A MATEMATIKA tanítása

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

2013/1

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Kosztolányi József

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Szőke András

Megjelenik évente 4 alkalommal.

TARTALOM

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat e-mailen a kattila@mozaik.info.hu címre küldjék meg. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

Kérjük, a kézirathoz csatoljanak egy rövid magyar nyelvű kivonatot és egy angol nyelvű Abstract-ot!

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön fájlokban is kérjük mellékelni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat.

Pálmay Lóránt (1929–2012)

2012. december 19-én, életének 84. évében elhunyt Pálmay Lóránt, a magyarországi matematikatanítás egyik legmeghatározóbb alakja.

Pálmay Lóránt 1929-ben született Budapesten, 1952-ben végzett az ELTE TTK matematika-fizika szakán. Az ELTE TTK Geometria Tanszékének oktatója volt 1952-től 1976-ig, de óraadóként élete végéig tanított az egyetemen. 1976-tól 1999-ig, hivatalos nyugdíjba vonulásáig a Fővárosi Pedagógiai Intézetben volt vezető szaktanácsadó. Egyetemi oktató munkája mellett 21 évig tanított a budapesti Szent László Gimnáziumban. Egyetemi jegyzetek, kiváló középiskolai tankönyvek és feladatgyűjtemények szerzője és társszerzője volt. Emellett számos módszertani jellegű cikket, tanulmányt, továbbképzési anyagot publikált. Az FPI munkatársaként ő fogta össze és koordinálta a fővárosi speciális matematika tagozatos osztályokban tanító tanárok munkáját. Évtizedeken keresztül ő készítette a speciális matematikai osztályok számára a felvételi feladatsorozatokat, majd az ezt váltó tehetséggondozó verseny feladatsorait. Tagja volt többek között az OKTV és a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatait kitűző bizottságnak. Az elmúlt 22 évben több alkalommal is ő vezette a NAT és az aktuális kerettantervek matematika részét összeállító bizottságokat. Tevékenységét számos díjjal és kitüntetéssel ismerték el, amelyekből néhány a teljesség igénye nélkül: Beke Manó Emlékdíj I. és II. fokozata, Apáczai Csere János-díj (1993), Rátz Tanár Úr Életműdíj (2002).

Pálmay Tanár Úrtól két, a 2013. január 9-i temetésen elhangzott nekrológ teljes közlésével búcsúzunk.

Jóságos, érdeklődő, bölcs, mindig szembenéző tekintet, jelentőségteljesen felemelt mutatóujj, amely nyomatékosítja a csendesen elmondott, okos szavakat.

Gyöngybetűvel írt jegyzetek óralátogatásokról, előadásokról.

Pontosság és rendszeresség időben és munkában, tájékozottság, szorgalom, igényesség az alkotásban.

Felelősség a szakmáért, mindazokért és mindazért, akikkel és amivel munkája kapcsolatba hozta.

Egyedülálló memória, amely minden tanítványt, kollégát, a matematikatanítás szempontjából fontos eseményt egész életén át megőrzött.

Segítség mindig, mindenkinek, mindenben, aki hozzá fordult, aki megbízott benne.

Soha el nem felejtett névnapi jókívánságok.

Mindezek tovább élnek bennünk. Pálmay Lóránt nyomot hagyott a világban. Már nem gazdagítja tovább életművét, de amit tett dolgos életében, az beépült, gyökeret vert azokban, akik kapcsolatban voltak vele.

Búcsúznak azok a matematikatanárok, akik Lóránttól tanulták a matematika speciális területeit, a módszertant, a pedagógus hivatás megannyi fortélyát, de mindenekelőtt emberi tisztességet, a tanítványokért és a matematika tudományért érzett felelősséget.

Búcsúzik a Fazekas matematika munkaközössége, és mindazok a pedagógusok, akiknek lehetőségük volt vele dolgozni. A Fazekasba mindig barátként, kollégaként jött, akkor is, amikor az iskola és az Intézet szétvált, akkor is, amikor már – papíron – nyugdíjas volt, de minden olyan feladatot tovább végzett, amellyel segíthetett bennünket. Matematikatanárok ezrei részesültek szakmai – módszertani tudásából, kaptak segítséget tőle továbbképzéseken, egyéni konzultációk alkalmával. A módszertan egyedülálló szaktekintélye volt. Hozzá hasonlót nem ismer a szakma. Tiszteltük, tiszteljük, bíztunk benne, tanultunk tőle, életkorunktól és életkorától függetlenül. A speciális matematika tagozat ügyét sajátjának tekintette. A tehetséggondozás elmélete és gyakorlata életművének jelentős összetevője. A Fazekas matematika munkaközössége úgy döntött (egyetértésben az ország többi speciális matematika tagozatot működtető iskolájával), kezdeményezi, hogy az eddig *Bolyai versenyként* ismert, a speciális matematika tagozatosok számára szervezett tehetségkutató verseny a következő tanévtől ***Pálmay Lóránt*** nevét viselje.

Búcsúzom a magam nevében. Lóránt az egyetemen tanárom volt, figyelemmel kísérte a munkámat első munkahelyemen, majd ő hívott a Fazekasba, beavatott a módszertani továbbképzés rejtelmeibe, számos lehetőséget teremtett arra, hogy kibontakozhassak, végig magamon éreztem figyelő, vigyázó tekintetét. A bemutató órákat, vagy a továbbképzésen elhangzott előadásokat követő elemzései, értékelése, tanácsai örök érvényű tanulságul szolgálnak, biztonságérzetet adnak.

Pálmay Lóránt eredendő jóságával, jóhiszeműségével, jóindulatával, segítőkészségével jobbá tette maga körül a világot, az embereket. Köszönjük a sorsnak, hogy a kollégái, tanítványai, barátai lehettünk. Életműve tovább él.

Nyugodjék békében.

Hámori Veronika
igazgató

Tisztelt Gyászolók, kedves Tanár Úr, drága Lóránt!

A valamikor volt FPI-s kollegáknak és mindazoknak a nevében szólok, akiknek – hozzád hasonlóan – nagyon fontos a magyar matematikai nevelés ügye. Sok-sok tanító, tanár, szaktanácsadó és egyetemi oktató kollega búcsúját próbálom megfogalmazni.

Shakespeare azt mondatja Antoniusszal Julius Caesar temetésén, hogy …„temetni jöttem Caesart, nem dicsérni" – én ennek az ellenkezőjére törekszem. A búcsú pillanataiban szeretném felidézni Pálmay tanár úr alakját, tehát dicsérni fogom szeretettel, barátsággal.

Drága Lóránt! Amikor a halálhíred utáni dermedt szomorúság valamelyest felengedett, nagyon sokat beszélgettünk arról, kinek mi jutott leghamarabb eszébe Veled kapcsolatban. Ezekből a beszélgetésekből fogok majdnem szó szerint idézni mondatokat, amelyek megpróbálják visszaadni azt, amit nekünk jelentettél, jelentesz. Következzenek tehát a mondatok!

„A magyar matematikatanítás egyik, talán utolsó nagy mogulja volt."

„Mindig szelíden, de megingathatatlanul képviselte a matematikatanítással kapcsolatos álláspontját.”

„Az egyik legjobb és legtisztább ember, akit valaha ismertem.”

„Nagyon sokat tanultam tőle geometriából, de azt, hogy észrevette, hogy segítségre szorulok és vállalta, hogy felnőtté és értelmiségivé válásomban emberileg a támaszom legyen, soha nem tudtam eléggé meghálálni.”

„Nagyon jó társ volt a magyar és a matematika megbonthatatlan barátságának kiépítésében és ápolásában.”

„Amikor látogatta az órámat, a kritikai megjegyzéseket is úgy fogalmazta meg, hogy abból megbecsülés áradt és szinte dicséretnek tudtam érezni.”

