Trembeczki Csaba

PRÓBAÉRETTSÉGI FELADATSOROK

12 feladatsor megoldásokkal, magyarázatokkal

MATEMATIKA

2024-től érvényes követelmények

EMELT SZINT

2024-től
érvényes
követelmények

MOZAIK

A könyvet írta: **Trembeczki Csaba** • *középiskolai tanár*

Lektorálta: Németh Sarolta • *középiskolai tanár*

Felelős szerkesztő: Tóth Katalin

Borítóterv: Szőke András

Műszaki szerkesztő: Horváth Péter

Ábrák: Horváth Péter, Kovács Attila

Anyanyelvi lektor: Varró Sándor

Fotók: shutterstock.com, NASA

ISBN: 978 963 697 899 0

Kedves Érettségire Készülő Olvasónk!

Engedje meg, hogy bevezetőnket egy klasszikus matematikai fordulattal kezdjük: *tételezzük fel,* hogy Ön olyan szakon szeretne továbbtanulni, amelyhez szükséges a matematika. Ha ez igaz, akkor mindig legyen Ön előtt: most nemcsak érettségire készül, hanem a későbbi tanulmányait is megalapozza!

Az emelt szintű írásbeli érettségire való felkészülés matematikából is összetett folyamat, melynek legfontosabb lépései a következők:

- a szükséges tananyag áttekintése, megtanulása (a tananyag pontos leírását megtalálja az *érettségi vizsgakövetelmények matematikából* címszóra keresve az interneten);
- az áttekintés során az egyes témakörökhöz kapcsolódó tematikus feladatok megoldása (javasoljuk, hogy ehhez keressen jó tankönyveket, feladatgyűjteményeket, és nézzen bele az elmúlt évek emelt szintű érettségi feladatsoraiba is);
- a felkészülés második felében (amikor már jó pár téma tanulásával végzett) rendszeres időközönként **próbaérettségi feladatsorok** írása.

A felkészülés harmadik lépéséhez szívből *„ajánljuk magunkat”:* könyvünkben 12 darab, az elmúlt évek matematikaérettségi feladatainak elemzése alapján készült feladatsort talál.

Gondolatok a feladatsorokról

A feladatsorokat – melyeket önálló gyakorlásra javaslunk – igyekeztünk úgy összeállítani, hogy modellezzék az „éles” érettségin várható feladatsorok felépítését. A vizsgán ugyanis bizonyos témakörök mindig előkerülnek (síkgeometria, térgeometria, valószínűségszámítás, függvények, valamilyen egyenlet vagy egyenlőtlenség, gráfelmélet, az analízis elemei). Ezekhez csatlakozik még kombinatorika, halmazelmélet, sorozatok, logika, matematikai modell készítését igénylő feladat.

Készüljön úgy az írásbelire, hogy összegyűjti az egyes témakörökre jellemző feladattípusokat. Tudatosítsa, hogy mire érdemes figyelni az egyenletek, egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok megoldásakor, melyek azok a geometriai tételek, amelyek jellemzően előkerülnek a feladatokban stb. Ha végez egy témakörrel, „lépjen egyet hátra”, és gondolkozzon el először annak belső összefüggésein (például miben hasonlít, miben tér el a *szinusz-* és a *koszinusztétel* felhasználása), majd a más témákhoz kötődő kapcsolódási pontokon (mint a *területszámítás* vagy a *Pitagorasz-tétel*). Ezzel az írásbeli mellett a szóbeli vizsgára is készül.

Jó tanácsok a próbaérettségi feladatsorok használatához

A felesleges idegeskedés elkerülése érdekében jegyezze meg: minden feladatsor megoldásával azt az állapotot rögzíti, hogy az adott napon milyen teljesítményt tudott nyújtani. Ha nem sikerült úgy, ahogy szerette volna, ne csüggedjen. Minden eredmény fejleszthető! Alaposan elemezze azoknak a feladatoknak a megoldásait, amelyek kevésbé jól sikerültek.

