Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

sokszínű

Matematika

9

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

Matematika

tankönyv

9

Tizenhetedik, változatlan kiadás

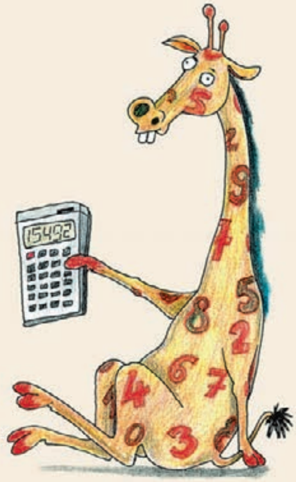
Mozaik Kiadó – Szeged, 2018

Kombinatorika, halmazok

Algebra és számelmélet

Függvények

Háromszögek, négyszögek, sokszögek



Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

Egybevágósági transzformációk

Statisztika

Útmutató a tankönyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában.

- A kidolgozott példák gondolatmenete mintát ad a módszerek, eljárások megértéséhez és a további feladatok megoldásához.
- A legfontosabb definíciókat és tételeket színes kiemelés jelzi.
- A tananyag apró betűvel szedett részei és a bordó színnel megjelölt kidolgozott mintapéldák a mélyebb megértést segítik. Ezek az ismeretek szükségesek az emelt szintű érettségihez.
- A margón ábrák, az adott lecke főbb vázlatpontjai, ismétlő, magyarázó részek, valamint matematikatörténeti érdekességek találhatók.

A mintapéldák és a kitűzött feladatok nehézségét három különböző színnel jelöltük:

Sárga: elemi szintű gyakorló feladatok, amelyek megoldása, begyakorlása nélkülözhetetlen a továbbhaladáshoz.
Kék: a középszintű érettséginek megfelelő színvonalú feladatok.
Bordó: az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, feladatok.

Ezek a színkódok megfelelnek a Mozaik Kiadó Sokszínű matematika feladatgyűjteményeiben alkalmazott jelöléseknek. A feladatgyűjtemény-sorozat több mint 3000, a gyakorláshoz, az órai munkához és az érettségi felkészüléshez is alkalmas feladatot tartalmaz.

A kitűzött feladatok végeredményei megtalálhatók a *www.mozaik.info.hu* honlapon.

A tankönyv feldolgozásához további segédanyagokat kínál a *www.mozaweb.hu* oldal.

◆ ◆ ◆

Néhány megszívlelendő jó tanács és megjegyzés azoktól, akik nagyon magas szinten művelték és ismerték a matematika tudományát. Adjanak ezek alapot és biztatást mindazoknak, akik szeretnék a könyvben szereplő módszereket, összefüggéseket elsajátítani.

A problémamegoldás csakúgy gyakorlat kérdése, mint az úszás, sízés vagy zongorázás. Megtanulni is csak utánzás és gyakorlás útján lehet. Nem adhatok kulcsot mely minden ajtót megnyit, és minden problémát megold, de adhatok utánozható, jó példákat és sok alkalmat a gyakorlásra. Aki úszni akar tanulni, annak vízbe kell ugrania, aki problémákat megoldani akar tanulni, annak problémák megoldását kell gyakorolnia. (Pólya György)

Nyomot hagy emlékezetünkben az, amit egyszer magunknak kellett kitalálnunk, követhetjük majd ismét ezt a nyomot, ha arra szükségünk támad. (G.C. Lichtenberg)

A matematikában – ellentétben a mindennapos tapasztalattal más területeken – általában annak van szerencséje, aki azt megérdemli. (Rényi Alfréd)

A matematika olyan játszma, ellentétben a sakkal, ahol visszaléphetünk egy lépést. Csak az utolsó lépés számít. (Erdős Pál)

Tapasztalati tény, hogy a világ a logikus gondolkodás törvényei szerint működik. … Azt viszont nem tudom, hogy a világ miért úgy van megalkotva, hogy benne logikusan gondolkodva lehessen eligazodni. (R. L. Dobrusin)

Eredményes munkát és tanulást kívánnak a Szerzők.

Kombinatorika, halmazok

A kombinatorika, a „kombinálás tudománya" rendszerint dolgok megszámlálásával foglalkozik. Először Leibniz rendszerezte a kombinatorikai ismereteket, majd Jacob Bernoulli alkalmazta valószínűségszámítási problémák megoldásakor. A XX. század közepén a gyakorlati alkalmazhatóság miatt nagy fejlődésnek indult a matematikának ez az ága.

4. Halmazok elemszáma, logikai szita

Az A halmaz elemszámának jele: $|A|$.

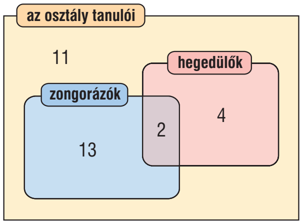
Például: A = {kétjegyű négyzetszámok}, $|A| = 6$.
B = {sakkjátszma kezdetekor a táblán lévő bábuk}, $|B| = 32$.

1. példa

Egy 30 fős osztályban tizenöten tanulnak zongorázni, hatan hegedülni, ketten pedig zongorázni és hegedülni is. Hányan vannak az osztályban, akik se zongorázni, se hegedülni nem tanulnak?