„Az elmúlt évtizedekben nem volt olyan fontos eseménye a matematikatanításnak, amiben nem volt aktív résztvevő. Lehetett ez NAT, tanterv, bizottsági munka, vagy módszertani kísérlet.”

„A versenyekre javasolt szép feladatainak a megoldása, a dolgozatjavításai szinte hihetetlen precizitással, gondossággal készültek. Mindenben a pontosság mintaképe volt.”

„Szerintem soha nem mondott senkiről se rosszat, mindenkiben – tanítványban, kollegában, szinte bárki idegenben – a jót látta, és ezzel egy kicsit tényleg jobbá lett mindenki a közelében.”

„Érdekes, szép előadásokat, továbbképzéseket hallottam tőle; a matematika, a diákok és a tanárok szeretete hatotta át a szavait.”

„Felnőtt koromban arra törekedtem, hogy olyan légkörű családom legyen, amilyennek a történetek alapján a Pálmay családot elképzeltem.”

„Ha bármilyen szakmai feladatot kaptam, amikor megbeszélhettem az ötleteimet a Tanár úrral, már biztonságban éreztem magam.”

A felsorolásban utolsónak a saját gondolatomat mondom el: „Nagyon jó dolog volt a tanítványodnak, a beosztottadnak, végül felkérésedre, biztatásodra a főnöködnek lennem, de a legnagyobb értéknek azt érzem, hogy a barátod lehettem.”

Az előbbi mondatokból – mint egy kaleidoszkóp darabkáiból – egy beteljesedett, értékes életpálya és egy nagyszerű ember arca rajzolódik ki. Remélem, az idézett mondatok között mindenki megtalálta a saját Pálmay Lórántját.

Drága Lóránt!

A biztonságérzet, amit tudásoddal, emberségeddel nyújtottál, új formában fog továbbélni: egymásnak tesszük fel a kérdéseinket, és megbeszéljük, mit mondott volna erről Pálmay Lóránt. Így maradsz köztünk, élsz bennünk, velünk továbbra is.

Ezért arra biztatok minden jelenlevőt, hogy a szomorúság mellett csináljon helyet a szívében az örömnek is. Örüljünk annak, hogy Pálmay Lóránt része volt az életünknek, tanulhattunk Tőle, dolgozhattunk Vele, a barátai lehettünk, és így mi is részeseivé váltunk az Ő szakmai és privát életének. Köszönjük mindezt neked, drága Lóránt! Nyugodj békében!

Somfai Zsuzsa

Tuzson Zoltán

A pitagoraszi tételcsoport analógja, és általánosításának az analógja a tetraéderben

Kivonat

A dolgozatban megmutatjuk, hogy a közönséges Pitagorasz-tételnek van egy úgynevezett trigonometriai alakja is, amelyiknek megvan a térbeli analógja is a derékszögű tetraéderben, ezt bizonyítjuk is. Továbbá belátjuk, hogy a pitagoraszi tételcsoportban szereplő magasságtételnek is van térbeli analógja a derékszögű tetraéderben, ezt is bizonyítjuk. Ezek után a közismert, általánosított Pitagorasz-tételt (az úgynevezett koszinusztételt) is kiterjeszthetjük analógiával az általános tetraéderben is. Mindezek bemutatása a sík- és a térmértan analóg fogalmaival és analóg bizonyítási eljárásaival történik.

Abstract

In the following paper we are going to point out that the well-known Pythagorean theorem has a so called trigonometric form too, which has its spatial analog also, and we are going to prove it in the rectangular tetrahedron. Furthermore we can see that the altitude theorem which appears in the Pythagorean group of theorems also has its spatial analog and it will also be proved in the rectangular tetrahedron. After that the well-known generalized Pythagorean theorem, (the so called cosine theorem) with analogy can be extended to the general tetrahedron too. The presentation of all these things will be done with the analog concepts of the plane and space geometry and with analog methods.

* * *

Az [1]-ben a következőkről olvashatunk: Ha $ABCD$ egy D-ben derékszögű tetraéder, és az oldallapok területei $t_A = t(BCD)$, $t_B = t(DAC)$, $t_C = t(ABD)$, $t_D = t(ABC)$, akkor érvényes a $t_D^2 = t_A^2 + t_B^2 + t_C^2$, ami nem más, mint a Pitagorasz-tételnek a térbeli analógja a derékszögű tetraéder esetén. Ezt először Jean Paul de Gua de Malves bizonyította 1783-ban, így a Gua-féle tételnek nevezik (v.ö. [2]). Ezt szeretnénk más szemszögből is megvilágítani. A továbbiakban legyenek rendre a, b, c egy ABC háromszög megfelelő oldalainak a hossza, A, B, C a megfelelő szögeinek a mértékszáma, $\widehat{A} = 90°$ és x valamelyik hegyesszögének a mértékszáma. Ekkor:

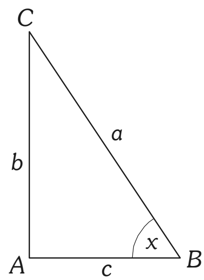
1. Tétel: A következő három kijelentés egyenértékű:

a) $a^2 = b^2 + c^2$

b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

c) $\cos^2 B + \cos^2 C = 1$.

Bizonyítás:



1. ábra

A bizonyítás azonnali, mert $b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Továbbá ha $x \in \{B, C\}$, akkor, mivel $\sin B = \cos C$, illetve $\sin C = \cos B$, ezért $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 B + \cos^2 C = 1$.

Most bizonyítani fogjuk, hogy az 1. Tétel *c)* formájának is van analógja a tetraéderben.

2. Tétel: Egy *ABCD*, *D*-ben derékszögű tetraéderben igaz, hogy:

$$\cos^2 \widehat{AB} + \cos^2 \widehat{BC} + \cos^2 \widehat{CA} = 1,$$

ahol $\widehat{XY}$ az *XY* élhez tartozó tetraéderbeli lapszög mértékét jelöli.

Bizonyítás: Az 1. ábra jelöléseit használva felírható, hogy $\sin x = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ (i), valamint

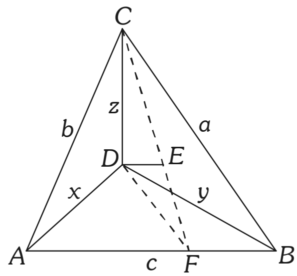
$\cos x = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ (ii). Ha $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a Pitagorasz-tétel egy más alakja, és a Pitagorasz-tétel analógja érvényes a derékszögű tetraéderben is, akkor mi lenne ennek a formulának az analógja a derékszögű tetraéderben? Szem előtt tartva az (i), (ii) összefüggéseket és a $t_D^2 = t_A^2 + t_B^2 + t_C^2$ analóg Pitagorasz-tételt, ésszerűnek tűnik, hogy definiáljuk a következő törteket:

$$a(t) = \frac{t_A}{\sqrt{t_A^2 + t_B^2 + t_C^2}},\quad b(t) = \frac{t_B}{\sqrt{t_A^2 + t_B^2 + t_C^2}},$$

$$c(t) = \frac{t_C}{\sqrt{t_A^2 + t_B^2 + t_C^2}}.$$

Az analóg Pitagorasz-tétel értelmében nyilvánvaló, hogy $a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) = 1$.

Nézzük csak most az $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ jelentéseit.



2. ábra

A 2. ábrát követve felírható, hogy $\cos \widehat{AB} = \frac{DF}{CF}$ ahol $DF = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ és

$CF = \frac{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, és ezek szerint

$$\cos \widehat{AB} = \frac{xy}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}} =$$

$$= \frac{t_C}{\sqrt{t_A^2 + t_B^2 + t_C^2}} = c(t).$$

Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy

$$b(t) = \frac{t_B}{\sqrt{t_A^2 + t_B^2 + t_C^2}} = \cos \widehat{CA},$$

és

$$a(t) = \frac{t_A}{\sqrt{t_A^2 + t_B^2 + t_C^2}} = \cos \widehat{BC}.$$

Ezek alapján tehát az analóg Pitagorasz-tétel trigonometriai alakja a következő:

$$\cos^2 \widehat{AB} + \cos^2 \widehat{BC} + \cos^2 \widehat{CA} = 1.$$

Ugyancsak az [1]-ben olvashatunk a magasságtétel analógjáról is, de azt is olvashatjuk, hogy az analóg forma csak speciális derékszögű tetraéderben teljesül.

