A MATEMATIKA tanítása

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

2013/2

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Kosztolányi József

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Szőke András

Megjelenik évente 4 alkalommal.

TARTALOM

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat e-mailen a kattila@mozaik.info.hu címre küldjék meg. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

Kérjük, a kézirathoz csatoljanak egy rövid magyar nyelvű kivonatot és egy angol nyelvű Abstract-ot!

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön fájlokban is kérjük mellékelni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat.

Gondolod, hogy egyre megy? – A tudós tanár Szendrei Julianna emlékére

Az elmúlt időszak a matematika tanításában sok szomorú hírt hozott. Olyan óriásokat veszítettünk el, mint Pálmay Lóránt, Urbán János, Fried Ervin. Ebben az évben január 13-án elhunyt Szendrei Julianna is.

Úgy lenne helyénvaló, ha most valami tárgyszerű, életrajzi adatokban bővelkedő megemlékezés következne. Ez az írás azonban inkább egy személyes nekrológ lesz. Nem is lehet más, főleg személyes érintettségem okán, hiszen sohasem olyan módon néztem fel rá, mint a tudósra, tanulmányok és könyvek szerzőjére, tantervíróra, híres hazai és nemzetközi matematika-didaktikai társaságok kulcsemberére vagy a Tanítóképző Matematika Tanszékének vezetőjére. Inkább azt az embert tiszteltem, aki nagyon is valóságos, gondolatainak egy részét írásos formában publikálja, más részét előadásokon hozza nyilvánosságra, de többségét tetteivel vagy személyes beszélgetések során közvetíti. Másrészt olyannyira sokoldalú személyiség volt, hogy ha munkásságát egy időrendi vagy téma szerinti láncra fűzve próbálnánk bemutatni, az keveset árulna el az emberről.

1990-ben ismertem meg Szendrei Juliannát. Amikor a Tanítóképzőbe hívott tanítani, azt megdöbbentő indokkal tette. Azt mondta, ő a munkatársait a tekintetük alapján választja és az én nézésem megtetszett neki. Az együtt töltött évek során még sokszor előfordult, hogy valami olyat mondott, amit az adott pillanatban nem éreztem odavalónak, azonban később megláttam az értelmét. Ezek után sohasem csodálkoztam azon, ha egy gondolatát nem sikerült azonnal átlátnom. Tudtam és tudom, hogy a megfelelő időben értelmet nyernek majd. Tanításában ugyanezt a módszert alkalmazta. Egy ideig látszólag rendszertelenül, nehezen követhetően vezette az órát, de egy idő után összeállt a kép, fény derült az elhintett megjegyzések, próbálkozások értelmére. Hirtelen értelmet nyert az, ami eddig parttalannak, teljesen összefüggéstelennek látszott.

Próbáltam megfejteni bonyolult személyiségét, de nehéz megfogalmazni, milyen is volt ő valójában. Inkább azt, hogy milyen nem volt. Russel így fogalmaz, amikor a matematika művészi erejéről ír. *„A matematikát, ha helyesen fogjuk fel, nemcsak igazság, hanem egyszersmind magasrendű szépség is jellemzi: hideg és szigorú, a szobrászatéhoz hasonló szépség, mely nem fordul gyöngébb természetünk egyetlen részéhez sem, s amely nélkülözi a festészet és a zene elkápráztató kellékeit, viszont fenségesen tiszta, és oly szigorú tökélyre képes, amilyent csak a legnagyobb művészet tud felmutatni.”* Ez a felfogás tökéletes ellentéte annak, amit Juli a matematika tanításában képviselt. Szerette a matematikát, egyfajta művészetnek tekintette, de a hideg szigorúságot elutasította, és legfőképpen azt, hogy a matematika az „erősebb természetűek” privilégiuma. Minden erejével arra törekedett, hogy a matematika emberi arcát mutassa. Tudatában volt annak, hogy a rideg szépség sokakat riaszt. Ő maga is igyekezett mindig emberi mivoltát mutatni, bár tehette

volna, soha nem éreztette tudásbeli, szakmai fölényét, tekintélyét. Tudta, hogy ez félelmet, kisebbségi érzést, esetleg szorongást eredményez. Egy alkalommal a tanításról beszélgettünk. Ekkor ajánlotta Bruno Bettelheim „Az elég jó szülő” című könyvét azzal, hogy nem kell tökéletes tanárnak lenni, megfelel, ha valaki *elég jó* abban, amit csinál.

Bár kiválóan tudta a matematikát, a matematika tanításán kívül ezer más is érdekelte. Sőt, hogy éppen matematikatanár lett, az részben a véletlenen múlt. Eredetileg diplomata akart lenni, de mást kellett választania. „Kinyitottam a felvételi tájékoztatót, megkerestem azt a szakot, ahova a legtöbbet vették fel abban az évben, és nekem még valahogy ment. És akkor eszembe jutott, hogy én jól tudom a matematikát, meg jól tudok magyarázni.” (Én őket nem tudom megtanítani tanítani, beszélgetés Knausz Imrével, Taní-Tani online folyóirat, 2008/3. 3–11.) Remek diplomáciai érzékét később azért módjában állt használni itthon és külföldön egyaránt.

Szerteágazó érdeklődésének helyet talált a matematika tanításán és kutatásán belül is. Törekedett arra, hogy bemutassa a matematika és a hétköznapok kapcsolatát. Soha nem vetett fel problémát öncélúan. „Nem csak az a feladatunk, hogy elképzelhető legyen a feladat, hanem, hogy a gyerekek közben el is képzeljék. Ha valódi életből vett adat miatt asszociálnak valamire, azt meg kell hallgatnom. Nem mondhatom, hogy ez nem tartozik ide, mert akkor elzárom a gyerektől a matekot és az iskolán kívül nem fogja használni, csak az órán, és így felesleges az óra.” – jegyezte fel egy tanítványa egy szemináriumon.

Legfontosabb munkája a „Gondolod, hogy egyre megy?” című könyve volt, amit 2005-ben írt meg. Ebben összegzi életének és kutatásainak évtizedes tapasztalatait, kiderülnek belőle a matematika tanításáról alkotott gondolatai. „…valahány évesnek kell lenni, amíg az ember rájön, hogy na akkor most már tényleg meg kell írni, mert már meg tudom írni.” A párbeszédes forma nagyon jól illeszkedik mondanivalójához és személyiségéhez. Bár a könyv alapvetően a matematika tanításáról szól, a figyelmes olvasó képet kaphat sokszínű tudásáról is.

Legszívesebben a geometriát tanította. Órái híresek voltak érdekes ötleteiről, hosszan tartó konstrukciós feladatairól, valamint a képzőművészet és a geometria kapcsolatának bemutatásáról, ahol nagyon szívesen elemezték Escher képeit. Kristályformák c. munkája a téma iránti érdeklődését mutatja. A másik nagy kedvence a valószínűség-számítás volt. Az Országos Pedagógiai Intézetben tagja volt a Varga Tamás vezette munkacsoportnak, ahol kidolgozták a komplex matematikatanítási kísérletet. A valószínűség-számítás tanítása a magyar közoktatásba ekkor került be először. Az első munkalapok és a Kapcsolat című folyóiratok tanulmányozása látni engedi, hogy ebben a témában rengeteg jó ötletet, príma tevékenységet köszönhetünk neki. Közösen gondolkodva próbálták azt a szakadékot áthidalni, ami a valószínűségi szemléletfejlesztés és a valószínűség számítása között érezhető.

Az OPI-ban eltöltött éveknek köszönhette barátságát Varga Tamással, akit talán a legnagyobb példaképének tartott. Komoly erőfeszítéseket tett azért, hogy Varga Tamás szellemi hagyatékát megőrizze. Nemzetközi és hazai konferenciákat, kiállítást szervezett, kiadványokat szerkesztett. De a hétköznapokon is, amikor a tanításról beszélgettünk, minden alkalommal szóba hozta, hogy Tamás mit gondolt az adott témáról.

Szeretett játszani. Hitte, hogy a játék lehet a matematikatanítás része. Erről tanúskodnak a „Matek-játék a napköziben és otthon”, „A játék matematikája”, „Játsszunk matematikát!” vagy a „Matematika Mindenkinek” c. munkái. De nem csak a matematikai játékokat szerette. Szívesen játszott pszichodrámát is, amit olyannyira megszeretett, hogy kitanulta a drámacsoport vezetésének mesterségét. Ez nagyon illett hozzá. Önmagát jó diagnosztának minősítette, ami igaz volt. Hamar átlátta az emberek tulajdonságait, motivációit. Ezt a képességét a tanításban jól tudta alkalmazni.

Jelentős számú didaktikai kutatása és írása a tanulási nehézségek eredetének megfejtését és leküzdését célozta. Például a „Tanulási nehézségek a matematikában” vagy a „Matematikai füveskönyv a differenciálásról”. Aktívan részt vett a Loránd Ferenc vezette KOMP-csoport munkájában is, mely az esélyegyenlőségért küzdött. Úgy sejtette, hogy a tanulási nehézségek egyik fő oka a nyelvben gyökerezik, ezért sokat foglalkozott az anyanyelv és a matematikatanítás kapcsolatával. Ebben a témában voltak még kutatási ötletei, melyeket azonban már betegsége miatt nem tudott megvalósítani.

Külön figyelmet szentelt a nagyon hátrányos helyzetű tanulók segítésének, de nem csak az íróasztal mögül. Kereszty Zsuzsa a következő történetet mesélte erről: „Mintegy húsz éve vittem el neked Timi matematika füzetét, kérve, hogy a gyerek hibái alapján segíts, hogy kellene továbblendítenünk őt onnan, ahol a gondolkodása megrekedt. (Timi annak a csenyétei iskolának volt a növendéke, amelynek akkor a mentora voltam – és Timi tanítóival együtt hárman voltunk tanácstalanok.) A füzet kevés volt, a következő héten felültél a vonatra, aznap együtt tanultatok Timivel – és segítettél nekünk. A tisztelet bennem nem abból származott, hogy megfejtetted azt a problémát, amelyet hárman sem tudtunk – hanem abból, hogy ennek a gyereknek, a probléma megoldásának kedvéért 200 kilométert utaztál."

Tanításában és a szakma előtt egyaránt nagyon jó előadó volt. Egyszerűen beszélt, hétköznapi hasonlatokat alkalmazva. A Varga Tamás Napokon vagy a Rátz László vándorgyűléseken mindig megtelt a terem az ő nevére. Ha megnézzük előadásainak címét, azt láthatjuk, hogy mindegyik nagyon egyszerű és általános. Nem derül ki belőle, hogy miről fog beszélni. Például a rangos Országos Neveléstudományi Konferencián az „Értem-e, akit tanítok?" cím pimaszul egyszerűnek tűnt, az előadás mégis nagyon komoly gondolatokat indított a hallgatóságban.

Volt egy kedvenc feladata, mely így hangzott: *32 Ft bélyeg kell egy olyan levélre, amelyik 250 grammnál nem lehet nehezebb. Móninak van egy 14 grammos borítékja. Hány darab 16 grammos rajzot tud ebben elküldeni, ha nem akarja túllépni a 250 grammot?* Ez a feladat egy 1993-as kutatás része volt. Azóta ez a feladat lett az „orvosi ló". Sok kontextusban, mindig más szempont alapján elemezte ezt a problémát és a gyerekek megoldásait. Például „Az önreflexió szerepe és megoldási lehetőségei az egyéni fejlesztésben" c. cikkben (A tanítás jobbításáért, 2005, Haxel Kiadó) a feladatot az önreflexió szempontjából vizsgálta. Jómagam három alkalommal is részt vettem olyan előadásán, amelyik kiindulópontja ez a feladat volt, de az előadások témája más és más. Egy alkalommal a „pedagógiai egyezmény" bemutatására használta fel a levél-problémát. Én akkor találkoztam ezzel a kifejezéssel először, amit ő előszeretettel használt.

Komolyan foglalkoztatta a mértékváltás kérdése. Ebben a témában sok jó előadást hallhattak tőle a tanítók és a tanárok. 2012. október 13-án a Matematikát tanítók klubján a mennyiségek méréséről esett szó. Ebben a témában itt hangzott el legutolsó előadása. Erről szól utolsó cikke is: Mumusunk – a mértékegység átváltás tanítása (2012, Cherd-H, Debrecen. 173-180.), melyben azt kívánja bizonyítani, hogy a mértékegység átváltás tanítása az alsó tagozaton nem csak lehetetlennek tűnő célkitűzés, hanem valóban lehetetlen is. Így fogalmaz: „Igen sok tudással rendelkezünk arról, hogy a mértékegység átváltás témaköre miért tanítható olyan alacsony hatásfokkal az iskolában. Szerencsés lenne, ha a mindennapok iskolája a témakör tanítása kapcsán az évtizedek során felhalmozódott jó gyakorlatokat követné: megelégedne egy jól megértett szűk tudással a sok tanulói és tanítói kudarccal övezett illúziók helyett."

Szendrei Julianna kiváló szakember volt, aki jelentős erőfeszítéseket tett a magyar matematikatanítás jobbításáért. Távozása pótolhatatlan veszteség a szakmának. Az idő múlásával egyre jobban fogjuk érezni, hogy mennyire hiányzik a kollégáknak, tanítványoknak és a barátoknak. Akik ismertük, azzal vigasztalhatjuk magunkat, hogy szerencsések vagyunk, mert részese volt az életünknek.

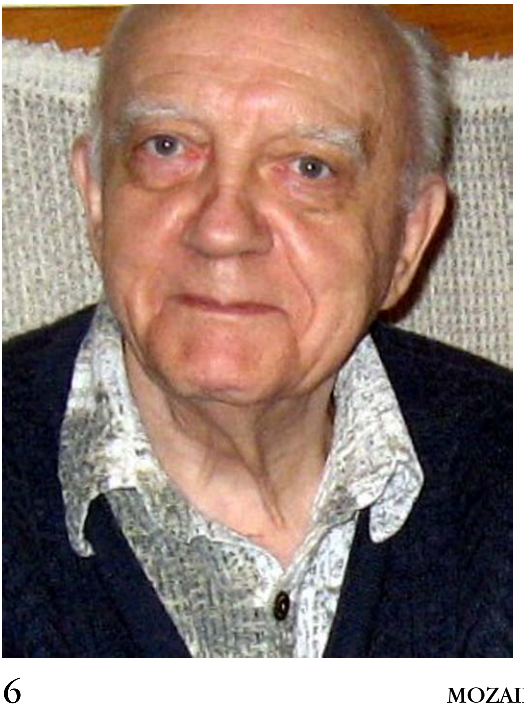
Szitányi Judit, 2013. szeptember

Emlékezés dr. Tóber Ernőre

Az utóbbi hónapokban egymás után érkeztek a szomorú hírek. A matematika oktatásának kiváló képviselői, a matematika középiskolai oktatás gondozói, alakítói, Peller József, Reiman István, Urbán János, Pálmay Lóránt, Fried Ervinné, Reiman Istvánné, Szendrei Julianna, Oláh György – fájdalmas kimondani – befejezték életüket.

Most újabb szomorú hírről értesültünk. 77 éves korában Nagykanizsán, hosszú szenvedés után elhunyt dr. Tóber Ernő középiskolai matematikatanár, a kedves, hűséges jó barát.

Mi jellemezte Tóber Ernő életét, munkásságát? Egyetemi évei alatt – ahogyan egykori diáktársaitól hallottam – feltűnt tehetségével, szorgalmával. Igényességét magával vitte középiskolai tanári munkájába. Lelkiismeretesen tanított, tudós tanárhoz méltóan világos magyarázataival jól szolgálta a tehetséges tanulók szellemi gondozását is. Külön ki kell emelni kifinomult, sokoldalú, alapos és precíz feladatmegoldó képességét. Széles és alapos tárgyi tudásának megkoronázása volt az egyetemi doktori cím megszerzése. Az egyetemi felvételire, vagy a középiskolai tanulmányokra előkészítő feladatgyűjteményei, szakkörei, előadásai is bizonyították, hogy kiváló szaktanárként tartottuk számon Tóber Ernő Tanár Urat. Felkészültségéből, szaktudásából, önzetlen emberi tulajdonságaiból adódóan személy szerint én is sokat tanultam Ernő barátomtól. Hivatkozhatom a középiskoláknak írt matematika tankönyveimre, a feladatgyűjteményekre, amelyek felkért bírálója, lektora volt. A megoldásokat feladatonként nemcsak ellenőrizte, de hasznos tanácsaival, észrevételeivel több esetben javította és csiszolta.



Emberi magatartását példamutatónak tartottuk. Egykori munkatársaival, barátaival együtt elmondhatom, hogy kiváló kollégát, mélyen érző és gondolkodó, igazi humanistát veszítettünk el távozásával.

Kedves, felejthetetlen Ernő barátom! Köszönjük a sok-sok segítséget, amit tőled kaptunk. Nyugodjál békében! Emléked örökké él a szívünkben!

Czapáry Endre
nyug. középiskolai tanár

Simonné Papp Ágnes

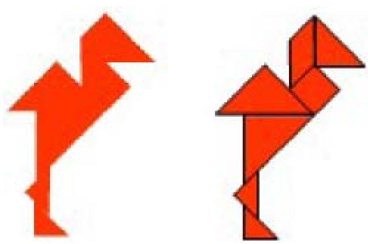
Tangramok a Pitagorasz-tétel bizonyításainak játékos tanításához

Kirakós játékok

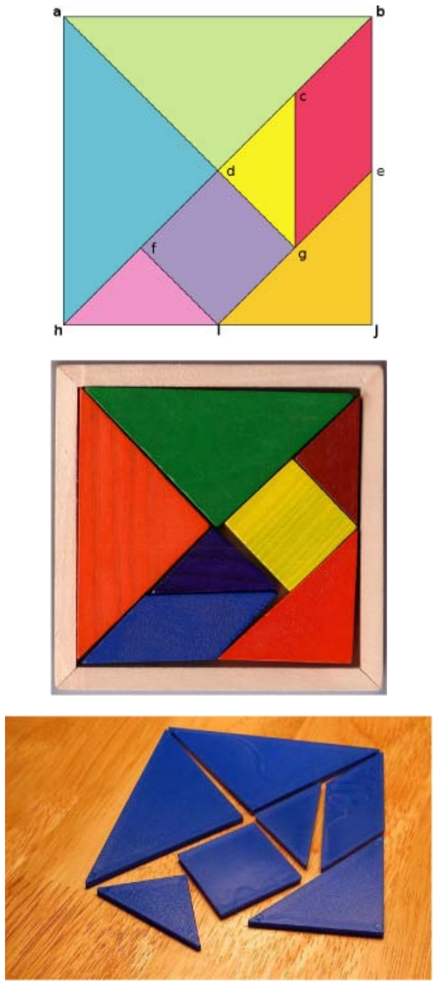
A kétszemélyes játékok, a logikai, stratégiai társasjátékok, különböző gondolkodtató feladványok mindig vonzóbbak voltak a gyerekek – és a felnőttek – számára, mint az iskolai matematikatanulás, pedig ugyanazokat a készségeket, képességeket használjuk mindkettőhöz, és gyakran tapasztaljuk, hogy aki az egyikben tehetséges, annak a másikban is lehet sikerélménye. Az egyszemélyes kirakós játékok is hasonló gondolkodást igényelnek, de ezek között mindenki találhat neki való feladványt, amelyet meg tud oldani.

Ilyen kirakós játék az ősi kínai játék, a Tangram, amelynek lényege, hogy hét lapocska segítségével megadott formákat kell kirakni úgy, hogy mindig mind a hét lapot fel kell használni. Az egyik feladvány egy négyzet kirakása, ez a négyzet a játék dobozának formája is. A következő ábrákon a Tangram darabjait láthatjuk.

A játékhoz minden feladvány egy síkbeli alakzat, a feladvány megoldása pedig az alakzat felosztása kisebb síkidomokra, amelyek mutatják a kirakás módját, mint az ábrán látható madár esetében is.



Ez csak egy feladvány a sok közül. Sok feladvány megtalálható az interneten is, de magunk is találhatunk ki új feladványokat, sőt a játékot online is játszhatjuk például a http://www.tablajatekos.hu/uj2001/2003/flash/!tangram.html webhelyen.



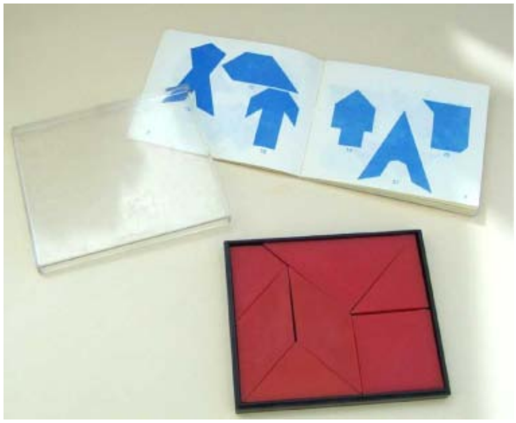
1. ábra
A Tangram darabjai (forrás: Wikipédia - en.wikipedia.org/wiki/Tangram)

Néhány további feladvány az internetről:

2. ábra
Feladványok a Tangram játékhoz

Ugyanezen az elven egy magyar játék is készült, amelynek címe: Ezt rakd ki! (*3. ábra*) Ez a játék is hét műanyag lapból áll, de ezek más alakúak, mint az előbb bemutatott tangram darabjai. A játékhoz egy kis füzetkét adtak ki, amelyben 100 feladvány szerepel. Ezt a játékot Jean Melrose Ezt Rakd Ki: A Hungarian Tangram című cikkében nevezi a magyar tangramnak. A http://www.powerstrike.net/puzzles/index_matching.htm webcímen erről és sok más kirakós játékról találhatunk képeket.

A tangramnak is vannak újabb változatai, például tojás vagy szív alakú tangramok. Ezekről és a hozzájuk tartozó feladványokról a *http://www.creativecrafthouse.com* webcímen képeket találunk, de sok más tangram, kirakós játék között Gál Péter: Ördöglakatok, pentominók és társaik című könyvében is megtalálhatók. A könyv 1.1. fejezetében egy átdarabolásos bizonyítást is találunk a Pitagorasz-tételre, amely itt nem szerepel. A szerző ezzel azt szemlélteti, hogy a tangramok akár geometriai tételek korrekt matematikai bizonyítását is bemutathatják, hiszen ha két alakzat ugyanazokból a síkbeli darabokból tevődik össze, akkor területük nyilván egyenlő. Nem meglepő, hogy az alább leírtakhoz képest egy hatodik, különböző bizonyítást találunk a könyvben, hiszen a Pitagorasz-tétel híres arról, hogy közel 400 különböző ismert bizonyítása van.