Ha átgondolja és megérti, hogy *mit miért* rontott el egy adott feladatban, akkor jó eséllyel később eszébe jut a helyes lépés, és elkerüli gondolkodása csapdáit. A könyvben található részletes megoldási útmutatók segíteni fogják ebben.

A próbaérettségi írásának az a célja, hogy a valódi vizsgát a lehető legjobban modellezve felkészítse az ott várható teendőkre.

A 12 próbavizsga 12 napot fog igénybe venni a felkészülésből, ezért tervezze meg, mikor írja őket. Készítse elő az optimális körülményeket: legyen Ön körül nyugalom, csend, ne kelljen másra, csak a feladatok megoldásaira koncentrálnia. Kapcsolja ki és tegye el a mobiltelefonját, hiszen élesben, az érettségi vizsgán is ezt kell majd tennie. Az asztalán és a látóterében csak az alábbiak legyenek:

- feladatsor, üres papír, kék tollak, ceruza (nem piros, kizárólag az ábrák rajzolásához!);
- függvénytábla, vonalzó, körző, szögmérő és **az** a szöveges adatok tárolására és megjelenítésére **nem** alkalmas számológép, amelyet majd a vizsgán is használ. (Ebbe a vizsga előtti utolsó próbaérettségi előtt feltétlenül érdemes új elemeket tenni és így kipróbálni, hogy biztosan működjön majd a vizsgán is!)

Célszerű teljes délelőttöket (8^{00}–12^{00}) szánni a próbavizsgákra.

A feladatsorok – és azokon belül a feladatok – tetszőleges sorrendben oldhatók meg a rendelkezésére álló **4 óra alatt.** Használja fel az időt! Dolgozzon alaposan, hiszen **minden lépést indokolnia kell.** Figyeljen a tételek hivatkozására: például nem mindegy, hogy a *Pitagorasz-tételt* vagy annak *megfordítását* használta, és fontos, hogy a Newton–Leibniz-tételt csak a primitív függvény megkeresése után alkalmazhatja. Gondolatmeneteit igyekezzen világosan és egyszerűen megfogalmazni. Ha egy részben nem biztos, számoljon tovább – a folytatásra még kaphat teljes pontszámot!

Ahogy majd az érettségi vizsgán is, a feladatsorok 1–4. feladatát mind meg kell oldania. Az 5–9. feladatok közül egyet kihagyhat, annak sorszámát egy üres négyzetben jelölnie kell. Ha nem teszi meg egyértelműen, akkor a javítónak *kötelezően az utolsó feladatot kell figyelmen kívül hagynia* – akkor is, ha azt esetleg maximális pontszámra oldotta meg. Próbálja meg az összes feladatot megoldani, majd gondolja át, melyik feladatot hagyja ki. Lehet, hogy egy 10 pontos részfeladat teljes megoldásáig nem jut el, de több pontot szerez vele, mint a biztosan megoldottnak *vélt* két 3 pontossal.

Ha egy feladatsort megoldott, később nyugodtan térjen vissza hozzá, és próbálja meg újra.

A könyv minden közreműködőjével együtt drukkolok Önnek a sikeres érettségijéhez!

A szerző

Feladatsorok

Tanácsok a feladatsorok megoldásához

A feladatsor megoldására a vizsgán 240 perc áll rendelkezésre.

Ha végzett egy-egy feladattal, akkor olvassa el újra a szöveget, és ellenőrizze, hogy megtette-e a következőket:

- *felhasznált minden szükséges adatot,* minden *feltételt* figyelembe vett, megtette a *kikötéseket;*
- a kérdésre *válaszolt,* a feladatban *meghatározott* típusú értéket (pl. egész számot) kapott;
- a megoldásnál helyes *mértékegységet* írt, a kért módon *kerekítette* a megoldást;
- *ellenőrizte* a kapott megoldást a szövegbe vagy a kiinduló egyenletbe visszahelyettesítve;
- alaposan *megindokolta* a megoldás során alkalmazott lépéseket.