A továbbiakban a magasságtétel egy ekvivalens alakjának az analógját keressük meg és igazoljuk, hogy ez minden derékszögű tetraéderben igaz.

3. Tétel: A következő három kijelentés egyenértékű:

a) $m^2 = p \cdot q$

b) $m = \frac{b \cdot c}{a}$

c) $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{m^2}$

ahol *m* az *A*-ból húzott magasság, *p* a *c* befogó vetülete az *a* átfogóra, *q* pedig a *b* befogó vetülete az *a* átfogóra.

Bizonyítás:

$$m^2 = p \cdot q \Leftrightarrow m^2 = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{c^2}{a} \Leftrightarrow m = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Továbbá

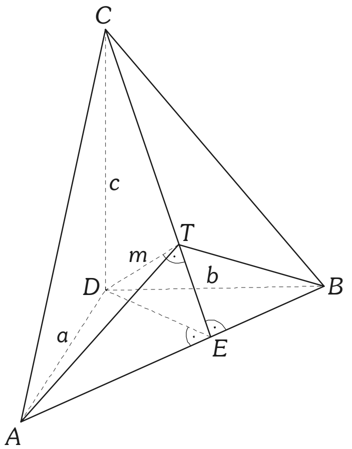
$$m = \frac{b \cdot c}{a} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{1}{m^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{b^2 + c^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{1}{m^2} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{m^2}.$$

A továbbiakban igazoljuk, hogy a 3. Tétel *c)* formájának is van analógja a tetraéderben.

4. Tétel: Egy $ABCD$, D-ben derékszögű tetraéderben igaz, hogy: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{m^2}$, ahol $a = AD$, $b = BD$, $c = CD$ és m a D pont távolsága az ABC síktól.

Bizonyítás:



3. ábra

Az ábra jelöléseit követve, mivel $DT \perp AB$, $CD \perp AB$, ezért $DE \perp AB$. Ha a síkbeli analóg tételt (3. Tétel *c)*) alkalmazzuk az ABD és ECD derékszögű háromszögekre, akkor felírható, hogy: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{DE^2}$ és $\frac{1}{DE^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{m^2}$, ahonnan kiküszöbölve az $\frac{1}{DE^2}$-et, éppen $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{m^2}$ adódik.

Következzen most a Pitagorasz-tétel általánosítása, és ennek analógja az általános tetraéderben.

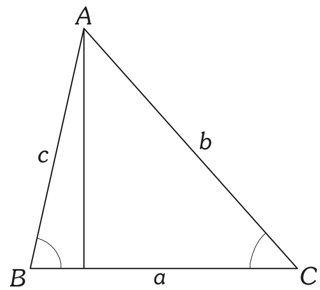
A Pitagorasz-tétel általánosítása nem derékszögű háromszögekre a következő: ha az ABC általános háromszög megfelelő oldalainak a hosszát a, b, illetve c-vel, a megfelelő szögeinek a mértékét A, B, C-vel jelöljük, akkor igaz, hogy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \qquad (1')$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos B \qquad (2')$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \qquad (3')$$

A tételt még koszinusztételnek is nevezik, és egyik legegyszerűbb bizonyítása az úgynevezett vetületek tételével történik, miszerint:

$$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B \qquad (1'')$$
$$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C \qquad (2'')$$
$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A \qquad (3'')$$

A bizonyítása azonnali:



4. ábra

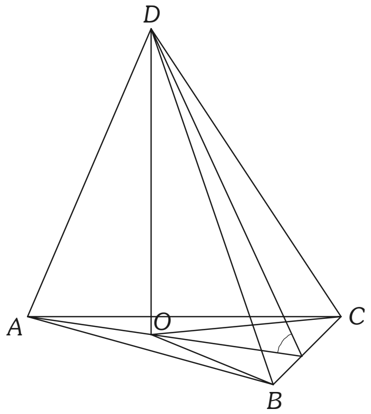
mivel $BD = c \cdot \cos B$ és $DC = b \cdot \cos C$, továbbá a BD és DC vetületekre érvényes, hogy $BD + DC = a$, ezért máris az (1”) összefüggés adódik.

A koszinusztétel bizonyítása pedig így történik: szorozzuk meg az (1”)-et a-val, a (2”)-et b-vel és a (3”)-et c-vel. Ezután felírjuk, hogy

$$a^2 - b^2 - c^2 = (ab\cos C + ac\cos B) -$$
$$-(bc\cos A + ab\cos C) - (ac\cos B + bc\cos C) =$$
$$= -2bc\cos A,$$

vagyis az (1’) bizonyított.

A továbbiakban az általánosított Pitagorasz-tételt fogjuk analógiával kiterjeszteni az általános tetraéderben. Ebből a célból, akár csak az előbb is, hamarabb a vetületek tételét bizonyítjuk a tetraéderben is. Legyen tehát $ABCD$ egy általános tetraéder, és O a D pontnak a vetülete az ABC síkra.



5. ábra

Jelölje $\widehat{XY}$ az XY élhez tartozó tetraéderbeli lapszög mértékét. Akkor bizonyítható a következő eredmény:

5. Tétel (vetületek tétele a tetraéderben): Ha $t_A = t(BCD)$, $t_B = t(DAC)$, $t_C = t(ABD)$, $t_D = t(ABC)$, akkor

$$t_A = t_B \cdot \cos\widehat{CD} + t_C \cdot \cos\widehat{BD} + t_D \cdot \cos\widehat{BC} \quad (1)$$

$$t_B = t_A \cdot \cos\widehat{CD} + t_C \cdot \cos\widehat{AD} + t_D \cdot \cos\widehat{AC} \quad (2)$$

$$t_C = t_A \cdot \cos\widehat{BD} + t_B \cdot \cos\widehat{AD} + t_D \cdot \cos\widehat{AB} \quad (3)$$

$$t_D = t_A \cdot \cos\widehat{BC} + t_B \cdot \cos\widehat{AC} + t_C \cdot \cos\widehat{AB} \quad (4)$$

Bizonyítás: Az 5. ábrát követve felírható, hogy $t(OBC) = t(DBC) \cdot \cos\widehat{BC}$ vagyis $t(OBC) = t_A \cdot \cos\widehat{BC}$ és hasonlóan $t(OCA) = t_B \cdot \cos\widehat{AC}$, $t(OAB) = t_C \cdot \cos\widehat{AB}$.

Tehát most a síkbeli BD és DC vetületek helyett az analóg $t(OAB)$, $t(OBC)$, és $t(OCA)$ vetületterületeket használjuk. És mivel felírható, hogy $t_D = t(ABC) = t(OAB) + t(OBC) + t(OCA)$.

Ezért máris megkaptuk a (4)-es összefüggést. Teljesen hasonlóan bizonyítható a másik három összefüggés is.

Ezek után a síkbeli koszinusztétel bizonyításának mintájára bizonyítjuk a következőket.