3. ábra
A magyar tangram

Kirakós játék Pitagorasz tételének tanításához

Pitagorasz tételének tanításához egy kirakós játékot készítettem három különböző változatban, három különböző derékszögű háromszöghöz. A különböző alakzatokat színes dekorgumiból vágtam ki. A három háromszög méretei:

5 cm, 12 cm, 13 cm;
6 cm, 8 cm, 10 cm;
5 cm, 5 cm, $5\sqrt{2}$ cm.

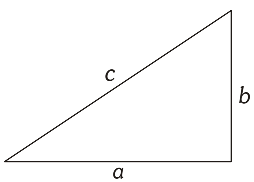
Ezek alapján három különböző készletet állítottam össze. Minden készletben szerepel az adott derékszögű háromszög világoszöld színben, négy példányban. Nevezzük a derékszögű háromszögek nagyobb befogóját *a*-nak, kisebb befogóját *b*-nek, átfogóját *c*-nek. A készletekben van 5 (az egyenlő szárú esetben 4) négyzet, amelyek különböző színűek. Az *a* oldalú négyzet kék, a *b* oldalú négyzet sárga, a *c* oldalú négyzet sötétzöld, az $a + b$ oldalú négyzet sötétbarna, az $a - b$ oldalú négyzet (ha van ilyen) piros. Az egyenlő szárú készletben nincs piros négyzet, hiszen $a = b$ miatt $a - b = 0$. Ezen felül minden készlethez tartoznak még fehér, barna és rózsaszín darabok, amelyek a különböző átdarabolási bizonyítások alapján egy eredetileg a oldalú négyzet szétvágásával keletkezett darabok, és hasonlóképpen a ciklámen és barackszínű darabokat pedig egy-egy b oldalhosszúságú négyzet szétvágásával kaptam.

A játék Pitagorasz tételének öt különböző átdaraboláson alapuló bizonyítását mutatja be érdekes tangram-feladványok formájában. A gyerekek a játékhoz kapnak egy feladatsort, amelyen a feladványok szerepelnek a felfedezendő tananyag megértését segítő egyszerű kérdésekkel vegyítve. A tangramok kirakásához nem szükséges az átdarabolási bizonyítások matematikailag pontos megértése, a 7–8. osztályosoknak elegendő a bizonyítások közül egyet részletesen megismerni, de a játékban a többit is kirakják, a kirakott ábra szemlélteti a bizonyítások alapötletét, tehát eközben is tanulnak a gyerekek. A játék használatának lehetőségeire később még visszatérek, most következzenek a bizonyítások és a hozzájuk tartozó kirakós játékok.

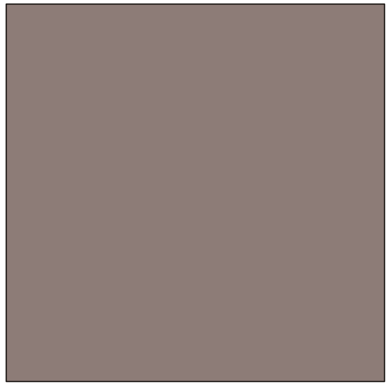
A Pitagorasz-tétel 1. bizonyítása

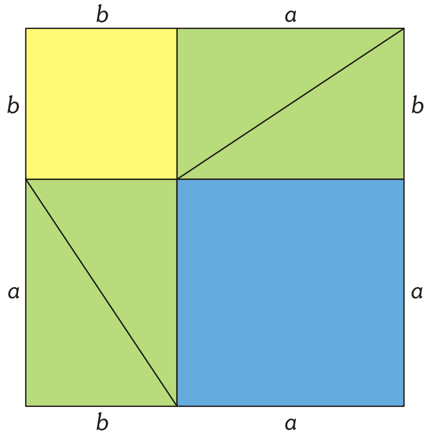
Pitagorasz tétele: Derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével, azaz alkalmas jelölésekkel (a és b a befogók, c az átfogó hossza):

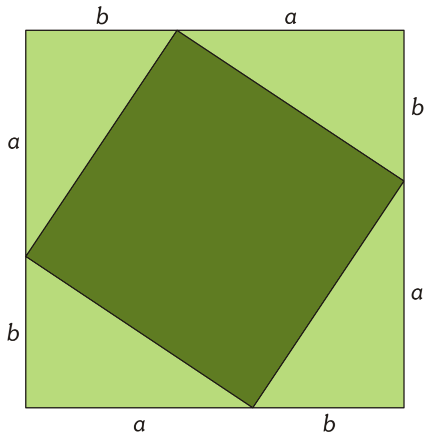
$$a^2 + b^2 = c^2.$$



A feladat az, hogy a bal oldalon látható $a + b$ oldalhosszúságú négyzettel egybevágó négyzetet rakjunk ki a négy derékszögű háromszögből, és az a ill. a b oldalhosszúságú négyzetekből, majd a négy derékszögű háromszögből és a c oldalhosszúságú négyzetből is:







Így a Pitagorasz-tétel legismertebb bizonyítását kapjuk, hiszen látható, hogy ugyanakkora területet tudtunk kirakni a két esetben úgy, hogy kicseréltük az a^2 és b^2 területű darabokat egy c^2 területű darabra. Ha tehát bizonyítjuk, hogy a kirakott négyzetek valóban négyzetek, és valóban egyenlő a területük, akkor bebizonyítottuk a Pitagorasz-tételt. Az első négyzet esetében ez könnyen belátható, hiszen ha a nagy négyzet oldalait a és b hosszú szakaszokra bontjuk az ábrának megfelelően, és összekötjük az osztópontokat, majd a két téglalapnak behúzzuk egy-egy átlóját, akkor éppen a felsorolt alakzatokat kapjuk. A második négyzet esetében ez úgy szokott megjelenni a matematikaórákon, hogy szintén felrajzolják a négyzetet, majd a megfelelő osztópontokat is megszerkesztik, és ezeket összekötik egymással úgy, hogy egy négyszöget kapnak középen, amelyről be kell bizonyítani, hogy az egy c oldalhosszúságú négyzet. Az oldalak hossza könnyen látható abból, hogy a levágott háromszögek éppen a vizsgált derékszögű háromszöggel egybevágóak, az pedig, hogy a négyszög szögei derékszögek, a szokásos jelölésekkel látszik abból, hogy az adott szögek nagysága $180° - \alpha - \beta = 90°$. A kirakó használatánál ez a kérdés fordítva vetődik fel: kiraktuk a négyzetet a megfelelő darabokból, de valóban $a + b$ oldalhosszúságú négyzet-e az, amit kaptunk? Ehhez azt kell belátni, hogy az oldalai valóban egyenesek, azaz az összeillesztéseknél kapott szögek 180°-osak. Ez azonban látszik abból, hogy ezeknek a szögeknek a nagysága $\alpha + \beta + 90° = 180°$. Mindkét bizonyításnál kihasználtuk, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°, és hogy a négyzetek sarkain megjelenő háromszögek derékszögűek, tehát $\alpha + \beta = 180° - 90° = 90°$. Megjegyezzük, hogy ha a gyerekek tudják, hogy

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

akkor az első ábra nem is feltétlenül szükséges a bizonyításhoz, algebrailag is felírhatjuk a lényegét ezzel az összefüggéssel. A második ábrán kapott terület-összefüggést is felírva azt kapjuk, hogy

$$4 \cdot (ab) : 2 + c^2 = (a + b)^2,$$

azaz

$$2ab + c^2 = (a + b)^2.$$

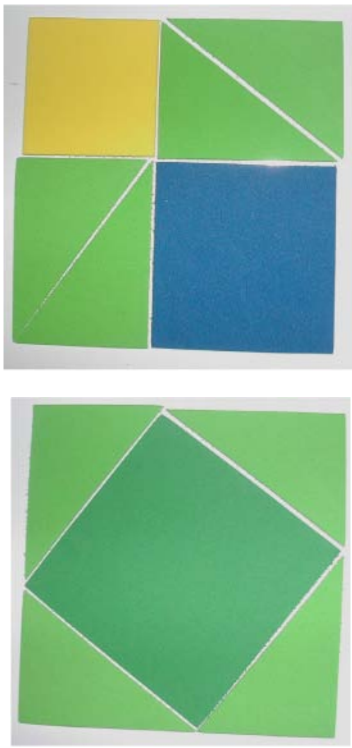
A két összefüggésből látható, hogy

$$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

amiből

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

4. ábra
A játék darabjai
(©Papp Ágnes)



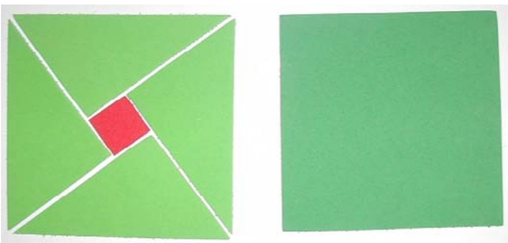
5. ábra
Feladványok megfejtése az 1. bizonyításhoz
(©Papp Ágnes)

A Pitagorasz-tétel 2. bizonyítása

Ehhez a bizonyításhoz az

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

összefüggés ismerete szükséges, mert bebizonyítjuk, hogy $2ab + (a-b)^2 = c^2$. Itt ugyanis a nevezetes azonosság szerinti behelyettesítéssel éppen a bizonyítandó $a^2 + b^2 = c^2$ állítást kapjuk. Mint már fentebb láttuk, $2ab = 4 \cdot (ab) : 2$, ami éppen a négy egybevágó világoszöld derékszögű háromszög területének összege. Tehát azt kell bizonyítani, hogy a négy háromszög és a piros négyzet együttes területe egyenlő a sötétzöld négyzet területével. A feladat tehát az, hogy rakjuk ki a sötétzöld négyzetet a négy derékszögű háromszög és piros négyzet felhasználásával. Az átdarabolás korrektsége a szögek alapján itt is könnyen belátható.



6. ábra
Feladvány megfejtése a 2. bizonyításhoz
(©Papp Ágnes)

A Pitagorasz-tétel 3. bizonyítása

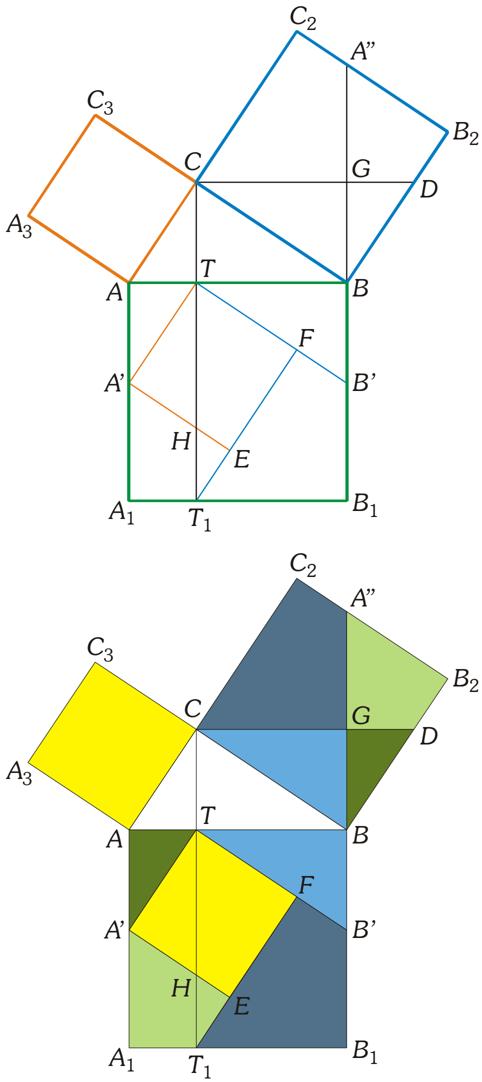
A *7. ábrán* az *ABC* derékszögű háromszög oldalaira szerkesztett négyzetek az AA_1B_1B, BB_2C_2C és a CC_3A_3A. Átdarabolással bizonyítjuk, hogy AA_1B_1B területe egyenlő a BB_2C_2C és CC_3A_3A négyzetek területének összegével. Az *AB* oldalhoz tartozó magasság talppontja *T*, a *CT* egyenes T_1 pontban metszi az A_1B_1 oldalt. *A”* a B_2C_2 oldalon, *A’* az AA_1, *B’* a B_1B oldalon van, *D* a BB_2-n. $CD \parallel AB$, $BA” \perp AB$, $TA’ \parallel AC$, $TB’ \parallel CB$. *G* pont a *CD* és *BA”* metszéspontja. *F* a T_1 pontból a *TB’*-re állított merőleges talppontja. *E* az *A’* pontból a T_1F-re állított merőleges talppontja, *H* a TT_1 és az *A’E* szakaszok metszéspontja. Ezekből következik, hogy az ábrán minden szakasz párhuzamos az eredeti háromszög valamelyik oldalával vagy magasságával:

$$AB \parallel CD \parallel CG \parallel GD \parallel AT \parallel \parallel TB \parallel A_1B_1 \parallel A_1T_1 \parallel T_1B_1;$$

$$BC \parallel TB' \parallel C_2B_2 \parallel C_2A'' \parallel A''B_2 \parallel \parallel TF \parallel FB' \parallel A'E \parallel A'H \parallel HE;$$

$$CA \parallel C_3A_3 \parallel C_2C \parallel BB_2 \parallel BD \parallel \parallel DB_2 \parallel A'T \parallel T_1F \parallel T_1E \parallel EF;$$

$$CT \parallel AA_1 \parallel BB_1 \parallel TT_1 \parallel BA'' \parallel AA' \parallel A'A_1 \parallel \parallel BB' \parallel B'B_1 \parallel TH \parallel HT_1 \parallel A''G \parallel GB.$$



7. ábra

Bebizonyítjuk, hogy az ábrán azonos színnel jelölt síkidomok egybevágók.

1. $TAA'_\triangle$ és $DGB_\triangle$ egybevágóak, mert mindkettő egybevágó az $ATC_\triangle$-gel. Mivel $TA' \parallel AC$ és $AA' \parallel CT$, mert mindkettő merőleges AB-re, $AA'TC$ paralelogramma. Így $TAA'_\triangle$ és $ATC_\triangle$ valóban egybevágóak, mert $AA' = CT$, $A'T = AC$ és $A'AT\sphericalangle = ATC\sphericalangle = 90°$. Mivel a C pontnál két derékszög van, A, C és C_2 egy egyenesen vannak, így AC és BD is párhuzamosak, ezért $ABDC$ is paralelogramma, tehát az $ABC_\triangle$ és a $DCB_\triangle$ is egybevágók. Az $ABC_\triangle$ magassága CT és $DCB_\triangle$ magassága BG, tehát $DGB_\triangle$ is egybevágó $TAA'_\triangle$-gel.

2. Hasonlóan bizonyítható, hogy a $CBG_\triangle$ és a $TB'B_\triangle$ is egybevágó.

3. FT_1B_1B' négyszög egybevágó $CGA'C_2$ négyszöggel, mert CT_1B_1G téglalapban $CG = T_1B_1$, $CC_2 = T_1F = BC$ az ABC és a TT_1F háromszögek egybevágósága miatt ($AB = TT_1$ és a két háromszög megfelelő szögei is egyenlőek, mert merőleges szárú szögek) és a két négyszög szögei is egyenlőek, mert párhuzamos szárú szögek. A két négyszögben ugyanis a megfelelő oldalak párhuzamosak. A további két megfelelő oldalpár egyenlősége ezekből már következik.

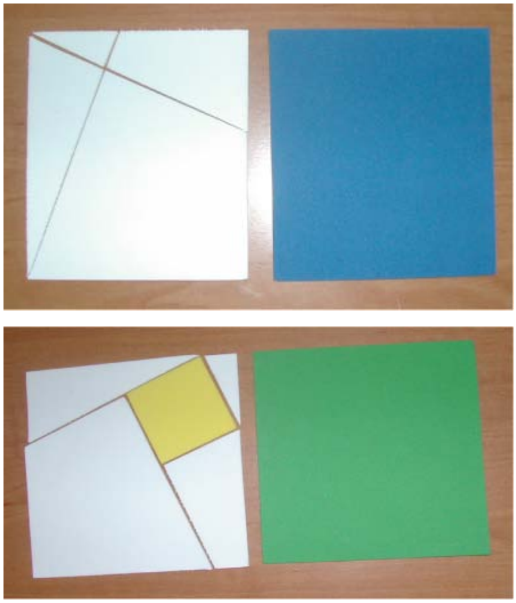
4. Az $A'A_1T_1H$ és $A''GDB_2$ négyszögekben is párhuzamosak a megfelelő oldalak, így itt is elég bizonyítani, hogy $A'A_1 = GA''$ és $A_1T_1 = GD$. Az $BB_2A''_\triangle$ egybevágó az $ABC_\triangle$-gel, mert $BB_2 = BC$ és a megfelelő szögek pedig egyenlők, mert merőleges szárú szögek. Ebből azonban következik, hogy $AA_1 = BA''$. Mivel fentebb már beláttuk, hogy $AA' = GB$, ezért

$$A'A_1 = AA_1 - AA' = BA'' - BG = GA''.$$

Már láttuk, hogy $AT = GD$, de AA_1T_1T téglalapban $AT = A_1T_1$, tehát $A_1T_1 = GD$.

5. A CC_3A_3A négyszög egybevágó az $A'EFT$ négyszöggel. Mivel a megfelelő oldalak itt is párhuzamosak, a szögek valóban egyenlőek (derékszögek). CC_3A_3A egy négyzet, amelynek oldalai AC hosszúak. Már láttuk, hogy $A'T = AC$. Az $ABC_\triangle$ és a $TT_1F_\triangle$ egybevágók, mert $AB = TT_1$ és $ACB\sphericalangle = TFT_1\sphericalangle = 90°$, továbbá $CAB\sphericalangle = FTT_1\sphericalangle$, mert merőleges szárú szögek: $TF \parallel CB \perp AC \Rightarrow TF \perp AC$ és $AB \perp TT_1$. Az egybevágóságból következik, hogy $TF = AC$, tehát $A'EFT$ is AC oldalhosszúságú négyzet.

Ezt a bizonyítást szemléltetik a következő feladványok a kirakójátékban: rakjunk ki a fehér darabokból egy, a kék négyzettel egybevágó négyzetet, majd a fehér darabok és a sárga négyzet felhasználásával egy, a sötétzöld négyzettel egybevágó négyzetet. A következő képeken ezek megoldását láthatjuk (*8. ábra*).

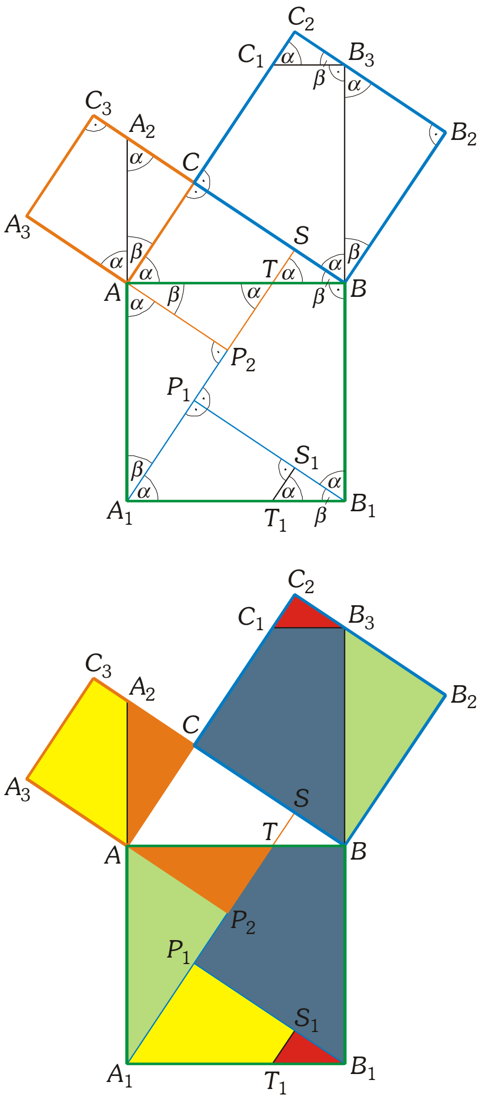


8. ábra
Feladványok megfejtése a 3. bizonyításhoz
(©Papp Ágnes)

A Pitagorasz-tétel 4. bizonyítása

Ismét a területek átdarabolásával bizonyítjuk Pitagorasz tételét. Bizonyítandó, hogy az AA_1B_1B négyzet területe egyenlő a BB_2C_2C és CC_3A_3A négyzetek területének összegével. Ehhez belátjuk, hogy a két kisebb négyzet területének öszszege és a nagy négyzet területe egymással egybevágó darabokból áll össze.

Az A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3 pontok az előző bizonyításhoz hasonlóan a háromszög oldalaira szerkesztett négyzetek csúcsai. A_2 az A_1A egyenes és a CC_3 szakasz metszéspontja, B_3 a B_1B egyenes és a B_2C_2 szakasz metszéspontja. C_1 a B_3 pontból az AB oldallal húzott párhuzamos és a CC_2 oldal metszéspontja. $A_1S \parallel AC$, S a BC oldalon van, T az A_1S és AB oldal metszéspontja, P_2 az A pontból, P_1 a B_1 pontból az A_1S-re állított merőleges talppontja. $T_1B_1 = TB$ és $T_1S_1 \parallel A_1S$.



9. ábra

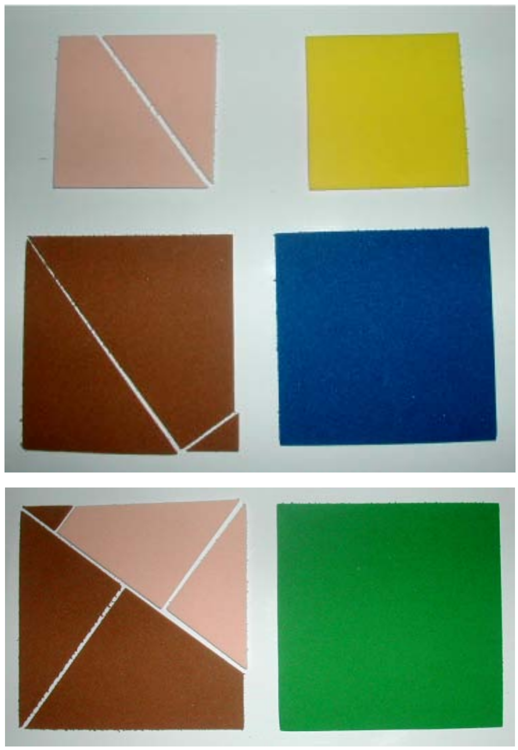
A *9. ábra* bal oldalán bejelöltük az ABC háromszög hegyesszögeit és a velük egyenlő szögeket. Ezek alapján $AA_1P_{2\triangle} \cong ABC_\triangle$, mert szögeik és átfogóik egyenlők. Hasonlóképpen $B_3BB_{2\triangle} \cong ABC_\triangle$, mert szögeik és a nagyobb befogóik egyenlők. Ebből következik, hogy $AA_1P_{2\triangle} \cong B_3BB_{2\triangle}$.

