Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

sokszínű

Matematika

10

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

Matematika

tankönyv

10

Tizenötödik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2018

Gondolkodási módszerek

A gyökvonás

A másodfokú egyenlet

Geometria

A körrel kapcsolatos ismeretek bővítése

A hasonlósági transzformáció és alkalmazásai

Szögfüggvények

Valószínűség-számítás

Útmutató a tankönyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában.

- A kidolgozott példák gondolatmenete mintát ad a módszerek, eljárások megértéséhez és a további feladatok megoldásához.
- A legfontosabb definíciókat és tételeket színes kiemelés jelzi.
- A tananyag apró betűvel szedett részei és a bordó színnel megjelölt kidolgozott mintapéldák a mélyebb megértést segítik. Ezek az ismeretek szükségesek az emelt szintű érettségihez.
- A margón ábrák, az adott lecke főbb vázlatpontjai, ismétlő, magyarázó részek, valamint matematikatörténeti érdekességek találhatók.

A mintapéldák és a kitűzött feladatok nehézségét három különböző színnel jelöltük:

Sárga: elemi szintű gyakorló feladatok, amelyek megoldása, begyakorlása nélkülözhetetlen a továbbhaladáshoz.
Kék: a középszintű érettséginek megfelelő színvonalú feladatok.
Bordó: az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, feladatok.

Ezek a színkódok megfelelnek a Mozaik Kiadó Sokszínű matematika feladatgyűjteményeiben alkalmazott jelöléseknek. A feladatgyűjtemény-sorozat több mint 3000, a gyakorláshoz, az órai munkához és az érettségi felkészüléshez is alkalmas feladatot tartalmaz.

A kitűzött feladatok végeredményei megtalálhatók a *www.mozaik.info.hu* honlapon.

A tankönyv feldolgozásához további segédanyagokat kínál a *www.mozaweb.hu* oldal.

◆ ◆ ◆

A matematika, a ráció, a logikus gondolkodás világunk megismerésének egyik talán leghatékonyabb eszköze, amely néha megmagyarázhatatlan jelenségekkel társul. Elválaszthatatlan a gondolkodó embertől, és teljessé teszi mindennapi tevékenységeit.

Néhány gondolat azoktól, akik mindezt megtapasztalták:

„Mi hát a ráció, amiből az emberi ész a logikát kreálta? Nyilvánvaló, hogy ’benne van’ a természetben, különben nem lehetne a természetet racionális eszközökkel megérteni. A ráció embert, állatot és természetet egyesít.” (Kertész Imre, Nobel-díjas magyar író)

„Az évszázadok során a matematikusok kollektív tudata megalkotta saját univerzumát. Hogy ez hol van, nem tudom – s gondolom, a ’hol’ szó itt értelmét is veszti –, de biztosíthatom az olvasót: ez a matematikai univerzum nagyon is reális annak a számára, aki benne él. Az emberiség éppen a matematika révén hatolt be legmélyebben környező világa rejtelmeibe.” (Ian Stewart)

„A szigorú bizonyítás rendszerint az utolsó lépés! Előtte sok sejtést kell tenni, és ezeknél az esztétikai meggyőződés rendkívül fontos.” (Roger Penrose)

„A matematikus – akárcsak a festő vagy a költő – a forma mestere. ... A matematikai formáknak – akárcsak a festő vagy a költő formáinak – szépeknek kell lennie...”
(G. H. Hardy)

Eredményes munkát és tanulást kívánnak a Szerzők.

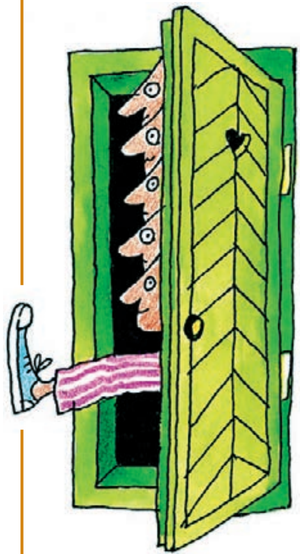
Gondolkodási módszerek

Már René Descartes [dékárt] (1569–1650) a „Regulae ad directionem ingenii" (Szabályok a gondolkodás irányítására) című művében általános módszert keresett a problémák megoldására. Úgy gondolta, hogy először minden problémát matematikai problémára vezet vissza, másodszor minden matematikai problémát algebraira, végül ezeket egyenlet megoldására.

Gondolkodásunk fejlesztéséhez is szükséges, hogy megfigyeljük a gondolkodási tevékenység szerkezetét, sémáit. A továbbiakban néhány olyan módszert alkalmazunk, amelyek sok probléma megoldására hasznos stratégiát adnak. Minél több stratégiát ismerünk, annál nagyobb esélyünk lesz az elénk kerülő problémák megoldására.

3. Sorba rendezési problémák

Különböző elemek sorba rendezése



1. példa

Vendégségbe érkezik András, Béla, Csaba, Dénes és Emil. Az ajtó előtt toporognak, hogy eldöntsék, milyen sorrendben lépjenek be. Hányféle sorrendben léphetnek be az ajtón, ha egyszerre egy ember tud belépni?

Megoldás

Az elsőnek belépő embert 5-féleképpen választhatjuk ki.

Mivel minden egyes első belépőhöz négy második belépő választható, ezért a másodikként belépő embert már csak a 4 kint maradt közül, 4-féleképpen választhatjuk, az első két helyen belépőt így $5 \cdot 4$-féleképpen választhatjuk ki.

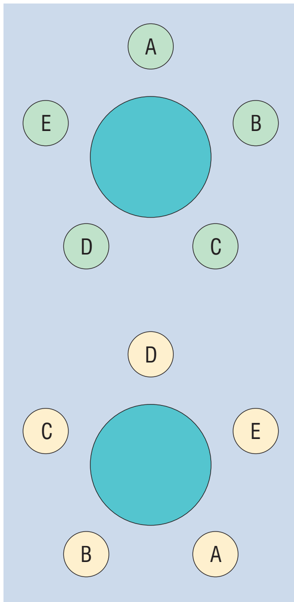
A harmadikként belépő embert már csak a 3 kint maradt közül, 3-féleképpen választhatjuk, az első három helyen belépőt így $5 \cdot 4 \cdot 3$-féleképpen választhatjuk ki.

A negyedikként belépő embert már csak a 2 kint maradt közül, 2-féleképpen választhatjuk, az első négy helyen belépőt így $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$-féleképpen választhatjuk ki.