6. Tétel (koszinusztétel a tetraéderben): Egy $ABCD$ általános tetraéderben, az előző jelöléseket használva igaz, hogy:

$$t_A^2 = t_B^2 + t_C^2 + t_D^2 - 2t_Bt_C\cos\widehat{AD} - 2t_Bt_D\cos\widehat{AC} - 2t_Ct_D\cos\widehat{AB} \quad (1.1)$$

$$t_B^2 = t_C^2 + t_D^2 + t_A^2 - 2t_Ct_D\cos\widehat{AB} - 2t_At_C\cos\widehat{BD} - 2t_Dt_A\cos\widehat{BC} \quad (1.2)$$

$$t_C^2 = t_D^2 + t_A^2 + t_B^2 - 2t_Dt_A\cos\widehat{BC} - 2t_Dt_B\cos\widehat{AC} - 2t_At_B\cos\widehat{BC} \quad (1.3)$$

$$t_D^2 = t_A^2 + t_B^2 + t_C^2 - 2t_At_B\cos\widehat{CD} - 2t_At_C\cos\widehat{BD} - 2t_At_B\cos\widehat{AD} \quad (1.4)$$

Bizonyítás: A vetülettételben az (1)-et t_A-val, a (2)-t $-t_B$-vel, a (3)-at $-t_C$-vel, a (4)-et pedig $-t_D$-vel szorozva és a megfelelő oldalakat tagonként összeadva éppen az (1.1) összefüggést kapjuk. Teljesen hasonlóan bizonyítjuk a másik három összefüggést is.

Belátható, hogy ha az $ABCD$ tetraéder derékszögű a D-ben, akkor $\cos\widehat{AD} = \cos\widehat{BD} = \cos\widehat{CD} = 0$ és akkor az előbbi (1.4) összefüggés így alakul:

$$t_D^2 = t_A^2 + t_B^2 + t_C^2$$

és ez nem más, mint a Pitagorasz-tétel analógja a derékszögű tetraéder esetén, amit az [1]- ben is és a [4]-ben is megtalálunk, és ezúttal általánosítottunk.

Irodalom

[1] Dr. DarvasiGyula: Az analóg pitagoraszi tételcsoport, MaTa 1/2010, 3–5.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/De_Gua's_theorem

[3] Dan Branzei és társai (1986): Planul si spatiul Euclidian. Editura Academiei RSR, Bucuresti

[4] Fitos László (1984): Analóg tételek és feladatok a sík- és térgeometriában. Tankönyvkiadó, Budapest

Dr. Darvasi Gyula

Egy általános geometriai módszer a hatványösszegek meghatározására

Kivonat

Ebben a cikkben megismertünk egy geometriai módszert, amely az $1^k + 2^k + ... + n^k$ összegekre minden k és n pozitív egész szám esetén egységesen alkalmazható. Ehhez az 1×1^k, 1×2^k, ..., $1 \times n^k$ oldalú téglalapokat egymás alá helyezzük el, majd az így előálló lépcsős alakzatot kiegészítjük egy $n \times (n+1)^k$ oldalú téglalappá. Az összegképletek azáltal kaphatók, hogy ennek a téglalapnak a területét két különböző módon határozzuk meg.

Abstract

In this article we became acquainted with a geometrical method that can be adopted for the sums $1^k + 2^k + ... + n^k$ in the case of all positive integers k and n uniformly. It needs to arrange the rectangles of the form 1×1^k, 1×2^k, ..., $1 \times n^k$ below each other and then to complete the arising stepped figure to a rectangle of the form $n \times (n+1)^k$. The sum formulae can got by determining the area of this rectangle in two different ways.

* * *

Az első n természetes szám pozitív egész kitevőjű hatványaiból álló összegek képleteinek geometriai meghatározására néhány kitevő esetén számos mód ismeretes, jóllehet éppen az jelenthet problémát, hogy azok nem általános érvényűek ([2] 16–18, 49–55, 60–62, [3] I/69–70, 77–81, 84–89, 90, 92, II/83, 86–89, 93).

Az alábbiakban egy olyan geometriai módszert mutatunk be, amely révén rekurzióval bármely hatványösszegre vonatkozó képlet előállítható ([1]). Ezen leírás során az $1^k + 2^k + ... + n^k$ öszszeget $S_k(n)$-nel jelöljük, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$. Az $S_k(n)$ képletének rögzített k esetén történő meghatározásához képezzünk egy lépcsős alakzatot n darab olyan téglalapból, melyek rendre 1×1^k, 1×2^k, ..., $1 \times n^k$ típusúak, s így azok területeinek összege éppen $S_k(n)$-nel egyenlő. (1., 2. és 3. ábrák. Az 1. ábra teljesen arányos, viszont a 2. és 3. ábrákon a lépcsők hosszai helyszűke miatt torzulnak.) Ezt a lépcsős alakzatot $r \cdot [(r+1)^k - r^k]$ típusú téglalapokkal, ahol $1 \le r \le n$ és $r \in \mathbb{Z}$, kiegészítjük egy $n \cdot (n+1)^k$ típusú téglalappá, amelynek területét kétféleképpen kiszámítva juthatunk célhoz. Mindezt az alábbiakban a $k \in \{1, 2, 3\}$ esetekre részletezzük.

1. eset: $k = 1$ (1. ábra)

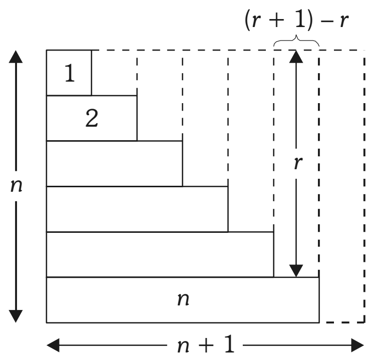
$$n(n+1) = S_1(n) + \sum_{r=1}^{n} [(r+1) - r]r =$$

$$= S_1(n) + \sum_{r=1}^{n} r = 2S_1(n),$$

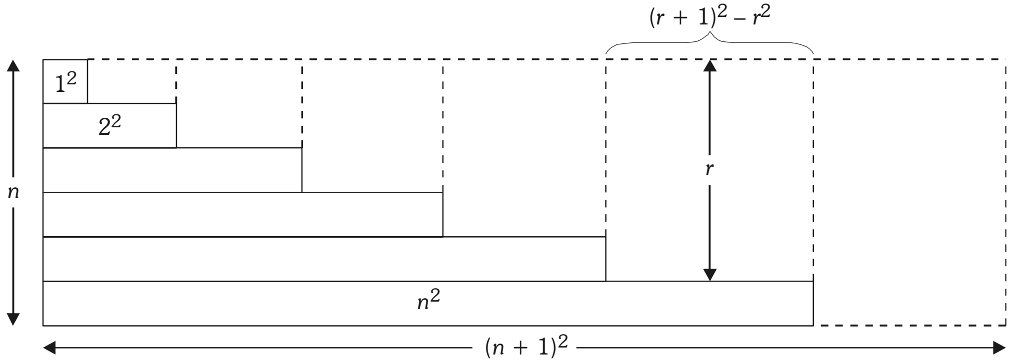
ahonnan

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

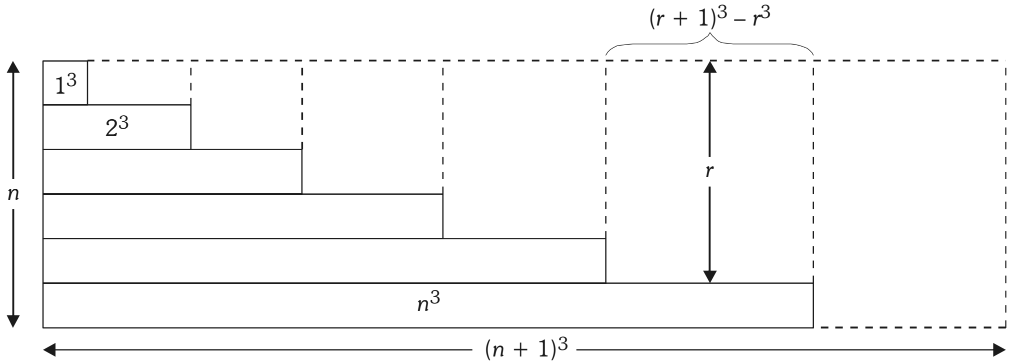
(Megjegyezzük, hogy az 1. ábrán lévő elrendezés az előbbi számolást mellőzve is célra vezet, de ez az út a továbbiakban már nem járható.)



