Schlegl István
Trembeczki Csaba

sokszínű

Matematika

Az analízis elemei

Emelt szintű tananyag

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

Schlegl István
Trembeczki Csaba

Matematika

Az analízis elemei

TANKÖNYV

11–12

EMELT SZINT

Ötödik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2018

„Ami olykor világos … és olykor homályos … valami … az a matematika.”
(Lakatos Imre, 1922–1974)

Tisztelt Olvasó!

Jelen tankönyv az emelt szinten tanuló diákoknak, illetve az őket oktató tanároknak kíván segítséget nyújtani. A *Sokszínű matematika 9–12.* tankönyvcsalád részeként igazodik az eddig megjelent könyvek felépítéséhez, filozófiájához. (Több helyen utalunk is arra, hogy az új anyag feldolgozásához szükséges előismeret melyik könyv hányadik oldalán található.)

Könyvünk – melynek feldolgozása a 11. évfolyamon kezdhető meg – sok kidolgozott példát tartalmaz, a leckék végén kitűzött feladatok megoldásával pedig az új ismereteket rögzíthetik a tanulók.

A könyvhöz feladatgyűjtemény is készült, amelyben kellő számú feladat (és azok megoldása) található az ismeretek begyakorlásához, elmélyítéséhez.

Könyvünk alapvetően az emelt szintű érettségin szükséges, és a korábbi tankönyvekben nem szereplő ismereteket: az *analízis* bevezető fejezeteit és a *valószínűség-számítás* egy-két témakörét próbálja meg összefoglalni, illetve felvillantani. Reményeink szerint az eddig megjelent számtalan kiváló könyvtől annyiban tér el, hogy – a későbbi analízistanulmányokat segítendő – jelentősebb mértékben tartalmaz a középiskolai követelményeket meghaladó tananyagot, s így átmenetet képez a tananyag középiskolai és felsőoktatásbeli tárgyalásmódja között.

Szent Ágoston parafrázisával élve: *Add meg Uram a matematika pontosságát és szakszerűségét, de most még ne egészen!*

Igyekeztünk a fogalmakat, tételeket logikai egységekben tárgyalni, így könyvünket nyugodt szívvel ajánljuk a speciális matematikai osztályokban való feldolgozásra is. A könnyebb tájékozódás érdekében a középiskolai és az azt meghaladó tananyagot színkóddal különböztetjük meg.

A definíciók és tételek jelölése

- **Zöld** alap emeli ki az emelt szinten **elsajátítandó tananyagot.** Ha a definíció vagy tétel sorszáma és neve **piros,** akkor az az érettségi követelmények között is szerepel; ha **fekete,** akkor tanórai feldolgozásra **javasoljuk.**
- **Lila** alapon szerepel minden olyan **kiegészítő** definíció és tétel, amelyek ismerete a felsőfokú tanulmányokat segíti és készíti elő.

Végül szeretnénk megköszönni mindazok munkáját, akik közreműködtek a könyv megjelenésében. Külön köszönettel tartozunk *Dr. Szalay Istvánnak,* aki sok segítő megjegyzésével hozzájárult a könyv végső formájának kialakulásához.

A könyv használóinak eredményes érettségi felkészülést és sikeres felsőfokú tanulmányokat kívánunk.

A szerzők

TARTALOMJEGYZÉK

Emlékeztető, végtelen halmazok

Sorozatok

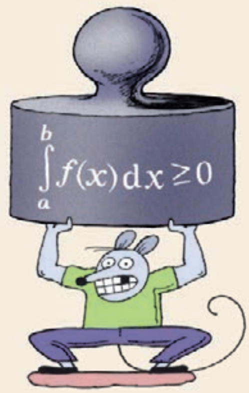
Függvények tulajdonságai

Differenciálszámítás

A differenciálszámítás alkalmazásai

Határozatlan integrál

Határozott integrál



Valószínűség-számítás

A könyvben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	az egész számok halmaza; a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a valós számok halmaza; a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$; $E \not\subset F$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak; E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\varnothing$, $\{\,\}$	üres halmaz
$\bar{A}$; $\lvert A \rvert$	az A halmaz komplementere; az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$; $]a; b[$	a, b zárt intervallum; a, b nyitott intervallum
$[a; b[$; $]a; b]$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum; a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f\colon x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$; $\{x\}$	az x szám egészrésze; az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$; $\sqrt[n]{x}$	az x szám négyzetgyöke; az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b); $[a, b]$	az a és b szám legnagyobb közös osztója; az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$; $\vec{a}$; $\vec{0}$	az A pontból B pontba mutató vektor; a vektor; nullvektor
$\sphericalangle$	szög

A könyvben szereplő, az emelt szintű érettségin szükséges új szakszavak

Emlékeztető, végtelen halmazok 1

Sorozatok 2

Függvények tulajdonságai 3

Differenciálszámítás 4

Határozatlan integrál 5

Határozott integrál 6

Valószínűségszámítás 7

5. Nevezetes sorozatok határértékei I.

Az eddig kimondott definíciók és tételek segítségével már több nevezetes sorozat határértékét meghatározhatjuk.

1. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ határértéket.

I. megoldás

A sorozat korlátos, hiszen $0 < a_n \le 1$ minden n-re. A sorozat monoton csökkenő, mivel $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ minden n-re. Korábbi 2.6. tételünk miatt a sorozat határértéke a sorozat alsó határa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

II. megoldás

A határértéket megsejtve, a 2.10/B. definíció segítségével bizonyíthatjuk azt. Számítsuk ki a sorozat pár tagját:

$$a_1 = 1; \quad a_5 = \frac{1}{5} = 0,2; \quad a_{100} = \frac{1}{100} = 0,01; \quad a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0,001.$$

A sorozat határértékét 0-nak sejtjük. Tekintsük a definícióban szereplő kifejezést; legyen ε tetszőleges kicsiny, de pozitív szám:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Nem adunk meg konkrét értéket ε-ra, hiszen általában kell teljesülnie a definíció feltételének.