Az ötödikként belépő ember már csak az 1 kint maradt lehet, így az öt ember összes lehetséges belépési sorrendje: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

2. példa

Vendégségben András, Béla, Csaba, Dénes és Emil leül egy kerek asztal köré. Csak azt figyeljük, hogy az embereknek ki a jobb és a bal szomszédja. Például a 16. ábrán látható elrendezéseket egynek tekintjük. Az asztalnál nincs kitüntetett hely, például asztalfő. Hányféleképpen ülhetnek le a vendégek?



16. ábra

I. megoldás

Andrást leültetjük. Ezzel meghatároztuk a „körbeforgatható” asztalnál a helyét (ezután az asztal már nem körbeforgatható, mintha egyenes asztal lenne). Így a többi 4 embert már $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$-féleképpen ültethetjük le. Tehát kerek asztal köré 5 ember $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen ülhet le.

II. megoldás

Ha úgy vesszük, hogy az első embert 5-féleképpen ültethetjük le, utána a többit $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$-féleképpen, összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ lehetőség lenne. Ezek közül azonban ugyanazt az ülésrendet adják azok, melyeket úgy kapunk, hogy mindenki átül a jobb oldali szomszédja helyére. Ezt 5-ször tehetik meg egymás után, mire mindenki visszajut a kiindulási helyére, vagyis minden ülésrend 5-ször szerepel az $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ lehetőség között.

Tehát a különböző ülésrendek száma: $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$

A sorba rendezések száma, ha vannak egyforma elemek

3. példa

Hány ötbetűs „szó” alkotható az (a, a, a, b, b) betűkészletből?

Megoldás

Ha az azonos betűket különféleképpen írjuk, például (A, *a*, a, B, b), akkor 5 különböző jelnek keressük az összes lehetséges sorrendjét, ami az előbbiek alapján $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Mivel a háromféle „a” betű a szóban ugyanolyan betűnek számít, azok az esetek, amelyek a különböző „a” betűk sorrendjében térnek el, nem számítanak különböző esetnek. Az „a” betűket egymás között $3 \cdot 2 \cdot 1$-féleképpen lehet cserélgetni. Az „a” betűk elhelyezkedése szempontjából ez a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eset 1 esetnek számít, ha az „a” betűk egyformák. Így az eddig számolt eseteknek csak az $\frac{1}{6}$ része jelent különböző esetet az „a” betűk szempontjából.

Ugyanígy a „b” betűk sorrendjében eltérő esetek sem különbözők, ezeket $2 \cdot 1$-féleképpen lehet cserélgetni. Tehát az eddig számolt eseteknek csak az $\frac{1}{2 \cdot 1}$-ed része jelent különböző esetet a „b” betűk szempontjából.

Tehát az (a, a, a, b, b) betűkből alkotható ötbetűs szavak száma:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 10.$$

Feladatok

1. 4 házaspár érkezik vendégségbe.
   a) Hányféle sorrendben léphetnek be az ajtón, ha egyszerre érkeznek?
   b) Hányféle sorrendben léphetnek be az ajtón, ha mindegyik férj közvetlenül a felesége után lép be?
   c) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré?
   d) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha mindegyik férj a felesége mellett ül?
2. Anna, Bea, Cili és Dóra együtt mennek moziba. Mozijegyük egymás mellé szól. Útközben Bea és Cili összevesznek. Hányféle sorrendben ülhetnek a helyükre a lányok, ha Bea és Cili nem ülnek egymás mellé?
3. Hányféleképpen lehet sorba rendezni a következő szavak betűit? (A dupla betű kettőnek számít.)
   a) SZOMBATHELY; *b)* SZEGED; *c)* MAGYARORSZÁG.
4. Hány különböző, 7 hangból álló dallamot tud előállítani az a számítógépes program, amely a C, C, G, G, G, A, A hangokat az összes lehetséges sorrendben lejátssza? (Mindegyik hang ugyanolyan hosszú.)
5. Melyik nagyobb: az (a, a, a, a, b, b, b) betűkészletből alkotható hétbetűs szavak száma, vagy az ugyanebből a betűkészletből alkotható hatbetűs szavak száma?

6. Egy lágytojástartó-készletben 3 zöld és 3 kék tartó van. Ezeket egy rúdra lehet felfűzni, mindegyiket vagy talpával lefele, vagy felfele. Hányféleképpen lehet felfűzni a rúdra a tartókat?

7. Egy 10 forintost 10-szer egymás után feldobunk, és tudjuk, hogy 6 fejet és 4 írást dobtunk. Hányféleképpen lehetett ez, ha a dobások sorrendje is számít?

8. Egy körforgalomban 4 autó halad egymás után, egy Opel, egy Ford, egy Audi és egy Renault. Hányféle sorrendben haladhatnak?

9. Hányféleképpen lehet ráfűzni 5 különböző kulcsot egy kulcskarikára?

10. Egy magas szárú cipőt sokféleképpen befűzhetünk. Az ábrán látunk egy cipőt, azonban a fűző sokféleképpen mehet a cipő belsejében. Hányféleképpen?

11. Négy autó egy-egy rendszámtábláját leszerelik.
   a) Hányféleképpen lehet visszarakni a rendszámtáblákat?
   b) Hányféleképpen lehet úgy visszarakni mind a négyet, hogy pontosan egy tábla kerüljön a helyére?
   c) Hányféleképpen lehet úgy visszarakni mind a négyet, hogy pontosan három tábla legyen a helyén?

12. Egy titkárnő megírt 5 levelet, és megcímzett 5 borítékot azoknak, akiknek a levelek szóltak, csak nem volt ideje beletenni a leveleket a borítékokba. A hivatalsegéd véletlenszerűen belerakta a leveleket a borítékokba.
   a) Hányféleképpen tehette bele a leveleket a borítékokba?
   b) Hányféleképpen lehet úgy beletenni a leveleket a borítékokba, hogy pontosan egy levél kerüljön a helyére?
   c) Hányféleképpen lehet úgy beletenni a leveleket a borítékokba, hogy pontosan három levél legyen a helyén?

13. Hányféle nyakláncot fűzhetünk 3 fehér és 5 piros gyöngyből, ha az azonos színű gyöngyök egyformák?

   András megoldása: Először eltervezzük a fehérek helyét, majd a fehér gyöngyök által meghatározott három ívre tesszük rá a pirosakat.

   Erre 5 lehetőség van:

   $0+0+5$; $0+1+4$; $0+2+3$; $1+1+3$; $1+2+2$.

   Tehát 5-féle nyakláncot lehet fűzni.

   Béla megoldása: 8 különböző gyöngyöt kerek nyakláncra $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$-féleképpen lehet felfűzni. Most 5 piros egyforma és 3 fehér egyforma gyöngy van, ezért ezt osztani kell $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$-gyel és $3 \cdot 2 \cdot 1$-gyel is, így az eredmény 7 lehetőség.