1. megoldás

Készítsünk Venn-diagramot, és írjuk be a megfelelő részekbe, hogy hányan tartoznak abba a részbe! ***(27. ábra)***

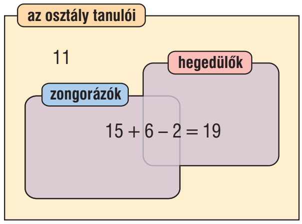


27. ábra

A zongorázók és hegedülők metszetébe 2-t írunk. Mivel a 15 zongorázó közül 2 hegedül is, $15 - 2 = 13$ gyerek zongorázik, de nem hegedül. A 6 hegedűs közül 2 zongorázik is, így $6 - 2 = 4$ gyerek hegedül, de nem zongorázik. Azoknak a száma, akik nem zongoráznak és nem hegedülnek: $30 - [(15 - 2) + (6 - 2) + 2] = 30 - 19 = 11$.

2. megoldás

Ha a zongorázók és hegedülők számát összeadjuk, kétszer számoltuk azokat, akik mindkét hangszeren tanulnak, így ezek számát egyszer le kell vonni. Tehát azok száma, akik zongoráznak vagy hegedülnek: $15 + 6 - 2 = 19$, így se hegedűn se zongorán $30 - 19 = 11$-en nem játszanak az osztályban.



28. ábra

Vezessük be a következő jelöléseket: legyen az osztály tanulóinak halmaza: U; a zongorázók halmaza: A; a hegedülők halmaza: B. ***(28. ábra)***

Ezekkel a jelekkel a fenti megoldás:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \text{ és } |\overline{A \cup B}| = |U| - |A \cup B|. \qquad (1)$$

2. példa

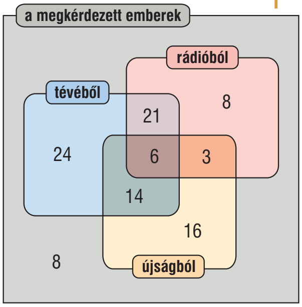
Egy felmérés során 100 embert megkérdeztek, hogy milyen forrásból szerzik a híreket. A következő eredmény született:

tévéből: 65; rádióból: 38; újságból: 39; tévéből és rádióból: 27;
tévéből és újságból: 20; rádióból és újságból: 9;
tévéből, rádióból és újságból: 6.

Hányan nem szerzik a híreket egyik forrásból sem? Hányan vannak, akik csupán egy forrásból szerzik a híreket a három közül?

1. megoldás

Készítsünk Venn-diagramot, és írjuk be a megfelelő részekbe, hogy hányan tartoznak oda! ***(29. ábra)***



29. ábra

- **1. lépés:** Először a három halmaz metszetébe beírjuk a 6-ot.
- **2. lépés:** Ezután beírjuk azokat, akik a tévéből és a rádióból, de az újságból nem szerzik a híreket, ezek száma 27 – 6 = 21. Ezután beírjuk azokat, akik a tévéből és az újságból, de a rádióból nem szerzik a híreket, ezek száma 20 – 6 = 14. Ezután beírjuk azokat, akik a rádióból és az újságból, de a tévéből nem szerzik a híreket, ezek száma 9 – 6 = 3.
- **3. lépés:** Most már kiszámolhatjuk, hogy hányan szerzik a híreket

  csak a tévéből: 65 – 21 – 6 – 14 = 24,

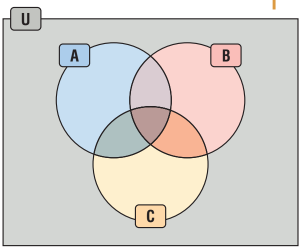
  csak az újságból: 39 – 14 – 6 – 3 = 16,

  csak a rádióból: 38 – 21 – 6 – 3 = 8.

Tehát csak egy forrásból 24 + 16 + 8 = 48 megkérdezett szerzi a híreket.

- **4. lépés:** A három közül legalább egy forrásból 24 + 8 + 16 + 14 + + 21 + 3 + 6 = 92 ember szerzi a híreket, tehát egyik forrásból sem: 100 – 92 = 8 ember.

2. megoldás



30. ábra

Jelölje U a megkérdezettek halmazát, A a tévéből, B a rádióból, C az újságból híreket szerzők halmazát! *(30. ábra)*

Először azt számoljuk ki, hogy hányan szereznek híreket a három forrás közül legalább egyből: Ha összeadjuk a tévéből, rádióból, újságból híreket szerzők számát 65 + 38 + 39, akkor kétszer számoltuk azokat, akik a tévéből is és a rádióból is, a tévéből is és az újságból is, a rádióból és az újságból is szerzik a híreket, így ezek számát le kell vonni: 65 + 38 + 39 – 27 – 20 – 9. Ekkor azokat, akik mindhárom forrásból szerzik a híreket, háromszor hozzáadtuk, de háromszor le is vontuk, így egyszer hozzá kell adni, tehát a három forrás közül legalább egyből: 65 + 38 + 39 – 27 – 20 – 9 + 6 = 92 ember szerzi a híreket.

Ezt a gondolatmenetet a halmazok jelölésével leírva:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| -$$

$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \qquad (2)$$

Egyik forrásból sem szerez híreket: 100 – 92 = 8 ember, ezt halmazokkal leírva:

$$\left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = |U| - |A \cup B \cup C| =$$

$$= |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Most azt keressük, hányan szerzik a híreket csak a tévéből. Összesen 65-en szerzik a tévéből, de ebből le kell vonni azokat, akik a tévéből és az újságból is, és azokat, akik a tévéből és a rádióból is szerzik a híreket: 65 – 20 – 27. De ekkor kétszer vontuk le azokat, akik mindhárom forrásból szerzik a híreket, így ezek számát egyszer hozzá kell adni, tehát csak a tévéből szerez híreket 65 – 20 – 27 + 6 = 24 ember.

