2226 Az $x\cdot(x+1)=10\cdot(2x+1)+56$ egyenlet megoldása alapján a két szám a 22 és 23 vagy a -3 és -2.

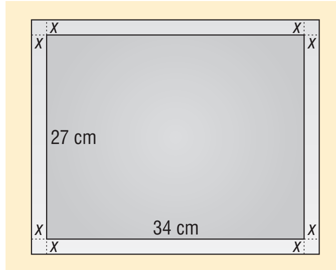
2227 Az egyenlet: $\frac{80}{x}=\frac{80}{x+4}+1$. Megoldása alapján $16\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladtak, és 5 óra alatt értek célhoz.

2228 Az egyenlet: $\frac{2}{x}+\frac{2}{x+3}=1$. Megoldás: az anya 3 óra, a lánya 6 óra alatt takarítana ki egyedül.

2229 Az egyenlet: $\frac{4000}{x}+9=\frac{4000}{x-90}$. Beszorzás és összevonás után: $x^2-90x-40\,000=0$. A muskátli palánta 250 Ft-ba kerül, 16 darabot lehet megvenni 4000 Ft-ból.

2230 *a)* Az $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=50n$ egyenletből $n=103$.
b) Az $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=50+n$ egyenlet pozitív megoldása $x\approx 12{,}8$. Tehát nincs ilyen sokszög.
c) Az $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=119$ egyenletből a sokszög 17 oldalú.

2231 A képernyő 28,5%-a: 261,63 cm^2.
A keret területéből felírható egyenlet:
$$4x^2 + 2 \cdot 34x + 2 \cdot 27x = 261{,}63.$$
A keret körülbelül 2 cm széles.



2232 Jelöljük x-szel azt, amennyi autót gyárt naponta a hagyományos részleg. Az egyenlet:
$$\frac{400}{x} + \frac{400}{x+5} = 36.$$
Beszorzás után:
$$9x^2 - 155x - 500 = 0.$$
A pozitív megoldása:
$$x = 20.$$
A két üzem, naponta 20, illetve 25 autót gyárt, az első 20 nap, a második 16 nap alatt.

2233 Tudjuk, hogy n különböző dologból 2-t $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$-féleképpen választhatunk ki.
Az egyenlet:
$$\frac{2x \cdot (2x-1)}{2} = \frac{x \cdot (x-1)}{2} + 852.$$
Beszorzás után:
$$3x^2 - x - 1704 = 0.$$
A pozitív megoldás:
$$x = 24.$$
Tehát az osztályban 24-en vannak.

2234 Legyen a háromjegyű szám: $\overline{1xy}$. A következő egyenletrendszer írható fel:
$$\left.\begin{aligned} \frac{100 + 10x + y}{x \cdot y} &= 6 + \frac{6}{x \cdot y} \\ 1 + x + y &= 12 \end{aligned}\right\}.$$
A másodikból y-t helyettesítve az első egyenlet:
$$2x^2 - 19x + 35 = 0.$$
Aminek megoldásai:
$$x_1 = 7, \quad x_2 = 2{,}5.$$
Csak az első lehet számjegy, ebből $y = 4$.
A keresett szám a 174, ellenőrzéssel látható, hogy valóban megfelel.

2235 *a)* Legyen x a nők száma, y a férfiaké.

A puszik száma: $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$, a kézfogások száma: $\frac{y \cdot (y-1)}{2}$.

Mivel $x > y$, ezért az első tört nagyobb, tehát több puszi van, mint kézfogás.

b) A kézcsókok száma: $x \cdot y = 182$, és tudjuk, hogy $x + y = 27$.
A második egyenletből y-t kifejezve és beírva az elsőbe:

$$x^2 - 27x + 182 = 0.$$

A megoldások:

$$x_1 = 14, \quad x_2 = 13.$$

A férfiak számára $y_1 = 13$, $y_2 = 14$ adódik, a feladat feltételeinek az első számpár felel meg.
Tehát a társaságban 14 nő és 13 férfi van.
A kézfogások száma:

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = 78.$$

2236 *a)* Ha az ezüst fakanál árát első alkalommal $x\%$-kal emelték, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{2x}{100}\right) = 1{,}32.$$

Beszorzás és egyszerűsítés után:

$$x^2 + 150x - 1600 = 0.$$

Az egyenletnek csak a pozitív megoldása felel meg:

$$x = 10.$$

Tehát az ezüst fakanál árát először 10%-kal, másodszor 20%-kal emelték.

b) Ha $x\%$-os volt a karácsony előtti emelés, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{x}{2}}{100}\right) = 1{,}08.$$

A beszorzás és egyszerűsítés után:

$$x^2 - 100x + 1600 = 0.$$

Aminek megoldásai:

$$x_1 = 80, \quad x_2 = 20.$$

Mindkét megoldás megfelel.
Tehát az arany fakanál árát decemberben vagy 80%-kal vagy 20%-kal emelték.

2237 *a)* Ki kell számítanunk $h(2)$ értékét:

$$h(2) = -5 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2 + 45 = 105.$$

Tehát a kilövés után 2 másodperccel 105 méter magasan lesz a rakéta.

b) Alakítsuk teljes négyzetté a függvény hozzárendelési szabályát:

$$h(t) = -5t^2 + 40t + 45 = -5 \cdot (t - 4)^2 + 125.$$

Amiből kiderül, hogy 4 másodperc múlva lesz a legmagasabban, a földtől 125 méterre.

c) Amikor földet ér, $h = 0$ lesz.
Meg kell oldani a következő egyenletet:

$$-5t^2 + 40t + 45 = 0.$$

A megoldások:

$$t_1 = 9, \quad t_2 = -1.$$

Csak a pozitív megoldás felel meg.
Tehát a rakéta 9 másodperccel a kilövés után ér földet.

Vegyes feladatok – megoldások

2238 *a)* $x = 7 \in \mathbb{Z}$; *b)* $x = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$; *c)* $x = 3 \in \mathbb{N}$; *d)* $y = 5 \in \mathbb{Z}$.

2239 *a)* $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{3}{2}$; *b)* $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -3$;

c) $x_1 = 7,\ x_2 = -\frac{1}{3}$; *d)* $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = -\frac{1}{2}$;

e) $x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{2}$; *f)* $x = -3$;

g) $x = 1$; *h)* $x_1 = 1,\ x_2 = 6,\ x_3 = 4$;

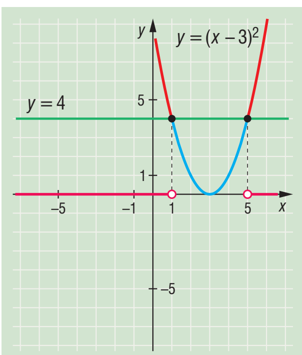
i) $x_1 = 2,\ x_2 = 1$.

2240 *a)* $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{5}$; *b)* $x < -\frac{3}{8}$ vagy $\frac{1}{2} < x$;

c) $-\frac{1}{4} \le x \le \frac{5}{3}$; *d)* $-4 \le x < -2$ vagy $-\frac{3}{2} < x \le -1$;

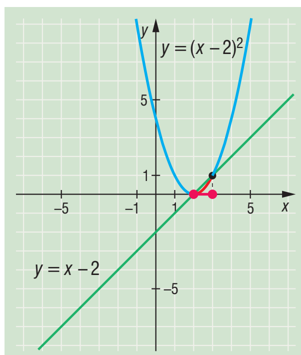
e) $-\frac{3}{4} \le x < \frac{1}{4}$; *f)* $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{2}$.

2241 *a)*



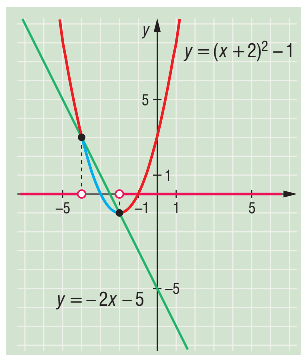
$x < 1$ vagy $x > 5$.

b)



$2 \le x \le 3$.

c)



$x < -4$ vagy $x > -2$.

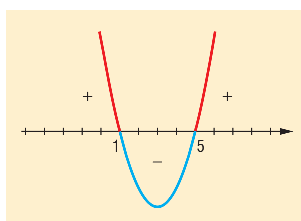
Megjegyzés: A feladat nem kéri a megoldás típusát, így megoldható függvények felhasználásával vagy algebrai úton is. Ezért adtunk először mindhárom feladatra függvények felhasználásával kapott eredményt, majd csak az *a)* feladatra következzenek más megoldási lehetőségek is:

I. megoldás

Az $(x - 3)^2 > 4$ rendezése után kapjuk, hogy:

$$x^2 - 6x + 5 > 0.$$

Határozzuk meg a bal oldalon álló kifejezés zérushelyeit ($x_1 = 5$, $x_2 = 1$). Mivel x^2 együtthatója pozitív, a parabola felfelé nyíló, így egyszerű ábrát készítve kapjuk, hogy:



$$x < 1 \text{ vagy } x > 5.$$

II. megoldás

Rendezés után kapjuk, hogy:

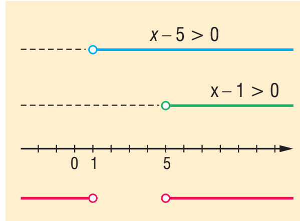
$$x^2 - 6x + 5 > 0.$$

Megoldás lehet a bal oldali kifejezés szorzattá alakítása:

$$(x - 1) \cdot (x - 5) > 0.$$

Ábrát készítünk és megkapjuk, hogy a bal oldal akkor pozitív, ha:

$$x < 1 \text{ vagy } x > 5.$$



2242 Ha a befogók x és y, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x \cdot y}{2} &= 30 \\ x^2 + y^2 &= 13^2 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszerből a befogók hossza: 5 cm és 12 cm.

2243 Ha a sokszögek oldalszáma x és y, az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x \cdot (x-3)}{2} + \frac{y \cdot (y-3)}{2} &= 68 \\ (x-2) \cdot 180^\circ + (y-2) \cdot 180^\circ &= 2700^\circ \end{aligned}\right\}.$$

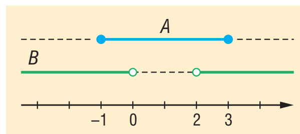
A második egyenletből érdemes helyettesíteni. A sokszögek 7, illetve 12 oldalúak.

2244 *a)* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 3\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ vagy } 2 < x\}$.

b) $A \cup B = \mathbb{R}$.

c) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 0 \text{ vagy } 2 < x \le 3\}$.



2245 *a)* Teljes négyzetté alakítás után kapjuk:

$$f(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{4},$$

amelyből leolvasható, hogy az f függvénynek maximuma van az $x = \frac{5}{2}$ helyen, értéke $y = \frac{49}{4}$.

A zérushelyek megállapíthatóak a másodfokú egyenlet megoldóképletével. E szerint $x_1 = -6$ és $x_2 = 1$ az egyenlet két zérushelye.

b) Teljes négyzetté alakítás után kapjuk:

$$g(x) = 10 \cdot (x - 1) + 10,$$

amiből leolvasható, hogy a függvénynek minimuma van az $x = 1$ helyen, értéke $y = 10$.

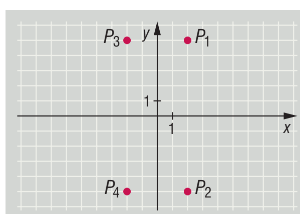
A zérushelyek meghatározásánál vegyük észre, hogy a diszkrimináns negatív, mert:

$$b^2 - 4ac = 400 - 4 \cdot 10 \cdot 20 = -400,$$

ezért a g függvénynek nincs zérushelye, nem érinti és nem metszi az x tengelyt.

2246 Az egyenletrendszer megoldásaiból a következő négy pont adódik:

$$P_1(2; 5), \quad P_2(2; -5), \quad P_3(-2; 5), \quad P_4(-2; -5).$$



2247 *a)* A gyökök négyzetösszege: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = \frac{43}{9}$.

b) Az $5x^2 + 6x + 3 = 371$ egyenletből $x = 8$.

c) A hiányzó számjegy: $x = 5$.

2248 Ha $b = 2$, az egyenlet elsőfokú, megoldása: $x = -1$.

Ha $b \neq 2$, a másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (b+1)^2 - 4 \cdot (b-2) \cdot 3 = b^2 - 10b + 25 = (b-5)^2.$$

Ha $b = 5$, egy valós megoldás van: $x = -1$.

Ha $b \neq 5$, a diszkrimináns pozitív, tehát két valós megoldás van.

10.4. GEOMETRIA

Körrel kapcsolatos ismeretek – megoldások

2249 A körcikk területét T-vel, a határoló körív hosszát i-vel jelöltük.
a) $T = 8{,}38\ \text{cm}^2,\ i = 2{,}09\ \text{cm}$; *b)* $T = 33{,}51\ \text{cm}^2,\ i = 8{,}38\ \text{cm}$;
c) $T = 64{,}23\ \text{cm}^2,\ i = 16{,}06\ \text{cm}$; *d)* $T = 83{,}78\ \text{cm}^2,\ i = 20{,}94\ \text{cm}$;
e) $T = 150{,}80\ \text{cm}^2,\ i = 37{,}70\ \text{cm}$; *f)* $T = 167{,}55\ \text{cm}^2,\ i = 41{,}89\ \text{cm}$.

2250 A körcikk középponti szögét α-val jelölve:
a) $\alpha = 57{,}30° = 1$ radián; *b)* $\alpha = 91{,}67° = 1{,}6$ radián;
c) $\alpha = 137{,}51° = 2{,}4$ radián; *d)* $\alpha = 286{,}48° = 5$ radián.

2251 A körcikk sugarát r-rel, a középponti szögét α-val jelölve:
a) $r = 8\ \text{cm},\ \alpha = 57{,}30° = 1$ radián; *b)* $r = 5{,}47\ \text{cm},\ \alpha = 122{,}61° = 2{,}14$ radián;
c) $r = 4{,}62\ \text{cm},\ \alpha = 171{,}89° = 3{,}00$ radián.

2252 A körgyűrűcikk területe a nagyobb sugarú körcikk és a kisebb sugarú körcikk területének különbsége. A nagyobb körcikk területe $T = \dfrac{70^2 \cdot \pi \cdot 50°}{360°} \approx 2138{,}03\ \text{m}^2$, a kisebbé $t = \dfrac{20^2 \cdot \pi \cdot 550°}{360°} \approx$ $\approx 174{,}53\ \text{m}^2$. A nézőtér területe így $1963{,}5\ \text{m}^2$.

2253 A köríven nyugvó kerületi szög nagysága
a) 8°; *b)* 15,5°; *c)* 35°; *d)* 90°; *e)* 105°; *f)* 175°.

2254 A köríven nyugvó középponti szög nagysága
a) 20°; *b)* 70°; *c)* 180°; *d)* 300°; *e)* 320°; *f)* 350°.

2255 A köríven nyugvó középponti szöget α-val, a kerületi szöget β-val jelöltük.
a) $\alpha = 120°,\ \beta = 60°$; *b)* $\alpha = 216°,\ \beta = 108°$; *c)* $\alpha = 330°,\ \beta = 165°$;
d) $\alpha = 180°,\ \beta = 90°$; *e)* $\alpha = 270°,\ \beta = 135°$.

2256 A kerületi szög 70°-os, a középponti szög 140°-os.

2257 Ha a középponti szöget α, a kerületi szöget β jelöli, akkor
a) $\alpha = 53{,}33°,\ \beta = 26{,}67°$; *b)* $\alpha = 160°,\ \beta = 80°$.

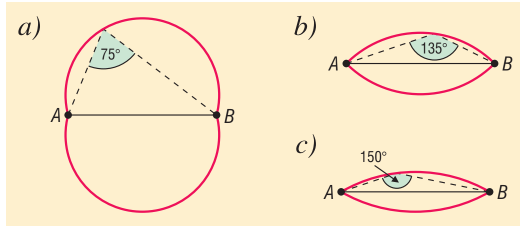
2258 A keresett kerületi szög:
a) 172,5°; *b)* 161,5°; *c)* 155°.

2259 *a)* A háromszög szögei: 30°, 45°, 105°. A körívek hossza rendre: 15,71 cm, 23,56 cm, 54,98 cm.
b) A háromszög szögei: 10°, 70°, 100°. A körívek hossza rendre: 5,24 cm, 36,65 cm, 52,36 cm.
c) A háromszög szögei: 52,5°, 60°, 67,5°. A körívek hossza rendre: 27,49 cm, 31,42 cm, 35,34 cm.

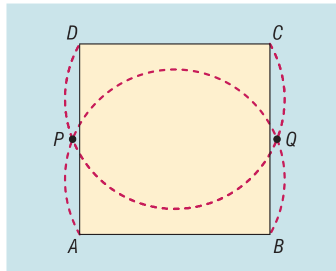
2260 A két érintő hajlásszöge:
a) 160°; *b)* 120°; *c)* 50°.

2261 Az ABC háromszög szögei: 48°, 55°, 77°.

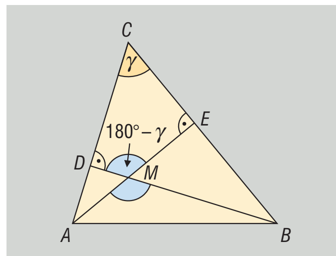
2262 Mindhárom esetben a szakasz adott szöghöz tartozó látószögköríveit kell megszerkeszteni. A köríveken belüli pontokból a szakasz a megadott szögnél nagyobb, a köríveken kívüli pontokból pedig kisebb szögben látszik.



2263 Szerkesszünk a négyzet AB, valamint CD oldalaira befelé 60°-os látószögköríveket. A két körív P és Q metszéspontjaiból az AB, valamint a CD oldal is 60°-os szög alatt látszik. Hasonló eljárással szerkeszthető meg az a két pont, amelyekből a négyzet BC és DA oldalai látszanak 60°-os szögben.



2264 Az A csúcsból induló magasság talppontja legyen E, a B csúcsból indulóé D. A $CDME$ négyszög két szemközti szöge 90°-os, ezért a másik két szögének összege 180°, így $DME\sphericalangle = 180° - \gamma$. Mivel az $AMB\sphericalangle$, és a $DME\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért megegyeznek, ami igazolja, hogy az M pont illeszkedik a szóban forgó látószögkörívre. Az állítás igaz derékszögű és tompaszögű háromszögekre is.



2265 Az n oldalú szabályos sokszöget a középpontjából a csúcsokig tartó szakaszok n egyenlő szárú, egybevágó háromszögre bontják. Mindegyik háromszögben a középpontnál kialakuló szög $\dfrac{360°}{n}$, ami bizonyítja az állítás helyességét.

2266 *a)* A megadott arányú szögek lehetnek egy húrnégyszög szögei. Egy ilyen húrnégyszögben a szögek: 67,5°, 112,5°, 90°, 90°.

b) A megadott arányú szögek nem lehetnek húrnégyszög szögei, mivel nincs köztük két olyan, amelyeknek az összege megegyezne a másik kettő összegével.

2267 A húrnégyszög szögei az egyes esetekben:

a) 90°, 60°, 90°, 120°; *b)* 45°, 30°, 135°, 150°; *c)* 25°, 100°, 155°, 80°.

2268 A húrnégyszög szögei az egyes esetekben:

a) 145°, 60°, 35°, 120°; *b)* 110°, 115°, 70°, 65°; *c)* 95°, 25°, 85°, 155°.

2269 Ha a húrnégyszög egy belső szöge α, akkor szemközti szöge $180° - \alpha$, így annak külső szöge $180° - (180° - \alpha) = \alpha$.

2270 Válasszuk ki a húrnégyszög egy oldalát! A négyszög köré írt kör középpontja az oldal két végpontjától egyenlő távolságra van; ez a távolság éppen a kör sugarával egyenlő. A két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok illeszkednek a két pont közti szakasz felezőmerőlegesére, ezért a kör középpontja rajta van a kiválasztott oldal felezőmerőlegesén. Mivel az elmondottak a négyszög bármelyik oldalára érvényesek, ezért az oldalfelező merőlegesek valóban egy pontban, épp a négyszög köré írható kör középpontjában metszik egymást.

2271 A háromszög két csúcsa, valamint az egyik magasságvonal talppontja olyan derékszögű háromszöget határoz meg, amelynek a háromszög egyik oldala az átfogója. Ekkor Thalész tételének megfordítása alapján a magasságvonal talppontja illeszkedik a háromszög megfelelő oldala, mint átmérő fölé emelt körre.

Ugyanez természetesen érvényes a másik magasságvonal talppontjára is, így a szóban forgó négy pont valóban egy körön helyezkedik el, és ezért húrnégyszöget határoz meg. A négyszög köré írt kör középpontja a háromszög megfelelő oldalának középpontjába esik.

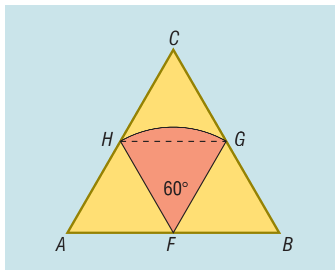
2272 A feladat szövege alapján Budapest a Föld középpontjából 47,5°-os szög alatt látszik az Egyenlítőhöz képest. Így fővárosunk Egyenlítőtől való távolsága:

$$i = \frac{2 \cdot 6370 \cdot \pi \cdot 47{,}5^\circ}{360^\circ} \approx 5281\,\text{km}.$$

2273 A Ráktérítő és a Baktérítő a Föld középpontjából külön-külön 23°27' = 23,45° alatt látszik az Egyenlítőhöz képest. Ebből következik, hogy távolságuk:

$$i = \frac{2 \cdot 6370 \cdot \pi \cdot 46{,}9^\circ}{360^\circ} \approx 5214\,\text{km}.$$

2274 Az ábra jelöléseinek megfelelően a gazda az ABC szabályos háromszög AB oldalának F felezőpontjához kötötte ki a jószágot. A kecske által lelegelhető területet két szabályos háromszögre (AFH, valamint FBG háromszögek), valamint egy 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikkre lehet felbontani.



A háromszög középvonalai a háromszöget négy egybevágó kis háromszögre bontják, ezért az AFH, valamint FBG háromszögek területe megegyezik, és együtt éppen az ABC háromszög területének felét adják, vagyis:

$$T_{AFH} + T_{FBG} = \frac{T_{ABC}}{2} = \frac{14 \cdot 14 \cdot \sqrt{3}}{8} \approx 42{,}44\ \text{m}^2.$$

Az FG és FH sugarak által határolt 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikk területe:

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{7^2 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \approx 25{,}66\ \text{m}^2,$$

így a kecske összesen 68,10 m^2 területen legelhet.

2275 Mivel bármely szabályos sokszög köré kör írható, ezért a feladat állítása egyszerű következménye a kerületi szögek tételének. A keresett szög nagysága minden esetben annak a szögnek a fele, amekkora szögben a szabályos sokszög oldala a sokszög középpontjából látszik. A megoldás az egyes esetekben:

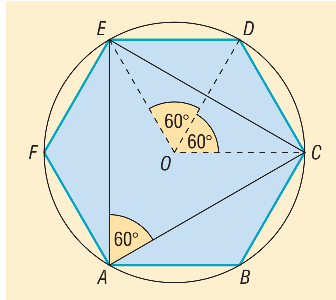
a) 36°; *b)* 30°; *c)* 15°; *d)* $\frac{360^\circ}{2 \cdot n}$.

2276 A 2275. feladatban kiszámítottuk, hogy a hosszabb körív pontjaiból mekkora szög alatt látszik a szabályos sokszög egy oldala. A rövidebb körív pontjaihoz a kiszámított szögek kiegészítő szöge tartozik, ezért a megoldás az egyes esetekben:

a) 144°; *b)* 150°;

c) 165°; *d)* $180^\circ - \frac{360^\circ}{2 \cdot n} = \frac{(n-1) \cdot 180^\circ}{n}$.

2277 Húzzuk be az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC, CE és EA átlóit. Szimmetria okokból a kapott háromszög összes oldala ugyanakkora szögben látszik a hatszög O középpontjából, és így ez a szög csak 120° lehet. Erről úgy is meggyőződhetünk, hogy meghúzzuk az OE, OD, OC sugarakat, és a kialakult OED és ODC szabályos háromszögekre hivatkozunk.

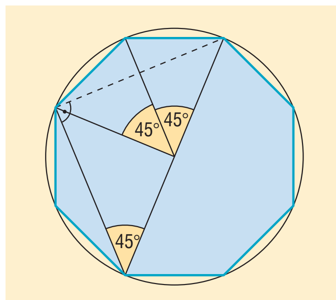


Az elmondottakból az is következik, hogy az ACE háromszög szabályos. Ezt azonnal beláthatjuk a kerületi és középponti szögek tételéből, hiszen a rövidebb EC köríven 120°-os középponti szög nyugszik, ezért a hozzá tartozó kerületi szögre igaz: $EAC\sphericalangle = 60°$.

Hasonlóan látható be, hogy a háromszög C és E csúcsánál szintén 60°-os szögek vannak.

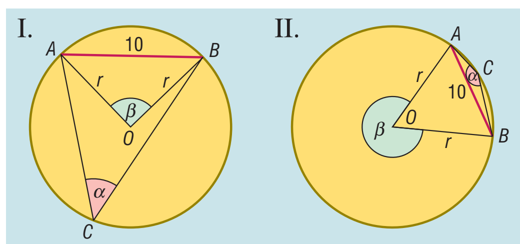
Megjegyezzük, hogy a feladat állítása a kerületi és középponti szögek tételére történő hivatkozás nélkül a következő módon is igazolható. Forgassuk el az ECD háromszöget az O pont körül –120°-kal; ekkor az ED oldal képe a CB szakasz, DC oldal képe a BA szakasz, és így természetesen az EC oldal a CA oldalba megy át. Mivel a forgatás a szakaszok hosszát megőrzi, ezért $EC = CA$. Hasonló módszerrel igazolható, hogy $EC = AE$ is teljesül, azaz az ACE háromszög valóban szabályos.

2278 Tekintsük a szabályos nyolcszög köré írható kört. A nyolcszög leghosszabb és legrövidebb átlója által meghatározott szög a kör egy olyan kerületi szögeként is felfogható, amelyhez tartozó köríven 90°-os középponti szög nyugszik. Ekkor viszont a két átló által bezárt szög 45°.



Megjegyezzük, hogy a két átló által bezárt szög a kerületi és középponti szögek tételének alkalmazása nélkül is kiszámolható. Ha ugyanis meghúzzuk a két átló nem közös végpontjait összekötő szakaszt (az ábrán szaggatottal jelöltük), akkor a nyolcszögben szintén egy legrövidebb átlót kapunk, és ezért az a két átlóval egyenlő szárú háromszöget alkot. Mivel a leghosszabb átló átmegy a kör középpontján, azaz a kör egy átmérője is egyben, ezért Thalész tételének megfordítása szerint a két rövidebb átló merőleges egymásra. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei 45°-osak.

2279 Az I. ábra jelöléseinek megfelelően legyen az AB húr hossza 10 cm, az AB köríven nyugvó kerületi szög α, a hozzá tartozó középponti szög pedig β. Az AOB háromszög egyenlő szárú, továbbá $\beta = 2\cdot\alpha$.



a) Mivel $\beta = 60°$, ezért az AOB háromszög szabályos, és így a kör sugarának szintén 10 cm adódik.

b) Mivel $\beta = 90°$, ezért az AOB háromszög derékszögű, és így Pitagorasz tétele alapján:

$$r^2 + r^2 = 10^2 = 100.$$

A sugár hossza: $5\cdot\sqrt{2}$ ($\approx 7{,}07$) cm.

c) A kerületi és középponti szögek helyzetét a II. ábra szemlélteti. Mivel $\beta = 300°$, ezért az AOB háromszög O csúcsánál 60°-os szög van, így a háromszög szabályos. A kör sugara ebben az esetben 10 cm.

2280 A húr két végpontja a kör középpontjával minden esetben egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek alapja éppen a húr, szárainak hossza pedig a kör r sugarával egyenlő.

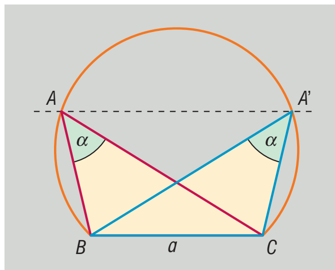
a) Ha a húr hossza r, akkor az egyenlő szárú háromszög szabályos is, így a húr a kör középpontjából 60°-os szögben látszik. A körvonal (az adott húr végpontjaitól különböző) pontjaiból a húr vagy 30°-os, vagy 150°-os szög alatt látszik, attól függően, hogy a hosszabb, vagy a rövidebb körív pontjáról van szó.

b) Ebben az esetben az egyenlő szárú háromszög szárai r, alapja pedig $r \cdot \sqrt{2}$ hosszúságúak. Észrevehető, hogy $r^2 + r^2 = \left(r \cdot \sqrt{2}\right)^2$, így Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű.

A húr a kör középpontjából 90°-os, a körvonal (az adott húr végpontjaitól különböző) pontjaiból 45°-os, vagy 135°-os szög alatt látszik, attól függően, hogy a hosszabb, vagy a rövidebb körív pontjáról van szó.

c) Az r sugarú körben elhelyezhető leghosszabb húr az átmérő, amelynek hossza éppen $2 \cdot r$. Ebből következik, hogy a húr a kör középpontjából 180°-os, a kör (az adott húr végpontjaitól különböző) pontjaiból pedig 90°-os szögben látszik.

2281 *a)* A szerkesztés lépései:

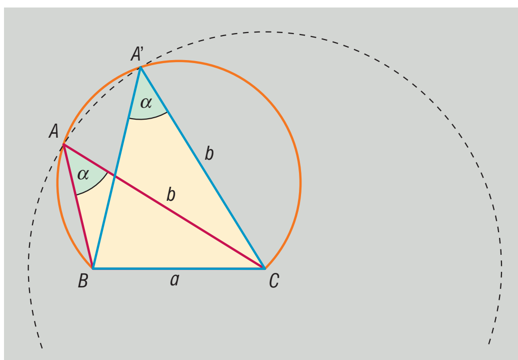


1. Az adott $BC = a$ oldal fölé α szögű látószögkörívet szerkesztünk; a háromszög A csúcsa a körvonalra illeszkedik.
2. Az a oldallal párhuzamos, attól m_a távolságra haladó egyenest szerkesztünk; az A csúcs illeszkedik az egyenesre.
3. Megjelöljük a látószögkörívet, valamint az a oldallal párhuzamos egyenes metszéspontjait (az ábrán A és A').
4. A csúcsokat összekötjük.

Megjegyzések: A látószögkörív és a BC-vel párhuzamos egyenes az adatok felvételétől függően 0, 1, esetleg 2 metszéspontot határozhat meg, ezért a feladatnak 0, 1, 2 megoldása lehet. Az ábrán látható elrendezés mellett két megoldás adódik, azonban a két megoldás egymás tükörképe a BC szakasz felezőmerőlegesére.

Ha az a szakasz α szögű látószögkörívét a szakasz másik „oldalára" szerkesztjük meg, akkor további 0, 1, 2 megoldás adódik, amelyek természetesen az imént kapott megoldások BC egyenesre vonatkozó tükörképei.

b) A szerkesztés lépései:

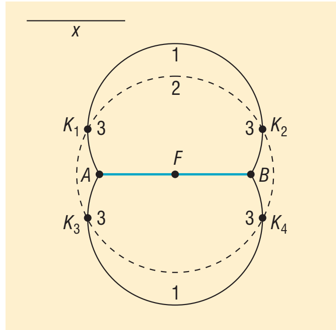


1. Az adott $BC = a$ oldal fölé α szögű látószögkörívet szerkesztünk; a háromszög A csúcsa a körvonalra illeszkedik.
2. C középpontú, b sugarú kört szerkesztünk; a háromszög A csúcsa illeszkedik a körvonalra.
3. Megjelöljük a látószögkörívet, valamint a 2. pontban szerkesztett kör metszéspontjait (az ábrán A és A').
4. A csúcsokat összekötjük.

Megjegyzések: A két körnek 0, 1, esetleg 2 közös pontja lehet az adatok felvételétől függően, így a megoldások száma is 0, 1, esetleg 2 lehet.

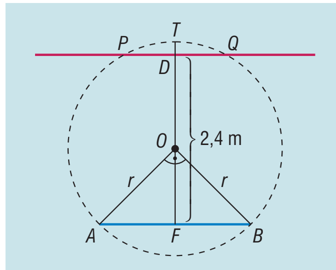
Ha a látószögkörívet a BC szakasz másik „oldalára" is megszerkesztjük, akkor további 0, 1, 2 megoldást kapunk, melyek a már megszerkesztett megoldások BC egyenesre vonatkozó tükörképei.

2282 A feltételek szerint a kincs helye a két fát összekötő AB szakasz 60°-os egyik látószögkörívén található (az ábrán 1-es jelöli). A feladat szövegében szereplő másik kalóz emlékképei alapján a kincs az AB szakasz F felezőpontjától ismert x távolságra van, amit ezúttal úgy is értelmezhetünk, hogy a kincs az F középpontú, x sugarú körön is rajta van (az ábrán 2-es jelöli). Az aranyládát ezért a két körvonal metszéspontjaiban kell keresni (az ábrán 3-as számmal jelöltük). A feladatnak 4, 2, esetleg kevésbé jó emlékezőképességgel megáldott kalózok esetén 0 megoldása lehet, attól függően, hogy a látószögkörívek hány pontban metszik az F középpontú, x sugarú kört.



2283 *a)* A feladat geometriai modellje:

Adott az AB szakasz, amelynek hossza 2 m. A szakasztól 2,4 méter távolságra párhuzamost húzunk. A feladat megoldása attól függ, hány közös pontja van a párhuzamosnak, valamint az AB szakaszhoz tartozó 45° szögű (egyik) látószögkörívének. Az ábrán a megfelelő látókör középpontját O-val jelöltük. Ekkor a kerületi és középponti szögek tétele alapján az ABO háromszög derékszögű és derékszöge az O csúcsnál van. Mivel az ABO háromszög egyben egyenlő szárú is ($AO = OB$, mert mindkettő a kör sugara), ezért ha a kör sugarát r jelöli, akkor a Pitagorasz-tétel szerint $r^2 + r^2 = 2^2$, azaz $r = \sqrt{2}$ m. Ha a látókörnek az AB szakasztól legtávolabbi pontját T jelöli, továbbá az AB szakasz felezőpontja F, akkor $FT = FO + OT = 1 + r = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$ m. Mivel $2{,}4 < 2{,}41$, így az AB-vel párhuzamos kötél metszi az FT szakaszt, amiből következik, hogy a kötél mentén két olyan pont van, amelyből a festmény 45°-os szög alatt látszik (az ábrán ezeket P és Q jelöli).



b) A kötelet a festménytől 2,41 m távolságra kell vezetni ahhoz, hogy a kötél mentén pontosan egy pontból látszódjon a festmény 45°-os szögben.

2284 A feltételek szerint a négyszög három szögét $3 \cdot x$, $5 \cdot x$, illetve $2 \cdot x$ alakban kereshetjük. A következő esetek lehetségesek:

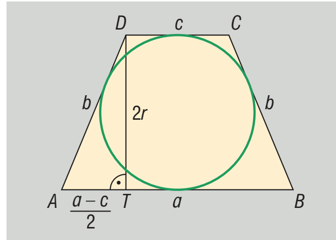
1. A $3 \cdot x$, és az $5 \cdot x$ nagyságú szögek szemköztiek. Ekkor $3 \cdot x + 5 \cdot x = 180°$, amiből $x = 22{,}5°$. Ekkor a négyszög szögei: 67,5°, 112,5°, 45°, 135°.
2. A $3 \cdot x$, és a $2 \cdot x$ nagyságú szögek szemköztiek. Ekkor $3 \cdot x + 2 \cdot x = 180°$, amiből $x = 36°$. Ebben az esetben $5 \cdot x = 180°$ adódik, ami nem lehet a négyszög szöge, így a 2. eset nem valósulhat meg.
3. Az $5 \cdot x$, és a $2 \cdot x$ nagyságú szögek szemköztiek. Ekkor $5 \cdot x + 2 \cdot x = 180°$, amiből $x \approx 25{,}71°$, így a négyszög szögei: 77,14°, 128,57°, 51,43°, 102,86°.

A feladatnak két megoldása van.

2285 Tegyük fel, hogy az $ABCD$ négyszög húrnégyszög. Ekkor az $ACB\sphericalangle$, valamint az $ADB\sphericalangle$ a négyszög köré írható körben az AB köríven nyugszik, és az ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek megegyeznek. Ebből adódik, hogy a húrnégyszög bármely oldala a másik két csúcsból ugyanakkora szög alatt látszik.

Fordítva: Tegyük fel, hogy az $ABCD$ négyszögben az AB oldal a másik két csúcsból ugyanakkora α szög alatt látszik. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a C és D csúcsok illeszkednek az AB szakasz fölé emelt egyik α szögű látókörívére. Nyugodtan elvethetjük, hogy az $ABCD$ négyszög hurkolt négyszög lenne, ezért C és D ugyanarra a látókörívre esnek. Ez azt is jelenti, hogy A, B, C és D ugyanazon körre illeszkednek, és így valóban húrnégyszöget alkotnak.

2286 Tekintsük az $ABCD$ húrtrapézt, amely egyben érintőtrapéz is; alapjait jelöljük a-val és c-vel, szárát b-vel. Jelölje továbbá a D csúcsból húzott magasságvonal talppontját T; ekkor nyilvánvalóan $AT = \frac{a-c}{2}$, továbbá $DT = 2r$, ahol r a beírt kör sugara.



Az ADT derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján

$$b^2 = (2r)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2.$$

Mivel a négyszög érintőnégyszög is, ezért szemközti oldalainak összege megegyezik, azaz $b = \frac{a+c}{2}$, amit behelyettesítve a Pitagorasz-tételbe megkapjuk, hogy

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = (2r)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2.$$

A kijelölt műveletek elvégzése, az egynemű tagok összevonása után adódik, hogy $(2r)^2 = ac$, vagyis $2r = \sqrt{ac}$. A feladat adatait behelyettesítve $r = 6$ cm adódik.

2287 *a)* Hamis. Gondoljunk arra, hogy a húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180°, így egy húrnégyszögben egyetlen szög sem lehet 180°-nál nagyobb, azaz konkáv.

b) Hamis. A négyzet, mint húrnégyszög átlója a négyszöget két derékszögű háromszögre bontja.

c) Igaz. A trapéz szárára illeszkedő két belső szögének összege 180°. Ha a trapéz húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege is 180°. Ebből következik, hogy a trapéz alapjain lévő két-két belső szög egyenlő, így az alapok felezőpontjait összekötő egyenesre tengelyesen szimmetrikus. Tehát szárai egyenlő hosszúak.

d) Hamis. A trapézok közül a paralelogrammákban a szárak egyenlők, mégsem feltétlenül húrnégyszögek.

e) Igaz. A paralelogrammában a szemközti szögek egyenlők, így összegük csak úgy lehet 180°, ha egyenként 90°-osak.

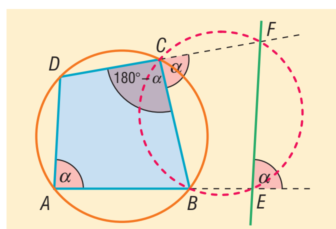
f) Igaz. Mivel a rombusz paralelogramma is, ezért az állítás azonnal adódik az *e)* részfeladat állításából.

g) Hamis. A négyzet húrnégyszög, tompaszöget mégsem tartalmaz.

h) Igaz. Ha a négyszög nem tartalmaz derékszöget, akkor a szemközti szögek összege csak úgy lehet 180°, ha közülük az egyik hegyesszög, a másik tompaszög. Ugyanez érvényes a másik szögpárra is.

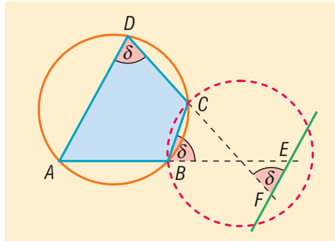
2288 Kétféle elrendezést érdemes vizsgálni.

Az első esetben a D kezdőpontú félegyenes nem metszi az AE szakaszt. Ha az $ABCD$ négyszög A csúcsánál lévő szöget α jelöli, úgy az EF egyenes is α szöget zár be az AE félegyenessel, hiszen AD és EF párhuzamosak (egyállású szögek). Mivel az $ABCD$ négyszögről tudjuk, hogy húrnégyszög, ezért a C csúcsnál $180° - \alpha$ nagyságú szöge van, aminek külső szögére teljesül:



$$BCF\sphericalangle = 180° - (180° - \alpha) = \alpha.$$

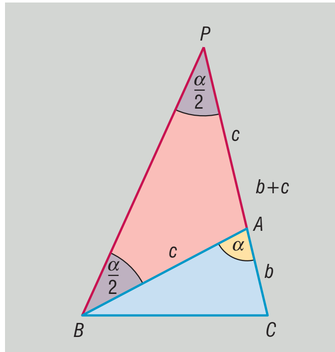
Az elmondottakból adódik, hogy a $BEFC$ négyszög C csúcsánál lévő belső szög ugyanakkora, mint a szemközti E csúcsánál lévő külső szög, így a szemközti belső szögek összege 180°, ezért a négyszög húrnégyszög.



A második esetben a D kezdőpontú félegyenes metszi az AE szakaszt. Ebben az esetben $ADF\sphericalangle = DFE\sphericalangle = \delta$, hiszen váltószögek. Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, ezért a B csúcsnál lévő külső szöge megegyezik a D csúcsnál lévő belső szöggel, azaz $CBE\sphericalangle = \delta$. Ekkor viszont a CE szakasz az F és B pontokból ugyanakkora szög alatt látszik, így mindkettő illeszkedik a CE szakasz δ szögű látószögkörívére, azaz a C, E, B, F pontok egy körre illeszkednek.

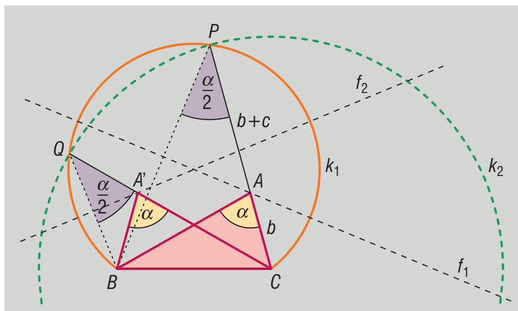
Megjegyzés: A második esetben a B és F pontok a CE szakasznak ugyanazon partján vannak, ezért nem fordulhat elő, hogy a CE szakasz különböző látószögkörívére illeszkedjenek.

2289 *a)* Forgassuk el az ABC háromszög AB oldalát az A csúcs körül úgy, hogy az elforgatott szakasz illeszkedjen a CA oldal meghosszabbítására. Ha a B pont képét P jelöli, akkor a PBA háromszög egyenlő szárú, továbbá az A csúcsnál lévő külső szöge α.



Mivel a háromszög külső szöge a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, ezért a PBA háromszög alapján fekvő szögek $\frac{\alpha}{2}$ nagyságúak. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a P pont illeszkedik a BC szakasz $\frac{\alpha}{2}$ szögű valamelyik látószögkörívére.

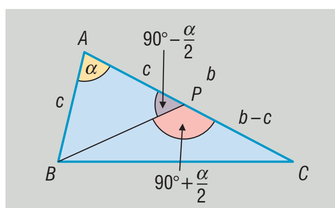
A fenti megállapításokat figyelembe véve, a szerkesztés lépései a következők lehetnek.



1. Az adott $a = BC$ szakasz fölé $\frac{\alpha}{2}$ szögű látószögkörívet szerkesztünk (k_1).
2. A C középpont körül adott $b + c$ sugarú kört szerkesztünk (k_2).
3. Megjelöljük az a szakaszhoz tartozó látószögkörív, valamint a C középpontú kör metszéspontjait (az ábrán P és Q).
4. Megszerkesztjük a PB és QB szakaszok felezőmerőlegesét (f_1, f_2).
5. Az ABC háromszög ismeretlen A csúcsát az imént szerkesztetett felezőmerőlegesek metszik ki a PC, illetve QC szakaszokból.

A feladatnak 0, 1, 2 megoldása lehet. Ha az adott a szakasz másik látószögkörívét is megszerkesztjük, akkor további 0, 1, 2 megoldást kapunk, amelyek az AB egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel adódnak a már megszerkesztett háromszög(ek)ből.

b) Ezúttal az AB oldalt az A csúcs körül úgy érdemes elforgatni, hogy az elforgatott szakasz illeszkedjen a háromszög AC oldalára ($AC > AB$). A B pont képét P-vel jelöltük az ábrán. Ekkor az ABP háromszög egyenlő szárú, amelyben a szárak α szöget zárnak be egymással, ezért az alapon fekvő szögek $90° - \frac{\alpha}{2}$, továbbá a P csúcsnál fekvő külső szöge $90° + \frac{\alpha}{2}$ nagyságú. Vegyük észre még, hogy $PC = b - c$.

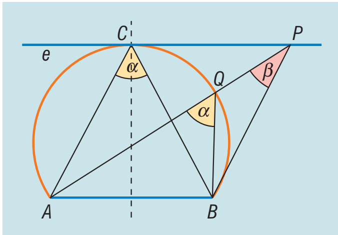


Ezek alapján a szerkesztés menete nagyon hasonló az *a)* részfeladatban ismertetett szerkesztéshez.

1. Az adott $a = BC$ szakaszhoz tartozó $90° + \frac{\alpha}{2}$ szögű egyik látószögkörívet megszerkesztjük.
2. Megszerkesztjük a C középpontú, adott $b - c$ sugarú kört.
3. Megjelöljük a BC szakaszhoz tartozó látószögkörívet, valamint a C középpontú kör megfelelő metszéspontját (P).
4. A BP szakasz felezőmerőlegese kimetszi a C kezdőpontú CP félegyenesből az A csúcsot.

Ebben az esetben csak 0 vagy 1 megoldás lehet.

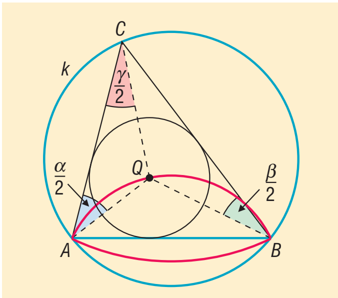
2290 A völgyhíd végpontjait A és B, a vele párhuzamos utat e jelöli az ábrán. Néhány konkrét eset vizsgálata után sejthető, hogy az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az e egyenesből azt a pontot, amelyből az AB szakasz a legnagyobb szögben látszik. Jelöljük ezt a pontot C-vel, az $ACB\sphericalangle$-et pedig α-val. Ekkor a kerületi szögek tétele alapján az AB völgyhíd az ABC háromszög köré írható kör C-t is tartalmazó AB körívének minden pontjából α szög alatt látszik.



Megmutatjuk, hogy az e egyenes C-től különböző tetszőleges P pontjából az AB szakasz α-nál kisebb szögben látható. Mivel a C csúcs az AB szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik, ezért az ABC háromszög egyenlő szárú, így köré írt körének középpontja az AB oldal felezőmerőlegesén található. Ugyanakkor az e és AB párhuzamosak, ezért a C csúcshoz tartozó sugár nemcsak az AB szakaszra, hanem az e egyenesre is merőleges (az e egyenes a köré írt kör C pontbeli érintője), vagyis a P pont szükségképpen a kör külső pontja. Kössük össze a P pontot az AB szakasz végpontjaival; az AP szakasz és a kör metszéspontját az ábrának megfelelően jelöljük Q-val. Mivel a Q pont a körvonal pontja, ezért korábbi megjegyzésünk alapján $AQB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \alpha$. Vegyük észre, hogy az $AQB\sphericalangle$ a PQB háromszög külső szöge, ezért megegyezik a nem szomszédos belső szögek összegével, így $AQB\sphericalangle = QPB\sphericalangle + QBP\sphericalangle > QPB\sphericalangle = APB\sphericalangle$.

Az ábra jelöléseit használva tehát $\alpha > \beta$, ami egyben azt is jelenti, hogy az AB szakasz a C pontból nagyobb szög alatt látszik, mint a P pontból. Ezzel igazoltuk, hogy az e egyenes pontjai közül valóban a C pontból látható az AB szakasz a legnagyobb szög alatt.

2291 Az adott k kört az AB húr két körívre bontja. Bebizonyítjuk, hogy attól függően, hogy a C pont melyik körívén változik, az ABC háromszögbe írt kör Q középpontja illeszkedik az AB szakasz egy-egy megfelelő szögű látószögkörívére. Tegyük fel, hogy a C pont az ábra szerinti hosszabb AB körívén mozog. Ekkor az $ACB\sphericalangle$ a C pont helyzetétől függetlenül állandó, amit γ-val jelöltünk. Az ABC háromszög másik két szöge természetesen már függ a C pont aktuális helyzetétől. Ha e szögeket α és β jelöli, akkor figyelembe véve, hogy a Q pont az ABC háromszög szögfelezőinek metszéspontja azt kapjuk, hogy $CAQ\sphericalangle = QAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, továbbá $CBQ\sphericalangle = QBA\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$.



Mivel az ABQ háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért:

$$AQB\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

A kapott szög a C pont helyzetétől független állandó, ezért a Q pont az AB szakasz egyik $90° + \frac{\gamma}{2}$ szögű látószögkörívén mozog.

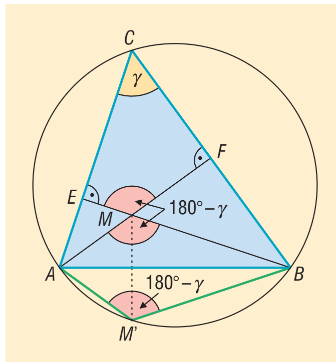
Ha a C pont a k kör másik AB körívén mozog, akkor az $ACB\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$, és így az

$$AQB\sphericalangle = 90^\circ + \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

ami mutatja, hogy a Q pont az AB szakasz megfelelő $180^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$ szögű látószögkörívére esik.

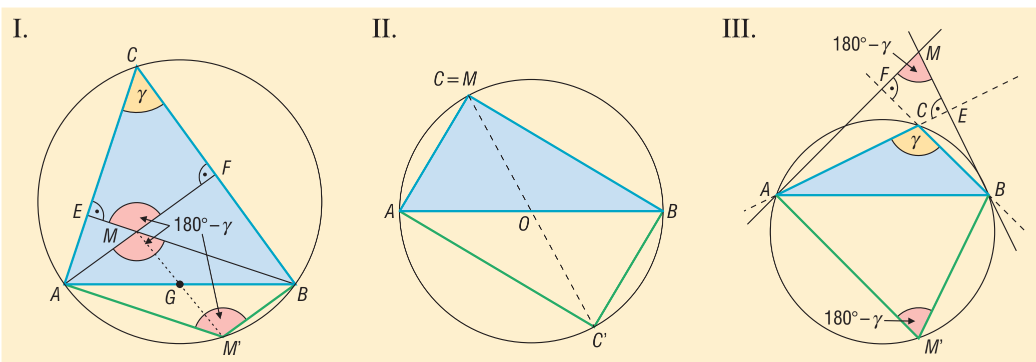
Megjegyzés: Az A és B pontok nem tartoznak a mértani helyhez. A fenti látószögkörívek minden más pontja a mértani hely része, ugyanis egy rögzített Q ponthoz tartozó C pontot az AQB háromszög AQ, illetve BQ oldalára felmért $QAB\sphericalangle$, illetve $QBA\sphericalangle$ szárai metszik ki egymásból.

2292 *a)* Tekintsük az ábra jelöléseit: az ABC háromszög magasságpontja M, az AB egyenesre vonatkozó tükörképe M', az A és B csúcsból induló magasságvonalak talppontjai F és E, a háromszög C csúcsánál lévő szöge γ.



Az $EMFC$ négyszög húrnégyszög, mivel két szemközti szöge 90°-os, ezért $EMF\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$. Mivel az $AMB\sphericalangle$ és az $EMF\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért $AMB\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$ is teljesül. Ha nemcsak a magasságpontot, hanem az AMB háromszöget is tükrözzük az AB egyenesre, akkor tükörképként az $AM'B$ háromszöget kapjuk, hiszen a tükrözés során a tengely A és B pontja helyben marad. A tengelyes tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt az $AM'B\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$. Ekkor viszont az $AM'BC$ négyszögben a C és M' csúcsoknál lévő szögek összege 180°, amiből következik, hogy a négyszög csúcsai egy körre illeszkednek. Ez a kör tartalmazza az A, B, C pontokat, azaz szükségképpen egybeesik az ABC háromszög köré írt körrel. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

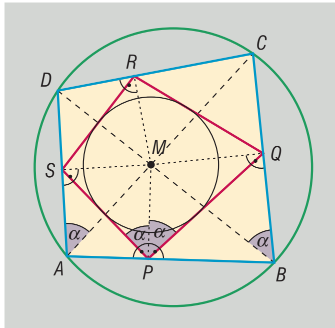
b) Az állítás az *a)* részfeladat állításához hasonló módszerrel bizonyítható. Ha az M pontot ezúttal az AB oldal G felezőpontjára tükrözzük (I.), akkor a tükörképként kapott M' pont az A, B, M pontokkal paralelogrammát feszít ki, amelyben a szemközti szögek természetesen egyenlők, így $AM'B\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$, ami ismét igazolja, hogy az M' pont illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre.



Az állítások derékszögű, illetve tompaszögű háromszögre is érvényben maradnak. A derékszögű háromszög esetében (II. ábra) a magasságpont egybeesik a derékszögű csúccsal (C-vel), a tükörképe (C') pedig szintén derékszögű háromszöget alkot az átfogó két végpontjával, így az állítás Thalész tételének megfordításából azonnal adódik. Az ábra az oldalfelező pontra vonatkozó állítást szemlélteti.

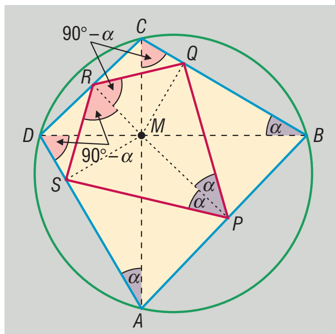
Tompaszögű háromszög esetén (III. ábra) az A és B csúcsokból induló magasságvonalak talppontjai (az ábrán E és F) a háromszög oldalain kívülre esnek csakúgy, mint az M magasságpont. Az $EMFC$ négyszögben a C csúcsnál lévő szög csúcsszöge az ABC háromszög γ szögének, ezért egyenlő vele. Mivel a szóban forgó négyszög húrnégyszög, ezért az M csúcsnál lévő szöge $180^\circ - \gamma$, amiből a már szokásos gondolatmenettel belátható, hogy $AM'B\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$ ezúttal is teljesül. Ekkor viszont az $AM'BC$ négyszög ismét húrnégyszög, azaz az M' pont illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre. Az oldalfelező pontra vonatkozó tükörképről hasonló módon látható be ugyanez a tulajdonság.

2293 *a)* Készítsünk ábrát, majd keressünk húrnégyszögeket a kialakult ábrában. Az $APMS$ négyszögben a P és S csúcsoknál derékszögek vannak, ezért húrnégyszög, amiből következik, hogy $SAM\sphericalangle = SPM\sphericalangle = \alpha$ (a köré írt körben ugyanazon a köríven nyugvó kerületi szögek). Ha az $SAM\sphericalangle$ szárait meghosszabbítjuk, akkor a vele megegyező nagyságú $DAC\sphericalangle$-et kapjuk, ezért $DAC\sphericalangle = \alpha$ is teljesül. Mivel az $ABCD$ húrnégyszög köré írható körben a $DAC\sphericalangle$ a DC íven nyugvó kerületi szög csakúgy, mint a $DBC\sphericalangle$, ezért $DBC\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \alpha$. Vegyük még észre, hogy a $BPMQ$ négyszög is húrnégyszög, amit ugyanúgy indokolhatunk, amint azt az $APMS$ négyszögnél tettük. A négyszög köré írt körben az $MPQ\sphericalangle$ és $MBQ\sphericalangle$ szögek ugyanazon az MQ köríven nyugvó kerületi szögek, ezért $MPQ\sphericalangle = MBQ\sphericalangle = DBC\sphericalangle = \alpha$. Eddigi eredményeinket összefoglalva láthatjuk, hogy $SPM\sphericalangle = QPM\sphericalangle = \alpha$, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy az M pont illeszkedik a $PQRS$ négyszög P csúcsánál lévő szögfelezőjére. Ehhez hasonlóan igazolható, hogy az M pont a négyszög összes szögfelezőjére illeszkedik, azaz a $PQRS$ négyszög valóban érintőnégyszög, amelyben a beírható kör középpontja egybeesik az $ABCD$ négyszög átlóinak M metszéspontjával.



b) Az *a)* részfeladat eredményei alapján az ábrán α-val jelölt szögek mind megegyeznek. Mivel a négyszög átlói ezúttal merőlegesek egymásra, ezért $ADM\sphericalangle = BCM\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. Vegyük észre, hogy az $SMRD$ négyszög is húrnégyszög (az R és S csúcsoknál derékszögek vannak a pontok származtatása révén), ezért a köré írt körben az SM köríven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, azaz $SDM\sphericalangle = SRM\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$.