Mivel $AA_1P_{2\triangle} \cong ABC_\triangle$, $AP_2 = AC$, tehát az AP_2SC négyszög négyzet, mert szögei derékszögek és szomszédos oldalai egyenlő hosszúak. Így $AP_2SC \cong ACC_3A_3$, és

$$ACC_{2\triangle} \cong AP_2T_\triangle,$$

mert szögeik és nagyobb befogóik egyenlők.

Ebből látható, hogy $AA_2C_3A_3 \cong ATSC$, mert úgy keletkeztek, hogy egybevágó négyzetekből vágtunk le egybevágó háromszögeket a megfelelő oldalon. $A_1B_1P_{1\triangle} \cong ABC_\triangle$, mert szögeik és átfogóik egyenlők. $T_1B_1S_{1\triangle} \cong TBS_\triangle$, mert szögeik egyenlők és $T_1B_1 = TB$. Ezekből látható,



10. ábra
Feladványok megfejtése a 4. bizonyításhoz
(©Papp Ágnes)

hogy $A_1T_1S_1P_1 \cong ATSC$. Mivel $AA_2C_3A_3 \cong ATSC$ és $A_1T_1S_1P_1 \cong ATSC$, ezért

$$A_1T_1S_1P_1 \cong AA_2C_3A_3.$$

A $B_3BB_{2\triangle} \cong ABC_\triangle$ egybevágóságból következik, hogy $B_2B_3 = AC$, de mivel AP_2SC négyzet, $CS = AC$, így $B_2B_3 = CS$, tehát $SB = BC - SC = B_2C_2 - B_2B_3 = B_3C_2$. Ezért $TBS_\triangle \cong C_1B_3C_{2\triangle}$, mert szögeik és hosszabb befogóik egyenlők. $T_1B_1S_{1\triangle} \cong TBS_\triangle$ és $TBS_\triangle \cong C_1B_3C_{2\triangle}$, tehát

$$T_1B_1S_{1\triangle} \cong C_1B_3C_{2\triangle}.$$

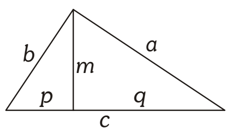
A fentiekből már belátható, hogy

$$CBB_3C_1 \cong P_1B_1BT,$$

mert megfelelő oldalaik párhuzamosak és egyenlő hosszúak, megfelelő szögeik egyenlők.

A Pitagorasz-tétel 5. bizonyítása

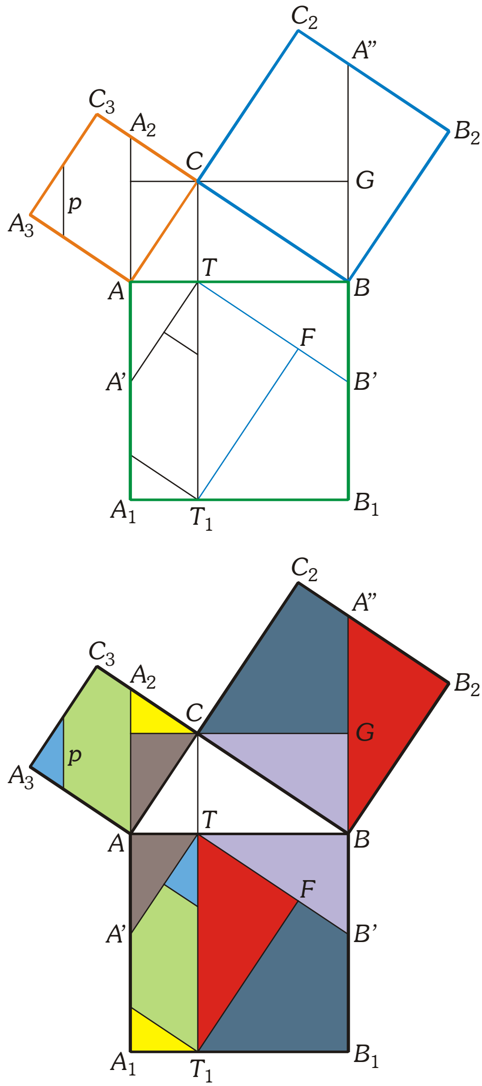
Az ötödik átdarabolási bizonyítás egy, a hasonló háromszögeket felhasználó algebrai bizonyítással hozható összefüggésbe.



11. ábra

A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a háromszöget két hozzá hasonló derékszögű háromszögre bontja. Mivel a hasonló háromszögek oldalainak aránya egyenlő, $\frac{a}{q} = \frac{c}{a}$ és $\frac{b}{p} = \frac{c}{b}$. Ezekből következik, hogy $a^2 = cq$ és $b^2 = cp$. Ebből már következik Pitagorasz tétele, mert $a^2 + b^2 = cq + cp = c(q + p) = c \cdot c = c^2$. Viszont az is következik ebből, hogy az a oldalú négyzet átdarabolható egy olyan téglalappá, amelynek oldalai q és c hosszúak, a b oldalú négyzet pedig olyan téglalappá, amelynek oldalai p és c hosszúak. Az ötödik bizonyítás, amelyhez kirakójátékot készítettünk, ezt az átdarabolást valósítja meg. A nagyobb befogóra rajzolt négyzet átdarabolását a *12. ábra* alapján az olvasóra bízzuk, mert ez az átdarabolás hasonló a 3. bizonyításnál látott átdaraboláshoz.

A kisebb befogóra rajzolt négyzet átdarabolása függ a befogók arányától, de minden esetben azzal kezdődik, hogy a *12. ábrán* látható módon levágunk a négyzetből egy, az $ABC_\triangle$-höz hasonló háromszöget (ACA_2), amelynek nagyobb befogója a négyzet oldalával egyenlő hosszúságú, majd kettévágjuk ezt a háromszöget az átfogójához tartozó magassággal. Ez a magasság AT-vel egyenlő hosszú, ami az AC befogó merőleges vetülete az átfogóra. Jelöljük itt is p-vel. A továbbiakban úgy daraboljuk a négyzetet, hogy a levágott háromszög átfogójával



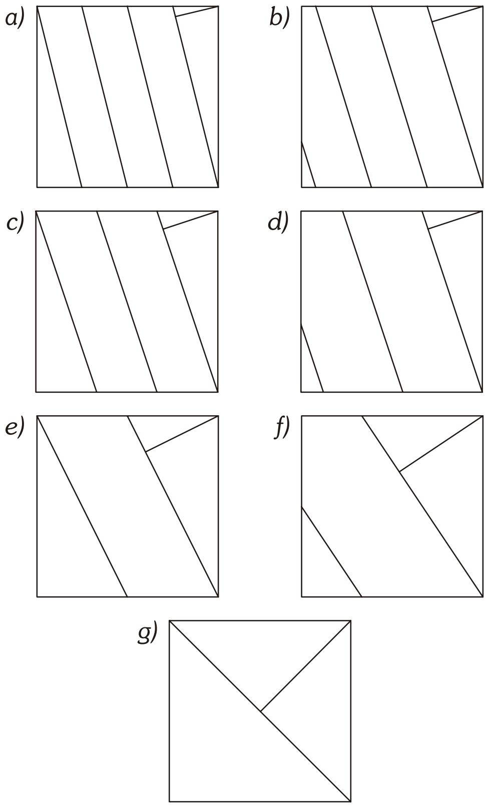
12. ábra

(AA_2) párhuzamosokat húzunk egymástól p távolságra mindaddig, míg ezek két ponton metszik a négyzet kerületét, és így újabb darabot vágnak le belőle. A következő ábrák (*13. ábra*) a négyzet feldarabolását mutatják több különböző esetben, azaz az eredeti háromszög befogóinak arányától függően. Az *a*, *c*, *e*, *g* esetekben az egyik befogó egész számú többszöröse a másiknak, a *g* ábra az egyenlő szárú esetet mutatja.

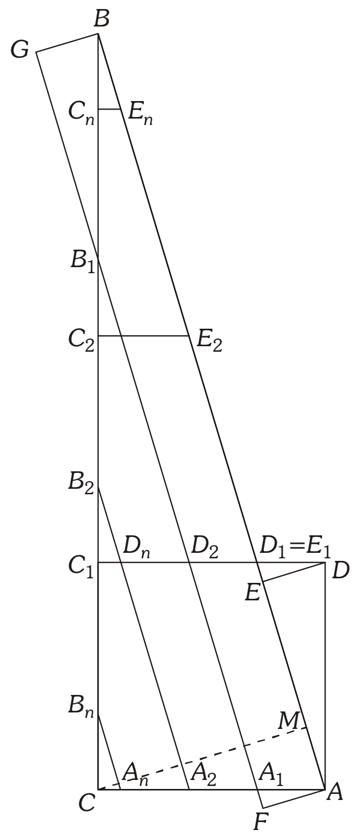
A *14. ábrán* az eredeti háromszög ABC, és $CADC_1$ a b oldalhosszúságú négyzet. AB és DC_1 metszéspontja D_1. „Csíkozzuk be" a háromszöget az A_1B_1, A_2B_2, … A_nB_n egyenesekkel, amelyek párhuzamosak az AB oldallal, és $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$ esetén A_i az AC oldalon van, B_i a BC oldalon van, és

$$A_iA_{i+1} = AA_1 = DD_1.$$

Így n db ($n = [a : b]$) egyenest veszünk fel (az ábrán éppen 3-at, de hogy látsszon, hogy ez nem mindig így van, a 3. pontot mindenütt n-nel jelöltük). Ha a háromszög egyenlő szárú, akkor csak egy ilyen egyenes lesz, és az éppen az AC_1 átló. $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$ esetén a C_iE_i szakaszok (a C_i pontok a BC befogón vannak, az E_i pontok az AB átfogón) párhuzamosak az AC befogóval, egymástól $AC = b$ távolságra vannak, és $C_iC_{i+1} = CC_1 = b$. Legyen M az $ABC_\triangle$ átfogóhoz tartozó magasságágának talppontja, CM az átfogóhoz tartozó magassága. FA, ED és GB szakaszok párhuzamosak ezzel a magassággal, így merőlegesek az átfogóra. $MCA_\triangle \cong EAD_\triangle$, tehát $ED = AM = p$. Az $FABG$ négyszög tehát éppen az a téglalap, amivé a $CADC_1$ négyzetet át szeretnénk darabolni. Az egyenlő távolságok és párhuzamosságok miatt $FAA_{1\triangle} \cong EDD_{1\triangle}$ és $EAD_\triangle \cong GB_1B_\triangle$. Ebből az is látható, hogy



13. ábra
A kisebb átfogóra rajzolt négyzet feldarabolásai a befogók arányától függően



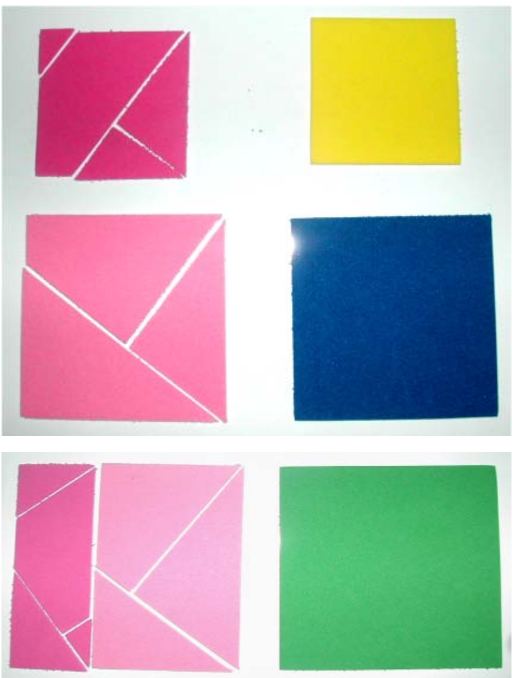
14. ábra

$$BB_1 = B_1B_2 = \ldots = B_{n-1}B_n = AD = AC =$$
$$= b = CC_1 = C_1C_2 = \ldots = C_{n-1}C_n.$$

Így $CB_n = C_nB = CB - n \cdot b$, tehát $A_nB_nC_\triangle \cong$ $\cong E_nBC_{n\triangle}$. Ebből az is következik, hogy az $A_nA_{n-1}D_nC_1B_n$ ötszög (ha van ilyen – ha a hosszabb befogó egész számú többszöröse a rövidebbnek, akkor nincs) oldalai egyenlő hosszúak a $HE_{n-1}E_nC_nB_1$ ötszög oldalainak hosszával. Mivel a megfelelő oldalak párhuzamosak is, a két ötszög egybevágó. Az említett alakzatokon kívül a $CADC_1$ négyzet és az $FABG$ téglalap $n - 1$ darab egybevágó paralelogrammából áll, tehát az átdarabolás megvalósult, a $CADC_1$ négyzet és az $FABG$ téglalap területe egyenlő.

A kirakós játék használata a matematikaórán

A fentebb leírt kirakós játék tehát színes lapocskákból áll. A képeken lévő lapocskákat 2 mm vastag dekorgumiból vágtam ki. Termé-



15. ábra
Feladványok megfejtése az 5. bizonyításhoz

szetesen még jobb lenne, ha fából vagy műanyagból készülne, és a darabok nagyobbak lennének, így viszont van néhány egészen kicsi darab is (a dekorgumi elég drága, főleg, ha a színes játékot 15–20 példányban szeretnénk elkészíteni, viszont karos vágógép segítségével könnyen vágható). A játék papírból is elkészíthető, de csak legalább 2–3 mm vastag lemezekből érdemes kivágni, mert a kartonpapír darabok túl vékonyak, egymás tetejére csúsznak (és nem tartósak).

A legtöbb iskolában a gyerekek a 8. osztályban tanulnak először Pitagorasz tételéről, de a 9. osztály tankönyveiben is szerepel. A későbbiekben is gyakran használják a matematikaórákon. A játékot tehát elsősorban a 8. osztálynak ajánlom, de 9. osztályban is érdemes elővenni, mert ekkor már bonyolultabb bizonyításokat is megérthetnek vagy megkonstruálhatnak a gyerekek. A játékot akkor érdemes bevinni az osztályterembe, ha minden gyereknek tudunk adni egy készletet, és a játékra van legalább egy teljes tanórányi időnk. Még jobb, ha 2–3 órát is el tudunk tölteni vele. Ezeken az órákon a kirakós játékon kívül marad idő a tapasztalatok rövid lejegyzésére és a Pitagorasz-tétel ismertetésére is. Ezért akkor kell következnie, amikor már a Pitagorasz-tétel bevezetését már kellően előkészítettük, tehát a gyerekek birtokában vannak a tétel és a bizonyítás leírásához szükséges alapvető algebrai ismereteknek, átismételtük a háromszögekről a legfontosabb tudnivalókat, a gyerekek tisztában vannak a négyzetre emelés és a négyzetgyökvonás kapcsolatával, és gyakoroltuk a négyzetrácson való terület-meghatározást. Ha nem csak egy óránk van a játékra, akkor kitérhetünk az egyenlő szárú esetre is, mert ott a feladványok könnyebbek, de feladat lehet belátni, hogy a többi készlet feladványainak speciális esetei. Ha erre nincs idő, akkor jó, ha minden gyerek olyan készletet kap, amely nem egyenlő szárú esetet mutat be, de nem kell, hogy a készletek teljesen egyformák legyenek.

A játékhoz érdemes egy feladatlapot is mellékelni, amelynek segítségével minden gyerek saját tempójában haladhat a feladványokkal. A kirakós feladványok között olyan feladatok vannak, amelyek újra rákérdeznek arra a nyilvánvaló, de jelen esetben nagyon fontos tényre, hogy azoknak a daraboknak az összterülete, amelyekből ki tudunk rakni egy bizonyos alakzatot, megegyezik az adott alakzat területével. A feladatokban a területeket a darabok színeivel jelöltük, tehát például $T_{\text{világoszöld}}$ a készletben szereplő világoszöld darabok területeinek összegét jelenti. A feladatok a következők:

1. A világoszöld háromszög derékszögű. Jelöljük a hosszabb befogóját a-val, rövidebb befogóját b-vel, átfogóját c-vel! Mekkora a területe (képlettel megadva)?

2. A világoszöld háromszög minden oldalához illessz egy négyzetet, amelynek az oldala ugyanakkora, mint az adott oldal!

3. Mekkora a sárga, a kék és a sötétzöld négyzet területe?

4. A 4 világoszöld háromszögből, a sárga és a kék négyzetből rakj ki egy a sötétbarna négyzettel egybevágó négyzetet!

5. Mekkora a sötétbarna négyzet oldala? Mennyi $(a+b)^2$? Mekkora a sötétbarna négyzet területe?

6. Mekkora a négy világoszöld háromszög és a sötétzöld négyzet területe együttvéve?

7. Rakj ki a világoszöld háromszögekből és a sötétzöld négyzetből egy olyan négyzetet, mint a sötétbarna!

8. Bizonyítsd be, hogy amit kiraktál, az valóban négyzet (az oldalai valóban egyenesek és nem töröttvonalak)!

9. Melyik a nagyobb terület? Tegyél ki relációs jeleket!

a) $T_{\text{világoszöld}} + T_{\text{kék}} + T_{\text{sárga}} \;\square\; T_{\text{világoszöld}} + T_{\text{sötétzöld}}$

b) $T_{\text{kék}} + T_{\text{sárga}} \;\square\; T_{\text{sötétzöld}}$

c) $a^2 + b^2 \;\square\; c^2$

10. Rakj ki a világoszöld háromszögekből és a piros négyzetből egy olyan négyzetet, mint a sötétzöld!

11. Mekkora a piros négyzet oldala? Mennyi $(a-b)^2$? Mekkora a piros négyzet területe?

12. Melyik a nagyobb terület? Tegyél ki relációs jeleket!

a) $T_{\text{világoszöld}} + T_{\text{piros}} \;\square\; T_{\text{sötétzöld}}$

b) $4 \cdot \dfrac{ab}{2} + (a-b)^2 \;\square\; c^2$

c) $2ab + a^2 - 2ab + b^2 \;\square\; c^2$

d) $a^2 + b^2 \;\square\; c^2$

13. Rakj ki a fehér lapokból egy olyan négyzetet, mint a kék!

14. Rakj ki a fehér lapokból és a sárga négyzetből egy olyan négyzetet, mint a sötétzöld!

15. Egészítsd ki az alábbi állításokat az előbbi feladványok alapján úgy, hogy igazak legyenek!

a) $T_{\text{fehér}} =$ _________

b) $T_{\text{fehér}} +$ _________ $= T_{\text{sötétzöld}}$

c) $T_{\text{kék}} +$ _________ $= T_{\text{sötétzöld}}$

d) $a^2 +$ ____ $= c^2$

16. Rakj ki a barackszínű lapokból egy olyan négyzetet, mint a sárga!

17. Rakj ki a barna lapokból egy olyan négyzetet, mint a kék!

18. Rakj ki a barackszínű és a barna lapokból egy olyan négyzetet, mint a sötétzöld!

19. Rakj ki a ciklámenszínű lapokból egy olyan négyzetet, mint a sárga!

20. Írd a fenti négy feladványban szereplő területek nevét a téglalapokba úgy, hogy minden egyenlőség igaz legyen!

T_{barna}	+	$\square$	=	$T_{\text{sötétzöld}}$
=		=		=
$\square$	+	$T_{\text{sárga}}$		$T_{\text{sötétzöld}}$

21. Rakj ki a ciklámenszínű lapokból egy olyan téglalapot, amelynek egyik oldala akkora, mint a sötétzöld négyzet oldala!

22. Rakj ki a rózsaszínű lapokból egy olyan négyzetet, mint a kék!

23. Rakj ki a rózsaszínű lapokból egy olyan téglalapot, amelynek egyik oldala akkora, mint a sötétzöld négyzet oldala!

24. Rakj ki a ciklámenszínű és a rózsaszínű lapokból egy olyan négyzetet, mint a sötétzöld!

25. Írd a fenti négy feladványban szereplő területek nevét a téglalapokba úgy, hogy minden egyenlőség igaz legyen!

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{} & + & T_{\text{ciklámen}} & = & T_{\text{sötétzöld}} \\
= & & = & & = \\
T_{\text{kék}} & + & \boxed{} & & T_{\text{sötétzöld}}
\end{array}$$

Pitagorasz tételét többnyire számításokban használjuk fel, általában hosszúságokat számolunk ki vele, ezért a későbbiekben gyakran csak egy képletnek tekintjük, elfelejtkezünk eredeti jelentéséről és ezzel együtt a bizonyítás gondolatmenetéről is. Éppen ezért fontos, hogy már az elején tudatosítsuk, hogy a tétel valójában területekről szól. Ez a játék és a hozzá kapcsolódó kérdések segítenek ennek a szemléletnek az elmélyítésében.