   Tehát 7-féle nyakláncot lehet fűzni.

   Kinek a megoldása helyes?

14. Hányféle sorrendben vonulhat be a pályára a galagonyafalvi kosárlabdacsapat 5 különböző magasságú játékosa, ha egy sorban mennek, és semelyikük sem kerülhet két magasabb játékos közé?

A másodfokú egyenlet

A matematikatörténet egyenletekkel foglalkozó fejezete tele van regénybe illő pillanatokkal. A merész és előremutató gondolatok nem minden esetben nyerték el a kortársak elismerését.

A görög Hippaszoszt tengerbe vetették újszerű gondolataiért.

A 16. század matematikusai versenyre hívták ki egymást. Ezek dicsőséget vagy szégyent hoztak a vetélkedőknek, de mindenképpen a tudomány fejlődését szolgálták.

1832. május 30. hajnalán Évariste Galois, a 20 éves francia forradalmár, egy hölgy becsületéért vívott párbajban haslövést kapott. Előző éjszaka vetette papírra azon gondolatait, melyek a magasabb fokú egyenletek megoldhatóságának kérdéseiben új fejezetet nyitottak a matematikában.

8. A számtani és mértani közép

Különböző mennyiségek vizsgálata során gyakran találkozhatunk az *átlag, középérték* kifejezésekkel. Ezek többnyire a *számtani közép* fogalmához kapcsolódnak, ahol a rendelkezésünkre álló számokat össze kell adni, és el kell osztani a tagok számával.

A *középérték* fogalma ennél jóval általánosabb lehet.

Két szám esetén *középértéken* olyan harmadik számot értünk, amely valamilyen szabály szerint a két szám közé esik, ha a két szám különböző. Ugyanazon két szám középértéke pedig az adott számmal egyenlő.

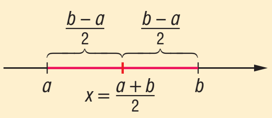
A hozzárendelés szabálya eltérő lehet, ezért a középértékek is különböző értékeket adhatnak.

1. példa

Adott két szám, a és b. Keressünk olyan számot, amelyik az egyiknél annyival nagyobb, mint amennyivel kisebb a másiknál!

Megoldás

Legyen a keresett szám x, ezért *(16. ábra)*:



16. ábra

$$x - a = b - x,$$
$$2x = a + b,$$
$$x = \frac{a+b}{2}.$$

Az így kapott számot nevezzük az a és b szám **számtani** (aritmetikai) **közepének,** és $A(a,\ b)$-vel jelöljük. A statisztikában, a mindennapi életben erre a fogalomra szokás használni az **átlag** kifejezést.

Mivel a későbbiek során fontos lesz majd, hogy a megadott számtani közepet össze tudjuk hasonlítani más közepekkel, ezért a definíciót nemnegatív számokra adjuk meg.

számtani közép

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

DEFINÍCIÓ: Két nemnegatív szám *számtani közepén* a két szám összegének a felét értjük:

$$\boldsymbol{A(a,b) = \frac{a+b}{2}.}$$

A fogalom több szám esetén is megadható. Az a_1; a_2; … ; a_n nemnegatív számok számtani közepe:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

2. példa

Adott két pozitív szám, a és b. Keressünk olyan számot, amelyik az egyiknek annyiszorosa, mint ahányad része a másiknak!

Megoldás

Legyen a keresett szám x, így a feltételek szerint:

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{x},$$

$$x^2=ab,$$

$$x=\sqrt{ab}.$$

A kapott számot a két szám mértani (geometriai) közepének nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Két nemnegatív szám *mértani közepén* a két szám szorzatának négyzetgyökét értjük:

$$\boldsymbol{G(a, b)=\sqrt{ab}.}$$

mértani közép

$G(a,b)=\sqrt{ab}$

Általában az a_1; a_2; … ; a_n nemnegatív számok mértani közepe:

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$

3. példa

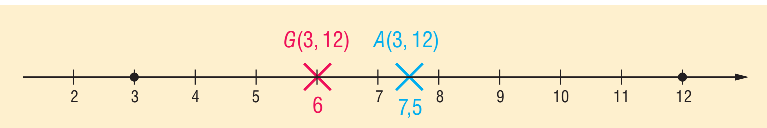
Legyen $a=3$ és $b=12$. Határozzuk meg a két szám számtani és mértani közepét! Az eredményeket szemléltessük számegyenesen!

Megoldás

A megadott két szám számtani és mértani közepe:

$$A(3, 12)=\frac{3+12}{2}=7{,}5; \qquad G(3, 12)=\sqrt{3\cdot 12}=6.$$

A számokat számegyenesen ábrázolva:



17. ábra

Az ábrázolás alapján megállapíthatjuk, hogy a megadott konkrét számok esetén telesül, hogy:

$$3 < G(3, 12) < A(3, 12) < 12.$$

◆ ◆ ◆

Felmerülhet a kérdés, hogy igaz-e hasonló összefüggés tetszőleges a és b nemnegatív valós számok esetében. Előző sejtésünk egy nevezetes egyenlőtlenséghez vezet, melyet ***a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségnek*** nevezünk.

számtani és mértani közép egyenlőtlensége

TÉTEL: **Két nemnegatív a és b valós szám esetén**

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

Bizonyítás

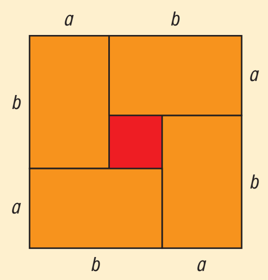
Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért a négyzetre emelés az eredetivel ekvivalens állítást fogalmaz meg.

$$ab \le \frac{a^2+2ab+b^2}{4},$$
$$4ab \le a^2+2ab+b^2,$$
$$0 \le a^2-2ab+b^2,$$
$$0 \le (a-b)^2.$$

Az utolsó egyenlőtlenség nyilvánvalóan igaz, így az eredeti is az.

Az eredmény alapján megállapítható, hogy a két közép akkor és csak akkor lesz egymással egyenlő, ha $a = b$. Ebben az esetben igaz, hogy:

$$a = \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} = b.$$



$$0 < a < b$$
$$(a+b)^2-(b-a)^2 = 4ab,$$
$$(a+b)^2 \ge 4ab,$$
$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}.$$

18. ábra

Megjegyzés: A két közép közötti egyenlőtlenség általában is igaz, azaz nemnegatív számok mértani közepe legfeljebb a számtani közepükkel egyenlő:

$$G = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = A.$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

4. példa

Vizsgáljuk meg, hogy milyen értékeket vehet fel egy pozitív számnak és reciprokának az összege!