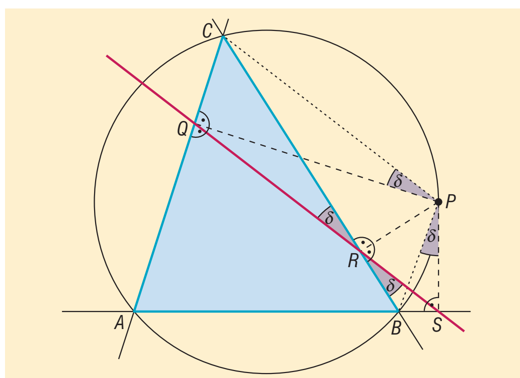
Ugyanígy az $RMQC$ húrnégyszögben: az MQ köríven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, azaz $MRQ\sphericalangle = MCQ\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. Tekintsük most a $PQRS$ négyszöget: a P csúcsnál lévő szöge $2 \cdot \alpha$, az R csúcsnál lévő szöge $2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2 \cdot \alpha$. Mivel a szemközti szögek összege 180°, ezért a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján a $PQRS$ négyszög húrnégyszög.



2294 Az ABC háromszög köré írt körének P pontját merőlegesen vetítve a háromszög oldalegyeneseire, az ábrának megfelelő jelölésekkel a Q, R, S pontokhoz jutunk. Az ábra „hemzseg" a húrnégyszögektől, amelyek közül először elemezzük az $ABPC$ négyszöget. A húrnégyszögek ismert tulajdonsága alapján a $CPB\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle$. Az $ASPQ$ négyszögben az S és Q szemközti csúcsoknál derékszögek vannak, ezért szintén húrnégyszög, így:

$$QPS\sphericalangle = 180^\circ - QAS\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle.$$

Az elmondottak alapján tehát $CPB\sphericalangle = QPS\sphericalangle$.



Ha a fenti egyenlőség két oldalán álló szögekből a $QPB\sphericalangle$-et elvesszük, akkor a visszamaradó szögek is megegyeznek, azaz

$$CPB\sphericalangle - QPB\sphericalangle = QPS\sphericalangle - QPB\sphericalangle,$$
$$CPQ\sphericalangle = BPS\sphericalangle = \delta.$$

Az ábra további húrnégyszöge a $BSPR$ négyszög, hiszen S és R csúcsainál derékszögek vannak. A négyszög köré írt körében a BS köríven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, azaz

$$BRS\sphericalangle = BPS\sphericalangle = \delta. \quad (1)$$

Végül szintén húrnégyszög a $CQRP$ négyszög, hiszen a CP szakasz a Q és R pontokból egyaránt 90°-os szög alatt látszik, így mindkét pont illeszkedik a CP szakasz Thalész-körére. A Thalész-kör QC körívén nyugvó kerületi szögek megegyeznek, ezért:

$$QRC\sphericalangle = QPC\sphericalangle = \delta. \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőségek összehasonlítása után láthatjuk, hogy

$$BRS\sphericalangle = QRC\sphericalangle = \delta,$$

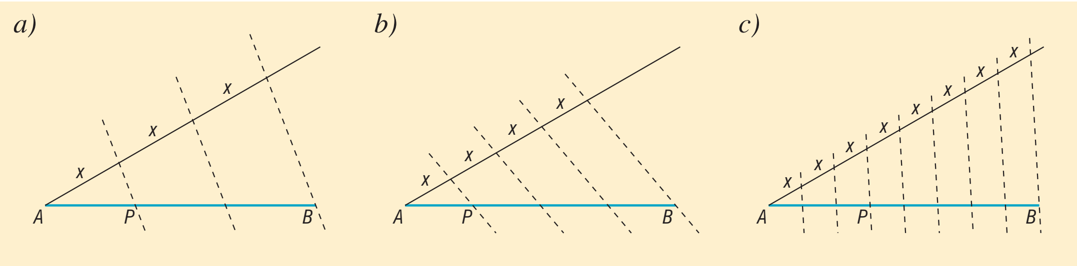
ami azt is jelenti, hogy az RS egyenes és az RQ egyenes egyaránt δ nagyságú szöget zár be a BC egyenessel, ami csak úgy képzelhető el, hogy a Q, R, S pontok egy egyenesre illeszkednek.

Párhuzamos szelők és párhuzamos szelőszakaszok tétele, szögfelezőtétel – megoldások

2295 A kitöltött táblázat:

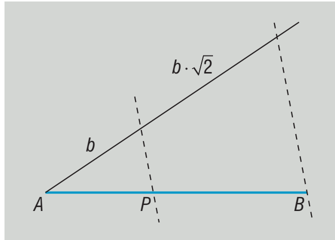
a	*b*	*c*	*d*	*x*	*y*
5 cm	4 cm	3 cm	2,4 cm	7 cm	12,6 cm
2 cm	2,5 cm	3 cm	3,75 cm	4 cm	9 cm
3 cm	6 cm	2 cm	4 cm	$\frac{8}{3}$ cm	8 cm

2296 A szerkesztések a párhuzamos szelők tétele alapján könnyen elvégezhetők. A szerkesztési lépések az ábrákról leolvashatók.



2297 Az adott szakaszt a párhuzamos szelők tétele alapján három egyenlő részre osztjuk, így megkapjuk a szabályos háromszög oldalának hosszát.

2298 Az adott szakaszt felosztjuk $2:3:4$ arányban; a kialakuló szakaszok a szerkesztendő háromszög oldalai lesznek. A három oldal ismeretében a háromszög már könnyen szerkeszthető.



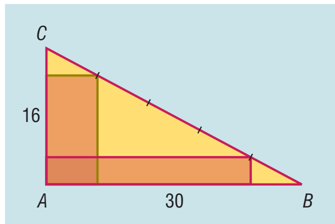
2299 Szerkesszünk egy tetszőleges oldalú négyzetet, majd szerkesszük meg az átlóját; ha az oldal hossza b, akkor átlója $b \cdot \sqrt{2}$. A felosztani kívánt AB szakasz A kezdőpontjából induló félegyenesre mérjük fel a négyzet oldalát, majd átlóját. A párhuzamos szelők tétele alapján szerkeszthető a megfelelő osztópont. (➡)

2300 A trapéz kiegészítő háromszögének oldalai 6 cm, 4,67 cm, 4,67 cm hosszúak.

2301 A trapéz szárainak hossza: 2,29 cm, 6,87 cm.

2302 A trapéz alapjainak hossza: $CD = 14$ cm és $AB = 18$ cm.

2303 A DE egyenes a BC oldalt $1:3$ arányban osztja.



2304 Az ábra segítségével is meggyőződhetünk arról, hogy a feladat feltételeinek két téglalap tesz eleget. Az egyik téglalap oldalai 6 cm és 12,8 cm, így területe 76,8 cm^2. A másik téglalap oldalai 3,2 cm és 24 cm, így területe szintén 76,8 cm^2. (➡)

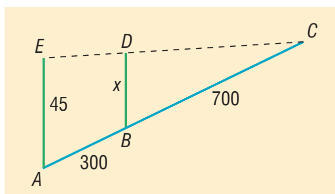
2305 A háromszög alapjához 12 cm hosszú magasság tartozik. A szögfelezőtétel alapján a magasságot az alapon fekvő szög szögfelezője 5 : 13 arányban, 8,67 cm és 3,33 cm hosszú részekre osztja.

2306 A háromszög átfogója $10 \cdot \sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm hosszúságú.
A szögfelezőtétel alapján a szögfelező a szemközti, 10 cm hosszú befogót $1 : \sqrt{2}$ arányban osztja.
A derékszögű csúcshoz közelebbi szakasz hossza:

$$\frac{10}{1+\sqrt{2}} \approx 4{,}14 \text{ cm},$$

a másiké pedig:

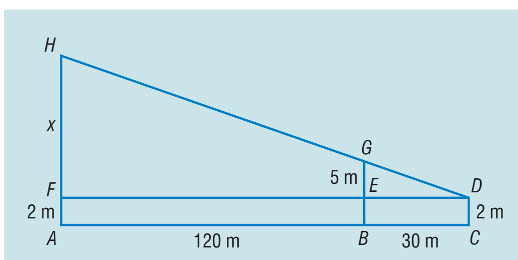
$$\frac{10 \cdot \sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \approx 5{,}86 \text{ cm}.$$



2307 A 45 méteres fa helyét A, az ismeretlen, x magasságúét B, a hegytetőt C jelöli. Ekkor $AB = 300$ méter, és mivel Barnabás fél óra alatt 1000 m utat tesz meg, ezért $BC = 700$ m. A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján:

$$\frac{700}{1000} = \frac{x}{45}, \text{ amiből } x = 31{,}5 \text{ m}.$$

A második fa magassága 31,5 méter.



2308 A feladat geometriai modellje az ábrán látható. AH jelöli az ismeretlen magasságú létesítményt, BG a 7 méter magas fát, és D azt a pontot, ahonnan a fa és az ipari létesítmény teteje egy vonalban látszik. A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva az $FDH\sphericalangle$-re kapjuk, hogy:

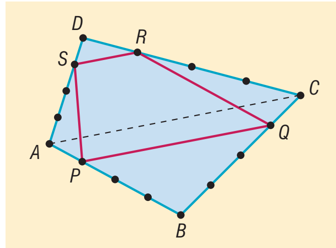
$$\frac{x}{5} = \frac{150}{30} \quad \Rightarrow \quad x = 25.$$

Az ipari létesítmény magassága tehát 27 méter.

2309 *a)* Megmutatjuk, hogy SR és PQ párhuzamosak az AC átlóval. Tekintsük ehhez az $ADC\sphericalangle$-et, amelynek szárait az SR és AC egyenesek úgy metszik, hogy a szárakból kimetszett szakaszok arányaira:

$$\frac{DS}{DA}=\frac{DR}{DC}=\frac{1}{4},$$

és így a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján SR és AC valóban párhuzamosak.



Hasonlóan láthatjuk, hogy az $ABC\sphericalangle$ száraiból PQ és AC olyan szakaszokat metszenek ki, amelyekre igaz:

$$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}=\frac{3}{4},$$

aminek következtében PQ és AC szintén párhuzamosak. Ez azt jelenti, hogy PQ és SR ugyanazzal az AC átlóval párhuzamosak, ami csak úgy lehetséges, ha egymással is párhuzamosak, és ez igazolja, hogy $PQRS$ valóban trapéz.

b) A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazzuk az $ADC\sphericalangle$-re, majd az $ABC\sphericalangle$-re:

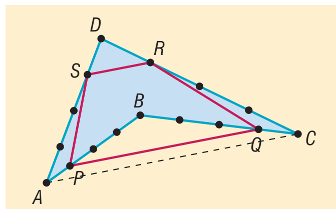
$$\frac{SR}{AC}=\frac{DS}{DA}=\frac{1}{4},$$

valamint

$$\frac{PQ}{AC}=\frac{BP}{BA}=\frac{3}{4}.$$

A feltételek szerint $AC=20$ cm, amit az előző két egyenlőség bal oldalába behelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve adódik, hogy $SR=5$ cm, $PQ=15$ cm.

c) Az *a)* részfeladat állítása konkáv négyszögre is érvényes, amint azt az ábra is szemlélteti. A bizonyítás ugyanúgy történhet, mint a konvex esetben.

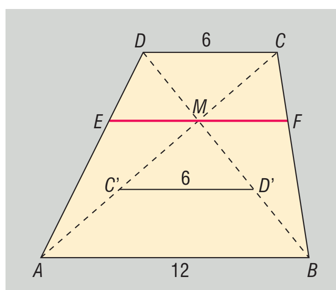


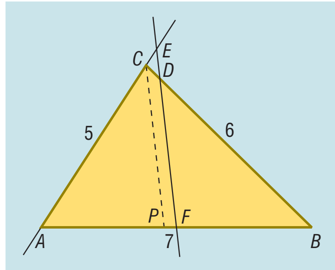
2310 *a)* Tükrözzük az $ABCD$ trapéz rövidebb (CD) alapját az átlók M metszéspontjára; a tükörképet jelölje $C'D'$. Mivel $C'D'$ párhuzamos az AB alappal, továbbá hossza az AB alap hosszának fele, ezért $C'D'$ az ABM háromszög AB-vel párhuzamos középvonala, így C' felezi az AM, és D' a BM szakaszt. A tükrözés a távolságtartó, ezért $C'M=CM$, vagyis C' és M a CA szakasz harmadolópontjai, így látható, hogy M a CA átlót $1:2$ arányban osztja. Ugyanígy belátható, hogy M a DB átlót is harmadolja.

b) Ha az M ponton átmenő, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenes a szárakat az ábrának megfelelően az E és F pontokban metszi, akkor a párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva a $DAC\sphericalangle$-re, valamint a $DBC\sphericalangle$-re:

$$\frac{EM}{DC}=\frac{AM}{AC}=\frac{2}{3},\quad \frac{MF}{DC}=\frac{BM}{BD}=\frac{2}{3}.$$

Az ismert $DC=6$ cm-t behelyettesítve, valamint a számolásokat elvégezve $EM=MF=4$ cm adódik, vagyis az EF szakasz hossza 8 cm.





2311 *a)* Jelöljük a *C*-ből induló szögfelező *AB* oldalra illeszkedő pontját *P*-vel. A szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{5}{6},$$

továbbá felhasználva, hogy $PB = 7 - AP$, egyszerű számolással kapjuk, hogy:

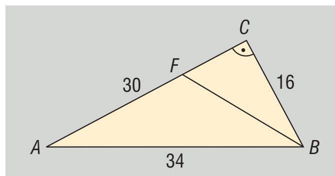
$$AP=\frac{35}{11}\approx 3{,}18 \text{ cm, valamint } PB=\frac{42}{11}\approx 3{,}82 \text{ cm.}$$

b) Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $PBC\sphericalangle$-re:

$$\frac{BD}{BC}=\frac{BF}{PB}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{42}{11}}=\frac{11}{12},$$

amiből a $BC = 6$ cm miatt $BD=\frac{11}{2}=5{,}5$ cm.

Hasonló módszerrel számolható, hogy $AE=\frac{11}{2}=5{,}5$ cm szintén teljesül.



2312 *a)* A feltételek szerint a háromszög befogóinak hossza $15\cdot x$, illetve $8\cdot x$, az *AB* átfogó hossza 34 cm. Ekkor Pitagorasz tétele alapján $(15\cdot x)^2+(8\cdot x)^2=34^2$, amiből $x = 2$ adódik. A háromszög befogói tehát $AC = 30$ cm, illetve $BC = 16$ cm. Ha a *B* csúcsból induló szögfelező az *AC* befogót az *F* pontban metszi, akkor a szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{FC}{30-FC}=\frac{16}{34},$$

amiből *FC*-re 9,6 cm adódik. Az *FB* szögfelező hossza a *BFC* derékszögű háromszögből számolható:

$$BF^2=FC^2+BC^2=9{,}6^2+16^2, \quad \text{amiből} \quad BF=18{,}66 \text{ cm.}$$

b) A háromszögbe írható kör középpontja a szögfelezők *O* metszéspontja. Az ábra jelöléseit követve legyen a *C* csúcsból induló magasságvonal talppontja *P*, a szögfelezőé *G*, a beírt kör az *AB* oldalt érintse *T* pontban. Előbb kiszámoljuk a beírt kör *r* sugarát, valamint a háromszög átfogójához tartozó *m* magasságát. Mindkettő a háromszög területét felhasználva számolható. Mivel $t = r\cdot s$, ahol *s* a háromszög kerületének fele, ezért:

$$\frac{16\cdot 30}{2}=r\cdot\frac{16+30+34}{2}, \quad r=6 \text{ cm.}$$

Másrészt a háromszög területe az oldal és a hozzá tartozó magasság segítségével:

$$\frac{16\cdot 30}{2}=\frac{34\cdot m}{2}, \quad \text{azaz } m=\frac{240}{17}\approx 14{,}12 \text{ cm.}$$

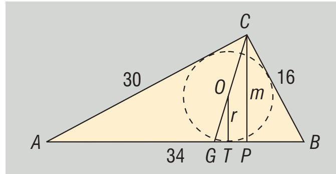
Ezután kiszámoljuk a *GCP* háromszög ismeretlen oldalainak hosszát. A szögfelezőtétel alapján

$$\frac{GB}{34-GB}=\frac{16}{30}, \quad GB=\frac{272}{23}\approx 11{,}83 \text{ cm.}$$

A *BCP* derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével a *PB* kiszámolható: $PB = 7{,}53$ cm. Ekkor viszont $GP = GB - PB = 4{,}30$ cm, és végül

$$GC=\sqrt{GP^2+m^2}=14{,}76 \text{ cm.}$$

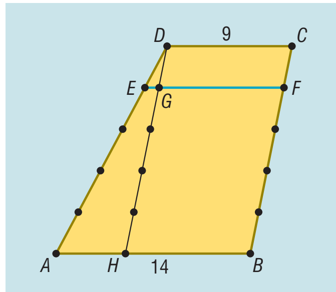
Az OC szakasz hossza ezek után már viszonylag könnyedén számolható. Mivel OT és CP párhuzamosak, ezért a $CGP\sphericalangle$-re alkalmazható a párhuzamos szelőszakaszok tétele:



$$\frac{r}{m} = \frac{GO}{GC}, \quad \frac{6}{14{,}12} = \frac{14{,}76 - OC}{14{,}76}, \quad OC \approx 8{,}49 \text{ cm}.$$

A háromszög beírható körének középpontja a derékszögű csúcstól körülbelül 8,49 cm távolságra található.

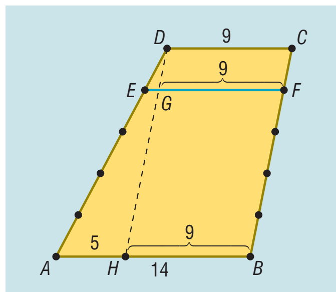
2313 *a)* Húzzunk párhuzamost a trapéz D csúcsán át a BC szárral; a párhuzamos az AB alapot az ábrának megfelelően a H pontban metszi. Ekkor $DHBC$ négyszög paralelogramma, így $HD = BC$. Jelöljük a DH szakasz D-hez legközelebb eső ötödölőpontját G-vel. Ha az AD szár D-hez legközelebbi ötödölőpontja E, akkor



$$\frac{DE}{DA} = \frac{DG}{DH} = \frac{1}{5},$$

és így a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt az EG egyenes párhuzamos az AB alappal. Megmutatjuk, hogy ha a BC szár C-hez legközelebb eső ötödölőpontja F, akkor az F pont illeszkedik az EG egyenesre, amiből a feladat állítása már következik. Valóban, mivel $DG = CF$ (hiszen mindkettő hossza a BC szár egyötöd része), továbbá DG párhuzamos CF-fel, ezért a $DGFC$ négyszög paralelogramma, így GF párhuzamos DC-vel (és persze AB-vel is). Ekkor EG és GF is párhuzamos a trapéz alapjaival, ami csak úgy lehetséges, ha az E, G, F pontok egy egyenesre illeszkednek.

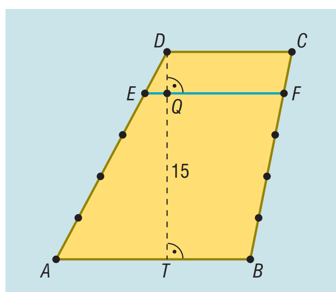
b) Az *a)* részfeladat eredményei alapján $DGFC$ négyszög paralelogramma, ezért $DC = GF = 9$ cm. Ugyanígy paralelogramma a $DHBC$ négyszög is, ezért $HB = 9$ cm, így $AH = 5$ cm. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ADH\sphericalangle$-re:



$$\frac{EG}{5} = \frac{DE}{DA} = \frac{1}{5},$$

amiből $EG = 1$ cm. Az EF szakasz hossza tehát 10 cm.

c) Húzzuk be a trapéz D csúcsából induló DT magasságát, amely az EF szakaszt Q-ban metszi. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az $ADT\sphericalangle$-re:



$$\frac{DQ}{15} = \frac{DE}{DA} = \frac{1}{5},$$

így $DQ = 3$ cm adódik. Ez egyben az $EFCD$ trapéz magassága is, így területe:

$$t = \frac{9+10}{2} \cdot 3 = 28{,}5 \text{ cm}^2.$$

Az $ABFE$ trapéz magassága az előzőekből adódóan 12 cm, így területe:

$$T = \frac{14+10}{2} \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2.$$

2314 Az AC átló hossza az ABC derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével számolható: $AC = 58$ m. Az ABC háromszögben alkalmazva a szögfelezőtételt

$$\frac{BE}{42 - BE} = \frac{40}{58}, \quad BE = \frac{120}{7} \approx 17{,}14 \text{ m adódik.}$$

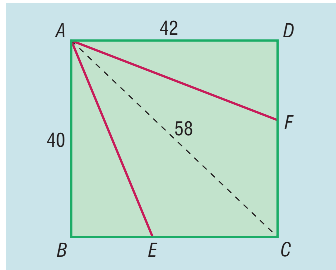
Az ABE derékszögű háromszög alakú kert területe ezek alapján:

$$t_{ABE} = \frac{40 \cdot \frac{120}{7}}{2} \approx 342{,}86 \text{ m}^2 .$$

Ehhez hasonlóan számolható az AFD kert területe is. Előbb az AFC háromszögben alkalmazzuk a szögfelezőtételt:

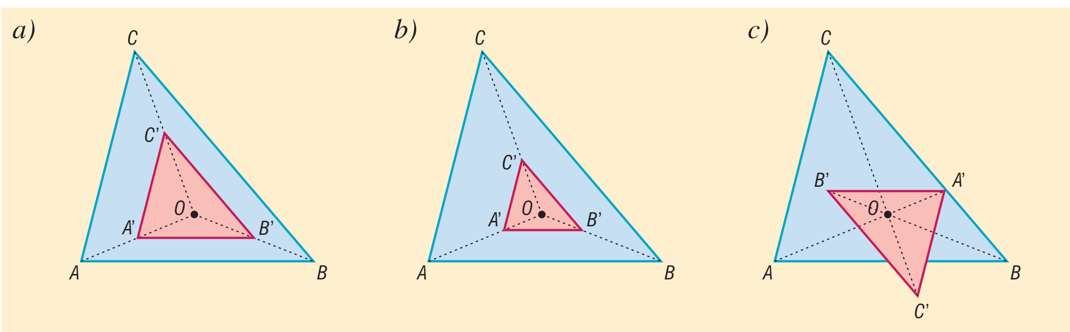
$$\frac{FD}{40 - FD} = \frac{42}{58} \quad \Rightarrow \quad FD = 16{,}8 \text{ m.}$$

Az AFD kert területe $t_{AFD} = 352{,}8$ m^2. Mivel az $ABCD$ kert területe 1680 m^2, ezért a legkisebb gyermek a kertnek körülbelül 20,4%-át, a középső 21%-át örökli. A legjobban a legidősebb gyermek jár, ő a kertnek csaknem 58,6%-át örökli.

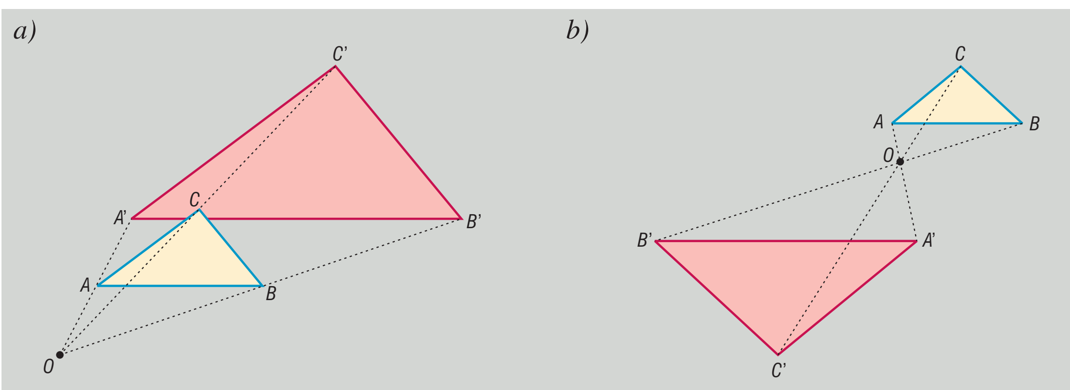


Hasonlósági transzformációk, alakzatok hasonlósága – megoldások

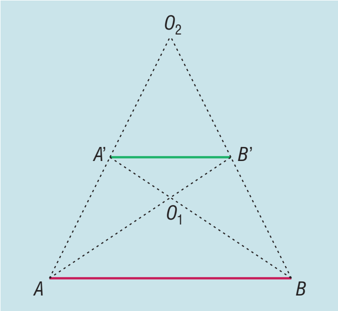
2315



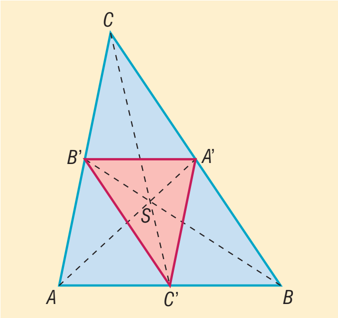
2316



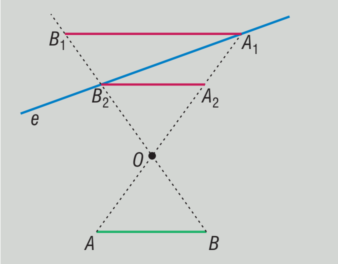
2317 Két ilyen pont van, melyeket az ábrán O_1, illetve O_2 jelöl. A hasonlóság aránya $-\frac{1}{2}$, vagy $\frac{1}{2}$.



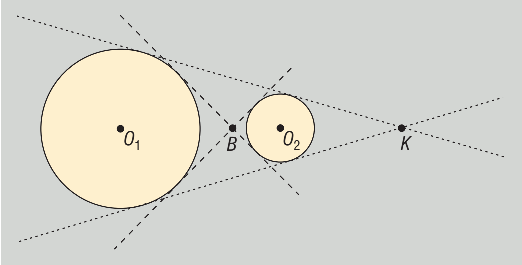
2318 A középpontos hasonlósági transzformáció középpontja a háromszög súlypontja, aránya $-\frac{1}{2}$.



2319 A feladatnak két megoldása van, melyeket az ábra szemléltet.



2320 A feladatnak két megoldása van: az úgynevezett külső és belső hasonlósági pontok. Ezek a pontok a két körhöz húzott közös külső, illetve közös belső érintők metszéspontjai. Ha a két kör sugara megegyezik, akkor a közös külső érintők párhuzamosak egymással, amiből következik, hogy csak egy megoldása van a feladatnak.



2321 A túra útvonala a valóságban 22,8 km, ennek megtételéhez 6 óra szükséges.

2322 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz.
e) Igaz. *f)* Igaz. *g)* Hamis. *h)* Igaz.

2323 *a)* Igen. *b)* Igen. *c)* Nem.

2324 A háromszög oldalai az egyes esetekben:
a) 4,5 cm, 6 cm, 9 cm; *b)* 10,5 cm, 14 cm, 21 cm;
c) 6 cm, 8 cm, 12 cm; *d)* 15 cm, 20 cm, 30 cm.

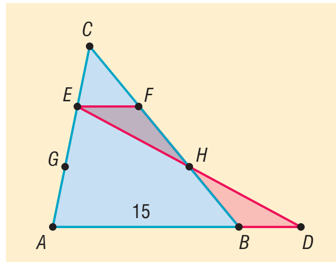
2325 A négyszög oldalai az egyes esetekben:

a) 16 cm, 12 cm, 20 cm, 24 cm; *b)* 24 cm, 18 cm, 30 cm, 36 cm;

c) 8 cm, 6 cm, 10 cm, 12 cm.

2326 A háromszög alapon fekvő szögei 72°-osak, szárszöge 36°-os.

2327 Az ábra jelöléseit használva megállapíthatjuk, hogy a CEF és CAB háromszögek hasonlók egymáshoz, továbbá a HEF és HDB háromszögek egybevágók egymással. Az elmondottakból következik, hogy $EF = 5$ cm és $BD = 5$ cm. (➡)



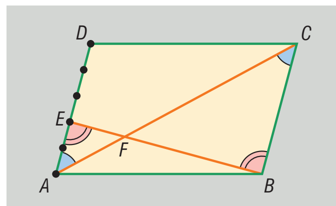
2328 A trapéz átlói az alapok arányában osztják egymást, így a keresett arány $1:7$.

2329 A trapéz hosszabb alapja 60 cm. Ha az átlók $p:q$ arányban osztják egymást, akkor a hosszabb alap $12 \cdot \dfrac{q}{p}$ cm.

2330 A párhuzamos szakasz k hossza a két alap mértani közepe, azaz $k = \sqrt{a \cdot c}$.

2331 A trapéz kiegészítő háromszögének trapézon kívüli csúcsa 15 cm távolságra van az ismert szár rövidebb alapra illeszkedő végpontjától.

2332 Az ábra jelöléseinek megfelelően az AD oldalt $2:3$ arányban osztó pontot E, az AC és BE szakaszok metszéspontját pedig F jelöli. Ekkor $AEF\sphericalangle = CBF\sphericalangle$, továbbá $EAF\sphericalangle = BCF\sphericalangle$, mivel páronként váltószögekről van szó. Az elmondottakból az is következik, hogy az AEF és CBF háromszögekben két-két szög egyenlő, így a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalak aránya



$$\frac{AF}{FC} = \frac{EF}{FB} = \frac{AE}{BC} = \frac{2}{5},$$

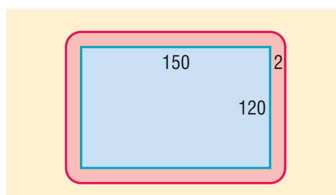
így a két szakasz $2:5$ arányban osztja egymást.

2333 *a)* A lakónegyed a térképen ábrázolt téglalap középpontosan nagyított képének tekinthető, ahol a hasonlóság aránya 1500, ezért a lakónegyedet a valóságban egy 120 méter és 150 méter hosszú oldalakkal rendelkező téglalap határolja. A lakónegyed területe 18 000 m^2.

b) Ha járda szélessége mindenhol 2 méter, akkor a járda négy téglalapból, valamint négy negyedkörből áll az ábrának megfelelően.

A járda területe:

$$T = 2 \cdot 2 \cdot 120 + 2 \cdot 2 \cdot 150 + 2^2 \cdot \pi \approx 1092{,}57 \text{ m}^2.$$



2334 Mindkét feladat megoldásánál vegyük észre, hogy bármely két olyan háromszög hasonló egymáshoz, amelyben az oldalak aránya $2:3:4$. Ezt az észrevételt felhasználva a szerkesztés lépései:

1. Szerkesztünk egy háromszöget, amelynek oldalai 2 cm, 3 cm, 4 cm.
2. Megszerkesztjük a kapott háromszög köré írt (beírt) körét.
3. Megjelöljük az egyik olyan pontot, amelyre vonatkozó középpontos hasonlóság a háromszög köré írt (beírt) körét az adott körbe viszi át.
4. A megszerkesztett háromszöget ugyanannak a középpontos hasonlóságnak vetjük alá, amely a köré írt (beírt) kört az adott körbe viszi át; a képháromszög köré írt (beírt) köre épp az adott kör lesz.

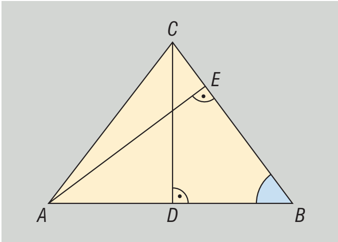
2335 A szerkesztés például azon az észrevételen alapulhat, hogy bármely két olyan háromszög hasonló egymáshoz, amelyekben a szögek megegyeznek. Ezért a szerkesztés lépései:

1. Szerkesztünk egy olyan háromszöget, amelynek szögei az adott szögekkel egyenlők.
2. A megadott szakaszt, melynek hossza a szerkeszteni kívánt háromszög kerületével egyenlő, felosztjuk az 1. pontban szerkesztett háromszög oldalainak arányában.
3. A kapott szakaszokkal, mint oldalakkal a szokásos módon háromszöget szerkesztünk.

2336 Vegyük észre, hogy bármely két olyan háromszög hasonló egymáshoz, amelyben egy szög, valamint a szöget közrefogó oldalak aránya megegyezik. Ezért a szerkesztés lépései a következők:

1. Szerkesztünk egy háromszöget, amelynek egyik szöge az adott szög, a közrefogó oldalak aránya pedig $2:3$.
2. A megadott szakaszt, melynek hossza a szerkeszteni kívánt háromszög kerületével egyenlő, felosztjuk az 1. pontban szerkesztett háromszög oldalainak arányában.
3. A kapott szakaszokkal, mint oldalakkal a szokásos módon háromszöget szerkesztünk.

2337 *a)* A BCD és BAE háromszögek derékszögűek, továbbá a B csúcsnál lévő szögük közös, ezért a két háromszög szögei megegyeznek, ami igazolja a háromszögek hasonlóságát.

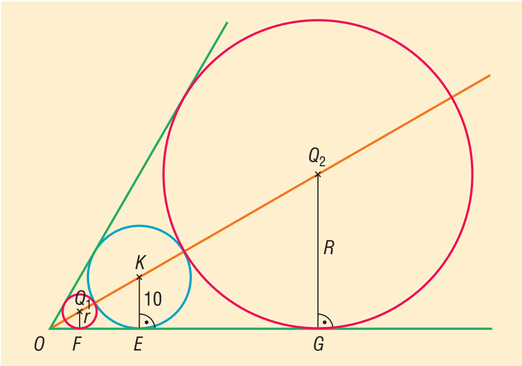


b) A hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért:

$$\frac{BE}{AB}=\frac{BD}{BC}, \quad \text{tehát} \quad \frac{BE}{12}=\frac{6}{BC}.$$

A BDC derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével $BC = 10$ cm adódik, és így $BE = 7{,}2$ cm, $EC = 2{,}8$ cm.

2338 Az adott kör középpontját az ábrán K, az egyik szögszáron létrejövő érintési pontját E jelöli. A feladatnak két megoldása van, amelyeket az ábrán piros színnel jelöltünk. A kisebb kör középpontját Q_1-gyel, a megfelelő száron kialakuló érintési pontját F-fel, a nagyobb kör középpontját Q_2-vel, érintési pontját G-vel jelöltük. Ekkor az OKE és OQ_2G háromszögek hasonlóak, hiszen mindkettő derékszögű, továbbá az O csúcsnál lévő szögük közös.



A háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért az $OQ_2 = OK + 10 + R$ összefüggést felhasználva:

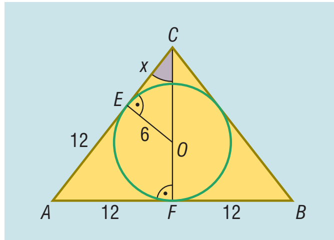
$$\frac{KE}{OK}=\frac{R}{OQ_2}, \quad \text{azaz} \quad \frac{10}{OK}=\frac{R}{OK+10+R}.$$

Vegyük még észre, hogy az OKE derékszögű háromszög O csúcsánál 30°-os szög van, ezért egy „félszabályos” háromszög. Az ilyen háromszögben az átfogó a rövidebb befogó kétszerese, vagyis $OK = 20$ cm. Az előző egyenlőségbe behelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve $R = 30$ cm adódik.

A kisebb, Q_1 középpontú kör sugara a fenti gondolatmenet értelemszerű módosításával számolható.

A számolásokat elvégezve $r=\dfrac{10}{3}\approx 3{,}33$ cm adódik.

2339 *a)* Ha az ABC háromszögbe írt kör az E pontban érinti a háromszög AC oldalát, akkor a kör érintőjének tulajdonsága alapján OE merőleges AC-re. Ebből kifolyólag az OEC háromszög derékszög csakúgy, mint az AFC háromszög. A két háromszög C csúcsánál lévő szögük közös, ezért a két háromszög szögei megegyeznek és így valóban hasonlók egymáshoz.



b) Az ábra jelölései alapján $CE = x$, és $AE = 12$ cm, hiszen az A pontból a háromszögbe írható körhöz húzott érintőszakaszok megegyeznek, vagyis $AE = AF = 12$ cm. Az OEC és AFC háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{x}{6} = \frac{CF}{12}, \quad \text{azaz} \quad CF = 2 \cdot x.$$

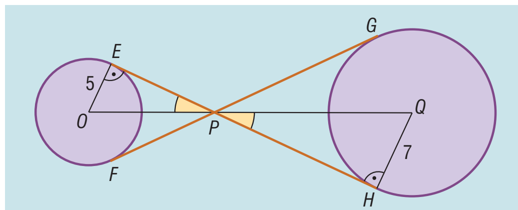
Az AFC háromszögben Pitagorasz tétele alapján:

$$12^2 + (2x)^2 = (x + 12)^2,$$

amiből $3x^2 - 24x = 0$, aminek egyetlen pozitív megoldása $x = 8$, tehát az ABC háromszög CF magassága 16 cm hosszúságú.

c) A háromszög alakú doboz területe 192 cm^2, a négyzet alakú dobozé 144 cm^2. Ebből következik, hogy a háromszög alakú doboz alapterülete a négyzet alakú dobozénál 33,33%-kal nagyobb.

2340 *a)* Ha a két érintő a P pontban metszi egymást, továbbá az érintési pontok E és F, valamint H és G, akkor az OPE háromszög hasonló a QPH háromszöghöz, ahol O és Q a körök középpontját jelölik (ld. ábra). Ezt azonnal beláthatjuk, ha felidézzük, hogy a kör érintője merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra, valamint hivatkozunk arra, hogy a két háromszögben a P csúcsnál csúcsszögek vannak, amelyek egyenlő nagyságúak. A két háromszög megfelelő oldalainak arányára:

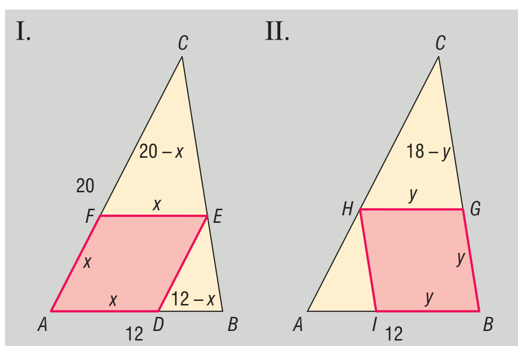


$$\frac{5}{OP} = \frac{7}{300 - OP}, \quad \text{amiből} \quad OP = 125 \text{ méter}.$$

b) Az OEP háromszögben Pitagorasz tételével EP kiszámolható: $EP = 124{,}90$ m. A PHQ háromszögben EP-nek PH felel meg, és a hasonlóság aránya $\frac{7}{5}$, ezért $PH = \frac{7}{5} \cdot EP = 174{,}86$ méter, így az EH sétaút kb. 299,76 méter hosszú, és ezért a két sétaút együtt 599,52 méter.

2341 *a)* A feltételeknek megfelelő rombusznak és a háromszögnek egy közös szöge van. Mivel ez a közös szög a háromszög bármelyik szöge lehet, ezért összesen háromféleképpen tudunk rombuszt írni a háromszögbe.

b) Vizsgáljuk azt az esetet, amikor az A csúcs közös csúcsa a rombusznak és a háromszögnek (I.). Az $ADEF$ rombusz oldalának hosszát jelöljük x-szel. Ekkor az ábrán szereplő FEC és ABC háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként megegyeznek), így:



$$\frac{FE}{FC} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{azaz} \quad \frac{x}{20 - x} = \frac{12}{20},$$

$$x = \frac{12 \cdot 20}{20 + 12} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

A második esetben (II.) a közös csúcs a B pont. A rombusz oldala ugyanúgy számolható, mint az előbb. A számolások elvégzése után azt kapjuk, hogy a rombusz oldala:

$$y = \frac{18 \cdot 12}{18 + 12} = 7{,}2 \text{ cm}.$$

Végül a harmadik esetben a C csúcs a közös csúcsa a rombusznak és a háromszögnek. Ekkor a rombusz oldalára:

$$z = \frac{18 \cdot 20}{18 + 20} = \frac{180}{19} \; (\approx 9{,}47) \text{ cm adódik.}$$

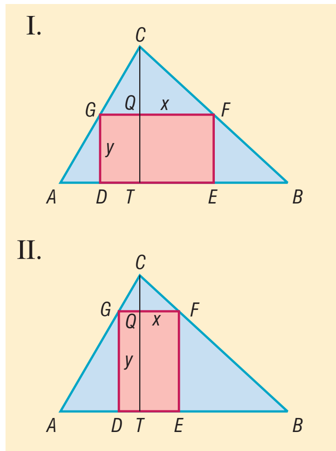
2342 A feladat feltételeinek eleget tevő téglalap csúcsait D, E, F, G jelöli, míg T az AB oldalhoz tartozó magasság talppontja, Q a CT magasság és a GF szakasz metszéspontja (ld. ábra). A feladatnak két megoldása van attól függően, hogy a téglalapnak a hosszabb, vagy a rövidebb oldala párhuzamos az AB oldallal. Vizsgáljuk előbb azt az esetet, amikor a hosszabb oldal párhuzamos az AB-vel, vagyis $x : y = 5 : 3$ (I.). Mivel az ABC háromszög hasonló az GFC háromszöghöz (szögeik páronként megegyeznek), ezért:

$$\frac{x}{12 - y} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}, \quad \text{amiből} \quad 3x = 60 - 5y.$$

A téglalap oldalainak arányából következik, hogy $3x = 5y$, és így $y = 6$ cm, $x = 10$ cm.

A második esetben (II.) a téglalap rövidebb oldala párhuzamos az AB oldallal, vagyis $x : y = 3 : 5$. Ebben az esetben a megfelelő aránypár változatlan, csak ezúttal $5x = 3y$.

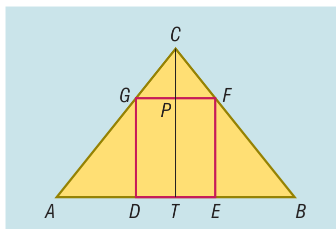
A téglalap oldalai: $y = \dfrac{150}{17} \approx 8{,}82$ cm és $x = \dfrac{90}{17} \approx 5{,}29$ cm.



2343 Az ABC háromszögben $AB = 24$ cm, a hozzá tartozó CT magasság 15 cm, a beírt $DEFG$ téglalap GF oldala 8 cm (ld. ábra). Ekkor a GFC és ABC háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként megegyeznek), ezért:

$$\frac{CP}{8} = \frac{15}{24},$$

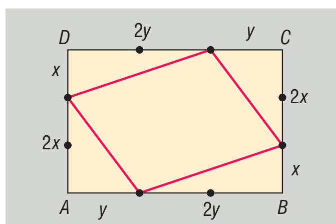
amiből $CP = 5$ cm, így $PT = 10$ cm. A téglalap másik oldala 10 cm.



2344 *a)* Ha a téglalap oldalai 12 cm és 18 cm, akkor $x = 4$ cm és $y = 6$ cm. A visszamaradó négyszög oldalai Pitagorasz tételének alkalmazásával számolhatók.

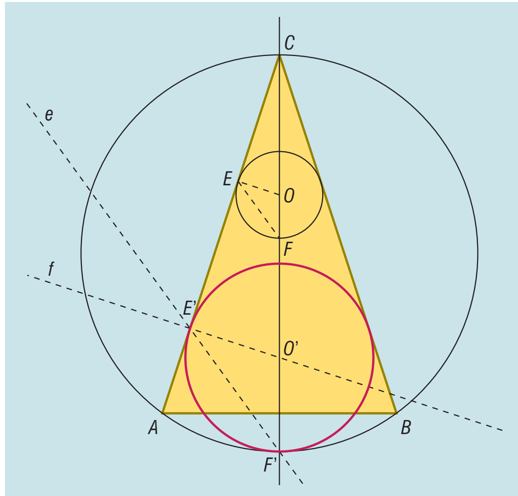
A négyszög oldalai 10 cm, illetve $\sqrt{160} \approx 12{,}65$ cm.

b) A visszamaradó négyszög paralelogramma.



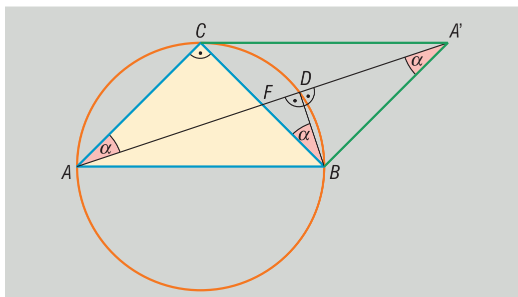
2345 Előbb egy egyszerűbb feladat megoldását elemezzük. Hagyjuk el a feladat feltételei közül azt, hogy a szerkesztendő kör érinti az ABC háromszög köré írt kört. Ekkor a következő problémához jutunk: szerkesszünk olyan kört, amely érinti a háromszög két szárát. Ilyen körből végtelen sok van, a középpontjuk a C csúcsból induló szögfelezőn található. A megszerkesztett kört egy C középpontú középpontos hasonlósággal átvihetjük abba a körbe, amely már a háromszög köré írt kört is érinti.

Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők.



1. Az ABC háromszög köré írható kört szerkesztünk.
2. Az ABC háromszög C csúcsából induló szögfelezőt (egyben a magasságvonalat), valamint a kör C-vel átellenes F' pontját megszerkesztjük.
3. Az AC szár egy tetszőleges E pontjában a szárra merőlegest szerkesztünk. Ennek CF'-vel való metszéspontja O.
4. Megszerkesztjük az O középpontú, OE sugarú kört, ami érinti a szárakat, valamint a szögfelezővel való, C-től távolabbi metszéspontja F.
5. Az F' ponton átmenő, EF-fel párhuzamos e egyenest szerkesztünk.
6. Az EO szakasz megszerkesztése.
7. Megszerkesztjük az e egyenes és az AC szár E' metszéspontján átmenő, EO-val párhuzamos f egyenest.
8. Az f egyenes és a CF' szakasz O' metszéspontját, valamint az O' középpontú E'-t tartalmazó kört megszerkesztjük.

2346 Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontját az ábrának megfelelően F-fel, az A pont F-re vonatkozó tükörképét A'-vel, a $CAD\sphericalangle$-et α-val jelöltük. Az $ABA'C$ négyszög középpontosan szimmetrikus az F pontra vonatkozóan, azaz a négyszög paralelogramma, így AC és $A'B$ párhuzamosak. Ebből adódóan $CAD\sphericalangle = DA'B\sphericalangle = \alpha$, mivel váltószögekről van szó. Vegyük még észre, hogy Thalész tétele alapján $ADB\sphericalangle = 90°$, amiből azonnal következik, hogy $A'DB\sphericalangle = 90°$ szintén teljesül. Ekkor azonban az AFC és $A'BD$ háromszögekben két-két szög megegyezik, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. Ugyanígy hasonló egymáshoz az AFC és BFD háromszög is, mivel mindkettő derékszögű, továbbá a $CAF\sphericalangle = CAD\sphericalangle$, valamint a $DBF\sphericalangle = DBC\sphericalangle$ egyaránt a rövidebb DC köríven nyugvó kerületi szögek, és ezért a kerületi szögek tétele alapján mindkét szög α-val egyenlő.



Az AFC és BFD háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{FC}{AC} = \frac{FD}{BD}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{2} = \frac{FD}{BD}, \quad \text{amiből} \quad FD = \frac{1}{2} \cdot BD. \qquad (1)$$

Az AFC és $A'BD$ háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{FC}{AC} = \frac{BD}{A'D}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{2} = \frac{BD}{A'D}, \quad \text{amiből} \quad A'D = 2 \cdot BD. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) összefüggések megfelelő oldalait összeadva:

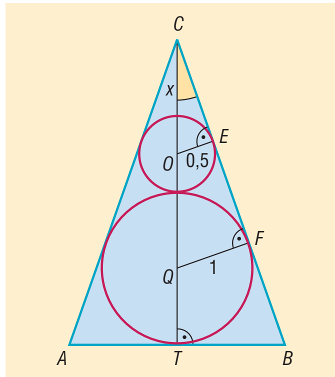
$$FD + A'D = \frac{5}{2} \cdot BD \quad \Rightarrow \quad FA' = \frac{5}{2} \cdot BD.$$

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért $AF = FA'$, így $AF = \frac{5}{2} \cdot BD$ szintén teljesül. Ekkor viszont:

$$AD = AF + FD = \frac{5}{2} \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot BD = 3 \cdot BD,$$

amit bizonyítani kellett.

2347 *a)* Az ábrán az ABC egyenlő szárú háromszögbe írt kisebb kör középpontját O, a nagyobbét Q, míg a BC száron lévő érintési pontokat E, illetve F jelöli. Látható, hogy a COE, valamint a CQF háromszögekben a C csúcsnál lévő szög közös, továbbá mindkét háromszög derékszögű, így a két háromszög hasonló egymáshoz. Ha $CO = x$, akkor



$$\frac{x}{0,5} = \frac{x + 1,5}{1},$$

$$x = 1,5 \text{ méter.}$$

Ezek alapján az ABC háromszög CT magasságának hosszára:

$$CT = x + OQ + QT = 1,5 + 1,5 + 1 = 4 \text{ méter.}$$

A szintén derékszögű CBT háromszögben a C csúcsnál ugyanakkora szög van, mint a COE háromszögben, ezért ez a két háromszög is hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{CB}{CT} = \frac{CO}{CE}, \quad \text{azaz} \quad \frac{CB}{4} = \frac{1,5}{CE}.$$

A COE háromszög CE befogójának hosszára Pitagorasz tételével kapjuk:

$$CE = \sqrt{2} \text{ m } (\approx 1,41 \text{ m}).$$

Az utolsó egyenlőségbe történő visszahelyettesítés után:

$$CB = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \text{ m } \ (\approx 4,24 \text{ m}).$$

A COE és CBT háromszögek hasonlóságát még egyszer felhasználva:

$$\frac{BT}{CT} = \frac{OE}{CE}, \quad \text{azaz} \quad \frac{BT}{4} = \frac{0,5}{\sqrt{2}}.$$

Rendezés után megkapjuk BT hosszát:

$$BT = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ m } \ (\approx 1,41 \text{ m}).$$

A kartonlap oldalai tehát $AB = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,83$ méter, $BC = AC = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4,24$ méter.

b) Az ABC kartonlap területe:

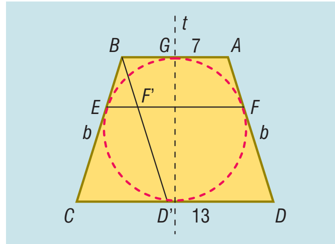
$$T = \frac{AB \cdot CT}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{2} = 4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}^2 \ (\approx 5,66 \text{ m}^2).$$

A két céltábla területének összege:

$$t = 0,5^2 \cdot \pi + 1^2 \cdot \pi = \frac{5 \cdot \pi}{4} \text{ m}^2 \ (\approx 3,93 \text{ m}^2).$$

A veszteség: $\frac{T - t}{T} \approx 0,306$, azaz körülbelül 30,6%.

2348 *a)* Mivel az $ABCD$ négyszög szimmetrikus trapéz, ezért szárai megegyeznek, azaz $AD = BC = b$. Az érintőnégyszögek tétele alapján a trapéz szemközti oldalai hosszának összege megegyezik, azaz $2 \cdot b = 7 + 13 = 20$, így $b = 10$ cm. A trapéz szárai 10 cm hosszúak.



b) Használjuk ki, hogy a trapéz tengelyesen szimmetrikus az alapok közös felezőmerőlegesére, amelyet az ábrán t-vel jelöltünk. A t tengelyre vonatkozó tükrözés a beírt kört önmagába, míg a BC szárat az AD szárba viszi át. Nyilvánvaló, hogy az E érintési pont képe az F érintési pont. Ebből következik, hogy a t tengelyre vonatkozó tükrözés az EF szakaszt szintén önmagába viszi. Ez csak úgy lehetséges, ha az EF szakasz merőleges a tükrözés tengelyére, de ekkor EF valóban párhuzamos a trapéz alapjaival.

c) Toljuk el az AD szárat önmagával párhuzamosan úgy, hogy az A csúcs a B csúcsba, a D csúcs a D', az F pont az F' pontba kerüljön. Ekkor $BD' = AD = 10$ cm, továbbá a $D'DAB$ négyszög paralelogramma, ezért $DD' = BA = 7$ cm, amiből $CD' = 6$ cm adódik.

A $CD'B$ és az $EF'B$ háromszög szögei páronként megegyeznek, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz, így megfelelő oldalaik arányára igaz, hogy:

$$\frac{CD'}{BC} = \frac{EF'}{BE}, \quad \text{azaz} \quad \frac{6}{10} = \frac{EF'}{BE}.$$

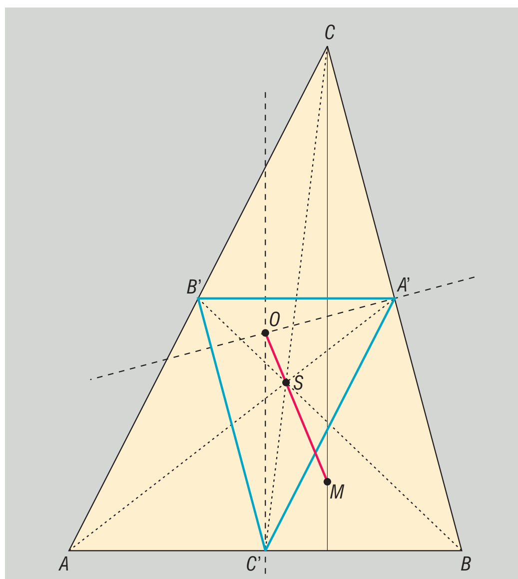
Végül vegyük észre, hogy a B pontból a trapézba írható körhöz húzott érintőszakaszok, BE és BG egyenlők, továbbá G az AB szakasz felezőpontja, ezért $BE = BG = 3{,}5$ cm. Helyettesítsük be a kapott eredményt az utolsó egyenlőségbe, így adódik, hogy:

$$\frac{6}{10} = \frac{EF'}{3{,}5}, \; EF' = 2{,}1 \text{ cm}.$$

Ekkor viszont

$$EF = EF' + F'F = 2{,}1 + 7 = 9{,}1 \text{ cm}.$$

2349 Az ábrán az ABC háromszög oldalfelező pontjait A', B', C'; súlypontját S; magasságpontját M; köré írható körének középpontját pedig O jelöli. A súlypont ismert tulajdonságait ezúttal úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az ABC háromszöget a súlypontra vonatkozó $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság átviszi az $A'B'C'$ háromszögbe. Megmutatjuk, hogy a középpontos hasonlóság az M pontot az O pontba viszi át. Ehhez elegendő belátnunk, hogy az O pont egyben az $A'B'C'$ háromszög magasságpontja is. Mivel az O pont az ABC háromszög köré írható körének középpontja, ezért O illeszkedik pl. az A' pontban a BC-re emelt merőlegesre. Ez a merőleges azonban nemcsak a BC-re, hanem az azzal párhuzamos $B'C'$-re is merőleges, azaz az $A'B'C'$ háromszögnek egyben egyik magasságvonala is.