Mivel n pozitív egész, ezért az abszolút érték elhagyható:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Mivel n és ε is pozitív, így a relációjel iránya szorzás és osztás közben nem módosul:

$$\frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Megtaláltuk azt az ε-tól függő $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ küszöbszámot, amelyre

$$\text{ha} \quad n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right], \quad \text{akkor} \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Megjegyzés: Mivel az $\frac{1}{n}$ sorozatnak $\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n+1}$ mind részsorozatai, így ezek is konvergensek. A részsorozatokra vonatkozó tétel szerint határértékük is megegyezik $\frac{1}{n}$ határértékével:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

2. példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ (q valós szám) határértéket.

A sorozat neve *mértani* vagy *geometriai* sorozat, q-t *kvóciensnek* hívjuk. Célszerű kiszámolni a sorozat néhány elemét különböző kvóciensek esetén.

- Ha $q=\frac{1}{2}$, akkor $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{4}$, $a_{10}=\frac{1}{1024}$, … Azt sejtjük, hogy a sorozat 0-hoz tart minden $0<q<1$ esetén.
- Ha $q=-\frac{1}{2}$, akkor $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{4}$, $a_5=-\frac{1}{32}$, … Sejtésünk az, hogy 0-hoz tart minden $0>q>-1$ esetén.
- Ha $q=1$, akkor $a_1=a_2=\ldots=1$. A sorozat konstans, 1-hez tart.
- Ha $q=0$, akkor $a_1=a_2=\ldots=0$. A konstans sorozat 0-hoz tart.
- Ha $q=-1$, akkor $a_1=a_3=a_5=\ldots=-1$, $a_2=a_4=a_6=\ldots=1$. A sorozat két értéken oszcillál, nincs határértéke.
- Ha $q=3$, akkor $a_1=3$, $a_3=27$, $a_5=243$ stb. Úgy sejtjük, hogy a sorozat $q>1$-re bármilyen nagy értéknél nagyobb értéket is felvehet.

Oszcilláló a sorozat, ha az egymást követő tagok előjele váltakozik.

Megoldás

Lássuk, sejtéseinket tudjuk-e igazolni!

- A $0<q<1$ esetben alkalmazzuk a határérték 2.10/*B*. definícióját. Legyen $\varepsilon>0$ szám. Vizsgáljuk meg az abszolút értékes kifejezést:
$$|q^n-0|<\varepsilon,$$
$$|q^n|<\varepsilon,$$
$$q^n<\varepsilon.$$
Mindkét oldal q alapú logaritmusát tekintve az egyenlőtlenség megfordul, hiszen $0<q<1$:
$$n>\log_q\varepsilon,\quad \text{így}\quad N=\left[\log_q\varepsilon\right].$$
A definíció teljesül, megtaláltuk az ε-tól függő küszöbszámot.
- Ha $-1<q<0$, akkor $q^n=(-1)^n\cdot|q|^n$. Így
$$\left|(-1)^n\cdot q^n-0\right|=\left|(-1)^n\right|\cdot\left|q^n\right|=\left|q^n\right|=|q|^n,$$
a feladatot visszavezetjük az előző feladatra.
- A $q=\pm1$, $q=0$ eseteket már megválaszoltuk.
- Ha $q>1$, akkor sejtésünk szerint a sorozat minden határon túl nő, divergens. Az ilyen típusú sorozatokat *tágabb értelemben konvergens* vagy *valódi divergens* sorozatoknak nevezzük. Új fogalmakra van szükség.
- $q<-1$-re a sorozat elemei még oszcillálnak is.

Ez a gondolkodás jellemző a matematikára. A matematikusok szeretik a feladatok megoldását egy korábban megoldott feladatra visszavezetni, ha lehetséges. (Talán lusták…)

2.12. DEFINÍCIÓ: **Az $\{a_n\}$ sorozat *végtelenbe divergál,* ha bármely $K \in \mathbb{R}$ esetén megadható olyan K-tól függő N küszöbszám, hogy valahányszor $n > N$, mindannyiszor $a_n > K$. Az $\{a_n\}$ sorozat *mínusz végtelenbe divergál,* ha bármely $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan k-tól függő N küszöbszám, hogy valahányszor $n > N$, mindannyiszor $a_n < k$.**
Jelölésük: $a_n \to \infty$, $a_n \to -\infty$.

végtelenbe divergáló sorozat
mínusz végtelenbe divergáló sorozat

Meg kell jegyeznünk, hogy a végtelen fogalmát nem definiáltuk, csak azt, hogy egy sorozat végtelenbe divergál.

A híres argentin író, Borges, a végtelent a gonosszal hozza összefüggésbe.

Alkalmazzuk a fenti definíciót $q > 1$ geometriai sorozatra:

$$q^n > K, \qquad \text{amiből} \qquad n > \log_q K,$$

így

$$N = \left[\log_q K\right].$$

Amennyiben $n > N$, akkor $a_n > K$: a definíció szerint $q > 1$-re a mértani sorozat valódi divergens.

Az $\{a_n\} = q^n$ mértani sorozatot minden kvóciens esetén megvizsgáltuk. Ha $0 \le |q| < 1$, a sorozat konvergál 0-hoz. Ha $q = 1$, a sorozat konvergál 1-hez. Ha $q > 1$, a sorozat valódi divergens. Minden más esetben a sorozat divergens.

Következő sorozatunk nagyon híres.

3. példa
Határozzuk meg az $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértékét.

Megoldás

Ennek a sorozatnak elég nehéz megsejteni a határértékét.

Ha „csak” annyit akarunk igazolni, hogy a sorozat konvergens, akkor a 2.4. tételt használhatjuk: monoton és korlátos sorozat konvergens. Ekkor bizonyítanunk kell külön-külön a monoton növekedést és a korlátosságot, tetszés szerinti sorrendben. Először a monoton növekedést szokták bizonyítani, mert akkor a sorozat első tagja egyben alsó korlát (alsó határ) is. A bizonyításoknál alapvetően háromféle módszert szoktak alkalmazni.

Számítsuk ki az 1., 10., 100., 1000. stb. tagokat! A sorozat konvergensnek tűnik, de vajon tényleg az?