Megoldás

Jelöljük a vizsgált pozitív számot a-val. Néhány konkrét érték kiszámítása után megfogalmazhatunk egy **sejtést,** miszerint: $a+\frac{1}{a} \ge 2$.

Mivel a és $\frac{1}{a}$ pozitív számok lesznek, ezért érvényes rájuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség, azaz:

$$\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}} \le \frac{a+\frac{1}{a}}{2}.$$

a	$a+\frac{1}{a}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$
1	2
2	$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$
3	$3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

Ezt átrendezve:

$$\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}\le\frac{a+\frac{1}{a}}{2},$$

$$1\le\frac{a+\frac{1}{a}}{2},$$

$$2\le a+\frac{1}{a}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a=\frac{1}{a}$, amiből $a=1$ adódik a pozitív valós számok halmazán.

Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

TÉTEL: **Tetszőleges $a > 0$ pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2.**

Az állítás szemléletesen bizonyítható a 19. ábra segítségével.

Az ábrán szereplő négy téglalap területe egyenként $a\cdot\frac{1}{a}=1$ területegység. Ezek összege legfeljebb a nagy négyzet területét teszi ki, azaz:

$$4\le\left(a+\frac{1}{a}\right)^2.$$

Innen négyzetgyökvonás alkalmazásával a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$a+\frac{1}{a}\ge 2.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmas lehet különböző mennyiségek minimumának, illetve maximumának meghatározására is.

5. példa

Egy 2 m hosszú fonál segítségével képezzünk egy téglalapot! Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait, hogy a terület maximális legyen?

Megoldás

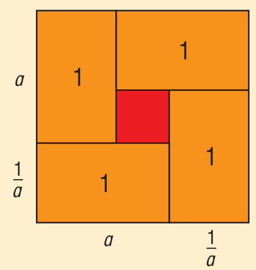
Jelöljük a téglalap szomszédos oldalainak hosszát x-szel és $1-x$-szel *(20. ábra)*. A téglalap területe: $t=x(1-x)$. A kéttényezős szorzat mindkét tényezője nemnegatív, hiszen a téglalap oldalainak hosszáról van szó. Írjuk fel erre a két tényezőre a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$G=\sqrt{x(1-x)}\le\frac{x+1-x}{2}=\frac{1}{2}=A.$$

Azt kaptuk, hogy e két számnak a számtani közepe állandó.

Erre az eredményre juthatunk akkor is, ha felidézzük a függvényeknél korábban már igazolt állítást, miszerint:

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|\ge 2,\ \text{ha}\ x\ne 0.$$



19. ábra

$a<0$ esetén $a+\frac{1}{a}\le -2$

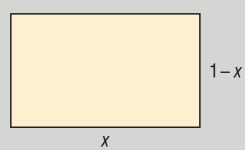
szintén belátható, ugyanis (-1)-gyel való szorzás után

$$-a+\frac{1}{-a}\ge 2.$$

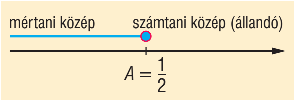
Mivel $-a>0$, ez az egyenlőtlenség teljesül.

Összefoglalva:

$$\left|a+\frac{1}{a}\right|\ge 2\quad(a\ne 0).$$



20. ábra



21. ábra

adott kerületű téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb

A 21. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy állandó számtani közép esetén a mértani közép akkor veszi fel a legnagyobb értékét, ha a két közép egymással egyenlő. Ekkor: $x = 1 - x$, azaz $x = \frac{1}{2}$.

Mivel a téglalap területe éppen a mértani közép négyzete, ezért a terület is ekkor lesz maximális. Azaz akkor kapunk legnagyobb területet, ha a 2 m hosszúságú fonálból $x = \frac{1}{2}$ m oldalú négyzetet alakítunk ki.

Vagyis az adott kerületű, maximális területű téglalap a négyzet.

◆ ◆ ◆

A megoldásban lényeges szerepet kapott az, hogy a két szám számtani közepe **állandó** volt. Csak ebben az esetben alkalmazható a mértani közép maximumának meghatározására a nevezetes egyenlőtlenség. Ha mindkét közép változik, akkor ez a módszer már nem eredményes.

A példa kapcsolatba hozható a matematika egy híres feladatával, melyet *izoperimetrikus problémának* ismerünk. A monda szerint a menekülni kényszerülő Dido, Afrika partjaira vetődvén, az uralkodótól akkora földdarabot kért, amekkorát egy marhabőrrel körül tud keríteni. Az uralkodó mosolyogva beleegyezett a kérésbe, de az okos Dido keskeny csíkokra vágta szét a marhabőrt, és azokat hosszú kötélként csomózta össze. Az elkerített földdarabon alapította meg Karthágó városát, melynek később ő lett a királynője.

A kérdés az volt, hogy milyen alakzatot kell formázni a kötél segítségével, hogy annak területe adott kerület mellett a lehető legnagyobb legyen. A problémát csak a 19. században oldották meg, ekkor igazolták, hogy ez az alakzat a kör.

Feladatok

1. Határozzuk meg a következő számok számtani közepét és mértani közepét!

a) 7 és 8; *b)* 27 és $\frac{1}{3}$; *c)* 125 és 5.

2. Két szám közül az egyik 25. Határozzuk meg a másik számot, ha

a) számtani közepük 30; *b)* mértani közepük 10!

3. Ákos 10 dobásból átlagosan 3 alkalommal talál a kosárba, míg Zsombor 10-ből 7 alkalommal betalál. Mennyi találatra számíthatunk, ha felváltva dobnak 10-et?

4. Egy üzem a termelését az első évben 5%-kal növelte, a rákövetkező évben 6%-os volt a növekedés. E két év során évente átlagosan mennyivel növekedett a termelés?

5. Egy autós két város között haladva az út első felét 50 km/h, a második felét pedig 60 km/h sebességgel tette meg. Mekkora átlagsebességgel tette meg a teljes utat?