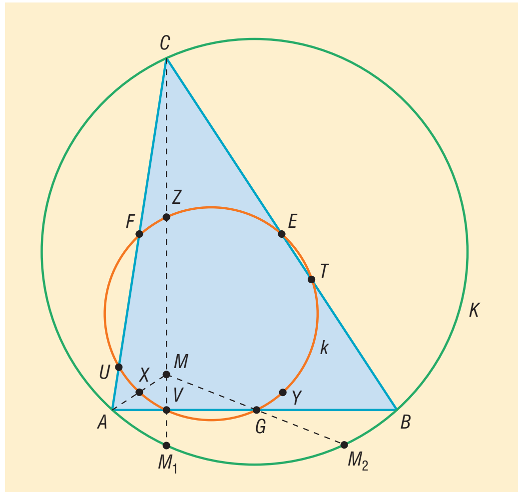


Hasonlóan igazolható, hogy O az $A'B'C'$ háromszög másik két magasságvonalán is rajta van, ezért O valóban az $A'B'C'$ háromszög magasságpontja.

A középpontos hasonlóság során a pont (M), a képe (O), valamint a hasonlóság centruma (S) egy egyenesre illeszkednek, ezért a feladat állítását igazoltuk. Mivel az S középpontú, $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság M-et O-ba viszi, ezért S az OM szakaszt $1:2$ arányban osztja úgy, hogy az O ponthoz van közelebb.

Megjegyezzük, hogy szabályos háromszögben a három nevezetes pont egybeesik, ezért nem jön létre egyértelműen az Euler-egyenes.

2350 Az ABC háromszög K köré írt körét az M magasságpontból felére kicsinyítve a k kört kapjuk. Megmutatjuk, hogy a k kör tartalmazza az AB oldalhoz tartozó magasságvonal V talppontját, az AB oldal G felezőpontját, valamint az AM szakasz X felezőpontját (lásd ábra). Ez utóbbi nyilvánvaló, hiszen az A csúcs a K kör egy pontja, M pedig a középpontos hasonlóság centruma, ezért az A pont éppen az AM szakasz X felezőpontjába megy át.



A 2292. feladat *a)* részfeladatában megmutattuk, hogy az M pont AB egyenesre vonatkozó M_1 tükörképe illeszkedik a háromszög köré írható K körre. Ekkor azonban az MM_1 szakasz V felezőpontja a tükörtengely, vagyis az AB oldalegyenes egy pontja. Mivel az MM_1 szakasz egyben merőleges is az AB egyenesre csakúgy, mint a CM egyenes, ezért a C csúcsból induló magasságvonal tartalmazza az MM_1 szakaszt, így a V pont éppen a magasságvonal talppontja. Összefoglalva elmondhatjuk, hogy a K körön található M_1 pont M-re vonatkozó kicsinyített képe (V) az AB oldalhoz tartozó magasságvonal talppontja. Mivel a kicsinyítés illeszkedéstartó, ezért a V pont valóban illeszkedik a K kör kicsinyített képére, azaz a k körre.

A 2292. feladat *b)* részfeladatában azt is megmutattuk, hogy az M pontnak az AB szakasz G felezőpontjára vonatkozó tükörképe (M_2) szintén illeszkedik a K körre. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a K körön lévő M_2 pont kicsinyített képe megegyezik a G ponttal. Ebből következik, hogy a G pont valóban illeszkedik a k körre.

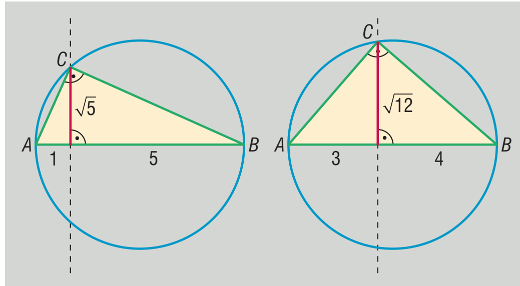
Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy nemcsak az X, V, G pontok illeszkednek a K kör kicsinyített képére, hanem a háromszög másik két oldalának felezőpontjai (E és F), a másik két csúcs és a magasságpont közti szakaszok felezőpontjai (Y és Z), valamint a másik két magasságvonal talppontjai (U és T) is. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Arányossági tételek a derékszögű háromszögben és a körben – megoldások

2351 A kör sugara 6,5 cm. A feladat a magasságtétel segítségével is megoldható: $\sqrt{(2r-9)\cdot 9}=6$, amiből $r=6{,}5$ cm. Mivel $6{,}5<9$, ezért a 9 cm a nagyobb körszelet magassága.

2352 Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két olyan részre bontja, amelyek hossza $\frac{25}{\sqrt{34}}\approx 4{,}29$ cm, illetve $\frac{9}{\sqrt{34}}\approx 1{,}54$ cm. Az átfogóhoz tartozó magasság hossza $\frac{15}{\sqrt{34}}\approx 2{,}57$ cm.

2353 A feladat megoldható például a magasságtétel alkalmazásával. A szerkesztés menetét az ábrán követhetjük nyomon. (➡)



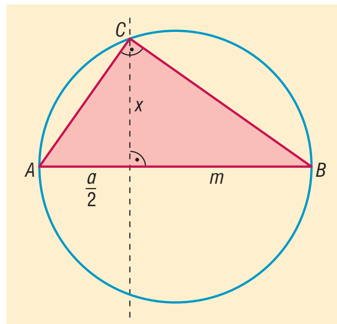
2354 A háromszög befogóinak hossza:

$$16 \cdot \sqrt{3} \approx 27{,}71 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 16 \text{ cm}.$$

2355 A háromszög másik befogója: $\frac{65}{12} \approx 5{,}42$ cm, az átfogója $\frac{169}{12} \approx 14{,}08$ cm. Az átfogóhoz tartozó magasság 5 cm hosszú.

2356 A két négyzet területének aránya $2:5$.

2357 Ha a szabályos háromszög oldala a, magassága m, akkor területe $\frac{a \cdot m}{2}$, a vele megegyező területű négyzet oldala pedig $x = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot m}$. Az x hosszúságú szakasz szerkesztése a magasságtétel segítségével történhet. A szerkesztés menete az ábrán nyomon követhető. A négyzet oldalának ismeretében a négyzet a szokásos módon szerkeszthető. (➡)

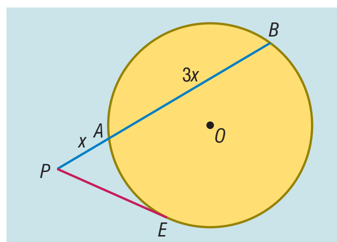


2358 Feladatként a $\sqrt{15}$ cm hosszú szakaszt kell megszerkeszteni. A szerkesztés a magasságtétel segítségével történhet. A négyzet oldalának ismeretében a négyzet a szokásos módon szerkeszthető.

2359 A trapéz magassága $\sqrt{50} \approx 7{,}07$ cm, területe $10 \cdot \sqrt{50} \approx 70{,}71 \text{cm}^2$.

2360 Ha a P ponton át húzott szelő a kört A-ban és B-ben metszi, akkor $PA = x$, $PB = 4 \cdot x$, és ebből adódóan $AB = 3 \cdot x$. A PB szelőszakasz 12 cm-rel hosszabb, mint PA, ezért $AB = 12$ cm, amiből $x = 4$ cm. Ekkor az érintő- és szelőszakaszok tétele szerint a P-ből húzott érintőszakasz hossza:

$$PE = \sqrt{x \cdot 4x} = 2 \cdot x = 8 \text{ cm}.$$



2361 A két szelőszakasz hossza 5 cm, 20 cm.

2362 *a)* A pont a kör középpontjától $\sqrt{35} \approx 5{,}92$ cm távolságra van.

b) A szelő a kör középpontjától $\frac{\sqrt{95}}{2} \approx 4{,}87$ cm távolságra halad.

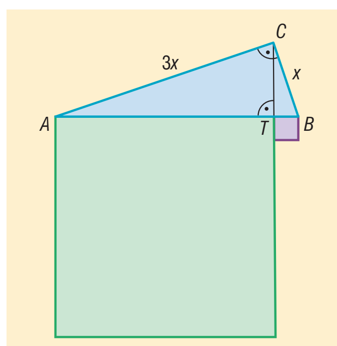
2363 A feltételek szerint az ABC derékszögű háromszög befogóit $BC = x$, $AC = 3 \cdot x$ alakban írhatjuk fel. Ha az átfogóhoz tartozó magasság talppontja T, akkor a befogótétel alapján:

$$x^2 = BT \cdot AB \quad \text{és} \quad (3x)^2 = AT \cdot AB.$$

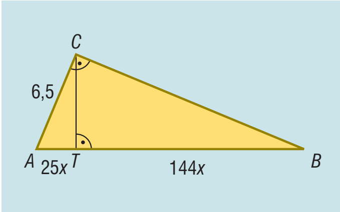
A két egyenlőség megfelelő oldalait egymással elosztva, négyzetre emelés után adódik, hogy:

$$\frac{1}{9} = \frac{BT}{AT}, \quad \text{amiből} \quad \frac{1}{81} = \frac{BT^2}{AT^2}.$$

A kapott egyenlőség alapján az átfogó két szeletére emelt négyzetek területének aránya $1:81$.



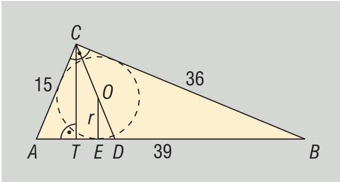
2364 Az ábra jelölései mellett a CT magasság az AB átfogót két olyan szakaszra bontja, amelyek hossza $25 \cdot x$ és $144 \cdot x$. A befogótétel alapján:



$$6{,}5 = \sqrt{25x \cdot 169x} = 65x,$$

amiből $x = 0{,}1$. A háromszög átfogója így 16,9 cm, hosszabb befogója Pitagorasz tételével számolható. A BC befogó hossza 15,6 cm.

2365 *a)* A háromszög AB átfogója Pitagorasz tételével számolható: $AB = 39$ cm. Ha az átfogóhoz tartozó magasság talppontja T, akkor a befogótétel alapján $15^2 = AT \cdot 39$, $36^2 = BT \cdot 39$, és így $AT = 5{,}77$ cm, $BT = 33{,}23$ cm.



b) Az átfogóhoz tartozó CD szögfelező hossza a CTD derékszögű háromszögből számolható. Előbb azonban kiszámoljuk az AD és BD szakaszok hosszát a szögfelezőtétellel:

$$\frac{AD}{39 - AD} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}, \text{ amiből } AD\text{-t kifejezve: } AD = \frac{195}{17} \; (\approx 11{,}47 \text{ cm}).$$

A CTD háromszög TD befogója: $TD = AD - AT = 11{,}47 - 5{,}77 = 5{,}7$ cm.

A CT magasság az ABC háromszögben a magasságtétellel számolható:

$$CT = \sqrt{AT \cdot BT} = 13{,}85 \text{ cm}.$$

Végül a CTD háromszögben Pitagorasz tételével kapjuk, hogy:

$$CD = \sqrt{TD^2 + CT^2} = \sqrt{5{,}7^2 + 13{,}85^2} \approx 14{,}98 \text{ cm}.$$

c) A háromszög területe $t = r \cdot s$, ahol r a beírt kör sugara, s a háromszög kerületének fele. Ezek alapján:

$$\frac{15 \cdot 36}{2} = r \cdot \frac{15 + 36 + 39}{2},$$

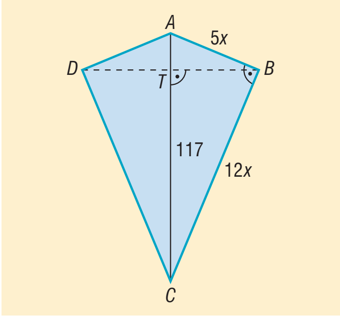
amiből $r = 6$ cm-t kapunk.

d) Az EDO és TDC háromszögek hasonlók egymáshoz, mivel szögeik páronként megegyeznek. Ezek alapján a megfelelő oldalak aránya megegyezik, vagyis:

$$\frac{r}{OD} = \frac{CT}{CD}.$$

A már kiszámított adatokat behelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve $OD = 6{,}49$ cm-t kapunk. A beírt kör középpontjának C csúcstól való távolsága: $CO = CD - OD = 8{,}49$ cm.

2366 *a)* Ha a két háromszögből a leírtak alapján készítünk sárkányt, akkor az $ABCD$ deltoidhoz jutunk. A deltoidban $AB = 5 \cdot x$, $BC = 12 \cdot x$, az AC átló 117 cm hosszú, továbbá a B és D csúcsánál derékszögek vannak (lásd ábra). Az ABC háromszögben Pitagorasz tétele alapján $(5x)^2 + (12x)^2 = 117^2$, amiből $x = 9$ cm, a háromszög befogói pedig: $AB = 45$ cm, $BC = 108$ cm. Szintén az ABC háromszögben a befogótétel is alkalmazható, így kapjuk, hogy:



$$45^2 = AT \cdot 117 \quad \text{és} \quad 108^2 = CT \cdot 117.$$

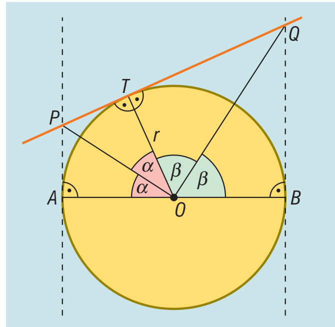
A számolásokat elvégezve $AT = 17{,}3$ cm, illetve $CT = 99{,}7$ cm.

Végül alkalmazzuk a magasságtételt az ABC háromszögben: $BT = \sqrt{17{,}3 \cdot 99{,}7} = 41{,}5$ cm. A deltoid átlói, azaz a szükséges nádszálak hossza: $BD = 83{,}0$ cm, $AC = 117{,}0$ cm.

b) Az *a)* részfeladatban kiszámoltuk, hogy a BD átló az AC átlót 17,3 cm, illetve 99,7 cm hosszú részekre bontja. Mivel a deltoid szimmetriatengelye megfelezi a másik átlót, ezért az AC átló a BD-t két egyenlő részre bontja:

$$BT = TD = 41{,}5 \text{ cm}.$$

2367 *a)* A két párhuzamos érintő az ábra szerint az A és B pontokban érinti a kört, a PQ érintő érintési pontját pedig T jelöli. Mivel az érintő merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra, ezért az érintési pontoknál kialakuló szögek 90°-osak; ezeket az ábrán bejelöltük. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok megegyeznek, ezért $PA = PT$, illetve $QT = QB$. Vegyük még észre, hogy az AOP, TOP, TOQ, BOQ háromszögekben egy-egy befogó a kör sugarával egyenlő, amiből az is következik, hogy az AOP háromszög a TOP háromszöggel, a TOQ háromszög pedig a BOQ háromszöggel egybevágó (két oldal + a közrezárt szög egyenlősége alapján).



Az egybevágó háromszögekben az egymásnak megfelelő szögek egyenlők, azaz:

$$AOP\sphericalangle = TOP\sphericalangle = \alpha, \quad \text{valamint} \quad TOQ\sphericalangle = BOQ\sphericalangle = \beta.$$

Ez azt is jelenti, hogy:

$$POQ\sphericalangle = \alpha + \beta = \frac{AOB\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a POQ háromszög derékszögű.

b) A már elmondottakból következik, hogy OT a POQ háromszög PQ átfogójához tartozó magassága, így a magasságtétel alapján

$$r = TO = \sqrt{PT \cdot TQ},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

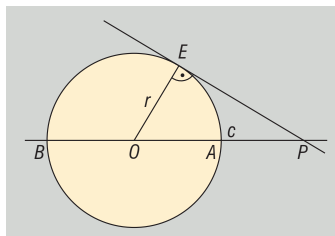
2368 *a)* A megoldás az ábrán látható.

b) A szelőszakaszok hossza: $PA = c - r$, $PB = c + r$.

c) A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele alapján:

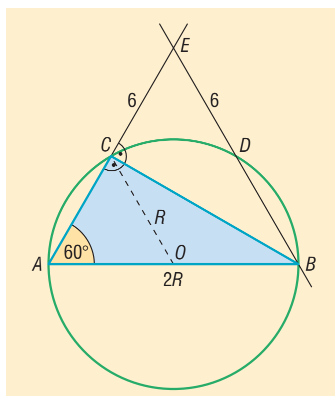
$$(c - r)\cdot(c + r) = PE^2.$$

Ha elvégezzük a bal oldali műveleteket, és a kapott egyenlőséget átrendezzük, akkor $c^2 = PE^2 + r^2$-hez jutunk, ami éppen Pitagorasz tétele az OEP derékszögű háromszögben.

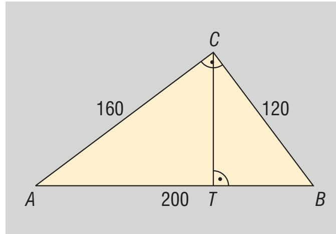


2369 *a)* Belátható, hogy a D pont csak a rövidebb BC köríven helyezkedhet el. Ekkor viszont az érintő- és szelőszakaszok tétele alapján $EC \cdot EA = ED \cdot EB$, továbbá $EC = ED = 6$ miatt $EA = EB$. Ez azt is jelenti, hogy az ABE háromszög egyenlő szárú és az alapon fekvő egyik szöge 60°-os. Ebből adódóan az alapon fekvő másik szöge is 60°-os, így a háromszög valóban szabályos.

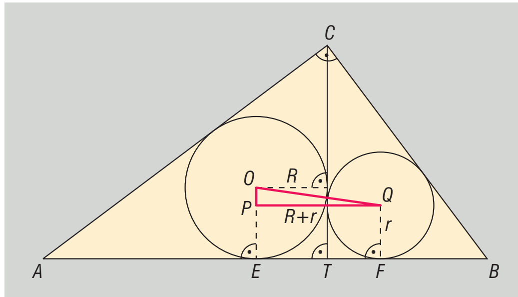
b) Ha az ABC háromszög köré írt kör sugarát R jelöli, akkor az AOC egyenlő szárú háromszögben két oldal hossza R, továbbá az AC alapon fekvő szög 60°-os, ezért a háromszög szintén szabályos, így $AC = R$. Ekkor az ABE szabályos háromszög AB oldala $2R$, EA oldala $R + 6$. A két oldal egyenlősége alapján $R = 6$ cm.



2370 *a)* A park AB átfogójára Pitagorasz tételével $AB = 200$ méter adódik. Az átfogóhoz tartozó CT magasság az átfogót az AT és BT szakaszokra bontja. Ekkor a befogótételt az AC befogóra felírva: $160^2 = AT \cdot 200$, $AT = 128$ m, amiből $BT = 72$ m. A háromszög CT magassága a magasságtétellel számolható: $CT^2 = 128 \cdot 72$, így $CT = 96$ m. Ekkor a park egyik részének megkerülése 384 méter, a másik részé 288 méter hosszú sétával lehetséges.



b) A szökőkutak az ATC, ill. a BTC háromszögek beírt köreinek középpontjába kerülnek. Legyen az ábra jelöléseinek megfelelően a két kút O és Q, a két háromszög beírt köreinek sugara R és r, a beírt körök átfogóval vett érintési pontjai E és F. Mivel a kör érintője merőleges az érintési ponthoz tartozó sugarára, ezért OE és QF merőleges az AB átfogóra, amiből következik, hogy egymással viszont párhuzamosak.



Ez azt is jelenti, hogy az $OEFQ$ négyszög trapéz, amelynek alapjai OE és QF. Ha ebben a trapézban meghúzzuk a QP magasságot, akkor az OPQ derékszögű háromszögben

$$OP = OE - PE = OE - QF = R - r, \text{ továbbá } PQ = ET + TF = R + r.$$

Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az OPQ háromszögben, így

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2,$$
$$OQ^2 = (R - r)^2 + (R + r)^2,$$
$$OQ^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + R^2 + 2Rr + r^2,$$
$$OQ = \sqrt{2 \cdot (R^2 + r^2)}.$$

Látható, hogy az OQ kiszámolása R és r ismeretében már nem nehéz feladat. A két sugár kiszámolásához használjuk fel, hogy a háromszög területe a beírt kör sugarának és félkerületének szorzata, ezért:

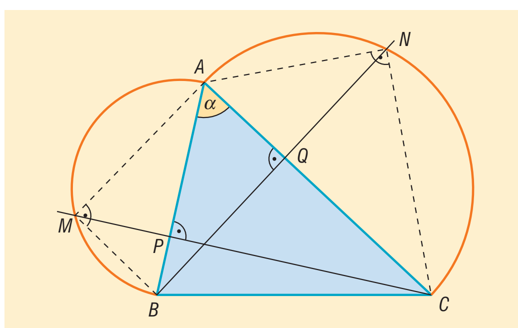
$$R = \frac{T_{ATC}}{s_{ATC}} = \frac{128 \cdot 96}{128 + 96 + 160} = 32 \text{ m}, \quad \text{illetve} \quad r = \frac{T_{BTC}}{s_{BTC}} = \frac{72 \cdot 96}{72 + 96 + 120} = 24 \text{ m}.$$

Ekkor az OQ szakasz hossza

$$OQ = \sqrt{2 \cdot (32^2 + 24^2)} = 40 \cdot \sqrt{2} \approx 57{,}0 \text{ méter}.$$

A két szökőkút távolsága 57 méter.

2371 *a)* A feladat szövegének megfelelő ábra:



b) Az APC és AQB derékszögű háromszögekben az A csúcsnál ugyanakkora hegyesszög van, ezért a két háromszög szögei páronként megegyeznek, így hasonlók egymáshoz. A megfelelő oldalaik aránya:

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB},$$

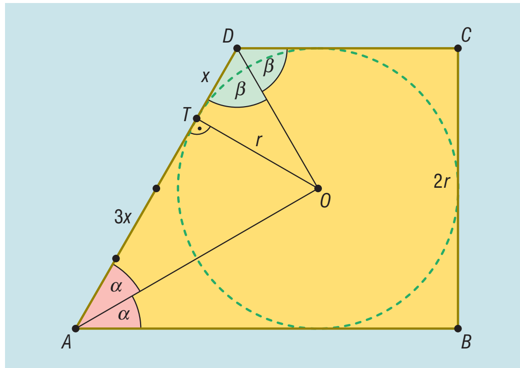
amiből átrendezés után éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

c) Thalész tétele alapján az ABM és ACN háromszögek derékszögűek, ezért külön-külön alkalmazható bennük a befogótétel:

$$AM^2 = AP \cdot AB \quad \text{és} \quad AN^2 = AQ \cdot AC.$$

Mivel a két egyenlőség jobb oldalán egyenlő mennyiségek állnak (lásd *b)* részfeladat eredménye), ezért a bal oldalak is megegyeznek, azaz $AM = AN$. Ez pontosan azt jelenti, hogy az A csúcs az M és N pontoktól ugyanolyan távolságra van.

2372 *a)* A beírt kör O középpontja egyenlő távolságra van a négyszög oldalaitól, ezért minden szögfelezőre illeszkedik. Ebből következően az ábrán azonos módon jelölt szögek egymással megegyeznek. A trapéz egy szárán fekvő szögeinek összege 180°, ezért $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$. Ekkor az OAD háromszögben két szög összege 90°, ebből következik, hogy az O csúcsnál valóban derékszög van.



b) Ha a trapézba írt kör az AD szárat a T pontban érinti, akkor OT merőleges az AD szárra, továbbá ha $DT = x$, akkor a feltételek alapján $TA = 3x$. Alkalmazva az OAD háromszögre a magasságtételt azt kapjuk, hogy:

$$r^2 = x \cdot (3x) = 3x^2, \; r = \sqrt{3} \cdot x,$$

ahol r a beírt kör sugarát jelöli. A trapézba írt kör sugarának, valamint az AD szár hosszának aránya:

$$\frac{r}{AD} = \frac{r}{4x} = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{4 \cdot x} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

c) Mivel a trapéz érintőnégyszög, ezért az érintőnégyszögek tétele alapján a szemközti oldalainak összege megegyezik, azaz $AD + BC = 20$ cm. Felhasználjuk, hogy $BC = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x$, és $AD = 4 \cdot x$, így $\left(2 \cdot \sqrt{3} + 4\right) \cdot x = 20$, így:

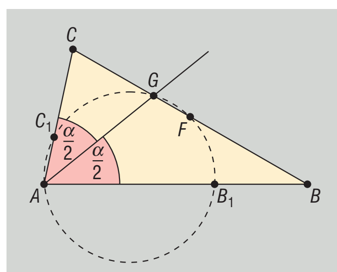
$$x = \frac{20}{2 \cdot \sqrt{3} + 4}, \quad \text{és} \quad AD = 10{,}7 \text{ cm}, \; BC = 9{,}3 \text{ cm}.$$

2373 Tegyük fel, hogy $AB > AC$. Alkalmazzuk a körhöz húzott szelőszakaszok tételét a B, majd a C pontra:

$$BF \cdot BG = BB_1 \cdot BA, \qquad CG \cdot CF = CC_1 \cdot CA.$$

Mivel az F pont a BC oldal felezőpontja, így $BF = CF$, ezért ha a két egyenlőség megfelelő oldalait elosztjuk egymással, valamint a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezzük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{BG}{CG} = \frac{BB_1 \cdot BA}{CC_1 \cdot CA}.$$



Használjuk fel még a szögfelezőtételt az A csúcsból induló szögfelezőre:

$$\frac{BG}{CG} = \frac{BA}{CA}.$$

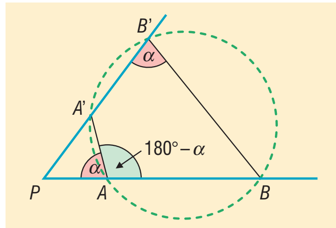
Az utolsó két egyenlőség bal oldalán álló mennyiségek megegyeznek, így jobb oldaluk is egyenlő:

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BB_1 \cdot BA}{CC_1 \cdot CA}, \quad \text{amiből} \quad 1 = \frac{BB_1}{CC_1}.$$

Az utóbbi épp a bizonyítandó állítással egyenértékű.

Hasonlóan bizonyítható, ha $AB < AC$.

2374 A feltételek szerint $\dfrac{PA}{PA'} = \dfrac{PB'}{PB}$, ami azt is jelenti, hogy a PAA' és $PB'B$ háromszögekben a P-nél lévő szög, valamint a szöget közrefogó két-két oldal aránya megegyezik, azaz a két háromszög hasonló egymáshoz. Ekkor persze az egymásnak megfelelő szögek is megegyeznek, azaz $A'AP\sphericalangle = BB'P\sphericalangle = \alpha$. Az $A'AB\sphericalangle$ külső szöge a PAA' háromszögnek, ezért $A'AB\sphericalangle = 180° - \alpha$. Most vizsgáljuk az $ABB'A'$ négyszöget: a négyszög A és B' csúcsainál lévő szögek összege 180º, ezért a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján a négyszög húrnégyszög. Ez a tulajdonsága igazolja, hogy csúcsai valóban egy körre illeszkednek.



A hasonlóság néhány alkalmazása a terület- és térfogatszámításban – megoldások

2375 *a)* A háromszög oldalaira $21^2 + 28^2 = 35^2$ teljesül, így Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű. Az átfogóhoz tartozó magasság két derékszögű háromszögre bontja az eredeti háromszöget, amelyekben a hegyesszögek páronként megegyeznek, ami igazolja, hogy a két háromszög hasonló egymáshoz.

b) A két háromszög hasonlóságának aránya $\dfrac{3}{4}$, így területük aránya $\dfrac{9}{16} = 0{,}5625$.

2376 A hatszög területe a háromszög alakú virágágyás területének $\dfrac{2}{3}$ része.

2377 A körök sugarai az egyes esetekben:

a) $\dfrac{20}{11} \approx 1{,}82$ cm; $\dfrac{80}{11} \approx 7{,}27$ cm; $\dfrac{120}{11} \approx 10{,}91$ cm.

b) $\dfrac{20\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} \approx 5{,}50$ cm; $\dfrac{20\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} \approx 6{,}73$ cm; $\dfrac{40}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} \approx 7{,}77$ cm.

2378 A beírt sokszög minden esetben hasonló a kiindulásul vett sokszöghöz. A hasonlóság aránya a két sokszög oldalának arányával egyenlő.

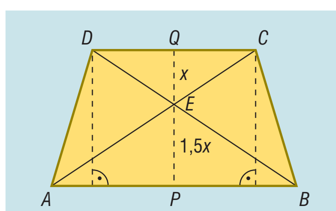
a) A hasonlóság aránya $1:2$, a két háromszög területének aránya $1:4$.

b) A hasonlóság aránya $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, a két négyzet területének aránya $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

c) A hasonlóság aránya $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, a két hatszög területének aránya $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$.

2379 *a)* Az ABE és a CDE háromszögek hasonlók egymáshoz, a hasonlóság aránya $3:2$. A két háromszög területének aránya $9:4$.

b) Jelöljük a CDE háromszög CD oldalához tartozó EQ magasságot x-szel. Ekkor az ABE háromszög AB oldalához tartozó EP magasság $1{,}5\cdot x$, a trapéz magassága pedig $2{,}5\cdot x$. A trapéz területe ismert, ebből adódik, hogy $150 = \dfrac{18+12}{2}\cdot 2{,}5\cdot x$, és ezért $x = EQ = 4$ cm, $EP = 6$ cm. A CDE háromszög területe 24 cm^2, az ABE háromszög területe 54 cm^2.



c) Belátható, hogy az ABD, valamint ABC háromszögek területe egyenlő, ugyanis közös az AB oldaluk, valamint megegyezik az ehhez tartozó magasságuk. Ha mindkét háromszög területéből elvesszük a metszetük, vagyis az ABE háromszög területét, akkor a visszamaradó DAE, valamint BCE háromszögek területe is megegyezik. Ezek után a BCE és DAE háromszögek területe 36 cm^2.

2380 A hasonlóság aránya $\sqrt[3]{3,375} = 1,5$. Béla akváriumának méretei: 75 cm, 45 cm, 30 cm.

2381 A kétliteres palack kétszer olyan magas, mint a negyedliteres.

2382 *a)* A kisebb gúla térfogata a nagyobb gúla térfogatának $\frac{8}{125}$ -szerese.

Mivel a két gúla hasonló egymáshoz, ezért a hasonlóság aránya:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5},$$

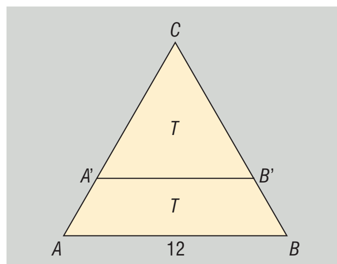
és így a kisebb gúla magassága:

$$\frac{2}{5} \cdot 15 = 6 \text{ cm}.$$

b) A kisebb gúla, valamint az eredeti gúla felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete, vagyis $\frac{4}{25} = 0,16$.

2383 A feltételek szerint az $A'B'C$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, és a két háromszög területének aránya $1:2$, így a hasonlóság aránya:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Az $A'B'C$ szabályos háromszög oldala: $12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$, ezért kerülete $18 \cdot \sqrt{2}$ cm.

Az $ABB'A'$ trapéz kerülete:

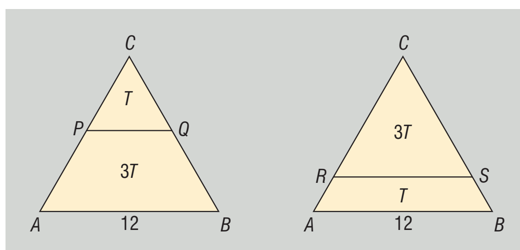
$$K = AB + 2 \cdot BB' + A'B' = 12 + 2 \cdot \left(12 - 6 \cdot \sqrt{2}\right) + 6 \cdot \sqrt{2} = 36 - 6 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}.$$

Az $A'B'C$ háromszög és az $ABB'A'$ trapéz kerületének aránya:

$$\lambda = \frac{18 \cdot \sqrt{2}}{36 - 6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{6 - \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(6 + \sqrt{2}\right)}{34} \approx 0,93.$$

2384 *a)* Két ilyen párhuzamos húzható.

b) Az ábra jelöléseit használva:

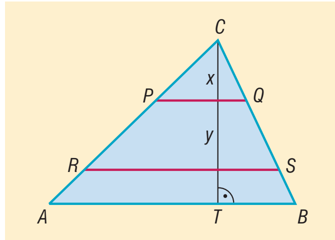


Előbb a PQ szakasz hosszát számoljuk. A PQC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, és a területük aránya $1:4$, így hasonlóságuk aránya $1:2$. Ebből következik, hogy a PQ szakasz hossza az AB szakasz hosszának fele, azaz 6 cm.

A második esetben az RSC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. Mivel a területük aránya $3:4$, így hasonlóságuk aránya: $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ebből következik, hogy a PQ szakasz hossza:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 6 \cdot \sqrt{3} \approx 10,39 \text{ cm}.$$

2385 Jelöljük az ábrának megfelelően a C-hez közelebbi út két végpontját P-vel és Q-val, a távolabbi út végpontjait R-rel és S-sel. Ekkor a PQC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, a területük aránya 0,16, és így a hasonlóság aránya $\sqrt{0,16} = 0,4$. Ha a PQ út C-től való távolságát x jelöli, akkor a két háromszög magasságának aránya $\frac{x}{500} = 0,4$, amiből $x = 200$ méter. A C-hez közelebbi út a C csúcstól 200 méterre halad.



Az RSC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, a területük aránya 0,84, így hasonlóságuk aránya $\sqrt{0,84} = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Ha az RSC háromszög magassága y, akkor a magasságok aránya $\frac{y}{500} = \frac{\sqrt{21}}{5}$, amiből $y = 100 \cdot \sqrt{21} \approx 458,26$ méter. A távolabbi út a C csúcstól 458,26 méterre halad.

2386 A kockacukros doboz egy $6 \times 6 \times 9$-es méretű téglatestnek tekinthető, amelybe összesen 324 darab cukor fér el. A feltételek szerint a dobozból már legalább egy cukor elfogyott, így a feladatnak a következő két megoldása van: a $2 \times 2 \times 3$-as, illetve $4 \times 4 \times 6$-os méretű téglatestek. Az előbbi esetben a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$, így a sértetlen dobozban lévő kockacukroknak $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$-szerese van a dobozban (vagyis összesen 12 darab), az utóbbi esetben pedig a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, így a dobozban a kockacukroknak $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$-szerese van (azaz összesen 96 darab).

2387 *a)* A két metszősík közül a gúla csúcsához közelebbi egy a kiindulási gúlához hasonló gúlát metsz ki. A két gúla térfogatának aránya $1:3$, így hasonlóságuk aránya $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. Ebből következően a kisebb gúla magassága $m_1 = 18 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \approx 12,5$ cm.

Az eredeti gúla csúcsától távolabbi párhuzamos által levágott gúla szintén hasonló az eredeti gúlához, a térfogatuk aránya ezúttal $2:3$, így hasonlóságuk aránya $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, ezért a sík a gúla csúcsától $m_2 = 18 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 15,7$ cm távolságra halad.

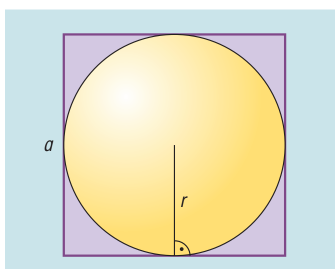
b) A keletkező síkmetszetek az eredeti gúla alaplapjához hasonló síkidomok. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért a két keletkező síkidom területe:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot 30 \approx 14,4 \text{ cm}^2, \quad \text{illetve} \quad \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot 30 \approx 22,9 \text{ cm}^2.$$

2388 *a)* A doboz keresztmetszetét az ábra mutatja: látható, hogy a doboz minden lapja olyan négyzet, amelynek a oldala a földgömb r sugarának kétszerese.

Ezek alapján a 10 000 doboz elkészítéséhez szükséges karton mennyisége:

$$A = 10\,000 \cdot 6 \cdot (2r)^2 = 10\,000 \cdot 6 \cdot 0,64^2 = 24\,576 \text{ m}^2.$$



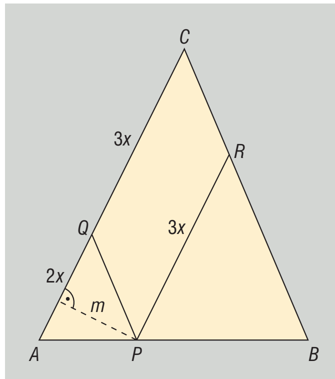
b) Ha a gömbök sugarát 24 cm-re csökkentik, akkor az új földgömbök az eredetihez hasonlók lesznek, hasonlóságuk aránya pedig a sugarak arányával egyenlő, azaz:

$$\lambda = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Ugyanez érvényes a csomagoláshoz felhasznált dobozokra is. Mivel a hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért a szükséges karton mennyisége a földgömb sugarának csökkentése után $\lambda^2 = \frac{9}{16}$-szorosára változik (13 824 m^2-re).

c) Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő, ezért az új földgömbök tárolásához $\lambda^3 = \frac{27}{64}$-szer akkora raktár szükséges, mint az eredeti dobozok tárolásához. Mivel $\frac{27}{64} < \frac{1}{2}$, ezért valóban elég egy feleakkora raktár.

2389 Az ABC háromszög AB oldalának P pontján át húzott párhuzamosok a megfelelő oldalakat Q-ban és R-ben metszik az ábra szerint. Ekkor a $PRCQ$ négyszög paralelogramma, hiszen szemközti oldalai párhuzamosak. Az APQ és PBR háromszögek hasonlók egymáshoz, hiszen szögeik páronként megegyeznek, továbbá a területük aránya $4:9$, így hasonlóságuk aránya $2:3$. Ez azt is jelenti, hogy ha $AQ = 2 \cdot x$, akkor a megfelelő PR szakaszra $PR = 3 \cdot x$, és így a paralelogramma szemközti CQ oldalára is $CQ = 3 \cdot x$ teljesül. Jelöljük az APQ háromszög AQ oldalához tartozó magasságát m-mel, ekkor a háromszög területére igaz, hogy:



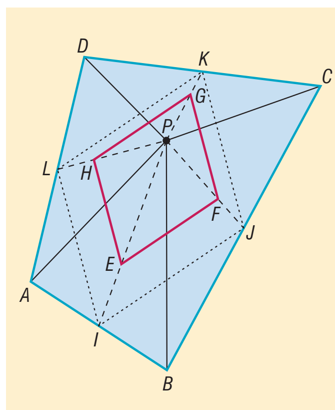
$$4 = \frac{(2x) \cdot m}{2} = x \cdot m.$$

Mivel m egyben a $PRCQ$ paralelogramma CQ oldalához tartozó magassága is, ezért a paralelogramma területe:

$$t = (3x) \cdot m = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2.$$

Az ABC háromszög területe tehát 25 cm^2.

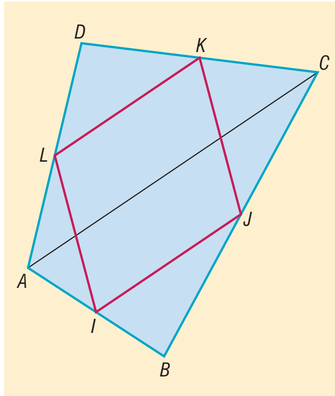
2390 *a)* Az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjait az ábrának megfelelően I, J, K és L jelöli. Vegyük észre, hogy az E, F, G és H súlypontok rendre 2 : 1 arányban osztják a megfelelő háromszögben kialakuló PI, PJ, PK, illetve PL súlyvonalakat. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $IJKL$ négyszöget a P pontra vonatkozó, $\lambda = \frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság az $EFGH$ négyszögbe viszi át.



Mivel a középpontos hasonlóságban szakasz és képe párhuzamos, ezért az $EFGH$ négyszög oldalai párhuzamosak az $IJKL$ négyszög megfelelő oldalaival.

Ismert, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai középpontosan szimmetrikus négyszöget, azaz paralelogrammát alkotnak. Eszerint az $IJKL$ négyszög, és ebből adódóan az $EFGH$ négyszög is paralelogramma.

b) Előbb az $IJKL$ és az $ABCD$ négyszögek területének arányát számoljuk. Húzzuk be az AC átlót. Mivel I és J felezőpontok, ezért az IJ középvonala az ABC háromszögnek. Emiatt az IJ párhuzamos AC-vel és hossza az AC hosszának fele. Ebből következik, hogy az IJB háromszög hasonló az ACB háromszöghöz, és a hasonlóság aránya $1:2$, ezért területükre:



$$\frac{T_{IJB}}{T_{ACB}} = \frac{1}{4}, \quad \text{amiből} \quad T_{IJB} = \frac{1}{4} \cdot T_{ACB}.$$

Ugyanez érvényes az LKD és ACD háromszögekre is, azaz:

$$T_{LKD} = \frac{1}{4} \cdot T_{ACD}.$$

A két utolsó egyenlőség megfelelő oldalait összeadva:

$$T_{IJB} + T_{LKD} = \frac{1}{4} \cdot \left(T_{ACB} + T_{ACD}\right) = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}.$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$T_{ILA} + T_{JKC} = \frac{1}{4} \cdot \left(T_{BDA} + T_{BDC}\right) = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}.$$

Ha a kapott egyenlőségek megfelelő oldalait összeadjuk, akkor láthatjuk, hogy az $IJKL$ paralelogramma oldalaira emelt IJB, JKC, LKD, ILA háromszögek területének összege az $ABCD$ négyszög területének felével egyenlő. Ebből adódóan az $IJKL$ négyszög területe is az $ABCD$ négyszög területének felével egyenlő.

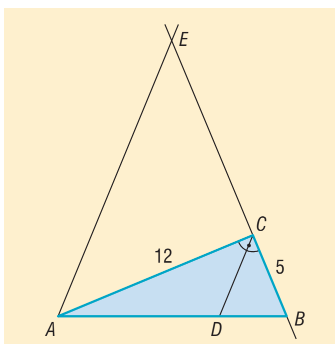
Korábban már láttuk, hogy az $EFGH$ és az $IJKL$ négyszögek hasonlók egymáshoz, a hasonlóság aránya pedig $\frac{2}{3}$, így területük arányára igaz, hogy:

$$\frac{T_{EFGH}}{T_{IJKL}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$T_{EFGH} = \frac{4}{9} \cdot T_{IJKL} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot T_{ABCD} = \frac{2}{9} \cdot T_{ABCD}.$$

Az $EFGH$ és az $ABCD$ négyszögek területének aránya tehát $\frac{2}{9}$.

2391 *a)* A szögfelezőtétel alapján:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{12}{5}.$$

Másrészt ha a párhuzamos szelők tételét az $ABE\sphericalangle$-re alkalmazzuk, akkor kapjuk:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{5}.$$

Mivel a két egyenlőség bal oldala megegyezik, ezért a jobb oldalak is egyenlők egymással, amiből $EC = 12$ cm adódik, így az AEC háromszög valóban egyenlő szárú.

b) Jelöljük a DCB háromszög területét T-vel. Az AEB és a DCB háromszög hasonló továbbá a hasonlóság aránya $\frac{EB}{CB}=\frac{17}{5}$, ezért a területük aránya $\left(\frac{17}{5}\right)^2$, azaz $t_{AEB}=\frac{289}{25}\cdot T$.

Az $AECD$ négyszög területe:

$$t_{AECD}=t_{AEB}-t_{DCB}=\frac{289}{25}\cdot T-T=\frac{264}{25}\cdot T.$$

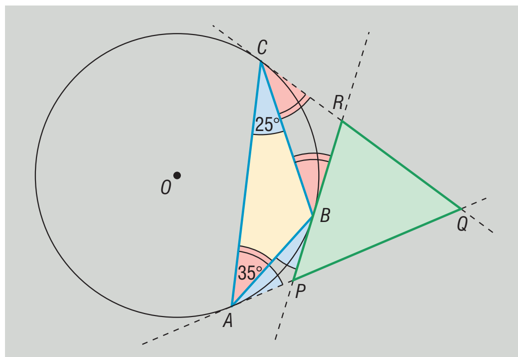
Mivel az egyenlő szárú és derékszögű AEC háromszög befogója 12 cm, ezért területe 72 cm^2, így $t_{ACD}=\frac{264}{25}\cdot T-72$. Az ACD, valamint a DCB háromszög AD, valamint DB oldalaihoz ugyanakkora magasság tartozik, ezért területük aránya az AD, illetve a DB oldalak arányával egyenlő, azaz

$$\frac{t_{ACD}}{t_{DCB}}=\frac{AD}{DB},\quad \text{azaz}\quad \frac{\frac{264}{25}\cdot T-72}{T}=\frac{12}{5},\quad \text{amiből}\quad T=\frac{150}{17}\approx 8{,}82\ \text{cm}^2.$$

Az $AECD$ négyszög területe $t_{AECD}=\frac{264}{25}\cdot T=\frac{1584}{17}\approx 93{,}18\ \text{cm}^2$.

Vegyes feladatok I. – megoldások

2392 Tegyük fel, hogy az ABC háromszög szögei: $BAC\sphericalangle=35°$, $BCA\sphericalangle=25°$, továbbá a háromszög csúcsaiban a köré írt körhöz húzott érintők az ábra szerint a PQR háromszöget fogják közre.



a) A feladat megoldása szempontjából a legfontosabb érintőszárú kerületi szögek:

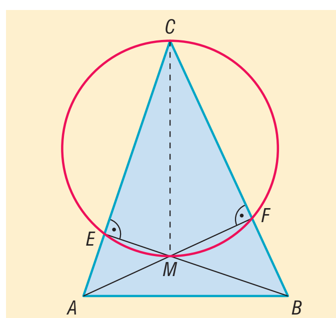
– a rövidebb BC köríven: $CBR\sphericalangle$ és $BCR\sphericalangle$;

– a rövidebb AB köríven: $BAP\sphericalangle$ és $ABP\sphericalangle$.

További érintő szárú kerületi szögek nyugszanak a hosszabb BC és AB köríveken, valamint mindkét AC köríven.

b) Az ugyanazon köríven nyugvó kerületi szögek egyenlősége alapján, az ábrán azonos módon megjelölt szögek egymással egyenlők, így $CAQ\sphericalangle=QCA\sphericalangle=35°+25°=60°$, amiből következik, hogy az AQC háromszög szabályos, és ezért az $AQC\sphericalangle=PQR\sphericalangle=60°$. Mivel az $RPQ\sphericalangle$ az APB háromszög egyik külső szöge, ezért a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, és így az $RPQ\sphericalangle=2\cdot 25°=50°$. Hasonlóan kiszámolható, hogy a $PRQ\sphericalangle=2\cdot 35°=70°$. Így a PQR háromszög szögei: 50°, 60°, 70°.

2393 Mivel a magasságvonal merőleges arra az oldalra, amelyikhez tartozik, ezért a $CFME$ négyszögben az E és F csúcsoknál derékszögek vannak. Ebből következően a négyszög két szemközti szögének összege 180°, ami mutatja, hogy a $CFME$ négyszög valóban húrnégyszög. A CFM (vagy a CEM) háromszögre alkalmazva Thalész tételének megfordítását láthatjuk, hogy a négyszög köré írt kör középpontja a CM átló felezőpontjával esik egybe. (➡)



2394 A keletkező négyszög húrnégyszög.

2395 A keletkező négyszög húrnégyszög. Mivel minden szöge 90°-os, ezért a négyszög téglalap is egyben.

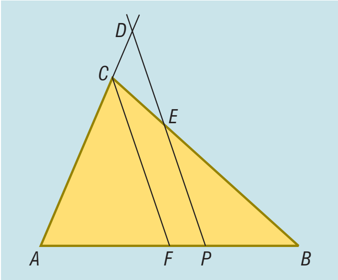
2396 *a)* A trapéz átlói 1 : 3 arányban osztják egymást, és természetesen a rövidebb szakasz a rövidebb alaphoz illeszkedik.

b) Az átlók közé eső szakasz hossza 10 cm.

2397 A behúzott szakasz a BD átlót 2 : 1 arányban osztja.

2398 Mivel a DP egyenes párhuzamos a háromszög CF súlyvonalával, ezért AFC és APD háromszögek, továbbá BPE és BFC háromszögek hasonlók egymáshoz. A megfelelő háromszögekben:

$$\frac{PD}{CF}=\frac{AP}{AF}, \quad \text{továbbá} \quad \frac{PE}{CF}=\frac{PB}{FB}.$$

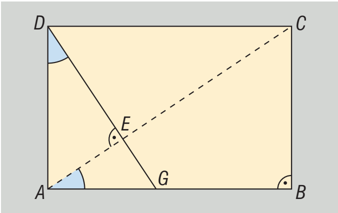


A két egyenlőség megfelelő oldalait összeadva megkapjuk, hogy:

$$\frac{PD}{CF}+\frac{PE}{CF}=\frac{AP}{AF}+\frac{PB}{FB}=2.$$

Az utolsó egyenlőségnél csak azt kell észrevenni, hogy F az AB oldal felezőpontja, így $AF = FB$, továbbá $AP + PB = AB = 2 \cdot FB$. Átrendezés után valóban azt kapjuk, hogy $PD + PE = 2 \cdot CF$.

2399 *a)* Vegyük észre, hogy az $ADE\sphericalangle$, valamint a $BAC\sphericalangle$ szárai páronként merőlegesek egymásra, így vagy megegyeznek, vagy 180°-ra egészítik ki egymást (merőleges szárú szögek). Mivel mindkettő hegyesszög, ezért csak egyenlők lehetnek. Ekkor viszont az ADE, GDA és CAB derékszögű háromszögekben egy-egy hegyesszög is megegyezik, ami igazolja, hogy a háromszögek hasonlók egymáshoz.

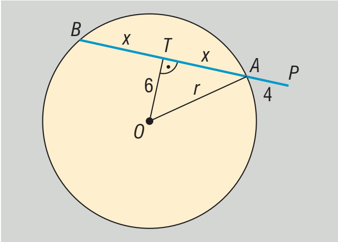


b) Az ADE háromszög oldalai:

$$AD = 6\text{ cm},\quad AE=\frac{12\cdot\sqrt{13}}{13}\approx 3{,}33\text{ cm},\quad DE=\frac{18\cdot\sqrt{13}}{13}\approx 4{,}99\text{ cm}.$$

A GDA háromszög oldalai: $AG = 4$ cm, $AD = 6$ cm, $GD = 2\cdot\sqrt{13}\approx 7{,}21$ cm.

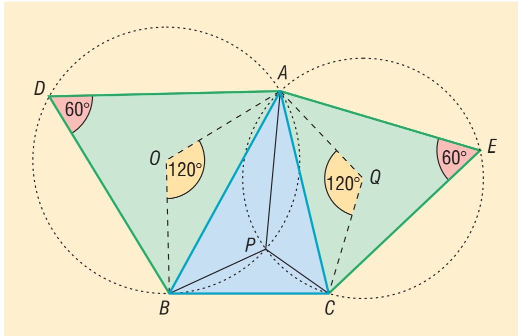
2400 Az ábra jelöléseit használva $PA = 4$ cm, $OT = 6$ cm, $r = 10$ cm. Az OTA derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy $x = 8$ cm, így az AB húr hossza 16 cm. A P pontból húzott szelők szeletei $PA = 4$ cm, $PB = 20$ cm, így az érintő és szelőszakaszok tételét alkalmazva kapjuk, hogy a P pontból húzott érintőszakaszok hossza $\sqrt{80}\approx 8{,}94$ cm.



2401 Jelöljük a négyszög legkisebb szögét α-val, ekkor a legnagyobb szög $\alpha + 140°$. Ha a másik két szög közül a kisebbet β jelöli, akkor a nagyobb szög $\frac{3}{2}\cdot\beta$. Világos, hogy α és β nem lehetnek szemközti szögek, hiszen így a szemközti szögek összege semmiképpen nem lehet egyenlő egymással. Ezért az alábbi esetek valamelyike teljesül:

1. α és $\frac{3}{2}\cdot\beta$ szemközti szögek. Ekkor $\alpha+\frac{3}{2}\cdot\beta = 180°$, továbbá $(\alpha + 140°) + \beta = 180°$. Ebben az esetben α-ra negatív érték adódik, ami mutatja, hogy ez az eset szintén nem valósulhat meg.
2. α és $\alpha + 140°$ szemközti szögek. Ekkor $\alpha + (\alpha + 140°) = 180°$, továbbá $\beta+\frac{3}{2}\cdot\beta = 180°$, és így a négyszög szögei: 20°, 72°, 160°, 108°.

2402 *a)* Az ábra jelöléseinek megfelelően az AB oldalra rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsát D, az ABD háromszög köré írt kör középpontját O, továbbá az AC oldalra rajzolt háromszög harmadik csúcsát E, az ACE háromszög köré írt kör középpontját Q jelöli.



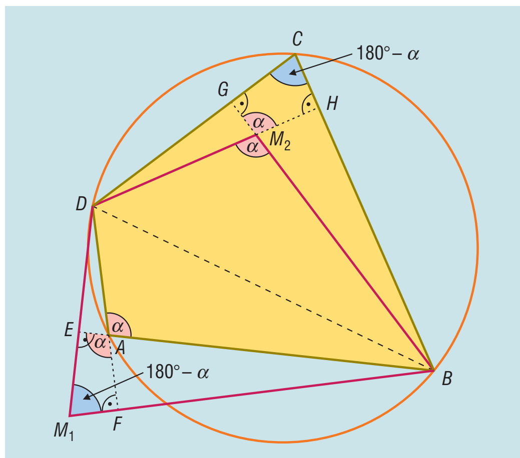
Az O középpontú körben alkalmazva a kerületi és középponti szögek tételét láthatjuk, hogy a konvex $AOB\sphericalangle$ 120°-os, amiből következik, hogy a hosszabb AB körívén nyugvó konkáv szög 240°-os. Mivel az $APB\sphericalangle$ e körben a hosszabb AB íven nyugvó kerületi szög, ezért az $APB\sphericalangle = 120°$.

A Q középpontú körben alkalmazott hasonló gondolatmenettel láthatjuk be, hogy $APC\sphericalangle = 120°$ is teljesül. Ez azt is jelenti, hogy a P pontból a háromszög AB, valamint AC oldala, és ebből kifolyólag a BC oldala is 120°-os szög alatt látszik.

b) Ha a BC oldal fölé rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsa F, akkor az *a)* részfeladat eredménye alapján láthatjuk, hogy $BPCF$ húrnégyszög, így található olyan kör, amelyre a négyszög minden csúcsa illeszkedik. Természetesen ez a kör tartalmazza a B, C, F csúcsokat, amiből következik, hogy éppen a BCF háromszög köré írt körről van szó.

Megjegyzés: A P pontot az ABC háromszög izogonális pontjának nevezzük. Az izogonális pont egy nevezetes szélsőérték-feladat megoldásaként is ismert: megmutatható, hogy ha ezt a pontot a háromszög csúcsaival összekötjük, akkor a keletkező szakaszok hosszának összege a lehető legkisebbnek adódik.

2403 Ha az $ABCD$ húrnégyszög A és C csúcsánál derékszögek vannak, akkor a feladat állítása könnyen igazolható, hiszen ebben az esetben az ABD, illetve a CBD háromszögek magasságpontja az A, illetve a C csúcsba esik, így a két magasságpont a BD átló végpontjaival valóban húrnégyszöget alkot, amely egybeesik az $ABCD$ négyszöggel.



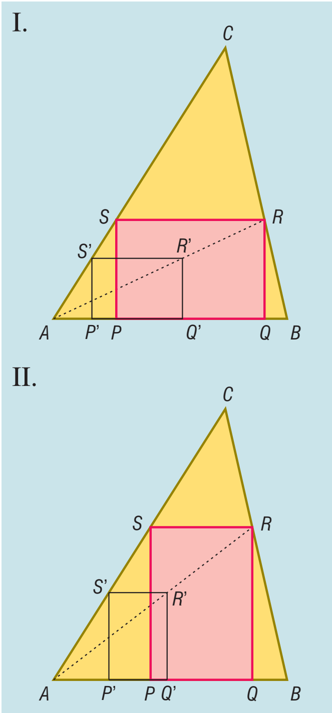
Ha az A és C csúcsoknál nem derékszögek vannak, és α jelöli a négyszög A csúcsánál lévő szöget, akkor a $DCB\sphericalangle = 180° - \alpha$. Az ábra jelöléseinek megfelelően legyen az ABD háromszög magasságpontja M_1, megfelelő magasságainak talppontjai pedig E és F. A CBD háromszög magasságpontját M_2, míg megfelelő magasságainak talppontját G és H jelölje. Ekkor megfigyelhetjük, hogy az AEM_1F négyszögben a két szemközti szög derékszög, így a négyszög húrnégyszög, amiből következik, hogy:

$$EM_1F\sphericalangle = 180° - EAF\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy az A csúcsnál kialakuló szögek csúcsszögek, amik közismerten megegyeznek. Ugyanilyen gondolatmenettel a CGM_2H is húrnégyszög, és ezért $GM_2H\sphericalangle = \alpha$, amiből $DM_2B\sphericalangle = \alpha$ adódik.