1. A számtani-mértani egyenlőtlenséggel igazolhatjuk mindkét tulajdonságot.
2. A Newton-féle binomiális tétellel egy jobb korlátot igazolhatunk.
3. A Bernoulli-féle egyenlőtlenséggel ismét mindkét tulajdonság belátható.

A binomiális tétel és bizonyítása a 11.-es tankönyv 28–29. oldalán található.

Megjegyzés: Mivel ismereteink még hiányosak a binomiális tétellel való bizonyítás megértéséhez, később térünk vissza rá. A Bernoulli-féle egyenlőtlenséget alkalmazó igazolás megtalálható a szakkönyvekben.

A trükk amilyen egyszerűnek tűnik, legalább annyira nehéz, érdemes jól megfigyelni. A korlátosságnál is alkalmazzuk.

Transzcendens az a szám, amely nem írható fel egész együtthatós egyenlet gyökeként.

Bizonyítás a számtani-mértani közép alkalmazásával

A szigorú monoton növekedéshez igazolnunk kell, hogy minden n-re

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Induljunk ki az $n+1$ tagra alkalmazott mértani-számtani közepek közötti egyenlőtlenségből:

$$\sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ tényező}}\cdot 1} < \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Ha most a sor elejét és végét $(n+1)$-edik hatványra emeljük, akkor éppen a keresett egyenlőtlenséget kapjuk.

Megjegyzés: A közepek közti egyenlőség azért nem áll fenn, mert a tagok biztosan nem egyenlőek.

A sorozat korlátosságát ugyanazzal az egyenlőtlenséggel és hasonló trükkel bizonyíthatjuk, de most vegyünk $n+2$ tagot:

$$\sqrt[n+2]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ tényező}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} < \frac{2\cdot\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2} = 1.$$

Emeljük a sor elejét és végét $(n+2)$-edik hatványra, majd szorozzuk meg 4-gyel mindkettőt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

A sorozat minden tagja kisebb 4-nél, amiről belátható, hogy nem felső határ (tehát nem is határérték). Annyit azonban elértünk a gondolatmenettel, hogy igazoltuk: a sorozat korlátos és monoton, tehát konvergens. Sőt: azt is tudjuk, hogy a határérték 2 és 4 közé esik.

Sajnos a sorozat pontos határértékét a bizonyítás nem adja meg. Be lehet bizonyítani, hogy ez a szám irracionális, sőt, hasonlóan a π-hez, transzcendens is.

Magát a sorozatot a nagy matematikus tiszteletére Euler-féle sorozatnak, határértékét pedig Euler-féle számnak is nevezzük, és e-vel jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828182845904523536028747135 27\ldots$$

Megjegyzés: A számológépeken általában két különböző logaritmust tudunk számolni: lg vagy log a 10-es alapú logaritmust jelenti, az ln pedig az imént látott Euler-féle számalapú logaritmust.

4. Műveletek függvényekkel, összetett függvény

Ha összeadtunk, kivontunk stb. konvergens számsorozatokat, akkor azok összege, különbsége stb. a határértékek összegéhez, különbségéhez stb. konvergált. Mit tudunk mondani a függvényekről? Ahhoz, hogy a megismert függvényhatárértékekkel műveleteket tudjunk végezni, előbb értelmeznünk kell, mit értünk két függvény összegén, különbségén stb.

alapműveletek függvényekkel

3.7. Definíció: Az f és g függvények *összegén, különbségén, szorzatán, hányadosán* értjük azt az $F(x)$ függvényt, amely minden $x_0 \in D_f \cap D_g$ esetén

- $F(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$,
- $F(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$,
- $F(x_0) = f(x_0) \cdot g(x_0)$,
- $F(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$

(D_g-t le kell szűkítenünk $g(x_0) \neq 0$ helyekre).

$F(x)$ csak ott van értelmezve, ahol mindkét függvény egyszerre értelmezve van.

A szokványos műveletek mellett függvényekkel egy új műveletet is elvégezhetünk: több ismert függvény egymás utáni ismételt alkalmazását.

1. példa

Határozzuk meg az $f(x) = \lg(\sin x)$ függvény $x = \dfrac{\pi}{2}$ helyen felvett értékét.

Vizsgáljuk és adjuk meg értelmezési tartományát.

Megoldás

A képlet szerint először a belső függvény (szinusz) értékét kell meghatároznunk: $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$. Ezek szerint a zárójelben álló érték 1, aminek vennünk kell a 10-es alapú logaritmusát: $\lg(1) = 0$. Tehát a függvény értéke a megadott helyen:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lg\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = \lg(1) = 0.$$

Nézzük általánosan! Milyen számokat írhatunk x helyére? Bármit biztosan nem, hiszen pl. $x = \dfrac{3\pi}{2}$ esetén $\sin x = -1$, de $\lg(-1)$ nincs értelmezve.

A belső szinuszfüggvény mindenhol értelmezve van, értékkészlete a $[-1; 1]$-ba eső számokat tartalmazza.

A külső logaritmusfüggvény csak a pozitív számokon van értelmezve.

Tehát a belső függvény értelmezési tartományának csak azon részét vehetjük a közös $f(x)$ értelmezési tartományának, ahol $\sin x$ értékei a $]0;\,1]$ intervallum elemei. Vagyis

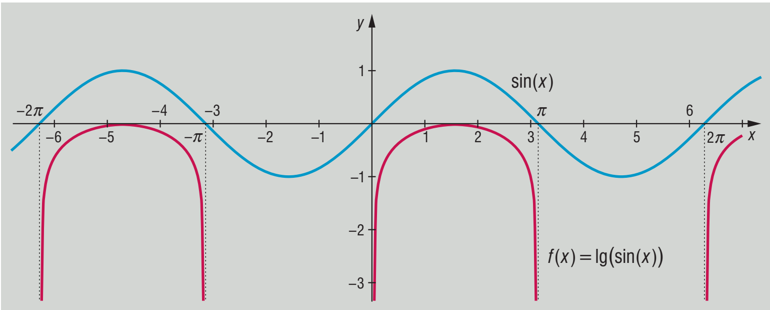
$$D_f =]0 + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi[.$$