Halmazok jelölésével leírva:

$$\left|A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Hasonlóképpen csak a rádióból: 38 – 27 – 9 + 6 = 8,

$$\left|\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right| = |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Csak az újságból: 39 – 20 – 9 + 6 = 16,

$$\left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right| = |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Tehát csak egy forrásból 24 + 16 + 8 = 48 megkérdezett szerzi a híreket.

Az (1) és (2) egyenletekkel jelzett összefüggéseket ***logikai szitának*** nevezzük.

logikai szita

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \text{és} \quad \left|\overline{A \cup B}\right| = |U| - |A \cup B| \qquad (1)$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \qquad (2)$$

Feladatok

1. Egy pizzaárus 100 egymás utáni pizzarendelést jegyzett fel. 60 vásárló kért sajtot is és pepperonit is a pizzájára, 80 vásárló sajtot, és 72 pepperonit kért a pizzájára.
a) Hányan rendeltek sajtos pizzát pepperoni nélkül?
b) Hányan rendeltek pepperonis pizzát sajt nélkül?
c) Hányan nem kértek se sajtot, se pepperonit a pizzájukra?

2. Az iskolában 75 tanuló jár egy évfolyamra. 16-an tanulnak angolul, franciául és németül is, 24-en angolul és németül, 30-an angolul és franciául, és 22-en franciául és németül. 7 olyan tanuló van, aki csak angolul tanul, 5 csak franciául, és 10 csak németül.
a) Összesen hányan tanulnak angolul?
b) Hányan vannak azok, akik angolul és franciául tanulnak, de nem tanulnak németül?
c) Hányan vannak azok, akik egyik nyelvet sem tanulják ezek közül?

3. A kosárlabda-bajnokság egy fordulójában összeszámolták, hogy hány játékos szerzett pontot kétpontos dobással a mezőnyből, hárompontos dobással a mezőnyből, illetve büntetőből. 70 játékos dobott kétpontos kosarat mezőnyből, 44 játékos dobott hárompontos kosarat mezőnyből, és 32 játékos szerzett pontot büntetőből. 19-en dobtak mezőnyből kétpontos és hárompontos kosarat is, 16-an dobtak kétpontos kosarat mezőnyből és szereztek pontot büntetőből is. 21-en dobtak hárompontos kosarat mezőnyből és szereztek pontot büntetőből, valamint 6-an szereztek pontot mindháromféleképpen.
a) Hány játékos dobott csak kétpontos kosarat mezőnyből?
b) Hány játékos szerzett pontot két- vagy hárompontos dobással mezőnyből, de nem szerzett pontot büntetőből?
c) Hány játékos szerzett pontot két- vagy hárompontos dobással mezőnyből?
d) Hány játékos nem szerzett pontot büntetőből?

4. Egy toronyba 102 lépcsőfok vezet. Dorka 1, Gabi 2, Zsuzsi 3 lépcsőfokot megy fel egy lépéssel. Hány lépcsőfok van, melyet pontosan ketten használnak közülük amíg felérnek?

5. *a)* Hány olyan 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal?

b) Hány olyan 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

c) Hány olyan 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

d) Számoljuk össze, hogy hány 100-nál nem nagyobb prímszám van.

6. Az iskolában a matematikaszakkörbe járó tanulók 80%-a kosarazik, és a kosárlabdázók 30%-a jár matematikaszakkörbe. Ha összesen 15 tanuló jár matematikaszakkörbe, akkor hány tanuló kosarazik?

7. Egy matematikai olimpián 100 tanuló vett részt, és 4 feladatot tűztek ki. Az első problémát pontosan 90 tanuló oldotta meg, a másodikat pontosan 80, a harmadikat pontosan 70, a negyediket pedig pontosan 60. Egyetlen résztvevő sem oldotta meg mind a négy feladatot. Aki a harmadik és a negyedik feladatot megoldotta, díjat nyert. Hányan nyertek díjat?

8. Osztályunk 20 tanulója közül 14 barna szemű, 15 sötét hajú, 17 gyerek 50 kg-nál nehezebb, 18 pedig 160 cm-nél magasabb. Mutassuk meg, hogy legalább 4 gyerek mind a négy tulajdonsággal rendelkezik.

9. Az osztály új tanárt kapott. A hetes így mutatta be társait: Az osztálynak 45 tanulója van, köztük 25 fiú. A jeles tanulók száma 30, köztük 16 fiú. 28-an sportolnak, közülük 18 fiú, illetve 17 jeles tanuló. 15 olyan fiú van, aki jeles tanuló és sportol is. A tanár szólt a hetesnek, hogy a jelentés hibás volt. Honnan tudta, ha korábban senkit sem ismert az osztályból?

10. Egy 1000 házaspárból álló társaságban a feleségüknél magasabb férjek $\frac{2}{3}$-a nehezebb is a feleségénél. A feleségüknél nehezebb férjek $\frac{3}{4}$-e magasabb a feleségénél. Ha 120 feleség van, aki magasabb is és nehezebb is a férjénél, akkor hány férj magasabb és nehezebb a feleségénél?

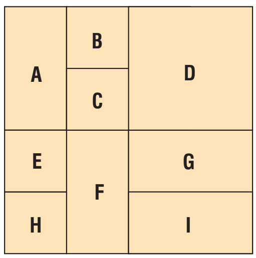
11. Négy halmaz közül bármely kettőnek egy közös eleme van, bármely három halmaz metszete üres. Adjunk meg a feltételeknek megfelelő halmazokat! Adjunk meg a feltételeknek megfelelő háromelemű halmazokat! Megadható-e öt darab, a feltételeknek megfelelő halmaz? Megadható-e öt darab, a feltételeknek megfelelő háromelemű halmaz?