Eredményeinket összefoglalva láthatjuk, hogy az M_1BM_2D négyszögben a két szemközti szög összege 180°, azaz valóban húrnégyszögről van szó.

2404 A feladat megoldása előtt érdemes egy egyszerűbb feladatot megoldani: szerkesszünk olyan $P'Q'R'S'$ téglalapot, amelynek $P'Q'$ oldala az ABC háromszög AB oldalára, S' csúcsa az AC oldalára illeszkedik, továbbá $P'Q' : P'S' = 3 : 2$. Ilyen tulajdonságú téglalap valóban könnyen szerkeszthető, hiszen ha az AC oldal egy tetszőleges S' pontjából merőlegest állítunk az AB oldalra, akkor e merőleges talppontjaként megkapjuk a P' pontot, majd a $P'S'$ szakasz felét háromszor felmérve az AB oldalra megkapjuk a Q' pontot. Az R' pont ezután már szerkeszthető. Az eredeti feladat megoldásához azt kell észrevennünk, hogy bármely két olyan téglalap hasonló egymáshoz, amelyben az oldalak aránya $3 : 2$, így a feladat minden feltételének eleget tevő $PQRS$ téglalap is hasonló a $P'Q'R'S'$ téglalaphoz. A megfelelő R pont az AR' félegyenes, valamint a BC oldal metszéspontjaként szerkeszthető. A téglalap további csúcsai már értelemszerűen szerkeszthetők (I.).



Vegyük észre, hogy még egy olyan téglalap szerkeszthető, amelynek PQ oldala az AB oldalra, R és S csúcsai pedig a háromszög további oldalaira esnek (II.). Ebben a téglalapban $PQ : RS = 2 : 3$.

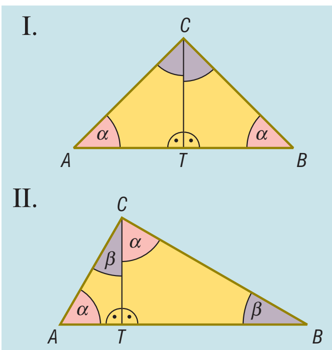
2405 Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben a CT magasság a háromszöget két hasonló háromszögre bontja. Hasonló háromszögekben a szögek páronként egyenlők, továbbá a T csúcsnál mindkét részháromszögben derékszög van, ezért két eset lehetséges:

I. Az ATC, valamint a BTC háromszögekben a C csúcsnál ugyanakkora szögek vannak. Ebben az esetben természetesen a $CAT\sphericalangle = CBT\sphericalangle = \alpha$, ami igazolja, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú.

II. Az ATC háromszög C csúcsánál ugyanakkora szög van, mint a BTC háromszög B csúcsánál. Ez esetben $CAT\sphericalangle = BCT\sphericalangle = \alpha$, így az ábrán azonos módon jelölt szögek megegyeznek. Az ABC háromszög belső szögeinek összege:

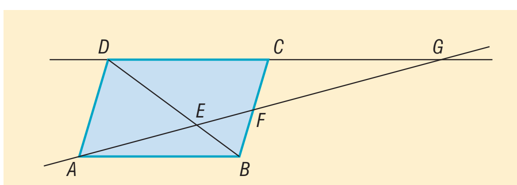
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180º,$$

amiből $\alpha + \beta = 90º$, vagyis a háromszög C csúcsánál derékszög van.



2406 *a)* Az AED háromszöghöz hasonló az FEB háromszög, mivel az E csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek, a D és B csúcsnál lévők pedig váltószögek, így az említett szögek páronként megegyeznek.

b) A GDE háromszög hasonló az ABE háromszöghöz, mert az E csúcsnál csúcsszögek vannak, a G és A csúcsoknál lévő szögeik pedig váltószögek.



c) Az AED és FEB háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{AE}{EF}=\frac{DE}{EB}.$$

Az ABE és GDE háromszögek hasonlósága alapján:

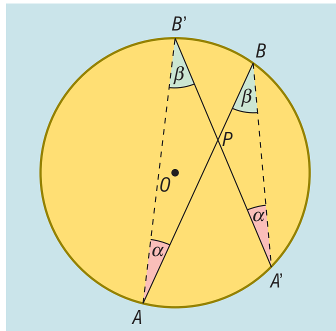
$$\frac{EG}{AE}=\frac{DE}{EB}.$$

Mivel a két egyenlőség jobb oldalán ugyanaz a tört áll, ezért a bal oldalak is megegyeznek, amit átrendezve éppen a bizonyítandó $AE^2 = EF \cdot EG$ egyenlőséget kapjuk.

2407 *a)* Húzzuk be az AB' és $A'B$ szakaszokat. Ekkor az ábrán azonos módon megjelölt szögek ugyanazon a köríven nyugszanak, így a kerületi szögek tétele alapján megegyeznek. Ebből következően az APB' és $A'PB$ háromszögekben a szögek megegyeznek, és ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{PA}{PB'}=\frac{PA'}{PB}.$$

Az egyenlőséget átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk.

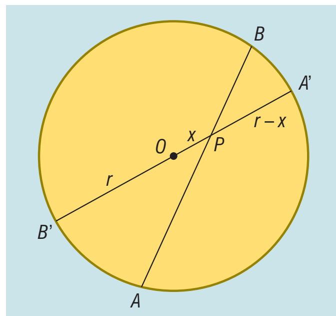


b) Az *a)* részfeladat eredménye alapján a $PA \cdot PB$ szorzat értéke a P-n átmenő húr helyzetétől függetlenül állandó. Vegyük ezért a P és O pontokon átmenő $A'B'$ húrt (ld. ábra). Ekkor

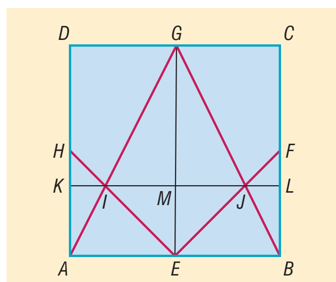
$$PA' = r - x, \text{ míg } PB' = r + x,$$

és így:

$$PA \cdot PB = (r - x) \cdot (r + x) = r^2 - x^2.$$



2408 *a)* Használjuk az ábra jelöléseit. A HAI háromszög hasonló az EGI háromszöghöz, hiszen az I csúcsnál csúcsszögek vannak, továbbá váltószögek lévén $AHI\sphericalangle = GEI\sphericalangle$, és így a két háromszög megfelelő szögei megegyeznek. A hasonlóság aránya az egymásnak megfelelő AH és GE oldalak arányával egyenlő, ami a feltételek szerint $\frac{1}{2}$. Ebből adódóan persze $IM = 2 \cdot IK$, és ehhez hasonlóan $MJ = 2 \cdot JL$. Egyszerű számolás mutatja, hogy $IK = \frac{a}{6}$, ahol a az $ABCD$ négyzet oldalának hossza.

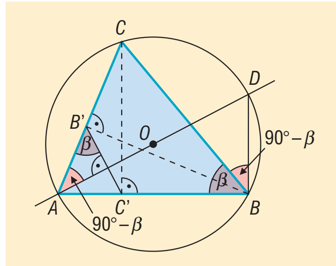


Ekkor viszont a HAI háromszög területe $T_{AHI} = \frac{a^2}{24}$, a hozzá hasonló EGI háromszög területe $T_{EGI} = 4 \cdot T_{AHI} = \frac{a^2}{6}$, és így az $EJGI$ sárkány területe $T_{EJGI} = \frac{a^2}{3}$.

A sárkány területe a kartonlap területének 33,33%-a.

b) A sárkány területe 3 m^2.

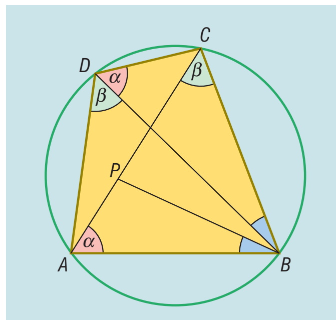
2409 A $BCB'C'$ négyszög húrnégyszög, hiszen a BC oldal a B' és C' csúcsokból egyaránt derékszög alatt látszik, így mindkét pont illeszkedik a BC szakasz Thalész-körére. Ekkor viszont ha az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöget β jelöli, úgy $CB'C'\sphericalangle = 180° - \beta$, amiből következik, hogy $AB'C'\sphericalangle = \beta$ is teljesül. Jelöljük D-vel az A csúcsból a $B'C'$ egyenesre állított merőlegesnek az ABC háromszög köré írt körrel való másik metszéspontját. Mivel az AD egyenes az $AC'B'$ háromszög $B'C'$ oldalához tartozó magasságvonala, ezért $B'AD\sphericalangle = 90° - \beta$, amit úgy is értelmezhetünk, hogy az ABC háromszög köré írt körében a CD köríven $90° - \beta$ nagyságú kerületi szög nyugszik. A kerületi szögek tétele alapján $CBD\sphericalangle = 90° - \beta$ szintén teljesül. Tekintsük most az ABD háromszöget. A B csúcsnál lévő szögre igaz, hogy:



$$ABD\sphericalangle = ABC\sphericalangle + CBD\sphericalangle = \beta + 90° - \beta = 90°,$$

így a háromszög derékszögű. Ebből az is következik, hogy a köré írt körének O középpontja egybeesik az AD szakasz felezőpontjával. Mivel az O pont egyben az ABC háromszög köré írható körének középpontja is, ezért a feladat állítását igazoltuk.

2410 *a)* Az ábrán azonos módon jelölt szögek a kerületi szögek tétele alapján megegyeznek, hiszen az α-val jelölt szögek az $ABCD$ négyszög köré írt körben a (rövidebb) BC köríven, a β-val jelölt szögek pedig a (szintén rövidebb) AB köríven nyugvó kerületi szögek. Ebből adódóan a BPA háromszög két szöge megegyezik a BCD háromszög két szögével, így a két háromszög hasonló egymáshoz.



A feltételek szerint:

$$ABD\sphericalangle = ABP\sphericalangle + PBD\sphericalangle =$$
$$= CBD\sphericalangle + DBP\sphericalangle = CBP\sphericalangle,$$

ezért az ABD háromszög két szöge megegyezik a PBC háromszög két szögével, így a két háromszög szintén hasonló egymáshoz. Ezzel igazoltuk, hogy a BP szakasz az ABC háromszöget két olyan részre vágja szét, amelyek közül a BPA háromszög a BCD háromszöghöz, a PBC háromszög pedig az ABD háromszöghöz hasonló.

b) A BPA és BCD háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BD}{DC},$$
$$AB \cdot DC = BD \cdot AP. \qquad (1)$$

Az ABD és PBC háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{PC}{BC},$$
$$AD \cdot BC = BD \cdot PC. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) összefüggések megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = BD \cdot AP + BD \cdot PC =$$
$$= BD \cdot (AP + PC) = BD \cdot AC.$$

A kapott egyenlőség szerint a húrnégyszög szemközti oldalainak szorzatösszege megegyezik az átlók szorzatával.

Távolságok meghatározása hasonlóság segítségével, hegyesszögek szögfüggvényei – megoldások

2411 Az épületek magassága: *a)* 40; *b)* 64; *c)* 112 méter.

2412 A felvonó megközelítőleg 294 m magasra visz.

2413 A padlástér legnagyobb magassága 7,5 m.

2414 A helyesen kitöltött táblázat:

a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\beta$
9 cm	40 cm	41 cm	$\frac{9}{41}$	$\frac{40}{41}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{40}{41}$	$\frac{9}{41}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{9}{40}$
12 m	35 m	37 m	$\frac{12}{37}$	$\frac{35}{37}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{35}{12}$	$\frac{35}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{35}{12}$	$\frac{12}{35}$
33 dm	56 dm	65 dm	$\frac{33}{65}$	$\frac{56}{65}$	$\frac{33}{56}$	$\frac{56}{33}$	$\frac{56}{65}$	$\frac{33}{65}$	$\frac{56}{33}$	$\frac{33}{56}$
2,1 km	5,4 km	5,79 km	0,3627	0,9326	0,389	2,571	0,9326	0,3627	2,571	0,389
$x-y$	$2\cdot\sqrt{x\cdot y}$	$x+y$	$\frac{x-y}{x+y}$	$\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x+y}$	$\frac{x-y}{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}$	$\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x-y}$	$\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x+y}$	$\frac{x-y}{x+y}$	$\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x-y}$	$\frac{x-y}{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}$

2415 A szerkesztés a definíció alapján történhet. A feladatokban szereplő, a hosszegységgel össze nem mérhető szakaszokat a magasságtétel felhasználásával szerkeszthetjük.

2416 A keresett szögfüggvények értékeit a következő táblázatban láthatjuk:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
78°54’	0,9813	0,1925	5,0970	0,1962
28°12’	0,4726	0,8813	0,5362	1,8650
13°41’	0,2366	0,9716	0,2435	4,1074
54,6°	0,8151	0,5793	1,4071	0,7107
36,8°	0,5990	0,8007	0,7481	1,3367
47,4°	0,7361	0,6769	1,0875	0,9195
$\frac{\pi}{10}$	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777
$\frac{\pi}{18}$	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713
$\frac{2\pi}{5}$	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249

2417 $\alpha = 4{,}75°;\ 51{,}66°;\ 33{,}24°.$ $\beta = 62{,}02°;\ 28{,}92°;\ 15{,}8°.$
$\gamma = 66{,}08°;\ 77{,}03°;\ 28{,}1°.$ $\delta = 70{,}44°;\ 16{,}14°;\ 35{,}6°.$

2418 A helyesen kitöltött táblázat (➡):

a	b	c	α	β
41 cm	13 cm	43,01 cm	72,41°	17,59°
50,6 cm	12 cm	52 cm	76,66°	13,34°
10 dm	47,05 dm	48,1 dm	12°	78°
9,36 m	12,98 m	16 m	35°48’	54°12’
$c \cdot \sin\alpha$	$c \cdot \cos\alpha$	c	α	$90° - \alpha$

2419 A lehajtó 2,34 m mélyre visz.

2420 A lejtő megközelítőleg 42,5 m magasra visz.

2421 Az út hossza megközelítőleg 2518 méter.

2422 A napsugarak a talajra 53,13°-ban érkeznek.

2423 Egy csavarmenet 2,47 mm magas.

2424 A templom toronyóráját 55,22° emelkedési szögben látjuk.

2425 A folyó megközelítőleg 113 m széles.

2426 Az énekes 41 méter távol van.

2427 A létra alja a faltól legfeljebb 1,22 m távolságra lehet.

2428 Ha a háromszög átfogója c, akkor a befogói $c \cdot \sin 50°$, illetve $c \cdot \cos 50°$. Mivel a kerület 70 cm, felírható:

$$c + c \cdot \sin 50° + c \cdot \cos 50° = 70.$$

Így az átfogó hossza:

$$c = \frac{70}{1 + \sin 50° + \cos 50°} \approx 29{,}06\,.$$

A háromszög oldalai 29,06 cm, 22,26 cm és 18,68 cm hosszúak.

2429 Mivel a hegyesszög szinusza $\frac{5}{13}$, a szöggel szemben lévő befogó és az átfogó aránya $5:13$.

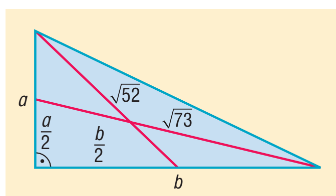
Legyen az átfogó $13x$, a szöggel szemben lévő befogó $5x$ hosszúságú. A másik befogó hossza Pitagorasz tétele alapján $12x$ hosszúságú.

a) A hegyesszög koszinusza $\frac{12}{13}$.

b) A háromszög területe: $\frac{5x \cdot 12x}{2} = 1{,}2 \Rightarrow x^2 = 0{,}04 \Rightarrow x = 0{,}2.$

A háromszög oldalainak hossza tehát 1 m, $2{,}4$ m és $2{,}6$ m.

2430 Legyenek a derékszögű háromszög befogói a illetve b hosszúságúak. Mivel az egy csúcsból kiinduló súlyvonal felezi a szemközti oldalt, az ábra alapján felírhatók a következő Pitagorasz-tételek:



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = 73 \quad \text{és} \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = 52.$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $a = 6$ és $b = 8$.

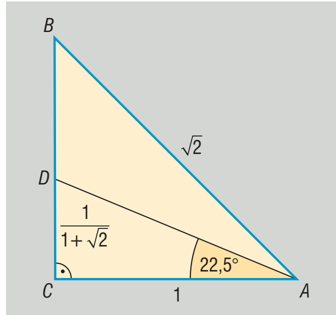
Az a oldallal szemben levő α szögre tehát felírható, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{8}$, amiből $\alpha = 36{,}87°$.

A háromszög hegyesszögei: $36{,}87°$ és $53{,}13°$.

2431 Mivel egy racionális és egy irracionális szám hányadosa irracionális szám, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ irracionális szám.

Mivel két irracionális szám hányadosa lehet racionális és irracionális szám is, $\sin\alpha$ értékéről nem tudjuk eldönteni, hogy racionális vagy irracionális szám.

2432 Vegyünk fel egy egységnyi befogójú ABC egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek AB átfogója $\sqrt{2}$ hosszúságú.



Az A csúcsnál levő 45°-os hegyesszög szögfelezője a szemközti egységnyi befogót a szomszédos oldalak arányában, vagyis $1:\sqrt{2}$ arányban osztja.

A szögfelező és a BC befogó D metszéspontjának a derékszögű csúcstól vett távolsága: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ $(=DC)$.

Tekintsük az ADC derékszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge 22,5°.

A háromszögben a szöggel szemben levő befogó hossza $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, a szög melletti befogó hossza egységnyi.

Tehát $\operatorname{tg} 22{,}5^\circ = \dfrac{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}{1} = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$

2433 A két szöget tekinthetjük egy derékszögű háromszög két hegyesszögének.

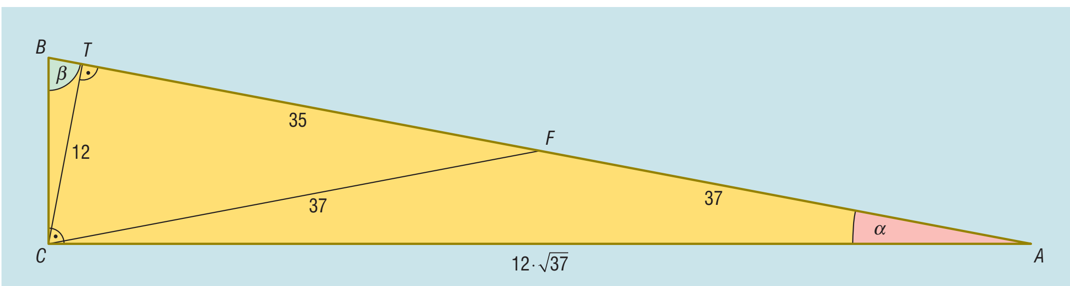
a) A háromszög hasonlóságtól eltekintve egyértelműen adott, ezért vehetjük az átfogóját egységnyinek. Legyen a két befogó hossza a és b. A Pitagorasz-tétel alapján: $a^2 + b^2 = 1$. A feltétel szerint: $\dfrac{a}{1} - \dfrac{b}{1} = 0{,}2$.

Az egyenletrendszert megoldva: $a = 0{,}8$ és $b = 0{,}6$.

$\sin\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \alpha \approx 53{,}13^\circ$ és $\beta \approx 36{,}87^\circ$.

b) A szögeket megszerkeszthetjük egy 3 és 4 egység befogójú derékszögű háromszög hegyesszögeiként.

2434 Az ABC háromszögben C-nél derékszög van. Az átfogóhoz tartozó magasság talppontja legyen T, az átfogó felezőpontja F. A háromszög a hasonlóságtól eltekintve egyértelműen meghatározott, ezért vehetjük a CT szakaszt 12, a CF szakaszt 37 egységnyinek.



Thalész tételének megfordítása alapján a derékszögű háromszög köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontja, $FA = FB = FC = 37$.

A CFT háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$TF = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35.$$

A CTA derékszögű háromszögben:

$$TC = 12 \text{ és } TA = 35 + 37 = 72.$$

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$CA = \sqrt{12^2 + 72^2} = \sqrt{5328} = 12\cdot\sqrt{37}.$$

A CTA derékszögű háromszögben:

$$\sin\alpha = \frac{12}{12\cdot\sqrt{37}} = \frac{1}{\sqrt{37}} = \frac{\sqrt{37}}{37}.$$

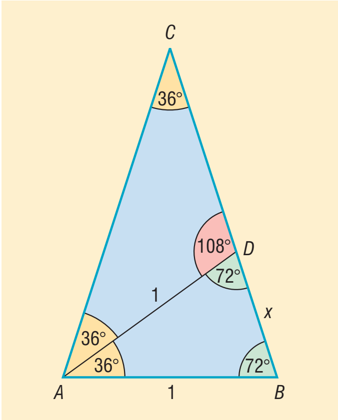
Az ABC háromszögben az előzőek alapján $CA = 12\cdot\sqrt{37}$, illetve $AB = 2\cdot 37 = 74$, vagyis:

$$\sin\beta = \frac{12\cdot\sqrt{37}}{74} = \frac{6\cdot\sqrt{37}}{37}.$$

Tehát a háromszögben a hegyesszögek szinuszai:

$$\frac{\sqrt{37}}{37} \text{ és } \frac{6\cdot\sqrt{37}}{37}.$$

2435 Vegyünk egy olyan ABC egyenlő szárú háromszöget, amelynek az AB alapon fekvő szögei 72°-osak. Az ábra szerint az A csúcsból kiinduló belső szögfelező két egyenlő szárú háromszögre bontja az ABC háromszöget. Legyen $AB = AD = DC = 1$, és $DB = x$. Az ABC, illetve a BDA háromszögek szögei páronként egyenlők, tehát $ABC\triangle \sim BDA\triangle$.



A két hasonló háromszögben a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{1}{x} = \frac{1+x}{1},$$

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Az x csak pozitív lehet, mivel szakasz hosszát jelöli, ezért:

$$DB = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Az ABD egyenlő szárú háromszög szárai 1, alapja x egység hosszú. Az alaphoz tartozó magasságot behúzva adódik, hogy:

$$\sin 18° = \frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Tehát $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

2436 A derékszögű háromszögben az egyik befogó 13 cm, a másik befogó hossza páratlan szám, tehát $2n+1$ alakú (n természetes szám). A Pitagorasz-tétel alapján az átfogó:

$$\sqrt{(2n+1)^2 + 13^2} = \sqrt{4n^2 + 4n + 1 + 169} = \sqrt{4n\cdot(n+1)+170}.$$

Indirekt úton bizonyítjuk, hogy az átfogó hossza irracionális szám.

Tegyük fel, hogy racionális, vagyis felírható $\dfrac{p}{q}$ alakban (p, q természetes szám):

$$\sqrt{4n\cdot(n+1)+170} = \frac{p}{q}.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve, majd q^2-tel beszorozva adódik:

$$[4n\cdot(n+1)+170]\cdot q^2 = p^2.$$

Az egyenlőség jobb oldalán p^2 prímtényezős felbontásában a 2 páros kitevőjű hatványon szerepel.

Az egyenlőség bal oldalán q^2 prímtényezős felbontásában a 2 páros kitevőjű hatványon szerepel, a $4n \cdot (n+1) + 170$ kifejezés 2-vel osztható, de 4-gyel nem, tehát az egyenlőség bal oldalának prímtényezős felbontásában a 2 hatványkitevője páratlan.

Az egyenlőség jobb, illetve bal oldalán a 2 hatványkitevője különböző paritású. Ez ellentmond a számelmélet alaptételének, vagyis az átfogó hossza nem lehet racionális szám, tehát az átfogó hossza irracionális szám.

2437 Az ABC, ACC_1, …, $AC_{n-2}C_{n-1}$ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján az $AC, AC_1, \ldots, AC_{n-1}$ átfogók hossza rendre:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \ldots, \sqrt{n}.$$

Ekkor felírható:

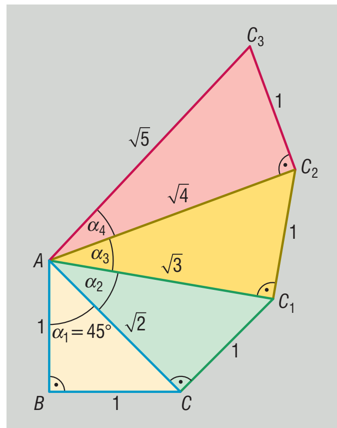
$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Az előző összegnek egyetlen tagja sem kisebb, mint $\frac{1}{\sqrt{n}}$, tehát

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} = \operatorname{ctg}\alpha_n.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $n = 1$.

Ezzel beláttuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_n \geq \operatorname{ctg}\alpha_n$.



Összefüggések hegyesszögek szögfüggvényei között, nevezetes szögek szögfüggvényei – megoldások

2438 A kifejezések egyszerűbb alakjai:

a) $\sin\alpha$; *b)* $\sin^2\alpha$; *c)* 1; *d)* 1;

e) $\sin\alpha - \cos\alpha$; *f)* 1.

2439 Az *a)*, *b)* és *c)* részben a $\operatorname{ctg}\alpha$-t, illetve a $\operatorname{tg}\alpha$-t írjuk fel $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ segítségével, majd alakítsunk ki közös nevezőt. Használjuk fel, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

A *d)* részben felírhatjuk, hogy:

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 = \sin^6\alpha + 3\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha + 3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha + \cos^6\alpha =$$
$$= \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha).$$

Mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért:

$$1 = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha,$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőség.

2440 Használjuk a pótszögekre vonatkozó összefüggéseket:

a) 1; *b)* 1; *c)* 2.

2441 A kifejezések pontos értékei:

a) $\frac{3\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; *b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* 1; *d)* $\frac{\sqrt{3}}{8}$;

e) $\frac{1}{4}$; *f)* 1; *g)* 0.

2442 A helyesen kitöltött táblázat:

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$\sqrt{0,96} \approx 0,9798$	0,2	$\frac{\sqrt{0,96}}{0,2} \approx 4,899$	$\frac{0,2}{\sqrt{0,96}} \approx 0,2041$
$\frac{4}{\sqrt{17}}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	4	0,25
$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	3	$\frac{1}{3}$
a	$\sqrt{1-a^2}$	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
$\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\sqrt{b^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}$

2443 *a)* $\alpha > 45°$; *b)* $\alpha < 45°$.

2444 A kifejezések egyszerűbb alakjai:

a) $$\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

b) A 2439. feladat *d)* részéből:
$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha,$$
valamint
$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$
Ezeket felhasználva:
$$2\cdot(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3\cdot(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=$$
$$=2\cdot(1-3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)-3\cdot(1-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)=-1.$$

2445 A kifejezés értéke 1.

2446 Ismeretes, hogy bármely pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2, és az összeg csak abban az esetben lesz 2, ha a szám 1.
Mivel $\operatorname{tg}x$ reciproka $\operatorname{ctg}x$, az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\operatorname{tg}x=1$, azaz $x=\frac{\pi}{4}$.

2447 A 2435. feladat eredményét használjuk:

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos 72° = \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

$$\sin 72° = \sqrt{1-\cos^2 72°} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10};$$

$$\operatorname{ctg}72° = \frac{\cos 72°}{\sin 72°} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10}} = \sqrt{\frac{6-2\cdot\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}+10}} = \sqrt{\frac{5-2\cdot\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{25-10\cdot\sqrt{5}}}{5};$$

$$\operatorname{tg}72° = \frac{\sin 72°}{\cos 72°} = \sqrt{\frac{5}{5-2\cdot\sqrt{5}}} = \sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}.$$

2448 Tekintsünk egy egységnyi átfogójú derékszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge α. A háromszög befogói $\sin\alpha$, illetve $\cos\alpha$.

Területét a befogók szorzatának feleként számítjuk:

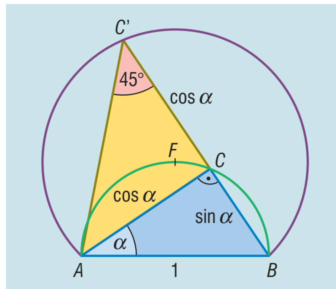
$$t = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2}.$$

Ismeretes, hogy adott átfogójú derékszögű háromszögek közül az egyenlő szárú derékszögű háromszög területe a legnagyobb, így $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ akkor a legnagyobb, ha $\alpha = 45°$:

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha \le \sin 45°\cdot\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tehát a $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ kifejezés maximuma $\frac{1}{2}$, amelyet $\alpha = 45°$ esetén vesz fel.

2449 Tekintsünk egy egységnyi AB átfogójú derékszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge α. A háromszög befogói $\sin\alpha$, illetve $\cos\alpha$.



A háromszög-egyenlőtlenség alapján a befogók összege nagyobb az átfogónál, tehát $1 < \sin\alpha + \cos\alpha$.

Be kell még bizonyítanunk, hogy $\sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{2}$.

Az egységnyi AB átfogó mint átmérő fölé emeljünk Thalész-kört. A C derékszögű csúcs ezen a körön mozoghat. Mérjük fel a C-n túl BC egyenesre az AC oldal hosszát, így C' ponthoz jutunk. Az ACC' háromszög egyenlő szárú derékszögű, tehát $AC'C$ szög 45°. A $BC' = \sin\alpha + \cos\alpha$ szakasz hosszára kell felső becslést adnunk.

Mivel az AB adott, a C' pont az AB húr 45°-os látószögkörívén van, amelynek középpontja az AB ív F felezőpontja. Ennek a körívnek a húrja BC', ami akkor lesz a leghosszabb, ha éppen a látókör átmérője, vagyis áthalad az AB körív F felezéspontján. Ez alapján BC' akkor a legnagyobb, ha az ABC háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Tehát $\sin\alpha + \cos\alpha$ akkor maximális, ha $\alpha = 45°$, tehát

$$\sin\alpha + \cos\alpha \le \sin 45° + \cos 45° = \sqrt{2}.$$

2450 A 2444. feladat *b)* részéből:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha;$$

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha =$$
$$= (1 - 2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)^2 - 2\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha,$$

vagyis

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = 1 - 4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + 2\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha.$$

Ezeket felhasználva:

$$2\cdot(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)^2 - (\sin^8\alpha + \cos^8\alpha) =$$
$$= 2\cdot(1 - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)^2 - (1 - 4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + 2\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha) =$$
$$= 2 - 4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + 2\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha - 1 + 4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - 2\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha = 1.$$

A kifejezés értéke tehát 1.

2451 Mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, valamint $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, illetve $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, az egyenlet bal oldala így is írható:

$$1 + 2\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) + 2.$$

Ismeretes, hogy bármely pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2, tehát a bal oldal legalább $1 + 4 + 2 = 7$. Így nincs olyan α hegyesszög, amely teljesítené az egyenlőséget.

Háromszögek különböző adatainak meghatározása szögfüggvények segítségével – megoldások

2452 A háromszög szögei: 66,42°, 66,42° és 47,16°.

2453 A háromszög szögei: 73,74°, 53,13° és 53,13°.

2454 Az inga végpontjának két szélső helyzete közötti távolság 6,5 cm.

2455 A két szomszédos fog által bezárt szöget megkapjuk, ha egy olyan egyenlő szárú háromszög szárszögét 8 egyenlő részre osztjuk, amelynek az alapja 40 cm és a szára 38 cm hosszú. A szárszögre:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{20}{38} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 63{,}51°.$$

A lombseprű két szomszédos foga $\dfrac{63{,}51°}{8} \approx 7{,}94°$ szöget zár be.

2456 A háromszög oldalai: 141,38 cm, 83,82 cm és 83,82 cm.

2457 A helyesen kitöltött táblázat ($a > 0$):

Oldalak száma	Egy oldal hossza	Beírt kör sugarának hossza	Köré írt kör sugarának hossza
5	10 cm	6,88 cm	8,51 cm
12	3,62 cm	6,76 cm	7 cm
9	6,55 cm	9 cm	9,58 cm
n	a	$\dfrac{a}{2\cdot\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$	$\dfrac{a}{2\cdot\sin\dfrac{180°}{n}}$
n	$2r\cdot\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}$	r	$\dfrac{r}{\cos\dfrac{180°}{n}}$
n	$2R\cdot\sin\dfrac{180°}{n}$	$R\cdot\cos\dfrac{180°}{n}$	R

2458 A középponti szög: 77,36°.

2459 Megközelítőleg 7,71 cm hosszú húrhoz tartozik 40°-os kerületi szög.

2460 A kör sugara 6,55 cm.

2461 A kerületi szög lehet 20,49° vagy 159,51°.

2462 Az oldallal szemközti szög lehet 23,58° vagy 156,42°.

2463 A háromszög területe: *a)* 408,95 dm^2; *b)* 430 dm^2; *c)* 329,40 dm^2.

2464 A háromszög szárai 15,88 cm, az alapja 14,05 cm hosszú.

2465 A paralelogramma területe: *a)* 258,58 dm^2; *b)* 420 dm^2; *c)* 269,97 dm^2.

2466 A paralelogramma területe 596,16 cm^2.

2467 *a)* A szabályos tízszög területe 769,4 cm^2. *b)* A szabályos hétszög területe 363,4 cm^2.

c) A szabályos n-szög területe $n\cdot\dfrac{25}{\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$ cm^2.

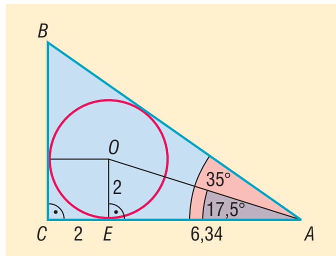
2468 A területek aránya:

$$\frac{T_{\text{nyolcszög}}}{T_{\text{hatszög}}} = \frac{8 \cdot \dfrac{6^2 \cdot \sin 45^\circ}{2}}{6 \cdot \dfrac{8^2 \cdot \sin 60^\circ}{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}6124.$$

A nyolcszög területe a hatszög területének 61,24 százaléka.

2469 A köré írt kör sugara 10,12 cm.

2470 Tekintsük az ábra jelöléseit. A beírt kör középpontja rajta van az A csúcsból kiinduló belső szögfelezőn. Mivel egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, az OEA háromszög derékszögű. Ezért felírható:



$$\operatorname{tg} 17{,}5^\circ = \frac{2}{EA};$$

$$EA = \frac{2}{\operatorname{tg} 17{,}5^\circ} \approx 6{,}34 \text{ cm}.$$

A beírt kör középpontja, a derékszögű csúcs és a beírt körnek a befogókkal vett érintési pontjai négyzetet határoznak meg. Tehát $CE = 2$ és $CA = 2 + 6{,}34 = 8{,}34$ cm.

Az ABC háromszög többi oldala a 35° szögfüggvényeiből számítható:

$$AB = \frac{8{,}34}{\cos 35^\circ} \approx 10{,}18 \quad \text{és} \quad BC = 8{,}34 \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \approx 5{,}84.$$

A háromszög oldalai: 8,34 cm, 5,84 cm és 10,18 cm.

2471 Legyen a háromszög alapja a, a szárai b hosszúságúak.

A háromszög alaphoz tartozó magasságát behúzva:

$$\frac{a}{2b} = \cos 72^\circ 35', \quad \text{amiből} \quad a = 2b \cdot \cos 72^\circ 35'.$$

A feladat feltétele szerint $a + b = 20$, tehát:

$$2b \cdot \cos 72^\circ 35' + b = 20, \quad \text{amiből} \quad b = \frac{20}{2 \cdot \cos 72^\circ 35' + 1} \approx 12{,}51;$$

$$a = 2 \cdot 12{,}51 \cdot \cos 72^\circ 35' \approx 7{,}49.$$

A háromszög oldalai: 12,51 cm, 12,51 cm és 7,49 cm.

2472 *a)* A háromszög szára 34,3 cm.

b) A háromszög területe 587,0 cm^2.

c) A háromszög beírt körének a sugara 9,9 cm.

d) A háromszög köré írt körének a sugara 25,1 cm.

2473 A háromszög szögei 54°, 65° és 61°.

a) A háromszög területe: $2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \approx 513{,}0$ cm^2.

b) A háromszög legrövidebb m magassága a leghosszabb a oldalhoz tartozik, ami a háromszög legnagyobb α szögével szemben van. Az oldal hossza $a = 2R \cdot \sin\alpha$.

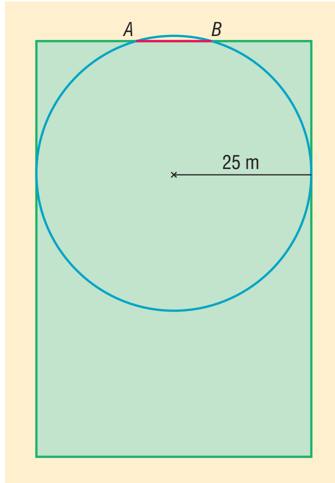
A legrövidebb magasságot a háromszög területéből számíthatjuk:

$$m = \frac{2T}{a} = \frac{4R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2R \cdot \sin\alpha} = 2R \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \approx 28{,}3 \text{ cm}.$$

c) A háromszög kerülete: $2R \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \approx 103{,}6$ cm.

d) A háromszög beírt körének a sugara: $r = \frac{T}{s} \approx 9{,}9$ cm.

2474 Tekintsük a focipályát felülnézetben. A kapu AB szélessége 7,35 m. Rajzoljuk meg azt a kört, amelyik áthalad az A és B pontokon, valamint érinti a két oldalvonalat. Ennek a körnek a sugara 25 m. Ismert, hogy egy szakasz fölé emelt α szögű látóköríven kívüli pontokból a szakasz α-nál kisebb szög alatt látszik.



Ennek alapján az oldalvonal mentén az a pont, amelyből a kapu a legnagyobb szög alatt látszik, a kör és az oldalvonal érintési pontja. Ebből a pontból a kapu éppen akkora szögben látszik, mint a 25 m sugarú körben a 7,35 m hosszúságú húrhoz tartozó kerületi szög. A kör sugara, a húr hossza és a kerületi szög közötti ismert összefüggés alapján:

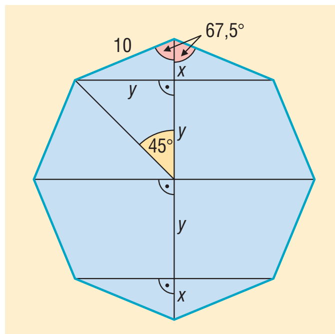
$$\sin\alpha = \frac{h}{2r} = \frac{7{,}35}{2 \cdot 25} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 8{,}45^\circ.$$

A partjelző legfeljebb 8,45° szögben láthatja a 735 cm szélességű kaput.

2475 *a)* A nyolcszög beírt körének a sugara 12,07 cm.

b) A nyolcszög köré írt körének a sugara 13,07 cm.

c) A nyolcszög területe megközelítőleg 483 cm^2.



d) A szabályos nyolcszög egy oldala a középpontjából 45°-os szög alatt látszik, és egy belső szöge 135°. Az ábrán látható x, y szakaszok hosszát egy olyan derékszögű háromszögből számíthatjuk, amelynek hegyesszöge 67,5° átfogója 10 cm:

$$x = 10 \cdot \sin 67{,}5^\circ \approx 9{,}24 \quad \text{és} \quad y = 10 \cdot \cos 67{,}5^\circ \approx 3{,}83.$$

A tengelyes szimmetria miatt a leghosszabb átlót a rá merőleges átlók két 9,24 cm, illetve két 3,83 cm-es részekre osztják.

2476 Legyen az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AC oldalának felezőpontja E, valamint a súlyvonalak hossza $AF = 9$ cm és $BE = 12$ cm. Tudjuk, hogy a háromszög súlyvonalai harmadolják egymást, így az ABC háromszög S súlypontja az AF súlyvonalat $AS = 6$ cm, illetve $SF = 3$ cm hosszúságú szakaszokra bontja. Ugyanígy $ES = 4$ cm, illetve $SB = 8$ cm.

Az ABF és az ABC háromszögek BF és BC oldalaihoz tartozó magasságai egyenlők, valamint:

$$BF = \frac{1}{2} \cdot BC; \quad T_{ABF\text{ háromszög}} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABC\text{ háromszög}}.$$

A BSF és a BAF háromszögek FS és FA oldalaihoz tartozó magasságai egyenlők, valamint:

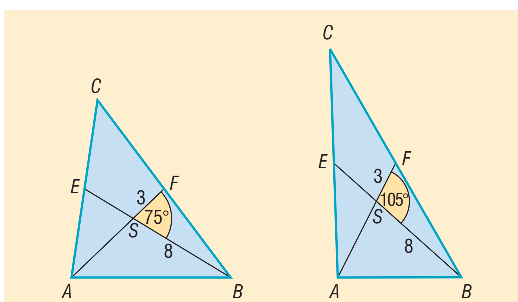
$$FS = \frac{1}{3} \cdot FA,$$

ezért

$$T_{BSF\text{ háromszög}} = \frac{1}{3} \cdot T_{BAF\text{ háromszög}}.$$

Tehát

$$T_{BSF\text{ háromszög}} = \frac{1}{6} \cdot T_{ABC\text{ háromszög}}.$$



A *BSF* háromszög területe kiszámítható, mivel adott két oldalának hossza és az általuk bezárt szög, amely 75° vagy 105°:

$$T_{BSF\text{ háromszög}} = \frac{8 \cdot 3 \cdot \sin 75°}{2} = \frac{8 \cdot 3 \cdot \sin 105°}{2} \approx 11{,}59 \text{ cm}^2.$$

Az *ABC* háromszög területe ennek hatszorosa: 69,54 cm^2.

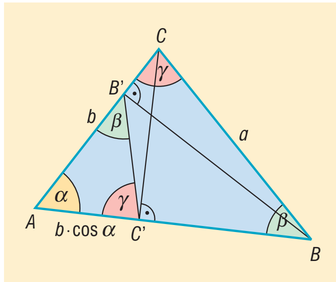
2477 A háromszög két oldala legyen a, illetve b. Ha a két oldal által bezárt szög γ, akkor:

$$8 \cdot T_{\text{háromszög}} = 8 \cdot \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = 4 \cdot ab \cdot \sin\gamma.$$

A hegyesszög szinuszának definíciója alapján $\sin\gamma < 1 \Rightarrow 4ab \cdot \sin\gamma < 4ab$.

A számtani és mértani közép közti összefüggés alapján: $4ab = 4 \cdot \left(\sqrt{ab}\right)^2 \le 4 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (a+b)^2$.
Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

2478 Az *ABC* háromszög oldalainak hossza a szokásos jelöléssel legyen a, b és c, szögeinek nagysága α, β és γ. A háromszög *B* csúcsából induló magasság talppontja legyen *B*', a *C* csúcsából induló magasság talppontja legyen *C*'.



A *BCB'C'* négyszög húrnégyszög, mivel a *B*' és *C*' pontokat tartalmazza a *BC* Thalész-köre.

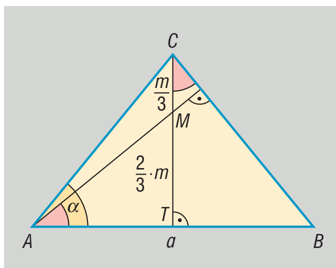
A húrnégyszög egy külső szöge egyenlő a vele szemben lévő belső szöggel, ezért az *AC'B'* háromszög szögei páronként egyenlők az *ABC* háromszög szögeivel, tehát a két háromszög hasonló.

A megfelelő oldalak aránya: $\frac{B'C'}{AC'} = \frac{a}{b}$. Az *AC'C* derékszögű háromszögből $AC' = b \cdot \cos\alpha$, tehát:

$$\frac{B'C'}{b \cdot \cos\alpha} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad B'C' = a \cdot \cos\alpha.$$

2479 Az *ABC* háromszög a hosszúságú *AB* alapjához tartozó m magasságának talppontja *T*, a magasságpontja *M*, amely a feltétel szerint m-nek a *C*-hez közelebbi harmadolópontja.

Az *AMT* háromszög hasonló a *CTB* háromszöghöz, mivel mindkettőben a *T*-nél lévő szög 90°, illetve a *TAM* és *TCB* szögek merőleges szárú hegyesszögek.



A két háromszögben a megfelelő befogók aránya egyenlő:

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot m}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{m}.$$

Átrendezve, majd megoldva:

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{a} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Az alapon fekvő α szög tangense:

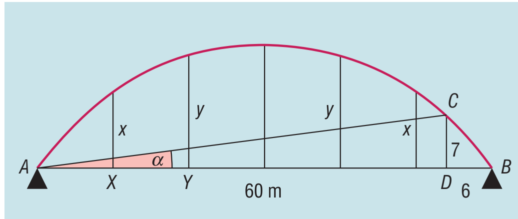
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\frac{a}{2}} = 2 \cdot \frac{m}{a} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 50{,}77°.$$

A háromszög szögei: 50,77°, 50,77° és 78,46°.

2480 Tekintsük a mellékelt ábrát.

a) A kör CB húrja a Pitagorasz-tétellel:

$$\sqrt{6^2+7^2}\approx 9{,}22 \text{ m}.$$



A húrhoz tartozó CAB kerületi szög az ADC háromszögből szögfüggvénnyel számolható:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{54} \quad\Rightarrow\quad \alpha=7{,}39^\circ.$$

Ismeretes, hogy a kör sugarát egy húrjának és a hozzá tartozó kerületi szögnek a segítségével kiszámolhatjuk:

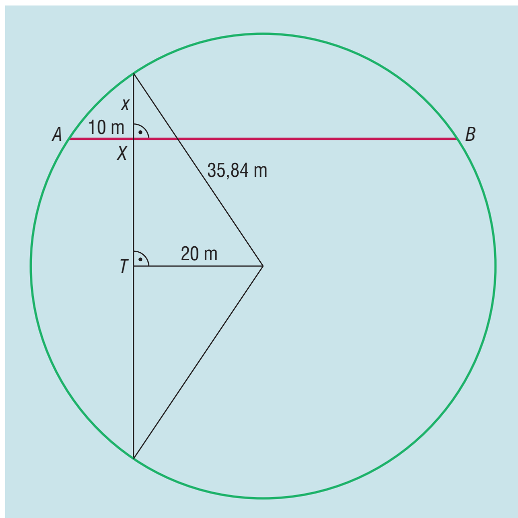
$$R=\frac{h}{2\cdot\sin\alpha}=\frac{9{,}22}{2\cdot\sin 7{,}39^\circ}\approx 35{,}84 \text{ m}.$$

A kör sugara 35,84 m.

b) A híd legnagyobb magasságát megkaphatjuk úgy, hogy a kör sugarának hosszából kivonjuk az AB húrjának a kör középpontjától vett távolságát.

A híd legnagyobb magassága: $35{,}84-\sqrt{35{,}84^2-30^2}\approx 16{,}23$ m.

c) Az x hosszúságú tartóoszlop hosszának meghatározásához tekintsük azt a kört, amelynek része a köríves tartószerkezet. Az oszlop X talppontjának A-tól vett távolsága a 60 m hatod része, azaz 10 m.



Az AB húrra merőleges húr a kör középpontjától 20 méter távolságra van, így hosszának a fele:

$$\sqrt{35{,}84^2-20^2}.$$

Az előző rész alapján XT távolság az AB húrnak a kör középpontjától vett távolsága:

$$\sqrt{35{,}84^2-30^2}.$$

Ez alapján:

$$x+\sqrt{35{,}84^2-30^2}=\sqrt{35{,}84^2-20^2},$$

$$x\approx 10{,}13 \text{ m}.$$

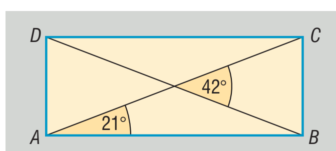
Az x hosszúságú tartóoszlop hossza megközelítőleg 10,1 m.

Hasonlóan az y hosszúságú tartóoszlop hossza megközelítőleg 14,8 m.

A függőleges tartóoszlopok tehát rendre 10,1, 14,8, 16,2, 14,8 és 10,1 méter hosszúak.

Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével – megoldások

2481 A téglalap átlóinak a hosszabbik oldalakkal bezárt szöge éppen az átlók által bezárt szögnek a fele.



Ha a téglalap hosszabbik oldala 25 cm, akkor a másik oldal:

$$25\cdot\operatorname{tg}21^\circ\approx 9{,}60.$$

Ha a téglalap rövidebbik oldala 25 cm, akkor a másik oldal:

$$\frac{25}{\operatorname{tg} 21^\circ} \approx 65{,}13.$$

A téglalap kerülete lehet:

$$2 \cdot (25 + 9{,}60) = 69{,}20 \text{ cm}$$

vagy

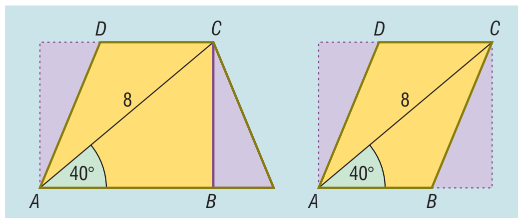
$$2 \cdot (25 + 65{,}13) = 180{,}26 \text{ cm}.$$

2482 A trapéz szögei: 55°, 55°, 125° és 125°.

2483 Ha a szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 21 cm, akkor a trapéz másik alapja 3,45 cm.
Ha a szimmetrikus trapéz rövidebbik alapja 21 cm, akkor a trapéz másik alapja 38,55 cm.
Ha a szimmetrikus trapéz paralelogramma, akkor a másik alapja is 21 cm.

2484 A trapéz területe 1545,42 cm^2.

2485 A szimmetrikus trapéz lehet húrtrapéz, vagy paralelogramma. Mindkét esetben átdarabolható egy olyan téglalapba, amelyik átlója 8 cm. Ez az átló a téglalap egyik oldalával 40°-os szöget zár be.



Területe:

$$t = 8 \cdot \sin 40^\circ \cdot 8 \cdot \cos 40^\circ \approx 31{,}51 \text{ cm}^2.$$

2486 A közös külső érintők által bezárt szög 17,25°.
A közös belső érintők által bezárt szög 81,08°.

2487 A körszelet területe 18,06 cm^2.

2488 A két rész területe 65,27 cm^2, illetve 1190,73 cm^2.

2489 A hulladék 4,46 százalék.

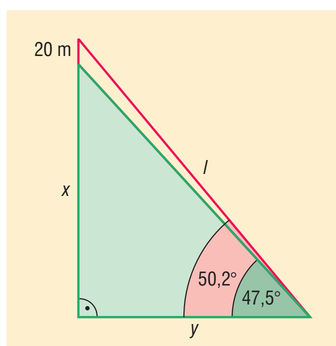
2490 A lámpabúra átmérője 26 cm.

2491 A hegy magasságát jelöljük m-mel. Felírhatjuk a következő egyenletet:

$$m \cdot \operatorname{ctg} 18^\circ 24' + m \cdot \operatorname{ctg} 22^\circ 43' = 8000 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{8000}{\operatorname{ctg} 18^\circ 24' + \operatorname{ctg} 22^\circ 43'} \approx 1483\,.$$

A hegy magassága: 1483 m.

2492 A mellékelt ábra alapján:



$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} 47{,}5^\circ \quad \text{és} \quad \frac{x+20}{y} = \operatorname{tg} 50{,}2^\circ.$$

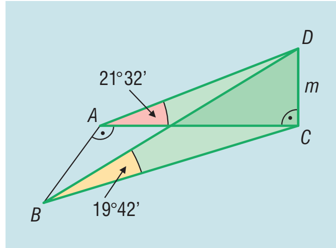
Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy $x = 200$ m.

A varjú által megtett l út annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek hegyesszöge 50,2° és a vele szemben levő befogója 220 m:

$$l = \frac{220}{\sin 50{,}2^\circ} \approx 286.$$

A varjú által megtett út 286 m.

2493 Tekintsük a mellékelt ábrát. A hegy DC magassága legyen m.



Az ACD derékszögű háromszögben:

$$AC = m \cdot \operatorname{ctg} 21°32'.$$

A BCD derékszögű háromszögben:

$$BC = m \cdot \operatorname{ctg} 19°42'.$$

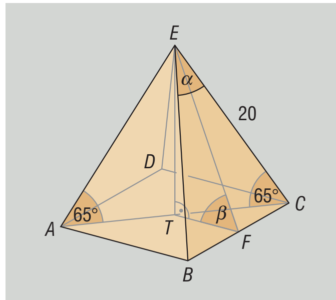
A Pitagorasz-tételt felírva az ABC derékszögű háromszögben:

$$1{,}2^2 + (m \cdot \operatorname{ctg} 21°32')^2 = (m \cdot \operatorname{ctg} 19°42')^2.$$

Az egyenletet megoldva $m = 1{,}022$.

A hegy magassága 1022 m.

2494 Tekintsük a mellékelt ábrát.



a) A gúla magassága a TCE derékszögű háromszögben számolható:

$$ET = 20 \cdot \sin 65° \approx 18{,}13 \text{ cm}.$$

b) Az alaplap átlóját a TCE derékszögű háromszögből számíthatjuk:

$$AC = 2 \cdot 20 \cdot \cos 65°.$$

Az alapél:

$$BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 20 \cdot \cos 65°}{\sqrt{2}} \approx 11{,}95 \text{ cm}.$$

c) Az oldallap és az alaplap β szöge a TFE szög. A TFE derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{ET}{TF} \quad \Rightarrow \quad \beta = 71{,}76°.$$

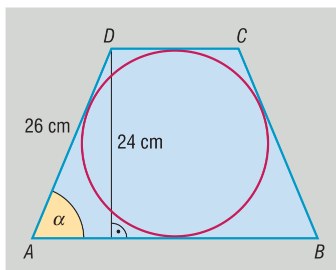
e) Két szomszédos oldalél által bezárt α szög a BEC egyenlő szárú háromszögből számítható:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{FC}{EC} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 34{,}77°.$$

2495 *a)* Az érintők által bezárt szög: 106,26°. *b)* Az érintőszakasz hossza: 6 cm.

c) Az érintési pontok távolsága: 9,6 cm.

2496 A trapéz két alapjának számtani közepe a középvonal hossza, így az alapok összege 52 cm. Az érintőnégyszögek tétele alapján az alapok hosszának összege a két egyenlő szár hosszának összege. A szár hossza $52 : 2 = 26$ cm. A trapéz magassága a beírható kör sugarának kétszerese: 24 cm.



A szár és a trapéz magassága által meghatározott derékszögű háromszög α hegyesszögére felírható:

$$\sin\alpha = \frac{24}{26} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 67{,}38°.$$

A trapéz szögei: 67,38°, 67,38°, 112,62°, 112,62°.

2497 A derékszögű háromszög – hasonlóságtól eltekintve – egyértelműen adott, így vehetjük az átfogót 5 egységnyinek, a két szeletét 1, illetve 4 egységnyinek. A befogótétel alapján a rövidebbik befogó $\sqrt{1 \cdot 5} = \sqrt{5}$ egység.

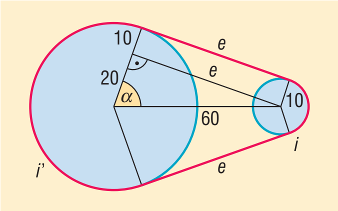
A háromszög kisebb α hegyesszöge számítható szögfüggvénnyel: $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$.

A háromszög hegyesszögei: 26,57°; illetve 63,43°.

2498 A külső érintők 14,25°-os szöget zárnak be.

A két kör középpontjának távolsága 8,06 cm, ami nagyobb, mint a körök sugarainak összege, tehát a két kör nem metszi egymást.

2499 *a)* Egyenes szíjhajtás esetén a szíj hossza az ábrán látható jelölés szerint: $2e + i + i'$.



Az e külső érintő hossza: $e = \sqrt{60^2 - 20^2} = 40 \cdot \sqrt{2}$ cm.

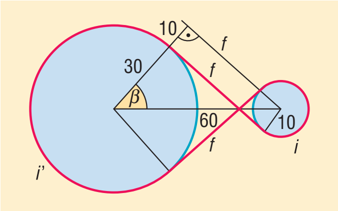
Az i és i' ívhossz középponti szögét meghatározhatjuk, ha az ábrán jelölt α szöget kiszámítjuk: $\cos\alpha = \dfrac{20}{60} \Rightarrow \alpha = 70{,}53°$.