Ha egy feladattal elakad, inkább térjen át egy másik kérdésre, és később próbálja újra. Használja bátran a függvénytáblát, készítsen vázlatokat, gyűjtsön ötleteket! Jusson eszébe, hogy alkalmazhat *indirekt* vagy *teljes indukciós* bizonyítást is!

Ne mulassza el kiválasztani és a sorszámát a négyzetbe beírni az 5–9. feladatok közül annak, amelynek az értékelését a vizsgán „passzolná”.

6. feladatsor

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 *a)* Oldja meg az egyenlőtlenséget a $[0;\, 2\pi]$ halmazon!

$-2\sin x \le 1$

b) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

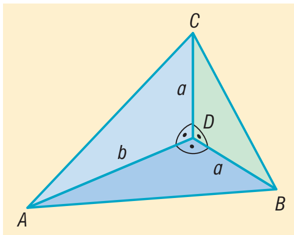
$\sqrt{x+1} = \sqrt{4x-3} - 1$

a 5 | b 7 | ö 12

2 Robi saját grillsütőt készített egy kiszuperált 150 literes, 80 cm magas, egyenes körhenger alakú hordóból. A hordót a forgástengelyével párhuzamosan, a forgástengelytől 5 cm-re fekvő síkban vágta el. A kisebb rész lett a tető, a nagyobb a tűztér, ezeket csuklópántokkal fogatta össze.

a) Hány köbdeciméter a tűztér térfogata?

Robi a grillsütő lábaira talpakat tervez fémlemezekből. Egy talp három darab egymáshoz forrasztott derékszögű háromszögből készül: *ABD* és *ACD* egybevágó háromszögek, *BCD* pedig egyenlő szárú háromszög. A tervek alapján $2a + b = 36$ cm.



b) Hogyan válassza meg Robi az a él hosszát, hogy a fémlemezek területe a lehető legnagyobb legyen?

a 6 | b 6 | ö 12

120

3 *a)* Legfeljebb mekkora lehet egy háromszögnek az a szöge, amelyiknél nincs kisebb szög a háromszögben?

b) Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 12 cm, 17 cm. Számítással döntse el, hogy a háromszög hegyesszögű vagy tompaszögű!

c) Egy derékszögű háromszög oldalai olyan egész számok, amelyek 5 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. Mekkora a háromszög középső oldalának hossza?

a 3 | b 5 | c 5 | ö 13

4 Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 - 2x + 8$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola által a síkból kimetszett konvex tartomány II. síknegyedbe eső területét!

b) Írja fel a parabolához a (-4) abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenletét!

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit!

a 5 | b 5 | c 4 | ö 14

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

5 Tomi 9 évesen kezdett kosarazni, majd egy év múlva stabil helye lett a kezdőcsapatban. Az év végi statisztika szerint 54%-os pontossággal dobta a ziccereket (amikor egyedül vezetheti kosárra a labdát), és 35%-os pontossággal a büntetődobásokat.

a	4	
b	6	
c	6	
ö	16	

a) Tomi az év utolsó meccsén bátran elvállalt egy hárompontos dobáskísérletet, amely közben személyi hibát (faultot) követtek el ellene. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a számára megítélt három büntetődobásból legfeljebb kétszer talál célba! (Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg!)

b) Legalább hány ziccerkísérlet kell ahhoz egy mérkőzésen, hogy Tomi legalább 90%-os eséllyel legalább egyszer pontot érjen el?

c) Ezen az utolsó mérkőzésen Tominak összesen 11 ziccer- és 14 büntetődobás-kísérlete volt (másfajta dobása nem volt), amelyekből a statisztikának megfelelő számú dobás lett sikeres (kerekítve). Édesapja csak Tomi dobásait fényképezte: ezeket visszanézve, ha csak azt látjuk a képen, hogy a labda a gyűrűben landol, mekkora valószínűséggel származott a pont büntetőből?