12. Adjuk meg a természetes számoknak három olyan részhalmazát, amelyekre teljesül, hogy bármely kettő közös részének végtelen sok eleme van, de a három halmaz metszete üres!

Rejtvény

Egy négyzetet egybevágó négyzet alakú papírlapokkal fedtünk le, az eredmény az ábrán látható.

Milyen sorrendben raktuk le a papírlapokat?



Függvények

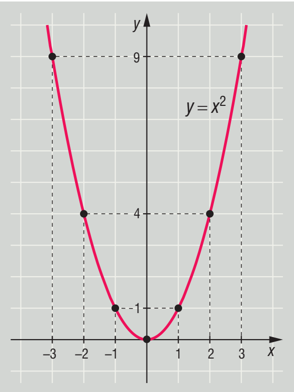
„...a természet alapvető törvényei nem fejezhetők ki másképpen, mint matematikai alakban, számokkal jellemezhető fizikai mennyiségek közötti összefüggések alakjában. Más szóval: a természet nagy könyvében csak az tud olvasni, aki ismeri azt a nyelvet, amelyen e könyv írva van, és ez a nyelv: a matematika.”

A fenti szavakat Galilei véleményeként idézi RÉNYI ALFRÉD az Ars mathematica című gyűjteményében, „A természet könyvének nyelve” című dialógusban.

GALILEO GALILEI (1564–1642) olasz fizikus, matematikus elsők között ismerte fel, hogy a fizikai jelenségeket kísérletekkel tanulmányozhatjuk, s a törvényszerűségek leírására a matematika eszközei, a függvények használhatók.

4. A másodfokú függvény

A következőkben olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyekben az x változó legmagasabb előforduló hatványa a második hatvány. Ezeket a függvényeket *másodfokú függvényeknek* nevezzük.



33. ábra

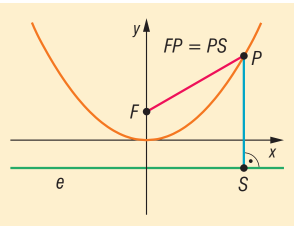
1. példa

Az a (pl. cm) oldalú négyzet területe a^2 (cm^2). Ehhez kapcsolódva értelmezhetjük a pozitív számokon a $g(a) = a^2$ függvényt. Ábrázoljuk most ennek a függvénynek az összes valós számra való f kiterjesztését, azaz a következő függvényt:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2!$$

Megoldás

Az f függvény képe egy szép görbe, amelynek a neve ***parabola*** **(33. ábra)**. A geometriában később megtanuljuk, hogy a parabola azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek egy adott e egyenestől és egy adott – az e egyenesre nem illeszkedő – F ponttól egyenlő távolságra vannak **(34. ábra)**. Az F pont a parabola ***fókusza,*** az e egyenes a parabola ***vezéregyenese.*** Az f függvény grafikonjaként kapott parabola ***tengelye*** az y tengely, ***csúcspontja*** az origó.



34. ábra

Jellemezzük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvényt!

A $]-\infty; 0]$-ban csökken, a $[0; +\infty[$-ben nő, az $x = 0$ helyen minimuma van, ennek értéke $f(0) = 0$. Be lehet bizonyítani, hogy a függvény értékkészlete a $[0; +\infty[$ intervallum, azaz a nemnegatív valós számok halmaza.

A függvény grafikonja, a parabola, szimmetrikus az y tengelyre. Ennek egyszerű oka van, hiszen $(-x)^2 = x^2$, tehát ha egy $P(x; y)$ pont rajta van a parabolán, akkor a P-nek y tengelyre vonatkozó $P'(-x; y)$ tükörképe is illeszkedik a görbére. Az f függvénynek ezt a tulajdonságát így is megfogalmazhatjuk: $f(-x) = f(x)$.

Ha $f(-x) = f(x)$, akkor
***f* páros függvény**

DEFINÍCIÓ: **Azokat a függvényeket, amelyeknél az értelmezési tartomány minden x elemére $f(-x) = f(x)$ teljesül, *páros függvényeknek* nevezzük.**

Például a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ is páros függvény, hisz erre is igaz, hogy $g(-x) = g(x)$ teljesül az értelmezési tartomány minden elemére. A g függvény grafikonja is szimmetrikus az y tengelyre.

2. példa

Ábrázoljuk a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket:

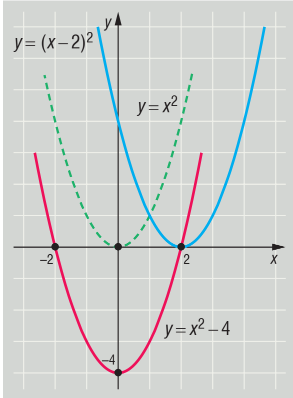
$$g(x) = (x-2)^2; \qquad h(x) = x^2 - 4!$$

Megoldás

Ha értéktáblázatot készítünk a g függvény grafikonjának megrajzolásához, hamar észrevehető, hogy ugyanazokat az értékeket az $(x-2)^2$

éppen 2-vel nagyobb helyen veszi fel, mint az x^2. Például a 0-t a 2 helyen, az 1-et a 3 helyen, a 4-et a 2 helyen. Az ábrázoláskor ez azt jelenti, hogy az x^2 képét az x tengely mentén 2-vel pozitív irányba eltolva kapjuk meg az $(x-2)^2$ képét.

Még nyilvánvalóbb a h függvény definíciójából, hogy az $x^2 - 4$ grafikonját úgy kapjuk az x^2 grafikonjából, hogy 4 egységgel toljuk az y tengelyen negatív irányba. ***(35. ábra)***



35. ábra

3. példa

Ábrázoljuk és jellemezzük a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket:

$f(x) = x^2 - 2x + 3$; $g(x) = 1 - x^2$; $h(x) = -x^2 + 4x - 3$!