Az i ívhossz $2 \cdot 10 \cdot \pi \cdot \dfrac{2 \cdot 70{,}53°}{360°} \approx 24{,}61$ cm.

Az i' ívhossz $2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \dfrac{360° - 2 \cdot 70{,}53°}{360°} \approx 114{,}58$ cm.

A szíj hossza: $2e + i + i' = 252{,}33$ cm.

b) Keresztezett szíjhajtás esetén hasonlóan járhatunk el.



Az f belső érintő hossza: $f = \sqrt{60^2 - 40^2} = 20 \cdot \sqrt{5}$ cm.

Az i és i' ívhossz középponti szögét meghatározhatjuk, ha az ábrán jelölt β szöget kiszámítjuk:

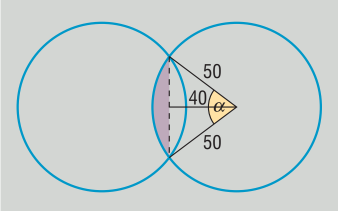
$$\cos\beta = \frac{40}{60} \quad \Rightarrow \quad \beta = 48{,}19°.$$

Az i ívhossz: $2 \cdot 10 \cdot \pi \cdot \dfrac{360° - 2 \cdot 48{,}19°}{360°} \approx 45{,}99$ cm.

Az i' ívhossz: $2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \dfrac{360° - 2 \cdot 48{,}19°}{360°} \approx 137{,}96$ cm.

A szíj hossza: $2f + i + i' = 273{,}39$ cm.

2500 A gabonakörök által lefedett területet kell meghatároznunk. A mindkét kör által lefedett rész területe a két egybevágó körszelet területének összege. Ezen körszelet középponti szöge meghatározható:



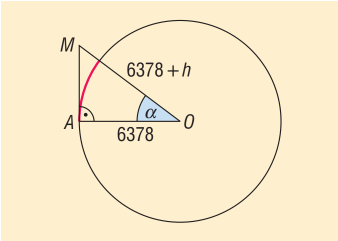
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{40}{50} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73{,}74°.$$

A körszelet területe: $407{,}94\ \text{m}^2$.

A körök által lefedett terület: $2 \cdot 50^2\pi - 2 \cdot 407{,}94 \approx 14\,884\ \text{m}^2 = 1{,}4884$ ha.

A bevételkiesése tehát: $1{,}4884 \cdot 4\,000 \cdot 20 \approx 119\,000$ forint.

2501 A mellékelt sematikus ábrát tekintve a hegy magasságát h-val jelöltük. Az A megfigyelési pontból a hegy csúcsa akkor látszik, ha a látóhatár felett van. A látóhatár az AOM derékszögű háromszög AM egyenese. Az O csúcsnál levő α szög az O középpontú, 6378 km sugarú körben a 250 km hosszú ívhez tartozó középponti szög:



$$\alpha = \frac{250}{2 \cdot 6378 \cdot \pi} \cdot 360° \approx 2{,}247°.$$

Az említett háromszögben számolva:

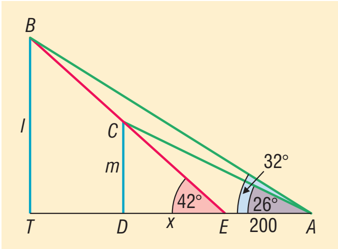
$$\frac{AO}{MA} = \cos\alpha,$$

$$\frac{6378}{6378 + h} = \cos 2{,}247° \quad \Rightarrow \quad h \approx 4{,}908.$$

A hegy tehát legalább 4908 m magas.

2502 Az ábra jelöléseit használva a közelebbi hegy csúcsa legyen C, a távolabbié pedig B.

Először a közelebbi hegy DC magasságát határozzuk meg.



A CDA háromszögben: $\dfrac{m}{x + 200} = \operatorname{tg} 26°.$

A CDE háromszögben: $\dfrac{m}{x} = \operatorname{tg} 42°.$

Az egyenletrendszer megoldásából adódik:

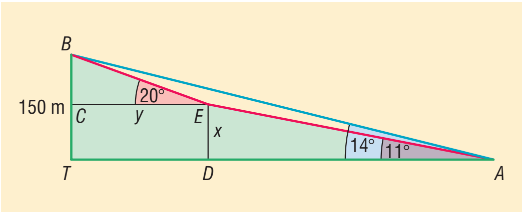
$$m = \frac{200 \cdot \operatorname{tg} 26° \cdot \operatorname{tg} 42°}{\operatorname{tg} 42° - \operatorname{tg} 26°} \approx 212{,}83.$$

A közelebbi hegycsúcs a síkság felett 213 m-re van.

A BT magasság meghatározása hasonló módon történhet a BTE és a BTA háromszögek segítségével.

A távolabbi hegycsúcs a síkság felett 408 m-re van.

2503 Az ábra jelöléseivel: a sikló $BT = 150$ m magasra visz. Az ABT derékszögű háromszögben:



$$TA = \frac{150}{\operatorname{tg} 14°} \approx 601{,}62 \text{ m}.$$

Az ADE háromszögben:

$$\operatorname{tg} 11° = \frac{x}{601{,}62 - y}.$$

A BCE háromszögben:

$$\operatorname{tg} 20° = \frac{150 - x}{y}.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy:

$$y = \frac{150 - 601{,}62 \cdot \operatorname{tg} 11°}{\operatorname{tg} 20° - \operatorname{tg} 11°} \approx 194{,}92.$$

BE hosszúság a BCE háromszögből számítható:

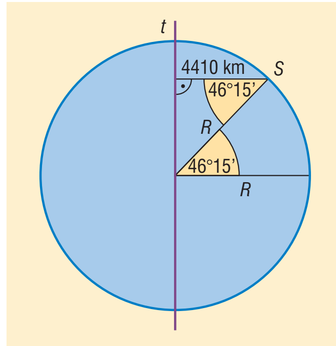
$$BE = \frac{194{,}92}{\cos 20°} \approx 207{,}43.$$

AE hosszúság az ADE háromszögből számítható:

$$AE = \frac{601{,}62 - 194{,}92}{\cos 11°} \approx 414{,}31.$$

A BE és AE szakaszok hosszának összege a sikló által megtett út, amely megközelítőleg 622 méter.

2504 Az ábrán az S pont Szeged helyét jelzi, t egyenes a Föld tengelye, R a sugara.

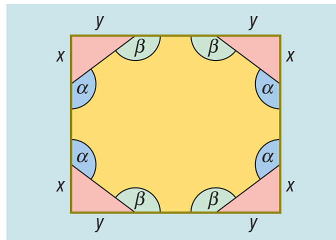


Az S pontnak t egyenestől vett távolsága:

$$R \cdot \cos 46°15' \approx 4410 \text{ km}.$$

A t tengely körül elfordulva S pont 23,95 óra alatt akkora utat tesz meg, mint egy 4410 km sugarú kör kerülete. Ezért Szeged a Föld tengelye körül $\dfrac{2\pi \cdot 4410}{23{,}95} \approx 1157 \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel forog.

2505 A megmaradó nyolcszög szimmetrikus a téglalap szimmetriatengelyeire, tehát az ábrán látható módon négy egybevágó derékszögű háromszöget kell levágni a téglalap csúcsaiból. A megmaradó nyolcszög egyenlő oldalú, tehát a háromszögek x és y befogóira teljesülnie kell, hogy:



$$\left.\begin{aligned} 13 - 2y &= 11 - 2x \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 11 - 2x \end{aligned}\right\}.$$

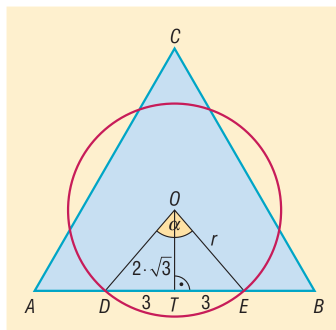
Az első egyenletből kifejezve x-et, majd a másodikba beírva az $y^2 - 25y + 84 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Innen y-ra 21 vagy 4 adódik, de ezek közül csak az $y = 4$ lehet megoldás.

Visszahelyettesítve valamelyik egyenletbe $x = 3$.

Szögfüggvénnyel számíthatók a 3 és 4 befogójú derékszögű háromszög hegyesszögei: 53,13° és 36,87°.

A nyolcszög szögei: $\alpha = 180° - 53{,}13° = 126{,}87°$, illetve $b = 180° - 36{,}87° = 143{,}13°$.

2506 A kör középpontja a szabályos háromszög O középpontja. Az ábrán látható ABC szabályos háromszög AB oldalának felezőpontja T, a csúcsokhoz közelebbi negyedelőpontok D és E.



Ahhoz, hogy megmondjuk, a kör területének hány százaléka esik a háromszögön kívül, ki kell számolni a kör DE húrja által létrehozott kisebbik körszelet területét. Ehhez szükségünk van a kör sugarára és a DOE középponti szögre.

Az OT szakasz hossza a 12 cm oldalú szabályos háromszög magasságának harmada:

$$OT = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

A kör sugara számítható az ODT háromszögből:

$$r = \sqrt{\left(2 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{21} \text{ cm}.$$

Az α középponti szög felére felírható:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 81{,}79°.$$

A kisebbik körszelet területe:

$$T_{\text{körszelet}} = \left(\sqrt{21}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{81{,}79°}{360°} - \frac{\left(\sqrt{21}\right)^2 \cdot \sin 81{,}79°}{2} \approx 4{,}6 \text{ cm}^2.$$

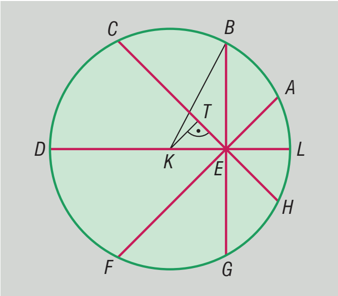
A körnek a háromszögön kívül eső területe ennek háromszorosa, vagyis $13{,}8\ \text{cm}^2$.

A kör területének $\dfrac{13{,}8}{21\pi}\cdot 100 \approx 20{,}9$ százaléka esik a háromszögön kívül.

A háromszög körön kívül eső területének kiszámításához a háromszög területéből kivonjuk a kör és a háromszög közös területét:

$$\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4}-\left[\left(\sqrt{21}\right)^2\cdot\pi-13{,}8\right]\approx 10{,}18\ \text{cm}^2.$$

2507 Tekintsük a mellékelt ábrát. Az emlékmű helyét jelölje E, a park középpontját K.



A két szomszédos ösvény által bezárt szög a 360° nyolcada, azaz 45°. Az ábra tengelyesen szimmetrikus DL egyenesére, így elegendő meghatározni az EL, EA, EB, EC és ED ösvények hosszát.

Először EL és ED hossza:

$$EL = 300 - 70 = 230\ \text{m};$$
$$ED = 300 + 70 = 370\ \text{m}.$$

Az EB szakasz merőleges KE-re, így a KEB derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel alapján:

$$EB=\sqrt{300^2-70^2}\approx 291{,}72\ \text{m}.$$

Az EC és EA ösvények hosszának összege éppen CH távolsággal egyenlő, ami a kör egy húrja.

A húrnak a kör K középpontjától vett távolsága a KTE egyenlő szárú derékszögű háromszögből számítható:

$$KT = KE\cdot\sin 45° = 70\cdot\sin 45° = 35\cdot\sqrt{2}\approx 49{,}5\ \text{m}.$$

Ez alapján:

$$CT=\sqrt{300^2-\left(35\cdot\sqrt{2}\right)^2}\approx 295{,}89\ \text{m}.$$

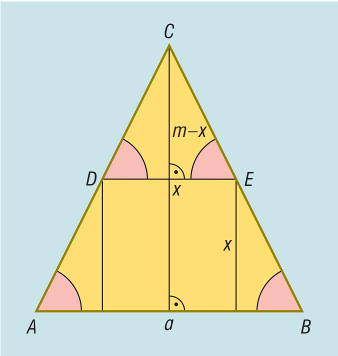
Mivel $KT = TE$, a CE ösvény hossza $295{,}89 + 49{,}5 = 345{,}39$ m.

$$EH = 295{,}89 - 49{,}5 \approx 246{,}39\ \text{m}.$$

Az ösvények hossza megközelítőleg:

$$EL = 230\ \text{m};\quad EA = EH = 246{,}39\ \text{m};\quad EB = EG = 291{,}72\ \text{m};$$
$$EC = EF = 345{,}39\ \text{m};\quad DE = 370\ \text{m}.$$

2508 A háromszög alapja legyen a, a hozzá tartozó magassága m, a négyzet oldala x hosszúságú. A feladat feltétele szerint:



$$2x^2=\frac{m\cdot a}{2},\quad \text{amiből}\quad 4x^2=m\cdot a.\qquad (1)$$

Az ábra jelöléseit használva, az ABC és DEC háromszög szögei páronként egyenlők, tehát $ABC\triangle \sim DEC\triangle$.

A két háromszög alapjának és magasságának aránya egyenlő:

$$\frac{x}{a}=\frac{m-x}{m},\quad \text{amiből}\quad x=\frac{a\cdot m}{a+m}.\qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenleteket összevetve, majd rendezve:

$$4 \cdot \left(\frac{a \cdot m}{a+m}\right)^2 = m \cdot a,$$

$$4 \cdot a \cdot m = (a+m)^2,$$

$$0 = m^2 - 2 \cdot a \cdot m + a^2,$$

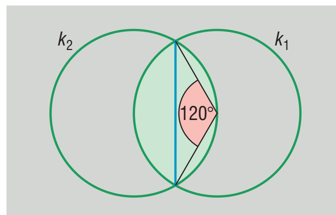
$$0 = (m-a)^2.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha $m = a$. A háromszög alapon fekvő α szögének tangense:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\frac{a}{2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 63{,}43^\circ.$$

A háromszög szögei: $63{,}43^\circ$, $63{,}43^\circ$ és $53{,}14^\circ$.

2509 A vonalkázott terület nagysága legyen T. Az ábrán látható k_1 és k_2, valamint a k_2 és k_3 körök középpontjainak távolsága éppen a sugaruk hossza.



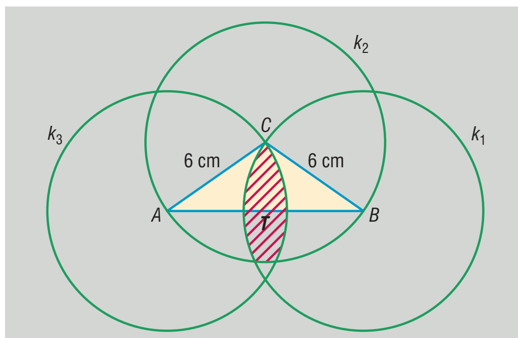
Tehát a k_1 és k_2 körök közös részének területe egy 6 cm sugarú kör 120°-os középponti szögéhez tartozó körszelet területének a kétszerese:

$$2 \cdot \left(6^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} - \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = 44{,}18 \text{ cm}^2.$$

Hasonlóan a k_3 és k_2 körök közös részének területe: $44{,}18 \text{ cm}^2$.

Tekintsük a k_1 és k_2, valamint a k_2 és k_3 körök közös része által lefedett területet.

Ezt a területet kétféleképpen számíthatjuk. Egyrészt: $2 \cdot 44{,}18 - T$.



Másrészt kiszámítható a terület úgy is, hogy a C középpontú, 6 cm sugarú, 110°-os körcikk területéhez hozzáadjuk a k_1 és k_2, valamint a k_2 és k_3 körök közös része területének a felét:

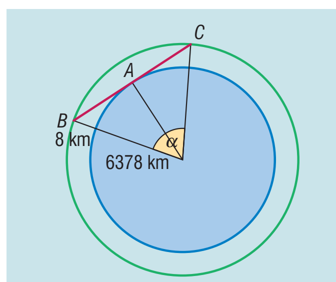
$$6^2 \cdot \pi \cdot \frac{110^\circ}{360^\circ} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 44{,}18 = 78{,}72 \text{ cm}^2.$$

A kétféle módon számított terület egyenlő:

$$2 \cdot 44{,}18 - T = 78{,}72 \quad \Rightarrow \quad T = 9{,}64 \text{ cm}^2.$$

A vonalkázott terület tehát $9{,}64 \text{ cm}^2$.

2510 A repülőgép $6378 + 8 = 6386$ km sugarú köríven repül. A sematikus ábrát tekintve, ha a szemlélő az A pontban van, akkor a repülőgép számára addig tartózkodik a látóhatár felett, amíg a BC köríven végigrepül. A BC körív α középponti szögére teljesül, hogy:



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{6378}{6386} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5{,}74^\circ.$$

A repülőgép által megtett út: $2 \cdot 6386 \cdot \pi \cdot \dfrac{5{,}74^\circ}{360^\circ} \approx 639{,}43$ km.

Ezt az utat $t = \dfrac{639{,}43}{700} \approx 0{,}91$ óra alatt teszi meg.

A repülőgép körülbelül 55 percig tartózkodik a látóhatár felett.

Vegyes feladatok II. – megoldások

2511 *a)* A kifejezés értéke 0.

b) A kifejezés egyszerűbb alakja $\text{ctg}^2\alpha$.

c) A kifejezés értéke 1.

d) A kifejezés értéke 1.

e) A kifejezés egyszerűbb alakja $\text{tg}\,\alpha$.

2512 *a)* A kifejezés pontos értéke 3.

b) A kifejezés pontos értéke 0,25.

c) A kifejezés pontos értéke 0.

2513 *a)* A szög koszinusza $\frac{60}{61}$, tangense $\frac{11}{60}$ és kotangense $\frac{60}{11}$.

b) A szög szinusza $\frac{21}{29}$, tangense $\frac{21}{20}$ és kotangense $\frac{20}{21}$.

c) A szög szinusza $\frac{8}{17}$, koszinusza $\frac{15}{17}$ és kotangense $\frac{15}{8}$.

d) A szög szinusza $\frac{1}{\sqrt{10}}$, koszinusza $\frac{3}{\sqrt{10}}$ és tangense $\frac{1}{3}$.

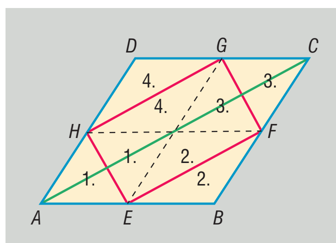
2514 A keletkezett részek hossza 1,99 cm, 2,15 cm, 2,54 cm és 3,32 cm.

2515 Az akna megközelítőleg 50 m mély.

2516 A másik alap 16,41 cm, a másik szár 3,9 cm hosszú.

2517 Az oldalak hossza 20,32 és 15,24 cm.

2518 Ismeretes, hogy egy háromszög középvonala a háromszögből egy az eredetihez hasonló háromszöget metsz le. A hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, tehát a középvonallal lemetszett háromszög területe az eredeti háromszög területének negyede.



Az ábra jelöléseit használva, az $ABCD$ rombusz oldalainak felezőpontjai E, F, G és H.

A rombuszt az AC átlója két egybevágó háromszögre bontja. Az ABC háromszög középvonala EF, így az EBF háromszög területe negyede az ABC háromszög területének, illetve nyolcada a rombusz területének. Hasonlóan a rombusz területének nyolcad része a GFC, HGD és HAE háromszögek területe is. Tehát az $EFGH$ négyszög területe fele a rombusz területének.

Ha a rombusz oldala a, akkor területének felére felírható:

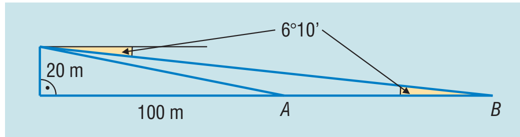
$$110 = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 50^\circ \quad \Rightarrow \quad a = 16{,}95.$$

Tehát a rombusz oldala 16,95 cm.

Megjegyzés: A rombuszt a szaggatott vonallal jelölt középvonalai és az $EFGH$ négyszög oldalai nyolc darab háromszögre darabolják fel. Az azonos számmal jelölt háromszögek területe páronként megegyezik, így ezzel az átdarabolással látványosan is igazolható, hogy az EFGH négyszög területe fele a rombusz területének.

2519 A kört a két egyenes két $131{,}92\ \text{cm}^2$ és egy $188{,}32\ \text{cm}^2$ területű részre osztja.

2520 Tekintsük az ábra jelöléseit. A folyó AB szélességére felírhatjuk:

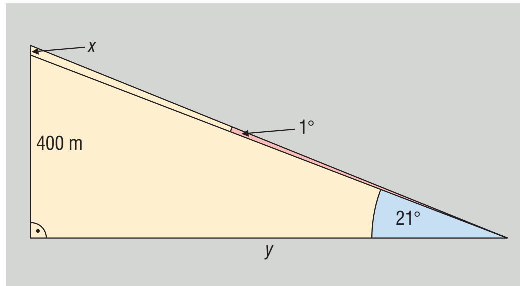


$$\frac{100 + AB}{20} = \operatorname{ctg} 6°10' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 20 \cdot \operatorname{ctg} 6°10' - 100 \approx 85.$$

A folyó szélessége megközelítőleg 85 m.

2521 Tekintsük a mellékelt ábrát. Legyen a torony magassága x. Az y távolság számítható:



$$y = 400 \cdot \operatorname{ctg} 21°.$$

Továbbá felírható:

$$\frac{x + 400}{y} = \operatorname{tg} 22°.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy $x = 21$. A torony magassága 21 m.

2522 *a)* és *b)* rész esetén a kifejezés értéke egyszerűsítés után 1.

c) Négyzetre emelve, majd összevonva a kifejezés: $4 \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 4 \cdot \sqrt{3}$.

d) Felhasználva, hogy $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, adódik, hogy a kifejezés: $\dfrac{4 \cdot \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 4$.

e) A második törtben $\operatorname{ctg}\alpha$-t átírva:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 3}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} - 3}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = 1.$$

2523 *a)* A szárak 30,78 cm hosszúak.

b) A szárhoz tartozó magasság 17,21 cm.

c) A háromszög területe $264{,}86\ \text{cm}^2$.

2524 Mivel a beírt kör befogókkal vett érintési pontjai, a beírt kör középpontja és a derékszögű csúcs négyzetet határoznak meg, a beírt kör sugara $12 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$ cm.

A 2470. feladat gondolatmenete alapján az átfogó 41,51 cm.

2525 *a)* A rombusz átlói: 9,52 cm és 28,45 cm.

b) A rombuszba írt kör sugara a rombusz magasságának fele: 4,51 cm.

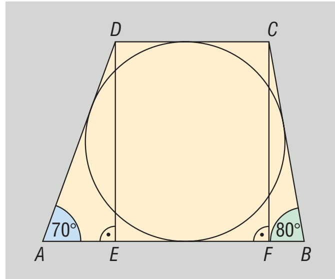
c) A rombusz területe $135{,}41\ \text{cm}^2$.

2526 Legyen a rombusz oldala a. Mivel a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást és felezik a csúcsoknál lévő szögeket, felírható: $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{e}{2a}$, illetve $\sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{f}{2a}$. A kettőt összeadva:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} = \frac{e}{2a} + \frac{f}{2a} = \frac{e+f}{2a}.$$

Innen az állítás közvetlenül adódik, hiszen a rombusz kerülete $4a$.

2527 *a)* A trapéz magassága a beírt kör sugarának kétszerese, azaz 20 cm.



Az ábra jelöléseit használva:

Az AED derékszögű háromszögből:

$$AD = \frac{20}{\sin 70^\circ} \approx 21{,}28; \quad AE = \frac{20}{\operatorname{tg} 70^\circ}.$$

A BFC derékszögű háromszögből:

$$BC = \frac{20}{\sin 80^\circ} \approx 20{,}31; \quad BF = \frac{20}{\operatorname{tg} 80^\circ}.$$

Az érintőnégyszögek tétele alapján:

$$AB + DC = AD + BC = \frac{20}{\sin 70^\circ} + \frac{20}{\sin 80^\circ}.$$

Tehát a trapéz területe:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{m \cdot (a+c)}{2} = \frac{20 \cdot \left(\frac{20}{\sin 70^\circ} + \frac{20}{\sin 80^\circ}\right)}{2} \approx 415{,}9 \text{ cm}^2.$$

b) Mivel $AB + DC = 2DC + AE + BF$, ezért:

$$\frac{20}{\sin 70^\circ} + \frac{20}{\sin 80^\circ} = 2DC + \frac{20}{\operatorname{tg} 70^\circ} + \frac{20}{\operatorname{tg} 80^\circ} \quad \Rightarrow \quad DC \approx 15{,}39.$$

A másik alap kiszámítása: $AB = DC + AE + BF \approx 26{,}2$.

A trapéz szárai $21{,}28$ és $20{,}31$ cm, az alapjai $15{,}39$ és $26{,}2$ cm hosszúak.

2528 *a)* A két emelet közötti magasság $22 \cdot 17 = 374$ cm.

A kérdéses α szög tangense:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3{,}74}{10} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 20{,}51^\circ.$$

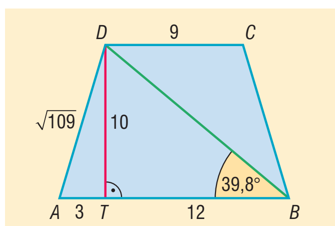
A felvonó hajlásszöge tehát $20{,}51^\circ$.

b) A lejtő hossza:

$$\frac{10}{\cos 20{,}51^\circ} \approx 10{,}68 \text{ m}.$$

A felvonó $\frac{10{,}68}{0{,}2} = 53{,}4$ másodperc alatt ér fel.

2529 Az ábra jelöléseit használva: $AT = 3$ cm.



Az ATD derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételből:

$$AD = \sqrt{109}.$$

A TBD derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg} TBD\sphericalangle = \frac{10}{15-3} \quad \Rightarrow \quad TBD\sphericalangle = 39{,}8^\circ.$$

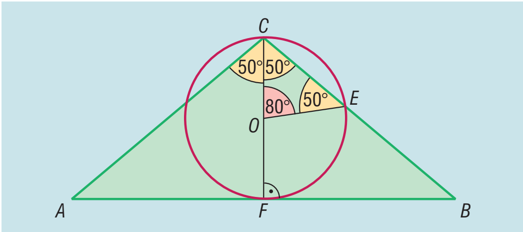
Tehát a trapéz köré írt kör egy húrjának hossza $\sqrt{109}$, és ehhez a húrhoz tartozó kerületi szög $39{,}8^\circ$.
Innen az ismert összefüggés alapján:

$$R = \frac{\sqrt{109}}{2 \cdot \sin 39{,}8^\circ} \approx 8{,}16.$$

A trapéz köré írt kör sugara 8,16 cm.

2530 Tekintsük az ábra jelöléseit. A BCF derékszögű háromszögben az AB alaphoz tartozó magasság:

$$CF = \frac{20}{\operatorname{tg} 50^\circ} = 16{,}78 \text{ cm}.$$



Tehát a magasság mint átmérő fölé írt kör sugara 8,39 cm:

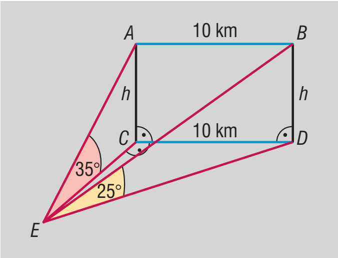
$$OC = OE = OF = 8{,}39.$$

Az OEC egyenlő szárú háromszögben: $COE\sphericalangle = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$. A kör CE húrjának a középponti szöge tehát 80°. A kör háromszögön kívül eső területe a 80°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területének kétszerese:

$$T = 2 \cdot \left(8{,}39^2 \cdot \pi \cdot \frac{80^\circ}{360^\circ} - \frac{8{,}39^2 \cdot \sin 80^\circ}{2}\right) = 28{,}91.$$

A kör és a háromszög közös részének területe tehát $8{,}39^2 \cdot \pi - 28{,}91 = 192{,}12 \text{ cm}^2$.

2531 A vízszintes terep síkja legyen a DCE háromszög síkja, a vár helyét jelölje E pont. A repülőgép repülési magassága h, és egy perc alatt az A pontból a B pontba ér. A repülőgép egy perc alatt 10 km utat tesz meg, tehát $AB = CD = 10$ km.



Az ECD derékszögű háromszögben a derékszögű csúcs C-nél van. Oldalainak hosszát fejezzük ki h-val.

Az ACE háromszögből: $EC = h \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ$.

A BDE háromszögből: $ED = h \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ$.

Az ECD derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

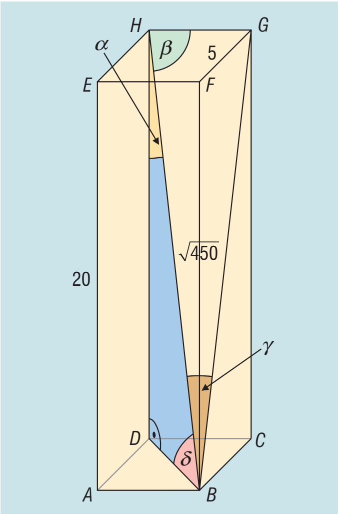
$$(h \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ)^2 + 10^2 = (h \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ)^2,$$

$$h^2 = \frac{100}{(\operatorname{ctg} 25^\circ)^2 - (\operatorname{ctg} 35^\circ)^2},$$

$$h \approx 6{,}251.$$

A repülőgép repülési magassága megközelítőleg 6251 m.

2532 A testátlók hossza $\sqrt{450}$ cm.



a) A BH testátlónak az oldalélekkel bezárt α szöge a BDH derékszögű háromszögből határozható meg:

$$\cos \alpha = \frac{20}{\sqrt{450}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 19{,}47^\circ.$$

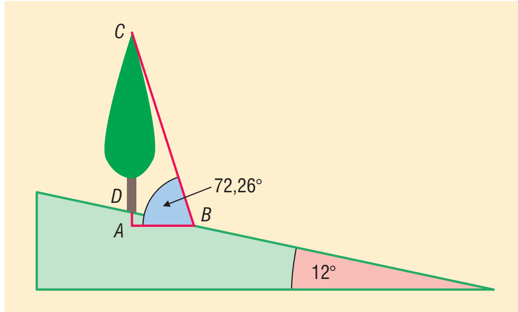
b) A BH testátlónak az alapélekkel bezárt β szöge a BGH derékszögű háromszögből határozható meg:

$$\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{450}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 76{,}37^\circ.$$

c) A BH testátlónak az oldallapokkal bezárt γ szöge a BGH derékszögű háromszögből határozható meg, a γ szög éppen a β szög pótszöge, vagyis $\gamma = 13{,}63^\circ$.

d) A BH testátlónak az alaplapokkal bezárt δ szöge a BDH derékszögű háromszögből határozható meg, a δ szög éppen az α szög pótszöge, vagyis $\delta = 70{,}53^\circ$.

2533 Az ábra jelöléseit használva a fa magassága DC, árnyéka $DB = 5$ m és a BAC szög derékszög.



Az ABC szög tangense:

$$\frac{1}{0,32} \Rightarrow ABC\sphericalangle = 72,26°.$$

Az ABD derékszögű háromszögben:

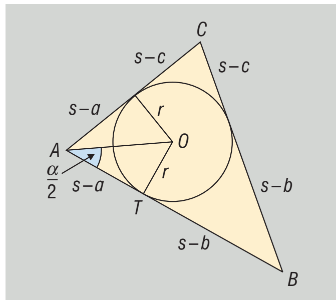
$$AB = 5 \cdot \cos 12° \approx 4,89,$$
$$AD = 5 \cdot \sin 12° \approx 1,04.$$

Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\mathrm{tg}\, 72,26° = \frac{1,04 + DC}{4,89} \Rightarrow DC \approx 14,24.$$

A fa magassága 14,24 m.

2534 Ismeretes, hogy az ABC háromszögben az oldalakat a szokásos módon jelölve, a beírt kör érintési pontjainak a csúcsoktól vett távolsága $s-a$, $s-b$ és $s-c$.

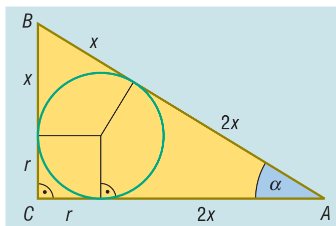


Mivel a háromszög beírt körének középpontját a belső szögfelezők metszéspontja szolgáltatja, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ kifejezhető az AOT derékszögű háromszögből: $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$ (r a beírt kör sugara).

A háromszög területét kétféleképpen számolhatjuk. Egyrészt a beírt kör r sugarával, másrészt a Heron-képlettel:

$$s \cdot r = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}, \quad \text{amiből} \quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}}.$$

2535 Ha a háromszög átfogójának hossza $3x$, a beírt kör sugara r, akkor a beírt körhöz a csúcsokból húzott érintőszakaszok hosszának egyenlőségéből következően a befogók hossza $x + r$, illetve $2x + r$.



A derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján:

$$(x+r)^2 + (2x+r)^2 = (3x)^2.$$

Átrendezéssel adódik:

$$2r^2 + 6xr - 4x^2 = 0,$$
$$\left(\frac{r}{x}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{r}{x}\right) - 2 = 0,$$
$$\left(\frac{r}{x}\right)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Mivel $\frac{r}{x}$ értéke nem lehet negatív,

$$\frac{r}{x} = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}.$$

A derékszögű háromszög kisebb α szögére felírható, hogy:

$$\sin\alpha = \frac{r+x}{3x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{r}{x} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{-3+\sqrt{17}}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-1+\sqrt{17}}{6} \Rightarrow \alpha = 31,37°.$$

A háromszög hegyesszögei 31,37° és 58,63°.

2536 A háromszög szögei: $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$ és $\gamma = 70°$.

Mivel a háromszög hegyesszögű, az oldalakra kifelé rajzolt félkör mindegyike kívül esik a háromszög köré írható körén. Ahhoz, hogy a kérdést megválaszoljuk, elég a félkörök területének összegéből kivonni a háromszög köré írt körének a háromszögön kívül eső területét.

A háromszög oldalait az ismert összefüggés alapján számolhatjuk:

$$a = 2 \cdot 20 \cdot \sin 50°,\quad b = 2 \cdot 20 \cdot \sin 60° \quad \text{és} \quad c = 2 \cdot 20 \cdot \sin 70°.$$

A háromszög oldalaira kifelé rajzolt félkörök sugarai az oldalhosszak fele, ezért területük összege:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \left[(20 \cdot \sin 50°)^2 + (20 \cdot \sin 60°)^2 + (20 \cdot \sin 70°)^2\right] =$$
$$= 200\pi \cdot (\sin^2 50° + \sin^2 60° + \sin^2 70°) \approx 1394.$$

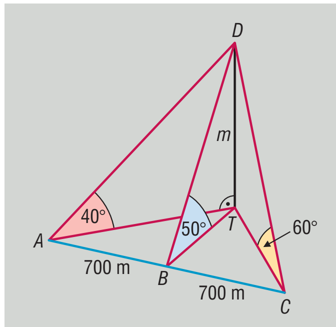
A háromszög köré írt körének a háromszögön kívül eső területe számolható úgy, hogy a kör területéből kivonjuk a háromszög területét:

$$20^2 \cdot \pi - 2 \cdot 20^2 \cdot \sin 50° \cdot \sin 60° \cdot \sin 70° \approx 757{,}3.$$

A kérdéses terület a két terület különbsége: $636{,}7\ \text{cm}^2$.

2537 Az ábra jelöléseit használva a hegy m magasságával számíthatók a következő távolságok:

$$AT = m \cdot \operatorname{ctg} 40°,$$
$$BT = m \cdot \operatorname{ctg} 50°,$$
$$CT = m \cdot \operatorname{ctg} 60°.$$



Az ACT háromszög AC oldalának felezéspontja B. Erre a pontra tükrözve a háromszöget, az eredeti és tükrözött háromszög együtt egy paralelogrammát alkot. Ismeretes, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege egyenlő az átlói hosszának négyzetösszegével, ezért felírható:

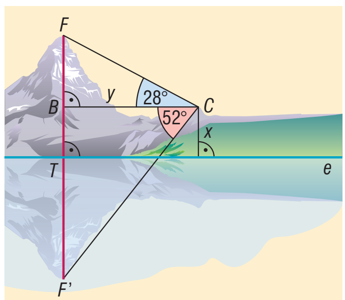
$$2 \cdot (m \cdot \operatorname{ctg} 40°)^2 + 2 \cdot (m \cdot \operatorname{ctg} 60°)^2 = (2 \cdot m \cdot \operatorname{ctg} 50°)^2 + 1400^2,$$

$$m^2 = \frac{1400^2}{2 \cdot \operatorname{ctg}^2 40° + 2 \cdot \operatorname{ctg}^2 60° - 4 \cdot \operatorname{ctg}^2 50°},$$

$$m \approx 1685.$$

A hegy magassága 1685 méter.

2538 Az ábrán a turista a C pontban van, a hegycsúcs helyét F, a hegycsúcs tükörképét a tóban F' pont jelöli. A tó tükrének szintje az e egyenes. A tengerszint feletti magasságokból, illetve a tükröződésből adódóan:



$$TF = TF' = 2000 - 500 = 1500\ \text{m}.$$

Az FBC, illetve az $F'BC$ háromszögben:

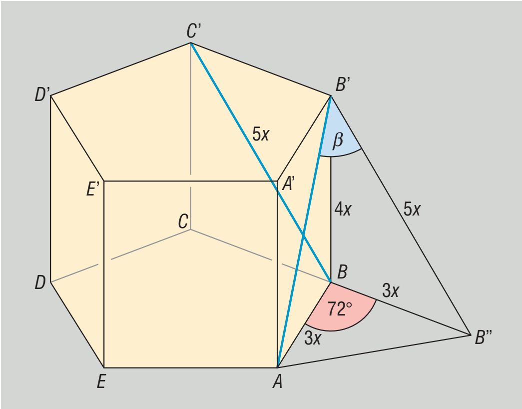
$$\operatorname{tg} 28° = \frac{1500 - x}{y}, \quad \text{illetve} \quad \operatorname{tg} 52° = \frac{x + 1500}{y}.$$

Az egyenletrendszert megoldva: $x \approx 619{,}52$; $y \approx 1656$.

a) A turista a tengerszint felett $619{,}5 + 500 = 1119{,}5$ méterre van.

b) Az FC távolság az FBC derékszögű háromszögből számítható: $FC = \dfrac{y}{\cos 28°} \approx 1875{,}5$.
A turista légvonalban a szemközti hegycsúcstól 1875,5 méterre van.

2539 Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen az alapél $3x$, az oldalél $4x$ hosszúságú. Az oldallap átlóinak hossza Pitagorasz-tétel alapján $5x$ hosszú. Toljuk el a $C'B$ átlót úgy, hogy a C' végpontja B'-be kerüljön. Az eltolt átló másik végpontja legyen B''.



Feladatunk az $AB'B''$ szög kiszámolása (β).

Az $AB'B''$ háromszög egyenlő szárú, szárainak hossza $5x$. Az AB'' hosszúság meghatározható az ABB'' egyenlő szárú háromszögből. Az ABB'' háromszög szárainak hossza $3x$, szárszöge pedig a szabályos ötszög egy külső szöge, azaz 72°. Ezekből az adatokból kapjuk:

$$AB'' = 2 \cdot 3x \cdot \sin 36^\circ = 6 \cdot x \cdot \sin 36^\circ.$$

Tehát az $AB'B''$ egyenlő szárú háromszög alapja $6 \cdot x \cdot \sin 36^\circ$, szára $5x$. A háromszög β szárszögére felírható:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{3 \cdot x \cdot \sin 36^\circ}{5x} = \frac{3}{5} \cdot \sin 36^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta = 41{,}3^\circ.$$

Az AB' és BC' átlók 41,3° szöget zárnak be egymással.

Vektorok (emlékeztető), vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre – megoldások

2540 A szerkesztések a vektorműveletek definíciói alapján elvégezhetők.

2541 Használjuk a vektorműveletek definícióit.

2542 *a)* $3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$;

b) $\left(\sqrt{2}+1\right) \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$;

c) $\dfrac{7 \cdot \vec{x} + \vec{y}}{2}$.

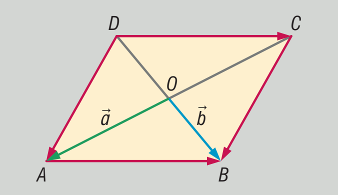
2543 *a)* $\vec{e} = \vec{c} - \vec{d}$ és $\vec{f} = -\vec{c} - \vec{d}$.

b) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{0}$, $\vec{b} + \vec{d} = \vec{0}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

c) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \dfrac{5}{\sin 35^\circ} \approx 8{,}72$ cm, $|\vec{f}| = \dfrac{10}{\operatorname{tg} 35^\circ} \approx 14{,}28$ cm.

2544 Az ábra alapján (➡):

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{b} - \vec{a};$$
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = \vec{a} + \vec{b}.$$



2545 A lejtővel párhuzamos erő: $200 \cdot \sin 32^\circ \approx 105{,}98$ N.
A lejtőre merőleges erő: $200 \cdot \cos 32^\circ \approx 169{,}61$ N.

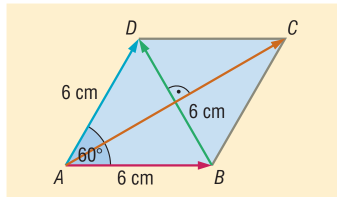
2546 A vektor végpontja a DC oldal D-hez közelebbi harmadolópontja.

2547 A három vektort egymáshoz fűzve szabályos háromszöget kapunk. A vektorok egymással 120°-os szöget zárnak be.

2548 Ha a három vektor páronként 120°-os szöget zár be, akkor összegük nullvektor. A minimális hossz nulla. A maximális hossz 15 cm. Ekkor a három vektor azonos állású és azonos irányú.

2549 A nullvektor egyenlő az ellentettjével.

2550 Az ábra alapján:



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

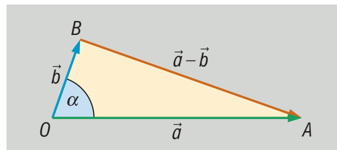
Mivel az ABD háromszög 6 cm oldalú szabályos háromszög:

$$\left|\overrightarrow{BD}\right| = 6 \text{ cm}.$$

Az AC átló egy 6 cm oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2 \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

2551 Az ábrán látható módon toljuk el a két vektort egy közös O kezdőpontba, és a vektorok végpontjai legyenek A és B.



A feladat feltétele szerint az ABO háromszög derékszögű, valamint az OA átfogó hossza háromszorosa az AB befogó hosszának.

A két vektor által bezárt α szög szögfüggvény segítségével számítható:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 70{,}53°.$$

A két vektor által bezárt szög tehát $70{,}53°$.

2552 *a)* 9; *b)* $\dfrac{9}{5}$; *c)* $3 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$.

2553 A vektorösszeadásra vonatkozó paralelogrammaszabály alapján a szerkesztés elvégezhető.

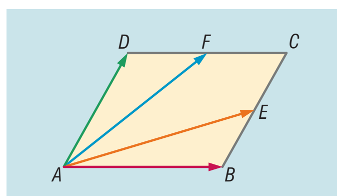
2554 A vektorfelbontás egyértelműségéből adódóan:

a) $\alpha = 2,\ \beta = -3$;

b) $\alpha - 2\beta = 2\alpha$, illetve $\beta = 4 \Rightarrow \alpha = -8$;

c) $a - 2\beta = 0$, illetve $5\alpha - \beta + 27 = 0 \Rightarrow \alpha = -6$ és $\beta = -3$.

2555 Az ábra alapján:



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}, \quad \text{illetve} \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2}.$$

Tehát:

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

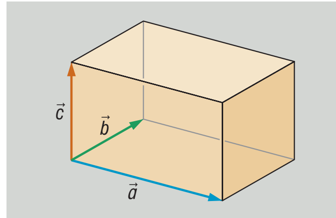
2556 A harmadolópontba mutató vektorok:

$$\frac{2 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{b} + 2 \cdot \vec{c}}{3}.$$

2557 A pontokba mutató vektorok:

$$2 \cdot \vec{b} - \vec{c} \quad \text{és} \quad 2 \cdot \vec{c} - \vec{b}.$$

2558 Az egy csúcsból kiinduló oldalélek vektorai legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$.



A lapátlók vektorai ezekkel kifejezve:

$$\vec{a}+\vec{b},\quad \vec{b}+\vec{c} \quad \text{és} \quad \vec{c}+\vec{a}.$$

A testátló vektora:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

A feladatban szereplő hét vektor összege:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}+\vec{c})+(\vec{c}+\vec{a})+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=4\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

A vektorok összege éppen a csúcsból kiinduló testátló vektorának a négyszerese.

2559 A keresett vektorok:

a) $\overrightarrow{OF}=-\vec{a}$; *b)* $\overrightarrow{OG}=-\vec{b}$; *c)* $\overrightarrow{OH}=-\vec{c}$;

d) $\overrightarrow{FC}=\vec{a}+\vec{c}$; *e)* $\overrightarrow{OK}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$; *f)* $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$;

g) $\overrightarrow{DC}=\vec{b}-\vec{a}$.

2560 A kocka A csúcsából kiinduló élvektorok legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Az $\vec{e}$, $\vec{f}$ és $\vec{g}$ lapközéppontokba mutató vektorok az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével előállíthatók:

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{f}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \text{és} \quad \vec{g}=\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}.$$

Az egyenletrendszert $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ ismeretlenekre megoldva adódik:

$$\vec{a}=\vec{e}+\vec{g}-\vec{f},\quad \vec{b}=\vec{e}+\vec{f}-\vec{g} \quad \text{és} \quad \vec{c}=\vec{f}+\vec{g}-\vec{e}.$$

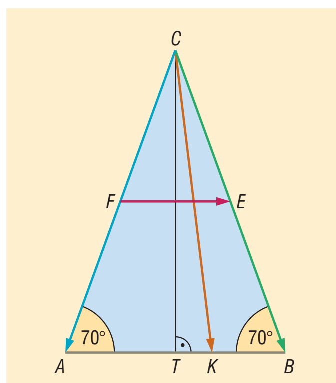
2561 *a)* Az $\overrightarrow{FE}$ vektor a háromszög középvonalának a vektora, tehát párhuzamos az $\overrightarrow{AB}$ vektorral és fele olyan hosszú:

$$\overrightarrow{FE}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\frac{\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}}{2}.$$

A C pontból az AB szakasz harmadolópontjába mutató vektort a végpontokba mutató vektorok segítségével kifejezhetjük:

$$\overrightarrow{CK}=\frac{2\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}}{3}.$$

b) Az előzőek alapján:



$$\left|\overrightarrow{FE}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right|=\frac{18}{2}=9\text{ cm}.$$

A háromszög AB oldalához tartozó magasságának talppontja legyen T. Tudjuk, hogy a CTB derékszögű háromszög TB befogója 9 cm, valamint:

$$TBC\sphericalangle=70^\circ \Rightarrow CT=9\cdot\operatorname{tg}70^\circ.$$

A TKC derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétel alapján:

$$\left|\overrightarrow{CK}\right|=\sqrt{3^2+(9\cdot\operatorname{tg}70^\circ)^2}\approx 24{,}91.$$

Tehát $\left|\overrightarrow{CK}\right|\approx 24{,}91$ cm.

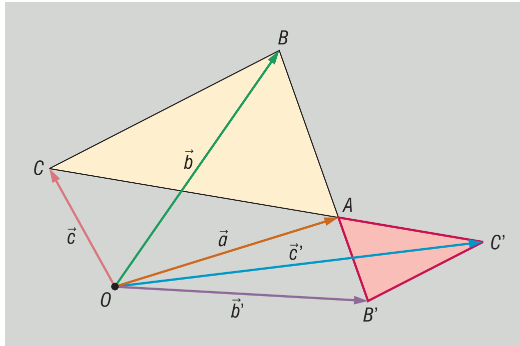
2562 Az A csúcs képe önmaga, tehát O-ból A-ba mutató vektor $\vec{a}$.

Ha a B csúcs képe B', akkor a BB' szakasz B'-höz közelebbi harmadolópontja az A pont, ezért az ismert képlet alapján:

$$\vec{a} = \frac{2 \cdot \vec{b'} + \vec{b}}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{b'} = \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{b}}{2}.$$

Hasonlóan adódik:

$$\vec{a} = \frac{2 \cdot \vec{c'} + \vec{c}}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{c'} = \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{c}}{2}.$$



Tehát az O vonatkoztatási pontból a képháromszög csúcsaiba mutató vektorok:

$$\vec{a}, \quad \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{c}}{2}.$$

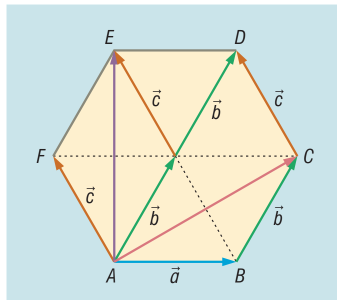
2563 Tekintsük az ábra jelöléseit.

A szabályos hatszögben $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ és $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$. Mivel a hatszög hat szabályos háromszögre bontható, az ábrán jelölt vektorok egyenlőségét kihasználva:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{AE} = \vec{b} + \vec{c} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AF} = \vec{c}.$$

Tehát:

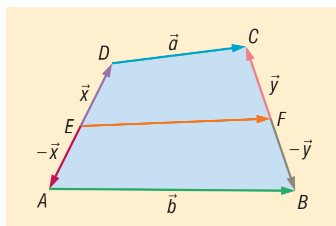
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{c} =$$
$$= 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 2 \cdot \overrightarrow{AD}.$$



2564 Legyen $\overrightarrow{ED} = \vec{x}$, $\overrightarrow{FC} = \vec{y}$. Ezen vektorok ellentettjei: $\overrightarrow{EA} = -\vec{x}$, illetve $\overrightarrow{FB} = -\vec{y}$.

Az $\overrightarrow{EF}$ vektort kétféleképpen is kifejezhetjük:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \vec{x} + \vec{a} - \vec{y},$$
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\vec{x} + \vec{b} + \vec{y}.$$



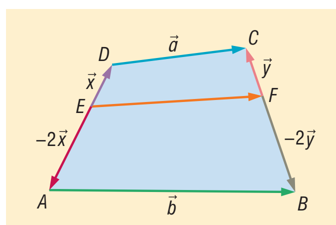
A két egyenletet összeadva adódik, hogy:

$$2 \cdot \overrightarrow{EF} = \vec{a} + \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{EF} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$

2565 Legyen $\overrightarrow{ED} = \vec{x}$, $\overrightarrow{FC} = \vec{y}$. Mivel E és F harmadolópontok, ezért $\overrightarrow{EA} = -2 \cdot \vec{x}$ és $\overrightarrow{FB} = -2 \cdot \vec{y}$.

Az $\overrightarrow{EF}$ vektort kétféleképpen is kifejezhetjük:

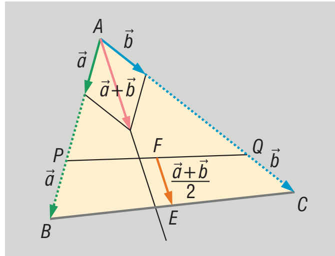
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \vec{x} + \vec{a} - \vec{y},$$
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -2 \cdot \vec{x} + \vec{b} + 2 \cdot \vec{y}.$$



Az első egyenletet kétszereséhez hozzáadva a második egyenletet:

$$3 \cdot \overrightarrow{EF} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{EF} = \frac{2 \cdot \vec{a} + \vec{b}}{3}.$$

2566 A $BCQP$ négyszög PB és QC oldalait az ábrán látható módon irányítsuk vektorokként. Mivel az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor a feladat feltétele alapján egyenlő hosszú, az általuk kifeszített paralelogramma rombusz. Az összegük vektora felezi a két vektor szögét, vagyis az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor párhuzamos az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezőjével. A $BCQP$ négyszögnek EF középvonala, így a 2564. feladat alapján:



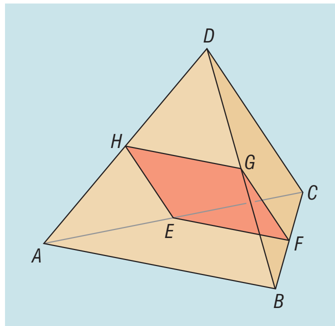
$$\overrightarrow{FE}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{FE}$ vektor párhuzamos az $\vec{a}+\vec{b}$ vektorral, ami párhuzamos az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezőjével.

Ezzel igazoltuk, hogy EF egyenes párhuzamos az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezőjével.

2567 Legyen O egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pont. Egy pontba mutató helyvektort jelöljünk ugyanolyan kisbetűvel, mint a pont betűjelét.

Az ábrán látható $ABCD$ tetraéder AC élének felezőpontja E, BC élének felezőpontja F, BD élének felezőpontja G és AD élének felezőpontja H. Az O vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe:



$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\quad \vec{f}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{g}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\quad \text{és}\quad \vec{h}=\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}.$$

Az $EFGH$ négyszög EF és HG szemközti oldalának vektorai:

$$\overrightarrow{EF}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2},\quad \text{illetve}\quad \overrightarrow{HG}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}.$$

Mivel a négyszög két szemben lévő oldalának vektora egyenlő, a két szemben lévő oldal párhuzamos és egyenlő hosszú.

Beláttuk, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma. Hasonlóan járhatunk el bármely két szemközti élpárból kiindulva.

Egy tetraéder bármely két szemközti élpárjának felezőpontjai paralelogrammát alkotnak.

Vektorok alkalmazása a síkban és a térben – megoldások

2568 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}.$

2569 Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsából az átlóinak O metszéspontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{AO}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

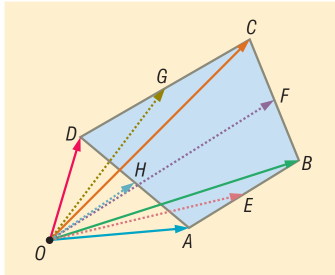
Az O pontot eltolva $2\cdot\overrightarrow{BC}=2\cdot\vec{b}$ vektorral O' pontot kapjuk:

$$\overrightarrow{AO'}=\overrightarrow{AO}+2\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+2\cdot\vec{b}=\frac{\vec{a}+5\cdot\vec{b}}{2}.$$

Az A csúcsból az eltolt paralelogramma átlóinak metszéspontjába mutató vektor:

$$\frac{\vec{a}+5\cdot\vec{b}}{2}.$$

2570 A sík egy tetszőleges O pontjából az ábra pontjaiba mutató helyvektorokat jelöljük ugyanolyan kisbetűvel, mint az ábrán lévő betű.



Az ábrán látható $ABCD$ négyszög oldalainak felezőpontjai E, F, G és H. Bizonyítandó, hogy $e+\vec{f}+\vec{g}+\vec{h}=a+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

Egy vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe:

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{f}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{g}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\quad \text{és}\quad \vec{h}=\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}.$$

Ez alapján:

$$e+\vec{f}+\vec{g}+\vec{h}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}.$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

2571 *a)* $\overrightarrow{BC}=2\cdot\left(\vec{f}-\vec{b}\right)$; *b)* $\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\overrightarrow{BC}=2\cdot\vec{f}-\vec{b}$;

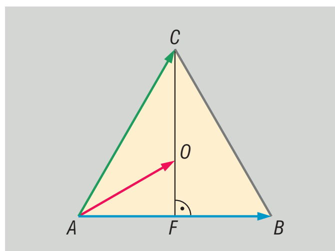
c) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\cdot\vec{f}-\vec{b}-\vec{a}$.

2572 *a)* $\dfrac{2\cdot\vec{a}+\vec{b}}{3}$; *b)* $\dfrac{3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{5}$; *c)* $\dfrac{10\cdot\vec{a}+\vec{b}}{11}$;

d) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\vec{a}+\vec{b}}{1+\sqrt{2}}=\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\vec{a}+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\vec{b}$.

2573 *a)* Az ábra alapján:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}.$$



A szabályos háromszög köré írt körének középpontja a háromszög súlypontja is egyben, tehát O pont harmadolja a CF súlyvonalat. Az A vonatkoztatási pontból CF szakasz harmadolópontjába mutató vektort a szakasz végpontjaiba mutató vektorok segítségével kifejezhetjük:

$$\overrightarrow{AO}=\frac{2\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{2\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}.$$

b) Az előzőekből következik, hogy a keresett arány:

$$\frac{\left|\overrightarrow{CF}\right|}{\left|\overrightarrow{CO}\right|}=\frac{3}{2}.$$

2574 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4\cdot\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{AC}}{7}$, és $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$.

2575 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3\cdot\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}}{5}$.