Dienes Zoltán *Építsük fel a matematikát* című művében kétféle matematikai gondolkodást különböztet meg: a konstrukciót és az analízist. A konstrukció az, amikor új fogalmat alkotunk a meglévő fogalmakra építve, az elemzés pedig, amikor ezekről a fogalmakról állítunk valamit, összefüggéseket állapítunk meg, logikusan gondolkodunk a magunkban felépített konstrukciókról. Dienes szerint a gyerekek mentális fejlődésében csak a Piaget által absztrakt műveletek szakaszának nevezett időszakban, tehát 12 éves kortól várhatjuk el, hogy képesek legyenek az elemző gondolkodásra, ezért a könyv arról szól, hogyan tehetjük a matematikatanulást a gyerekek számára a konstruktív gondolkodás színterévé, hogyan tanítsuk őket úgy, hogy a tananyag minden részletét a konstruktív gondolkodás segítségével közelíthessék meg. A bizonyításos feladatok azonban elemző gondolkodást igényelnek, így a 7. osztálytól kezdve egyre gyakrabban várjuk el a gyerekektől ezt a gondolkodásmódot. Ugyanakkor az algebrai változók bevezetésével egyre absztraktabban kell gondolkodniuk. Amikor tételeket és azok bizonyításait tanítjuk a gyerekeknek, akkor szükségük van az elemző és az absztrakt gondolkodásra, ezért az első tételeknél segítenünk kell a tanulóknak ezt a gondolkodásmódot elsajátítani. (A versenyfeladatokban a bizonyítás igénye jóval hamarabb megjelenik, de a gyerekek többségénél a 7–9. évfolyam feladata ennek kialakítása. A Pitagorasz-tétel bizonyítása az első bizonyítások közé tartozik, amelyet a gyerekeknek meg kell konstruálniuk, vagy legalább meg kell érteniük. Így a játék segítséget adhat a konstruktív gondolkodásról az elemző gondolkodásra való váltásban, mert a bizonyítást (absztrakt elemzést) szemlélteti egyszerű, konstruktív („felépítjük" a bizonyításhoz szükséges ábrákat) és nagyon konkrét módon.

A játék továbbfejleszthető.

A http://www.cut-the-knot.org/pythagoras weboldalon például sok további bizonyítást olvashatunk, amelyek között akadnak bőven átdarabolási bizonyítások is. Ezeket színes ábrákkal illusztrálták, amelyek alapján akár még érdekesebb kirakós feladványokat is kreálhatunk.

A játékot matematikaórákon volt alkalmam kipróbálni gyakorló gimnáziumban, normál általános iskolában, és egy egyébként is átlag alatt teljesítő osztály képességek szerinti csoportbontással előállt gyengébb csoportjában is. A gyerekek mindig szívesen játszottak vele, az első három bizonyítás feladványait minden gyerek önállóan képes volt megoldani, és úgy gondolom, hogy a fentebb leírt célok is megvalósultak a tanulók többségénél minden csoportban.

Hivatkozások

[1] Wikipédia: - en.wikipedia.org/wiki/Tangram

[2] A 2. ábrán látható tangram-feladványok forrásai:
http://www.davidson.edu/math/chartier/Pft/Tangram/tanpage.gif;
tangrams-jodyandrea.blogspot.com;
http://www.identifont.com/similar?6ML

[3] Jean Melrose: Ezt Rakd Ki: A Hungarian Tangram (Mathematics in School v27 n2 p14-15 Mar 1998)

[4] http://www.creativecrafthouse.com

[5] http://www.powerstrike.net/puzzles/index-matching.htm

[6] Gál Péter: Ördöglakatok, pentominók és társaik. Typotex, Budapest, 2008

[7] Bereznay Gyula: Pitagorasz tétele, Általános iskolai szakköri füzetek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1970

[8] Elisha Scott Leomis: The Pythagorean Proposition

[9] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras

[10] Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát, SHL könyvek, SHL Hungary Kft., Budapest, 1999

Barczi Krisztina

Nyílt végű és vizsgálódással megoldható feladatok a matematikaórán

1. Bevezetés

Matematikaórán gyakran elhangzik a kérdés: „Tanárnő, ezt miért kell megtanulni? Hol fogjuk ezt az életben használni?” Ezekkel a kérdésekkel a tanulók akaratlanul is rámutatnak néhány matematikatanítással kapcsolatos problémára. Például: igen kevés nyílt végű feladatot oldunk meg az órákon, így kevesebb lehetőség jut kreatív tanulói tevékenységre, a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésére. Ebben a cikkben két feladatot mutatunk be, amiket egy hosszabb kísérlet részeként oldottak meg középiskolás tanulók. Az említett feladatok nyílt végű, illetve matematikai vizsgálódást igénylő feladatok, amiket kooperatív tanulásszervezési technikák felhasználásával dolgoztunk fel.

2. Elméleti háttér

2.1. Nyílt problémák

A probléma fogalmára Robert Fisher (2002) meghatározását fogadjuk el, miszerint a probléma egy olyan feladat, ahol a következő elemek vannak jelen: *Adottságok* – a kezdeti feltételek, kiindulási szituáció; *Akadályok* – például a megoldási út ismeretlensége; *Célok* – általában a megoldás; *Erőfeszítés* – a módszer, amivel a problémát megoldjuk. Zárt feladatról vagy problémáról akkor beszélünk, ha egyértelműen ismerjük a kezdeti feltételeket, a célt és a megoldáshoz vezető utat is. Pl. Oldd meg a megoldóképlet segítségével az $x^2 + 7x = -12$ másodfokú egyenletet!

Nyílt feladatokról akkor beszélhetünk, (1) ha az adott problémára eddig még senki nem talált megoldást; (2) ha a feladat megoldása többféle is lehet, attól függően, hogyan értelmezzük a feladatot; (3) ha az adott problémát többféle módszerrel is meg lehet oldani; (4) ha a feladat megoldása során úgy érezzük, hogy lehetőség van általánosításra is. (Ambrus G., 2000)

A nyílt végű matematika feladatok olyan típusúak, amiknek lehet több megoldása, vagy a megoldáshoz többféle úton el lehet jutni. A megoldások számától függetlenül a diákoknak el kell magyarázniuk, hogyan jutottak el a válaszig és matematikai érvekkel kell alátámasztaniuk a gondolatmenetük helyességét. A nyílt végű feladatok egy részét vizsgálódással kell megoldani. Ilyenkor a tanulók mintákat figyelnek meg és megpróbálják felismerni az összefüggést bizonyos megadott információk között. (Cooney, 2013)

A feladatok kiválasztásánál figyelembe kell venni, hogy nemcsak a nyílt végű, hanem szinte minden szöveges matematikai problémánál fontos a megfogalmazás. A Wason-teszt is megmutatta, hogy egy feladat szövegezése nagymértékben befolyásolja a megoldó következtetési képességét. (Devlin, 2000) Célszerű ezért úgy fogalmazni, hogy a tanulók ismert tárgyakat, fogalmakat találjanak a feladatban.

2.2. Kooperatív technikák

A matematika „megszerettetéséhez” fontos a jó munkalégkör kialakítása, a hatékony munkához elengedhetetlen a tanulók aktivitása is. (Ambrus A., 2004) Az egyik módszer a jó légkör kialakításához és a maximális tanulói aktivitás biztosításához a kooperatív tanulásszervezési technikák használata.

A kooperatív tanulás több, mint egyszerű csoportmunka, mivel itt a következő négy alapelvnek mindig teljesülnie kell: 1. építő egymásra utaltság; 2. párhuzamos interakciók; 3. egyéni felelősség; 4. egyenlő részvétel. A kooperatív tanulásszervezési struktúrák összeállításánál az ötletadók ezt a négy alapelvet szem előtt tartották. (Kagan, 2001) A következő részben bemutatunk néhány ilyen struktúrát, amit a jelenlegi kísérlet során fel is használtunk.

2.3. Alkalmazott módszerek

• *Gondolkozz – beszéld meg párban – kupac-tanács:* ennek a módszernek az alkalmazásánál a diákok eleinte önállóan gondolkodnak egy adott probléma megoldásán. Ezt követően párban megbeszélik az ötleteiket, végül a csoport egy csoportmegbeszélést tart és összeveti, valamint ellenőrzi az ötleteket.

• *Feladatküldés:* 1. lépés: minden csoport/diák (feladattól függ) kérdés(eke)t dolgoz ki – ezek lehetnek egy adott tananyagra vonatkozó ismétlő kérdések, lehetnek új feladatok, amiket a diákok találnak ki ...stb. 2. lépés: A csoportok elküldik egymásnak a feladatokat. 3. lépés: A csoportok válaszolnak.

• *Szakértői mozaik:* Minden csoportban mind a négy tanulónak van egy jele (ez lehet pl. betűjel), valamint minden csoport kap egy adott témát, amin a tagoknak majd dolgozniuk kell. Fontos azonban, hogy a csoportoknak kiosztott témák valahogyan összefüggjenek (matematikában lehet általánosításra használni ezt a módszert, úgy, hogy az egyes csoportok különböző eseteket vizsgálnak). A csoportok kapnak valamennyi időt, hogy a saját feladatukat kidolgozzák, megbeszéljék és meggyőződjenek róla, hogy a csoport minden tagja számára érthető a megoldás. Ezt követően az azonos jelű tanulók öszszeülnek, új csoportokat alakítva. Ezekben az új csoportokban mindenki beszámol a saját feladatáról, miközben a többiek jegyzeteket készítenek. A megbeszélés befejeztével a tanulók visszatérnek eredeti csoportjaikba és összevetik a szerzett információt. (Kagan, 2001)

3. Kutatási kérdés

Hogyan járul hozzá a nyílt végű problémák alkalmazása a matematikaórákon, kombinálva a kooperatív technikákkal a matematikai gondolkodás fejlődéséhez, a gondolkodás örömének átéléséhez?

4. A kísérlet

A következőkben bemutatásra kerülő két probléma és feldolgozásuk egy hosszabb lélegzetű fejlesztő pedagógiai kísérlet része. A kísérlet résztvevői 16–17 éves diákok, akik egy műszaki szakirányú nyelvi előkészítő osztály 11. évfolyamára jártak. Ez a 16 tanuló a matematikát heti 4 órában tanulta, főleg műszaki és természettudományos érdeklődésűek, némelyikük kiemelkedő matematikai tehetség, de mindanynyian szívesen foglalkoznak matematikával.

A kísérlet során a tanulók 5 tanterv-alapú nyílt végű és/vagy vizsgálódással megoldható problémát dolgoztak fel kizárólag kooperatív tanulásszervezési technikákkal tervezett órákon. Az egyes problémák megoldására 2–3 tanítási óra is jutott. A cél a problémák alapos megvitatása, körbejárása is volt.

5. Feladatok

5.1. Játék a gyufákkal

„Az asztalon hever 27 gyufaszál. Két játékos felváltva vesz el 1 vagy 2 vagy 3 gyufaszálat. (Amíg van az asztalon gyufaszál, addig legalább egyet el kell venni!) Az nyer, aki az utolsó gyufaszálat elveszi. A feladat egy győzelmi stratégia kidolgozása a kezdő, illetve a második játékos szempontjából.” (Ambrus A., 2004) *Tantervi vonatkozások:* aritmetika, oszthatóság, osztási maradékok (visszafelé gondolkodás).

5.2. Gombok

Három gombot körben helyezünk el. A gombok színe lehet kék vagy piros. Ismételd a következőket és figyeld meg, mi történik: két egyforma színű gomb közé helyezz egy piros gombot, két különböző közé egy kéket, majd távolítsd el az eredeti gombokat. Vizsgáld meg az összes lehetséges kiindulási helyzetet (nrich). Kiterjesztés: Mi történik, ha eredetileg 4, 5 vagy 6 gombod van? *Tantervi vonatkozások:* kombinatorika, összes eset logikus felsorolása (szisztematikus gondolkodás).

6. Az órák felépítése

	Gyufák	Gombok
A tanulók csoportba rendezése		
Feladatmegértés	Minden 4 fős csoport megkapta a játékszabályokat és két doboz gyufát.	A tanulók csoportonként megkapták a feladat leírását. Az eredeti probléma demonstrációját az *nrcih.maths.org* honlapon a csoportmunka megkezdése előtt az egész osztály megnézte. A vizualizálás segítette a probléma megértését.
Feladatmegoldás (*Gondolkozz – beszéld meg párban – kupac-tanács)*	*Nyerő stratégia kidolgozása.* A tanulók páronként kipróbálták a játékot és megpróbáltak nyerő stratégiát megfogalmazni mind a kezdő lépést megtevő, mind a másodikként húzó játékos számára.	*Vizsgálat 3 gombra.* A vizsgálat és a szemléltetés megkönnyítése érdekében a tanulók kétszínű korongokat kaptak, így ki is tudták próbálni a konkrét elrendezéseket.
Feladatvariáció (*Gondolkozz – beszéld meg párban – kupac-tanács)*	Változatlan játékszabályok mellett a tanulóknak vesztési stratégiát kellett kidolgozniuk. *Feladatküldés.* Minden csoport egy, az eredetihez hasonló játékot talált ki, majd az új játékokat kicserélték egymás közt és ismét megpróbáltak nyerő stratégiát kidolgozni az adott játékra.	*Vizsgálat több gombra.* Különböző csoportok különböző gombszámra vizsgálták a minták változását és próbáltak valamilyen észrevételt megfogalmazni. A *Szakértői mozaik* segítségével a csoportok megosztották egymással felfedezéseiket. Miután a tanulók visszatértek eredeti csoportjaikba úgy, hogy most már több különböző gombszámú elrendezés mintájára vonatkozó eredmény állt a rendelkezésükre, próbáltak megfogalmazni valamilyen általános észrevételt.
Diszkusszió (egész osztállyal), reflexió	Meggyőződtünk arról, hogy minden tanuló megértette a megoldásokat és a megoldási menetet is. A további problémamegoldás szempontjából fontos, hogy visszatekintettünk a feladat megoldási folyamatára és felidéztük, hogy milyen nehézségekbe ütköztek a tanulók és hogyan sikerült leküzdeniük azokat. Pólya szerint „Azzal, hogy átnézik a kész megoldást, az eredményt és a hozzávezető utat átvizsgálják, még egyszer végiggondolják, megszilárdítják tudásukat, és fejlesztik feladatmegoldó készségüket.” (2000)	

7. Megfigyelések, tapasztalatok, eredmények

Gyufák

A gyufás játéknál hamar rájöttek a tanulók a feladatvariáció lehetőségeire. Közvetlenül a feladat kiosztása után ilyen mondatok hangzottak el: „Játszhatnánk 5-tel is.” vagy „Legközelebb 10-zel játszunk.”

Az eredeti probléma megoldásánál sikerült rájönni, hogy visszafelé érdemes gondolkodni a nyerő stratégia megtalálásához. Több tanuló megoldása között szerepel, hogy ha sikerül elérni, hogy csak 4 db gyufa maradjon az asztalon úgy, hogy ekkor az ellenfél következzen, akkor már biztos a győzelem – ezt persze minden páros másként fogalmazta meg, de a lényeg ugyanaz volt. A 4 db gyufától visszafelé próbálták kitalálni, hogy mely számok a „nyerők”. Néhány páros úgy közelítette meg a problémát, hogy megnézte, hány gyufának kell az asztalon maradnia, miután ő húzott, mások azt vizsgálták, hogy hány gyufából lehet még nyerni, mielőtt ők húztak és volt, aki az egy körben kihúzott gyufák számával próbált számolni. Példa megoldásokra:

„Arra kell törekedni, hogy az ellenfélnek legyenek a 4 többszörösei: 4, 8, 12, 16, 20, 24.”

„A végére 4 gyufaszálat kell hagyni az ellenfélnek. 24-től lefelé 4-re kell kiegészíteni a húzott szálakat. Ha az elején 3-at húz az ellenfél, akkor biztosan nyerni fog (ha tud játszani).”

„Az elején 3-mal kezdünk, majd a közepére lelassítunk egyre és próbáljuk a 4-et az ellenfélnek tenni.”

„Az elején cél, hogy összegbe 3-at vegyünk le, utána mindig 4-et.”

A legtöbb tanuló az első ötlet megtalálását tartotta nehéznek. Azt írták, hogy ha már megtaláltak egy gondolatmenetet, azt könnyű volt követni. A feladat variált eseteinél hasonló módon folyt a megoldás.

Gombok

Miután a csoportok megkapták a feladat leírását, megpróbálták értelmezni. Annak ellenére, hogy a feladatmagyarázatot interaktív táblás demonstráció is kísérte, mégsem minden csoport tudta elkezdeni a feladat megoldását. A korongok segítségével próbálgatták a lehetőségeket, viszont az összes lehetőség logikus felsorolása és a megfigyelt minta leírása sok helyen gondot okozott. Hosszabb idő elteltével is úgy tűnt, hogy a tanulók nagy része vaktában írja fel az egyes eseteket, ezért osztály diszkusszióra váltottunk. Először is meg kellett beszélni, hogy mivel a korongok körben helyezkednek el, a pkp, ppk és a kpp (p: piros korong; k: kék korong) jelölések ugyanahhoz az elrendezéshez tartoznak. Közös javaslat alapján 3 korong esetén a mintákat a következő módon gyűjtöttük össze:

ppp → ppp; kkk → ppp;
ppk → pkk → ppk; kkp → ppk → kpp

A minták váltakozására vonatkozó észrevételt, miszerint: *ha a korongok azonos színűek, akkor előbb-utóbb mindhárom korong piros lesz, ha különbözőek, akkor ismétlődik ugyanaz a minta,* együtt fogalmaztuk meg az osztállyal.

Most már mindenkinek volt ötlete, hogy hogyan jegyzeteljen. 2–2 csoport feladata 4 gomb, másik 2–2 csoporté pedig 5 gomb elhelyezkedési lehetőségeinek vizsgálata volt. A feladat megoldása közben a tanulóknak nagy segítséget jelentett, hogy konkrét tárgyakkal tudták kipróbálni a lehetséges sorrendeket és elvégezni azokon a változtatásokat.

A kooperatív munkaforma alkalmazásakor a tanulói aktivitás sokkal nagyobb volt, mint egy frontális módszerrel szervezett órán. Ehhez persze hozzájárultak a felhasznált kooperatív struktúrák, hiszen alkalmazásuk során a feladat sikeres megoldásához mindenki egyenlő részvételére szükség volt. Még azok a tanulók is aktívan dolgoztak, megfigyeltek, jegyzeteltek, ötleteltek, akiket egyébként nehéz rávenni, hogy részt vegyenek az órai diszkusszióban.

A tanulók közötti kommunikáció nyilván sokkal élénkebb volt, mint általában. Érdekes volt hallgatni, ahogyan próbálták egymásnak elmagyarázni ötleteiket, ahogyan javítgatták egymás érveléseit és győzködték egymást saját igazukról. A próbálkozások, ötletelések során egyre pontosabban fogalmaztak. Megtanulták türelmesen végighallgatni egymást és értelmes vitákba is belementek. Az egyik csoport tagjai a szükséges minimumra korlátozták az egymás közötti interakciót, bár ez lassította a munkatempót, a feladatmegoldást így is sikeresen teljesítették.

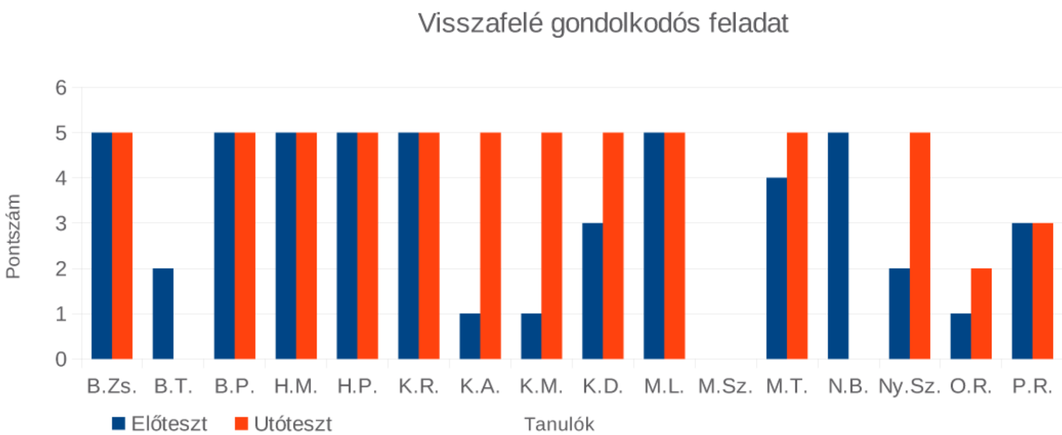
A feladatok megoldása után több tanuló írta, hogy jó volt csoportban dolgozni, hiszen így valakinek mindig volt ötlete, ami előre vitte a problémamegoldást, így ez sikerélménnyel zárult.

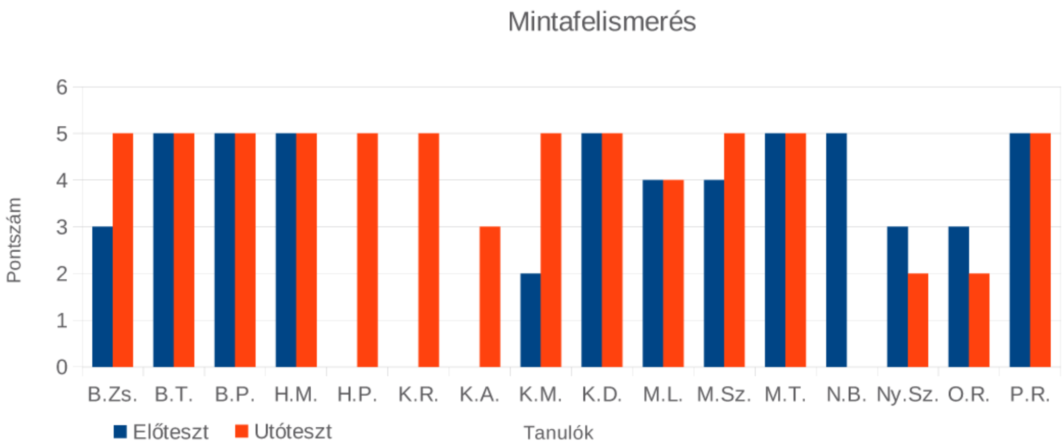
Érezték, hogy képesek önállóan dolgozni, mi több, sikert is elérni.

A matematikaoktatás során érdemes azt is tudatosítani a tanulókban, hogy a matematika nem egy merev ismeretekből álló rendszer, hanem valami olyan, amiben mindig fel lehet fedezni, észre lehet venni új összefüggéseket. (Szendrei, 2005) A tanulók számára ez akkor is izgalmas lehet, ha az összefüggés, amit felfedeznek, csak számukra új. A vizsgálódással megoldható feladatok ezt jól demonstrálták. Adott ismeretekből kellett létrehozniuk valami újat. Ahogy Szendrei Julianna könyvében is olvashatjuk: „Azt is át kellene az iskolai matematikatanulás során élni, hogy a matematika alkotó tevékenység”. A fenti problémák feldolgozása kooperatív struktúrákkal jó módszernek bizonyult erre.

Nehézségek

A feladatok megoldása során felmerülő nehézségek, amikkel a tanulók szembesültek, a következők voltak: (1) a gyufás játék esetében a random próbálgatásról valamilyen rendszerezett munkára váltás; (2) ne csak játék, hanem megfigyelés legyen a gyufákkal való kísérletezés; (3) a gombok esetében kör alakú elrendezésben az összes eset logikus, rendszerezett felsorolása; (4) a kör alakú elrendezésben a különböző esetek megkülönböztetése (pkk, kpk … stb.); (5) általános érvényű állítások megfogal-





mazása; (6) elakadás esetén a tanár helyett a társaktól való segítségkérés.