Megoldás

Az f-et így is írhatjuk, azaz teljes négyzetté alakítjuk:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2.$$

Az x^2 függvény képét adó parabolát tehát 1-gyel jobbra, 2-vel felfelé (pozitív irányba) kell eltolni. ***(36. ábra)***

Az f függvény tehát a $]-\infty; 1]$ intervallumban csökken, az $[1; +\infty[$-ben növekszik, az $x = 1$ helyen minimuma van, a minimum értéke $f(1) = 2$. Az f értékkészlete a $[2; +\infty[$ intervallum.

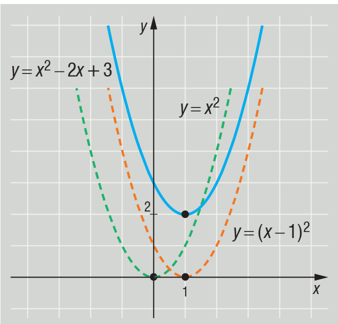
A g függvényt írjuk így: $g(x) = -x^2 + 1$, és először ábrázoljuk az $x \mapsto -x^2$ függvényt. Ez abban tér el az x^2 függvénytől, hogy értéke mindenütt annak -1-szerese, ami azt jelenti, hogy az x^2 képét tükrözni kell az x tengelyre. A g képét ebből úgy kapjuk, hogy 1 egységgel feljebb toljuk. ***(37. ábra)***

A h függvényt így célszerű írni:

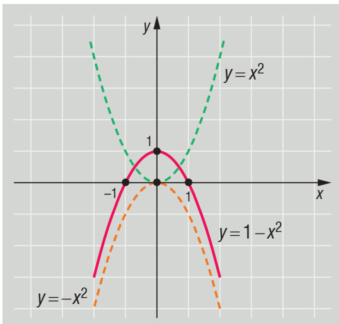
$$h(x) = -(x^2 - 4x + 3) = -(x-2)^2 + 1.$$

Ebből az alakból megrajzolva a h képét a 38. ábrán láthatjuk. A h függvény a $]-\infty; 2]$ intervallumban nő, a $[2; +\infty[$ intervallumban csökken, a 2 helyen maximuma van. A maximum értéke $h(2) = 1$. A h értékkészlete a $]-\infty; 1]$ intervallum.

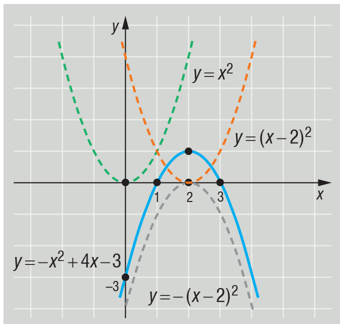
36. ábra



37. ábra



38. ábra

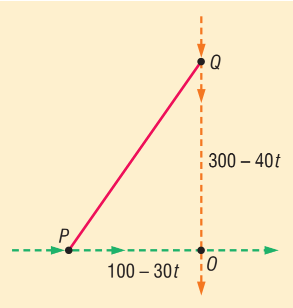


4. példa

A függvényeknél szerzett ismeretek felhasználásával oldjuk meg a következő feladatot! Két hajó a tengeren halad két, egymásra merőleges egyenes vonal mentén az egyenesek metszéspontja felé. Egy adott időpontban az első hajó, amely 30 km/óra sebességgel halad, 100 km-re van a két egyenes metszéspontjától, O-tól. A második hajó, amely 40 km/óra sebességgel halad, ugyanebben az időpontban 300 km-re van O-tól. Mennyi idő múlva lesz legközelebb egymáshoz a két hajó, és mekkora ez a legkisebb távolság?

Megoldás

Jelöljük t-vel az adott időponttól eltelt időt órákban mérve, és számítsuk ki a két hajó távolságát a t időpontban. Az első hajó, amelynek a t időpontbeli helyét P-vel jelöltük, $30t$ kilométert tett meg, így O-tól mért távolsága $PO = 100 - 30t$. Ha P az O-tól jobbra lenne, akkor ez a távolság $30t - 100$ lenne, tehát a mindkét esetben jó távolságképlet: $PO = |100 - 30t|$. **(39. ábra)**



39. ábra

A Q-val jelölt második hajó távolsága O-tól hasonló módon $QO = |300 - 40t|$. A POQ derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján a PQ távolság négyzete:

$$PQ^2 = (100 - 30t)^2 + (300 - 40t)^2.$$

Nyilván a távolság négyzete ugyanakkor a legkisebb amikor a távolság a legkisebb. Feladatunkat tehát a következőképpen fogalmazhatjuk: adott az

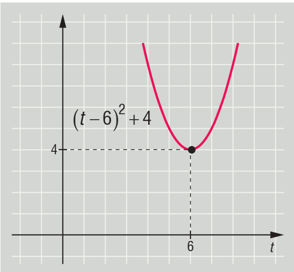
$$f(t) = (100 - 30t)^2 + (300 - 40t)^2, \quad t \geq 0$$

függvény, keressük meg a minimum helyét és a minimum értékét.

Alakítsuk át először a függvényt megadó kifejezést:

$$(100 - 30t)^2 + (300 - 40t)^2 =$$
$$= 10000 - 6000t + 900t^2 + 90000 - 24000t + 1600t^2 = 2500(t^2 - 12t + 40)!$$

Elég megkeresni tehát a $g(t) = t^2 - 12t + 40 = (t - 6)^2 + 4, \quad t \geq 0$ függvény minimumhelyét, ugyanitt lesz a legkisebb f értéke is.