2576 *a)* $\vec{b}=\dfrac{7\cdot\vec{p}-4\cdot\vec{a}}{3}$; *b)* $\vec{b}=4\cdot\vec{p}-3\cdot\vec{a}$; *c)* $\vec{b}=\dfrac{12\cdot\vec{p}-7\cdot\vec{a}}{5}$.

2577 A bizonyítás a 2570. feladat alapján történhet.

2578 Az ABC háromszög súlypontjából a BDC háromszög súlypontjába mutató vektor:

$$\frac{\vec{d}-\vec{a}}{3}.$$

2579 Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba mutat.

A súlypontra vonatkozó összefüggés alapján:

$$\vec{s}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad \text{és} \quad \vec{p}=\frac{\vec{e}+\vec{f}+\vec{g}}{3}.$$

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}=(\vec{e}-\vec{a})+(\vec{f}-\vec{b})+(\vec{g}-\vec{c})=(\vec{e}+\vec{f}+\vec{g})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=3\cdot(\vec{p}-\vec{s})=3\cdot\overrightarrow{SP},$$

amit bizonyítani kellett.

2580 Az AB oldalél felezőpontjából a tetraéder súlypontjába mutató vektor:

$$\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}}{4}.$$

2581 Egy vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe.

A tetraéder D csúcsából az ABC alaplap éleinek felezőpontjaiba mutató vektorokat az A, B és C csúcsokba mutató vektorok segítségével felírhatjuk:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}.$$

A D csúcsból az ABC alaplap éleinek felezőpontjai által meghatározott háromszög S súlypontjába mutató vektort a felezőpontokba mutató vektorok számtani közepeként kapjuk:

$$\overrightarrow{DS}=\frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

Ez a vektor azonos a D csúcsból az ABC háromszög súlypontjába mutató vektorral.

2582 *a)* A $\overrightarrow{DE}$ vektor felírható két vektor különbségeként:

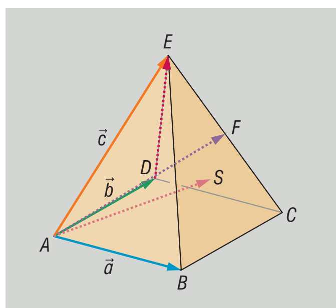
$$\overrightarrow{DE}=\vec{c}-\vec{b}.$$

b) A vektorösszeadás paralelogrammaszabálya alapján:

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}, \quad \text{illetve} \quad \overrightarrow{AE}=\vec{c}.$$

Az A csúcsból a CE oldalél F felezőpontjába mutató vektor $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AE}$ számtani közepe:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}.$$



c) Az A csúcsból a BCE háromszög csúcsaiba mutató vektorok:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \quad \overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AE}=\vec{c}.$$

Az A csúcsból a háromszög S súlypontjába mutató vektor ezek számtani közepe:

$$\overrightarrow{AS}=\frac{2\cdot\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

2583 Egy tetszőleges vonatkoztatási pontból az ABC háromszög súlypontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

A vonatkoztatási pontból a háromszög AB, BC és CA oldalainak felezőpontjaiba mutató vektorok rendre:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}.$$

A súlypontból a háromszög oldalainak felezőpontjaiba mutató vektorok:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-2\cdot\vec{c}}{6},$$

$$\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-2\cdot\vec{a}}{6},$$

$$\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{c}+\vec{a}-2\cdot\vec{b}}{6}.$$

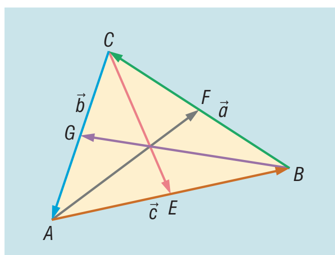
A felezőpontokba mutató vektorok összege nullvektor.

2584 A sokszög oldalait „körbe” mint vektorokat irányítva, összegük nullvektor.

Mivel $\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_3F_4}+\ldots+\overrightarrow{F_{2007}F_{2008}}+\overrightarrow{F_{2008}F_1}$ az oldalvektorok összegével egyenlő:

$$\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_3F_4}+\ldots+\overrightarrow{F_{2007}F_{2008}}+\overrightarrow{F_{2008}F_1}=\vec{0}.$$

2585 Ha három vektor összege nullvektor, akkor azokat egymáshoz fűzve az első vektor kezdőpontja egybeesik a harmadik végpontjával, tehát háromszöget alkot. Elég megmutatni, hogy a háromszög súlyvonalait mint vektorokat alkalmasan irányítva, azok összege nullvektor.



Legyenek az ABC háromszög oldalaiból képzett vektorok: $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ és $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$. Ezen három vektor összege nullvektor.

Az ábra jelöléseit használva az AB oldal felezőpontja E, a BC oldal felezőpontja F és az AC oldal felezőpontja G.

Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével állítsuk elő a súlyvonalak vektorait:

$$\overrightarrow{AF}=\vec{c}+\frac{\vec{a}}{2},\quad \overrightarrow{BG}=\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CE}=\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}.$$

Ezek összege:

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{0},$$

vagyis a súlyvonalak szakaszait el lehet úgy tolni, hogy azok egy háromszög oldalait alkossák.

2586 Ismert, hogy bármely vonatkoztatási pontból egy tetraéder súlypontjába mutató helyvektort ki lehet számítani a vonatkoztatási pontból a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepeként. Legyen most a vonatkoztatási pont éppen az $ABCD$ tetraéder S súlypontja. Ebből a pontból a csúcsokba mutató helyvektorokat jelöljük ugyanolyan kisbetűvel, mint a csúcs betűjele. Az előzőek alapján:

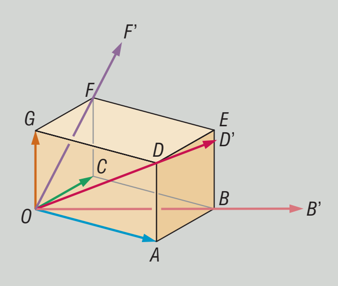
$$\overrightarrow{SS}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

Mivel egy pontból önmagába irányított vektor a nullvektor:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}.$$

Egy tetraéder súlypontjából a csúcsokba mutató vektorok összege nullvektor.

2587 Az ábra jelöléseit használva a meghosszabbított lapátlók vektorai:



$$\overrightarrow{OB'}=\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right),\quad \overrightarrow{OD'}=\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}\right),$$

$$\overrightarrow{OF'}=\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Ismert, hogy egy vonatkoztatási pontból egy háromszög súlypontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe, tehát az O csúcsból a $B'D'F'$ háromszög S súlypontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{OS}=\frac{\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OD'}+\overrightarrow{OF'}}{3}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}\right)}{3}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}.$$

Mivel O pontból az E pontba mutató helyvektor is $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}$, az E és az S pontok azonosak.

2588 Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai legyenek A, B és C. Tegyük fel, hogy a C pont az AB szakaszt $m:n$ arányban osztja úgy, hogy $AC:CB=m:n$.

Ismert, hogy $\vec{c}$ vektor előáll a következő alakban:

$$\vec{c}=\frac{n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{n+m}.$$

Ezt írhatjuk a következő formában:

$$\vec{c}=\frac{n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{n+m}=\frac{n}{n+m}\cdot\vec{a}+\frac{m}{n+m}\cdot\vec{b}.$$

Mivel $\frac{n}{n+m}+\frac{m}{n+m}=1$, az állítást bizonyítottuk.

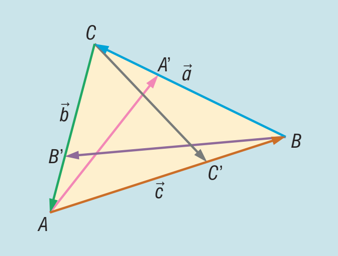
Hasonlóan bizonyítható az állítás, ha a C az AB szakaszon kívül van.

2589 Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai legyenek A, B és C. Ekkor:

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+(1-\alpha)\cdot\vec{b}-\vec{a}=(1-\alpha)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak, tehát az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesre esnek.

2590 Legyenek az ABC háromszög oldalaiból képzett vektorok: $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ és $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$. Ezen három vektor háromszöget alkot, összegük nullvektor.



Ha három vektor összege nullvektor, akkor azokat egymáshoz fűzve az első vektor kezdőpontja egybeesik a harmadik végpontjával, tehát háromszöget alkot.

Ez alapján elég megmutatni, hogy az $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{CC'}$ vektorok összege is nullvektor.

Mivel az A', B' és C' pontok a megfelelő oldalakat azonos arányban osztják:

$$\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=\frac{AC'}{AB}=\lambda,$$

amiből következik, hogy:

$$\overrightarrow{BA'}=\lambda\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda\cdot\vec{a},\quad \overrightarrow{CB'}=\lambda\cdot\overrightarrow{CA}=\lambda\cdot\vec{b}\quad \text{és}\quad \overrightarrow{AC'}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\cdot\vec{c}.$$

Fejezzük ki az oldalak vektoraival az $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{CC'}$ vektorokat:

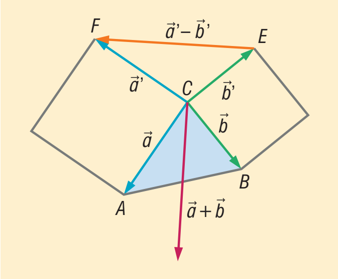
$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}=\vec{c}+\lambda\cdot\vec{a},$$
$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b},$$
$$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\vec{b}+\lambda\cdot\vec{c}.$$

Ezek összegére adódik:

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=(\lambda+1)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{0}.$$

Tehát az AA', BB' és CC' szakaszokat egy háromszöggé lehet összetolni.

2591 Az ábra jelöléseit használva elég belátni, hogy $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, hiszen az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor a paralelogrammaszabály alapján a súlyvonal vektorának kétszerese.

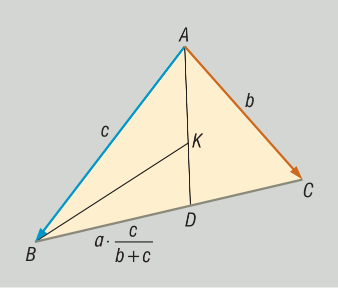


Az $\vec{a}$ vektor $-90°$-os forgatottja $\vec{a'}$, a $\vec{b}$ vektor $-90°$-os forgatottja $-\vec{b'}$. Ez alapján az $\vec{a}+\vec{b}$ vektornak is $-90°$-os forgatottja az $\overrightarrow{EF}=\vec{a'}-\vec{b'}$ vektor. A forgatás távolságtartó transzformáció, ezért $\vec{a}+\vec{b}$ és $\overrightarrow{EF}$ vektorok egyenlő hosszúak.

Tehát az EF a háromszög C csúcsából induló súlyvonalának kétszerese.

A többi súlyvonalra is hasonlóan bizonyítható az állítás.

2592 A háromszög beírt körének középpontját a belső szögfelezők metszéspontja adja.



Tudjuk, hogy egy háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

Az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelező az a hosszúságú oldalt egy olyan D belső pontban metszi, amelyre igaz, hogy $BD:DC=c:b$. A BD szakasz hossza tehát:

$$a\cdot\frac{c}{b+c}.$$

Az ABC háromszög B csúcsánál levő belső szögfelezője az AD szakaszt a háromszög beírt körének K középpontjában metszi. Ez a szögfelező az ABD háromszög B csúcsánál levő belső szögfelezője is, tehát az AD oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja:

$$\frac{AK}{KD}=\frac{c}{a\cdot\frac{c}{b+c}}=\frac{b+c}{a}.$$

Ismert, ha P pont az AB szakasz azon osztópontja, amelyre $AP:PB=m:n$, akkor egy rögzített O vonatoztatási pont esetén az A és a B végpontok $\vec{a}$ és $\vec{b}$ helyvektoraira, és a P osztópont $\vec{p}$ helyvektorára fennáll a következő összefüggés:

$$\vec{p}=\frac{n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{n+m}.$$

Az O vonatkoztatási pontot tekintve az A, B és C csúcsok helyvektorai rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Mivel $BD:DC = c:b$, az osztópont helyvektorára vonatkozó képlet szerint:

$$\overrightarrow{OD} = \frac{b \cdot \vec{b} + c \cdot \vec{c}}{b + c}.$$

Mivel

$$\frac{AK}{KD} = \frac{b + c}{a},$$

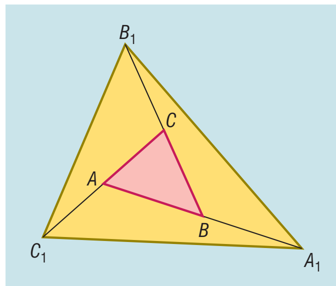
ezért

$$\overrightarrow{OK} = \frac{a \cdot \vec{a} + (b + c) \cdot \overrightarrow{OD}}{a + (b + c)} = \frac{a \cdot \vec{a} + (b + c) \cdot \dfrac{b \cdot \vec{b} + c \cdot \vec{c}}{b + c}}{a + (b + c)} = \frac{a \cdot \vec{a} + b \cdot \vec{b} + c \cdot \vec{c}}{a + b + c}.$$

Tehát a beírt kör középpontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{a \cdot \vec{a} + b \cdot \vec{b} + c \cdot \vec{c}}{a + b + c}.$$

2593 Egy tetszőleges, de rögzített O vonatkoztatási pontból az ABC háromszög A, B és C csúcsaiba mutató helyvektorok legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$, valamint az $A_1B_1C_1$ háromszög A_1, B_1 és C_1 csúcsaiba mutató helyvektorok rendre $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ és $\vec{c_1}$. Ha az adott $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ és $\vec{c_1}$ vektorok felhasználásával az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok szerkesztésére eljárást tudunk adni, akkor a feladatot megoldottuk.



Mivel az A pont felezi a CC_1 szakaszt, felírható:

$$\vec{a} = \frac{\vec{c} + \vec{c_1}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \vec{a} = \vec{c} + \vec{c_1}. \qquad (1)$$

Hasonlóan:

$$\vec{c} = \frac{\vec{b} + \vec{b_1}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \vec{c} = \vec{b} + \vec{b_1}, \qquad (2)$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{a} + \vec{a_1}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \vec{b} = \vec{a} + \vec{a_1}. \qquad (3)$$

Az (1) egyenlet kétszeresét hozzáadva a (2) egyenlethez, adódik:

$$4 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{c} = 2 \cdot \vec{c} + 2 \cdot \vec{c_1} + \vec{b} + \vec{b_1} \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \vec{c_1} + \vec{b} + \vec{b_1}. \qquad (4)$$

A (4) egyenlet kétszeresét a (3) egyenlethez adva:

$$8 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} = 4 \cdot \vec{c_1} + 2 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{b_1} + \vec{a} + \vec{a_1} \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot \vec{a} = 4 \cdot \vec{c_1} + 2 \cdot \vec{b_1} + \vec{a} + \vec{a_1}.$$

Ez utóbbi egyenletből $\vec{a}$-t kifejezve:

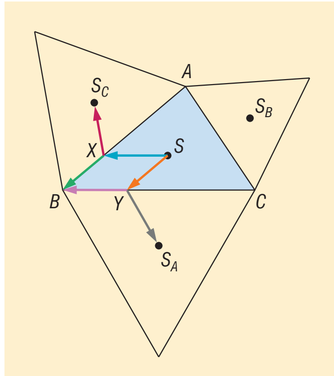
$$\vec{a} = \frac{4 \cdot \vec{c_1} + 2 \cdot \vec{b_1} + \vec{a_1}}{7}.$$

Hasonlóan:

$$\vec{b} = \frac{4 \cdot \vec{a_1} + 2 \cdot \vec{c_1} + \vec{b_1}}{7} \quad \text{és} \quad \vec{c} = \frac{4 \cdot \vec{b_1} + 2 \cdot \vec{a_1} + \vec{c_1}}{7}.$$

Ezek alapján az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok szerkeszthetők az $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ és $\vec{c_1}$ vektorok ismeretében.

2594 Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen az ABC háromszög súlypontja S, a háromszög oldalaira kifelé rajzolt szabályos háromszögek középpontjai S_A, S_B és S_C.



Az AB oldal B-hez közelebbi harmadolópontja legyen X, a BC oldal B-hez közelebbi harmadolópontja legyen Y.

A $BYSX$ négyszög az S súlypont harmadoló tulajdonsága miatt paralelogramma:

$$\overrightarrow{SY} = \overrightarrow{XB} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{SX} = \overrightarrow{YB}.$$

Ezért:

$$\overrightarrow{SS_C} = \overrightarrow{SX} + \overrightarrow{XS_C} = \overrightarrow{YB} + \overrightarrow{XS_C}$$

és

$$\overrightarrow{SS_A} = \overrightarrow{SY} + \overrightarrow{YS_A} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{YS_A}.$$

Mivel a háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket rajzoltunk:

$$XB = XS_C \quad \text{és} \quad YB = YS_A,$$

és páronként 120°-os szöget zárnak be.

Ebből adódóan $\overrightarrow{XS_C}$ vektor az $\overrightarrow{XB}$ vektor –120°-os forgatottja, és az $\overrightarrow{YB}$ vektor az $\overrightarrow{YS_A}$ vektor –120°-os forgatottja.

Tehát az $\overrightarrow{SS_C}$ vektor $\overrightarrow{XS_C}$ és $\overrightarrow{YB}$ összetevői az $\overrightarrow{SS_A}$ vektor $\overrightarrow{XB}$ és $\overrightarrow{YS_A}$ összetevőinek –120°-os forgatottja.

Ez azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{SS_C}$ vektor az $\overrightarrow{SS_A}$ vektor –120°-os forgatottja.

Hasonlóan belátható, hogy az $\overrightarrow{SS_B}$ vektor az $\overrightarrow{SS_C}$ vektor –120°-os forgatottja.

Tehát $S_AS_BS_C$ háromszög szabályos, és súlypontja S.

Vektorok a koordináta-rendszerben, vektor koordinátái, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal – megoldások

2595 A szerkesztés során használhatjuk a párhuzamos szelők tételét és a magasságtételt.

2596 A 2595. feladatnak megfelelően járhatunk el.

2597 *a)* Az x tengelyre vonatkozó tükrözéskor a vektor első koordinátája marad változatlanul, a második koordinátája az ellentettjére változik.

b) Az y tengelyre vonatkozó tükrözéskor a vektor második koordinátája marad változatlanul, az első koordinátája az ellentettjére változik.

c) Az origóra vonatkozó tükrözéskor a vektor első és második koordinátája is az ellentettjére változik.

d) Az origón áthaladó és az x tengely pozitív felével 45°-os szöget bezáró egyenesre vonatkozó tükrözéskor a vektor első és második koordinátája felcserélődik.

2598 *a)* A helyvektorok végpontjának halmaza az x tengely.

b) A helyvektorok végpontjának halmaza az y tengely.

c) A helyvektorok végpontjának halmaza egy olyan egyenes, amely az y tengelyt a –3 pontjában metszi és az x tengellyel párhuzamos.

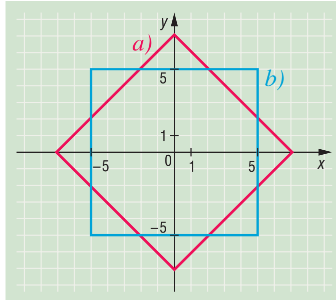
d) A helyvektorok végpontjának halmaza egy olyan egyenes, amely az x tengelyt a 2 pontjában metszi és az y tengellyel párhuzamos.

2599 *a)* Ha a négyzet oldala 10 egység hosszú, akkor az átlója $10\cdot\sqrt{2}$. A középpontjának a csúcsoktól vett távolsága $5\cdot\sqrt{2}$. Tehát a csúcsok helyvektorai:

$$\left(5\cdot\sqrt{2};\ 0\right),\quad \left(0;\ 5\cdot\sqrt{2}\right),\quad \left(-5\cdot\sqrt{2};\ 0\right)\quad \text{és}\quad \left(0;\ -5\cdot\sqrt{2}\right).$$

b) A négyzet oldala 10 egység hosszú, így az oldalaknak a tengelyektől vett távolsága 5 egység, vagyis a csúcspontok helyvektorai:

$$(5;\ 5),\quad (-5;\ 5),\quad (-5;\ -5)\quad \text{és}\quad (5;\ -5).$$



2600 *a)* $(8;\ -12)$; *b)* $\left(\frac{2}{3};\ -1\right)$; *c)* $(126;\ -189)$.

2601 *a)* $\left(0{,}5;\ -\frac{3}{2}\right)$; *b)* $(2;\ -6)$; *c)* $(5;\ 12{,}6)$;

d) $(1{,}375;\ 0{,}475)$.

2602 *a)* $\overrightarrow{AB}(-13;\ -4)$; *b)* $\overrightarrow{AB}(-17;\ 10)$; *c)* $\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{3};\ -6\right)$;

d) $\overrightarrow{AB}(a-8;\ 5-b)$.

2603 Egy szakasz vektorát megkaphatjuk úgy, hogy a végpont helyvektorából kivonjuk a kezdőpont helyvektorát. Tehát:

$$\overrightarrow{AB}(-6;4),\quad \overrightarrow{BC}(7;2)\quad \text{és}\quad \overrightarrow{CA}(-1;-6).$$

Ezen vektorok összege a nullvektor.

2604 Az A pont képének helyvektorát megkaphatjuk úgy, hogy az A pont helyvektorához hozzáadjuk a $\vec{v}$ vektort. Az A pont képének helyvektora: $(3;\ 8)$. Az A pont képe:

a) $A'(3;\ 8)$; *b)* $A'(-4;\ 11)$; *c)* $A'\left(\sqrt{3}-2;\ 8\right)$; *d)* $A'(0;\ 0)$.

2605 A négy pont négyszöget határoz meg és $\overrightarrow{AB}(3,-5)$, illetve $\overrightarrow{CD}(3;-5)$. Mivel a két vektor egyenlő, a négy pont által meghatározott négyszög szemben levő oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, tehát paralelogrammát határoznak meg.

2606 Az $\overrightarrow{AB}(1;\ 2)$ és az $\overrightarrow{AC}(2004;\ 4008)$. Mivel az $\overrightarrow{AC}=2004\cdot\overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak, tehát a B és C végpontjaik A-val egy egyenesbe esnek.

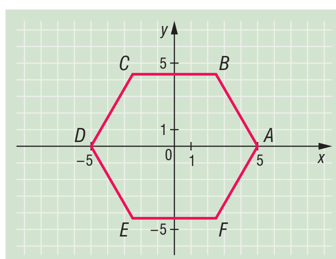
Bebizonyítottuk, hogy az $A(4;\ 7)$, $B(5;\ 9)$ és $C(2008;\ 4015)$ pontok egy egyenesre esnek.

2607 Egy szabályos hatszög oldalai a köré írt körének középpontjából 60°-os szög alatt látszanak, tehát a hatszög köré írt körének sugara éppen a hatszög oldala.

a) Az $ABCDEF$ szabályos hatszög A csúcsa illeszkedjen az x tengely pozitív felére.

Mivel a hatszög oldala 5 egység hosszú, a hatszög köré írt körének sugara is 5 egység $\Rightarrow A(5;\ 0)$ és $D(-5;\ 0)$.

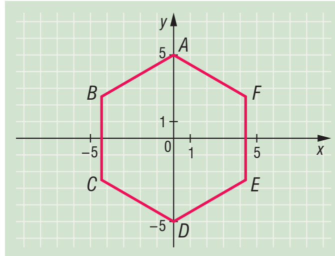
A hatszög B, C, E és F csúcsának koordinátái előjelesen egy olyan derékszögű háromszögnek a befogói, amelyek egyik hegyesszöge 60°, átfogója 5 egység.



Tehát:

$$B\left(\frac{5}{2};\ \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\right),\quad C\left(-\frac{5}{2};\ \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\right),\quad E\left(-\frac{5}{2};\ -\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\right),\quad F\left(\frac{5}{2};\ -\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\right).$$

b) Ha az $ABCDEF$ szabályos hatszög A csúcsa az y tengely pozitív felére illeszkedik, akkor:



$$A(0;5),\quad B\left(-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2}\right),\quad C\left(-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};-\frac{5}{2}\right),$$

$$D(0;-5),\quad E\left(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};-\frac{5}{2}\right),\quad F\left(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2}\right).$$

2608 *a)* A helyvektorok végpontjainak halmaza az első és harmadik síknegyed szögfelzői.
b) A helyvektorok végpontjainak halmaza a második és negyedik síknegyed szögfelzői.
c) A helyvektorok végpontjainak halmaza az első és második síknegyed szögfelzői.
d) A helyvektorok végpontjainak halmaza az első és negyedik síknegyed szögfelzői.
e) A helyvektorok végpontjainak halmaza a négy síknegyed szögfelzői.

2609 A $\vec{v}\left(\frac{p-2}{5-p};p^2+p-12\right)$ vektor két koordinátájára egyszerre kell teljesülni, hogy:

$$\frac{p-2}{5-p}\geq 0 \quad \text{és} \quad p^2+p-12\geq 0.$$

Az első egyenlőtlenség megoldása: $2\leq p<5$.
A második egyenlőtlenség megoldása: $p\geq 3$ vagy $p\leq -4$.
Az két egyenlőtlenség közös megoldása: $3\leq p<5$.
Ez utóbbi egyenlőtlenségrendszert a $p=3$ és $p=4$ egészek elégítik ki.

Tehát két olyan p egész szám van, amelyre a $\vec{v}\left(\frac{p-2}{5-p};p^2+p-12\right)$ helyvektor mindkét koordinátája nemnegatív: $p=3$ és $p=4$.

2610 A $\vec{v}\left(\frac{5n+2}{4};\frac{n^2+6}{n-1}\right)$ második koordinátája más alakba átírva: $\frac{n^2+6}{n-1}=n+1+\frac{7}{n-1}$.
Mivel n egész, ez a kifejezés akkor egész, ha $\frac{7}{n-1}$ egész.
A $\frac{7}{n-1}$ kifejezés akkor lesz egész, ha $n-1$ osztója a 7-nek. Az $n-1$ lehet: –7, –1, 1, 7.
A második koordináta tehát akkor egész, ha $n=-6,\ 0,\ 2$ vagy 8.
Ezen n-ek közül az első koordináta csak $n=2$ és $n=-6$ esetén egész.

Tehát a $\vec{v}\left(\frac{5n+2}{4};\frac{n^2+6}{n-1}\right)$ helyvektor mindkét koordinátája $n=2$ és $n=-6$ esetén egész.

2611 Az első koordináták összege:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\ldots+\frac{1}{2008\cdot 2009}.$$

A törteket elemi törtekre bontva:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\ldots+\frac{1}{2008\cdot 2009}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}.$$

A közbülső tagok összege 0, így az első koordináták összege:

$$1 - \frac{1}{2009} = \frac{2008}{2009}.$$

A második koordináták összege:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + \ldots + 2007 + 2008 =$$
$$= \frac{2008 \cdot 2009}{2} = 2017036.$$

Az összegvektor tehát:

$$\left(\frac{2008}{2009}; 2017036\right).$$

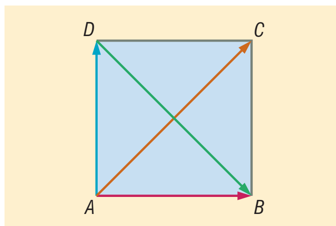
Vegyes feladatok III. – megoldások

2612 *a)* 20 egység; *b)* 19,32 egység;
c) 14,14 egység; *d)* 6,84 egység;
e) 0 egység.

2613 Az eredő mindkét esetben nullvektor.

2614 A felezőpontokat összekötő vektor: $\dfrac{\vec{a} - \vec{c}}{2}$.

2615 Az ábra alapján:



$$\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{DB}}{2}$$

és

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} - \frac{\overrightarrow{DB}}{2}.$$

Az $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ hossza az $\overrightarrow{AB}$ hosszának kétszerese, vagyis 4 egység.

2616 Az $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ és $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ egységnyi hosszú vektorok. A paralelogrammaszabály alapján a két vektor rombuszt feszít ki, amelynek átlója felezi az annál a csúcsnál levő szöget, amelyből kiindul, tehát az állítás igaz.

2617 *a)* $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$; *b)* $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BA} = -\vec{c}$;

c) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - 2 \cdot \overrightarrow{SC} = -2 \cdot \overrightarrow{SC} = -2 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot \vec{c} + \vec{a}\right) = -\dfrac{2}{3} \cdot \vec{c} - \dfrac{4}{3} \cdot \vec{a}.$

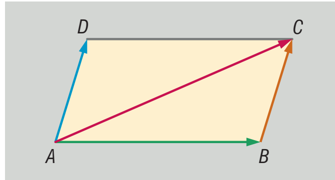
2618 $\overrightarrow{HP} = \dfrac{9 \cdot \vec{d} - 5 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c}}{15}.$

2619 A harmadolópontba mutató vektor:

$$\frac{2 \cdot \vec{x} + \vec{y}}{3} = \frac{2 \cdot \left(2 \cdot \vec{a} - 5 \cdot \vec{b}\right) + \left(3 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{a}\right)}{3} = -\frac{7 \cdot \vec{b}}{3}.$$

2620 Tekintsük a mellékelt ábrát, és használjuk fel, hogy:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC},\quad \text{valamint}\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.$$



A bal oldalt alakítva éppen a jobb oldalhoz jutunk:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{BC}.$$

2621 $\overrightarrow{FH}=\dfrac{4\cdot\vec{c}-3\cdot\vec{a}-\vec{b}}{6}.$

2622 *a)* $\overrightarrow{AB}(3;10)$, $\overrightarrow{BC}(1;-6)$ és $\overrightarrow{CA}(-4;-4)$. *b)* $A'\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, $B'\left(-2;-\dfrac{7}{2}\right)$ és $C'\left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

c) $C''(8;\ 11)$. *d)* A négyszög paralelogrammma.

2623 A két szélső kutya által kifejtett erő összege a középső kutya irányába mutat, és nagysága:

$$2\cdot 200\cdot\cos 22^\circ\approx 370{,}87\ \text{N}.$$

Ehhez a vektorhoz adjuk még a harmadik kutya által kifejtett 200 N nagyságú vektort. A három kutya 570,87 N erővel húzza a szánt.

2624 Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba vezet. A felezőpont képlete alapján számolunk:

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\quad\text{és}\quad \vec{q}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}.$$

Írjuk fel az AB, CD és PQ szakaszok felezőpontjaiba mutató vektorokat.

Azt kell bizonyítani, hogy a következő vektorok végpontjai egy egyenesre esnek:

$$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\quad \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\quad\text{és}\quad \frac{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

Mivel a két első vektor összegének a fele éppen a harmadik vektor, ezért a három vektor végpontja egy egyenesbe esik, és PQ felezőpontja felezi az AB és CD szakaszok felezőpontjai által meghatározott szakaszt.

2625 $x=-10$ és $y=1$.

2626 Egy tetszőleges, de rögzített O vonatkoztatási pontból a hatszög csúcsaiba vezető vektorok legyenek az adott körüljárási irány szerint $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$. A felezőpontokba mutató vektorok ezek segítségével kifejezhetők:

$$\vec{f_1}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{f_2}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{f_3}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},$$

$$\vec{f_4}=\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2},\quad \vec{f_5}=\frac{\vec{e}+\vec{f}}{2},\quad \vec{f_6}=\frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}.$$

Az O pontból az $F_1F_3F_5$ háromszög súlypontjába mutató vektor:

$$\vec{s_1}=\frac{\vec{f_1}+\vec{f_3}+\vec{f_5}}{3}=\frac{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\dfrac{\vec{e}+\vec{f}}{2}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}.$$

Az O pontból az $F_2F_4F_6$ háromszög súlypontjába mutató vektor:

$$\vec{s_2}=\frac{\vec{f_2}+\vec{f_4}+\vec{f_6}}{3}=\frac{\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}+\frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}.$$

Az O pontból kiinduló $F_1F_3F_5$ és $F_2F_4F_6$ háromszögek súlypontjába mutató vektorok egyenlők, tehát a két háromszög súlypontja azonos.

2627 A feltétel szerint az $\overrightarrow{AB}(x-4;\ 15)$ és $\overrightarrow{AC}(-11;\ 14)$ vektorok párhuzamosak, tehát létezik egy olyan α valós szám, hogy $\overrightarrow{AB}=\alpha\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow x-4=\alpha\cdot(-11)$. Felhasználva, hogy $15=\alpha\cdot 14$:

$$x=-\frac{109}{14}.$$

2628 Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba vezet.

A P pont A-ra vonatkozó tükörképe legyen P_1, P_1 B-re vonatkozó tükörképe P_2, és így tovább. Be kell bizonyítani, hogy a P_4 és a P pontok azonosak.

A tükrözések miatt:

$$\vec{p_1}=2\cdot\vec{a}-\vec{p},$$
$$\vec{p_2}=2\cdot\vec{b}-\vec{p_1}=2\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\vec{p},$$
$$\vec{p_3}=2\cdot\vec{c}-\vec{p_2}=2\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}\right)-\vec{p},$$
$$\vec{p_4}=2\cdot\vec{d}-\vec{p_3}=2\cdot\left(\vec{d}-\vec{c}+\vec{b}-\vec{a}\right)+\vec{p}.$$

Mivel paralelogrammáról van szó:

$$\vec{d}-\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}\quad\Rightarrow\quad\vec{d}-\vec{c}+\vec{b}-\vec{a}=\vec{0},$$

vagyis P és P_4 helyvektora egyenlő, tehát P és P_4 pontok azonosak.

2629 A 2567. feladat jelöléseit használva egy rögzített, de tetszőleges O vonatkoztatási pontból az AC és a BD szemközti élek F és H felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjába mutató helyvektor az $\vec{f}$ és $\vec{h}$ vektorok számtani közepe:

$$\frac{\vec{f}+\vec{h}}{2}=\frac{\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy egy tetraéder súlypontjába mutató helyvektort ki lehet számítani a vonatkoztatási pontból a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepeként:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

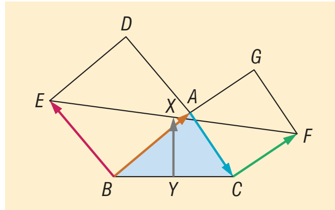
Mivel az O pontból a súlypontba mutató helyvektor azonos az FH szakasz felezőpontjának helyvektorával, a súlypont és az FH szakasz felezőpontja ugyanaz a pont.

Hasonlóan járhatunk el bármely két szemközti él esetén.

Egy tetraéder súlypontja felezi a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszokat.

Ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy egy tetraéderben a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszok felezve metszik egymást.

2630 Legyen az EF felezőpontja X és BC felezőpontja Y.



A 2564. feladat alapján:

$$\overrightarrow{YX} = \frac{\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}}{2}.$$

A $\overrightarrow{BE}$ vektor $-90°$-os forgatottja $\overrightarrow{BA}$, a $\overrightarrow{CF}$ vektor $-90°$-os forgatottja pedig $\overrightarrow{AC}$.

Ebből következik, hogy:

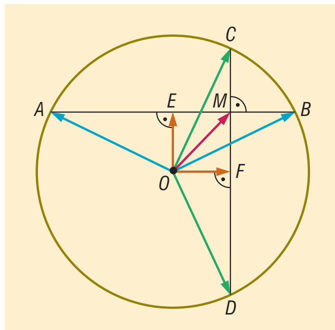
$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 2 \cdot \overrightarrow{YX},$$

és ennek a vektornak a $-90°$-os forgatottja:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

Ez azt jelenti, hogy XY távolság a BC távolság fele, tehát X valóban a BC átmérőjű körön van.

2631 Egy vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe.



A kör O középpontjából az AB húr E felezőpontjába mutató vektor merőleges AB-re, és:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Ugyanígy az O pontból a CD húr F felezőpontjába mutató vektor merőleges CD-re, és:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

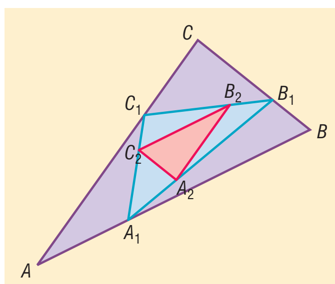
Mivel a két húr merőleges egymásra, az $OEMF$ négyszög téglalap, amelynek átlóvektora az oldalak vektorainak összege:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

Tehát:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}.$$

2632 Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba vezetnek.



A harmadolópontok helyvektorára vonatkozó összefüggésekből:

$$\vec{a}_1 = \frac{2 \cdot \vec{a} + \vec{b}}{3}, \quad \vec{b}_1 = \frac{2 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \vec{c}_1 = \frac{2 \cdot \vec{c} + \vec{a}}{3},$$

$$\vec{a}_2 = \frac{2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{b}_1}{3}, \quad \vec{b}_2 = \frac{2 \cdot \vec{b}_1 + \vec{c}_1}{3}, \quad \vec{c}_2 = \frac{2 \cdot \vec{c}_1 + \vec{a}_1}{3}.$$

Ezeket összevetve:

$$\vec{a}_2 = \frac{2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{b}_1}{3} = \frac{\dfrac{4 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{3} + \dfrac{2 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{3}}{3} = \frac{4 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{9}.$$

Ugyanígy:

$$\vec{b}_2 = \frac{4 \cdot \vec{b} + 4 \cdot \vec{c} + \vec{a}}{9}.$$

Tehát:

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{b_2} - \overrightarrow{a_2} = \frac{\vec{c} - \vec{a}}{3} = \frac{\overrightarrow{AC}}{3},$$

vagyis az AC oldal párhuzamos az A_2B_2 oldallal.

Hasonlóan adódik, hogy a BC oldal párhuzamos az A_2C_2 oldallal és az AB oldal párhuzamos a B_2C_2 oldallal.

Így az ABC és az $A_2B_2C_2$ háromszögek oldalai párhuzamosak, tehát a két háromszög hasonló.

A megoldásból az is kitűnik, hogy a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$.

A hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete, tehát:

$$\frac{T_{A_2B_2C_2\,\text{háromszög}}}{T_{ABC\,\text{háromszög}}} = \frac{1}{9}.$$

10.5. SZÖGFÜGGVÉNYEK

A szinusz- és koszinuszfüggvény definíciója, egyszerű tulajdonságai – megoldások

2633 *a)* Pozitív. *b)* Pozitív.
c) Negatív. *d)* Mivel $\sin 3 > 0$, $\cos 4 < 0$, ezért negatív.

2634 A következő táblázatot kapjuk:

α	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

2635 *a)* 1; *b)* -4; *c)* $\frac{\sqrt{3}}{8}$; *d)* $-\frac{\sqrt{3}}{8}$; *e)* 2.

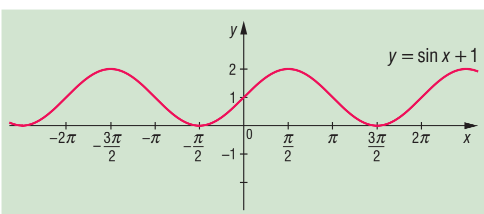
2636 *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\frac{1}{2}$; *d)* 0; *e)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; *f)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *h)* $-\frac{1}{2}$.

2637 *a)* 0; *b)* 1; *c)* 0; *d)* 1; *e)* 0; *f)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
g) $-\frac{1}{2}$; *h)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

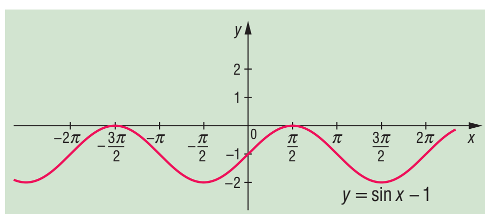
2638 *a)* 0; *b)* 0.

A szinuszfüggvény grafikonja – megoldások

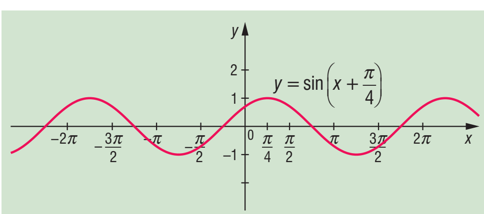
2639 *a)*



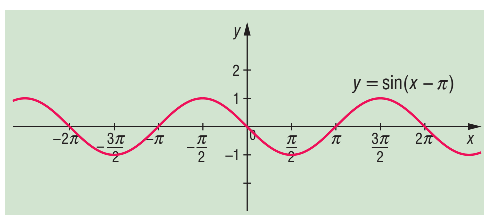
b)



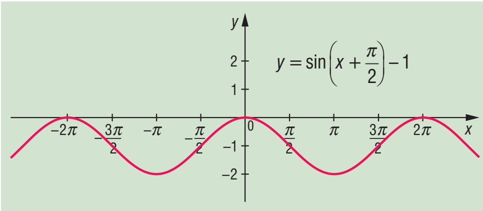
c)



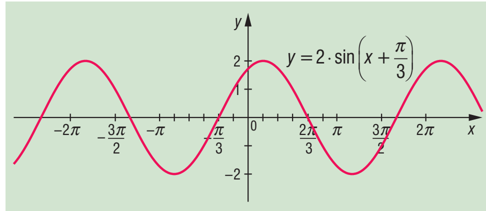
d)



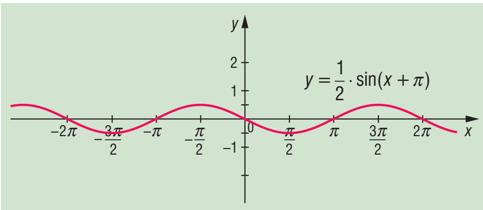
e)



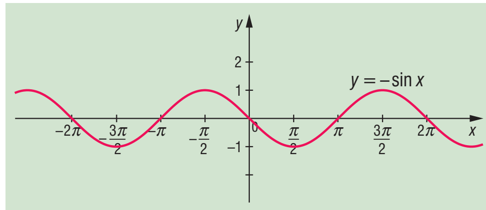
f)



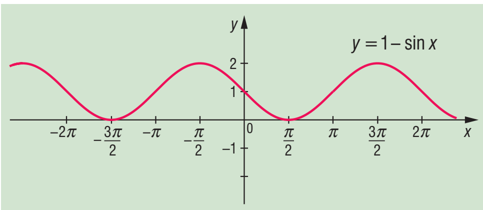
g)



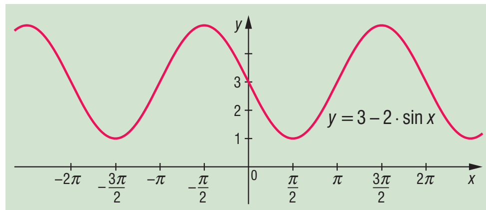
h)



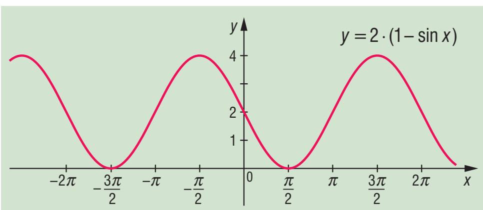
i)



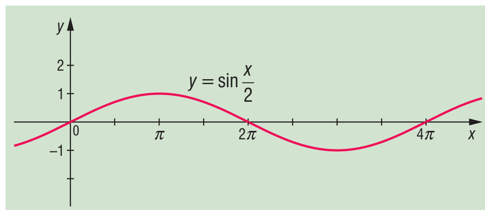
j)



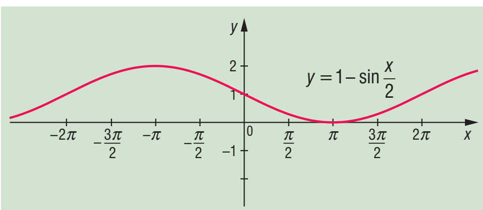
k)



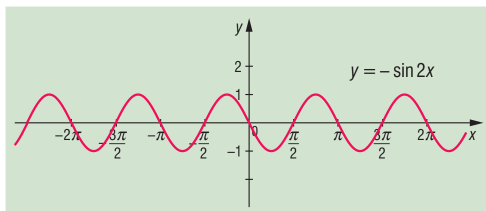
l)



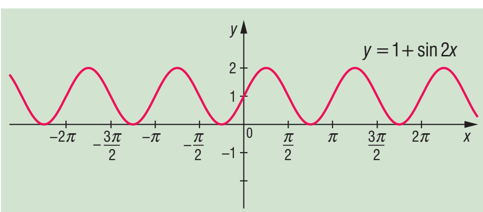
m)



n)



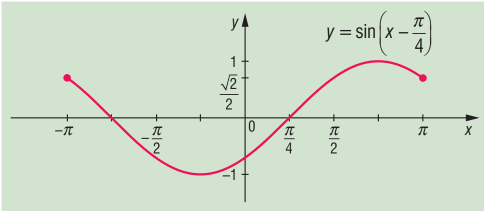
o)



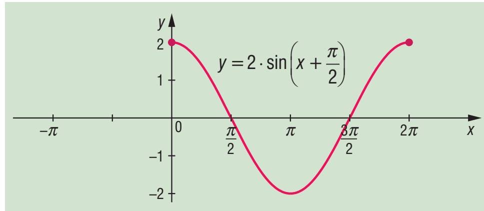
2640 *a)* $\sin\frac{1}{2} < \sin 1$; *b)* $\sin(-0{,}2) > \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; *c)* $\sin 2 > \sin 3$; *d)* $\sin(\pi - 2) = \sin 2$.

2641 *a)* $x = 0$; *b)* $x = \pi$; *c)* $x = -\pi$.

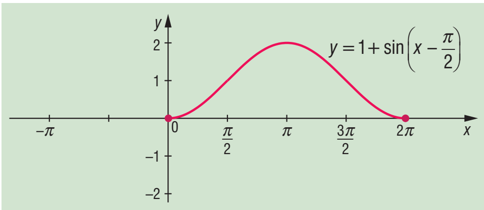
2642 *a)*



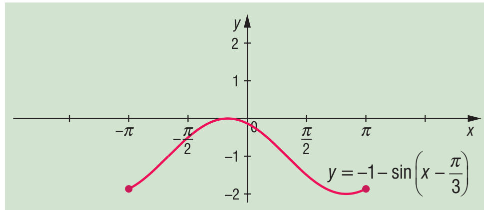
b)



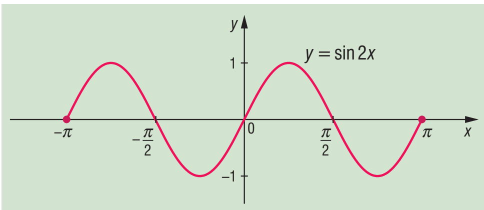
c)



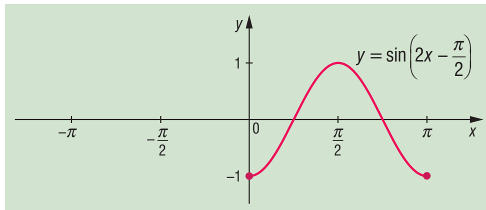
d)



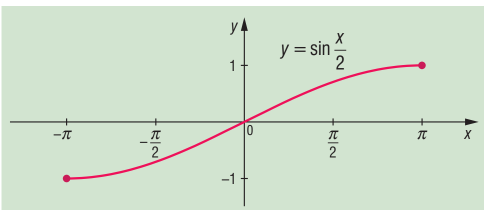
e)



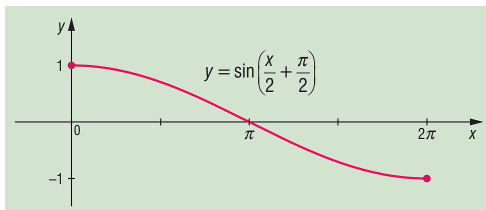
f)



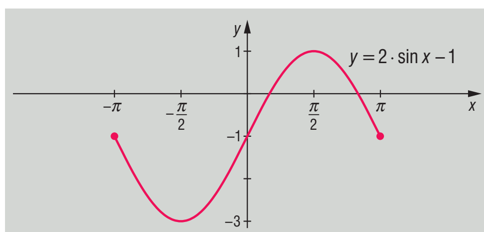
g)



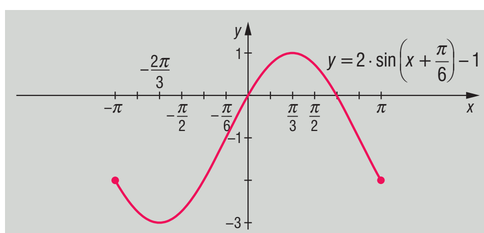
h)



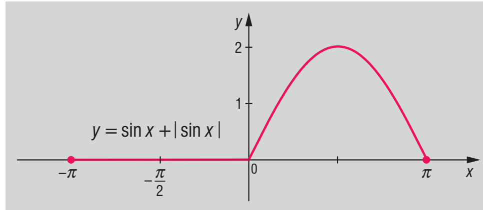
2643 *a)* A függvény $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ban és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ban csökken, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$-ban nő. A $-\frac{\pi}{2}$ helyen minimuma, a $\frac{\pi}{2}$ helyen pedig maximuma van. A minimum értéke -3, a maximum értéke 1.



b) A függvény $\left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$-ban és $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$-ban csökken, $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$-ban nő. A $-\frac{2\pi}{3}$ helyen minimuma, a $\frac{\pi}{3}$ helyen pedig maximuma van. A minimum értéke -3, a maximum értéke 1.

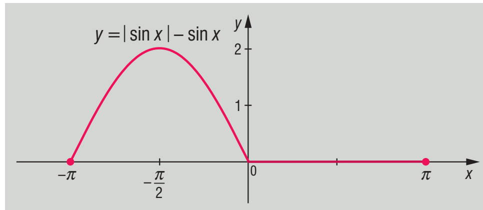


c) A megadott függvény $[-\pi; 0]$-ban konstans, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben nő, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben pedig csökken.
A $\frac{\pi}{2}$ helyen maximuma van, értéke itt 2, minimuma 0, ezt $[-\pi; 0]$-ban és π-ben veszi fel.



d) Megjegyzés:

$$|\sin x| - \sin x = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \sin x \geq 0, \\ -2 \cdot \sin x, & \text{ha} \quad \sin x < 0. \end{cases}$$

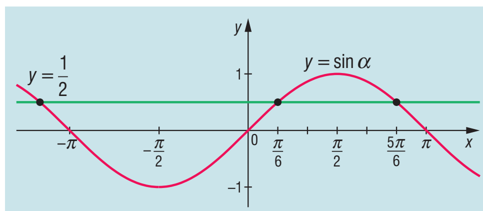


2644 Például:

a) $\alpha = 60°, 120°, 420°$;
b) $\alpha = 210°, 330°, 570°$;
c) $\alpha = 127°, 413°, 487°$;
d) $\alpha = 340°, 560°, 700°$.

2645 *a)* $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, illetve $\frac{5\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$;
b) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, illetve $\frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$;
c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
d) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, illetve $\frac{2\pi}{3} + n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

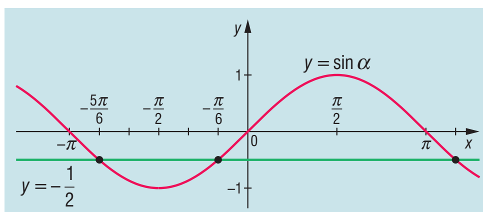
2646 *a)* Vegyük észre, hogy a $2x + 30° = \alpha$ helyettesítéssel csak a $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldani.
Visszahelyettesítés után a megoldások:
$x_1 = k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$; $x_2 = 60° + n \cdot 180°$, $n \in \mathbb{Z}$.



b) Helyettesítéssel a $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldani függvénygrafikonnal.
Visszahelyettesítés után a megoldások:

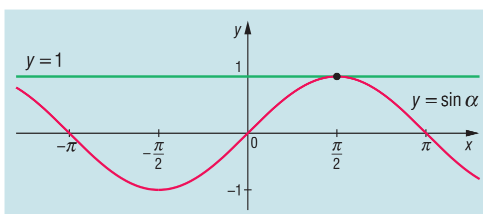
$$x_1 = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



c) Hasonlóan az *a)* és *b)* feladat megoldásához, helyettesítéssel a $\sin \alpha = 1$ egyenletet kapjuk, amiből visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

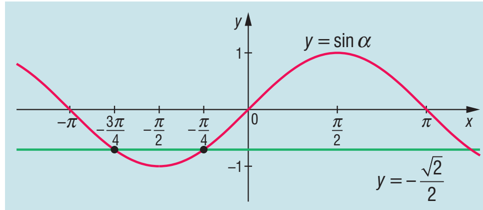


d) Vegyük észre, hogy (–2)-vel osztás után:

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$x_1=\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};\ x_2=-\frac{\pi}{8}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

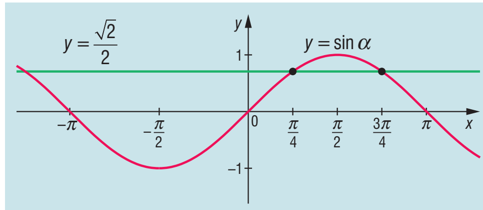


e) Helyettesítéssel:

$$\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$x_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5},\quad k\in\mathbb{Z};\ x_2=\frac{\pi}{5}+\frac{2n\pi}{5},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

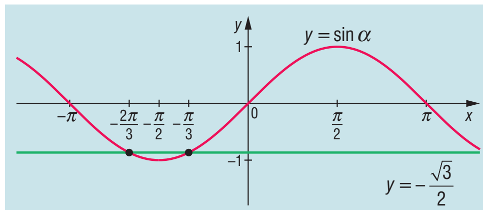


f) Vegyük észre, hogy 2-vel osztás után:

$$\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$x_1=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z};\ x_2=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{2},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

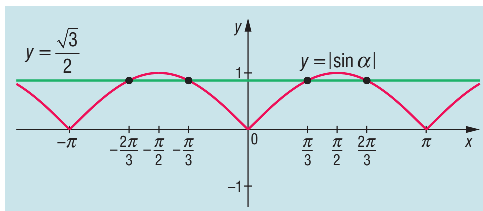


g) 4-gyel osztás, majd négyzetgyökvonás után:

$$\left|\sin\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad |\sin\alpha|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

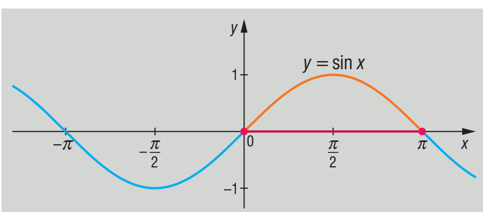
$$x_1=\frac{k\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z};\ x_2=\frac{\pi}{9}+\frac{n\pi}{3},\quad n\in\mathbb{Z}.$$



2647 *a)* *B)*; *b)* *C)*; *c)* *A)*; *d)* *B)*.

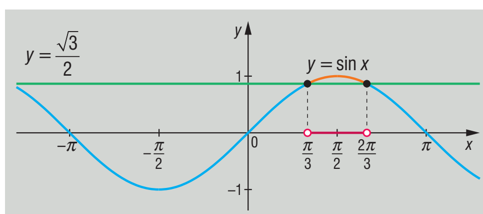
2648 *a)* 10π; *b)* $\frac{\pi}{2}$; *c)* $\frac{2\pi}{7}$; *d)* 2π; *e)* 4π; *f)* $\frac{2\pi}{5}$.