Eredmények

A kooperatív módszerekkel feldolgozott órákat megelőzően és azokat követően is a tanulók matematikatudást mérő teszteket töltöttek ki. Az elő- és az utóteszt feladatai között egyaránt találhatók olyanok, amelyeknek a megoldása visszafelé gondolkodást igényel (mint a gyufás játék), illetve, amihez mintamegfigyelés és általánosítás szükséges. Az alábbi diagramok a tanulók által elért pontszámokat mutatják meg az elő- és az utóteszt ide vonatkozó feladatain.

8. Jövőbeni tervek

A fent említett órák egy összetettebb kísérlet részét képezik. A tapasztalat alapján mindenképp pozitív kimenetele volt a kísérlet eddig teljesített részének. A tanulók örömmel vettek részt a kooperatív technikákkal szervezett órákon és bátrabban fogtak bele ismeretlen feladatok megoldásába.

A módszer használata nyílt feladatokkal egybekötve mindenképpen színesíti a tanítási órákat. További kérdés lehet, hogyan alakítsunk át néhány tanórai problémát úgy, hogy ne hátráltassuk a kötelező haladást, és szem előtt tartsuk, hogy a matematikaórákon az érettségire felkészítés is igen fontos szempont, viszont megízleltessük a gyerekekkel a problémamegoldás szépségét.

A kísérlet folytatásaként a tanulók 1–2 hetente részt vettek további kooperatív tanulásszervezési technikákkal tervezett órákon.

A kutatás az Európai Unió és Magyarország támogatásával a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú „Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program” című kiemelt projekt keretei között valósult meg.

Irodalomjegyzék

[1] Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába. ELTE Eötvös kiadó, 2004.

[2] Ambrus Gabriella: „Nyitott” és „nyitható” feladatok a tanárképzéseben és a matematikaoktatásban. A Matematika tanítása 2000/1.

[3] Cooney, T.: Open-ended assessment in maths. http://books.heinemann.com/math/about_site.cfm, 2013.

[4] Devlin, Keith: The Math Gene. Basic Books, 2000.

[5] Fisher, Robert: Hogyan tanítsuk gyermekeinket gondolkodni? Műszaki könyvkiadó, Bp. 2002.

[6] http://nrich.maths.org/2048

[7] Kagan, Spencer: Kooperatív tanulás. Önkonet Kft, Bp. 2001.

[8] Pólya György: A gondolkodás iskolája. Akkord kiadó, 2000.

[9] Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? Typotex kiadó, Bp. 2005.

Budai László

Informatikai eszközökkel támogatott matematikatanítás – tapasztalatok

Bevezetés

2012. Ismeretes, hogy az elmúlt 10–15 évben hatalmas társadalmi, oktatáspolitikai változások zajlottak le (és folyamatban is vannak) Magyarországon. Ehhez természetesen a pedagógusoknak is alkalmazkodniuk kell/kellett eszköz/módszer, illetve nem utolsó sorban – ami tapasztalataim szerint az egyik legkritikusabb pont szokott lenni – hozzáállás tekintetében.

Az új módszerek (differenciált tanulásszervezés, kooperatív módszerek, projektmunkák, moduláris oktatás…) új eszközöket kívántak meg, ezek közül egyik az IKT. Ebbe a kategóriába sok minden beletartozhat: internet használata, tanulói digitális táblák használata, interaktív tábla, különböző szoftverek, digitális adatbázisok (sdt, sulinovaadatbank…), projektor segítségül hívása.

Az 5 tanévet felölelő tapasztalataim alapvetően három, egymástól különböző eszköz/módszer tekintetében nem feltétlenül elkülönülő szakaszra bonthatók: 1–4. évfolyamosok, 5–8. évfolyamosok, 9–12. évfolyamosok.

Informatika bevonása 1–4. osztályokban

Az első két tanévben egy falusi általános iskolában tanítottam informatikát többek közt

1. ábra
Island Chase Subtraction verseny alapműveletek gyakorlására

1–4. osztályos gyerekeknek. Itt megkérdezte a tanítónőjük, mivel a gyerekek szemmel láthatóan nagyon élvezik a számítógéppel való foglalatoskodást, lenne-e lehetőség az informatika-órán játékos magyar, illetve matematika feladatok nézésére. A válaszom természetesen igen volt. Az első program, amit megnéztünk, a minden számítógépre feltelepített Ablak Zsiráf volt, mely tartalmazott pár matematikához köthető gyakorló játékot (alapműveletek végzése). Ezen kívül találtam még egy jól használható oldalt: http://gyakorolj.hu. Ezen a weblapon számos flash alapú, játékos gyakorló feladat elérhető, melyek szinte mindegyikét kipróbáltuk; valamelyik jobban, valamelyik kevésbé jobban tetszett a gyerekeknek. A gyerekek nagy kedvence az Island Chase Subtraction (*1. ábra*) nevű, kivonást gyakoroltató játék volt, melynek lényege, hogy egy motorcsónakkal kell minél jobb helyezést elérni úgy, hogy a csónak sebessége a jó válaszok mennyiségétől és gyorsaságától függ. A játékot hálózatban kell játszani, azaz nem gépi ellenfelek ellen, hanem a gyerekek egymás ellen versenyezhetnek, ami plusz izgalmat adott a játékos tanuláshoz.

Mivel az informatikának véleményem szerint rendkívül sok köze van a matematikához, így mire a gyerekek erre rájönnek általános iskolában, már nem is kedvelik annyira az informatikát (logikai műveletek, algoritmizálás, programozás, táblázatkezelés...). Nagyon szerencsés volt ez az iskola olyan szempontból, hogy az 1–4. osztályokban heti 2 tanóra informatika-oktatásra volt lehetőség. Ezért jutott bőven idő a Comenius Logo programozási nyelvben a Logo környezetet áttekinteni és még az elején megszerettetni a gyerekekkel, melyhez akaratlanul is párosult a matematikatudásuk felhasználása és ezáltal a gondolkodásmódjuk fejlesztése. Gondolok itt a beépített játékokon kívül a ciklusok írására, egyszerűbb, illetve bonyolultabb alakzatok kirajzolására, rekurzív ábrák készítésére, paraméterek alkalmazására, eljárások készítésére és azok különböző paraméterek melletti hívására és még sorolhatnám. A program grafikus lehetőségeit elsősorban az alapvető geometriai ismeretekhez kapcsolódó szemléltetésben használhatjuk ki (körüljárás, eltolás, elforgatás...).

Felhasználtam még továbbá egy gyakorló feladatokat tartalmazó honlapot, mely rögtön kiértékeli a tanuló eredményeit. A honlap a http://www.erdcenter.hu/pub/ec/jatek/matekkics i.html címen található, és a következő témaköröket tartalmazza: összeadás, kivonás, helyettesítés, vegyes, szorzás és osztás.

Nagyon fontosnak tartom megjegyezni a fentebb említett tényekkel kapcsolatban, hogy a sok ellenvéleménnyel szemben én kifejezetten támogatom a 6–10 éves korosztály informatika oktatását. Ezt a konkrét tapasztalataim alapján, illetve az elmúlt 10–15 év társadalmi, oktatásirányítási, matematikadidaktikai változások alapján merem kijelenteni. Természetesen nagyon fontos, sőt gyakorlatilag fő szempont volt az, hogy az ilyen kicsi gyermekeknél ne menjen a pszichomotorikus tényezők rovására a számítógépek bevonása (az írást, a számkörök bővítését stb. ne csupán a számítógépre hagyatkozva sajátítsa el), tehát a megfelelő helyen és időben, a megfelelő módszer alkalmazása sarkalatos pont volt számomra.

GeoGebra az 5. osztályban

Mindezekkel párhuzamosan, rögtön 2008 szeptemberében, elsődleges érdeklődési körömnek megfelelően elindítottam egy kutatást a (halmozottan) hátrányos helyzetű tanulókra vonatkozóan: arra voltam kíváncsi, hogy vajon a GeoGebra bevonása a matematikához kapcsolódó tanítási-tanulási folyamatban milyen hatással lehet ezen tanulók matematikai képességeinek fejlődésére. Ezt a vizsgálatot 2 különböző szempont alapján végeztem, melyek eredményeiről beszámoltam A matematika tanítása 19. évf. 2. sz. / 2011 számában. Az első kutatás az 5. évfolyamot célozta, a második a 8. évfolyamot (itt már összetettebb volt a kép, ugyanis ekkor már egy nyolcosztályos gimnáziumban dolgoztam, ahol ugyancsak volt hozzáférésem HHH általános iskolai tanulókhoz az oktatási intézmény összevont volta miatt).

GeoGebra a 8. osztályban

A másik hosszabb távú kutatásom (szintén 2008–2011) alkalmával a 8. évfolyamosok gondolkodási képességeinek fejlődését vizsgáltam, pontosabban a GeoGebrával való fejleszthetőséget. Az erről készült cikkem mellékletként lesz csatolva, így az ehhez kapcsolódó tevékenységeket és eredményeket csak nagyvonalakban ismertetem.

Felmerül a kérdés, hogy az elmúlt 10–15 év társadalmi, oktatásirányítási, matematika-didaktikai változásai milyen irányban befolyásolták a matematika cél-, feladat- és követelményrendszerét. Alapvető kérdéssé vált, hogy a ma tanuló diáknak milyen tudásra lesz szüksége a jövőben. A kérdésre adott válasz pedig a következő: a társadalom a ma tanuló diáktól alkalmazható tudást vár el. Mindezek szellemiségében jöttek létre, és mai napig is jönnek létre a fentebb már tárgyalt régi-új eszközök, módszerek alkalmazása a fejlesztés hatékonyságának növelése érdekében. Ahhoz, hogy a tanuló megállja a helyét az életben a mai munkaviszonyok mellett, kreatív személyiséggel kell rendelkeznie, és nyitottnak kell lennie az újra, az élethosszig tartó tanulás következtében. Véleményem szerint ezt a megfelelő és tudatos gondolkodásfejlesztéssel (elemi és összetett gondolkodási műveletek) igen hatékonyan lehet alakítani.

Miért jó a GeoGebra bevonása a tanítási-tanulási folyamatba? Egyrészt felgyorsítja a fogalomalkotás, ismeretszerzés egyes fázisait, másrészt a tanulók számára érdekesen, figyelemfelkeltően lehet gyakorlatiasságot kialakítani. Munkaforma szempontjából a GeoGebra differenciálási lehetőségekkel is rendelkezik. Minden eddiginél könnyebben és hatékonyabban fejleszthető a szaknyelv pontos használata és a bizonyítási igény felkeltése. A GeoGebra használatával elkerülhetőek a tanulóknál előforduló, bizonyos gondolkodással kapcsolatos jellegzetes hibák (helytelen analógián alapuló…). Ami a legfontosabb azonban a fentebb leírtak tükrében, hogy a GeoGebra egy nagyon jó motivációs bázist teremt, felkelti a tanulóban az érdeklődést és tanulásra ösztönöz.

Az elért eredmények 8. évfolyamokra vonatkoznak a következő témakörökben:

- Analízis és szintézis: háromszögek, négyszögek szerkesztése, megoldások diszkutálása.
- Általánosítás és specializálás: sokszög belső szögeire vonatkozó összefüggések, négyszögek csoportosítása.
- Fogalomalkotás: a végtelen fogalmának mélyítése.
- Ítéletalkotás: Pitagorasz tétele.

Fontosnak tartom megjegyezni, hogy a kognitív tényezők figyelembe vétele mellett az affektív (érzelmi, a matematikához való hozzáállása a tanulóknak) és pszichomotorikus tényezőket (esztétikus, pontos, áttekinthető munka készítése, eszközök megfelelő használata) is figyeltem. Mindezeket figyelembe véve a következtetéseim a GeoGebra 8. évfolyamokon történő használatát illetően:

- Motivációs bázis teremtése a tanulók számára
- Szkémák egyéni kialakításának (asszimiláció, akkomodáció) segítése
- Kognitív képességek, gondolkodási folyamatok fejlődésének elősegítése (formális műveletek szakasza)
- Affektív tényezők javítása (a matematikához való pozitívabb hozzáállás, a számítógép használata tanórán motiválja a tanulókat)
- Pszichomotorikus képességek fejlődése

Az ActivInspire szoftver

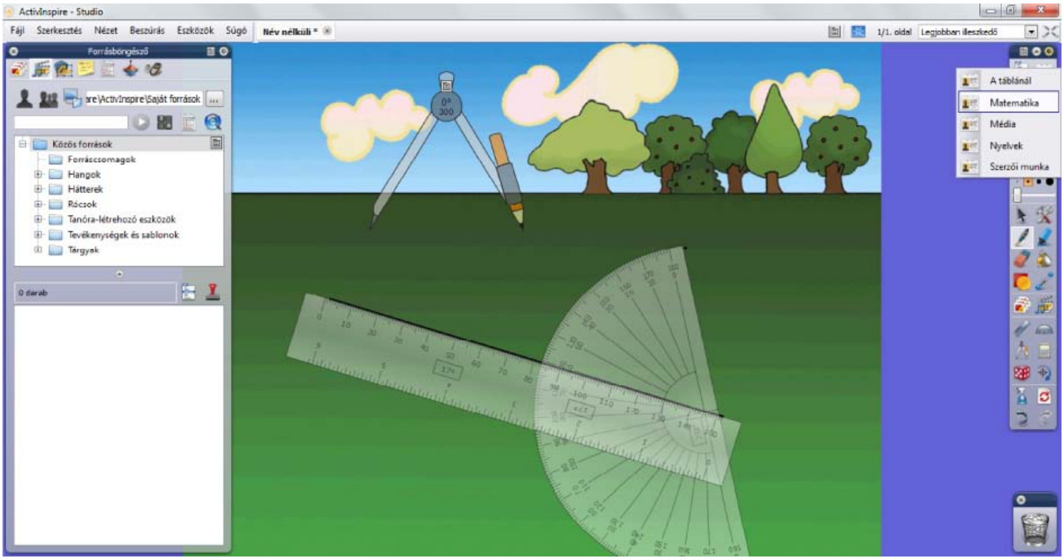
Az oktatási intézmény, ahol jelenleg vagyok, közel 1 éve kapott pályázat útján 8 darab Promethean típusú interaktív táblát. Az ehhez tartozó szoftver neve ActivInspire (*2. ábra*).

A szoftver lehetőségeit jelenleg is tanuljuk, felfedezzük önállóan, illetve a pedagógus kollégákkal karöltve. A már jelenleg általam ismert funkciói is igen impozánsnak mondhatóak. A szoftverről rengeteget lehetne mondani, megpróbálom most kiemelni az általam már sikeresen használt funkcióit.

Alapvetően egy új flipchart (így nevezi a szoftver a munkalapokat) létrehozására 3 lehetőség kínálkozik:

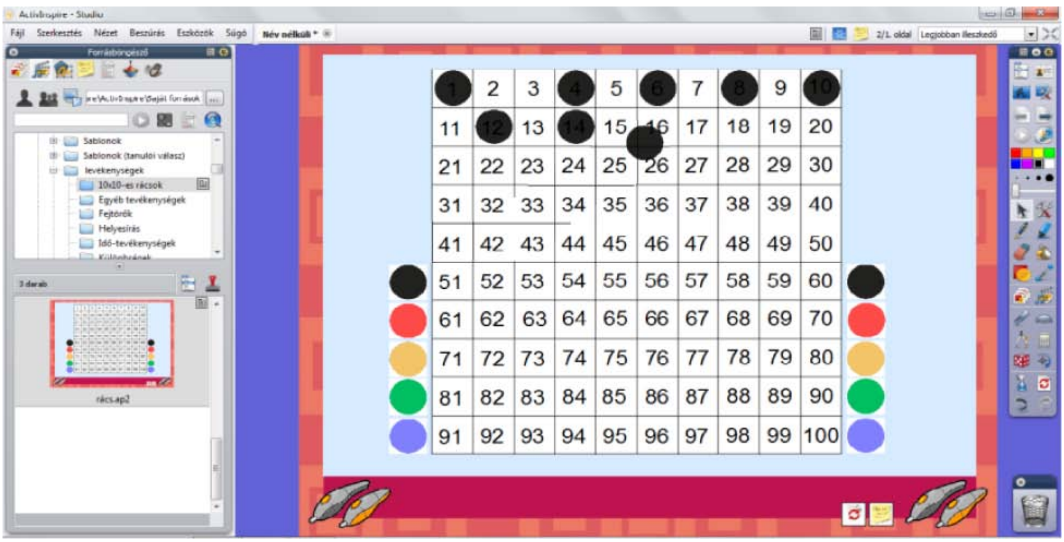
- Betöltünk egy, már meglévőt (*3. ábra*)
- Betöltünk egy, már meglévőt, majd azt igényeinkhez szabjuk.
- Teljesen a nulláról hozunk létre egy új flipchartot.

Az első lehetőségre kiváló rendszert találtak ki: a bal oldali eszköztáron található egy forrásböngésző ikon, itt elérhető az összes, a prog-



2. ábra

Az ActivInspire nevű interaktív tábla-szoftver felépítése



3. ábra

Példa az ActivInspire beépített forrásainak egy lehetséges felhasználására – Erathoszthenészi-szita ramba integrált flipchart. Elsődleges forrásként a http://www.prometheanplanet.com/, illetve a http://www.prometheanworld.com hivatalos weboldalakat említeném. Itt szinte minden nap új és új, mások által (vagy akár általunk is) publikált flipchartok tekinthetők meg „tube" formában, illetve integrálhatóak a szoftver forrásböngészőjébe. Ha még nem értünk annyira a program lehetőségeinek kiaknázásához, akkor a második flipchart-létrehozási lehetőség nagyon hasznos: egy már teljesen komplett, működő rendszert alapismeretekkel rendelkezve is átírhatunk (például kicseréljük a feladat szövegét). Eddig többnyire az első két lehetőséget használtam, ugyanis tapasztalataim szerint egy teljesen új ötletet megvalósító flipchart létrehozása nagyon sok munkaidőt vesz igénybe, főleg, ha hozzávesszük, hogy akár több munkaoldalt is tartalmazhatnak.

A program azon kívül, hogy a szokványos média-elemeket tartalmazza (szövegek, képek, hangok, videók beszúrása), lehetőség van a flipchartok viselkedésének minimális programozására is: a beépített műveletek (kitöltés, alakzat felismerése, írás, szavazás…) bármelyikét hozzá tudjuk rendelni az általunk felrakott gombokhoz.

A flipchartok szerkesztésénél továbbá érdemes még kihasználni bizonyos képmanipulálós programokból (photoshop) már jól ismert rétegeket. Rengeteg olyan munkalap van, ahol már a feladat megoldását is tartalmazza a munkalap, csak más rétegen van, így az el van rejtve a szemünk elől, és mondjuk játékosan egy nagyítót föléje tartva jelenik meg.

Ha nagyon röviden kellene jellemeznem a szoftvert, azt mondanám róla, hogy ez minden porcikájában a játékos tanulásra helyezi a hangsúlyt. Rengeteg beépített játék, hang, videó, háttérkép… van benne, ami mind ezt az egy célt szolgálja: játékos tanulás.

Egyéb tapasztalatok

Számos informatikához kapcsolódó eszközről van már tapasztalatom, de azok nem olyan mélyek kutatásmódszertan szempontjából, mint a fentebb említettek, így azokról csak említést teszek.

Elektronikus prezentációk

Azon kívül, hogy néha szoktam bevinni általam készített prezentációkat (pl. matematikatörténet), a tanulókkal is szoktam csináltatni némely témakörhöz kapcsolódóan. Ezt azért szoktam tenni, mert ezzel is mélyül az adott anyaghoz tartozó tudása, illetve kiderül számomra, hogy mennyire sikerült elsajátítania az adott anyagrészt. Ezt nem csak kifejezetten a hagyományos prezentációkészítő eszközökkel (microsoft office powerpoint) szoktuk megvalósítani, hanem kitekintünk egyéb lehetőségekre is: prezi (*4. ábra*), speakflow, ppt plex. Mindez azt a szemléletet erősíti a tanulókban, hogy a tudományok folyamatos fejlődésben vannak (még a matematika is), illetve hogy legyenek nyitottak az új dolgok iránt.

MozaBook

Ennek használatát kifejezetten 6. osztályban hasznosítom. Az oktatási intézmény külön megrendelése kell ennek használatához. Az egész tankönyv, illetve munkafüzet elektronikus formában is megtalálható, de nem statikus formában, hanem dinamikusan: a feladatokat ki tudjuk tölteni, megjegyzéseket fűzhetünk, a képeket külön ki tudjuk nagyítani, a feladatokat külön nagyméretben meg tudjuk jeleníteni…

Táblázatkezelő rendszerek

Alapvetően a Microsoft Office Exceljét szoktam használni, de nem olyan gyakran: statisztikai feladatokban 8. osztályban, 5. osztályban a különböző diagramok prezentálására.

Tanulói laptopok

Három olyan osztály van, melyek bekerültek iskolánkban a tanulói laptop programba.