Megjegyzés: A függvény értékkészletét nem kérdeztük, de a 3.4/*A*. definíció segítségével már meg is határozhatjuk. Ugyanis ha $x_n \to 0,\ x_n > 0,$ akkor

$$\sin x_n \to 0 \quad \text{és} \quad f(x) = \lg(\sin x_n) \to -\infty.$$

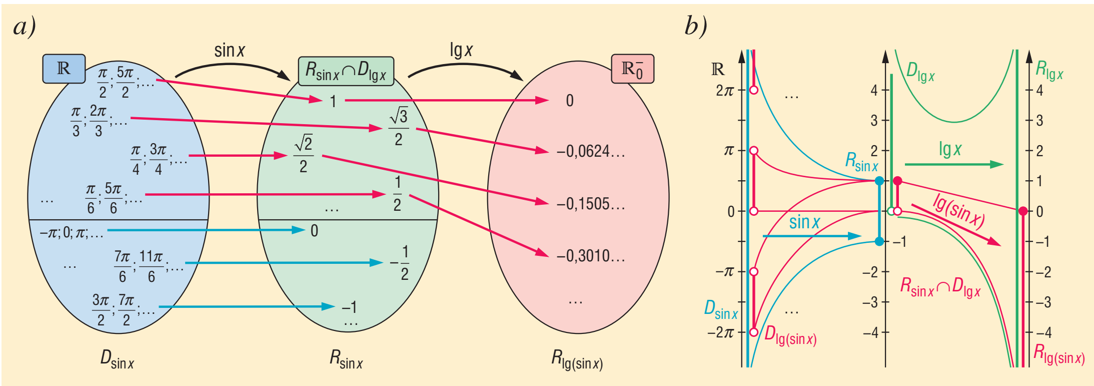
Tehát $R_f = \mathbb{R}_0^-$.

Ábrázoljuk egy rendszerben a belső függvényt és az összetett függvényt! ***(11. ábra)***



11. ábra

Emlékezzünk vissza, 9. évfolyamon Venn-diagrammal is ábrázoltuk a függvényeket. Az összetett $f(x)$ függvény-hozzárendelésben csak a pirossal jelölt kapcsolatok vesznek részt. ***(12/a. ábra)***



12. ábra

Most lássuk ugyanezt számegyeneseken! Kékkel jelöltük az $y = \sin x$ belső, zölddel az $y = \lg x$ külső függvényt. Piros szín jelzi egy szám útját, míg „feldolgozza” az $y = \lg(\sin x)$ összetett függvény ***(12/b. ábra)***. Vessük össze ezt az ábrát a függvény ábrájával!

A példával közelebb kerültünk az összetett függvény meghatározásához.

összetett függvény

3.8. Definíció: **Az $f(x)$ és $g(x)$ függvényből képezett $F(x)=f(g(x))$ *összetett függvényen* azt a függvényt értjük, amelynek**

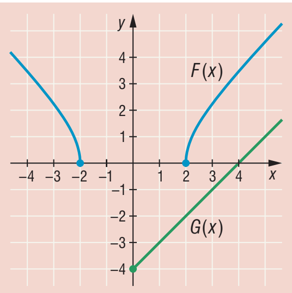
- **értelmezési tartománya $g(x)$ értelmezési tartományának azon részhalmaza, melynek elemein $g(x)$ olyan értékeket vesz fel, amelyekre $f(x)$ értelmezve van: $D_F = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \subseteq D_g$;**
- **hozzárendelési szabálya: $x_0 \in D_F$ pontban azt az értéket veszi fel, amelyet $f(x)$ a $g(x_0)$ pontban.**

Kívül-belül függvény!

Megjegyzések: Szokták az összetett függvényt $f \circ g(x)$-szel (olvasd: f karika g x) is jelölni. A fenti $f(x)$ függvényt külső, a $g(x)$-et belső függvénynek nevezzük.

2. példa

Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x}$ és $g(x)=x^2-4$ függvényekből képezett $F(x)=f(g(x))$ és $G(x)=g(f(x))$ összetett függvények értelmezési tartományát és értékkészletét. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát is.



13. ábra

Megoldás

Első lépésben foglalkozzunk $F(x)$-szel. $D_g = \mathbb{R}$, $R_g = [-4; \infty[$. Mivel $D_f = [0; \infty[$, ezért $R_g \cap D_f = [0; \infty[$. Ezen az intervallumon a számok négyzetgyöke nemnegatív, így $R_F = [0; \infty[$. F értelmezési tartományához azt kell kitalálnunk, milyen számokra teljesül, hogy $g(x) \ge 0$:

$$x^2-4 \ge 0, \quad x^2 \ge 4, \quad |x| \ge 2.$$

Vagyis $D_F = \mathbb{R} \setminus]-2; 2[$. A hozzárendelési szabály: $F(x)=\sqrt{x^2-4}$.

$G(x)$ esetén $f(x)$ a belső függvény, $D_f = R_f = [0; \infty[$. Mivel $D_g = \mathbb{R}$, ezért $R_f \cap D_g = [0; \infty[$. Az intervallum elemeit $f(x)$ a teljes értelmezési tartományán felveszi, tehát $D_G = [0; \infty[$. Mivel $D_g = \mathbb{R}$, g páros és $R_g = [-4; \infty[$, ezért $R_G = [-4; \infty[$. Így a szabály: $G(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 4$.

$G(x) = x - 4$, ha kikötjük, hogy $D_G = [0; \infty[$.

◆ ◆ ◆

Ismerve a függvényműveleteket, mondjuk ki a határértékekkel végzett műveletekre vonatkozó (a sorozatoknál látotthoz nagyon hasonló) tételt.

műveletek függvény-határértékekkel

3.3. Tétel: **Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek az x_0 pontban van határértéke, akkor a két függvény összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának is van határértéke ebben a pontban, és ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ $(x \ne x_0)$, akkor**

(1) $$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B,$$

(2) $$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B,$$

(3) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ ahol } B \ne 0.$$

Bizonyítás (2)

Példaként a szorzatot igazoljuk, a bizonyításhoz a Heine-féle definíciót használjuk. Ha $x_n \to x_0$ és $x_n \to x_0$ minden n-re, a 3.4/A. definíció és a tétel feltételei miatt $f(x_n)$ és $g(x_n)$ függvénysorozat A-hoz, illetve B-hez tart. Így a konvergens sorozatokra vonatkozó 2.9-es tétel értelmében pl. $f(x_n)\cdot g(x_n) \to A \cdot B$. A Heine-féle értelmezés miatt ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \to x_0} f \cdot g = A \cdot B.$$

A tétel többi állítását ugyanígy bizonyíthatjuk.