2649 *a)*



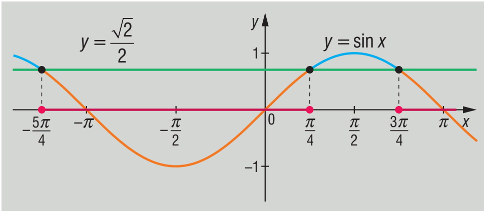
$$2k\pi\le x\le\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

b)



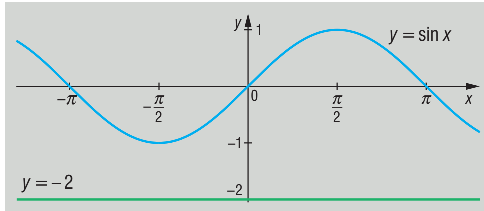
$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

c)



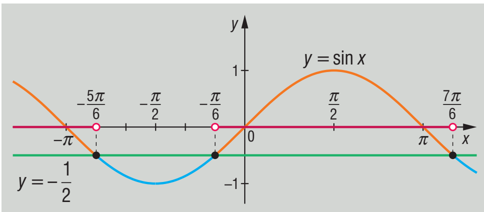
$-\frac{5\pi}{4}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

d)



nincs megoldás, mert $-1\le\sin x\le 1;$

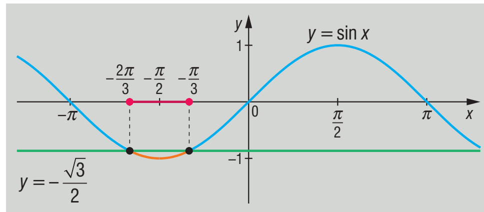
e)



2-vel való osztás után: $\sin x>-\frac{1}{2},$

$-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

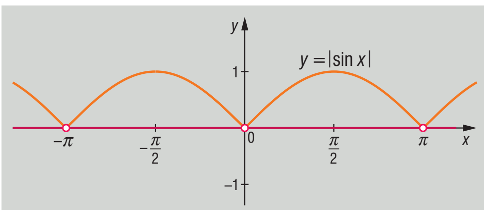
f)



2-vel való osztás után: $\sin x\le-\frac{\sqrt{3}}{2},$

$-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le x\le-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

g)



átalakítás után: $|\sin x|>0,\ x\ne k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2650 *a)* Alakítsuk át az eredeti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>-1\quad\Rightarrow\quad\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vegyük észre, hogy így csak a $\sin\alpha>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlőtlenséget kell függvénygrafikonok segítségével megoldani. A grafikonok a 2646. feladat *d)* pontjában láthatók. A megoldás:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+2k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

b) (–2)-vel való osztás után:

$$-2 \cdot \sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) \le \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Grafikonnal megoldandó a $\sin\alpha \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlőtlenség (ld. 2646. feladat *d)* pontja).
A megoldás:

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le \alpha \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le 2x - \frac{3\pi}{2} \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$\frac{5\pi}{8} + k\pi \le x \le \frac{11\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) 2-vel való osztás után:

$$2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Grafikonnal megoldandó a $\sin\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenség (ld. 2649. feladat *b)* pontja).
A megoldás:

$$-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

d) Hasonlóan az előző feladatokhoz:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le \alpha \le \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2x - \frac{\pi}{3} \le \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,$$

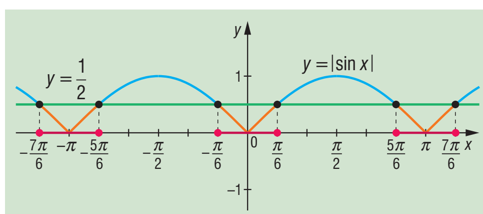
$$k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2651 *a)* 2-vel való osztás után:

$$|\sin x| \le \frac{1}{2}.$$

A megoldás:

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

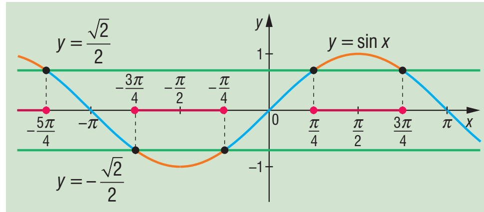


b) Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$\sin^2 x \ge \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |\sin x| \ge \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből:

$$\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{vagy} \quad \sin x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



A megoldás:

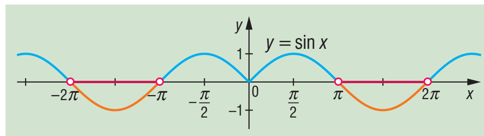
$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le x \le -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rövidebben:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) A $\sin|x|$ felbontása:

$$\sin|x| = \begin{cases} \sin x, & \text{ha} \quad x \ge 0, \\ -\sin x, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



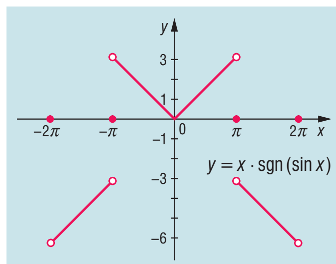
A megoldás:

$$-2\pi + 2k\pi < x < -\pi + 2k\pi, \quad k \le 0,\ k \in \mathbb{Z}$$

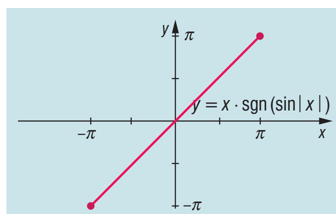
vagy

$$\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2652 *a)* A függvény értéke a $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyen 0, a grafikon egyenes szakaszokból áll. Páros függvény.
$]2k\pi;\ (2k+1)\cdot\pi[$-ban ($k \in \mathbb{Z}$) nő,
$](2k-1)\cdot\pi;\ 2k\pi[$-ban ($k \in \mathbb{Z}$) csökken,
szélsőértéke nincs.



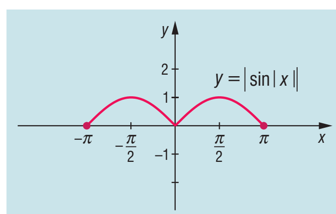
b) A függvény $]-\pi;\ \pi[$-ban nő.
Az $x = -\pi$ helyen minimuma van, értéke $-\pi$.
Az $x = \pi$ helyen maximuma van, értéke π.



c) A megadott függvény páros, $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben nő, $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ban és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben csökken.

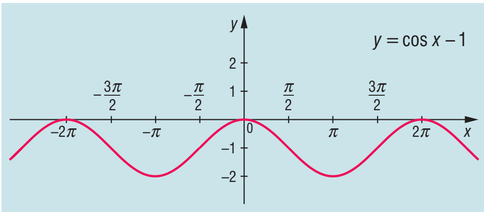
A $-\pi$; 0; π helyen minimuma van, itt értéke 0.

A $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ helyen maximuma van, itt értéke 1.

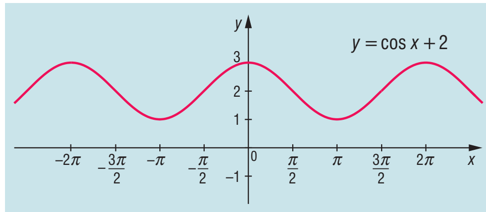


A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek – megoldások

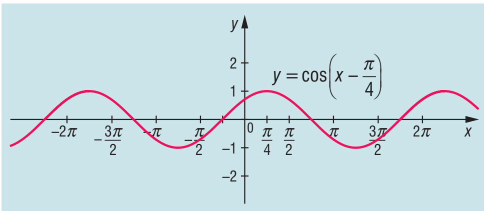
2653 *a)*



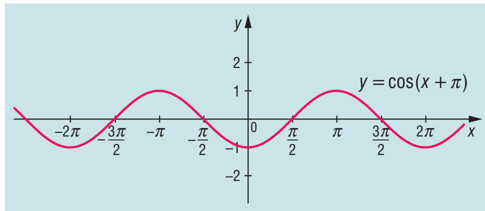
b)



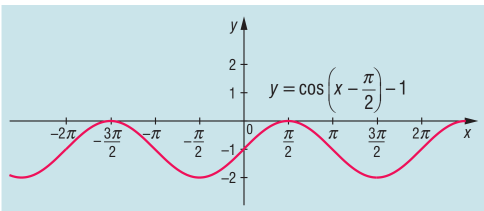
c)



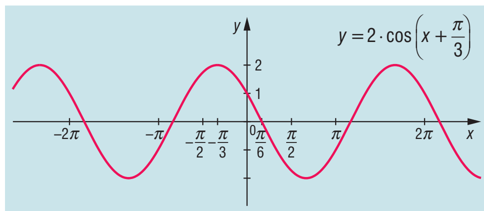
d)



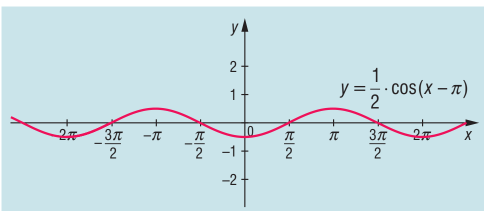
e)



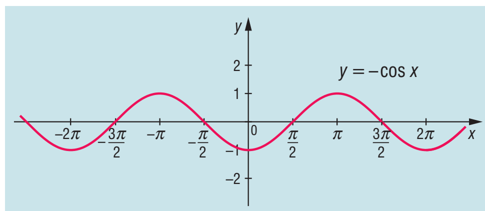
f)



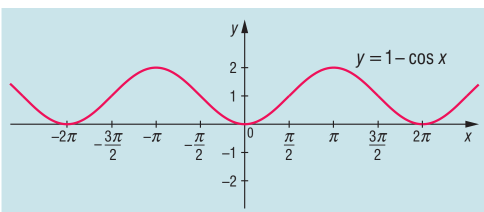
g)



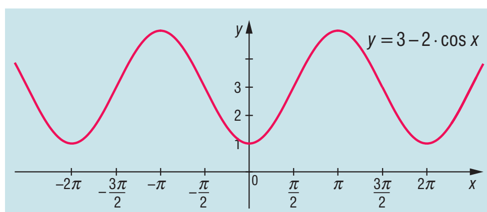
h)



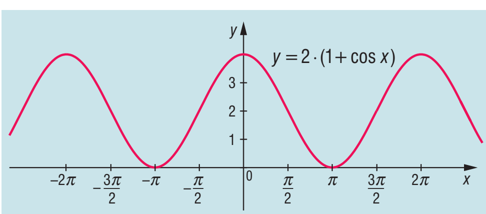
i)



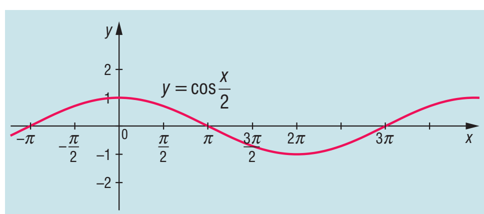
j)



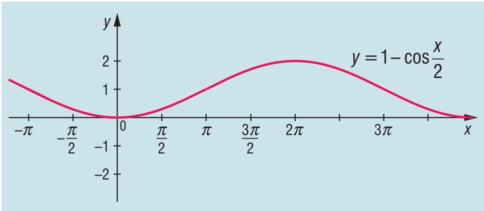
k)



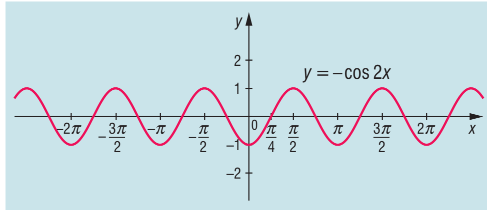
l)



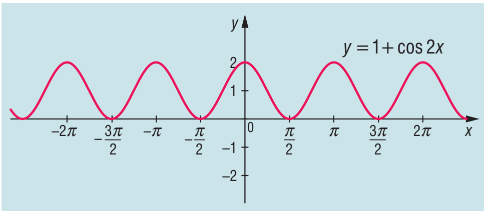
m)



n)



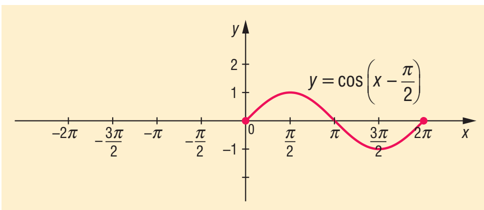
o)



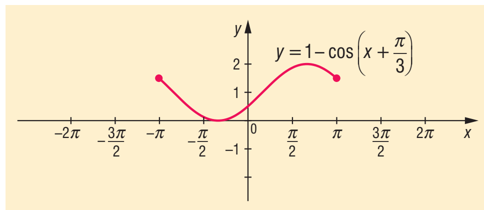
2654 *a)* $x = \frac{\pi}{2}$; *b)* $x = -\frac{\pi}{2}$; *c)* $x = -\frac{\pi}{2}$.

2655 *a)* $\cos 1 > \cos 1{,}5$; *b)* $\cos 1 = \cos(-1)$; *c)* $\cos 1 > \cos 3$.

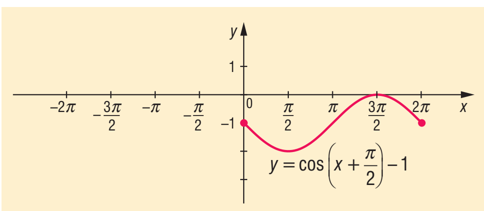
2656 *a)*



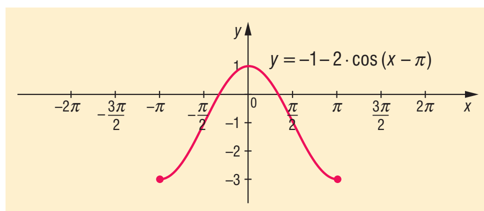
b)



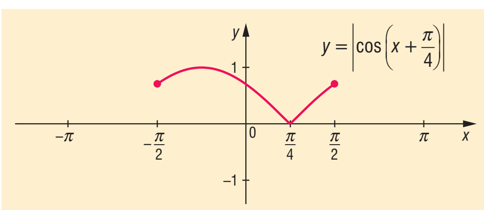
c)



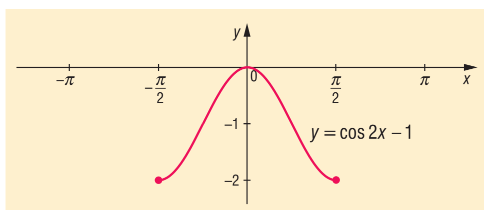
d)



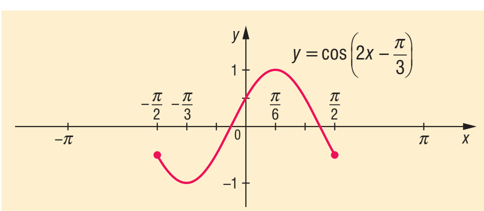
e)



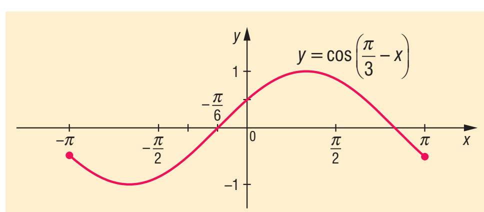
f)



g)



h)

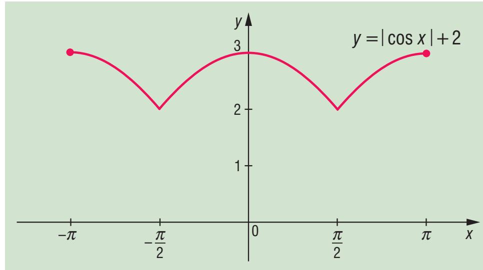


2657 *a)* $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben csökken,

$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben nő.

Maximuma van a $-\pi$, 0, π helyeken, értéke 3.

Minimuma van a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ helyeken, értéke 2.

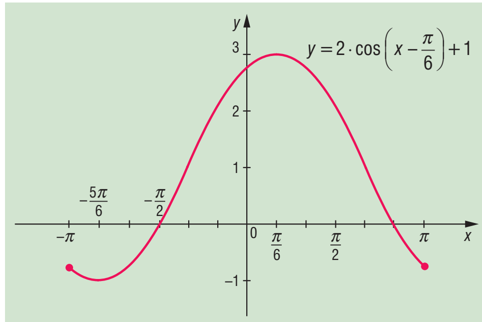


b) $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$-ben csökken,

$\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$-ben nő.

Minimuma van a $-\frac{5\pi}{6}$ helyen, értéke -1.

Maximuma van a $\frac{\pi}{6}$ helyen, értéke 3.

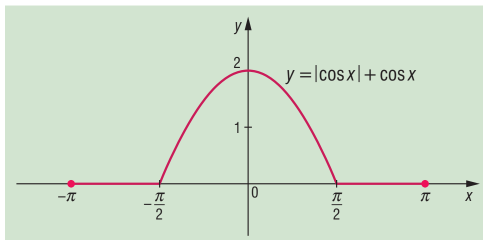


c) Bontsuk fel az abszolút értéket:

$$|\cos x| + \cos x = \begin{cases} 2 \cdot \cos x, & \text{ha} \quad \cos x \geq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad \cos x < 0. \end{cases}$$

$\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben konstans,

$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ben nő, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben csökken.



Minimuma van a $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben, értéke 0, maximuma van $x = 0$ helyen, értéke 2.

2658 Például:

a) $\alpha = 45°, 315°, 405°$;

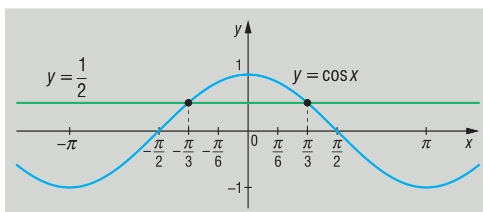
b) $\alpha = 150°, 210°, 510°$;

c) $\alpha = 320°, 400°, 680°$;

d) $\alpha = 230°, 490°, 590°$.

2659 *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Rövidebben: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.



b) Hasonlóan az *a)* feladathoz:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

d) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Rövidebben: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

e) $x_1 = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$ Rövidebben: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

f) Nincs megoldás.

g) Nincs megoldás.

h) Átalakítás után: $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ Megoldások: $x_1 = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$
Rövidebben: $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

i) Átalakítás után: $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ Megoldások: $x_1 = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$
Rövidebben: $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

j) $x_1 = -70{,}53^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = 70{,}53^\circ + n \cdot 360^\circ,\ n \in \mathbb{Z}.$
Rövidebben: $x = \pm 70{,}53^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z}.$

k) $x_1 = -66{,}42^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = 66{,}42^\circ + n \cdot 360^\circ,\ n \in \mathbb{Z}.$
Rövidebben: $x = \pm 66{,}42^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z}.$

2660 *a)* A függvény grafikonja a 2653. feladat *c)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) A függvény grafikonja a 2653. feladat *h)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) A függvény grafikonja a 2653. feladat *l)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \left]-\pi + 4k\pi; \pi + 4k\pi\right[,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

d) A függvény grafikonja a 2653. feladat *k)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\pi + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

2661 Az egyenleteket a 2646. feladathoz hasonlóan lehet megoldani.

a) Helyettesítsünk $2x = \alpha$-t, így a $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk. A megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

b) Az *a)* feladathoz hasonlóan $\alpha = 2x + 60^\circ$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = 300^\circ + l \cdot 360^\circ,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = 120^\circ + l \cdot 180^\circ,\ l \in \mathbb{Z}.$$

c) Az *a)* feladathoz hasonlóan $\alpha = 3x - \frac{\pi}{3}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\pi}{36} + \frac{2l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z}.$$

d) Az *a)* feladathoz hasonlóan $\alpha = 2x - \frac{\pi}{6}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

e) (–2)-vel való osztás és $\alpha = 5x - \frac{\pi}{4}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{10} + \frac{2l\pi}{5},\ l \in \mathbb{Z}.$$

f) 2-vel való osztás és $\alpha = 2x - \frac{3\pi}{4}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

g) 4-vel való osztás után:

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \iff |\cos x| = \frac{1}{2} \iff \cos x = \pm\frac{1}{2}.$$

Mind a négy síknegyedben keressünk megoldást:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

h) $\alpha = 2x + \frac{\pi}{2}$ helyettesítéssel:

$$\cos^2\alpha = 1 \iff |\cos\alpha| = 1 \iff \cos\alpha = \pm 1.$$

A megoldások:

$$\alpha_1 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \pi + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

i) 4-gyel való osztás és $\alpha = 3x - \frac{\pi}{2}$ helyettesítés után:

$$\cos^2\alpha = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad |\cos\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel mind a négy síknegyedben keresünk megoldást:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha_3 = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_4 = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}, \qquad x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{2l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z},$$

$$x_3 = \frac{4\pi}{9} + \frac{2m\pi}{3},\ m \in \mathbb{Z}, \quad x_4 = \frac{5\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Egyszerűbben:

$$x_1 = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{4\pi}{9} + \frac{l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z}.$$

j) Hasonlóan az előző feladathoz:

$$x_1 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

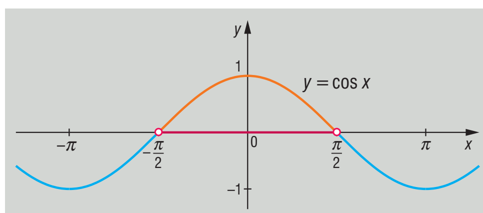
$$x_3 = \frac{9\pi}{4} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}, \quad x_4 = \frac{11\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Egyszerűbben:

$$x_1 = \frac{7\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{9\pi}{4} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

2662 *a)* A megoldás:

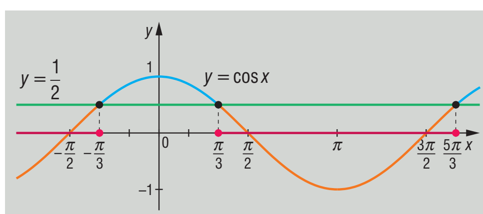
$$x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



b) Mindig teljesül, mert $-1 \le \cos x \le 1$.

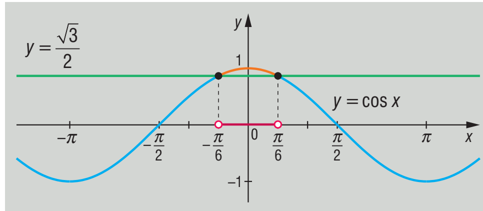
c) A megoldás:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$



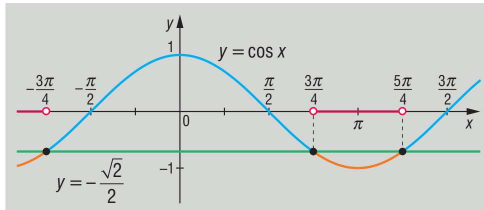
d) A megoldás:

$$x \in \left]-\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{\pi}{6}+2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



e) A megoldás:

$$x \in \left]\frac{3\pi}{4}+2k\pi; \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

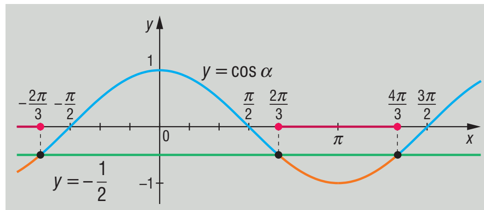


f) Helyettesítéssel:

$$\cos 2x \le -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha \le -\frac{1}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}+k\pi; \frac{2\pi}{3}+k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

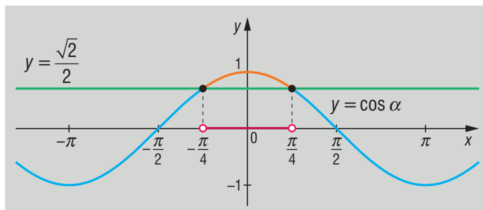


g) 2-vel osztva és helyettesítve:

$$2\cdot\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right) > \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left]\frac{5\pi}{8}+k\pi; \frac{7\pi}{8}+k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

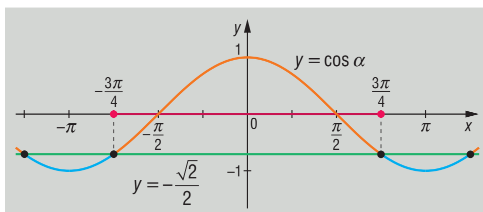


h) 2-vel osztva és helyettesítve:

$$2\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \ge -\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$



i) Használjuk ki, hogy $\cos x$ páros függvény:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \cos\left[-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Helyettesítéssel tehát a $\cos\alpha > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget kapjuk.

A *c)* pont grafikonja alapján visszahelyettesítés után a megoldás:

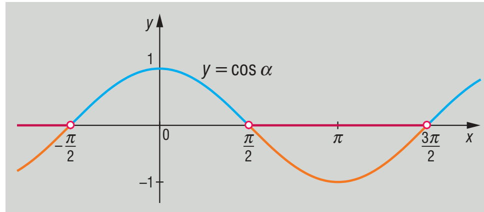
$$x \in \left]2k\pi; \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

j) Helyettesítéssel:

$$\cos 4x < 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha < 0.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left]\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



2663 Mivel a szinusz- és koszinuszfüggvény értéke abszolút értékben 1-nél nem nagyobb, ezért:

$$\sin^6 x \le \sin^2 x \quad \text{és} \quad \cos^6 x \le \cos^2 x.$$

Így azt kaptuk, hogy

$$f(x) \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Az f értéke akkor 1, ha $|\sin x| = 1$ vagy $|\cos x| = 1$, tehát $x = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi$ esetén.

2664 A megoldás: $f(-x) = -\sin x - \sin^3 x - 5 \cdot \cos x \cdot \sin 2x = -f(x)$.

2665 A megoldás: $f(-x) = f(x)$.

2666 *a)* Használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$(1 - \cos^2 x) - |\cos x| < \frac{1}{4},$$

$$4 - 4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot |\cos x| < 1,$$

$$4 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot |\cos x| - 3 > 0,$$

$$4 \cdot |\cos x|^2 + 4 \cdot |\cos x| - 3 > 0.$$

Legyen $p = |\cos x|$. Ekkor $4p^2 + 4p - 3 > 0$, ahonnan $p < -\dfrac{3}{2}$ vagy $p > \dfrac{1}{2}$.

Visszahelyettesítve: $|\cos x| < -\dfrac{3}{2}$ vagy $|\cos x| < \dfrac{1}{2}$. Csak ez utóbbinak van megoldása:

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

b) A nevező miatt $\cos x \ne 0$, azaz $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alakítsuk át az egyenlőséget:

$$\frac{5 - 4 \cdot \sin^2 x}{\cos x} \le 4,$$

$$\frac{5 - 4 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot \cos x}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{5 - 4 \cdot (1 - \cos^2 x) - 4 \cdot \cos x}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{5 - 4 + 4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot \cos x}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot \cos x + 1}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{(2 \cdot \cos x - 1)^2}{\cos x} \le 0.$$

A kapott hányados számlálója nemnegatív.

A hányados akkor 0, ha a számlálója nulla, azaz ha $2 \cdot \cos x - 1 = 0$, amiből $\cos x = \frac{1}{2}$. Ekkor a megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

A hányados negatív, ha a nevezője negatív, azaz ha $\cos x < 0$. Ekkor a megoldás:

$$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

2667 Az ábrázolt függvények hozzárendelési szabályai:

$$a(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1; \quad b(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2; \quad c(x) = 2 \cdot \sin 2x; \quad d(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{1}{2} \cdot x.$$

2668 Akkor értelmezett az egyenlőség, ha $x \neq 0$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$2 \cdot \cos y \cdot x = x^2 + 1,$$
$$x^2 - 2 \cdot \cos y \cdot x + 1 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{2 \cdot \cos y \pm \sqrt{4 \cdot \cos^2 y - 4}}{2} = \frac{2 \cdot \cos y \pm 2 \cdot \sqrt{\cos^2 y - 1}}{2} = \cos y \pm \sqrt{-\sin^2 y}.$$

Ez akkor, és csak akkor létezik valós x-re, ha $\sin y = 0$, vagyis $y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ha $y = 2n\pi$, akkor $x = 1$; ha $y = (2n + 1) \cdot \pi$, akkor $x = -1$.

A keresett számpárok tehát:

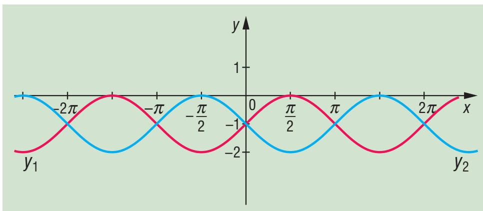
$$(1;\ 2n\pi) \quad \text{és} \quad (-1;\ (2n+1) \cdot \pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2669 Használjuk a megoldóképletet:

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \cos^2\alpha}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

A megoldások tehát:

$$y_1 = -1 + \sin\alpha \quad \text{és} \quad y_2 = -1 - \sin\alpha.$$



2670 A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát így alakíthatjuk át:

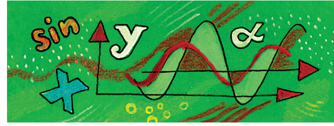
$$\frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot (\cos x - \sin x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)}.$$

Ha $0 < x < \frac{\pi}{4}$, akkor $0 < \operatorname{tg} x < 1$, ezért $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x > 2$, és a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján $0 < \operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x) \leq \frac{1}{4}$, ezzel ekvivalens: $\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} \geq 4$.

Ezek alapján:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} > 8.$$



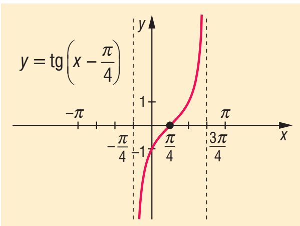
2671 Mivel $\cos^2 x \le 1$ és $\cos 2x \le 1$ minden $k \in \mathbb{R}$ esetén:

$$2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos 2x \le 5.$$

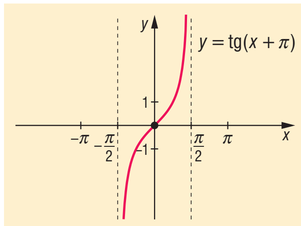
2672 Mivel az egyenlőség bal oldalán $\sin 2x \le 1$ és $\cos x \le 1$, ezért $4 \cdot \sin 2x + \cos x \le 5$, az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $\sin 2x = 1$ és $\cos x = 1$. Ez a két feltétel egyszerre nem teljesül, hiszen ha $\cos x = 1$, akkor $\sin x = 0$, és így $\sin 2x = 0$. Az egyenletnek tehát nincs valós gyöke.

A tangens- és kotangensfüggvény – megoldások

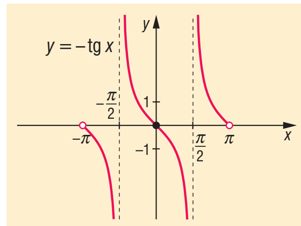
2673 *a)*



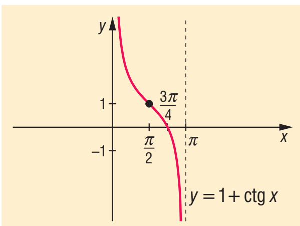
b)



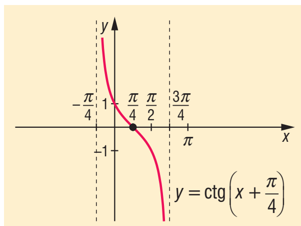
c)



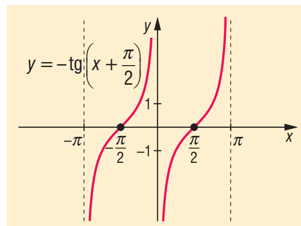
d)



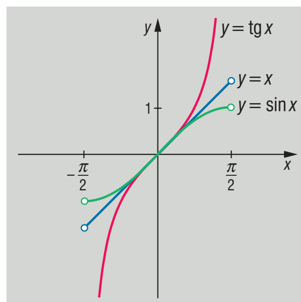
e)



f)



2674 A három függvény grafikonja az ábrán látható.



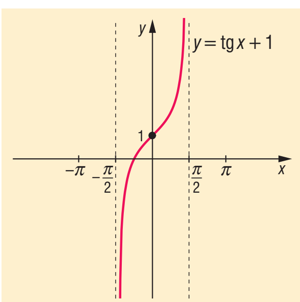
2675 *a)* $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$

b) $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$

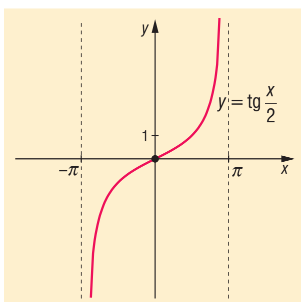
c) $\dfrac{3\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$

d) $k\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

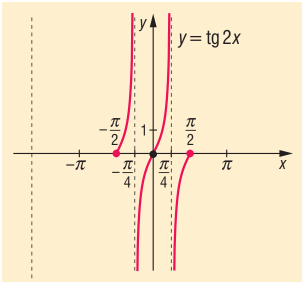
2676 *a)*



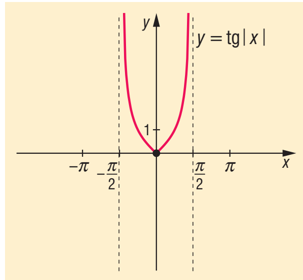
b)



c)

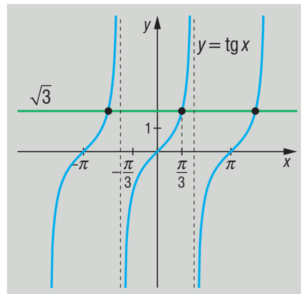


d)



2677 *a)* A megoldások:

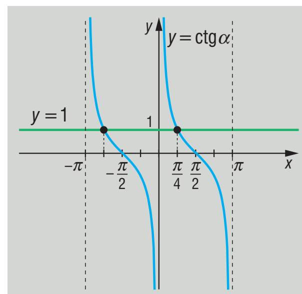
$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



b) Ábrázoljuk a függvényt az $\alpha = \frac{\pi}{3} - x$ helyettesítéssel.

Visszahelyettesítés után a megoldások:

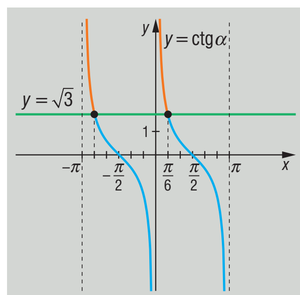
$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



c) Ábrázoljuk a függvényt az $\alpha = x - \frac{\pi}{3}$ helyettesítéssel.

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x \le \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



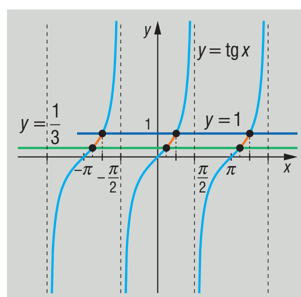
d) Alakítsuk át a bal oldalt:

$$3 \cdot \mathrm{tg}^2 x - 4 \cdot \mathrm{tg}\, x + 1 = (3 \cdot \mathrm{tg}\, x - 1) \cdot (\mathrm{tg}\, x - 1) < 0.$$

Tényezőnként keressük meg a zérushelyeket, majd tartsunk előjelvizsgálatot.

A megoldások:

$$0{,}32 + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



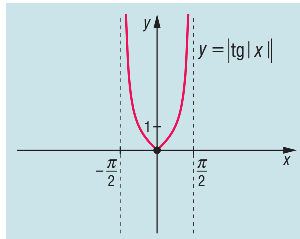
2678 *a)* $k\cdot\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z};$ *b)* $-2\pi+4k\pi<x<4k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

c) $-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x<\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ *d)* $\frac{\pi}{4}+k\pi<x\le\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

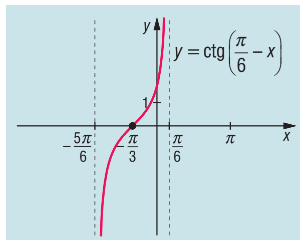
e) $-\frac{\pi}{2}+k\pi\le x<-\frac{\pi}{4}+k\pi$ és $\frac{\pi}{4}+k\pi\le x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

f) $\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2679 *a)* A függvény $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$-ban csökken, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$-ben nő, a 0 helyen minimuma van, értéke itt 0.



b) A függvény $\left]-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right[$-ban nő, a 0 értéket $-\frac{\pi}{3}$-nál veszi fel.



2680 A függvény legkisebb értéke 2, ezt az $x=\frac{\pi}{4}$-nél veszi fel, legnagyobb értéke nincs.

Megjegyzés: $\text{tg}\,x+\text{ctg}\,x=\text{tg}\,x+\frac{1}{\text{tg}\,x}\ge 2,$ mivel $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$-on a $\text{tg}\,x$ pozitív.

2681 *a)* A bal oldal értéke minden x-re 1, így az egyenlet ekvivalens a következővel: $\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,$ azaz $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

b) $\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z};$ *c)* $\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z};$

d) $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2682 Mivel $0\le x<\frac{\pi}{2}$ esetén $\text{tg}\,x\ge 0,$ és $\text{tg}\,x$ szigorúan nő, ezért kiemelés után:

$$2\cdot\text{tg}\,x-\text{tg}^2x=\text{tg}\,x\cdot(2-\text{tg}\,x).$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\text{tg}\,x+(2-\text{tg}\,x)}{2}\ge\sqrt{\text{tg}\,x\cdot(2-\text{tg}\,x)},$$

$$1\ge\text{tg}\,x\cdot(2-\text{tg}\,x).$$

Az egyenlőség csak akkor igaz, ha $\text{tg}\,x=2-\text{tg}\,x,$ azaz $\text{tg}\,x=1,\ x=\frac{\pi}{4}.$

Ha $\text{tg}\,x>2,$ akkor $2\cdot\text{tg}\,x-\text{tg}^2x<0.$

Így a függvény legnagyobb értéke 1, és ezt $x=\frac{\pi}{4}$-nél veszi fel.

2683 Alakítsuk át az f-et definiáló kifejezést, bővítsük a törtet $\sin x$-szel:

$$\frac{\sin x+\operatorname{tg} x}{\cos x+\operatorname{ctg} x}=\frac{\left(\sin x+\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)\cdot\sin x}{\left(\cos x+\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)\cdot\sin x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\sin x}.$$

Mivel az értelmezési tartományban $0<|\cos x|, |\sin x|<1$, $\cos x$ és $\sin x$ korlátossága miatt mindkét tört számlálója és nevezője pozitív, tehát f értéke pozitív.

2684 A $\operatorname{tg} x$ miatt $\cos x\neq 0$. A megadott értelmezési tartományban $\cos x$ pozitív, ezért:

$$1-\cos x<\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x,$$

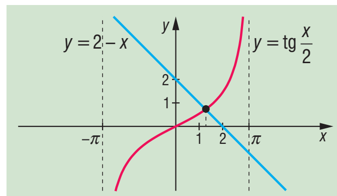
$$\cos x\cdot(1-\cos x)<\sin x\cdot(1-\cos x).$$

Mivel az adott értelmezési tartományban $(1-\cos x)>0$, így egyszerűsítés után a $\cos x<\sin x$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek megoldása az adott intervallumon:

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}.$$

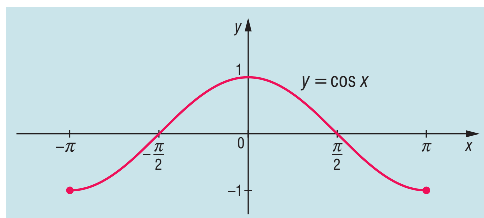
2685 Ábrázoljuk $]-\pi;\,\pi[$-ben az $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ és $g(x)=2-x$ függvényeket.

Az ábráról leolvasható, hogy a keresett gyök 1,2 és 1,3 között van, zsebszámológép használatával eljuthatunk az $x\approx 1{,}27$ értékhez.



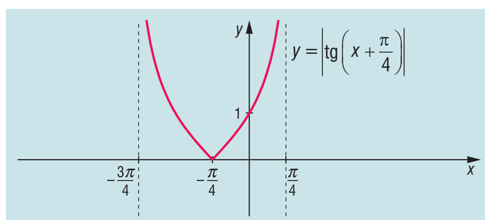
Összetett feladatok és alkalmazások – megoldások

2686 *a)* A szinuszfüggvény pótszöges összefüggéséből látható, hogy $g(x)=\cos x$, $x\in[-\pi;\,\pi]$.
A függvény $[-\pi;\,0]$-ban nő, $[0;\,\pi]$-ban csökken.
Minimuma van a $-\pi$ és π helyen, értéke -1.
Maximuma van az $x=0$ helyen, értéke 1.



b) A függvény $\left]-\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{\pi}{4}\right]$-ban csökken, majd $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$-ban nő.

Minimuma van az $x=-\dfrac{\pi}{4}$ helyen, értéke 0.



2687 *a)* Mivel $|\sin x|\leq 1$, $0\leq\sin^2 x\leq 1$, így $1\leq\sin^2 x+1\leq 2$.
Az f minimális értéke 1, ezt az $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ alakú helyeken veszi fel.
Az f maximális értéke 2, ezt a $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ alakú helyeken veszi fel.

b) Átalakítás után: $g(x)=3+\cos^2 x$, tehát $3\leq g(x)\leq 4$, hiszen $0\leq\cos^2 x\leq 1$, ha $x\in\mathbb{R}$.

2688 A $\cos x$-re másodfokú egyenlet egyik gyöke $\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}>1$, ez nem lehet koszinuszérték, a másik gyök $\frac{\sqrt{3}}{3}$, ez már lehet egy szám koszinusza.

A megoldások: $x_1 = 0{,}96 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ és $x_2 = 5{,}33 + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

2689 *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = \frac{\pi}{8} + n\cdot\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

b) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 4k\cdot\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = -\frac{\pi}{5} + 4n\cdot\frac{\pi}{5},\ n \in \mathbb{Z}$.

c) $x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2n\cdot\frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$.

d) $x_1 = k\cdot\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = n\cdot\frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$.

2690 Azonos átalakításokkal az egyenlet így írható:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 1.$$

Kivonva az 1-et, és tudva, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, kapjuk:

$$-2\cdot\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot\sin^2 x\cdot(\sin^2 x - 1) = 0.$$

Ez akkor teljesülhet, ha $\sin x = 0$ vagy $|\sin x| = 1$. Így a megoldások:

$$x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z};\quad \text{rövidebben: } x = k\cdot\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

2691 Az egyenlet így írható:

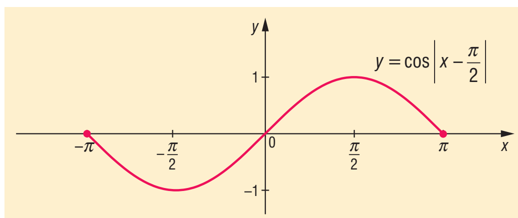
$$6\cdot\sin^2 x - 11\cdot\sin x + 4 = 0.$$

Ebből csak $\sin x = 0{,}5$ jöhet szóba megoldásként, és így

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

2692 A függvény átírható a következő alakra:

$$\cos\left|x-\frac{\pi}{2}\right| = \begin{cases} \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x, & \text{ha } -\pi \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



2693 *a)* Ekvivalens átalakítást végzünk:

$$\sqrt{3}\cdot\cos x > 1 - \sin x.$$

Mivel az $1-\sin x \ge 0$ (hiszen $-1 \le \sin x \le 1$), ezért az egyenlőtlenség bal oldalának határozottan pozitívnak kell lennie (az egyenlőséget a feladat nem engedi). Vagyis $\cos x > 0$, tehát

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Négyzetre emelés után:

$$0 > 2\cdot\sin^2 x - \sin x - 1,$$

aminek a megoldása:

$$-0{,}5 < \sin x < 1,\ x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Felismerve, hogy a bal oldal $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$ és $\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, az egyenlet $\sin x$-szel való osztása után a következő alakban írható fel:

$$\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \operatorname{ctg} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} x=\sqrt{2}.$$

Ebből

$$x=0{,}96+k\pi.$$

2694 Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x)=\sin^2 x-\sin x-2\cdot\cos^2 x=\sin^2 x-\sin x-2\cdot(1-\sin^2 x)=$$
$$=3\cdot\sin^2 x-\sin x-2=(\sin x-1)\cdot(3\cdot\sin x+2).$$

Így a függvény zérushelyét a $(\sin x-1)\cdot(3\cdot\sin x+2)=0$ egyenlet adja. Ebből $\sin x=1$, vagy $\sin x=-\dfrac{2}{3}$, azaz $x_1=\dfrac{\pi}{2}$ vagy $x_2=3{,}87+2k\pi$, $x_3=5{,}55+2n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$.

A $[-\pi;\,\pi]$-ba eső zérushelyek: $x_1=\dfrac{\pi}{2}$, $x_2=-0{,}73$, $x_3=-2{,}41$.

2695 Mivel $\sin x+\cos x$ legnagyobb értéke $\sqrt{2}$, ezért a nevező $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ mindig pozitív. Az egyenlőtlenség tehát akkor és csak akkor teljesül, ha a számláló pozitív:

$$\sin^2 x-\frac{1}{4}>0,$$
$$|\sin x|>\frac{1}{2}.$$

A megoldás:

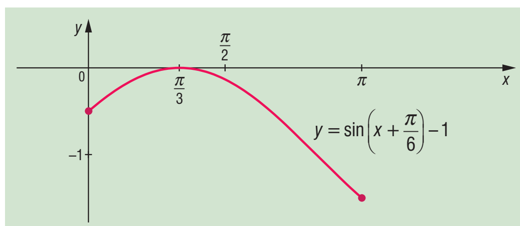
$$\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+k\pi,\; k\in\mathbb{Z}.$$

2696 Mivel $0\le x\le\pi$ esetén $0<x+\dfrac{\pi}{6}$, ezért:

$$\left|x+\frac{\pi}{6}\right|=x+\frac{\pi}{6},$$

tehát

$$\sin\left|x+\frac{\pi}{6}\right|-1=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1.$$



2697 Az egyenlet így írható $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ helyettesítés és (–1)-gyel való beszorzás után:

$$\sin^2 x-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0.$$

A megoldóképletet alkalmazva:

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}{2}}{2}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\pm\dfrac{|1-\sqrt{3}|}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

Tehát a megoldások:

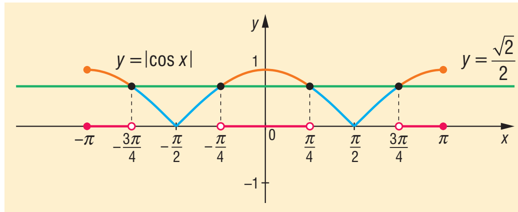
$$\sin x=\frac{1}{2} \quad\text{és}\quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy a $[-\pi;\,\pi]$ intervallumban az egyenletnek 4 gyöke van.

2698 A $\cos^2 x - \frac{1}{2} > 0$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha $|\cos x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

A grafikonról leolvasható a megoldás:

$$-\pi \le x < -\frac{3\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} < x \le \pi.$$



2699 *a)* Értelmezési tartomány: $\sin x \ne 0$, azaz $x \ne k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x \cdot \operatorname{ctg} x = 0,$$
$$\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 0,$$
$$\cos x = 0,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) A $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ értelmezési tartománya miatt $\sin x \ne 0$ és $\cos x \ne 0$. A feladatnak nincs megoldása.

c) Értelmezési tartomány: $x \ne k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$3 \cdot \operatorname{ctg} x = 2 \cdot \cos x,$$
$$3 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cdot \cos x,$$
$$\cos x = 0,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\cos x \ne 0$, akkor nincs megoldás, mert a következőt kapjuk: $\frac{3}{\sin x} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} = \sin x$.

d) $\cos x = 0$ esetén nincs megoldás, mert ekkor $\sin x = 1$, így:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x = 3 \cdot \cos x,$$
$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 3,$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{\sqrt{3}},$$
$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

e) Értelmezési tartomány: a tangens miatt $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, és a nevező miatt $\sin x \ne 0$, azaz $x \ne l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x},$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos x,$$

amiből a megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

f) Ha $\cos x = 0$, akkor nincs megoldás, ezért oszthatunk $\cos x$-szel:

$$\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 0,$$

$$1 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

g) Az egyenlet átalakítása:

$$\cos^3 x = \cos^2 x,$$

$$\cos^3 x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos^2 x \cdot (\cos x - 1) = 0.$$

A kapott szorzat akkor lesz 0, ha $\cos x = 0$ vagy $\cos x - 1 = 0$:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\quad x_2 = 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

2700 A függvényt értelmező képlet első tényezője π szerint, második tényezője 4π szerint periodikus, így a szorzat periódusa 4π.

2701 Az egyenletnek a valós számok körében nincs megoldása, mert azonos átalakítással a következő alakra hozható:

$$(x^2 + 2)^2 = -\cos^2 y.$$

A bal oldal 2^2-nél nem kisebb, a jobb oldal pedig nem pozitív.

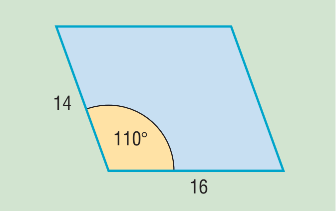
2702 A jobb oldal így írható: $2 - (y - 3)^2 \le 2$, és az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $y = 3$.

A bal oldalon $\operatorname{tg} x > 0$, $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, így $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \ge 2$, és az egyenlőség csak akkor igaz, ha $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Geometriai alkalmazások – megoldások

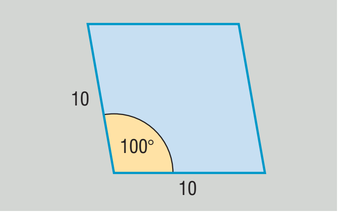
2703 Alkalmazzuk a tanult képletet:

$$t = 14 \cdot 16 \cdot \sin 110° = 14 \cdot 16 \cdot \sin 70° \approx 210{,}5.$$



2704 Itt is a paralelogramma területképlete vezet eredményre:

$$t = 10 \cdot 10 \cdot \sin 100° = 100 \cdot \sin 80° \approx 98{,}5.$$



2705 A háromszög köré írt kör sugarának kiszámítása:

$$b = 2 \cdot R \cdot \sin\beta, \quad \text{azaz} \quad 8 = 2 \cdot R \cdot \sin 71{,}36°,$$

amiből

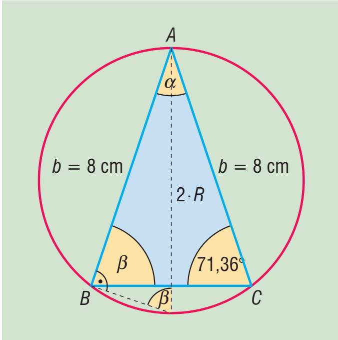
$$R = 4{,}22 \text{ cm}.$$

A hiányzó szög:

$$\alpha = 180° - 2 \cdot 71{,}36° = 37{,}28°.$$

A háromszög területe:

$$t = \frac{b \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{64 \cdot \sin 37{,}28°}{2} = 19{,}38 \text{ cm}^2.$$



2706 *a)* A szabályos nyolcszög középponti szöge: $360° : 8 = 45°$, így:

$$T_\triangle = \frac{R \cdot R \cdot \sin 45°}{2}, \quad T_{\text{nyolcszög}} = 8 \cdot T_\triangle.$$

Kétféleképpen felírva egy kis háromszög területetét:

$$\frac{R \cdot R \cdot \sin 45°}{2} = \frac{R \cdot a \cdot \sin 67{,}5°}{2},$$

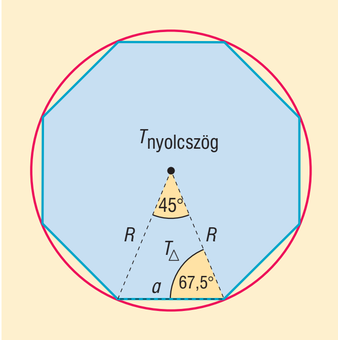
$$R \cdot 0{,}7071 = 10 \cdot 0{,}9239,$$

$$R = 13{,}07 \text{ dm}.$$

Ebből kapjuk, hogy:

$$T_\triangle = 60{,}4 \text{ dm}^2 \text{ és } T_{\text{nyolcszög}} = 483{,}2 \text{ dm}^2.$$

Tehát a nyolcszög köré írható kör sugara 13,07 dm, a nyolcszög területe pedig 483,2 dm^2.



b) A szabályos ötszög középponti szöge: $360° : 5 = 72°$.

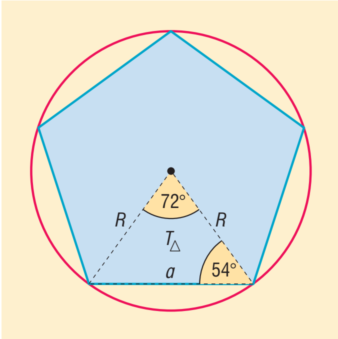
Kétféleképpen felírva egy kis háromszög területetét:

$$\frac{R \cdot R \cdot \sin 72°}{2} = \frac{R \cdot a \cdot \sin 54°}{2},$$

$$R \cdot 0{,}9510 = 10 \cdot 0{,}8090,$$

$$R = 8{,}5 \text{ cm}.$$

Tehát 8,5 cm sugarú körbe írhatunk egy 10 cm-es oldalú szabályos ötszöget.

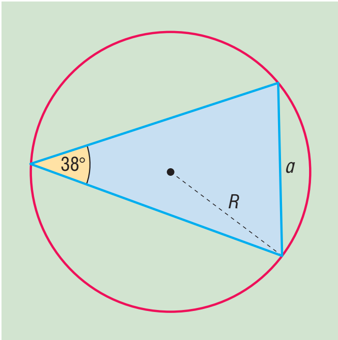


2707 A háromszög ismert oldalára felírható:

$$a = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha,$$

$$6{,}8 = 2 \cdot R \cdot \sin 38°,$$

$$R = 5{,}52 \text{ cm}.$$



2708 A szabályos kilencszög középponti szöge: $360° : 9 = 40°$.
Írjuk fel a kilencszög területetét:

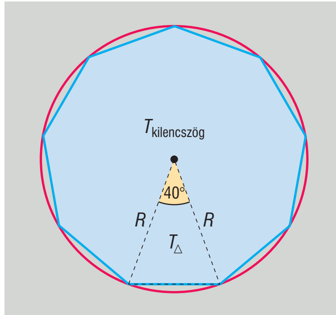
$$T_{\text{kilencszög}} = 1080 = 9 \cdot \frac{R \cdot R \cdot \sin 40°}{2},$$

$$2160 = 9 \cdot R^2 \cdot 0{,}6427,$$

$$R^2 = 373{,}42,$$

$$R = 19{,}32 \text{ dm}.$$

Tehát a kilencszög köré írható kör sugara 19,32 dm.



2709 A húr hosszára felírható:

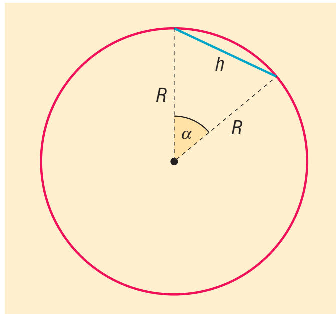
$$h = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha,$$

$$13{,}4 = 2 \cdot 8{,}7 \cdot \sin\alpha,$$

$$0{,}7701 = \sin\alpha,$$

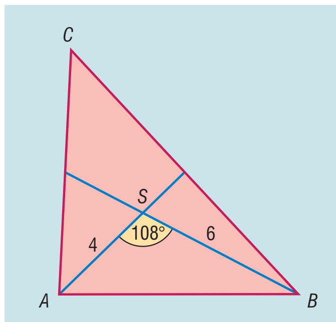
$$\alpha = 50{,}36°.$$

A kerületi szög α-nak a fele, tehát 25,18°.



2710 Az ABS háromszög területe harmada az ABC háromszög területének, így a tanult képlet alapján az ABC háromszög területe:

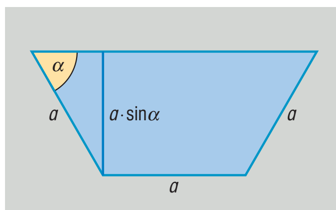
$$t = 3 \cdot \frac{4 \cdot 6 \cdot \sin 108°}{2} = 36 \cdot \sin 72° \approx 34{,}2.$$



2711 Az ábra alapján a trapéz területe:
$t = (a \cdot \cos\alpha + a) \cdot a \cdot \sin\alpha = a^2 \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha,\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}.$
Elég meghatározni a következő függvény maximumát:

$$f(\alpha) = (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha = (1 + \cos\alpha) \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{(1 + \cos\alpha)^3 \cdot (1 - \cos\alpha)},\quad 0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$$



A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával ezt kapjuk:

$$(1 + \cos\alpha)^3 \cdot 3 \cdot (1 - \cos\alpha) \le \left(\frac{3 \cdot (1 + \cos\alpha) + 3 \cdot (1 - \cos\alpha)}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4,$$

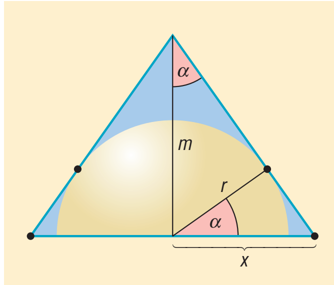
és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $1 + \cos\alpha = 3 - 3 \cdot \cos\alpha$, azaz:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

A keresett maximum tehát $\alpha = 60°$ esetében érhető el.