4. ábra
Nagy magyar matematikusok – prezivel készült online bemutató

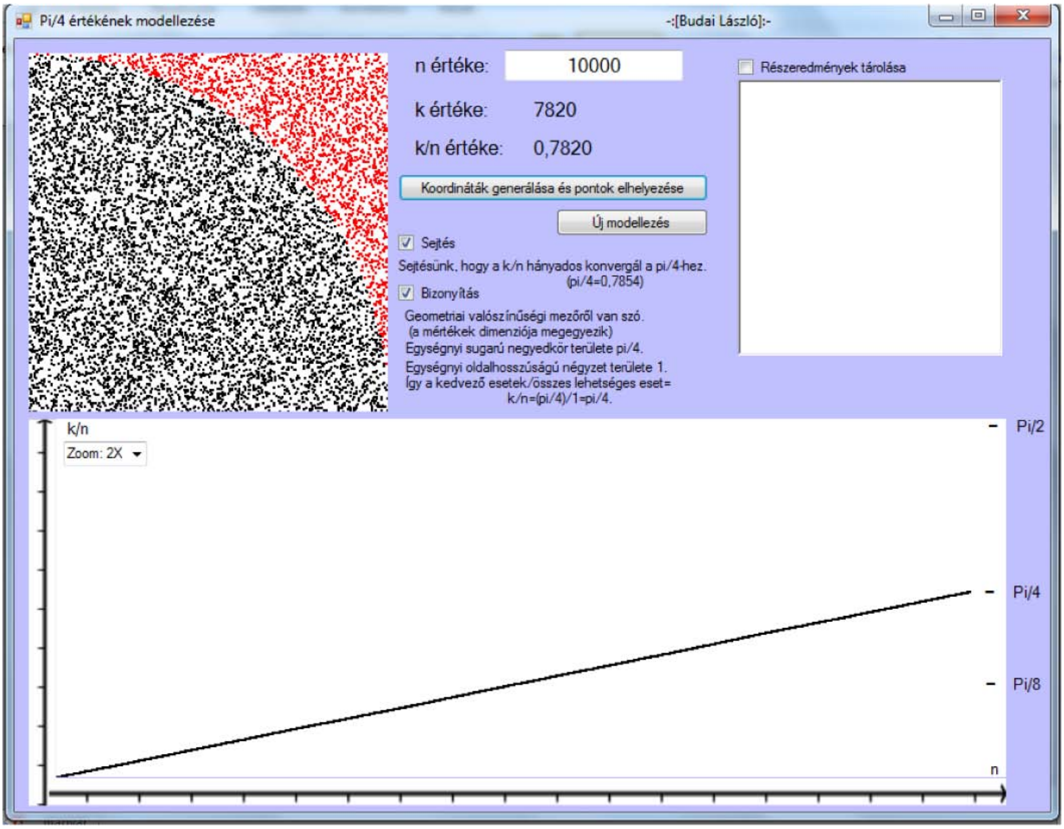
Ezek közül én nem tanítok egyikben sem, viszont volt szerencsém kipróbálni személyesen is egy matematikaórán. Pozitív tapasztalataim vannak: minden tanuló külön kap egy úgynevezett elektronikus palatáblát, melyhez tartozik egy önálló program (hasonlóan az ActivInspirehez), és a tanulók önállóan vagy virtuális csoportokra osztva dolgozhatnak, akár differenciált óraszervezéssel is. A központi, tanári gépről elérhető az összes tanulói laptop, így bármikor ellenőrizni tudjuk a tanulók munkáját, akár bele is javíthatunk online, vagy segítséget tudunk adni nekik.

Robotika

Az iskolai informatikának nagyon szűk témaköre a robotika, alig van róla szó, pedig nagy segítséget jelenthetne ez is, hátránya az anyagiakban rejlik. Egy Kutatók Éjszakáján vettem részt, ahol a gyerekeknek egy robot ellen lehetett játszani a következő játékot: van egy 100 mezőből álló egyenes pálya, a gyerek az egyik végén, a robot a másik végén áll. Felváltva lépegethetnek egy bábuval (a robot tolja maga előtt), minimum 1, maximum 4 lépést. Az a játékos veszít, aki végül nem tud lépni (szembeütközik a másikkal). A gyerekek számára meglepő eredmények születtek: 30 gyerekből 30 elvesztette a játékot. Ilyen okosak manapság a robotok? Ez egyfajta NIM-játék reprezentációja volt, és ismert, hogy az ilyen jellegű játékoknak a megfelelő feltételek mellett létezik győztes stratégiája. Ennek matematikai hátterét beszéltem meg a gyerekekkel. Otthoni munka volt számukra hasonló játékok kitalálása, keresése.

Saját programok használata

Néhány általam készített gyakorló programot, illetve modellezési programot is használtam már matematikaórákon. Például a valószínűség-számításnál (12. osztályban), vagy érdekességképpen már 7. osztálytól (ahol ismerik a pít) be lehet mutatni a következő modellt (*5. ábra*): a Descartes-féle koordinátarendszer I. negyedének $[0, 1] \times [0, 1]$ részére véletlenszerűen „leejtünk” n darab pontot. Ezekből k darab az egység sugarú negyed körön belülre fog



5. ábra
A pí, illetve pí/4 számítógépes modellezése

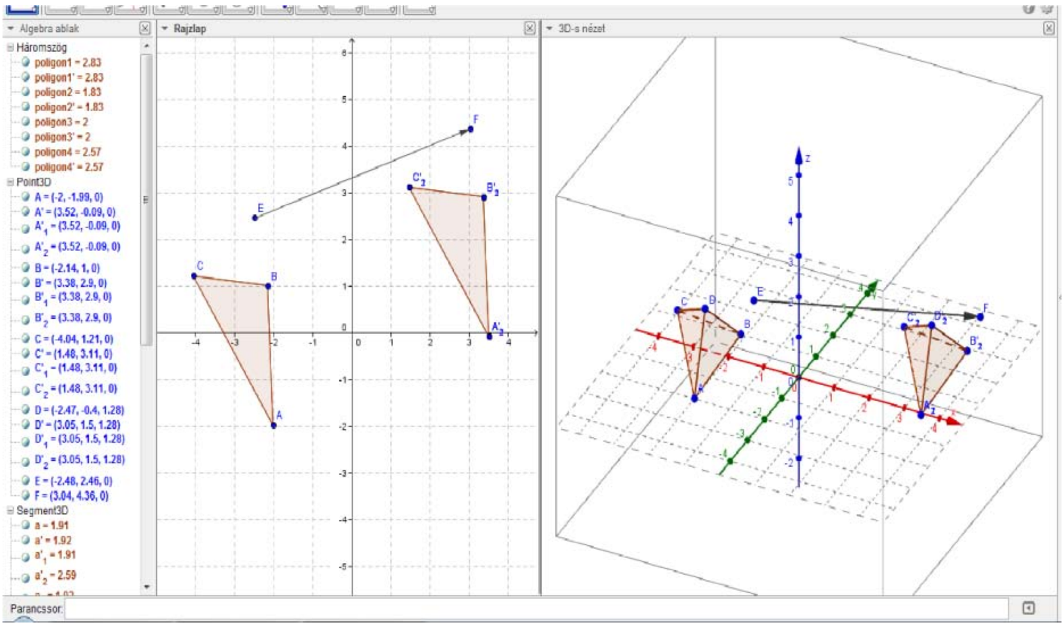
esni. Hova tart a *k*/*n* hányados értéke, ha *n*-t növeljük? A programon be lehet állítani n értékét (10000-nél már elég szembetűnő a modell), illetve egy grafikonon követhetjük a *k*/*n* hányados változását (3 különböző zoomolási finomítással). Ismételhetjük a modellezést többször is, a részeredményeket el tudjuk tárolni egy txt kiterjesztésű szöveges fájlban, illetve megfogalmazhatjuk a sejtést, majd a bizonyítást.

A programokat C# programozási nyelven készítettem.

Tervek a jövőre nézve

Jelenlegi érdeklődési területem a 15–18 éves korosztály térszemléletének fejleszthetősége a GeoGebra használatával. A GeoGebra jelenlegi legfrissebb verziója nem támogatja a 3D-s objektumokkal való munkálatokat, de az ábrázoló geometria, illetve projektív geometriai szerkesztések elvégezhetőek így is benne. Ha nagyon akarjuk, akkor egy háromdimenziós Descartes-féle koordináta-rendszert is definiálhatunk a GeoGebrában, de ezt kizárólag önerőből (transzformációs mátrixok segítségével).

A GeoGebra azon verzióját, mely támogatná a 3D-s objektumokkal való műveleteket, a GeoGebra 5.0-t (*6. ábra*), folyamatosan fejlesztik a franciák, napról napra újabb lehetőségekkel bővítik, remélhetőleg hamarosan eléri a 100 százalékosan „bevethető” formáját.



6. ábra
GeoGebra 5.0 Béta

Irodalomjegyzék

[1] http://tudasbazis.sulinet.hu/hu

[2] http://sulinovaadatbank.hu/

[3] http://ementor.hu/

[4] http://gyakorolj.hu/

[5] http://www.erdcenter.hu/pub/ec/jatek/matekkicsi.html

[6] http://www.prometheanplanet.com/

[7] http://www.prometheanworld.com/

[8] http://prezi.com/

[9] http://www.geogebratube.org/?lang=hu

Ambrus Gabriella – Anke Wagner

Reprezentációk a százalékszámítás tanításában

Százalékokkal (helyesen) számolni egyáltalán nem magától értetődő. Sokan életkortól függetlenül már akár egyszerű feladatokban is hibáznak, ahogy ezt nemcsak felmérésekben, de például napilapok cikkeiben is tapasztalhatjuk. Ennek nyilvánvaló oka, hogy sokaknak nincs megfelelő elképzelése a százalék fogalmáról. A következő tanulmányban néhány gondolat következik a témával kapcsolatos különböző reprezentációs lehetőségekről magyar és német matematika-didaktikai háttér segítségével.

A reprezentáció fogalmával kapcsolatban röviden megjegyezzük, hogy a külső reprezentáció materiális, cselekvéses, szimbolikus síkon történik. A belső reprezentációk a külső reprezentációk memóriánkban megjelenő megfelelői, pl. kép, hangos mondat, szimbólumok sorozata, írott szöveg (vö. Ambrus A. 1995).

Problémafelvetés

A százalék valójában egy törtekkel kapcsolatos absztrakció, és így a százalékszámítással kapcsolatos problémák megoldása is gyakran ezen az absztrakt szinten történik. Hamar feledésbe merül azonban, hogy a százalék valójában egy arányt fejez két szám között, speciálisan 100-ra vonatkoztatva, például 75% a 75 : 100 arányt fejezi ki.

A százalékkal való értő számolás pedig igen fontos. Nemcsak azért, mert a mindennapi életben gyakori és nélkülözhetetlen, hanem mert biztos alkalmazása az absztrakt gondolkodást is fejleszti.

A következő, százalékszámítási alapesetnek is tekinthető feladat akár a mindennapokból is származhatna:

Törzsvásárlói kártyával bizonyos árucikkek 5%-kal olcsóbban vásárolhatók. A kedvezményes cikkek listája hónapról hónapra változik. Mennyit kell végül a listán jelenleg szereplő pólóért fizetni, ha az eredetileg 48 Euroba kerül?

Hogyan dolgozzunk egy ilyen feladattal az órán? Mi a legjobb módszer arra, hogy a tanulók ilyen feladatokat helyesen tudjanak megoldani?

Megoldási módszerek szimbolikus síkon

Az előbbi feladat megoldásához többféle módszert is alkalmazhatunk. A német szakirodalomban például 4 szimbólumokkal dolgozó módszert adnak meg ehhez, amelyekhez minden esetben szóbeli értelmezés is járul (vö. Leutenbauer, 1994, Hafner, 2012). Ezekkel a módszerekkel a magyar oktatásban is találkozunk.

1. Következtetés

A következtetés során két mennyiséget egymáshoz rendelünk (itt: 100% → 48€), majd egy harmadik érték segítségével (itt: 95%) kiszámítjuk a negyedik értéket. Ahhoz, hogy az említett harmadik érték segítségével a negyedik értéket kiszámíthassuk, „kulcsszázalékokat” is segítségül hívunk, például ilyen az 1%, 5%, 10%.

Példánk esetében mondjuk az 1% segítségével következtetünk az 95% -ra.

$$\begin{array}{lrcrl} & 100\% & \text{megfelelője} & 48\text{€} & \\ :100 \downarrow & & & & \downarrow :100 \\ & 1\% & \text{megfelelője} & 0{,}48\text{€} & \\ \cdot 95 \downarrow & & & & \downarrow \cdot 95 \\ & 95\% & \text{megfelelője} & 95\cdot 0{,}48\text{€} & \end{array}$$

A szóbeli magyarázatot általában rajz is kíséri, például az előbbiekben látható módon. Nyilak utalnak arra, hogy mindkét mennyiség esetében ugyanazt a műveletet hajtjuk végre.

2. Arányegyenlet

Ha ezt a felírási módot alkalmazzuk, akkor az abszolút rész (százalékérték) (P) és abszolút egész (alap) (G) arányát feleltetjük meg a relatív rész (százalékláb) (p) és relatív egész, vagyis 100 arányának. Az előbbi jelöléseket alkalmazva írhatjuk fel általánosan, illetve a kiindulási feladat adataival a következőket:

$$\frac{P}{G}=\frac{p}{100}$$

$$\frac{P}{48}=\frac{95}{100}$$

A megoldás befejezéséhez megfelelő egyenletmegoldási lépések használhatók.

Érdemes meggondolni, hogy a megengedett átalakításokkal kapott egyenletek az eredeti feladat szempontjából mit fejeznek ki. Például a következő alak:

$$\frac{P}{95}=\frac{48}{100}$$

arra utal, hogy a kiszámítandó százalékérték (P) úgy aránylik 95-höz (vagyis az egész egy részéhez), mint ahogy 48 (a megadott ár) aránylik a 100-hoz. Ilyen és hasonló megfontolások segítik a törtek–százalékszámítás összefüggéseinek mélyebb megismerését is.

3. Formális

Amennyiben a $P = G \cdot p\%$ vagy $P = G\cdot\frac{p}{100}$ képletet használjuk, világos a megoldás menete, feltéve természetesen, hogy az alap, százalékérték, százalék kifejezések és a megadott értékek között megfelelő kapcsolatot teremtünk. Az előbbi képlet úgy is értelmezhető a gyerekek előismereteire támaszkodva, hogy az alap valahányad részét kell kiszámítani, azaz a G mennyiség p%-át. Ezt úgy is felírhatjuk, hogy $P = p\% \cdot G$, és a szorzás tényezőinek felcserélhetőségére utalva kapható az előbbi képlet.

4. Operátor stratégia

$$G \xrightarrow{\cdot\frac{p}{100}} P$$

Ahogy a név is mutatja, egy operátor hat az alapra, ami $\left(\frac{p}{100}\right)$ ebben az esetben. Ez a megjelenítés is igen absztrakt még a 6. és 7. osztályban és nem az eddigi ismeretekre épít.

Bár ezek a kiszámítási módok elvontak, mégis gyakran használják őket. Az első két módszert a százalék fogalmához kapcsolják, és úgy dolgoznak vele, míg a két utóbbi módszer inkább formális ismereteket használ fel. Így például az operátor stratégia esetében formálisan szükség van a törtrész számításra (valamennyi százaléka valaminek annyit jelent, mint valahányad része), valamint szükséges a százalék definíciója, míg a következtetés esetében csak egyszerű egymás utáni lépéseket kellett meggondolni.

Felmerül ezen a ponton, hogy a tanulók melyik módszerrel tudnak majd sikeresebbek lenni a százalékszámítás terén. Ezzel kapcsolatban érdemes megemlíteni a következőt: Meißner (1982) egy vizsgálat során úgy találta, hogy azok a tanulók voltak a legsikeresebbek a százalékszámítási feladatok megoldásánál, akik a következtetés módszerét alkalmazták. Különösen szembeötlő volt az operátor stratégia és a formális módszer „sikertelensége” olyan feladatokban, amelyek az alap növelésére vagy csökkentésére irányultak.

A következtetés módszerére vonatkozó vizsgálati eredményeket egy nemrég megjelent tanulmány kiegészíti (Hafner 2011). Meißner véleményével ellentétben Hafnernél az operátor stratégia sikeres megoldási módként jelenik meg, illetve 89,6%-os megoldási sikert eredményezett a következtetéses és az operátor stratégia kombinációjának alkalmazása. (Hafner, 2011, 178.)

A módszerek, amelyek belátást eredményeznek és nem formális ismereteket alkalmaznak, jobb eredményhez vezethetnek. Az említett vizsgálatok tisztán szimbolikus síkon történt megoldásra vonatkoznak, ezeknél a megjelenítés, ábrázolás nem játszott szerepet. Hogyan néz ki az a helyzet, amikor a szimbolikus ábrázolást ikonikus megjelenítés is kiegészíti, hogy a tanulót a „látás” (is) segítse a megértésben? Hiszen mint ismeretes, a képi megjelenítések a megfelelő kísérő szöveggel a megértést és a megjegyzést segítik. (vö.. „Vernetztes Wissen” Leuders 2003, 41, 42 o. „Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen” Bauersfeld, Winter, idézi Claus 1989, 79.)

Képi reprezentációk használata százalékokkal kapcsolatos feladatok megoldásában

Ha figyelmesen átnézzük a korábbiakban említett megoldási stratégiákat, akkor látható, hogy a törtekkel kapcsolatos ismeretek nemcsak biztos alapot adnak a százalékszámításhoz, hanem szükség is van ezek felidézésére folyamatosan a feladatmegoldások során. Így nem véletlen, hogy a százalékszámításhoz sok olyan ábra kiválóan használható, amely a törtekkel végzett műveletek során hasznosnak bizonyult. A továbbiakban a következtetéses és az arányegyenletes módszerekhez mutatunk be képi reprezentációs lehetőségeket.

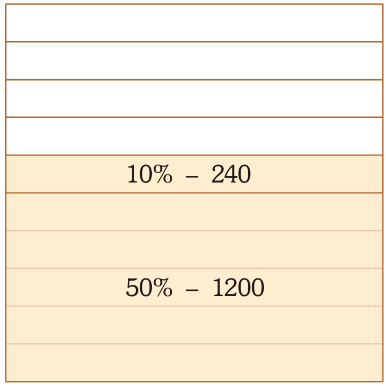
Következtetés

Példa: Mennyi 2400-nak a 60%-a?

100% 2400

10% $\rightarrow$ $2400 : 10 = 240$

60% $\rightarrow$ $240 \cdot 6 = 1440$

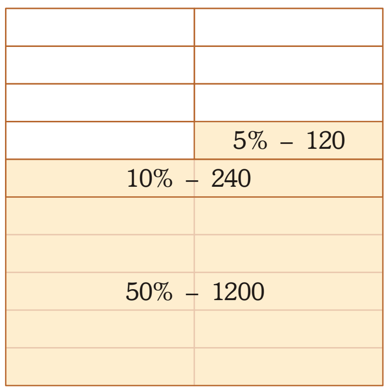


Az ábrákat gyakran szöveges magyarázat kíséri:

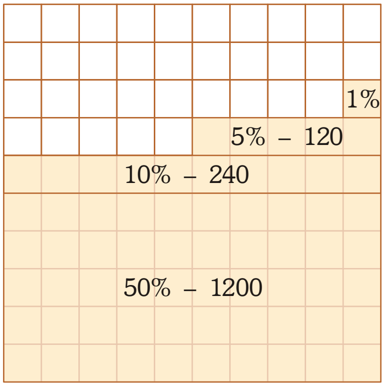
- Ki kell számítanunk 2400-nek a 60%-át.
- Ehhez először gondoljuk meg, hogy mennyi 2400-nak a 10%-a. Ehhez az egészet (2400) osszuk 10 egyenlő részre. Egy ilyen rész értéke 240.
- 60% ennek megfelelően 6 ilyen rész lesz, azaz ennek az értéke $6 \cdot 240 = 1440$.

A feladat variálásával például, ha változnak az adatok, az ábrázolás nehezebbé válhat a tanulók számára és több magyarázatot igényelnek:

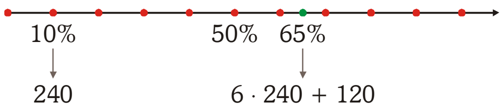
2400-nak a 65%-a



2400-nak a 66%-a



A számegyenes segítségével például a következő ábra készíthető a megoldáshoz:



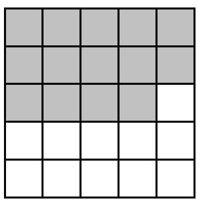
Arányegyenlet

Példa: 25 gyerek közül 14 kerékpárral megy iskolába. A gyerekek hány százaléka jár kerékpárral iskolába?

Ebben az esetben például a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{14}{25}=\frac{p}{100}$$

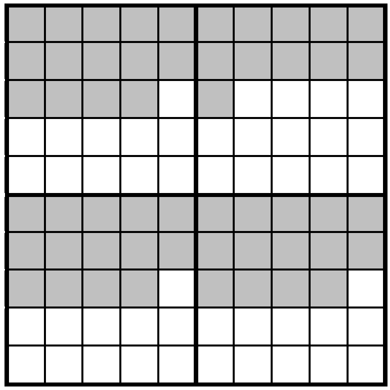
Az egyenlet bal oldalát a következőképpen ábrázolhatjuk:



Szóbeli magyarázat:

A 25 gyerek közül azokat, akik kerékpárral járnak iskolába (14), szürke színnel ábrázoltuk az előbbi ábrán. A szürke rész és a négyzet területe meghatározott arányban állnak egymással. Ezt az arányt a következő törttel fejezhetjük ki: $\frac{14}{25}$.

Az egyenlet jobb oldalának képi megjelenítéséhez például a következő ábra lehet alkalmas:



Szóbeli magyarázat:

Ha a százalékos arányt kérdezik, akkor arról van szó, hogy 100 gyerek közül hány érkezik kerékpárral az iskolába, miközben a kerékpáros gyerekek aránya ugyanannyi marad.

Ha a $\frac{14}{25}$ törtet 4-gyel bővítjük, akkor egy új ábrával jeleníthetjük meg a kapott törtet, ami $\frac{56}{100}$. Ebből adódik végül a megoldás: 56%.

Gyakorlatilag (formálisan) egy egyenletről van szó, ugyanis mindkét oldalon ugyanaz az arány szerepel. Az ismeretlen értéket az egyenlet megoldásával is kiszámíthatjuk.

Ha csak a számítást tekintjük, a következőről van szó:

$$\frac{P}{G}=\frac{p}{100} \quad \rightarrow \quad \frac{14}{25}=\frac{p}{100}$$

Ezt az egyenletet oldjuk meg a továbbiakban:

- Mivel mindkét tört egyenlő, így a bal oldal 4-gyel való bővítése után $p=56$ adódik. Ezt ábrázoltuk az előbbi ábrán.
- De megtehető az is, hogy a két oldalon azonos átalakításokat végzünk (itt mindkét oldalt 100-zal szorozzuk):

$$\frac{14}{25}\cdot 100=p$$

Ha a tanulók figyelmét a számolás kivitelezésére irányítjuk, akkor ennek az egyszerű egyenletnek a megoldási módszerei kerülnek előtérbe, míg az ábrával történő megoldásnál maga a százalékfogalom áll a középpontban.

Az előbbiek egyben példaként szolgálhatnak arra is, hogy „mind a tevékenység, mind a szimbolikus szinten lehet matematikai szempontból teljes értékűen dolgozni.” (H. Winter 1972, 87–88, idézi Claus, 1989. 76.)