1. ábra



2. ábra



3. ábra

2. eset: $k=2$ (2. ábra)

$$n(n+1)^2 = S_2(n) + \sum_{r=1}^{n} [(r+1)^2 - r^2]r =$$

$$= S_2(n) + \sum_{r=1}^{n} (2r+1)r = 3S_2(n) + S_1(n),$$

ahonnan

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)^2 - S_1(n)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. eset: $k=3$ (3. ábra)

$$n(n+1)^3 = S_3(n) + \sum_{r=1}^{n} [(r+1)^3 - r^3]r =$$

$$= S_3(n) + \sum_{r=1}^{n} (3r^2 + 3r + 1)r =$$

$$= 4S_3(n) + 3S_2(n) + S_1(n),$$

ahonnan

$$S_3(n) = \frac{n(n+1)^3 - 3S_2(n) - S_1(n)}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Általánosan tekintve ez az eljárás az

$$n(n+1)^k = S_k(n) + \sum_{r=1}^{n} [(r+1)^k - r^k]r$$

egyenletre vezet, ahonnan adott $k>3$ esetén az $S_k(n)$-re keresett képlet rekurzióval megkapható, miközben kontrollként jól felhasználható a [4]-ben lévő összeállítás.

Irodalom

[1] Darvasi Gyula: Eine andere einheitliche geometrische Methode zur Bestimmung der Potenzsummenformeln. Praxis der Mathematik, 1996/2, 81–82.

[2] Matusik Edina: Összegképletek szemléletes bizonyítása. Szakdolgozat, ELTE Matematika Intézet, 2011.

[3] Roger B. Nelsen: Proofs without words I, II. The Mathematical Association of America, 1993, 2000.

[4] http://www.sztaki.hu~keri/math/psum.htm

Ringler András

Az első n négyzetszám összege vajon lehet-e négyzetszám?

Kivonat

Az első n négyzetszám összege, az $n = 1$ eseten kívül, **akkor, és csak akkor** lehet maga is négyzetszám, ha $n = 24$. Ezzel az értékkel

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{24 \cdot 25 \cdot 49}{6} =$$
$$= 4 \cdot 25 \cdot 49 = 4900 = 70^2 = y^2 \equiv s(24^2).$$

Summary

The sum of the first n squared numbers $(n > 1)$ is itself a squared number, **if, and only if,** $n = 24$. With this value

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{24 \cdot 25 \cdot 49}{6} =$$
$$= 4 \cdot 25 \cdot 49 = 4900 = 70^2 = y^2 \equiv s(24^2).$$

* * *

A válasz: **igen.**
Az első n négyzetszám összegét az

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 3} = s(n^2)$$

kifejezésből kaphatjuk meg. Ennek kapcsán felmerülhet a kérdés, hogy ez az $s(n^2)$ összeg, az $n = 1$ triviális eseten kívül, vajon lehet-e – maga is – négyzetszám? Ha igen, akkor keressük meg azokat az 1-nél nagyobb n számokat, amelyekkel az $s(n^2)$ összeg négyzetszám lesz. Elsőként vegyük észre, hogy az összegképlet számlálójában az $n \cdot (n+1)$ szorzat mindig páros, (az n és az $n+1$ tényezők közül tehát csak az egyik tényező lehet páros szám), a $2 \cdot n + 1$ alakú tényező viszont, n paritásától függetlenül, mindig páratlan. Mivel a számlálóban lévő tényezők egymást közt relatív prímek (és ezt könnyű igazolni), ezért közülük mindig csak az egyikük osztható 2-vel, 3-mal, vagy mindkettővel.
A feltett kérdés eldöntéséhez, a szóba jöhető n számok $(n > 1)$ megtalálásához megvizsgálom az n szám tulajdonságaitól függő alábbi 6 esetet, amelyek közül az első három esetben az n szám, a második három esetben pedig az $n+1$ alakú szám a páros szám.

1. eset: Legyen az n szám 3-mal is, és 2-vel is osztható egész szám, vagyis az n tényező legyen $n = 6 \cdot x$ alakú páros szám. Ekkor az $n+1$ és a $2 \cdot n + 1$ alakú tényezőknek rendre $n + 1 = 6 \cdot x + 1$ és $2 \cdot n + 1 = 12 \cdot x + 1$ alakú számoknak kell lenniük, mindketten páratlanok és egyikük sem osztható 3-mal.

2. eset: Legyen az n szám 3-mal nem osztható, $n = 2 \cdot x$ alakú páros egész szám, az $n + 1 = 2 \cdot x + 1$ alakú páratlan tényező viszont legyen 3-mal osztható, vagyis

$$n + 1 = 2 \cdot x + 1 = 3 \cdot (2 \cdot u + 1) = 6 \cdot u + 3 =$$
$$= 6 \cdot u + 2 + 1 = 2 \cdot (3 \cdot u + 1) + 1$$

alakú szám. Ebből $2 \cdot x$-re, vagyis az n tényezőre $2 \cdot x = 2 \cdot (3 \cdot u + 1) = n$, és így $2 \cdot n + 1$-re $2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 2 \cdot (3 \cdot u + 1) + 1 = 12 \cdot u + 5$ adódik. Az elvárásoknak megfelelően, a mostani esetben, a $2 \cdot n + 1 = 12 \cdot u + 5$ alakú szám nem osztható 2-vel és 3-mal sem.

3. eset: Legyen az n szám 3-mal nem osztható, $n = 2 \cdot x$ alakú páros egész szám, és most a

$2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 2 \cdot x + 1$ alakú páratlan tényezőnek legyen a 3 osztója, így a

$$2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 2 \cdot x + 1 = 3 \cdot (2 \cdot u + 1) =$$
$$= 6 \cdot u + 3 = 6 \cdot u + 2 + 1 = 2 \cdot (3 \cdot u + 1) + 1$$

alakú számból $2 \cdot x$-re $2 \cdot x = 3 \cdot u + 1$ adódik. Vegyük észre, hogy ebben az u-val jelölt számnak páratlan számnak, vagyis $u = 2 \cdot w + 1$ alakú számnak kell lennie, így az

$$n = 2 \cdot x = 3 \cdot u + 1 = 3 \cdot (2 \cdot w + 1) + 1 =$$
$$= 6 \cdot w + 4 = 2 \cdot (3 \cdot w + 2)$$

alakú páros számmal $n + 1$-re

$$n + 1 = 2 \cdot (3 \cdot w + 2) + 1 = 6 \cdot w + 5,$$

a $2 \cdot n + 1$ alakú tényezőre pedig

$$2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 2 \cdot (3 \cdot w + 2) + 1 = 4 \cdot (3 \cdot w + 2)$$
$$+ 1 = 12 \cdot w + 9 = 3 \cdot (4 \cdot w + 3)$$

adódik. Az elvárásoknak megfelelően a mostani esetben az $n + 1 = 6 \cdot w + 5$ alakú páratlan szám nem osztható 2-vel, 3-mal sem.

4. eset: Legyen az $n + 1$ tényező $n + 1 = 2 \cdot x$ alakú páros szám, és az $n = 2 \cdot x - 1$ alakú páratlan szám pedig legyen 3-mal osztható, azaz $n = 2 \cdot x - 1 = 3 \cdot (2 \cdot u + 1)$ alakú páratlan egész szám. Így $2 \cdot x$-re: $2 \cdot x = 3 \cdot (2 \cdot u + 1)$, azaz az $n + 1$ alakú páros számra

$$n + 1 = 3 \cdot (2 \cdot u + 1) + 1 =$$
$$= 6 \cdot u + 4 = 2 \cdot (3 \cdot u + 2),$$

a $2 \cdot n + 1$ alakú páratlan tényezőre pedig

$$2 \cdot n + 1 \equiv 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot u + 1) + 1 =$$
$$= 6 \cdot (2 \cdot u + 1) + 1 = 12 \cdot u + 7$$

adódik. Az elvárásoknak megfelelően a mostani esetben a $2 \cdot n + 1 = 12 \cdot u + 7$ alakú páratlan szám nem osztható 3-mal.