2712 A forgáskúp alapkörének sugara x, magassága m, félnyílásszöge pedig α. Az adott értékek közt a következő összefüggések állnak fenn:

$$x = \frac{r}{\cos\alpha}, \quad m = \frac{r}{\sin\alpha}.$$



Mivel a forgáskúp térfogata:

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot x^2 \cdot m,$$

így

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot r^3 \cdot \frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha} = \frac{\pi}{3}\cdot r^3\cdot\frac{1}{\sin\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)}, \qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Mivel V minimumát keressük, elég meghatározni $\sin\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)$ maximumát $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ esetén. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

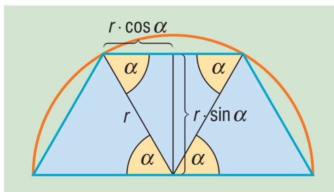
$$2\cdot\sin^2\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)^2 \le \left(\frac{2\cdot\sin^2\alpha + 2\cdot(1-\sin^2\alpha)}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Az egyenlőség csak akkor igaz, ha:

$$2\cdot\sin^2\alpha = 1-\sin^2\alpha, \quad \text{azaz} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5773, \quad \text{így} \quad \alpha = 35{,}3°.$$

2713 A trapéz területét a félkör r sugarával és α-val $\left(0<\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ így írhatjuk fel:

$$t = r^2\cdot\sin\alpha + r^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = r^2\cdot(\sin\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha).$$



Az $f(x) = \sin\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha$, $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$ függvény maximumát keressük. Elég meghatározni a következő szorzat maximumát:

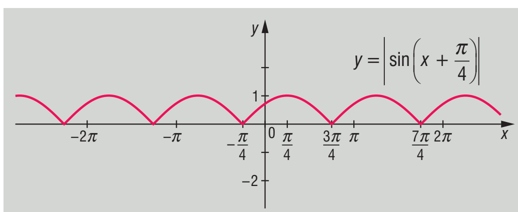
$$3\cdot\sin^2\alpha\cdot(1+\cos\alpha)^2 = 3\cdot(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)^3 \le \left(\frac{3\cdot(1-\cos\alpha)+3\cdot(1+\cos\alpha)}{4}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján.
Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha:

$$3\cdot(1-\cos\alpha) = 1+\cos\alpha, \quad \text{azaz} \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{így} \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Vegyes feladatok – megoldások

2714 A függvény grafikonja az ábrán látható.



2715 *a)* $\cos 5\pi = \cos\pi = -1;$

b) $\sin 7\pi = \sin\pi = 0;$

c) $\operatorname{tg} 800° = \operatorname{tg} 80° \approx 5{,}6713;$

d) $\operatorname{ctg} 500° = \operatorname{ctg} 140° = -\operatorname{tg} 50° \approx -1{,}1917.$

2716 *a)* $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\quad x \mapsto \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$, $\quad x \mapsto -\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$;

b) $x \mapsto \cos(x + \pi)$, $\quad x \mapsto -\cos x$, $\quad x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

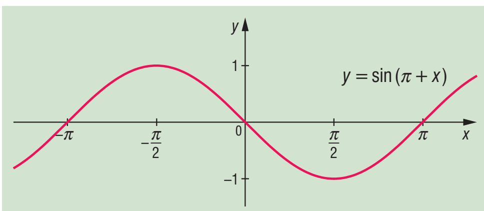
c) $x \mapsto 1 - \sin x$, $\quad x \mapsto 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\quad x \mapsto 1 + \sin(x - \pi)$;

d) $x \mapsto 2 + \cos 2x$, $\quad x \mapsto 2 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\quad x \mapsto 2 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$;

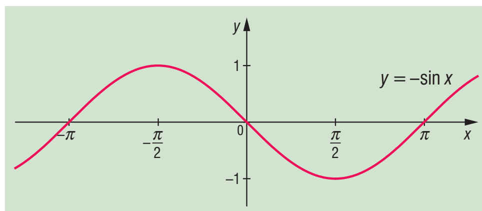
e) $x \mapsto \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\quad x \mapsto \mathrm{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

f) $x \mapsto \mathrm{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$, $\quad x \mapsto 1 + \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

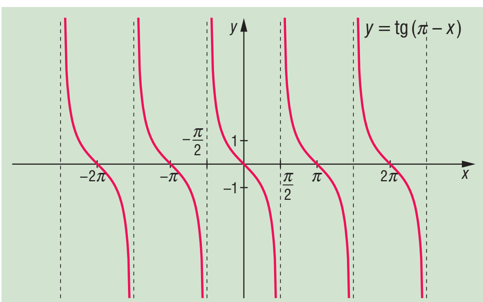
2717 *a)*



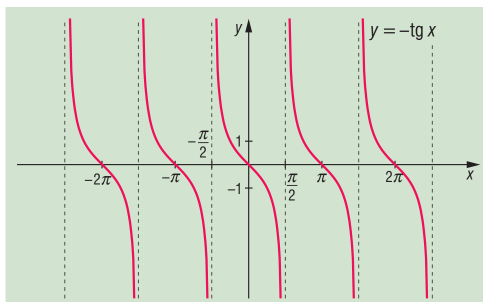
b)



c)



d)



2718 *a)* ÉT: $\mathbb{R}$;

b) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

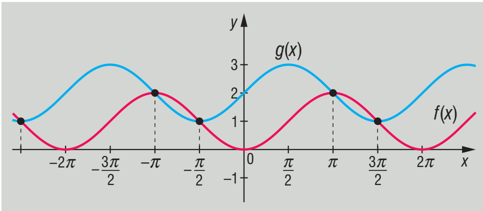
d) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

e) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

f) ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi;\ \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

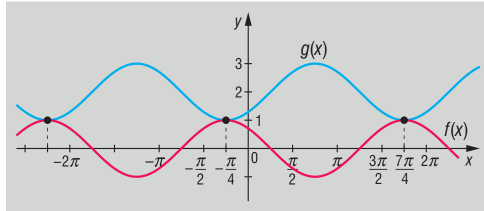
g) ÉT: $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{6} + 2k \le x \le \frac{5}{6} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2719 *a)*



$x_1 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = -\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z};$

b)



$x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

2720 *a)* $-1 \le f(x) \le 0;$ *b)* $1 \le g(x) \le 3;$ *c)* $-3 \le h(x) \le -1;$ *d)* $-1 \le i(x) \le 3.$

2721 *a)* Írjuk be az ismert értékeket:

$$\frac{\cos 60^\circ - \sin 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

Gyöktelenítés után:

$$\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{1-3} = \frac{1+3-2\cdot\sqrt{3}}{-2} = \frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}-4}{2} = \sqrt{3}-2.$$

b) Írjuk be az ismert értékeket:

$$\frac{\cos 45^\circ - \sin 45^\circ}{2\cdot \operatorname{tg} 45^\circ - 3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cdot 1 - 3} = \frac{\frac{2}{4}}{-1} = -\frac{1}{2}.$$

c) Mivel $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, ezért

$\cos 20^\circ = -\cos 160^\circ,\quad \cos 40^\circ = -\cos 140^\circ,\quad \cos 60^\circ = -\cos 120^\circ,\quad \cos 80^\circ = -\cos 100^\circ.$

Továbbá $\cos 180^\circ = -1$, így az összeg értéke is -1 lesz.

d) Mivel $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$, ezért

$\operatorname{tg} 20^\circ = -\operatorname{tg} 160^\circ,\quad \operatorname{tg} 40^\circ = -\operatorname{tg} 140^\circ,\quad \operatorname{tg} 60^\circ = -\operatorname{tg} 120^\circ,\quad \operatorname{tg} 80^\circ = -\operatorname{tg} 100^\circ.$

Továbbá $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$, így az összeg értéke is 0 lesz.

2722 Használjuk fel a pótszöges összefüggéseket a gondolkodásnál.

a) $a(x)$-nél:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Tehát az $a(x) = \sin x + \sin x = 2\cdot\sin x$ függvényt kell ábrázolni.

b) $b(x)$-nél:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$$

Tehát a $b(x) = \cos x + (-\cos x) = 0$ függvényt kell ábrázolni.

c) $c(x)$-nél: mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért a $c(x) = 1$ függvényt kell ábrázolni.

d) $d(x)$-nél: mivel $\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 = 1^2 = 1$, ezért a $d(x) = 1$ függvényt kell ábrázolni.

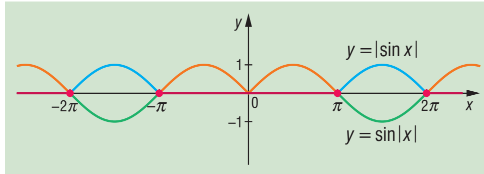
e) $e(x)$-nél:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Tehát az $e(x) = \sin x - \sin x = 0$ függvényt kell ábrázolni.

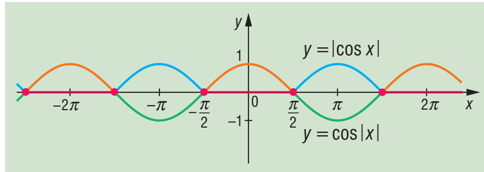
2723 *a)* A megoldások:

$$2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi,\ k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$-\pi + 2n\pi \le x \le 2n\pi,\ n \le 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$



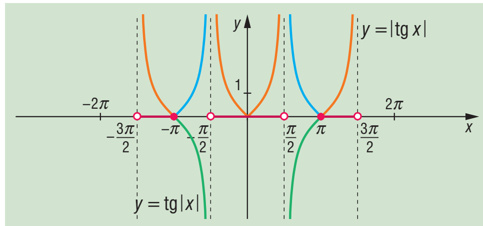
b) A megoldások:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



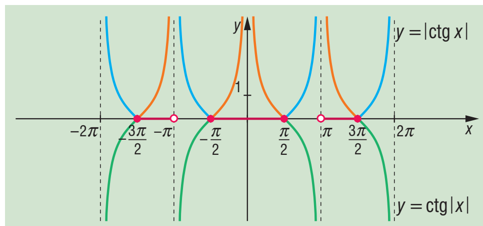
c) A megoldások:

$$k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x \le n\pi,\ n \le 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$



d) A megoldások:

$$k\pi < x \le \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$-\frac{\pi}{2} + n\pi \le x < n\pi,\ n \le 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$



2724 *a)* Használjuk fel, hogy $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$. A megoldás: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

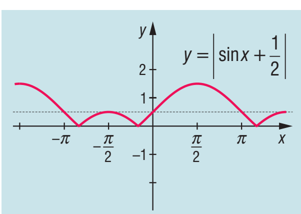
c) $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ és $x = -\frac{7\pi}{12} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

d) $x = 60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$.

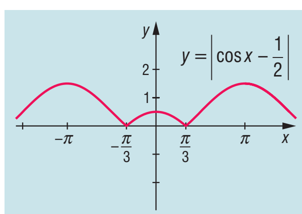
2725 *a)* $0 < x < \frac{\pi}{4}$; *b)* $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$; *c)* $225° < x < 360°$;

d) $0 \le x < \frac{7\pi}{12}$.

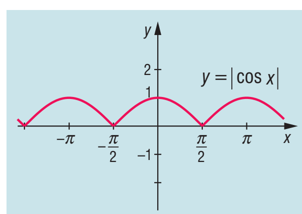
2726 *a)*



b)



c)



2727 *a)* Értelmezési tartomány: $\cos x \neq 1$, azaz $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$1 + \cos x = \frac{\sin x}{1 - \cos x},$$
$$1 - \cos^2 x = \sin x,$$
$$\sin^2 x - \sin x = 0,$$
$$\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0.$$

Ha $\sin x = 0$, akkor $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, az értelmezési tartomány miatt a megoldás:

$$x_1 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $(\sin x - 1) = 0$, akkor a megoldás:

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

b) Ha $\cos^2 x = 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $\cos^2 x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{\sin^2 x}{3} = \cos^2 x,$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3,$$
$$\mathrm{tg}^2\, x = 3,$$
$$|\mathrm{tg}\, x| = \sqrt{3}.$$

Ha $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$, a megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$, a megoldás:

$$x_2 = \frac{2\pi}{3} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

c) Ha $\cos^2 x = 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $\cos^2 x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor oszthatunk vele:

$$6 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0,$$
$$6 - 3 \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0,$$
$$6 - 3 \cdot \mathrm{tg}^2\, x - 3 \cdot \mathrm{tg}\, x = 0,$$
$$2 - \mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $(\mathrm{tg}\, x)_1 = 1$ és $(\mathrm{tg}\, x)_2 = -2$.

Ha $\mathrm{tg}\, x = 1$, a megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\mathrm{tg}\, x = -2$, a megoldás:

$$x_2 = -1{,}1 + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

d) Ha $\cos x = 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor oszthatunk vele:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x = 0,$$
$$\sqrt{3} \cdot \sin x = \cos x,$$
$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos} = 1,$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

e) Értelmezési tartomány: $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Szorozzunk be $\cos x$-szel:

$$\cos x - \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x,$$
$$\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$
$$0 = \sin^2 x + \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$
$$\sin x \cdot \left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ha $\sin x = 0$, akkor:

$$x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\sin x = \frac{1}{2}$, akkor a megoldások:

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}.$$

f) Átrendezés után:

$$\cos^2 x + 4 \cdot \cos x = 3 - 3 \cdot \cos^2 x,$$
$$4 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \cos x - 3 = 0,$$
$$(\cos x)_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8}.$$

Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, akkor:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\cos x = -\frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás.

2728 *a)* Átrendezve: $\operatorname{ctg}^2 x = 1 - \sin^2 x$, azaz $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x$, így $\cos^2 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) = 0.$
Ebből vagy $\cos x = 0$, vagy $\sin^2 x = 1$, azaz $\sin x = 1$ vagy $\sin x = -1$. Tehát:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) A $\sin x + \cos x = z$ helyettesítéssel a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$5z^2 - 13z + 8 = 0.$$

Ennek gyökei: $z_1 = \frac{8}{5}$, $z_2 = 1$. Mivel $\sin x + \cos x = \frac{8}{5}$ nem lehet a valós számok körében, így $\sin x + \cos x = 1$, ahonnan:

$$x_1 = 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Az egyenlet így írható:

$$\sin x + \cos x + (\sin x + \cos x)^2 = 0,$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (1 + \sin x + \cos x) = 0.$$

Tehát vagy $\sin x + \cos x = 0$ vagy $\sin x + \cos x = -1$.
Ha $\sin x + \cos x = 0$, $\cos x$-szel osztva $(\cos x \neq 0)$: $\operatorname{tg} x = -1$, tehát:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

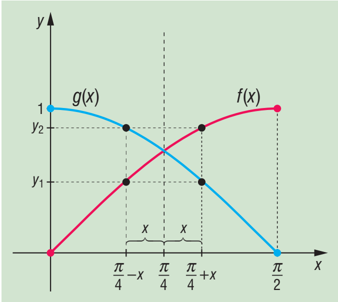
Ha $\sin x + \cos x = -1$, akkor:

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ vagy } x_3 = \pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

(Ez utóbbi eset megoldásához használhatunk függvénygrafikont is.)

2729 A függvények grafikonja az ábrán látható.

Az ábra szimmetrikus az $x = \frac{\pi}{4}$ egyenesre, ebből következnek az azonosságok. (Az ábrán csak $0 < x < \frac{\pi}{4}$ esetén szemléltettük.)



2730 *a)* Az egyenlőtlenség így írható:

$$\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} > 2, \quad x \neq n \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ismert, hogy ha $a > 0$, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ezért mivel $\operatorname{tg}^2 x > 0$, így ez minden olyan esetben igaz, amikor $\operatorname{tg}^2 x \neq 1$, azaz $|\operatorname{tg} x| \neq 1$, tehát ha:

$$x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Az egyenlőtlenség így írható:

$$\sin^4 x - 6 \cdot \sin^2 x + 5 > 0.$$

Helyettesítsünk $\sin^2 x = p$-t, így a $p^2 - 6p + 5 > 0$ zérushelyei: $p = 5$ és $p = 1$ miatt akkor és csak akkor lehet igaz, ha

$$\sin^2 x < 1 \quad \text{vagy} \quad \sin^2 x > 5.$$

Az utóbbi nem lehetséges, így a megoldások csak azok az x-ek, amelyekre $|\sin x| < 1$, tehát:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) A két függvény, $f(x) = \sin \pi x$ és $g(x) = \cos \pi x$, $x \in \mathbb{R}$ grafikonjáról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$\frac{1}{4} + 2k < x < \frac{5}{4} + 2k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Megjegyzés: Ügyeljünk arra, hogy csak $\sin \alpha > \cos \alpha$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk α-ra, majd $\alpha = \pi x$-et helyettesíteni.

d) Ha a $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ azonosságot használjuk, akkor az egyenlőtlenség így írható:

$$1 + \sin x < \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x,$$

ahonnan ekvivalens átalakításokkal ezt kapjuk:

$$1 - \cos x < \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - \cos x).$$

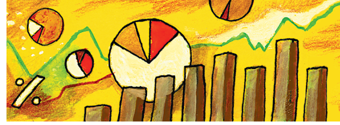
Ha $\cos x \neq 1$, azaz $x \neq 2k\pi$, akkor $1 - \cos x > 0$, tehát elég megoldani az

$$1 < \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

egyenlőtlenséget. Ennek a következő x értékek tesznek eleget:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\cos x = 1$, akkor nincs megoldás x-re.



10.6. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

Események – megoldások

2731 *a)* Igen, igen, nem, igen.
b) és *c)* {gól; nem gól}, {kosár jó; kosár nem jó}, –, cserepek száma.

2732 *a)* $\{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$; *b)* $\{0, 1, 2\}$;
c) $\{-20, -19, \ldots, -1, 1, \ldots, 19, 20\}$.

2733 *a)* Igen. *b)* $8 \le x \le 13$
c) Rudi jó: $\{9{,}5 \le x \le 10{,}5\}$; rudi nem jó: $\{x < 9{,}5$ vagy $10{,}5 < x\}$; 10 cm-nél rövidebb: $\{x < 10\}$.

2734 *a)* $\{1, 2, 3, \ldots, 29\}$;
b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{20, 21, 22, \ldots, 29\}$, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.
c) $A = \{6, 7, 8, \ldots, 29\}$ = {legalább 6.-ra húzunk királyt};
$B = \{1, 2, 3, \ldots, 19\}$ = {legfeljebb 19.-re húzunk királyt};
$C = \{1, 4, 6, \ldots, 28\}$ = {elsőre vagy összetett sorszámra húzunk királyt}.
d) Biztos esemény például: {legfeljebb 32.-re húzunk királyt}.
Lehetetlen esemény például: {29.-re sem húzunk királyt}.

2735 *a)* $\{3, 4, 5, \ldots, 18\}$.
b) Biztos esemény: {pozitív összeget dobunk}. Lehetetlen esemény: {20-nál többet dobunk}.

2736 *a)* {piros, zöld, fehér}.
b) {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; p); (z; f); (f; p); (f; z)}.
c) {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; f)}.
d) {(p; p; p); (p; p; z); (p; p; f); (p; z; z); (p; z; f); (z; z; f)}.
e) {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; p); (z; f); (f; p); (f; z); (f; f)}.

2737 *a)* A lehetséges kimenetelek táblázata:
b) 3-3-3.

Zsolt \ Jenő	Kő	Papír	Olló
Kő	*D*	*J*	*Zs*
Papír	*Zs*	*D*	*J*
Olló	*J*	*Zs*	*D*

2738 *a)* A lehetséges kimenetelek táblázata:
b) 30.
c) Mindkettőt ugyanannyi elemi esemény valósítja meg.

T \ P	1	2	3	4	5	6
1	–	*P*	*P*	*P*	*P*	*P*
2	*T*	–	*P*	*P*	*P*	*P*
3	*T*	*T*	–	*P*	*P*	*P*
4	*T*	*T*	*T*	–	*P*	*P*
5	*T*	*T*	*T*	*T*	–	*P*
6	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	–

Műveletek eseményekkel – megoldások

2739 *a)* $\overline{A}$ = {nincs fej}; $\overline{B}$ = {van fej}; $\overline{C}$ = {0, 1 vagy 3 fej}; $\overline{D}$ = lehetetlen.

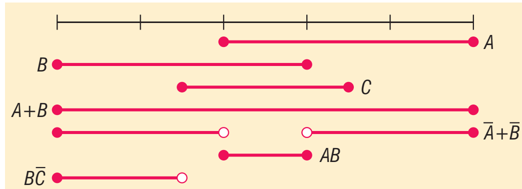
b) Nem.

c) Igen, {mind írás} és {pontosan kettő fej}.

2740 *a)* és *b)*-nél az eseményeket az ábrán láthatjuk:

c) $A+B$ biztos, $\overline{A}\cdot\overline{B}$, $A\cdot B\cdot\overline{C}$ lehetetlen.

d) Például A és $B\cdot\overline{C}$, illetve $A+B$ és $\overline{A}\cdot\overline{B}$.



2741 *a)* $3!\cdot 2=12$, illetve $3!\cdot 3!=36$. *b)* Igaz. *c)* $3!\cdot 2\cdot 2=24$.

2742 *a)* Az események szövegesen:

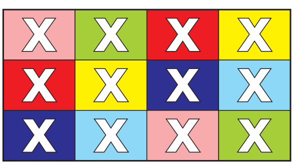
$A+B$ = {tököt vagy tízest vagy ászt húzunk};
$A\cdot B$ = {tök tízest vagy tök ászt húzunk};
$B\cdot C$ = {ászt húzunk};
$A+C$ = {tököt vagy figurás lapot húzunk};
$\overline{C}\cdot A$ = {számozott tök lapot húzunk};
$A\cdot B\cdot C$ = {tök ászt húzunk}.

b) $|A|=8$, $|B|=8$, $|C|=16$;
$|A+B|=14$, $|A\cdot B|=2$, $|B\cdot C|=4$, $|A+C|=20$, $|\overline{C}\cdot A|=4$, $|A\cdot B\cdot C|=1$.

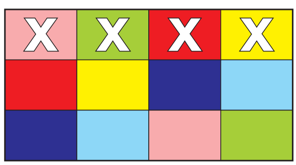
2743 *a)* $E=\overline{A}$; $F=\overline{B+D}$; $G=\overline{A+C}\cdot B$; $H=C\cdot\overline{D}$.

b) Igen, a következő párok: A és C, E, G vagy H; B és D vagy F; C és G; D és F, G vagy H; F és G.

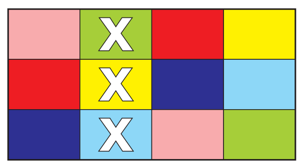
2744 *a)* $A+B$;



$A\cdot\overline{B}$;



$\overline{C}\cdot\overline{E}$.



b) $F=A\cdot B$; $G=E\cdot\overline{D}$; $H=(E+D)\cdot\overline{E\cdot D}$.

c) $A\cdot B\cdot C$; $\overline{A}\cdot D$; $\overline{B}\cdot(C+E\cdot D)+A\cdot B\cdot(E+D)\cdot\overline{E\cdot D}+\overline{A}\cdot(C+E\cdot D)$.

2745 *a)* $(A\cdot B)\setminus C=(A\cdot B)\cdot\overline{C}$;

b) $A+B+C$;

c) $\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$;

d) $(A\cdot B)+(B\cdot C)+(A\cdot C)$;

e) $(A+C)\setminus B=(A+C)\cdot\overline{B}$;

f) $(\overline{A}+\overline{B})\cdot(\overline{A}+\overline{C})\cdot(\overline{B}+\overline{C})=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}$.

2746 *a)* A megjelölt körívek a bal oldali ábrán láthatók.

b) $A+B+C=\{12;\ 5;\ 20;\ 1;\ 18;\ 4;\ 13;\ 6;\ 10;\ 15;\ 2\}$ (sárga körcikk a jobb oldali ábrán);

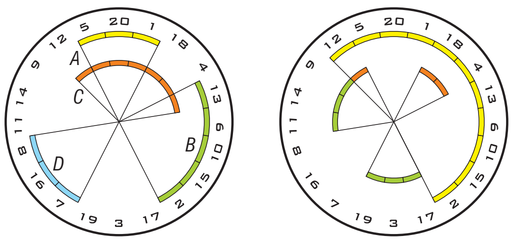
$C\cdot\overline{A+B}=\{12;\ 18;\ 4\}$ (narancssárga körcikk a jobb oldali ábrán);

$B\cdot\overline{D}=B$;

$\overline{A+B+C+D}=\{17;\ 3;\ 19;\ 11;\ 14;\ 9\}$ (zöld körcikk a jobb oldali ábrán).

c) Bármely kettő, kivéve az A és C párt.

d) A bekövetkezése maga után vonja C bekövetkezését.



Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség – megoldások

2747 –

2748 *a)* Géza: $\frac{12}{23}\approx 0{,}52$; Tamás: $\frac{7}{19}\approx 0{,}37$; Ferenc: $\frac{13}{22}\approx 0{,}59$.

b) Ferencre kell bízni a szabadrúgások elvégzését.

2749 *a)* Piros: $\frac{12}{40}=0{,}3$; kék: $\frac{8}{40}=0{,}2$; sárga: $\frac{20}{40}=0{,}5$.

b) Piros: 30 db $(100\cdot 0{,}3=30)$; kék: 20 db $(100\cdot 0{,}2=20)$; sárga: 50 db $(100\cdot 0{,}5=50)$.

2750 –

2751 Legfeljebb 11.

2752 Legalább négy.

2753 –

2754 –

A valószínűség klasszikus modellje – megoldások

2755 $\frac{1}{6}=0{,}1\dot{6}$.

2756 $\frac{2}{16}=0{,}125$.

2757 $\frac{24}{30}=0{,}8$.

2758 *a)* $\frac{3}{7} \approx 0{,}43.$ *b)* $\frac{2}{7} \approx 0{,}29.$

2759 $\frac{10}{90} = 0{,}\dot{1}.$

2760 $1 - 0{,}6 = 0{,}4.$

2761 $1 - \frac{7}{30} = 0{,}7\dot{6}.$

2762 $1 - \frac{7+9}{40} = 0{,}6.$

2763 $\frac{14}{50} = 0{,}28.$

2764 $\frac{6}{25} = 0{,}24.$

2765 $\frac{x}{15} = 0{,}8;\ x = 12.$

2766 $\frac{4}{x} = 0{,}2;\ x = 20.$

2767 $\frac{x}{x+12} = 0{,}6;\ x = 18.$

2768 $1 - \frac{20}{20+x} = 0{,}2;\ x = 5.$

2769 $\frac{80^\circ}{360^\circ} = 0{,}\dot{2}.$

2770 *a)* $\frac{1}{10} = 0{,}1;$ *b)* $\frac{1}{10} = 0{,}1;$ *c)* $3 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}3.$

2771 $\frac{11}{37} = 0{,}\dot{2}9\dot{7}.$

2772 Például: $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ vagy {nem összetett szám dobása}.

2773 *a)* $\frac{120}{150} = 0{,}8.$ *b)* Hetente egyszer.

2774 *a)* Nem.
b) 31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 21.
c) $\frac{4}{21} \approx 0{,}19.$
d) $\frac{11}{21} \approx 0{,}524.$

2775 *a)* $\frac{8}{8^8} \approx 0{,}000000476;$ *b)* $\frac{2}{8^8} \approx 0{,}000000119.$

2776 *a)* $\frac{1}{5!} \approx 0{,}0083;$ *b)* $\frac{2}{5!} \approx 0{,}0167.$

2777 *a)* $\frac{6 \cdot 6 \cdot 3}{6^3} = 0{,}5;$ *b)* $\frac{6+6+2 \cdot 6 \cdot 6}{6^3} \approx 0{,}389;$ *c)* $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} \approx 0{,}556.$

2778 *a)* $\frac{11}{100} = 0{,}11;$ *b)* $\frac{11-5}{100-16} \approx 0{,}071;$ *c)* $\frac{19}{100} = 0{,}19.$

2779 *a)* $\frac{6}{6^2} \approx 0{,}167;$ *b)* $\frac{9+9+9}{6^2} = 0{,}75;$ *c)* $\frac{6}{6^2} \approx 0{,}167;$

d) $\frac{20}{6^2} = 0{,}\dot{5}.$

2780 $\frac{8}{20} = 0{,}4.$

2781 Érdemes áttérnünk a komplementer eseményre, hiszen az a csupa írás (1 eset). Az összes események száma 2^3, így:

$$P = \frac{8-1}{2^3} = 0{,}875.$$

2782 *a)* Feltehetjük, hogy egyetlen Kis Misi jár ebbe az osztályba:

$$P = \frac{1}{30} \approx 0{,}033.$$

b) A 30 tanulónak pontosan a fele szerepel a kinyitott napló jobb oldalán:

$$P = \frac{15}{30} = 0{,}5.$$

c) Az első 10 tanuló között:

$$P = \frac{10}{30} \approx 0{,}333.$$

Megjegyzés: Kis Misi esetében (és a többiben is) gondolkodhatunk úgy is, hogy 15 oldalpárnál nyílhat ki a napló, majd az ott levő két tanuló közül választ a tanár. Vagyis:

$$P = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2}.$$

2783 *a)* Ha felcsapjuk a könyvet, egyszerre mindig két oldalt látunk. Azaz csak 180 lehetőség marad, hogy valahol kinyissuk, ebből 9 fő fejezethatár:

$$P = \frac{9}{180} = 0{,}05.$$

b) A 9 fő fejezet és a $9 \cdot 5 = 45$ szakaszhatár együtt 54 oldalt foglal el:

$$P = \frac{54}{180} = 0{,}3.$$

2784 *a)* A keresett valószínűség:

$$P = \frac{1}{24} \approx 0{,}04167.$$

b) A kedvező esetek száma 1, az összes esetek száma $24 \cdot 24$, így:

$$P = \frac{1}{24^2} \approx 0{,}0017361.$$

c) A kedvező esetek száma itt 3!, az összes eseteké pedig $24 \cdot 24 \cdot 24$:

$$P = \frac{3!}{24^3} \approx 0{,}000434.$$

2785 *a)* Minden színből 8-8 darab van a csomagban. Ha nem tesszük vissza a lapokat, akkor minden húzás után a még húzható lapok száma eggyel csökken:

$$P = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} \approx 0{,}004746.$$

b) Figyeljük meg, hogy a számlálót nem befolyásolja a visszatevés, azonban a nevező már nem csökken. Azaz a valószínűség kevesebb lesz, méghozzá $\frac{31 \cdot 30 \cdot 29}{32 \cdot 32 \cdot 32}$-szeresével:

$$P = \frac{8^4}{32^4} = 0{,}00390625.$$

2786 *a)* 3 és 2 egyforma dolgot $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$-féleképpen tehetünk sorba. Mindannyiszor $8 \cdot 7 \cdot 6$-féleképpen húzhatunk pirosat a pirosak, $8 \cdot 7$-féleképpen tököt a tökök közül.

Az összes esetek száma $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28$, így:

$$P = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} \approx 0{,}00779.$$

b) Az első szorzótényező, a sorba rakások lehetősége nem változik. A többi igen, mivel nem csökken az egyes lehetőségek száma sem a kedvező, sem az összes esetek között:

$$P = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 8^3 \cdot 8^2}{32^5} \approx 0{,}009766.$$

2787 *a)* Mivel a bástya csak a sorában és az oszlopában üt, ha az egyik oszlopban valamelyik mezőre elhelyezünk egy bástyát, akkor abban a sorban más bástya nem lehet. Így az első oszlopban 8, a másodikban már csak 7, aztán 6 stb. lehetőségünk van a bástyák elhelyezésére. A kedvező esetek száma 8!. Az összes eset száma 8^8, ekkor ugyanis egymás mellé is tehetjük a figurákat, minden oszlopban nyolc helyre:

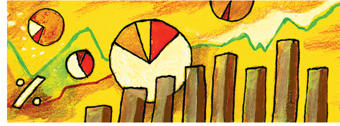
$$P = \frac{8!}{8^8} \approx 0{,}0024.$$

b) Ebben a részkérdésben az összes esetek száma megegyezik az előző példa kedvező eseteivel (nem ütik egymást), azaz 8!.

A kedvező esetek összeszámlálásához két dolgot kell észrevennünk: egyrészt minden sorban két átlómező található, egy világos és egy sötét (például az első és utolsó sorban a két szélső, a negyedik és ötödik sorban pedig a középső négyes); másrészt ezek a mezők szimmetrikusan helyezkednek el. Felülről indulva szabadon választhatunk az átlómezők közül az első négy sorban, azonban utána már a szimmetria miatt csak egy-egy szabad lehetőségünk van minden sorban. Vagyis a kedvező esetek száma 2^4, így:

$$P = \frac{2^4}{8!} \approx 0{,}000397.$$

Megjegyzés: Mindkét részben a sorok és oszlopok szerepe felcserélhető.



2788 *a)* Az öt szám hatféleképpen egyezhet meg (kedvező esetek). Az összes esetekhez bármelyik kockával dobhatunk 6-félét: 6^5,

$$P = \frac{6}{6^5} \approx 0{,}00077.$$

b) Kis pókernél az egy különböző 5-féle kockára jöhet (megkülönböztetve a kockákat). A különböző kocka 5-féle számot mutathat. A többi négy 6-féleképpen lehet egyforma. A kedvező esetek száma így $5 \cdot 5 \cdot 6 = 150$, ebből:

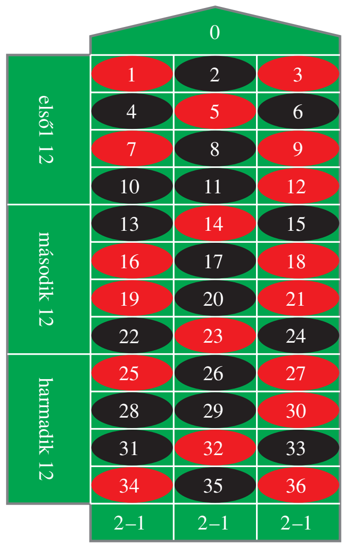
$$P = \frac{150}{6^5} \approx 0{,}0193.$$

2789 *a)* A kis sor valószínűsége:

$$P = \frac{5!}{6^5} = 0{,}0154.$$

b) A két valószínűség egyenlő.

2790 *a)* A rulettasztal számtáblázata az ábrán látható.



b) Minden sorban 3 szám áll:

$$P = \frac{3}{37} \approx 0{,}081.$$

(A 0 nem tartozik a sorok közé.)

c) Egy-egy oszlopban 12 szám áll:

$$P = \frac{12}{37} \approx 0{,}324.$$

(A 0 nem tartozik hozzá egy oszlophoz sem.) Az első tucatban ismét csak 12 szám van, így annak valószínűsége ugyanekkora.

d) Két szomszédos oszlopban 24 darab szám található, így:

$$P = \frac{24}{37} \approx 0{,}648.$$

Tehát 30 játékból kb. 20-szor nyerünk. (Ez azt jelenti, hogy kicsit ritkábban, mint három pörgetésenként kétszer nyerünk a fogadással – legalábbis ez *várható*.)

2791 *a)* $P = \frac{1}{37} \approx 0{,}027$; *b)* $P = \frac{2}{37} \approx 0{,}054$; *c)* $P = \frac{n}{37} \approx n \cdot 0{,}027$.

d) 18 darab piros színű és 18 darab páratlan van a számok között, esélyük így ugyanakkora:

$$P = \frac{18}{37} \approx 0{,}486.$$

2792 *a)* Mivel az összes esetek száma hat, ezért a valószínűségeik alapján A és B is 3-3 elemi eseményt kell, hogy tartalmazzon, szorzatuk (metszetük) pedig 2-t. Például: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$, $A \cdot B = \{2; 3\}$.

b) A most is 3 elemi eseményből áll, B azonban kettőből, összegük (egyesítésük) négyből. Például: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3; 4\}$, $A + B = \{1; 2; 3; 4\}$.

2793 Nem ismerjük a pontos darabszámokat, legyen például a jó csokikból n darab. Ekkor $0{,}25n$ lejárt szavatosságú van. A keresett valószínűség:

$$P = \frac{n}{n + 0{,}25n} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8.$$

Megjegyzés: Tökéletes megoldás, ha a feladat elején választunk egy „kellemes” darabszámot a jó csokiknak, például 100-at. Ekkor 25 darab lejárt szavatosságú csoki volt a dobozban:

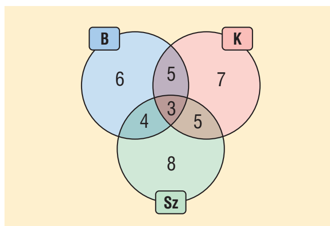
$$P = \frac{100}{125} = 0{,}8.$$

2794 *a)* Ha csak egy irányban közlekedik, akkor a 9 vagy a –9 pontba juthat el. Ha 8 egységet lép az egyik, és egyet a másik irányba, akkor a 7 vagy a –7 pontba jut. És így tovább: láthatjuk, hogy csak a páratlan számoknál fejezheti be kilenc perces sétáját.

b) Számoljuk össze a rendelkezésre álló kilenc perc alatt bejárható, összes és kedvező útvonalak számát. Mivel minden percben két irányban közlekedhet egy egységet, a kilenc perc alatt összesen 2^9 lehetősége van a katicának mozogni. Az 5-ös pontban akkor fejezi be a sétát, ha öt percig a pozitív irányba halad, a maradék négy percben pedig kétszer előre, kétszer hátra mozog. Hogy mikor teszi meg ezeket a mozgásokat a kilenc perc alatt, az nem érdekes. Ha + és – jelekkel jelöljük az egyes lépéseket, akkor összesen hét + és kettő – jelet kell leírnunk minden kilenc jelből álló sorozatban. Például: +, –, +, +, +, +, –, +, +. Ezek száma $\frac{9!}{7!\cdot 2!}$, így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}{2^9} \approx 0{,}07.$$

2795 Mielőtt a konkrét kérdésekre válaszolnánk, ábrázoljuk Venn-diagrammal a gyümölcsimádókat. Szokás szerint haladhatunk belülről kifelé:



a) $P = \frac{8}{38} \approx 0{,}21;$ *b)* $P = \frac{8+7+6}{38} \approx 0{,}55;$

c) $P = \frac{38-3}{38} = \frac{6+5+7+5+8+4}{38} = 1 - \frac{3}{38} \approx 0{,}89.$

Megjegyzések: Nem érdemes logikai szitát használnunk, hiszen legfeljebb arra jövünk rá, hogy nincs olyan tanuló, aki ne szeretné legalább az egyik gyümölcsöt. A *c)* részkérdésnél áttérhetünk a komplementerre is. Így nincs szükség a Venn-diagramra, a szöveg tartalmazza a hármas metszet elemszámát.

Valószínűségek számításánál a komplementer eseményre való áttéréskor két dolgot is tehetünk: felírhatjuk az összes eseményből kivont ellentett eseményt; vagy kivonjuk a biztos esemény valószínűségéből (1-ből) a komplementer valószínűségét.

2796 *a)* Minden színből 8 van a csomagban. Ha visszatevés nélkül húzunk, akkor minden húzás után eggyel csökken a csomag elemszáma, és vele együtt az egyes színek száma is. Ne feledjük, még a 3, 2, 2 azonos színű lapok lehetséges sorrendjeit is figyelembe kell vennünk. A megoldás:

$$P = \frac{\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 8\cdot 7\cdot 8\cdot 7}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26} \approx 0{,}013.$$

b) Ha a kivett lapokat visszatesszük, akkor az új húzásnál nem csökken a választási lehetőségek száma:

$$P = \frac{\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 8^3\cdot 8^2\cdot 8^2}{32^7} \approx 0{,}0128.$$

Megjegyzés: Az *a)* részfeladatban a csökkenő szorzatokat felírhattuk volna például a következő formában is:

$$\frac{32!}{(32-7)!}.$$

2797 *a)* Kombinatorikából ismert a feladat: tegyünk sorba több dolgot, melyek között azonosak is vannak (az előző példában is alkalmaznunk kellett). A megoldás:

$$\frac{14!}{8!\cdot 4!\cdot 2!}=45\,045.$$

b) A feladat által megadott pillanatban az összes esetek száma 8, a kedvező (rózsaszín) esetek száma 2, így:

$$P=\frac{2}{8}=0{,}25.$$

c) Két megoldást is adunk. A bonyolultabb szerint, ha csak egy lilát nem vettünk ki eddig, akkor a kivett 13 golyót $\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}$-féleképp tehetjük sorba. Az egyes színekből 8!, 4!, 2!-féleképp húzhatunk golyókat. A nevezőben gyakorlatilag 14! szerepel – a végére elvileg nem írhatjuk oda az egyest (ahogy a 4! végére sem), de értékét ez nem befolyásolja:

$$P=\frac{\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}\cdot 8!\cdot 4!\cdot 2!}{14!}\approx 0{,}286.$$

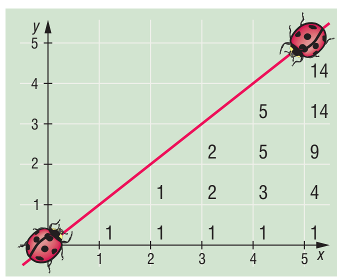
Az egyszerűbb megoldás csak az utolsó golyóra koncentrál: a 14 golyó között 4 lila van, így az utolsó $P=\frac{4}{14}\approx 0{,}286$ valószínűséggel lesz lila. Természetesen megfelelő egyszerűsítések után a bonyolultabból is megkapjuk az egyszerűbbet.

d) A három szín 3!-féleképp követheti egymást, azokon belül a szokásos 8!, 4!, 2!-féleképp következhetnek az egyes golyók. Az összes esetek száma 14!, így:

$$P=\frac{3!\cdot 8!\cdot 4!\cdot 2!}{14!}=0{,}000\,133.$$

2798 *a)* Bármerre megy, 5-ször kell felfelé, és 5-ször jobbra lépnie. Összesen 10 lépés, ami 10 perc.

b) Össze kell számolnunk az összes lehetséges útvonalat. Ezt megtehetjük úgy, hogy a lehetséges 5 jobbra és 5 felfelé lépés összes sorrendjét összeszámoljuk: $\frac{10!}{5!\cdot 5!}=252.$ Ez azonban nem ad útmutatást a kérdezett $y=x$ egyenes alatt haladó esetekre.



Az biztos, hogy a járkálás első (és utolsó) néhány lépése meghatározott: az origóból csak (1; 0)-n, majd (2; 0)-n át vezet az út, ugyanis nem érinthetjük az $y=x$ egyenest. Jegyezzük fel magunknak a pontok mellé, hányféleképpen juthattunk el odáig. Így az x tengely minden pontjához 1-est kell írni. A (3; 1)-hez viszont már 2-t, hiszen (3; 0)-n és (2; 1)-n át is odajuthatunk, azokba a pontokba viszont csak 1-1 útvonalon. Azaz minden pontban összeadhatjuk a hozzájuk vezető pontok útvonalait. Így már ki is tudjuk tölteni az ábrát. A kérdéses útvonalak száma 14. Ellenőrzésképpen írjuk fel az előbb kiszámolt összes eseteket is. Újra 252-t kapunk. Így a keresett valószínűség:

$$P=\frac{14}{252}\approx 0{,}0556.$$

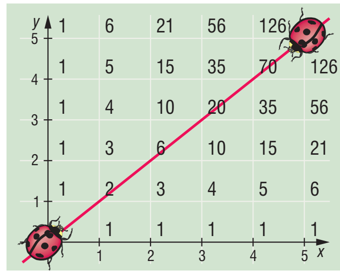
c) Az $y=x$ egyenesre szimmetrikus az előző és ez az eset, így valószínűségeik is egyenlők.

d) Észrevehetjük, hogy *b)* és *c)* esetekben éppen a kérdezett esemény komplementerét számoltuk össze. Ezért:

$$P=\frac{252-(14+14)}{252}=1-2\cdot\frac{14}{252}\approx 0{,}889.$$

Megjegyzések: A feladat több általánosítási, bővítési lehetőséget tartalmaz.

Az egyik lehetőség, ha úgy értelmezzük a feladatot, hogy az $y=x$ egyenest csak átlépni nem szabad útközben, hozzáérni igen. Oldjuk meg így is a feladatot!



Másik lehetőség, ha nem az (5; 5), hanem például a (9; 6) pontba tart a katica. Természetesen ekkor az $y=\frac{2}{3}\cdot x$ egyenes alatti és feletti részeket kérdezzük. Vigyázzunk, ekkor már nem lesz szimmetrikus az egyenes alatti és feletti lépegetés!

Akár azon is gondolkodhatunk, hogy az általában $(n;\,k)$ pontba tartó katicabogárra feltett hasonló kérdéseket hogyan válaszolhatnánk meg. Mi lenne ekkor a vízválasztó egyenes?

Az összes eseteknél kapott ábrát figyelmesen szemlélve, esetleg ismerős alakzatot fedezhetünk fel a számok rengetegében. 135°-ban, negatív irányban elfordítva *Pascal-háromszöget* kapunk. Jobban belegondolva, teljesen egyértelmű, hogy ezt kell látnunk, hiszen kétoldalt 1-esek állnak, a közöttük levő számokat pedig a háromszög képzési szabályának megfelelően állítjuk elő.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

2799 A kockákat különböztessük meg, és tegyük sorba (pl. sorszámozzuk őket). Két megoldást is adunk az egyes lehetőségekre:

Pár, I. megoldás. Az egy párt tekinthetjük úgy, hogy kettő azonos és három azonos. Az utóbbiak a feladat szempontjából egy csoportot alkotnak „különbözőségükben”. Talán furcsán hangzik, de nézzük tovább: szabad hely négy van, ugyanis csak a második ismétlődő helye rögzített. Az első szabad helyre 6, a másodikra 5, aztán 4 és végül 3 lehetőségünk van, egy rögzített. A pár valószínűsége:

$$P_{\text{pár}}=\frac{\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^5}\approx 0{,}463.$$

Pár, II. (III.) megoldás. Írjuk össze, hány lehetőség van a pár kialakítására. A kockák sorszámaival adjuk meg az azonos értéket mutatókat: (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5), (4; 5).

Még jobban látszik, ha táblázatba gyűjtjük az azonosakat.

1. kocka	x	x	x	x						
2. kocka	x				x	x	x			
3. kocka		x			x			x	x	
4. kocka			x			x		x		x
5. kocka				x			x		x	x

Ez tíz lehetőség. Az első kockán 6-félét, utána a szabad helyeken 5-, 4-, 3-félét dobhatunk. A második x helyén viszont csak egyet, hiszen annak meg kell egyeznie az első x-szel.

Természetesen az eredmény nem változik:

$$P_{\text{pár}}=\frac{10\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^5}\approx 0{,}463.$$

Drill, I. megoldás. A helyzet nem változik a párhoz képest, csak itt három és két egyformát keresünk (az utóbbi kettő játssza a különböző számok szerepét). Illetve annyiban változik, hogy – mivel a szabad helyek száma eggyel csökken – $6 \cdot 5 \cdot 4$-gyel szorozzuk:

$$P_{\text{drill}} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}154.$$

Drill, II. megoldás. Alkalmazzuk a pár második megoldásánál bemutatott táblázatot, ezzel ismét 10 lehetőségig jutunk. Most azonban az x-ek jelentik a különböző számokat, az üres helyeken vannak az azonos dobások. Mivel eggyel kevesebb szabad helyünk van, ezért a szorzótényező végéről lemarad a hármas:

$$P_{\text{drill}} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}154.$$

Full, I. megoldás. Itt már tényleg kettő és három azonos értéket kell sorba raknunk. Azonban csak két szabad helyünk van (a többit meghatározzák), így:

$$P_{\text{full}} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 6 \cdot 5}{6^5} \approx 0{,}0386.$$

Full, II. megoldás. Bármilyen furcsa, táblázatunk még mindig a korábban látott, csak képzeljünk az üres helyekre például y-t. Így:

$$P_{\text{full}} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 5}{6^5} \approx 0{,}0386.$$

Két pár, I. megoldás. Ebben az esetben kettő-kettő azonos, és egy ezektől is különböző dobásunk van, sorrendjükre $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}$-t kapunk. Azonban a sorrendek között nem számít különbözőnek, ha a két pár szerepét felcseréljük (5-5-6-6-2 ugyanaz, mint 6-6-5-5-2), így ezt még $2!$-sal osztani kell. A három szabad helyre $6 \cdot 5 \cdot 4$-félét dobhatunk. A keresett valószínűség:

$$P_{\text{két pár}} = \frac{\frac{\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}}{2!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}231.$$

Két pár, II. megoldás. Vegyük a korábbi táblázatot, csak most x-x és y-y jelölje a két párt.

1. kocka	x	x	x	x	x	x				
2. kocka	x	x	x	y	y					
3. kocka	y	y		x	x	x	…			
4. kocka	y		y	y		y				
5. kocka		y	y		y	y				

Láthatjuk, hogy a párhoz képest minden x-x eset háromszor fordul elő az y-ok elhelyezkedése miatt. Így nem 10, hanem 30 lehetőségünk lesz a párok helyét kijelölni. Azonban x és y szerepe is felcserélhető (végeredményben nem különböztetjük meg az x-x-z-y-y és y-y-z-x-x dobásokat), ezért 2-vel osztanunk kell a lehetséges sorrendek számát, ami 15. A szabad helyek száma eggyel csökkent a párhoz képest ($6 \cdot 5 \cdot 4$). A keresett valószínűség:

$$P_{\text{két pár}} = \frac{15 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}231.$$

Végül álljon itt a kérdésre adandó válasz: pár, két pár, drill, full.

2800 *a)* Eredetileg annak az esélye, hogy Balázs felel:

$$P_1 = \frac{1}{30} \approx 0{,}0333.$$

A strigula után a szoftver úgy veszi, mintha Balláb úr kétszer lenne a naplóba írva. Ezzel eggyel növekszik az összes esetek és eggyel a „kedvező” esetek száma is:

$$P_2 = \frac{2}{31} \approx 0{,}0645.$$

A növekedési szorzó a kettő hányadosa, $\frac{60}{31} \approx 1{,}935$-szeres. Százalékban kifejezve a növekedés 93,5%-os, illetve egy strigula (feltéve, hogy a többieknek még nincs ilyen) után a felelés valószínűsége 93,5%-kal nagyobb.

b) Tegyük fel, hogy Balázsnak n strigulája van (a többieknek még nincs). Ekkor a felelés valószínűsége:

$$P = \frac{1+n}{30+n}.$$

A következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán:

$$\frac{1+n}{30+n} > 0{,}5.$$

Innen:

$$n > 28.$$

c) Legyen Balázsnak n, Borisznak m strigulája (másnak nincs, n, m pozitív egészek). Ekkor:

$$P_{\text{Balázs}} = \frac{1+n}{30+n+m}, \quad P_{\text{Borisz}} = \frac{1+m}{30+n+m}.$$

A feltétel szerint azt akarjuk, hogy:

$$\frac{1+n}{30+n+m} > 0{,}2 \quad \text{és} \quad \frac{1+m}{30+n+m} > 0{,}3.$$

Átalakítva mindkét egyenlőtlenséget és megszabadulva a tizedes törtektől, ezt kapjuk:

$$4n - m > 25 \quad \text{és} \quad 7m - 3n > 80.$$

Mit kezdhetünk két egyenlőtlenséggel? Alapvetően két választási lehetőségünk van: próbálkozunk vagy rajzolunk. Kezdjük a próbálkozással! Segít, ha m-et két n-es kifejezés közé szorítjuk:

$$4n - 25 > m > \frac{80+3n}{7}.$$

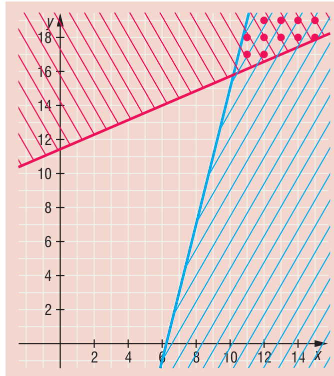
Az első egyenlőtlenség miatt $n > 6$. Azonban $n = 7, 8, 9, 10$-re sem kapunk megfelelő megoldást, mert a harmadik kifejezés nem kisebb az elsőnél. Végre $n = 11$-re megkapjuk az első két megoldást, $m = 17$ és 18. Készítsünk egy kis táblázatot a lehetséges n, m párokról. Az adott n-hez megtalált összes m értéket nem soroljuk fel, csak a legkisebbet és a legnagyobbat.

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
$m_{\text{min.}}$	17	17	18	18	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22	23	23	24	24	24	…
$m_{\text{max.}}$	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	

Ennyi felírásból már megfogalmazhatunk két szabályszerűséget is: ha n egyesével növekszik, akkor $m_{\text{min.}}$ váltakozva 3-2-2-es csoportokban teszi ugyanezt, $m_{\text{max.}}$ pedig n minden ugrását négyesével követi.

A másik lehetőség, ha külön-külön a két egyenlőtlenségre mint két lineáris függvényre gondolunk, és ábrázoljuk őket a koordináta-rendszerben (n helyére x kerül, m szerepét pedig y veszi át).

$$y = 4x - 25 \quad \text{és} \quad y = \frac{3}{7} \cdot x + \frac{80}{7}.$$



Satírozzuk be az egyenlőtlenségeknek megfelelő tartományokat. Mivel n és m csak egész értékek lehetnek, a közös részben található egész koordinátájú pontok, az ún. *rácspontok* adják a megoldást.

Akárhogyan is oldjuk meg a feladatot, végtelen sok megoldást kapunk Balázs és Borisz strigulái számára, a megadott határokon belül.

Megjegyzés: Oldjuk meg úgy is a feladatot, ha azt keressük, hogy mikor kisebb a fiúk felelésének valószínűsége a megadott 0,2 és 0,3 értékeknél.

d) Jelölje N a Jolán osztálytársainak kiosztott strigulákat. Ekkor az ő felelésének valószínűsége:

$$P = \frac{1}{30 + N}.$$

Ezt szeretnénk 0,01 alá csökkenteni:

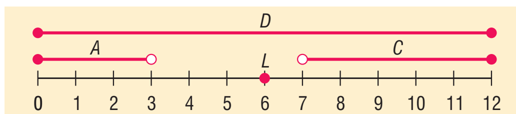
$$\frac{1}{30 + N} < 0{,}01.$$

Egyszerű átalakításokkal: $N > 70$.

Vegyes feladatok – megoldások

2801 *a)* és *b)* esetén a számegyenes és a megadott események ábrázolása a rajzon látható.

c) Biztos esemény: D, lehetetlen esemény: B.



2802 *a)* Hatos dobások száma: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

b) A dobott számok összege: $\{5; 6; 7; \ldots, 30\}$.

c) A: lehetetlen (hatos), B: biztos (mindkettő), C: lehetetlen (dobott összeg), D: biztos (hatos).

2803 *a)* C és D.

b) $\overline{A}$ = {legalább 16-ot dobunk}; $\overline{B}$ = {páratlant dobunk}; $\overline{C}$ = {prímet vagy 1-est dobunk}; $\overline{D}$ = {összetett számot vagy 1-est dobunk}.

c) $A + \overline{D} = \{1; 2; 3; \ldots; 14; 15; 16; 18; 20\}$;

$\overline{A} \cdot B \cdot C = \{16; 18; 20\}$;

$\overline{B + C} = \{1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$.

d) $\overline{C} \cdot \overline{D} = \overline{C + D}$.

2804 *a)* Bármely kettő kizárja egymást.

b) $\overline{A \cdot B \cdot C}$ = biztos esemény; $A \cdot B + C = C$; $A \cdot (B + C)$ = lehetetlen esemény.

c) A pirossal jelölt esemény $= \overline{A + B + C}$.

2805 –

2806 *a)* 3 éve: 0,17; 2 éve: 0,19; tavaly: 0,18; *b)* még 64-et.

2807 $\frac{8}{20} = 0{,}4.$

2808 $\frac{5}{45} = 0{,}\dot{1}.$

2809 $\frac{3!}{5!} = 0{,}05.$

2810 *a)* $\frac{29}{134} \approx 0{,}216;$ *b)* $\frac{29 \cdot 28}{134 \cdot 133} \approx 0{,}04556;$ *c)* $\frac{29^2}{134^2} \approx 0{,}0468.$

2811 *a)* 1; *b)* $\frac{10}{35} \approx 0{,}29.$

2812 *a)* $\frac{1}{6} \approx 0{,}167;$ *b)* $\frac{5 \cdot 1}{6^2} \approx 0{,}1389;$ *c)* $\frac{5^{n-1} \cdot 1}{6^n}.$

2813 *a)* $\frac{2}{25} = 0{,}08;$ *b)* $\frac{51}{54} \approx 0{,}944.$

2814 *a)* $1 - \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 0{,}5;$ *b)* $\frac{6}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \approx 0{,}000198.$