124

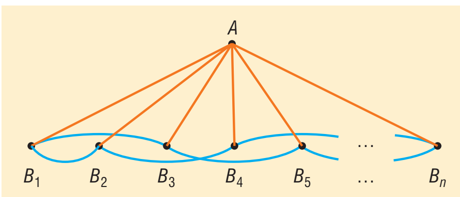
6 *a)* Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!

a	3	
b	7	
c	6	
ö	16	

Van olyan G, illetve G’ nemüres teljes gráf, amelyre igaz, hogy G’ csúcsainak száma négyszerese G csúcsai számának, továbbá G’ éleinek száma hússzorosa G élei számának.

b) Egy tudóscsoportnak 11 tagja van, akik aktívan kommunikálnak egymással: mindenki legalább 5 másik tudóssal beszélget a kutatási eredményekről. Igazolja, hogy ekkor biztosan mindenki értesülni fog minden, a csoportban elért tudományos eredményről!

Egy szociológiai vizsgálatban az A-val jelzett influenszer követőit vizsgálják. Úgy válogatják össze a B_1, B_2, …, B_n követői csoportot ($n > 1$), hogy a csoportban mindenki pontosan két másik taggal álljon kapcsolatban.



A vizsgálatot végzők felrajzolják a kapcsolati hálót, ebben narancsszínnel jelölik az influenszer, kékkel a csak csoporttagok kapcsolatait. Ezek után az ábrán jelöltekből véletlenszerűen kiválasztanak két kapcsolatot.

c) Legfeljebb hány fős csoportot vizsgáljanak, ha azt szeretnék, hogy legfeljebb 0,24 legyen annak a valószínűsége, hogy mindkét kiválasztott kapcsolat narancsszínű lesz?

7 Egy élelmiszerboltban 3 kg-os csomagban lehet termelői krumplit vásárolni. Tamás nagyon szereti a krumplit és mindig hosszabb időre vásárol, ezért 6 zsák krumplit visz haza. Úgy érzi, két feltétel együttes teljesülése esetén lenne teljesen elégedett:

(1) ha a csomagok tömegének átlaga és mediánja nem térne el 3 kg-tól 2 dkg-nál többel, és

(2) ha sem a mediántól vett abszolút átlagos eltérés, sem a szórás (kerekítve) nem haladná meg a 10 dkg-ot.

Otthon leméri az egyes csomagokat, és az alábbi értékeket kapja:

Csomag	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Tömeg (dkg)	298	306	304	291	285	312

a) A feltételek teljesülését számítással ellenőrizve döntse el, hogy Tamás végül elégedett volt-e a krumplivásárlással!

b) Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-4; 0)$, $B(11; 5)$ és $C(5; 13)$. Igazolja, hogy a $3x - 4y + 12 = 0$ egyenletű e egyenes úgy vágja két darabra az ABC háromszöget, hogy a kerületét és területét is felezi!

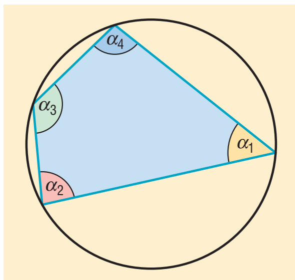
a 6
b 10
ö 16

127

8 *a)* Egy mértani sorozat hányadosa $\sqrt{2}$, a sorozat első tíz tagjának összege $\frac{93}{2-\sqrt{2}}$. Igazolja, hogy a sorozat páros tagjai egész számok!

b) Egy számtani sorozat differenciája 3, első n tagjának összege $S_n = 235$; első $2n$ tagjának összege pedig $S_{2n} = 770$. Számítsa ki a sorozat első tagját!

c) Az ábrán látható húrnégyszög α_1, α_2, α_4 szöge ebben a sorrendben mértani sorozatot alkot, a negyedik szöge pedig $\alpha_3 = 150°$. Számítsa ki a húrnégyszög szögeit!



a 4
b 6
c 6
ö 16

9 *a)* Az 56 160-nak és az n pozitív egész számnak a legnagyobb közös osztója 104. Határozza meg azt a legnagyobb, 10 000-nél kisebb számot, amely eleget tesz a feltételnek!