6. A 100 cm^2 területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

7. Van-e megoldása a pozitív valós számok körében az $x + \frac{2}{x} = 2$ egyenletnek?

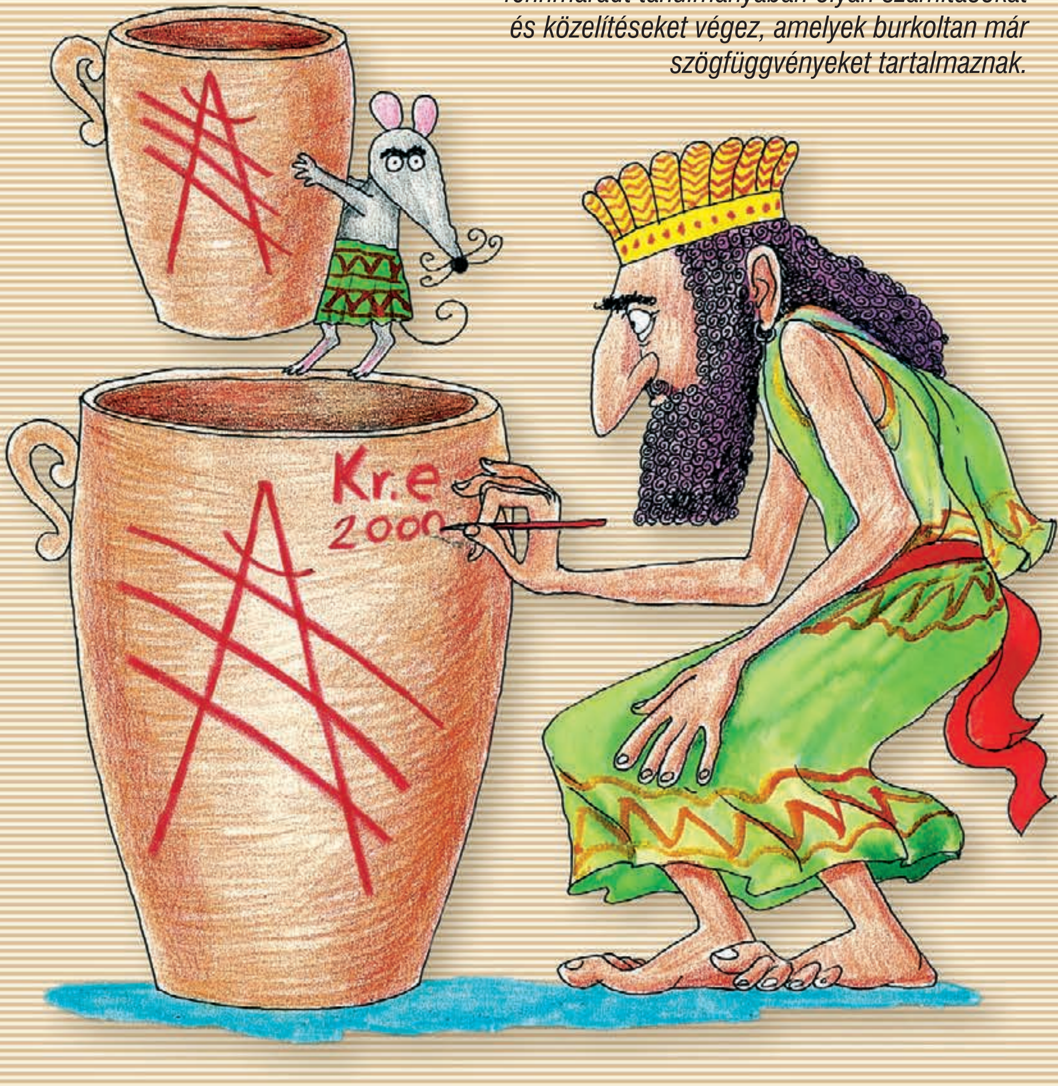
8. Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza $a + \frac{1}{a}$, az egyik befogó pedig $a - \frac{1}{a}$, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Mekkora a másik befogó hossza? Mit mondhatunk ez alapján $a + \frac{1}{a}$-ról?

Geometria

1936-ban, a mai Irán területén található Szúza környéki ásatások során előkerült agyagcserepek alapján úgy tűnik, hogy kb. 4000 évvel ezelőtt a babilóniaiak már alkalmazták a párhuzamos szelők tételét és a hasonlóság fogalmát.

A Kr. e. 5. században a khioszi Hippokratész bizonyításai során felhasználta a kör kerületi és középponti szögének kapcsolatát, a hasonlóságot, és meg tudta szerkeszteni két szakasz mértani közepét.

A szamoszi Arisztarkhosz a Kr. e. 3. században „A Nap és a Hold méreteiről és távolságáról'' című egyetlen fennmaradt tanulmányában olyan számításokat és közelítéseket végez, amelyek burkoltan már szögfüggvényeket tartalmaznak.



5. Alakzatok hasonlósága; a háromszögek hasonlóságának alapesetei

DEFINÍCIÓ: Két alakzat *hasonló,* ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi.

Azt, hogy egy A alakzat **hasonló** egy B alakzathoz, a következőképpen jelöljük: $A \sim B$.

A hasonlóság a korábban tárgyalt egybevágósághoz hasonlóan egy reláció, és két alakzat akkor van hasonlósági relációban egymással (akkor hasonló), ha van közöttük megfelelő hasonlósági transzformáció. A definícióból közvetlenül adódnak a hasonlósági reláció következő tulajdonságai:

(1) **Minden alakzat hasonló önmagához, azaz $A \sim A$.**

(2) **Ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$.**

(3) **Ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$.**

Ezek a tulajdonságok érvényesek az egybevágósági relációra is.

Ha két alakzat hasonlóságát a definíció alapján akarjuk bizonyítani, akkor keresnünk kell olyan megfelelő hasonlósági transzformációt, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. Ez számos konkrét esetben nem könnyű, ezért az alakzatokat jellemző adatok (bizonyos szakaszok hosszának aránya, szögek nagysága) segítségével próbálunk olyan szükséges és elegendő feltételeket keresni, amelyek biztosítják a tekintett alakzatok hasonlóságát.

1. példa

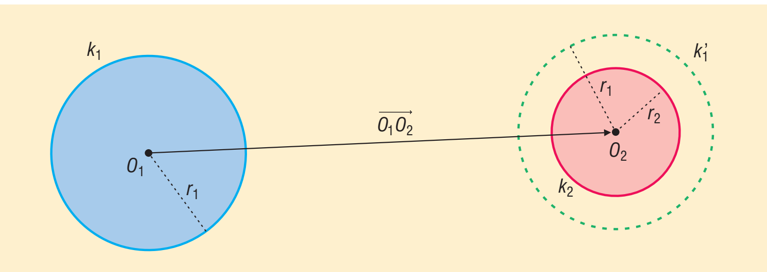
Bizonyítsuk be, hogy bármely két kör hasonló!

Megoldás

Jelölje O_1 az r_1 sugarú k_1, és O_2 az r_2 sugarú k_2 kör középpontját.