Megjegyzés: A tétel kimondásánál nem bajlódtunk azzal, hogy a függvények értelmezve legyenek x_0 pont valamely környezetében (kivéve esetleg a pontot magát), ugyanis a feltétel szerint ott *van határértékük, és a határérték definíciója ezt biztosítja.*

Feladatok

1. Készítsük el a függvényekből az összes lehetséges $F(x) = f(g(x))$ összetett függvényt. Adjuk meg mind a hat összetett függvény értelmezési tartományát, értékkészletét. A függvények:

$$y = \cos x, \qquad y = \sqrt{x}, \qquad y = x - \pi.$$

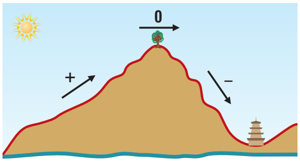
2. Igazoljuk a 3.3-as tétel összegre, különbségre és hányadosra vonatkozó részét.

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

6. Középértéktételek (kiegészítő anyag)

Az előzőekben megismertünk egy új matematikai műveletet, a deriválást. Lényegüljünk át ismét Bothitharmává, és kezdjünk el elmélkedni, mire használható ez az új ismeret.

„Ha felfelé megyek a hegyen és szemem sugarát a hegy csúcsára vetem, akkor tekintetem egyenese mindig emelkedik. Ha lefelé megyek a hegyen és lenézek a völgyben lévő pagoda csúcsára, akkor tekintetem egyenese mindig ereszkedik. Ha a csúcson állva a látóhatárt fürkészem, akkor tekintetem egyenese párhuzamosan mutatja a végtelent a patakkal.”



8. ábra

Matematikai konyhanyelvre lefordítva ez azt jelenti, hogy a növekvő függvény érintőjének meredeksége pozitív, a csökkenő függvény érintőjének meredeksége negatív, illetve ha megállunk a „hegy csúcsán”, azaz a függvény helyi maximumánál, akkor az érintő meredeksége éppen zérus ***(8. ábra)***. A függvények menetét jellemezhetjük az érintő meredekségével, amit viszont a derivált ad meg. A pontos megfogalmazáshoz szükségünk van további tételekre.

Először vizsgáljuk a hegy csúcsán húzott érintőt.

Rolle tétele

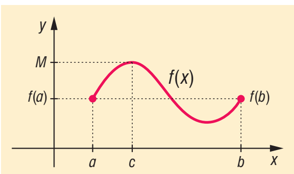
Michel Rolle (1652–1719), francia matematikus.

4.12. Rolle tétele: Legyen az $f(x)$ folytonos az $[a; b]$ zárt intervallumon, differenciálható az $]a; b[$ nyitott intervallumon, továbbá $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $c \in \,]a; b[$ pont, amelyre $f'(c) = 0$.

Megjegyzések: Azzal, hogy zárt intervallumon követeljük meg a folytonosságot, biztosítjuk, hogy $f(a)$ és $f(b)$ véges valós értékek legyenek.

Bizonyítás

A 3.7-es Weierstrass-tétel miatt zárt intervallumon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit. Jelölje M az $f(x)$ maximumát és m a minimumát.



9. ábra

Ha $M \neq m$, akkor ezek közül legalább az egyik különbözik $f(a) = f(b)$-től, ezt az értéket $f(x)$ az $]a; b[$ nyitott intervallum belsejében veszi fel. Tegyük fel, hogy $M \neq f(a) = f(b)$ és $a < c < b$ olyan pont, amire $f(c) = M$. ***(9. ábra)***

Írjuk fel c-ben a bal és jobb oldali differenciálhányadosokat! Közelítse (de ne érje el) x^- alulról, x^+ felülről c-t úgy, hogy $x^-, x^+ \in \,]a; b[$. Mivel a számláló és a nevező is negatív, minden bal oldali differenciahányadosra $\dfrac{f(x^-) - f(c)}{x^- - c} \geq 0$. A jobb oldali differenciahányadosok számlálója negatív, nevezője pozitív, ezért mindre $\dfrac{f(x^+) - f(c)}{x^+ - c} \leq 0$.

Ebből következik határértékeikre, hogy a bal oldali differenciálhányados nemnegatív, a jobb oldali pedig nem pozitív. Ám a feltétel szerint mindenhol, így $c \in \left]a; b\right[$ pontban is létezik a függvény differenciálhányadosa! Ez csak úgy teljesülhet, ha $f'(c^-) = f'(c^+) = 0$.

Ha $M = m$, akkor $f(x)$ konstans $[a; b]$-on. Mivel konstans függvény deriváltja 0, ezért minden $c \in \left]a; b\right[$-re $f'(c) = 0$.

◆ ◆ ◆

A következő tétel bizonyítását Rolle tételének igazolásából kiolvashatjuk.

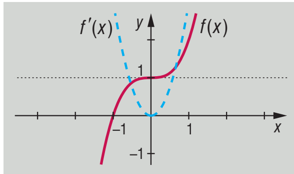
Pierre de Fermat (1601–1665), francia jogász (!), harmadfokú függvények vizsgálatakor jött rá erre az eredményre.

Fermat tétele

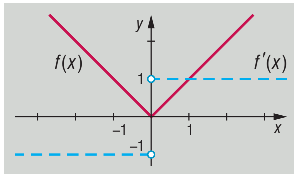
4.13. Fermat tétele: Legyen az $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban helyi szélsőértéke, és legyen $f(x)$ differenciálható x_0-ban. Ekkor $f'(x_0) = 0$.