40. ábra

Ábrázoljuk a g függvényt **(40. ábra)**. A g függvény képe egy parabola, amelyet az ún. normál parabolából (az x^2 függvény képéből) úgy kapunk, hogy azt 6-tal jobbra és 4-gyel felfelé eltoljuk. A g minimumhelye $t = 6$, a minimum értéke $g(6) = 4$. Ennek megfelelően f minimumhelye is $t = 6$, a minimum értéke $f(6) = 2500 \cdot 4 = 100^2$.

A feladat kérdésére tehát a válasz a következő: a két hajó az adott időponttól számítva 6 óra múlva lesz legközelebb egymáshoz, akkor a távolságuk 100 km.

Már sokszor rajzoltuk le az x^2 függvény grafikonját, a (normál) parabolát. Mindig úgy rajzoltuk le, hogy ha a parabola két pontját összekötő húrt vesszük, akkor a görbe a két pont között a húr alatt halad ***(41. ábra)***. Valóban igaz ez?

Most belátjuk, hogy ha $a < b$, és az $(a; a^2)$, $(b; b^2)$, pontokat összekötő húrt megrajzoljuk, akkor az $[a; b]$ intervallum felezőpontjában a parabola pontja valóban a húr alatt van. Az x^2 függvény görbéjének ezt a tulajdonságát úgy nevezik, hogy a görbe (alulról nézve) **konvex.** ***(42. ábra)***

Az ábra jelöléseit használva elég belátni, hogy $FR < FS$. Az FR szakasz hossza: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Az FS az $ABQP$ trapéz középvonala, tehát $F = \frac{PA+QB}{2}$.

Mivel $PA = a^2$, $QB = b^2$, elég igazolni, hogy $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{a^2+b^2}{2}$.

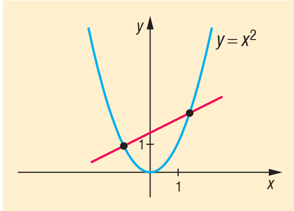
A bal oldalon végezzük el a négyzetre emelést, és szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát 4-gyel:

$$a^2 + 2ab + b^2 < 2a^2 + 2b^2!$$

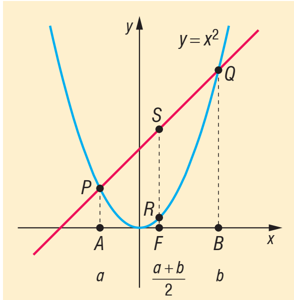
A jobb oldal akkor és csak akkor nagyobb, mint a bal oldal, ha a jobb oldal és bal oldal különbsége pozitív. Ez viszont igaz, mert a különbség:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (b - a)^2 > 0,$$

hiszen $b > a$. Mivel a lépések megfordíthatók, az eredeti állítás is igaz.



41. ábra



42. ábra

Feladatok

1. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket!

a) $f(x) = x^2 + 1$; *b)* $g(x) = -x^2$;

c) $h(x) = (x - 1)^2$; *d)* $k(x) = -(x + 1)^2$;

e) $l(x) = -x^2 + 4$.

2. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket!

a) $f(x) = 2x^2$; *b)* $g(x) = \frac{1}{2}x^2$;

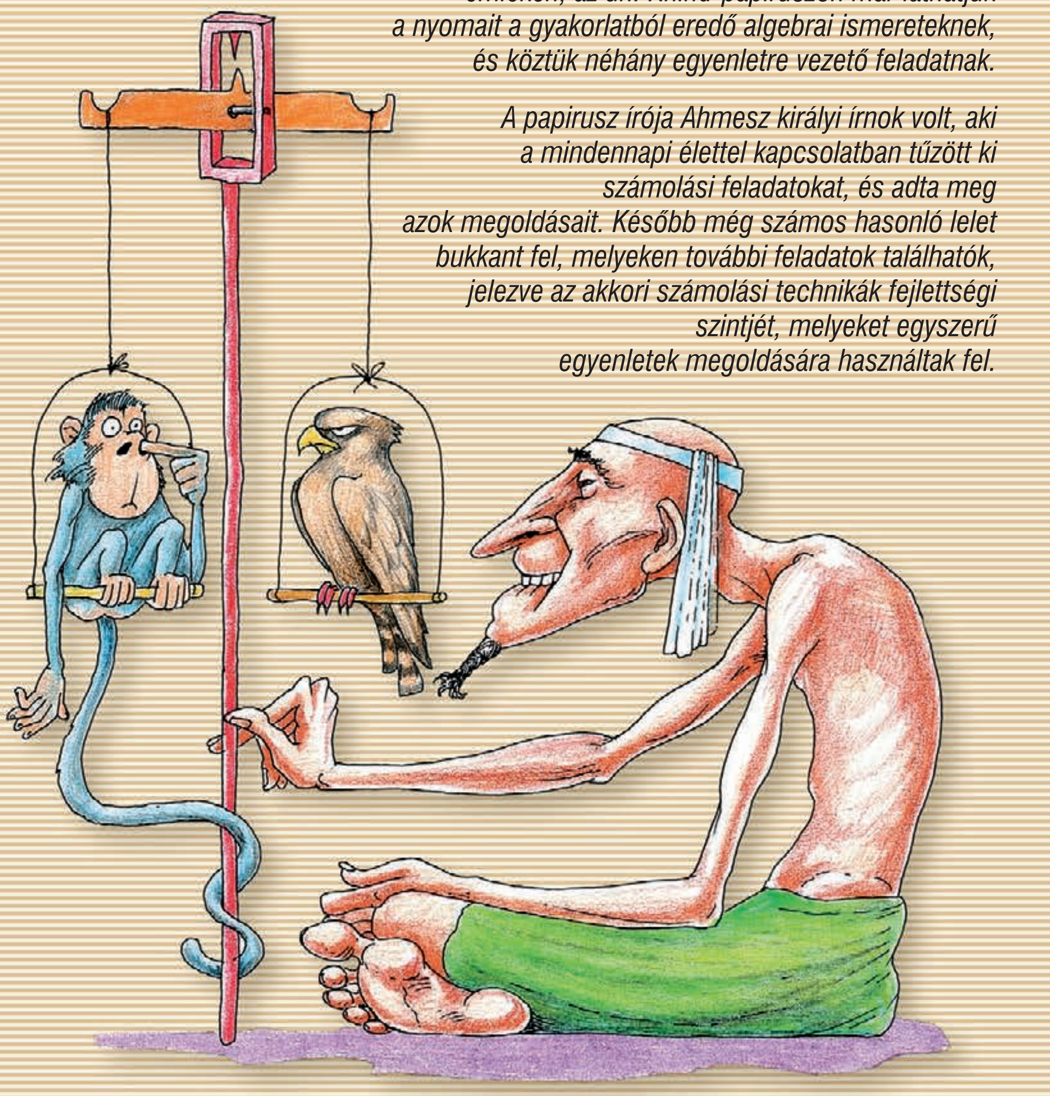
c) $h(x) = x^2 - 6x + 5$; *d)* $k(x) = -x^2 - 4x + 2$.