Az $\overrightarrow{O_1O_2}$ vektorral történő eltolás és az O_2 centrumú, $\frac{r_2}{r_1}$ arányú középpontos hasonlóság egymásutánja k_1-et k_2-be viszi. ***(43. ábra)***

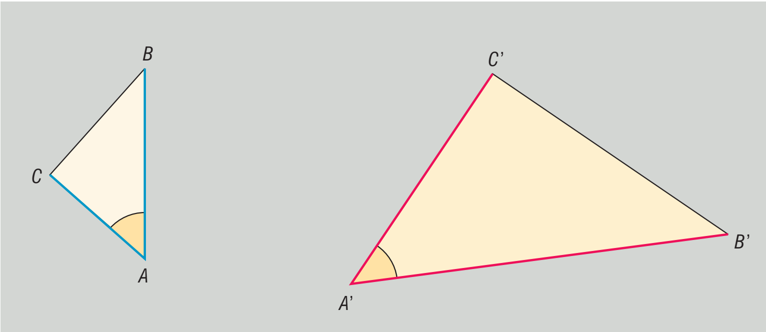
43. ábra



A háromszögek hasonlóságának alapesetei

A 44. ábrán látható ABC és $A'B'C'$ háromszögekről tudjuk, hogy

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \quad \text{és} \quad CAB\sphericalangle = C'A'B'\sphericalangle.$$



44. ábra

Kb. 4000 éves írásos emlékek szerint a babilóniaiak már ismerték a háromszögek hasonlóságának fogalmát.

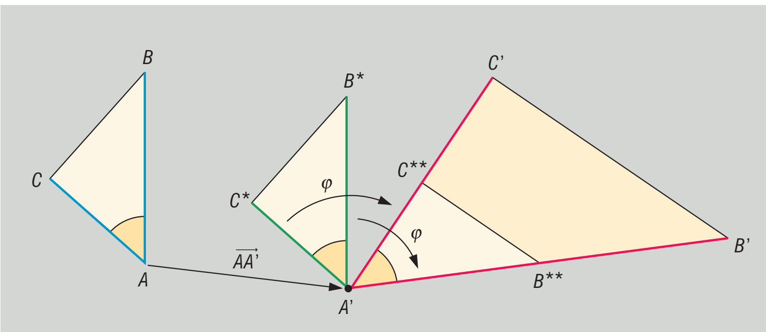
Vajon ezen adatok egyenlősége elegendő-e ahhoz, hogy a két háromszög hasonló legyen?

A 45. ábrán látható, hogy az $\overrightarrow{AA'}$ vektorral történő eltolás, egy alkalmas φ szögű A' körüli elforgatás és egy A' centrumú $\dfrac{A'B'}{AB}$ arányú középpontos hasonlóság egymás utáni végrehajtásával nyert hasonlósági transzformáció az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe viszi, így a definíció alapján a két háromszög hasonló.

> *Megjegyzés:* A feladatban a két háromszög körüljárási iránya megegyezett. Ha a körüljárási irányok különböztek volna egymástól, akkor az egyik háromszöget a sík egy tetszőleges egyenesére tükrözve a háromszögek irányítását egyezővé tehettük volna.

Az imént a háromszögek hasonlóságának egyik alapesetéhez kerestünk megfelelő transzformációt. A többi alapesethez is hasonló módon kereshetünk megfelelő transzformációkat.

45. ábra



Tétel: **Két háromszög akkor és csak akkor hasonló, ha a következő feltételek egyike teljesül:**

(1) **megfelelő oldalaik hosszának aránya páronként egyenlő;**

(2) **két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és az ezek által közrefogott szögek nagysága egyenlő;**

(3) **két-két szögük páronként egyenlő nagyságú;**

(4) **két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és e két-két oldal közül a nagyobbikkal szemközt levő szögek nagysága egyenlő.**

A fenti négy feltétel a **háromszögek hasonlóságának alapesetei**.

háromszögek hasonlóságának alapesetei

2. példa

Mutassuk meg, hogy két derékszögű háromszög hasonló, ha a befogók hosszának aránya mindkét háromszög esetén ugyanaz.

Megoldás

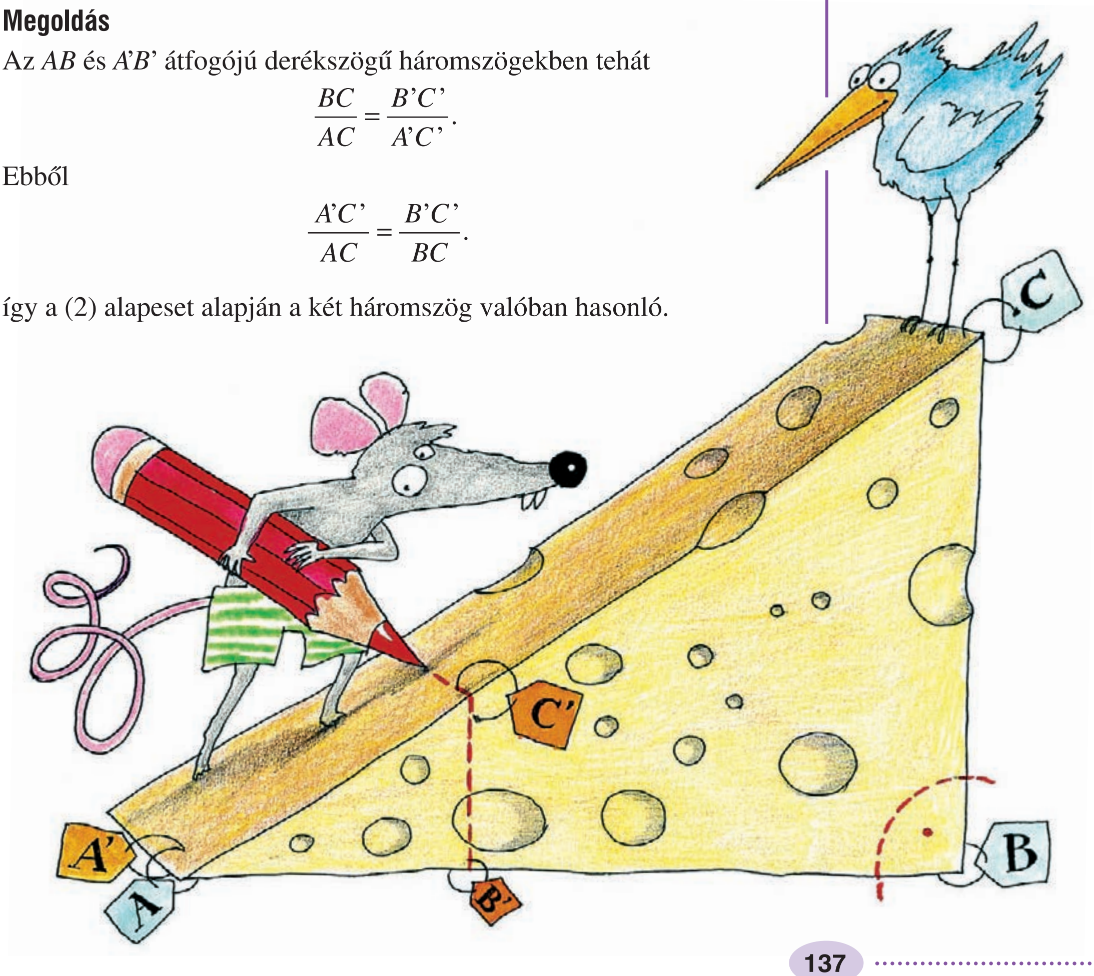
Az AB és $A'B'$ átfogójú derékszögű háromszögekben tehát