A tanítás tervezésénél érdemes meggondolni, hogy a nyelvi és egyéb reprezentációk nem elvileg különböző, hanem inkább egymást támogató és kiegészítő gondolkodási módok. Tanulók órai munkáját figyelve időnként tapasztalható, hogy egyesek képi tartalmakat nagyon pontosan elemeznek, és képi megjelenítéseket tudnak készíteni abban az esetben is, ha szóban, illetve írásban csak igen korlátozottan tudják kifejezni magukat.

Másrészt vannak olyanok is, akik tevékenységüket magas színvonalon tudják szóban is megfogalmazni, viszont az adott tartalomról nem képesek képet készíteni vagy képszerű elképzelést alkotni maguknak. Ebben az esetben nyilvánvalóan különböző „tanulási típusok”-ról van szó.

Hasonló jelenségre utal például a geometriai bizonyításoknál az a tapasztalat is, hogy egyesek inkább egy adott ábrán belül keresik az összefüggéseket, míg mások az ábra ügyes kiegészítésével próbálnak megoldáshoz jutni. Másféle gondolkodásmódok megmutatását nem nélkülözheti tehát a tanítás. Különböző megjelenítési módok megmutatása és megbeszélése nemcsak a rugalmas, alkalmazásképes tudás kialakítását segíti adott matematikai tartalomnál, hanem egyúttal a rugalmas gondolkodás képességét is fejleszti a tanulókban.

Két feladatlap a százalékszámítás tanításához

A következő két százalékszámítással kapcsolatos munkalapon egyrészt gyakorolható a különböző reprezentációk használata, másrészt mélyíthető a százalékszámítással kapcsolatos tudás, az értő és összefüggéseket feltáró tanulás képessége megfelelő reprezentációs lehetőségek segítségül hívásával.

1. feladatlap

1. feladat: Számítási módok elmagyarázása reprezentációkkal

a) Számítsd ki következtetéssel 800-nak a 60%-át. Magyarázd meg számításodat ezután megfelelő ábra segítségével!

b) Számítsd ki ugyanezt a feladatot fejben is! Magyarázd meg most is eljárásodat megfelelő ábra segítségével. Miben különbözik a két eljárás?

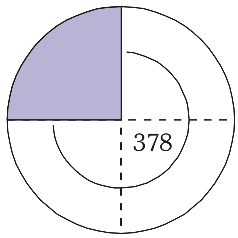
c) Hány százaléka a 3 a 40-nek? Megfelelő ábrán mutasd be!

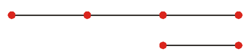
d) Számítsd ki fejben, hogy a 225 hány százaléka a 250-nek! Magyarázd meg alkalmas ábrán, hogy a számításod megfelelő!

e) Mennyi pénzem van, ha spórolt pénzemből 15%-ot (30€) elköltöttem? Magyarázd meg elgondolásodat megfelelő ábra segítségével!

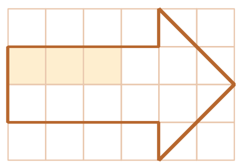
2. feladat: Ábrák értelmezése

a) Figyeld meg a következő ábrákat és keress többféle lehetőséget arra, mit fejezhetnek ki!



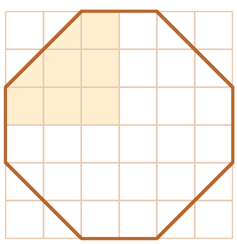


b) Melyik állítás igaz az alábbi ábrára (egységnyi nagyságú a nyíl)? Jelöld meg x-szel a következő táblázatban és röviden magyarázd meg állításodat!



Kijelentések	**igen**	**nem**
A beszínezett rész $\frac{3}{12}$.		
A beszínezett részt meg tudom adni %-ban úgy, hogy megszámolom a színezett kis négyzeteket és az eredményt osztom 10-zel.		
A beszínezett részt meg tudom úgy adni, hogy megszámolom a színezett kis négyzeteket és az eredményt osztom a nem színezett kis négyzetek számával.		
A beszínezett rész $\frac{3}{14}$.		
Ha még egy kis négyzetet beszínezek, akkor a beszínezett rész 30%-ra nő.		
A beszínezett rész $\frac{3}{9}$.		
A beszínezett rész 25%.		
Ha két további kis négyzetet beszínezek, akkor a színezett rész arányát a következőképpen tudom kiszámítani: $\frac{3}{12}+\frac{2}{12}$.		
A fehér rész százalékos aránya úgy számítható ki, hogy a 100%-ból levonom a szürke rész százalékos arányát.		
A fehér rész százalékos aránya 100% – 25%.		

3. feladat: Ábrázolási mód váltása



a) Ábrázold számegyenesen az ábrán látható nyolcszög színes és fehér részének arányát!

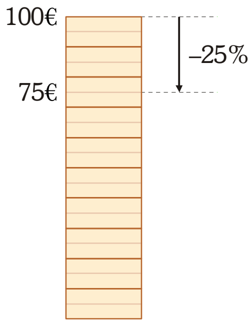
b) Írj fel egy arányegyenletet az előbbi arány százalékos értékének kifejezéséhez, és add meg ezt az értéket!

c) Gondolj ki két további ábrázolási lehetőséget az eredeti ábra tartalmához!

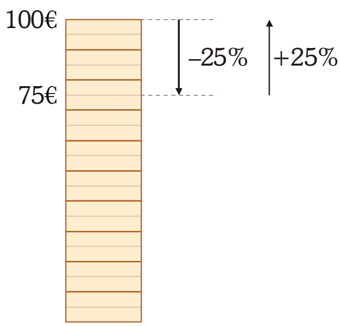
4. feladat: Hiba az ábrázolásban

a)
- Egy fényképezőgép árát 25%-kal emelték. Az új ár 100€. Mennyibe került korábban a fényképezőgép?
- Egy fényképezőgép ára jelenleg 75€, korábban 25%-kal drágább volt.

Az előbbi feladatok közül melyik oldható meg a következő ábra segítségével? Indokold meg válaszodat!



b) Egy mobiltelefon árát 25%-kal csökkentették, majd az akció után megint 25%-kal emelték. Mennyibe kerül most, ha eredetileg 100 Euro volt az ára?
Indokold meg, miért rossz a következő ábra az előbbi feladat megoldásához!



2. Feladatlap

1. feladat: Terv-variációk
Egy telek 40%-át a tulajdonos anyagi okokból el szeretné adni. Hogyan teheti ezt meg, ha a telek egy 2500 m × 960 m-es téglalapnak felel meg? Gondolj végig 3–4 lehetőséget és készíts mindegyikhez méretarányos rajzot!

2. feladat: Meglepő akció
Két nyolcadikos beszélget egy kirakat előtt. „Na, nézd csak, annak a klassz dzsekinek az árát ezen a héten is leszállították 25%-kal.” Mire a másik: „De jó, ha így megy tovább, még két árleszállítás és ingyen elvihetjük!”
Mi a véleményed erről? Indokold meg válaszodat megfelelő ábra készítésével!

3. feladat: Igaz ez?
Egy számból elvettük a 30%-át, majd az így kapott számot 20%-kal növeltük. Így 10%-kal kisebb számot kaptunk, mint az eredeti szám.
Indokold meg válaszodat megfelelő ábra segítségével!

4. feladat: Kiárusítás
Egy termékből két különböző típust (de ugyanolyan áron) árusítanak. A vállalkozás vezetői úgy döntenek, hogy a termék árát átlagosan 30%-kal csökkentik.
Hogyan változtatható ekkor a kétféle típus ára (százalékban)? Adj meg többféle lehetőséget! Mindegyik esetben készíts megfelelő ábrát is a megoldás során!

Megjegyzések a 2. feladatlaphoz

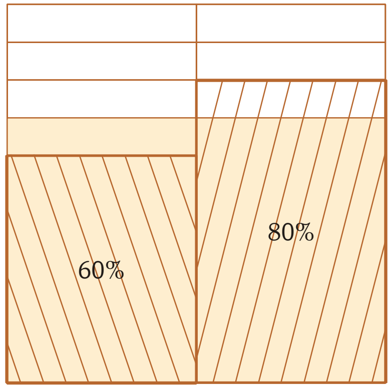
A feladatok nehéznek számítanak a 7–8. osztályban. Azonban az 1. feladatlapon tudatosan gyakorolva az ábrázolási lehetőségeket, várhatóan a megfelelő képi reprezentációk segítségével sokkal többen megbirkóznak ezekkel a feladatokkal is.

1. Könnyen elkészíthető egy 2,5 cm × 9,6 cm-es téglalap. Ezen mérhetnek és tervezhetnek. Kreatív megoldás, ha arra a lehetőségre is gondolnak, hogy a 40% akár több részletben is „levonható”. Ezt érdemes megbeszélni, és azt is, hogy a gyakorlatban ez előfordulhat-e. Fontos a különböző megoldási lehetőségek megbeszélése (például annak eldöntése, hogy a „szimmetrikus” esetek azonos megoldásnak vehetők-e).

2. Mivel a cipő ára nincs megadva, nem egyszerű a megoldás. Az ábrázolási tapasztalatok birtokában (pl. számegyenesen, szakaszon, téglalapon) könnyen megmutatható, hogy az állítás nem lehet igaz. Azt is érdemes meggondolni, hogy további ilyen árleszállításokkal egyáltalán elérhető-e a 0 Ft-os ár.
Az ár elvileg soha nem lesz 0, viszont elég hamar olyan kicsivé válna, hogy az gyakorlatilag 0 Ft-ot jelent. Persze ilyen árleszállítás a mindennapokban nem létezik…

3. Ennél a feladatnál hasonlóan járhatnak el a gyerekek, mint a 2. feladat esetében.

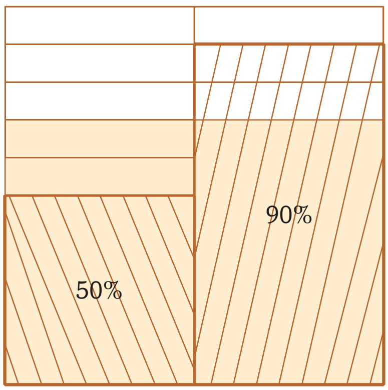
4. Ehhez a feladathoz a szükséges algebrai ismeretek 7–8. osztályban még nem állnak rendelkezésre. A következő ábrázolási mód például segíthet többféle lehetséges megoldást előállítani. Fontos tudatosítani és a rajzon is kifejezni, hogy ezúttal két „egész”-szel dolgozunk.



Az ábra alapján felírható a következő egyenlőség:

$$\frac{60}{100}+\frac{80}{100}=\frac{70}{100}+\frac{70}{100}=\frac{140}{100}$$

Ez azt jelenti, hogy a 30%-os átlagos csökkentéshez az egyik típus árát 40%-kal, a másikét 20%-kal kell csökkenteni.
Vagy elképzelhető a következő eset is:



Ekkor pedig a következő egyenlőség írható fel:

$$\frac{50}{100}+\frac{90}{100}=\frac{140}{100}$$

A módszerrel további megoldások is előállíthatók. Érdemes megbeszélni, hogy végtelen sok lehetőség van.

Irodalom

[1] Ambrus, A. (1995): Bevezetés a matematikadidaktikába. Eötvös Kiadó, Budapest

[2] Ambrus, G. (2012): Százalékok kezdőknek és haladóknak In: Fejlesztő matematika (kompetenciafejlesztő feladatbank tanároknak) 5–12. évfolyam. Raabe Tanácsadó és Kiadó Kft. Budapest, 4. kötet 1–16.

[3] Claus, H.J. (1989): (Einführung in die Didaktik der Mathematik. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt

[4] Hafner Urs (2012): Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I: Empirische Untersuchung und didaktische Analysen (Perspektiven der Mathematikdidaktik. Vieweg + Teubner/Springer. Wiesbaden

[5] Leuders, Timo (2003): Mathematikdidaktik (Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, Cornelsen Verlag, Berlin

[6] Leutenbauer, Helmut (1994): Das praktiche Handbuch für den Mathematikunterricht der 5–10. Jahrgangsstufe. Auer. Donauwörth

[7] Meissner, Hartwig (1982): Eine Analyse zur Prozentrechnung. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Vol. 3, No. 2, Schoeningh. Paderborn, 121–144.

Jelentés a 2013. évi Beke Manó Emlékdíjak odaítéléséről

A 2013. évi Beke Manó Emlékdíj Bizottság körültekintő mérlegelés után az alábbi határozatot hozta:

A Beke Manó Emlékdíj második fokozatában részesül **Juhász Katalin** *tanítónő.*

A zsámbéki Tanítóképző Főiskola elvégzésétől, 1980-tól napjainkig Ráckevén tanít az Árpád Fejedelem Általános Iskolában első évfolyamtól negyedik évfolyamig. Osztályainak minden tantárgyát tanítja az informatika és a nyelv kivételével.

Kollégái véleménye szerint teljes életét az iskolának szenteli, sokat segít mind kollégáinak, mind a tanítványainak. Ars poeticája: „Minden gyerekben van valami jó, valami érdekes". Sokat tesz a gyerekekben rejlő tehetségek felfedezéséért és annak kibontakoztatásáért. Tanítványai különböző szintű tanulmányi versenyeken szerepeltek sikeresen. Például Monoron a megyei komplex tanulmányi versenyen egyik tanítványa I. helyezést ért el. Ezen kívül a Bolyai János Csapatversenyen és a Bendegúz Gyermek- és Ifjúsági Akadémián Szegeden is részt vesznek tanítványai. Az Apáczai komplex levelezős versenyen két tanítványa jutott be az országos döntőbe (magyar – matematika – környezetismeret – rajz). Rajzból és nyelvtanból is nagyon szép eredményeket értek el tanítványai.

Munkája során sokszor segít az iskolájukban megrendezett tanulmányi versenyeken, például a Zrínyi Ilona Matematikaversenyt 20 éve szervezi. Itt két alkalommal volt országos döntős tanítványa: 2010-ben és 2011-ben.

Több szakmai továbbképzésen vett részt.

Jelenleg egy Comenius-programban dolgozik segítőként.

A gyerekekkel szívvel-lélekkel foglalkozó, iskolájáért sokat dolgozó tanítónő.

A Beke Manó Emlékdíj második fokozatában részesül **Lábodi Gyöngyi.**

Matematika-orosz nyelv szakos tanári diplomáját 1995-ben a szegedi József Attila Tudományegyetemen szerezte. 1995 óta a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimnázium és Egészségügyi Szakközépiskola tanára. Négy éve eredményesen vezeti az iskola matematika munkaközösségét, mely megbízatást kiváló szakmai munkája elismeréseként kapta. Kollegialitása, segítőkészsége példamutató.

Következetes, magas színvonalú és eredményes oktató munkájának köszönhetően tanítványai kiemelkedően teljesítenek az érettségi vizsgákon, majd a felsőoktatási intézményekben. Az igényes és színvonalas tanórai munka mellett mindig nagy gondot fordít a tehetséggondozásra is. Iskolai és városi tehetséggondozó szakkört vezet, tanítványai a megyei, regionális és országos versenyeken eredményesen szerepelnek.

A nemzetközi Kenguru Verseny szervezésében, a Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány munkájában évek óta részt vesz.

Folyamatosan képezi magát, rendszeresen vesz részt a matematikatanárok vándorgyűlésein, konferenciáin.

Több éve oktat a Veszprémi Pannon Egyetem Nagykanizsai Képzőhelyén.

Sokoldalúsága, gyermekszeretete, szakmai tudása avatta őt tanítványai és kollégái körében tekintélyes tanárrá.

A Beke Manó Emlékdíj második fokozatában részesül **Lángné Juhász Szilvia.**

Általános iskolai matematika-fizika szakos tanári oklevelét 1999-ben a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán szerezte, majd 2005-ben elvégezte a számítástechnika szakot is. Pedagógusi pályáját Szegeden a Petőfi Sándor Általános Iskolában kezdte, jelenleg a Gregor József Általános Iskola tanára.

Tanóráit alapos felkészülés, körültekintő tervezés előzi meg és fiatalos lendület jellemzi. Mindig nagy hangsúlyt helyez a tanulók tevékenykedtetésére és a jól strukturált fogalomalkotásra. Sikeresen él a pedagógiai és módszertani szabadság lehetőségeivel, azt helyesen értelmezi és alkalmazza. A képességek szerinti foglalkoztatás híve, amit munkájában rendszeresen alkalmaz.

Folyamatosan önképzést folytat, törekszik a legújabb szakmai, módszertani ismeretek megszerzésére.

A mindennapokban végzett magas színvonalú pedagógiai munkája mellett kiemelkedő szerepet vállal a tehetséggondozásban is. A Bendegúz Gyermek és Ifjúsági Akadémia levelező versenyei közül matematika tantárgyból 1–8. osztály számára minden fordulóra a feladatsorokat ő állítja össze és dolgozza ki a hozzájuk tartozó megoldókulcsokat több éve. Az immár nemzetközivé fejlődött Bonifert Domonkos Matematikaversenynek és a Makkosházi Matematikaversenynek aktív zsűritagja már hallgató kora óta.

Számos publikációja látott napvilágot a szegedi MOZAIK Kiadó gondozásában megjelenő A Matematika Tanítása és a Csengőszó c. módszertani folyóiratokban. Társszerzője a Sokszínű matematika tankönyvcsalád alsó tagozatos tankönyveinek, Számolófüzeteinek és Tudásszintmérő feladatlapjainak 1–4. osztályok számára. Ezek utógondozását, az újabb kiadásaik tökéletesítését, a szükséges átdolgozásokat folyamatosan végzi. A Kiadó által közzétett alsó tagozatos matematika kerettantervek kidolgozásában aktívan közreműködött. Kiadás alatt áll egy informatikai feladatgyűjteménye alsó tagozatosok számára összeállított számítástechnikai gyakorlatokkal.

Évente több alkalommal tart módszertani előadásokat az ország legkülönbözőbb régióiban. A MOZAIK Módszertani Napoknak rendszeres előadója.

Fiatalos lendülete, szakmai felkészültsége és értékes pedagógiai munkája – amit három kisgyermek édesanyjaként végez – példaértékű lehet pályatársai számára is.

A Beke Manó Emlékdíj második fokozatában részesül **Mészáros József.**

1961-ben középiskolai tanári oklevelet szerzett fizika-matematika szakon a pozsonyi Pedagógiai Főiskolán. Két év katonai szolgálat után egykori Alma Materében kezdte el tanári pályafutását, ahol 39 évet tanított. 2001-től 2010-ig, mint nyugdíjas, a Szenczi Molnár Albert Gimnáziumban tevékenykedett, a 2011/12-es tanévtől a dunaszerdahelyi Magángimnáziumban hetente egy alkalommal matematika szakkört vezet.

Kezdetektől fogva érdekelte a tehetséges tanulókkal való foglalkozás, ennek érdekében folyamatosan képezte magát, így került a KöMaL, az A Matematika Tanítása, az erdélyi Matematikai Lapok, az orosz Kvant és Matyematyika v skóle, valamint a cseh és szlovák szakfolyóiratok bűvkörébe, de lapozgatott német szakfolyóiratokat is. Többször könyvjutalomban részesült, mert a feladatmegoldó versenyeken előkelő helyen végzett.

Ő vitte el galántai diákjait először a tatai Öveges Emlékversenyre, a nyolcosztályos gimnázium 5–8. évfolyamos tanulóit a Bátaszéki Matematikaversenyre, a 9–12. évfolyamos tanulókat a Zalamat Alapítvány által szervezett Matematikai Tréningre Balatonberénybe, ill. Fonyódra. Ennek a tehetséggondozó tábornak rendszeres előadója.

Többször tartott szlovák kollégáknak és tehetséges diákoknak foglalkozást Budmericében és Gimesen.

1985 óta rendszeres résztvevője a Rátz László Vándorgyűlésnek, egyetlen alkalommal sem hiányzott. Két alkalommal előadást és szemináriumot is tartott. Tartott előadást a Zalamat Alapítvány által Nagykanizsán kétévente megrendezésre kerülő általános és középiskolai matematikai tehetséggondozó konferencián is.

Diákjai többször sikeresen szerepeltek a KöMaL pontversenyében. Két tanítványa a szlovák válogatott keret tagjaként részt vett a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián Horvátországban, ill. Spanyolországban.

Nagyon aktívan bekapcsolódott a matematika módszertanának népszerűsítésébe oktatóként. Munkáját számos kitüntetéssel is elismerték, többek között:

1983-ban, az akkori Csehszlovákiában országos első díjat nyert Pedagógiai felolvasásból, 1984-ben pedig egy második díjban részesült;

2001-ben megkapta a felvidéki pedagógusok legrangosabb díját, a Czabán Samu-díjat.

Életének nagy részét a matematikai tehetséggondozás töltötte és tölti ki. Példa lehet a fiatal kollegák számára mind egyénisége, mind szakmai tudása.

A Beke Manó Emlékdíj második fokozatában részesül megosztva
Mihály Mária *és* **Székely András Zsolt.**

Mindketten 1986-ban végeztek Szegeden, a József Attila Tudományegyetem matematika-fizika szakán, emellett informatika szakos diplomával is rendelkeznek. A gyulai Erkel Ferenc Gimnázium tanárai, ahol mindhárom szaktárgyukat magas színvonalon tanítják. Mindketten munkaközösség-vezetők, Mária az osztályfőnöki munkaközösséget, András pedig a matematika munkaközösséget vezeti.

Állandóan képezik magukat. Nemcsak a kötelező programokon vesznek részt, hanem ezeken felül is. Rendszeres résztvevői a Rátz László Vándorgyűléseknek.

Mindketten emelt szintű matematika érettségi feladatsorokat szerkesztenek, amelyek a KÖMAL-ban meg is jelentek.

Munkájukat a precizitás jellemzi. Óráikra mindig lelkiismeretesen felkészülnek, azok színesek, élményszámba mennek. Egyformán figyelnek minden diákra, nem hagyják elkallódni a matematikából gyengébb képességű tanulókat sem. A tehetségekkel is sokat foglalkoznak. Tanítványaik országos szintű eredményeket értek el. A tanítás mellett több helyi, országos, Kárpát-medencei program szervezésében vettek részt. Kezdetektől segítették a Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Napok szervezését. Oroszlánrészt vállaltak abban, hogy sikeres legyen Gyulán a 2007-es Rátz László Vándorgyűlés, a 2008-as Általános Iskolai Fizikatanári Ankét és Eszközkiállítás és a 2009-es Nemzetközi Magyar Matematikaverseny.