Adott f, g és h függvény:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x+1}$; $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_3 x$; $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + x + 2$.

b) Legyen $k(x) = h(f(x))$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz a k összetett függvény külső függvénye a h, belső függvénye pedig az f.

Bizonyítsa be, hogy $k(x) = 9 \cdot 9^x + 3 \cdot 3^x + 2$.

c) Oldja meg az $f(g(x)) > h(x)$ egyenlőtlenséget a függvények közös értelmezési tartományán!

a 6
b 3
c 7
ö 16

I. rész

1 *a)* Oldja meg az egyenlőséget a valós számok halmazán! a 4

$2=\sqrt{0{,}25x^2+x+5}$

M: Mivel $0{,}25x^2+x+5$ bármely x-re pozitív ($D<0$ és felfelé nyíló parabola), ezért $x\in\mathbb{R}$.

Négyzetre emelve és rendezve, másodfokú egyenletet kapunk:

$$0=0{,}25x^2+x+1.$$ **(2 pont)**

Az egyetlen megoldás: $\mathbf{x=-2}$. **(1 pont)**

Ellenőrzés: $2=\sqrt{0{,}25\cdot(-2)^2-2+5}=\sqrt{1-2+5}=\sqrt{4}.$ **(1 pont)**

b) Oldja meg az egyenletrendszert az $\mathbb{R}^2$ halmazon! b 8

$$\left.\begin{aligned}x+\frac{9}{y}&=6\\ \frac{x}{8}+y&=5\end{aligned}\right\}$$

M: A tört nevezője miatt $y\neq 0$. Szorozzuk a második egyenletet 8-cal:

$$\left.\begin{aligned}x+\frac{9}{y}&=6\\ x+8y&=40\end{aligned}\right\}.$$ **(1 pont)**

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:

$$8y-\frac{9}{y}=34.$$ **(1 pont)**

Szorozzuk fel y-nal, és rendezzük mint másodfokú egyenletet:

$$8y^2-34y-9=0.$$ **(1 pont)**

A másodfokú egyenlet megoldásai: $y_1=-0{,}25$ és $y_2=4{,}5$. **(1 pont)**

Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$x_1+\frac{9}{-0{,}25}=6 \quad\Rightarrow\quad x_1=42,$$ **(1 pont)**

$$x_2+\frac{9}{4{,}5}=6 \quad\Rightarrow\quad x_2=4.$$ **(1 pont)**

Az egyenletrendszer megoldásai:

$$\mathbf{x_1=42;\ y_1=-0{,}25 \quad és \quad x_2=4;\ y_2=4{,}5.}$$ **(1 pont)**

Ellenőrzés: A második egyenletbe való visszahelyettesítéssel:

$$\frac{42}{8}-0{,}25=5 \qquad és \qquad \frac{4}{8}+4{,}5=5.$$ **(1 pont)** ö 12

2 *a)* Legyen H az 1-nél nagyobb pozitív egész számok halmaza. Döntse el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Döntését indokolja! **a 3**

Az $a, b \in H$ számokra ha a nem osztója b-nek, akkor a és b relatív prím.

M: Adunk egy ellenpéldát: legyen $a = 4$ és $b = 6$. Ekkor 4 nem osztója 6-nak, de $(4; 6) = 2$. **(2 pont)**

Az állítás **hamis.** **(1 pont)**

b) Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja! **b 4**

M: A megfordított állítás:

(Az $a, b \in H$ számokra) ha a és b relatív prím, akkor a nem osztója b-nek.