3. Egy követ függőlegesen feldobunk 20 m/s sebességgel. Milyen magasra megy fel, és mennyi idő múlva esik vissza a földre? (A nehézségi gyorsulást válasszuk kerekítve 10 m/s^2-nek, és a levegő ellenállását hanyagoljuk el. A kő útja kétféle: egy felfelé haladó egyenletes mozgás, és egy lefelé haladó egyenletesen gyorsuló mozgás eredőjeként számolható. Ez utóbbinak útfüggvénye az $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2$.)

Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

Az ókori Mezopotámiából Kr. e. 2000-ből származó ékírásos táblák alapján tudjuk, hogy az akkori írástudók már meg tudtak oldani egyenleteket és egyenletrendszereket. A mai ismereteink szerint a legrégebbi egyiptomi írásos emléken, az ún. Rhind-papiruszon már láthatjuk a nyomait a gyakorlatból eredő algebrai ismereteknek, és köztük néhány egyenletre vezető feladatnak.

A papirusz írója Ahmesz királyi írnok volt, aki a mindennapi élettel kapcsolatban tűzött ki számolási feladatokat, és adta meg azok megoldásait. Később még számos hasonló lelet bukkant fel, melyeken további feladatok találhatók, jelezve az akkori számolási technikák fejlettségi szintjét, melyeket egyszerű egyenletek megoldására használtak fel.



5. Megoldás lebontogatással, mérlegelvvel

Az egyenlet megoldása során általában szükséges, hogy át is alakítsuk azt. Ezt a folyamatot nevezzük az egyenlet **rendezésének.** Az átalakítások közül **ekvivalens átalakításoknak** nevezzük azokat, amelyek során nem veszítjük el az egyenlet egyik gyökét sem, és nem kapunk olyan megoldásokat sem, amelyek az eredeti egyenletnek nem gyökei (ezeket **hamis gyököknek** nevezzük).

egyenlet rendezése

ekvivalens átalakítások

Az átrendezések közben a **mérlegelvből** adódó szabályok szerint járunk el. Ez azt jelenti, hogy ekvivalens átalakítások során az egyenlet mindkét oldalán ugyanazokat a műveleteket hajtjuk végre, a következő feltételeket figyelembe véve:

mérlegelv

Az ekvivalens átalakítások során az egyenlet mindkét oldalán ugyanazokat a műveleteket hajtjuk végre.

- Az egyenlet mindkét oldalához **hozzáadhatjuk,** illetve **kivonhatjuk** ugyanazt a számot:

$$6x - 3 = 9 \quad /+3,$$
$$6x = 12.$$

- Az egyenlet mindkét oldalát **szorozhatjuk,** illetve **oszthatjuk** ugyanazzal a 0-tól különböző számmal:

$$6x = 12 \quad /:6,$$
$$x = 2.$$

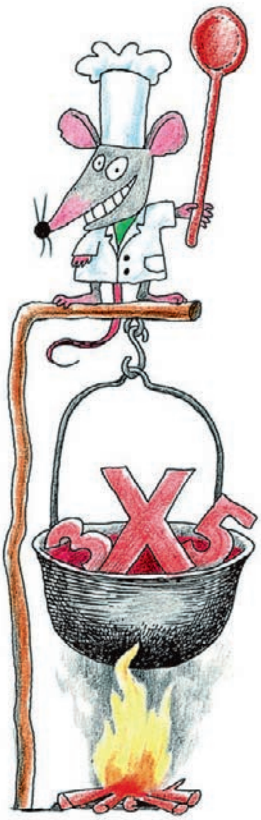
- Ismeretlent tartalmazó tagot is hozzáadhatunk, illetve kivonhatunk, ha az nem változtatja meg az egyenlet alaphalmazát:

$$8x = 6x - 2 \quad /-6x,$$
$$2x = -2,$$
$$x = -1.$$

- Ha ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorzunk, akkor **hamis gyököket** kaphatunk, ha pedig osztunk vele, akkor az **gyökvesztéshez** vezethet. Ezért ezt a műveletet lehetőleg ne alkalmazzuk. Ha mégis sor kerül rá, akkor különösen nagy gondot fordítsunk az egyenlet megoldásainak ellenőrzésére!

hamis gyök

gyökvesztés



1. példa

Gondoltam egy számot, a kétszereséből hatot kivontam, az eredményt megfeleztem, és így végül hármat kaptam. Melyik számra gondoltam?