Megjegyzések:

1. Az értelmezési tartomány azon pontjait, ahol $f(x)$ differenciálható és differenciálhányadosa 0, *stacionárius* pontoknak nevezzük.
2. A tétel csak szükséges feltétele az x_0-beli szélsőértéknek. Pl. az $f(x) = x^3 + 1$ függvény $x_0 = 0$ pontbeli $f'(x) = 3x^2$ első differenciálhányadosa 0, ám a függvénynek ebben a pontban nincs szélsőértéke. ***(10. ábra)***
3. Az $f(x) = |x|$ függvény az $x = 0$ hely kivételével minden pontban differenciálható, de éppen ebben a pontban van a függvénynek minimuma. *Attól, hogy egy függvény valahol nem differenciálható, még lehet szélsőértéke.* ***(11. ábra)***



10. ábra



11. ábra

Általánosítsuk Rolle tételét!

Cauchy tétele

Augustin Louis Cauchy (1789–1857), francia matematikus.

4.14. Cauchy tétele: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények folytonosak $[a; b]$-on, differenciálhatóak $\left]a; b\right[$-on és bármely $x \in \left]a; b\right[$-re $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $c \in \left]a; b\right[$, amelyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bizonyítás

Rolle tételéből következik, hogy $g(a) \neq g(b)$, vagyis $g(x)$ az a és b pontokban más értéket vesz fel. (Mert ha $g(a) = g(b)$, akkor lenne olyan $c \in \left]a; b\right[$, hogy $g'(c) = 0$, de ezt kizártuk.) A tételt visszavezetjük Rolle tételére: előállítunk egy olyan $h(x)$ függvényt, amelyre teljesülnek a Rolle-tétel feltételei.

Legyen $h(x) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$, ahol λ egy meghatározandó konstans. (Nyilván a tétel feltételeiben adott intervallumokon a $h(x)$ függvény folytonos és differenciálható, hiszen két ilyen típusú függvény összege és konstansszorosa is az.) A konstanst úgy adjuk meg, hogy teljesüljenek a 4.12-es tétel feltételei: követeljük meg, hogy

$$h(a) = f(a) + \lambda \cdot g(a), \quad h(b) = f(b) + \lambda \cdot g(b) \quad \text{és} \quad h(a) = h(b).$$

A λ konstanst Lagrange-féle multiplikátornak (szorzótényezőnek) szokták nevezni.

Ekkor utóbbit felírva és átalakítva kifejezhető a keresett konstans:

$$f(a)+\lambda\cdot g(a)=f(b)+\lambda\cdot g(b),$$

$$f(a)-f(b)=\lambda\cdot g(b)-\lambda\cdot g(a),$$

$$-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\lambda.$$

Így a következő függvényre teljesül Rolle tétele:

$$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(x).$$

Ez kimondja, hogy van olyan $c\in\,]a;b[$, hogy $h'(c)=0$. Induljunk ki most ez utóbbiból:

$$0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c).$$

Rendezve kapjuk a tétel állítását.

Ha most Cauchy tételében $g(x)=x$-et helyettesítünk, akkor $g'(x)=1$, $g(a)=a$ és $g(b)=b$. Így előző tételünk egy híres, sokat használt következményét vezettük le.

Lagrange tétele

4.15. LAGRANGE TÉTELE: Ha az $f(x)$ folytonos $[a;b]$ intervallumon és differenciálható $]a;b[$-on, akkor létezik olyan $c\in\,]a;b[$, amelyre

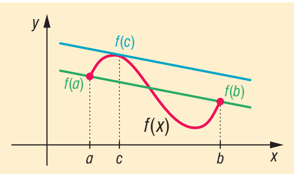
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813), olasz születésű francia matematikus.

Megjegyzések:

1. Ha a Lagrange-tétel feltételei mellett $f(a)=f(b)$, akkor $f'(c)=0$, tehát a Rolle-tétel a Lagrange-tétel egy speciális esete. A Lagrange-tétel a Cauchy-tétel egy speciális esete. Viszont Cauchy tételét a Rolle-tétel segítségével bizonyítottuk. Úgy *tűnik,* hogy a cica megfogja a saját farkát.
2. Hogy még csavarjunk egyet a dolgon: a Lagrange-tétel segítségével is igazolható Cauchy tétele. (Gyakorlatilag bármelyikből kiindulva igazolhatjuk láncszerűen a többit.)
3. A Lagrange-tétel geometriai jelentése: az $]a;b[$ intervallumban van olyan c pont, amelyre a $(c;f(c))$ pontban húzott érintő párhuzamos az $(a;f(a))$, $(b;f(b))$ pontokon átmenő szelővel. *(12. ábra)*
4. Rolle, Cauchy és Lagrange tétele „csak” *egzisztenciatétel.* Egy adott tulajdonságokkal rendelkező pont létezését állítják, azonban sem a pontok számáról, sem helyéről nem adnak felvilágosítást.

A megoldás: tételeinket önállóan is, a másik nélkül igazolhatjuk.



12. ábra

A Lagrange-tétel alábbi folyományát később, az ötödik fejezetben (integrálszámítás) használjuk ki.

4.16. tétel

4.16. TÉTEL: Ha az $f(x)$ függvény folytonos $[a;b]$-on, differenciálható $]a;b[$-on és utóbbi pontokban $f'(x)=0$, akkor az $f(x)$ függvény konstans az $[a;b]$-on.

Bizonyítás

A feltételek mellett a Lagrange-tétel bármely $[a; x]$-ra teljesül, ahol $x \in \,]a; b[$. Így

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Mivel $f'(c) = 0$, ezért a számlálóban levő $f(x) - f(a) = 0$, tehát $f(x) = f(a)$.