(1 pont)

Ha a és b relatív prímek, akkor nincs közös prímtényezőjük. **(1 pont)**

Ha nincs közös prímtényezőjük, akkor $a > 1$ nem lehet osztója b-nek.

(1 pont)

A megfordított állítás **igaz.** **(1 pont)**

c) Határozza meg azokat az $n \in \mathbb{Z}^+$ számokat, amelyekhez létezik olyan p pozitív prím, hogy az $np + n^p$ összeg is pozitív prím! Adja meg p lehetséges értékeit is! **c 7**

M: Alakítsuk szorzattá a kifejezést:

$$n(p + n^{p-1}).$$ **(1 pont)**

Egy szorzat pontosan akkor prím, ha egyik tényezője prím, a másik 1. **(1 pont)**

$p + n^{p-1} > 1$, hiszen p pozitív prím, n pozitív egész. **(1 pont)**

Vagyis $\boldsymbol{n = 1}$. Ekkor viszont a másik tényező

$$p + n^{p-1} = p + 1.$$ **(2 pont)**

p és $p + 1$ egymás utáni prímek, tehát $\boldsymbol{p = 2}$ és $p + 1 = 3$. **(1 pont)**

Ellenőrzés: $1 \cdot 2 + 1^2 = 3$. **(1 pont)** **ö 14**

3 *a)* Hányféleképpen bonthatunk fel egy hatelemű halmazt két diszjunkt (közös elem nélküli) részhalmazra úgy, hogy mindegyik részhalmaz tartalmazzon legalább egy elemet? **a 5**

M: Egy hatelemű halmazt vagy

$$|A| = 1 \text{ és } |B| = 5, \quad \text{vagy} \quad |A| = 2 \text{ és } |B| = 4,$$
$$\text{vagy} \quad |A| = 3 \text{ és } |B| = 3$$

elemszámú közös elem nélküli A és B részhalmazokra bonthatunk. **(1 pont)**

Mindegyik esetben az eredeti hat elemből kiválasztva az A elemeit, a B elemei egyértelműen meghatározottak (vagy fordítva). **(1 pont)**

Az A elemeit rendre $\binom{6}{1}=6$, $\binom{6}{2}=15$, illetve $\binom{6}{3}=20$-féle módon választhatjuk ki. **(2 pont)**

Egy hatelemű halmaz összesen $6+15+20=$ **41-féleképpen** bontható fel két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy ezek mindegyike tartalmazzon legalább egy elemet. **(1 pont)**

Bergengóciában egy 200 km hosszú útszakaszon végig a megengedett legnagyobb sebességgel halad egy személygépkocsi. Ugyanazon az útszakaszon egy teherautó ennél a személyautónál mindig $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val lassabban közlekedik. A személyautó 15 perccel hamarabb megy végig az úton, mint a teherautó.

b) Mekkora az útszakaszon megengedett legnagyobb sebesség egész $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra kerekítve Bergengóciában? b 9

M: Jelölje az útszakaszon megengedett legnagyobb sebességet $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban v, ekkor a teherautó sebessége $v-10$ $(v>10)$. **(1 pont)**

Jelölje az útszakasz megtételéhez a személyautónak szükséges időt (órában) t, ekkor a teherautó (15 perc = 0,25 óra) $t+0{,}25$ ideig közlekedik. **(1 pont)**

Írjunk fel egyenletrendszert a két jármű adatai alapján:

$$\left.\begin{aligned} t\cdot v&=200\\ (t+0{,}25)\cdot(v-10)&=200\end{aligned}\right\}.$$ **(1 pont)**

Az első egyenletből kifejezve az időt:

$$t=\frac{200}{v}.$$ **(1 pont)**

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$\left(\frac{200}{v}+0{,}25\right)\cdot(v-10)=200.$$ **(1 pont)**

Felbontva a zárójelet, majd másodfokú alakra rendezve:

$$0{,}25v-\frac{2000}{v}-2{,}5=0,$$ **(1 pont)**

$$0{,}25v^2-2{,}5v-2000=0.$$ **(1 pont)**

A megoldóképletből: $v_1\approx-84{,}58$, $v_2\approx94{,}58$. **(1 pont)**

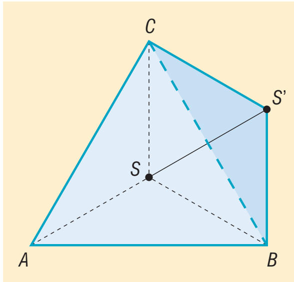
Mivel $v>10$, ezért v_1 nem megoldás.