Mária ezen kívül egy látássérült tanítványát is felkarolta, kapcsolatuk azóta is tart. Megható és példaértékű az is, ahogy nyugdíjas kollégákkal a kapcsolatot tartja, rendszeresen találkozik velük.

Székely Andrást a közösség is érdekli, amiben él, dolgozik. Kollégái tiszteletét és elismerését az is bizonyítja, hogy hosszú évek óta választott tagja, jelenleg választott elnöke az iskolája Közalkalmazotti Tanácsának.

Több évtizedes munkásságáért Polgármesteri dicséretet is kapott Gyulán.

Mindketten remek pedagógusok, nagyon jó kollégák. Rendkívül színes egyéniségek, egyben kiváló csapatemberek. Igazi példaképek diák, szülő és pedagógus számára egyaránt.

A Beke Manó Emlékdíj második fokozatában részesül **Széplaki Györgyné.**

1971-ben szerzett matematika-fizika szakon középiskolai tanári diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd az ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumba került tanárnak, 1977-től vezetőtanár.

Egyaránt lelkiismeretesen tanította a matematika iránt kevésbé fogékony tanulókat és a kiemelkedően tehetséges tanulókat is. 1982-től napjainkig találkozhatunk tanítványaival a legkülönbözőbb matematika versenyek élvonalában, illetve a KÖMAL, valamint az ABACUS pontversenyében.

Osztályait is lelkesíteni tudja, nemcsak a kiemelkedően tehetséges tanulókat, így tanítványai szép sikereket értek el a teljes osztálylétszámot igénylő Matematika Határok nélkül versenyen is (2003-ban első lett az akkori 9.A osztály, 2008-ban harmadik a 9.B osztály).

Vezetőtanári tevékenységét teljes odaadással, szakmai és emberi elkötelezettséggel végzi. Nagy hangsúlyt helyez az órákra való felkészítésre, a szemléltetésre, az órákat követő tartalmas megbeszélésekre, és mindenekelőtt a pedagógus pálya szépségeinek megmutatására. Rendszeresen tart előadást a tanárjelölteknek az interaktív tananyag használatáról, a geometria szemléltetőeszközeinek bemutatásáról és még számos izgalmas témakörből.

Széplaki Györgyné szakmai tevékenysége messze túlmutat az iskola keretein. 1989 óta jelen van a matematikaoktatás országos fórumain. Egyik megalkotója volt az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola nyolcosztályos és hatosztályos tantervének, melyhez egy szerzőtárssal tankönyvcsaládot írtak. Tankönyvírói munkáját az Apáczai Kiadónál folytatta, ahol hatodmagával az általános iskola felső tagozata számára írtak egy tankönyvsorozatot, melyhez feladatgyűjtemény, tanári kézikönyv és digitális tananyag is készült.

Szerzőként és szakmai lektorként egyaránt részt vett a SuliNova Kht. kompetencia alapú oktatási programcsomagjának kidolgozásában. Rendszeresen tartott akkreditált tanártovábbképzéseket, előadásokat a Varga Tamás Napokon, a Rátz László Vándorgyűlésen is.

Széplaki Györgyné teljes ember. Legyen szó matematikáról, tankönyvírásról, módszertani szakértői tevékenységről, elesettek támogatásáról, nyugdíjasok karácsonyáról, szipogó gyerekek vigasztalásáról, éneklésről, játékról, táborozásról, ő mindenütt ott van. Szívvel, lélekkel, mert számára a világ másként elképzelhetetlen lenne.

Elsők között kapta meg az iskola tanárainak titkos szavazataként a Kármán Mór emlékgyűrűt. 2008-ban Ericsson-díjat, 2011-ben Graphisoft-díjat kapott.

2013 júniusában nyugdíjba vonult. Az iskola gyerekserege helyett öt unokájának szenteli szabadidejét, melyhez nagyon jó egészséget és sok boldogságot kívánunk!

A Beke Manó Emlékdíj második fokozatában részesül **Vági Veronika.**

Tevékenysége Székesfehérvárhoz kötődik. Több évtizeden át ugyanabban a középiskolában tanított, az Ybl Miklós Középiskolában, majd annak megszűnte után a Kodolányi János Középiskolában.

Pályáját szakfelügyelőként, illetve szaktanácsadóként folytatta. Elmélyült matematikai ismereteit jól kamatoztatta továbbképzések szervezésében. Kiemelkedő szakmai felkészültsége, közvetlen modora miatt kollégái nagyra becsülik. Matematikai és módszertani kérdésekben naprakészen tájékozott és szaktanácsadóként jól alkalmazza ezeket az ismereteket. Biztos érzékkel választotta meg a matematikai nevelés aktuális, a tanárok számára fontos témáit. Ezekből továbbképzéseket tartott és szervezett a megye középiskolai tanárainak.

Már 28 év óta a Tagozat fáradhatatlan titkára. Feladatköréhez tartozik az évenként megrendezett megyei matematika verseny, amelynek előkészítéséhez tartoznak az évfolyamonként és szakmánként megválasztott évfolyambizottságok. Ezek munkáját egy csúcsbizottság fésüli össze és ellenőrzi, melynek megszervezése, a tagok felkérése sok tapintatot és nagy gyakorlatot igényel. Vági Veronika fogta össze a kétfordulós verseny valamennyi teendőjét a feladatsorok végső összeállításától az eredményhirdetésig.

Székesfehérvár önkormányzata a helyi tudományos közélet támogatására, önálló kutatások publikációinak közzétételére hozta létre a Szekfü Gyula – Lánczos Kornél Alapítványt. Ezen alapítvány kuratóriumának a természettudományos szakértője Vági Veronika. Munkáját az önkormányzat nagyra értékeli, főtanácsosi címben és Pro Civitate-díjban részesítette.

Vági Veronika nagyon sokat tett a matematika népszerűsítéséért.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2013. november 30.

Feladatok (460–464.)

460. Jelölje H az első ezer pozitív egész szám halmazát. Legyen bármely nem üres $A \subseteq H$ esetén s_A az A halmaz legkisebb és legnagyobb elemének összege. Számítsuk ki H összes nem üres részhalmazára nézve az s_A-k átlagát.

461. Adott pozitív egész k számhoz határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész n számot, amelyre teljesül, hogy n darab, páronként különböző pozitív egész szám közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy azok összege vagy különbsége osztható $2k$-val.

462. Határozzuk meg a $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2013}$ tizedestört alakjában közvetlenül a tizedesvessző előtt és közvetlenül a tizedesvessző után álló számjegyet.

463. Adott két pozitív egész szám, n és k. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész m számot, amelyre teljesül a következő: A $H = \{1; 2; ...; m\}$ halmaz bármely k darab nem üres részhalmazra történő osztályozása esetén van olyan a és b, ugyanabból a részhalmazból származó elemek, hogy $1 \le \frac{b}{a} \le 1+\frac{1}{n}$. (A H osztályozása k darab nem üres részhalmazra: $H = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$; $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \ne j$.)

464. Az ABC háromszög csúcsait befestjük: A piros, B fehér, C zöld színt kap. Ezután a háromszög belsejében felveszünk n darab ($n \in \mathbb{N}^+$) pontot. A felvett belső pontokat illetve az eredeti háromszög csúcsait szakaszokkal összekötve úgy bontjuk fel a nagy háromszöget kisebb háromszögekre, hogy a kisháromszögek csúcsai az adott belső pontok és az ABC háromszög csúcsai közül valók, valamint egyetlen kisháromszög sem tartalmaz sem a határán, sem a belsejében adott pontot. Mutassuk meg, hogy a belső pontokat akárhogyan is színezzük ki a piros, fehér, zöld színek valamelyikével, bármely n esetén lesz olyan kisháromszög, amelynek csúcsai páronként különböző színűek.

Feladatmegoldások (445–449. feladatok)

445. Egy szabályos oktaéder mindegyik csúcsában van egy hangya. Egy adott pillanatban mindegyik hangya – egymástól függetlenül, azonos sebességgel – elindul egy, az eredeti helyéről kifutó él mentén egy szomszédos csúcsba. Mindegyik hangya egyenlő valószínűséggel választja a csúcsából kiinduló négy él valamelyikét. Mi annak a valószínűsége, hogy egyik csúcsba sem érkezik kettő vagy több hangya?

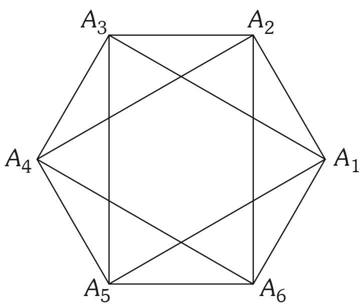
I. megoldás: Tekintsük az oktaéder gráfját (*1. ábra*).
Az A_i pontban levő hangya menjen az $A_{p(i)}$ csúcsba. Semelyik pontba sem érkezik kettő vagy több hangya, *ezért* $p(1)$; $p(2)$; ...; $p(6)$ az 1; 2; ...; 6 számok olyan permutációja, amelyre $p(i)$ 3-mal osztva nem ugyanazt a maradékot adja, mint i (i = 1; 2; ...; 6).
A kedvező esetek összeszámlálása végett először írjuk fel az 1; 1; 2; 2; 3; 3 számok olyan

$q(1)$; $q(2)$; ...; $q(6)$ ismétléses permutációit, amelyekre $q(i)$ 3-mal osztva más maradékot ad, mint i ($i = 1; 2; ...; 6$). Ezek:

2; 1; 1; 3; 3; 2
2; 1; 2; 3; 3; 1
2; 3; 1; 2; 3; 1
2; 3; 1; 3; 1; 2
2; 3; 2; 3; 1; 1
3; 1; 1; 2; 3; 2
3; 1; 2; 3; 1; 2
3; 1; 2; 2; 3; 1
3; 3; 1; 2; 1; 2
3; 3; 2; 2; 1; 1

Ez éppen 10 lehetőség, így a megfelelő $p(1)$; $p(2)$; ...; $p(6)$ permutációk, azaz a kedvező esetek száma $2^3 \cdot 10 = 80$.
Mivel mindegyik hangya 4 élen indulhat el, ezért az összes esetek száma 4^6.

A keresett valószínűség: $P = \frac{80}{4^6} = \frac{5}{256}$.



1. ábra

Borbély József, Tata

II. megoldás: A kedvező esetek számának meghatározásához számláljuk össze azokat az eseteket, amikor az A_1-beli hangya A_2-be megy, jelöléssel: $A_1 \to A_2$ (*1. ábra*). Ekkor 3 eset lehetséges.

1. eset: $A_4 \to A_3$. Ekkor A_5-be A_3-ból vagy A_6-ból, A_6-ba pedig A_2-ből vagy A_5-ből jön egy hangya. Ez eddig $2 \cdot 2 = 4$ eset. Ezután az A_2, A_3, A_5, A_6 közül kettőben megmaradt hangyákból az egyik A_1-be megy, a másik A_4-be megy. Ez megint 2 lehetőség. Ebben az esetben tehát $4 \cdot 2 = 8$ lehetőségünk van.
2. eset: $A_4 \to A_6$. Ez az előző esettel szimmetrikus, ezért itt is 8 lehetőség van.
3. eset: $A_4 \to A_5$. A_3-ba és A_6-ba is csak A_2-ből vagy A_5-ből jöhet hangya (ez 2 eset). Ezután az A_2, A_3, A_5, A_6 közül megmaradt két hangyából az egyik az A_1-be megy, a másik az A_4-be. Ez megint 2 lehetőség. Ebben az esetben tehát összesen $2 \cdot 2 = 4$ lehetőségünk van.

Azt kaptuk, hogy összesen $8 + 8 + 4 = 20$ olyan lehetőség van, amikor $A_1 \to A_2$. Mivel az A_1-ből mehet hangya az A_3, A_5, A_6 pontokba is, ezért az összes kedvező esetek száma $20 \cdot 4 = 80$.

A keresett valószínűség: $P = \frac{80}{4^6} = \frac{5}{256}$.

Kallós Béla, Nagyhalász

A megoldók száma: 5.

446. Az A, B, C, D és E pontok úgy helyezkednek el a térben, hogy teljesülnek a következő feltételek:
(1) $AB = BC = CD = DE = EA = 2$;
(2) $ABC\sphericalangle = CDE\sphericalangle = DEA\sphericalangle = 90°$;
(3) az ABC háromszög síkja párhuzamos a DE egyenessel.
Mekkora a BDE háromszög területe?

Megoldás: Vegyük fel úgy a térbeli derékszögű koordináta-rendszert, hogy $D(-1; 0; 0)$, $E(1; 0; 0)$, és az ABC háromszög síkja a $z = k$ $(0 < k)$ sík legyen. Mivel $CDE\sphericalangle = DEA\sphericalangle = 90°$, ezért A az E középpontú, 2 egység sugarú, az $x = 1$ egyenletű síkban fekvő, C pedig a D középpontú, 2 egység sugarú, az $x = -1$ egyenletű síkban fekvő körre illeszkedik. Így $A(1; y_1; k)$ és $C(-1; y_2; k)$, ahol $y_j = \pm\sqrt{4-k^2}$ $(j = 1; 2)$. Mivel $AC = 2\sqrt{2}$, ezért $(1-(-1))^2 + (y_1 - y_2)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$. $y_1 = y_2$ esetén nincs megoldás, ezért $y_1 = -y_2$. Az általánosság feladása nélkül feltehetjük, hogy $0 < y_1$, amikor is $y_1 = 1$ és $y_2 = -1$. Az eddigiekből és a feltételekből adódik, hogy $k = \sqrt{3}$, $A\left(1; 1; \sqrt{3}\right)$, $C\left(-1; -1; \sqrt{3}\right)$ és $B\left(1; -1; \sqrt{3}\right)$ vagy $B\left(-1; 1; \sqrt{3}\right)$. Az első esetben $BE = 2$, valamint a BE és DE egyenesek merőlegesek egymásra. A második esetben $BD = 2$, valamint a BD és DE egyenesek merőlegesek egymásra. A BDE háromszög területe mindkét esetben 2.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 6.

447. A természetes számok (a 0-t is beleértve) növekvő sorozatából elhagyjuk azokat a számokat, amelyeknek tízes számrendszerbeli alakja tartalmazza a 3, 6, 9 számjegyek valamelyikét. Melyik az így kapott sorozat 587-dik tagja?

I. megoldás: Jelöljük a kapott sorozat n-edik tagját a_n-nel. Az a_n szám tízes számrendszerbeli alakjában hagyjuk változatlanul a 0, 1, 2 számjegyeket, csökkentsük a 4, 5 számjegyeket 1-gyel, a 7, 8 számjegyeket pedig 2-vel (ha vannak ilyen számjegyek). Így egy hetes számrendszerbeli számot kapunk, méghozzá éppen $n-1$ hetes számrendszerbeli alakját. (Ez utóbbi teljes indukcióval azonnal adódik: $a_1 = 0$ esetén igaz, és ha a_n-re igaz, akkor a_{n+1}-re is, mivel az a_{n+1}-nek megfelelő hetes számrendszerbeli szám pontosan 1-gyel nagyobb az a_n-nek megfelelő hetes számrendszerbeli számnál.)
$n = 587$ esetén 586 hetes számrendszerbeli alakja $1465\ (= 1\cdot 7^3 + 4\cdot 7^2 + 6\cdot 7 + 5)$, tehát a keresett szám: $a_{587} = 1587$.

Hornung Tamás, Zalaegerszeg
Dályay Pál Péter, Szeged
Kallós Béla, Nagyhalász
Rakonczai György, Budapest

II. megoldás: Nézzük meg először, hogy hány 100-nál kisebb tagja van a sorozatnak. Mivel sem a tízesek, sem az egyesek helyén nem állhat 3, 6 vagy 9, a maradék 7 számjegy segítségével $7\cdot 7 = 49$ szám képezhető.
Mivel $587 = 12\cdot 49 - 1$, ezért 1000-ig hét olyan százas van, ahol a százasok helyén nem 3, 6 vagy 9 áll, 1000 után továbbhaladva a tizenkettedik százasban az utolsó tag 1588 lenne. Az ezt megelőző tagot keressük, azaz a sorozat 587-dik tagja 1587.

Velkeyné Gréczi Alice, Ipolyszög

A megoldók száma: 7.

448. Jelölje $H[x]$ azon x határozatlanú 11-ed fokú polinomok halmazát, amelyek együtthatói a $\{-1; 1\}$ halmaz elemei. Melyek azok a $H[x]$-beli polinomok, amelyeknek az 1 a legnagyobb multiplicitású gyöke?

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Belátjuk, hogy a $H[x]$ halmaz bármely elemében az 1 multiplicitása legfeljebb 3, és két olyan polinom van (ezek csupán egymás ellentettjei), melyben az 1 multiplicitása pontosan 3.

A keresett polinom legyen $p(x) = \sum_{i=0}^{11} \pm x^i$.

A polinom első három deriváltja:

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{11} \pm i\cdot x^{i-1}$$

$$p''(x) = \sum_{i=2}^{11} \pm i\cdot(i-1)\cdot x^{i-2}$$

$$p'''(x) = \sum_{i=3}^{11} \pm i\cdot(i-1)\cdot(i-2)\cdot x^{i-3}$$

Keressük azokat a $\{-1; 1\}$-beli együtthatókat, melyekre teljesülnek az alábbi egyenlőségek.

$$p(1) = \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm \\ \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 = 0 \qquad (1)$$

$$p'(1) = \pm 11 \pm 10 \pm 9 \pm 8 \pm 7 \pm \\ \pm 6 \pm 5 \pm 4 \pm 3 \pm 2 \pm 1 = 0 \qquad (2)$$

$$p''(1) = \pm 110 \pm 90 \pm 72 \pm 56 \pm 42 \pm \\ \pm 30 \pm 20 \pm 12 \pm 6 \pm 2 = 0 \qquad (3)$$

$p'''(1)$ nem lehet 0, mert $p'''(1) = \pm 990 \pm 720 \pm \pm 504 \pm 336 \pm 210 \pm 120 \pm 60 \pm 24 \pm 6$ nem osztható 4-gyel, hiszen a szereplő számok között pontosan 3 darab, 4-gyel osztva 2 maradékot adó szám található. Ezért az 1 multiplicitása nem lehet 3-nál nagyobb.
Az (1), (2) és (3) egyenletek együtthatóinak szisztematikus vizsgálatával jutunk el a megfelelő polinomhoz:

$$p(x) = x^{11} - x^{10} + x^9 - x^8 - x^7 - \\ - x^6 + x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1.$$

Természetesen a $-p(x)$ polinomban is háromszoros gyök az 1.
Be kell még látnunk, hogy a többi gyök multiplicitása kisebb, mint 3.

$$p(x) = (x-1)^3 \cdot (x^8 + 2x^7 + 4x^6 + 6x^5 + 7x^4 + \\ + 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1) = (x-1)^3 \cdot q(x)$$

A $q(x)$ polinom gyökeinek meghatározása végett tekintsük a $q(x) = 0$ egyenletet. Ezt x^4-nel osztva, majd a $z = x + \frac{1}{x}$ helyettesítést bevezetve a $z^4 + 2z^3 + 1 = 0$ egyenletet kapjuk.
A bal oldalt szorzattá alakítva:

$$z^4 + 2z^3 + 1 = (z+1) \cdot (z^3 + z^2 - z + 1).$$

Itt a $z = -1$ egyszeres gyök, amit visszahelyettesítve x-re is két egyszeres komplex gyököt kapunk.
A továbbiakban az $r(z) = z^3 + z^2 - z + 1$ polinom többszörös gyökeit keressük. Mivel az

$$r'(z) = 3z^2 + 2z - 1$$

polinomnak két különböző valós gyöke van (-1 és $\frac{1}{3}$), és ezek egyike sem gyöke $r(z)$-nek, ezért $r(z)$ gyökei páronként különbözőek. Ebből adódik, hogy x-re sem kaphatunk 2-nél nagyobb multiplicitású gyököt.
Ezzel beláttuk, hogy a $p(x)$ és $-p(x)$ $H[x]$-beli polinomoknak (és csak ezeknek) az 1 háromszoros multiplicitású gyöke, a többi gyök multiplicitása pedig 3-nál kisebb.

Rakonczai György, Budapest

A megoldók száma: 3.

449. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a pozitív egész számok úgy, hogy $\sum_{i=1}^{n} a_i < a$. Igazoljuk, hogy ha $b = \max_{1 \le i \le n} a_i$, akkor

$$\sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a}{k} \prod_{i=1}^{n} \binom{a-k}{a_i} = 0.$$

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Legyen $H = \{1; 2; \ldots; a\}$. Jelöljük N-nel azoknak a $(H_1; H_2; \ldots; H_n)$ halmazrendszereknek a számát, amelyekre $|H_i| = a_i$, és $H_i \subseteq H$ $(i = 1; 2; \ldots; n)$. Világos, hogy

$$N = \prod_{i=1}^{n} \binom{a}{a_i}.$$

Jelöljük tovább $N^{(k)}$-val azoknak a $(H_1; H_2; \ldots; H_n)$ halmazrendszereknek a számát, amelyekre $|H_i| = a_i$, és $H_i \subseteq H'$ $(i = 1; 2; \ldots; n)$, ahol H'-t úgy kapjuk H-ból, hogy k darab elemét elhagyjuk. Könnyen látható, hogy $N^{(k)}$ független attól, hogy melyik k darab elemét hagyjuk el H-nak, és

$$N^{(k)} = \prod_{i=1}^{n} \binom{a-k}{a_i}.$$

Teljesül továbbá, hogy $N = N^{(0)}$, és ha $k > a - b$, akkor $a - k < b = \max_{1 \le i \le n} a_i = a_{i_0}$, így $\binom{a-k}{a_{i_0}} = 0$, tehát $N^{(k)} = 0$.
Innen a logikai szita formula alkalmazásával kapjuk, hogy

$$N^{(0)} = N - \binom{a}{1} N^{(1)} + \binom{a}{2} N^{(2)} - \ldots + \\ + (-1)^{a-b} \binom{a}{a-b} N^{(a-b)},$$

amiből a bizonyítandó állítás következik.

Hornung Tamás, Zalaegerszeg

A megoldók száma: 3.

A megoldók névsora: Borbély József, Tata (445–449.); Dályay Pál Péter, Szeged (445. 2 mód, 446., 447. 2 mód, 448., 449.); Hornung Tamás, Zalaegerszeg (445–447., 449.); Kallós Béla, Nagyhalász (445., 447.); Nagy Sándor, Békéscsaba (446., 447.); Rakonczai György, Budapest (445–448.); Velkeyné Gréczi Alice, Ipolyszög (446., 447.).