◆ ◆ ◆

Tételünkből következik az *integrálszámítás alaptétele* (később világossá válik, miért hívjuk így):

az integrálszámítás alaptétele

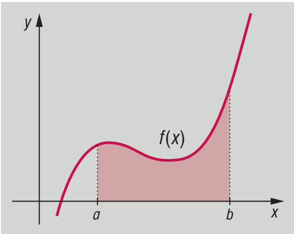
> **4.17. Tétel:** **Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvény folytonos $[a; b]$-on, differenciálható $]a; b[$-on és $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in \,]a; b[$-ra, akkor van olyan c konstans, hogy $g(x) = f(x) + c$ minden $x \in [a; b]$-ra.**

Bizonyítás

Mivel $f'(x) = g'(x)$, így $g'(x) - f'(x) = 0$. A különbség differenciálási szabálya miatt $[g(x) - f(x)]' = 0$, így a 4.16-os tétel alapján $g(x) - f(x) = c$, ezért $g(x) = f(x) + c$.

HATÁROZOTT INTEGRÁL

1. A határozott integrál fogalmának előkészítése



1. ábra

Jelen fejezetben az ún. határozott integrállal foglalkozunk. Általában minden bevezető jellegű analíziskönyv ezt egy $f(x)$ korlátos vagy folytonos függvény, az $x = a$, $x = b$ egyenesek és az x tengely által határolt síkidom területének meghatározásával kezdi. Elegendő feltenni az $f(x)$ függvény $[a; b]$-on való korlátosságát. A folytonosság zárt intervallumon szigorúbb, mint a korlátosság, mivel a 3.6. tétel miatt bármely zárt intervallumon folytonos függvény korlátos. Az ilyen területmeghatározást az $f(x)$ függvénygörbe alatti terület meghatározásának is szokták nevezni. ***(1. ábra)***

Arkhimédész „kimerítésnek” nevezte eljárását.

A könyvek zöme előhozakodik azzal a vitathatatlan ténnyel, hogy „már a régi görögök is” foglalkoztak nem egyenes szakaszokkal határolt síkidomok területének meghatározásával (elsősorban Eudoxoszt és Arkhimédészt szokták említeni). Arkhimédész eljárása a következő volt: az ismeretlen területű síkidomot lefedte téglalapokkal (körülírt téglalapok), és az idom belsejébe is téglalapokat rajzolt (beírt téglalapok). Ha az egyre kisebb oldalhosszúságú beírt és körülírt téglalapok összegei – külön összegezte a körülírt és a beírt téglalapok területeit – ugyanahhoz a számhoz tartottak, akkor ezt a számot nevezte a síkidom területének.

Tudománytörténeti „kitérő”: A közelmúlt matematikusai előszeretettel merítettek – mai szóhasználattal élve *loptak* – ötleteket az ókori matematikusok műveiből. Igazi „arcátlanságként” még meg is magyarázták azzal, hogy Eudoxoszék ráértek az agórán a porba rajzolgatni, hiszen ez idő alatt dolgoztak helyettük a rabszolgák. Egyes tudománykutatók a matematika XX. századi robbanásszerű fejlődését a mosogatógép és a porszívó megjelenésével magyarázzák. Ezek segítségével a szegény papucsférj matematikusok által legalább a házimunkák elvégzésére fordított idő rövidült.

Mi ugyan támaszkodunk a fenti módszer előnyeire, de nem így járunk el – két ok miatt. Egyrészt a határozott integrál jóval több területek meghatározásánál, ez csak egy speciális esete. Másrészt kérdés, hogy létezik-e egyáltalán az $f(x)$ görbe alatti terület? Megmaradnak-e a terület sokszögeknél vizsgált tulajdonságai? Ezek közül a tulajdonságok közül a területes bevezetési mód kihasználja, hogy ha A és B két egymást nem fedő halmaz ($A \cap B = \varnothing$) és területeik T_A és T_B, akkor $A \cup B$ területére fennáll, hogy $T_{A \cup B} = T_A + T_B$. Az additív tulajdonság nagyon fontos a területes bevezetési módnál használt bizonyításokban. A probléma bonyolultságát jelzi, hogy csak a XX. század közepén sikerült igazolni az additív tulajdonságot Stefan Banachnak. Pontosabban azt, hogy a sokszögekre használt területfogalom általánosítható úgy, hogy a sík minden halmazának legyen területe és érvényben maradjon például a fenti tulajdonság is. Ugyanez a térben már nem igaz (Hausdorff igazolta 1914-ben). Nem létezik a térfogat fogalmának olyan kiterjesztése, hogy minden háromdimenziós halmaznak

12.-es könyv 82. oldal

Felix Hausdorff (1868–1942) német, Stefan Banach (1892–1945) lengyel matematikus.

legyen térfogata és érvényben maradjon az additív tulajdonság ($V_{A \cup B} \neq V_A + V_B$ sok esetben). Például egy egységgömböt szét lehet vágni véges sok darabra úgy, hogy ezeket külön-külön elmozgatva a térben, két egységgömböt kapjunk (Banach–Tarski-paradoxon, 1924).

ALFRED TARSKI (1901–1983), lengyel matematikus.

A következőkben a határozott integrálok közül mi a legegyszerűbbet vezetjük be. Ebben az esetben mindig olyan $f(x)$ függvényre kell gondolnunk, amely egy $[a; b]$ minden pontjában értelmezve van és korlátos. Jelekkel:

$$|f(x)| \leq K \in \mathbb{R} \quad \text{minden } x \in [a; b]\text{-ra.}$$

Komolyabb elméletek a korlátosságot sem követelik meg, ezt a határozott integrál szükséges feltételeként bizonyítják.

6.1. DEFINÍCIÓ: Az $[a; b]$-ot n részintervallumra osztjuk olyan $(n+1)$ elemet tartalmazó $F_n = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ ponthalmazzal, amelynek elemeire fennáll, hogy $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Ekkor F_n-t az $[a; b]$ *felosztásának*, $[x_{i-1}; x_i]$-ot i-edik *részintervallumnak*, az x_i pontot pedig i-edik *osztáspontnak* ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) nevezzük. *(2. ábra)*

felosztás, részintervallum, osztáspont

2. ábra

Vegyük észre, hogy egy intervallumot három ponttal két részre osztunk (a végpontokat is beleértve). A továbbiakban az i index mindig az 1, 2, 3, …, n egész számokon fut végig. Ha nem, azt külön jelöljük.