Így a megengedett legnagyobb sebesség **95 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.** **(1 pont)** ö 14

Megjegyzés: Az egyenletrendszert megoldhatjuk úgy is, ha a 2. egyenletben felbontjuk a zárójeleket, majd kivonjuk belőle az első egyenletet. Kapjuk, hogy $0{,}25v-10t=2{,}5$. Ebből kifejezve az egyik ismeretlent és a $t\cdot v=200$ egyenletbe visszahelyettesítve megkapjuk a megoldást.

4 *a)* Az ABC szabályos háromszög S súlypontjának a BC oldalra való tükörképe S'. Bizonyítsa be, hogy a kialakult $ABS'C$ négyszög húrnégyszög! a 4

M: Tekintsük az ábrát. Bármely szabályos háromszög súlypontja, magasságpontja, körülírt és beírt körének középpontja egybeesik.



A tükrözés miatt $BS'C\sphericalangle = BSC\sphericalangle$. **(1 pont)**

Mivel S egyben a körülírt kör középpontja is, ezért az azonos íven nyugvó kerületi és középponti szögek tétele miatt:

$$BSC\sphericalangle = 2BAC\sphericalangle = 2 \cdot 60° = 120°.$$ **(1 pont)**

Így az $ABSC$ négyszög szemközti szögeinek összege

$$BAC\sphericalangle + BS'C\sphericalangle = 60° + 120° = 180°,$$ **(1 pont)**

ami alapján valóban **húrnégyszög.** **(1 pont)**

Megjegyzés: Ha a háromszög másik szögét választjuk:

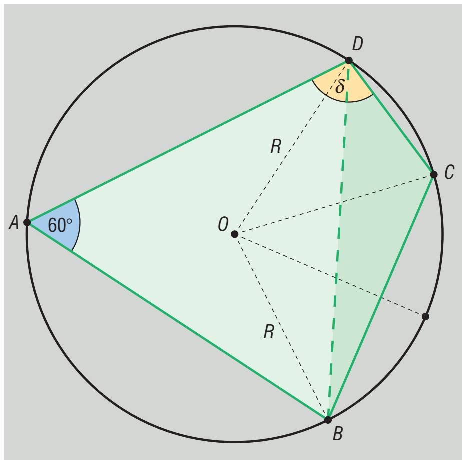
A tükrözés miatt $SCB\sphericalangle = S'CB\sphericalangle$.

S a beírt kör középpontja is, ezért $SCB\sphericalangle = \dfrac{ACB\sphericalangle}{2} = 30°$.

$ACS'\sphericalangle = ACB\sphericalangle + BCS'\sphericalangle = 90°$, ugyanígy $ABS'\sphericalangle = 90°$.

b) Egy $ABCD$ húrnégyszögben $AB = BD = DA$, a C csúcs a D-hez közelebb harmadolja az A-t nem tartalmazó BD ívet. Számítsa ki, mekkorák a négyszög szögei! b 7

M: Tekintsük az ábrát.



CO harmadolja a $BOD\sphericalangle$ szöget.

A DOC és BOC háromszögek egyenlő szárúak. **(2 pont)**

C harmadolópont, ezért az azonos íven nyugvó kerületi és középponti szögek tétele miatt:

$$DOC\sphericalangle = \frac{1}{3}DOB\sphericalangle = \frac{1}{3} \cdot 2DAB\sphericalangle =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 60° = 40°.$$ **(2 pont)**

(Ugyanígy $COB\sphericalangle = 80°$.)