5. eset: Legyen az $n + 1$ alakú tényező 2-vel és 3-mal is osztható egész szám, vagyis $n + 1$ legyen $n + 1 = 6 \cdot x$ alakú egész szám. Ekkor az n tényező $n = 6 \cdot x - 1$ alakú páratlan, a $2 \cdot n + 1$ alakú tényező pedig $2 \cdot n + 1 = 12 \cdot x - 1$ alakú páratlan szám lesz, és egyikük sem osztható 3-mal.

6. eset: Legyen az $n + 1$ alakú tényező 2-vel osztható, de 3-mal nem osztható, $n + 1 = 2 \cdot x$ alakú páros szám. Ekkor az n tényezőnek $n = 2 \cdot x - 1$ alakú, a $2 \cdot n + 1$ alakú tényezőnek pedig $2 \cdot n + 1 = 4 \cdot x - 1$ alakú páratlan számnak kell lennie. Mivel most a 3-mal osztható tényező a $2 \cdot n + 1$ alakú szám, ezért

$$2 \cdot n + 1 = 4 \cdot x - 1 = 3 \cdot (2 \cdot u + 1) =$$
$$= 6 \cdot u + 3 = 6 \cdot u + 4 - 1 = 2 \cdot (3 \cdot u + 2) - 1$$

alakú páratlan számnak kell lennie. Ebből a $4 \cdot x = 6 \cdot u + 4 \Rightarrow 2 \cdot x = 3 \cdot u + 2$ kifejezéshez jutunk, amelyből – $2 \cdot x$ párossága miatt – látható, hogy az u-val jelölt számnak $u = 2 \cdot w$ alakú páros számnak, vagyis a $2 \cdot x$ alakú tényezőnek $2 \cdot x = 6 \cdot w + 2$ alakú páros számnak kell lennie. Ennek felhasználásával az $n = 6 \cdot w + 1$, az $n + 1 = 6 \cdot w + 2 = 2 \cdot (3 \cdot w + 1)$, és a $2 \cdot n + 1 = 12 \cdot w + 3 = 3 \cdot (4 \cdot w + 1)$ alakú tényezőkhöz jutunk.

Az *1. eset* vizsgálata

Az *1. esetben* az $\dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = s(n^2)$ kifejezés számlálójában lévő tényezők rendre

$$n = 6 \cdot x,\ n + 1 = 6 \cdot x + 1, \text{ és}$$
$$2 \cdot n + 1 = 12 \cdot x + 1$$

alakú számok. Vajon az ilyen alakú tényezőkkel az

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{6 \cdot x \cdot (6 \cdot x + 1) \cdot (12 \cdot x + 1)}{6} =$$
$$= x \cdot (6 \cdot x + 1) \cdot (12 \cdot x + 1) = s(n^2)$$

lehet-e négyzetszám? Tegyük fel, hogy igen; vagyis az

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = x \cdot (6 \cdot x + 1) \cdot (12 \cdot x + 1)$$

szorzat négyzetszámot ad. Mivel az x, a $6 \cdot x + 1$ és a $12 \cdot x + 1$ alakú tényezők egymás közt relatív prímek, ezért a szorzatuk akkor, és csak akkor lehet négyzetszám, ha e tényezők rendre

$$x = u^2,\ 6 \cdot x + 1 = 6 \cdot u^2 + 1 =$$
$$= (2 \cdot b + 1)^2 = 4 \cdot b(b + 1) + 1$$

és

$$12 \cdot x + 1 = 12 \cdot u^2 + 1 = \\ = (2 \cdot c + 1)^2 = 4 \cdot c \cdot (c+1) + 1$$

alakú négyzetszámok. Ekkor viszont a

$$6 \cdot x = 4 \cdot b \cdot (b+1) \text{ és } 12 \cdot x = 4 \cdot c \cdot (c+1)$$

egyenlőségeknek teljesülniük kell, amelyek elosztásával a

$$2 = \frac{c \cdot (c+1)}{b \cdot (b+1)} = \frac{c}{b} \cdot \frac{c+1}{b+1} \qquad (*)$$

kifejezésből azonnal „látszik", hogy a $c > b$ relációnak teljesülnie kell. De az is „látható", hogy a

$$2 > \frac{c}{b} > 1 \text{ és } 2 > \frac{c+1}{b+1} > 1$$

relációknak is teljesülniük kell, sőt még az is biztos, hogy $c > 2$. A $c = 2$ eset ellentmondásra vezet, ugyanis $c = 2$ esetén

$$2 \cdot b \cdot (b+1) = 2 \cdot (2+1) \Rightarrow b \cdot (b+1) = 3$$

adódik, ami egész b számmal sohasem állhat fenn, hiszen az egyenlőség bal oldala páros, a jobb oldala viszont páratlan. Ez az ellentmondás nyilván azt jelenti, hogy $c = 2$ esetén $(*)$ egész számokkal nem állhat fenn. Ezért a c számnak 2-nél nagyobb számnak kell lennie. Mivel a $2 > \frac{c}{b} > 1$ relációnak is teljesülnie kell, ezért a b szám nem lehet a c számnak az osztója. A $2 = \frac{c \cdot (c+1)}{b \cdot (b+1)}$ kifejezésből ezért arra következtethetünk, hogy a b szám csak a $c + 1$ számnak lehet az osztója. A $\frac{c+1}{b} = r$ jelölés bevezetésével erre az egész r számra biztosan igaz, hogy $r > 1$, hiszen $c > b$, ezért az r számra az $r \geq 2$ reláció biztosan teljesül. A $c + 1 = b \cdot r$ értéket $(*)$-ba írva

$$2 = \frac{c \cdot (c+1)}{b \cdot (b+1)} = \frac{c \cdot b \cdot r}{b \cdot (b+1)} = \frac{c \cdot r}{b+1} = \frac{c}{b+1} \cdot r$$

adódik. Az $r \geq 2$ reláció kapcsán felmerül, hogy az $r > 2$ eset egyáltalán szóba jöhet-e? A válasz: **nem.** Ha ugyanis $r > 2$ volna, akkor a $2 = \frac{c}{b+1} \cdot r$ miatt a $\frac{c}{b+1}$ tényezőre $\frac{c}{b+1} < 1$ adódna, amelyből $c < b + 1$ következne, márpedig ez a reláció – $c > b$ – miatt lehetetlen. Ez az ellentmondás nyilván arra utal, hogy az r szám 2-nél nagyobb egész szám nem lehet, ezért csak az $r = 2$ eset jöhet szóba csak. Ekkor viszont a $\frac{c+1}{b} = r = 2$ kifejezésből

$$c + 1 = 2 \cdot b \Rightarrow c = 2 \cdot b - 1$$

adódik. Ezt az értéket $(*)$-ba írva

$$2 = \frac{c \cdot (c+1)}{b \cdot (b+1)} = \frac{(2 \cdot b - 1) \cdot (2 \cdot b - 1 + 1)}{b \cdot (b+1)} = \\ = \frac{(2 \cdot b - 1) \cdot 2 \cdot b}{b \cdot (b+1)} \Rightarrow 1 = \frac{2 \cdot b - 1}{b+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow b + 1 = 2 \cdot b - 1 \Rightarrow b = 2$$

adódik, így $c = 2 \cdot b - 1$ miatt a $c = 3$-hoz jutunk. Mivel ezekkel az értékekkel $6 \cdot x = 4 \cdot b \cdot (b+1) = 24$ és $12 \cdot x = 4 \cdot c \cdot (c+1) = 48$, ezért ezekből x-re, $x = 4$, és ezzel a keresett tényezőkre $n = 6 \cdot x = 24$, $n + 1 \equiv 25$ és $2 \cdot n + 1 = 49$ adódik. Az így „előállt" tényezőkkel, a várakozásnak megfelelően, az $s(n^2)$ összegre

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{24 \cdot 25 \cdot 49}{6} = \\ = 4 \cdot 25 \cdot 49 = 4900 = 70^2,$$

vagyis négyzetszámot kapunk.