6.2. DEFINÍCIÓ: Az F_n felosztás maximális hosszúságú részintervallumának hosszát a felosztás *finomságának* nevezzük. Jelekkel ($1 \leq i \leq n$):

$$\max\left[d(x_{i-1}; x_i)\right] = \max(x_i - x_{i-1}) = \Delta.$$

a felosztás finomsága

Az $[a; b]$ intervallum egy F_n felosztása finomabb F'_m felosztásánál, ha $\Delta < \Delta'$.

6.3. DEFINÍCIÓ: Egy intervallum felosztásainak $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ sorozatát *minden határon túl finomodónak* mondjuk, ha a hozzájuk tartozó $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ finomságok sorozata 0-hoz tart:

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_n = 0.$$

minden határon túl finomodó felosztás

A 6.3-as definíció azt jelenti, hogy a leghosszabb részintervallum hossza is nullához tart. Gondoljuk meg: ez attól még nem következik be, ha az osztópontok száma végtelenhez tart, hiszen lehet, hogy az osztópontok az intervallum egyik felében torlódnak. Egy *felosztás finomításán* általában azt értjük, hogy az adott felosztás meglévő osztáspontjaihoz új osztópontokat veszünk.

A korlátosság azt jelenti, hogy minden $[x_{i-1}; x_i]$ részintervallumban létezik a függvényértékeknek alsó és felső határa.

alsó összeg, felső összeg

6.4. DEFINÍCIÓ: **Legyen az $f(x)$ az $[a; b]$-on értelmezett korlátos függvény és $m_i = \inf[f(x)]$ az alsó, $M_i = \sup[f(x)]$ a felső határa, ha $x \in [x_{i-1}; x_i]$. Az $[a; b]$ intervallum F_n felosztásához tartozó**

$$s_n = m_1 \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + \ldots + m_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget *alsó összegnek,* a

$$S_n = M_1 \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + \ldots + M_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget *felső összegnek* nevezzük.

JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917), francia matematikus.

Megjegyzés: A szakirodalomban ezeket Darboux-féle alsó és felső közelítő összegnek is nevezik.

Riemann-összeg

6.5. DEFINÍCIÓ: **Ha az $f(x)$ függvény az $[a; b]$-on mindenhol értelmezve van és az F_n felosztás minden $[x_{i-1}; x_i]$ részintervallumából kiválasztunk egy tetszőleges c_i pontot, akkor az**

$$I_n = f(c_1) \cdot (x_1 - x_0) + \ldots + f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \ldots + f(c_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget az F_n felosztáshoz és c_i pontokhoz tartozó *Riemann-összegnek* nevezzük.

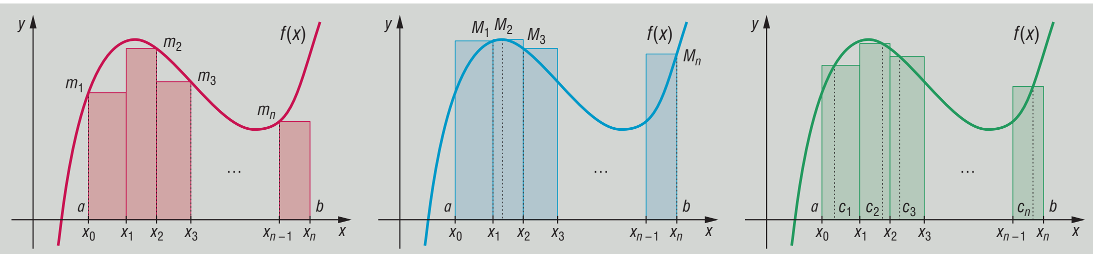
BERNHARD RIEMANN (1826–1966), német matematikus.

Megjegyzés: Még komolyabb elméletek azt sem követelik meg, hogy az $f(x)$ függvény az $[a; b]$ minden pontjában értelmezve legyen. Pontosabban megengedik, hogy véges sok pontban ne legyen a függvény értelmezve. Ha valamelyik c_i pontban a függvény nincs értelmezve, akkor $f(c_i)$-nek egy tetszőleges valós számot nevezünk meg.

Az előbb bevezetett összegeknek szemléletes geometriai jelentése van. A 3. ábrán az $[a; b]$ intervallum ugyanazon felosztását látjuk:

$$F_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}.$$

3. ábra



Az ábra bal oldalán a függvény menetéből adódóan:

$$\begin{array}{ll} [x_0; x_1]\text{-on} & m_1 = f(x_0), \\ [x_1; x_2]\text{-on} & m_2 = f(x_2), \\ [x_2; x_3]\text{-on} & m_3 = f(x_3), \\ \ldots, & \\ [x_{n-1}; x_n]\text{-on} & m_n = f(x_{n-1}). \end{array}$$

Az s_n alsó összeg nem más, mint a jelzett és beírt piros téglalapok területeinek összege.

Az ábra középső részén a függvény menetéből adódóan:

$$\begin{array}{ll} [x_0; x_1]\text{-on} & M_1 = f(x_1), \\ [x_1; x_2]\text{-on} & M_2 = f(x^*), \text{ ahol } x_1 < x^* < x_2, \\ [x_2; x_3]\text{-on} & M_3 = f(x_2), \\ \ldots, & \\ [x_{n-1}; x_n]\text{-on} & M_n = f(x_n). \end{array}$$

Az S_n felső összeg nem más, mint a körülírt kék téglalapok területeinek összege.

Az ábra jobb oldalán a részintervallumokon tetszőlegesen választott

$$\begin{array}{ll} c_1 \in [x_0; x_1]\text{-ra} & f(c_1), \\ c_2 \in [x_1; x_2]\text{-ra} & f(c_2), \\ c_3 \in [x_2; x_3]\text{-ra} & f(c_3), \\ \ldots, & \\ c_n \in [x_{n-1}; x_n]\text{-ra} & f(c_\mathrm{n}) \end{array}$$

magas zöld téglalapokat kapunk. Az I_n Riemann-összeg a zöld téglalapok területeinek összege.

Megjegyzés: Ábráinkon picit csaltunk, a vizsgált függvény folytonos. A definíciókban azonban csak a korlátosságot követeljük meg. (Gondoljunk a bevezetőre.)