A DOC háromszög egyenlő szárú, így

$$ODC\sphericalangle = \frac{180° - 40°}{2} = 70°.$$ **(1 pont)**

Ebből

$$ADC\sphericalangle = ADO\sphericalangle + ODC\sphericalangle = 30° + 70° = 100°.$$ **(1 pont)**

Mivel az $ABCD$ húrnégyszög, így $BCD\sphericalangle = 120°$ és $ABC\sphericalangle = 80°$. **(1 pont)** ö 11

II. rész

5 Egy vidám matematikus három problémával (A, B, C) foglalkozott tegnap, mind a háromhoz kis papírlapra írt különböző ötleteket, számításokat. Az A problémához egy, a B-hez kettő, a C-hez három papírdarabkát használt. A papírlapok az asztalán véletlenszerűen összekeveredtek, talán a huzat fújta őket egymásra. Most szomorúan veszi fel egymás után őket: csak akkor lesz újra vidám, ha valamelyik probléma összes jegyzetét megtalálja.

a) Az első kérdés, amihez minden jegyzetet megtalál, a B probléma. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ez pontosan a 4. húzásra sikerül neki! a 7

M: A matematikus nem húzhat A cetlit, mert a B jegyzeteit találja meg elsőnek, negyedikre viszont B-t kell kivennie. Az első három húzás során csak az egyik B és két C cetli kerülhet elő. **(1 pont)**

Az egy B és két C cetlit háromféle sorrendben húzhatja ki:

$$B–C–C, \quad C–B–C, \quad C–C–B.$$ **(1 pont)**

A két B cetli $2 \cdot 1 = 2$, **(1 pont)**

a C probléma két jegyzete $3 \cdot 2 = 6$-féle módon jöhet elő. **(1 pont)**

A kedvező esetek száma $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$. **(1 pont)**

Az összes esetek száma különböző cetlik esetén $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. **(1 pont)**

A kérdezett valószínűség:

$$\boldsymbol{P} = \frac{36}{360} = \frac{1}{10} = \mathbf{0{,}1}.$$ **(1 pont)**

b) Hányféleképpen következhet be az, hogy a matematikus pontosan a harmadik húzás után lesz újra vidám? b 9

M: Vegyük sorra az eseteket!

(1) Ha a harmadik húzásra C-t húz, akkor az első két cetlinek is C-nek kell lennie. Ezeknek a lehetséges sorrendje $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. **(1 pont)**

(2) Ha az utolsó jegyzetlap B, akkor előtte csak egy B és egy C lehet $B–C$ vagy $C–B$ sorrendben (2 lehetőség). **(1 pont)**

A két B lehetséges sorrendje $2 \cdot 1 = 2$. A C cetli 3-féle lehet. **(1 pont)**

Így ennek az összes lehetősége: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. **(1 pont)**

(3) Ha a harmadik lap A, akkor előtte egy B és egy C, vagy két C jegyzetlap lehet csak. **(1 pont)**

A két C jegyzet $3 \cdot 2 = 6$ sorrendben fordulhat elő. **(1 pont)**

Az egy B és egy C két módon követheti egymást ($B–C$ vagy $C–B$), **(1 pont)**

a B kétféle, a C háromféle lehet: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. **(1 pont)**

A (3) esetben az összes lehetőségek száma $6 + 12 = 18$.

Így az összes lehetséges sorrendek száma: $6 + 12 + 18 =$ **36.** **(1 pont)** ö 16

TARTALOMJEGYZÉK

Feladatok

Megoldások

Kiadja a Mozaik Kiadó • 6701 Szeged, Pf. 301., Telefon: (62) 470-101, (62) 554-660
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Aggod István
Terjedelem: 20,14 (A/5) ív • 2023. május • Raktári szám: MS-3175U