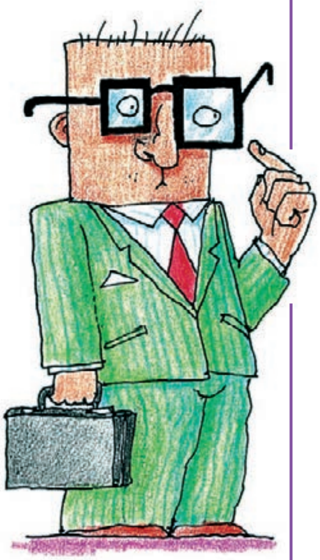
$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}.$$

Ebből

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

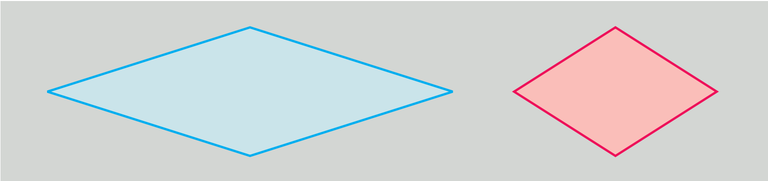
így a (2) alapeset alapján a két háromszög valóban hasonló.





Négyszögek, sokszögek hasonlósága

Háromszögek esetében a megfelelő oldalhosszak arányának páronkénti egyenlősége elegendő volt a hasonlósághoz. Négyszögek esetén könnyen látható, hogy ez nem elegendő, ugyanis ellenkező esetben bármely két rombusz hasonló lenne egymáshoz (*46. ábra*). Négyszögek hasonlóságához az sem elegendő, ha megfelelő szögeik páronként egyenlő nagyságúak, gondoljunk csak a négyzetre és azokra a téglalapokra, amelyek nem négyzetek.



46. ábra

Általában sokszögek hasonlóságára nézve a következő érvényes:

TÉTEL: **Két sokszög akkor és csak akkor hasonló, ha megfelelő oldalhosszaik aránya páronként egyenlő, és megfelelő szögeik páronként egyenlő nagyságúak.**

Feladatok

1. A következő állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis!
   a) Két háromszög hasonló, ha megfelelő szögeik nagysága páronként egyenlő.
   b) Két négyszög hasonló, ha megfelelő szögeik nagysága páronként egyenlő.
   c) Két háromszög hasonló, ha két-két oldalhosszuk aránya páronként egyenlő, és egy-egy szögük nagysága egyenlő.
   d) Ha két síkidom egybevágó, akkor hasonló is.
   e) Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha egy-egy szögük egyenlő nagyságú.
   f) Két rombusz hasonló, ha megegyeznek egy-egy szögükben.
   g) Bármely két szabályos sokszög hasonló.
   h) Bármely két azonos oldalszámú szabályos sokszög hasonló.
   i) Két húrtrapéz hasonló, ha szögeik páronként egyenlők.
2. Bizonyítsuk be, hogy bármely két szabályos háromszög hasonló.
3. Bizonyítsuk be, hogy két derékszögű háromszög hasonló, ha megegyeznek egy hegyesszögükben.
4. Bizonyítsuk be, hogy két téglalap hasonló, ha szomszédos oldalaik aránya egyenlő.
5. Egy világítótorony árnyéka 10 m hosszú, ugyanekkor ugyanott egy 2 m hosszú, függőleges bot árnyéka 120 cm. Milyen magas a világítótorony?
6. Egy háromszög oldalai 12 cm, 16 cm és 20 cm hosszúak. Egy hozzá hasonló háromszög legnagyobb oldala 8 cm hosszú. Számítsuk ki ez utóbbi háromszög másik két oldalának hosszát.

Valószínűség-számítás

A valószínűség fogalma már az antik görög filozófiában is szerepet játszott. Az a gondolat, hogy a természetben tapasztalható törvényszerűségek a véletlenek tömegén keresztül érvényesülnek, az ókori görög materialistáknál szerepelt először.

Később a valószínűség-számítás kialakulásában nagy szerepet játszottak a szerencsejátékokra, elsősorban a kockajátékokra vonatkozó feladatok, sőt alkalmazták biztosításokkal, életjáradékokkal kapcsolatos problémák megoldására is.

Mára a modern tudomány felfedezte, hogy az ún. valószínűségi szemléletmód magyarázza meg helyesen a bennünket körülvevő világegyetem alapvető jelenségeit, és az élővilágban lezajló folyamatok nagy részét is ez írja le jól.

3. Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség

Legyen egy kísérlet az, hogy feldobunk egy dobókockát, és figyeljük a dobott számot! Legyen az A esemény az, hogy 6-ost dobtunk! Megismételtük 100-szor a kísérletet, és összeszámoltuk, hogy az A esemény 15-ször következett be, azaz az A esemény *gyakorisága* 15. A kísérletek számának $\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$ részében következett be az A esemény, azaz az A esemény *relatív gyakorisága* $\frac{15}{100}$.

gyakoriság, relatív gyakoriság

DEFINÍCIÓ: Ha n kísérletből az A esemény k-szor következett be ($k \le n$), akkor k-t az A esemény *gyakoriságának*, $\frac{k}{n}$-et pedig az A esemény *relatív gyakoriságának* nevezzük.

1. példa

Egy kockát dobjunk fel 100-szor! Határozzuk meg a következő események gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

A: Páros prímszámot dobtunk.

B: Páratlan prímszámot dobtunk.

C: A dobott szám prím.

D: A dobott szám legfeljebb 6.

Megoldás

Egy dobássorozat alapján a megfelelő események gyakorisága és relatív gyakorisága:

$A=\{2\}$ esemény gyakorisága: 17, relatív gyakorisága: $\frac{17}{100}$.