I. megoldás

A feladat megoldását megkaphatjuk, ha az egyes lépesek során kapott eredményeket **lebontogatással** visszakeressük.

Az utolsó lépésben 2-vel osztva 3-t kaptunk eredményül, az osztandó tehát 6 volt. Ezt a 6-ot úgy kaptuk, hogy egy számból kivontunk 6-ot, tehát a kisebbítendő 12 volt. Ez a 12 a gondolt szám 2-szerese, vagyis a gondolt szám 6 volt.

Valóban:

$$\frac{2\cdot 6-6}{2}=\frac{12-6}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

II. megoldás

Oldjuk meg a feladatot egyenlettel! Legyen a gondolt szám az x. A feladat szövege alapján a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\frac{2x-6}{2}=3.$$

Ezt a **mérlegelv** alkalmazásával a következő módon oldhatjuk meg:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-6}{2}&=3 && /\cdot 2,\\
2x-6&=6 && /+6,\\
2x&=12 && /:2,\\
x&=6.
\end{aligned}$$

Tehát a gondolt szám a 6, ennek helyességéről már az előző megoldás során meggyőződhettünk.

2. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$3(x-2)-2(-2x+3)+1=\frac{13x+7}{7}-\frac{12x}{14}!$$

Megoldás

A megoldásban arra törekszünk, hogy a végrehajtott átalakítások során egyenletünk egyre **egyszerűbb legyen,** és **a végén az egyik oldalon csak az ismeretlen álljon.**

A bal oldalon végezzük el a zárójelek felbontását, a jobb oldalon pedig egyszerűsítsük a második törtet, így a két tört már közös nevezőn szerepel.

$$3x-6+4x-6+1=\frac{13x+7-6x}{7},$$
$$7x-11=\frac{7x+7}{7}.$$

Az összevonások és egyszerűsítések után az egyenlet bal oldalára rendezzük az ismeretleneket, a jobb oldalra pedig a konstans tagokat.

konstans = állandó

$$7x - 11 = x + 1,$$
$$6x = 12,$$
$$x = 2.$$

Az ellenőrzés alapján meggyőződhetünk róla, hogy az $x = 2$ valóban megoldása az egyenletnek.

3. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$5x-\frac{3}{2x-10}=25-\frac{3}{2x-10}!$$

Megoldás

Az egyenlet értelmezési tartománya nem tartalmazhatja azt a számot, melyre a $2x - 10 = 0$, hiszen ekkor a törtnek nincs értelme. Ez azt jelenti, hogy az értelmezési tartományban minden valós szám megtalálható, kivéve az 5-öt.

Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk $\frac{3}{2x-10}$ -et, és így a következő egyenlethez jutunk:

$$2x - 10 \neq 0,$$
$$2x \neq 10,$$
$$x \neq 5.$$

$$5x = 25,$$
$$x = 5.$$

A tört hozzáadásával ismeretlent tartalmazó kifejezést adtunk hozzá az egyenlet mindkét oldalához, és ezzel **annak értelmezési tartományát megváltoztattuk.** Az így kapott egyenlet értelmezési tartománya már a valós számok halmaza lett, és olyan megoldás adódott, amelyik az eredeti egyenletnek a megadott feltételek miatt nem lehet gyöke. Ezt az eredményt ezért **hamis gyöknek** nevezzük. Az egyenletnek nincs megoldása.

hamis gyök

Hamis gyököt kapunk pl.:

$$\frac{1}{x}+1=\frac{1}{x} \quad /\cdot x,$$
$$1+x=1,$$
$$x=0.$$

Az eredeti egyenletben x nem lehet 0!

4. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x(3x-8)(2x+3) = 6x^3 - 7x^2 + 24!$$

Megoldás

Az egyenlet értelmezési tartománya: $\mathbb{R}$.

Először végezzük el a bal oldalon a zárójelek felbontását, majd vonjuk össze az egynemű kifejezéseket!

$$\begin{aligned} x(6x^2 + 9x - 16x - 24) &= 6x^3 - 7x^2 + 24, \\ x(6x^2 - 7x - 24) &= 6x^3 - 7x^2 + 24, \\ 6x^3 - 7x^2 - 24x &= 6x^3 - 7x^2 + 24, \\ -24x &= 24, \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Megfigyelhető, hogy az átalakítások során egyszer sem hajtottunk végre olyan lépést, melynek során megváltoztattuk volna az egyenletünk értelmezési tartományát, vagy új gyököket kaptunk volna. Mindegyik lépés **ekvivalens átalakítás** volt. A kapott gyök helyességéről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.

Feladatok

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $2(2x+1) - 1 = 1 - 2(1+2x)$;

b) $\dfrac{2y}{3} - \dfrac{3y}{2} = \dfrac{1}{6}$;

c) $2\dfrac{1}{3}z - 1\dfrac{3}{5}(5-z) = 1$;

d) $2[2(2v-1)-1]-1 = 0$.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $2(x+1)\dfrac{1}{x} - 1 = 1 - \dfrac{2(1+2x)}{x}$;

b) $\dfrac{2y}{y+1} - \dfrac{3y}{y+1} = \dfrac{1}{6}$;

c) $\dfrac{z}{3z-3} - \dfrac{5-z}{z-1} = 1$;

d) $\dfrac{v-1}{v+1} - \dfrac{2v-1}{2v+1} = 0$.