Összegzés: Ezzel azt kaptuk, hogy $n = 24$ esetén az első 24 egész szám négyzetének az összege maga is négyzetszám, amelynek értéke $4900 = 70^2$. Ennek kapcsán felmerülhet, hogy az $n = 24$ megoldás vajon unicitív-e vagy sem, azaz léteznek-e olyan további $n > 1$ számok, amelyekkel az $s(n^2)$ összeg megint csak négyzetszám lesz.

A válasz: **ilyen tulajdonságú további n (> 1) számok nem léteznek, azaz $n = 24$ az egyetlen olyan szám, amellyel az $s(n^2)$ összeg maga is négyzetszám.**

A *2. eset* vizsgálata

A *2. esetben* az $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=s(n^2)$ kifejezés számlálójában fellépő tényezők rendre

$$n=2\cdot x=2\cdot(3\cdot u+1),\ n+1=2\cdot x+1=$$
$$=2\cdot(3\cdot u+1)+1=6\cdot u+3=3\cdot(2\cdot u+1)\text{ és}$$
$$2\cdot n+1=2\cdot 2\cdot x+1=2\cdot 2\cdot(3\cdot u+1)+1=$$
$$=4\cdot(3\cdot u+1)+1=12\cdot u+5$$

alakúak. Ezekkel

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=$$
$$=\frac{2\cdot(3\cdot u+1)\cdot 3\cdot(2\cdot u+1)\cdot(12\cdot u+5)}{6}=$$
$$=(3\cdot u+1)\cdot(2\cdot u+1)\cdot(12\cdot u+5)=s(n^2).$$

Vajon a mostani tényezők szorzata lehet-e négyzetszám? Tegyük fel, hogy igen! Mivel a $3\cdot u+1$, $2\cdot u+1$ és $12\cdot u+5$ alakú tényezők egymás közt relatív prímek, ezért a szorzatuk akkor, és csak akkor lehet négyzetszám, ha e tényezők maguk is négyzetszámok. Látható, hogy a $3\cdot u+1$ tényező paritását az u szám paritása határozza meg, de a $2\cdot u+1$ és a $12\cdot u+5$ alakú páratlan tényezők paritása viszont u-tól független, ezért ezen két utóbbi, négyzetszámnak gondolt szám tulajdonságait vizsgálom meg először.
Ha a $2\cdot u+1$ alakú páratlan tényező négyzetszám lenne, akkor

$$2\cdot u+1=(2\cdot b+1)^2=4\cdot b\cdot(b+1)+1$$

alakú lenne, és ebből

$$2\cdot u=4\cdot b\cdot(b+1)\Rightarrow u=2\cdot b\cdot(b+1)$$

adódna, amelyből látható, hogy ennek az u számnak páros számnak kell lennie.
Ha a $12\cdot u+5$ alakú páratlan tényező is négyzetszám (ezt várom!), akkor

$$12\cdot u+5=(2\cdot c+1)^2=4\cdot c\cdot(c+1)+1$$

alakba írható, és ebből

$$12\cdot u+5=4\cdot c\cdot(c+1)+1\Rightarrow$$
$$3\cdot u+1=c\cdot(c+1)$$

adódik. Vegyük észre, hogy ezen utóbbi egyenlőség csak páratlan u számmal állhat fenn, és ez a következmény ellentmond az előbb kapott páros u-nak, az $u=2\cdot b\cdot(b+1)$ alakú páros kifejezésnek. Ez nyilván azt jelenti, hogy a $2\cdot u+1$ és a $12\cdot u+5$ alakú tényezők egyidejűleg nem lehetnek négyzetszámok, vagyis a *2. eset* feltételei mellett az első n négyzetszám $s(n^2)$ összege nem lehet négyzetszám.

A *3. eset* vizsgálata

A *3. esetben* az $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=s(n^2)$ kifejezés számlálójában fellépő tényezők rendre

$$n=2\cdot(3\cdot w+2),\ n+1=6\cdot w+5\text{ és}$$
$$2\cdot n+1=3\cdot(4\cdot w+3)$$

alakúak, így ezekkel az

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=$$
$$=(3\cdot w+2)\cdot(6\cdot w+5)\cdot(4\cdot w+3)=s(n^2)$$

kifejezéshez jutunk. Mivel a $3\cdot w+1$, $6\cdot w+5$, és $4\cdot w+1$ alakú tényezők egymás közt relatív prímek, ezért a szorzatuk akkor, és csak akkor lehet négyzetszám, ha e tényezők maguk is négyzetszámok. Látható, hogy a $3\cdot w+2$ tényező paritását a w szám paritása határozza meg, de a $6\cdot w+5$ és a $4\cdot w+3$ alakú páratlan tényezők paritása w-től független. Ezért ezen két utóbbi, négyzetszámnak gondolt szám tulajdonságait vizsgálom meg először.
Ha a $6\cdot w+5$ alakú páratlan tényező négyzetszám lenne, akkor

$$6\cdot w+5=(2\cdot b+1)^2=4\cdot b\cdot(b+1)+1$$

alakú lenne, és ebből

$$6\cdot w+4=4\cdot b\cdot(b+1)\Rightarrow 3\cdot w+2=$$
$$=2\cdot b\cdot(b+1)$$

adódna. Vegyük észre, hogy ezen utóbbi egyenlőség csak páros w számokkal állhat fenn.
Ha a $4\cdot w+3$ alakú páratlan tényező is négyzetszám (ezt várom!), akkor

$$4\cdot w+3=(2\cdot c+1)^2=4\cdot c\cdot(c+1)+1$$

alakba írható, és ebből

$$4 \cdot w + 2 = 4 \cdot c \cdot (c + 1) \Rightarrow$$
$$2 \cdot w + 1 = 2 \cdot c \cdot (c + 1)$$

adódik. Ez az egyenlőség viszont egész számokkal sohasem teljesülhet, hiszen a bal oldala páratlan, jobb oldala viszont páros. Ez az ellentmondás nyilván azt jelenti, hogy a $6 \cdot w + 5$ és $4 \cdot w + 3$ alakú tényezők egyidejűleg nem lehetnek négyzetszámok, vagyis a *3. eset* feltételei mellett az első n négyzetszám $s(n^2)$ összege nem lehet négyzetszám.

A *4. eset* vizsgálata

A *4. esetben* az $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = s(n^2)$ kifejezés számlálójában fellépő tényezők rendre:

$$n = 3 \cdot (2 \cdot u + 1),\ n + 1 = 2 \cdot (3 \cdot u + 2) \text{ és}$$
$$2 \cdot n + 1 = 6 \cdot (2 \cdot x + 1) + 1$$

alakúak, így ezekkel az

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} =$$
$$= (2 \cdot u + 1) \cdot (3 \cdot u + 2) \cdot (12 \cdot u + 7) = s(n^2)$$

kifejezéshez jutunk. Mivel a $2 \cdot u + 1$, $3 \cdot u + 2$, és $12 \cdot u + 7$ alakú tényezők egymás közt relatív prímek, ezért a szorzatuk akkor, és csak akkor lehet négyzetszám, ha e tényezők maguk is négyzetszámok. Látható, hogy a $3 \cdot u + 2$ tényező paritását az u szám paritása határozza meg, de a $2 \cdot u + 1$ és a $12 \cdot u + 7$ alakú páratlan tényezők paritása u-től független, ezért ezen két utóbbi, négyzetszámnak gondolt szám tulajdonságait vizsgálom meg először.
Ha a $2 \cdot u + 1$ alakú páratlan tényező négyzetszám lenne, akkor