$B=\{3, 5\}$ esemény gyakorisága: 34, relatív gyakorisága: $\frac{34}{100}$.

$C=\{2, 3, 5\}$ esemény gyakorisága: 51, relatív gyakorisága: $\frac{51}{100}$.

$D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a biztos esemény gyakorisága 100, relatív gyakorisága: 1

Figyeljük meg, hogy az A és B események kizárják egymást: $A \cdot B=\varnothing$!

Az $A+B=C$ esemény gyakorisága az A és B események gyakoriságának összege, $A+B$ összeg relatív gyakorisága a tagok relatív gyakoriságának összege.

◆ ◆ ◆

- **A relatív gyakoriság nem lehet negatív: mivel $0 \le k \le n$ és $n > 0$, ezért $0 \le \frac{k}{n} \le 1$.**
- **A biztos esemény relatív gyakorisága 1, mert a biztos esemény minden kísérletnél bekövetkezik, így $k = n$.**
- **Egymást kizáró események összegének relatív gyakorisága a tagok relatív gyakoriságának összege.**

Galileo Galilei (1564–1642) hagyatékában találták meg *Considerazione sopra il Sinoco dei Dadi* (Vizsgálatok a kockajátékokról) című művét, melyben ilyen problémákkal foglalkozott.

Sok hasonló kísérletsorozatot elvégezve megfigyelhetjük, hogy adott esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Minél több kísérletet végzünk, az ingadozás általában annál kisebb.

valószínűség

Adott A esemény *valószínűségének* azt a számot tekintjük, amely körül a relatív gyakoriság ingadozik.
Az A esemény valószínűségének jele: $P(A)$.

Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987) orosz matematikus, a valószínűség-számítás modern matematikai megalapozója. *A valószínűség-számítás alapfogalmai* című műve először 1933-ban németül, majd 1936-ban oroszul jelent meg. Ebben írta le a valószínűségre vonatkozó axiómákat.

Megjegyzés: A valószínűséget nem definiáljuk, hanem axiómákkal határozzuk meg, melyek a relatív gyakoriság tulajdonságai alapján a tapasztalatnak megfelelően adódnak.

I. axióma: Ha A tetszőleges esemény, akkor $P(A) \ge 0$.

II. axióma: $P(H) = 1$.

III. axióma: Ha A és B tetszőleges események, melyekre $A \cdot B = \emptyset$, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

2. példa

A három kocka problémája: Toscana hercege levelet írt Galileo Galileinek, melyben a következő problémát vetette fel, és várta a tudós válaszát. Abban az időben sokat kockáztak, feldobtak egyszerre három dobókockát, és nézték a három kockán dobott számok összegét. Összeszámolták, hogy az összeg hatféleképpen lehet 9, és hatféleképpen lehet 10 is, ugyanis:

$$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$$
$$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4.$$

Mégis, játék közben azt tapasztalták, hogy az összeg gyakrabban lesz 10, mint 9. Vajon miért mond ellent a számolás a tapasztalatnak?

9-es összeg	
1+2+6	6 elemi esemény
1+3+5	6 elemi esemény
1+4+4	3 elemi esemény
2+2+5	3 elemi esemény
2+3+4	6 elemi esemény
3+3+3	1 elemi esemény
összesen: **25** elemi esemény	

10-es összeg	
1+3+6	6 elemi esemény
1+4+5	6 elemi esemény
2+2+6	3 elemi esemény
2+3+5	6 elemi esemény
2+4+4	3 elemi esemény
3+3+4	3 elemi esemény
összesen: **27** elemi esemény	

Megoldás

Színezzük a kockákat pirosra, kékre és zöldre! A számolásnál egy esetnek tekintettük azt, amikor a három kockával 1, 2, 6-ost dobtunk. Mivel a kockák színesek, látható, hogy nem mindegy, hogy a piros kockával dobtunk 1-est vagy a kékkel. Számoljuk össze, hány eset adódik a színek figyelembe vételével. Ha három különböző számot dobtunk, azt $3 \cdot 2 \cdot 1$ féleképpen tehetjük meg, mert a piros kockán 3-féle, a kéken ezután 2-féle, végül a zöldön 1-féle szám lehet. Ha a dobott számok között két egyforma van, például $1 + 4 + 4$-et dobtunk, akkor az 1-est háromféle színű kockával dobhattuk, így ez 3 esetet jelent a színes

kockákkal. Ha mindhárom dobott szám azonos, az természetesen 1 eset színes kockákkal is. Így figyelembe véve a színeket, 25-féleképpen lehet 9 az összeg, és 27-féleképpen lehet 10. A tapasztalat azt mutatta, hogy többször dobtak 10-et, mint 9-et, ami azt támasztja alá, hogy a kockákat különbözőnek kell tekinteni.

A valóságban két kocka mindig különböző, még ha szemmel nem is tudjuk megkülönböztetni őket.

Feladatok

1. Végezzünk 100 kísérletet két különböző színű (fekete, fehér) kockával, és vizsgáljuk a következő események gyakoriságát, relatív gyakoriságát!

A: A két kockával dobott szám egyenlő.

B: A fekete kockával nagyobb számot dobtunk, mint a fehérrel.

C: A fehér kockával nagyobb számot dobtunk, mint a feketével.

2. Végezzünk kísérletet két érmével! Dobjuk fel a két érmét 100-szor egymás után, és figyeljük meg a következő események gyakoriságát és relatív gyakoriságát: a két érmén levő fejek száma 0, 1, 2!

3. Egy kalapba tegyünk 4 cédulát, melyeken rendre az 1, 2, 3, 4 számok vannak. A kísérlet legyen az, hogy a kalapból háromszor egymás után véletlenszerűen kihúzunk egy cédulát, felírjuk a húzott számot, ezután a cédulát visszatesszük! Így egy háromjegyű számot kapunk. A kísérletet 30-szor elvégezve vizsgáljuk a következő események gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

A: A háromjegyű szám páros.

B: A háromjegyű szám osztható 3-mal.

Mit tapasztalunk, ha a kísérletet 60-szor, 90-szer végezzük el?

4. Három különböző kockával dobva, ha a dobott számok összege 10-nél nagyobb, akkor nyerünk, különben veszítünk. Hányféleképpen nyerhetünk?

JÁTÉK

A játékvezető egy dobókockával sorban 7 számot dob. Minden játékos a dobás után rögtön beírja a számot az összeadandók valamelyik, általa választott számjegye helyére. Az nyer, akinek az összege a legnagyobb. Mi a lehetséges legnagyobb összeg? Mi ennek a valószínűsége?