$$2 \cdot u + 1 = (2 \cdot a + 1)^2 = 4 \cdot a \cdot (a + 1) + 1$$

alakba írható, és ebből

$$2 \cdot u = 4 \cdot a \cdot (a + 1) \Rightarrow u = 2 \cdot a \cdot (a + 1)$$

adódna. Vegyük észre, hogy ezen utóbbi kifejezés csak páros u számmal állhat fenn, vagyis az egyenlőség teljesüléséhez az u számnak páros számnak kell lennie.
Ha a $12 \cdot u + 7$ alakú páratlan tényező is négyzetszám (ezt várom!), akkor

$$12 \cdot u + 7 = (2 \cdot c + 1)^2 = 4 \cdot c \cdot (c + 1) + 1$$

alakba írható, és ebből

$$12 \cdot u + 6 = 4 \cdot c \cdot (c + 1) \Rightarrow$$
$$6 \cdot u + 3 = 2 \cdot c \cdot (c + 1)$$

adódik. Vegyük észre, hogy az utóbbi egyenlőség ellentmondást mutat: a bal oldala páratlan, jobb oldala viszont páros. Ez az ellentmondás nyilván azt jelenti, hogy a $2 \cdot u + 1$ és a $12 \cdot u + 7$ alakú tényezők egyidejűleg nem lehetnek négyzetszámok, vagyis a *4. eset* feltételei mellett az első n négyzetszám $s(n^2)$ összege nem lehet négyzetszám.

Az *5. eset* vizsgálata

Az *5. esetben* az $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = s(n^2)$ kifejezés számlálójában fellépő tényezők rendre:

$$n = 6 \cdot x - 1,\ n + 1 = 6 \cdot x \text{ és}$$
$$2 \cdot n + 1 = 12 \cdot x - 1$$

alakúak, így ezekkel az

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} =$$
$$= (6 \cdot x - 1) \cdot x \cdot (12 \cdot x - 1) = s(n^2)$$

kifejezéshez jutunk. Mivel a $6 \cdot x - 1$, x, és $12 \cdot x - 1$ alakú tényezők egymás közt relatív prímek, ezért a szorzatuk akkor, és csak akkor lehet négyzetszám, ha e tényezők maguk is négyzetszámok.
Ha a $6 \cdot x - 1$ alakú szám páratlan négyzetszám lenne, akkor

$$6 \cdot x - 1 = (2 \cdot a + 1)^2 = 4 \cdot a \cdot (a + 1) + 1$$

alakú lenne, és ebből

$$6 \cdot x = 4 \cdot a \cdot (a + 1) + 2 \Rightarrow$$
$$3 \cdot x = 2 \cdot a \cdot (a + 1) + 1$$

adódna. Vegyük észre, hogy ezen utóbbi kifejezés csak páratlan x számmal állhat fenn.

Ha a $12 \cdot x - 1$ alakú páratlan tényező is négyzetszám (ezt várom!), akkor

$$12 \cdot x - 1 = (2 \cdot c + 1)^2 = 4 \cdot c \cdot (c + 1) + 1$$

alakba írható, és ebből

$$12 \cdot x = 4 \cdot c \cdot (c + 1) + 2 \Rightarrow$$
$$6 \cdot x = 2 \cdot c \cdot (c + 1) + 1$$

adódik. Vegyük észre, hogy ezen utóbbi egyenlőség ellentmondást mutat: ez az egyenlőség egész számokkal nem állhat fenn, hiszen az egyenlőség bal oldala páros, a jobb oldala viszont páratlan. Ez az ellentmondás nyilván azt jelenti, hogy a $6 \cdot x - 1$ és $12 \cdot x - 1$ alakú tényezők egyidejűleg nem lehetnek négyzetszámok, vagyis az *5. eset* feltételei mellett az első n négyzetszám $s(n^2)$ összege nem lehet négyzetszám.

A *6. eset* vizsgálata

A *6. esetben* az $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = s(n^2)$ kifejezés számlálójában fellépő tényezők rendre

$$n = 6 \cdot w + 1,\ n + 1 = 2 \cdot (3 \cdot w + 1) \text{ és}$$
$$2 \cdot n + 1 = 3 \cdot (4 \cdot w + 1)$$

alakúak, így ezekkel az

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} =$$
$$= (6 \cdot w + 1) \cdot (3 \cdot w + 1) \cdot (4 \cdot w + 1) = s(n^2)$$

kifejezéshez jutunk. Mivel a $6 \cdot w + 1$, $3 \cdot w + 1$, és $4 \cdot w + 1$ alakú tényezők egymás közt relatív prímek, ezért a szorzatuk akkor, és csak akkor lehet négyzetszám, ha e tényezők maguk is négyzetszámok. Látható, hogy a $3 \cdot w + 1$ alakú tényező paritása, w paritásától függ, ezért vizsgálataimat a $6 \cdot w + 1$ és $4 \cdot w + 1$ alakú, négyzetszámoknak gondolt páratlan tényezők vizsgálatával kezdem.

Ha ezek mindketten négyzetszámok lennének, akkor felírásuk és rendezésük után a

$$6 \cdot w + 1 = (2 \cdot a + 1)^2 = 4 \cdot a \cdot (a + 1) + 1 \Rightarrow$$
$$6 \cdot w = 4 \cdot a \cdot (a + 1) \Rightarrow$$
$$3 \cdot w = 2 \cdot a \cdot (a + 1),$$

és a

$$4 \cdot w + 1 = (2 \cdot c + 1)^2 = 4 \cdot c \cdot (c + 1) + 1 \Rightarrow$$
$$4 \cdot w = 4 \cdot c \cdot (c + 1) \Rightarrow$$
$$w = c \cdot (c + 1) \Rightarrow 3 \cdot w = 3 \cdot c \cdot (c + 1)$$

kifejezésekhez jutunk. Az utóbbi két kifejezés azt mutatja, hogy teljesülésükhöz a w számnak páros számnak kell lennie. Páros w számmal viszont, a $3 \cdot w + 1$ alakú tényezőnek is páratlan számnak kell lennie. A „cél érdekében”, ezt a $3 \cdot w + 1$ alakú, tehát páratlannak gondolt tényezőt is egy páratlan szám négyzeteként írom fel (ezt várom!), így a

$$3 \cdot w + 1 = (2 \cdot b + 1)^2 = 4 \cdot b \cdot (b + 1) + 1 \Rightarrow$$
$$3 \cdot w = 4 \cdot b \cdot (b + 1)$$

kifejezéshez jutok. Ezután felmerül a kérdés, hogy a

$$3 \cdot w = 2 \cdot a \cdot (a + 1),\ 3 \cdot w = 4 \cdot b \cdot (b + 1) \text{ és}$$
$$3 \cdot w = 3 \cdot c \cdot (c + 1) \ (**)$$

egyenlőségek egyidejűleg teljesülhetnek-e? Az első két következmény összehasonlításából

$$3 \cdot w = 2 \cdot a \cdot (a + 1) = 4 \cdot b \cdot (b + 1) \Rightarrow$$
$$a \cdot (a + 1) = 2 \cdot b \cdot (b + 1) \ (***)$$

adódik. Vegyük észre, hogy ezen utóbbi kifejezés formailag megegyezik a (∗)-nál említett egyenlőséggel, de itt az $a > b$ viszony áll fenn; ezért (∗∗∗) alatti egyenlőség biztosan, és csak is akkor teljesül, ha $a = 3$ és $b = 2$. Ezekkel az értékekkel (∗∗)-ból a w számra, $w = 8$ adódik. Ezzel a w értékkel azonban, a $3 \cdot w = 3 \cdot c \cdot (c + 1)$ kifejezésből, $8 = c \cdot (c + 1)$ adódik. Ezen utóbbi egyenlőség viszont egész c számokkal sohasem állhat fenn, tehát a $4 \cdot w + 1$ alakú tényező biztosan nem lehet négyzetszám. Ez pedig nyílván azt jelenti, hogy a $6 \cdot w + 1$, $3 \cdot w + 1$ és $4 \cdot w + 1$ alakú tényezők egyidejűleg nem lehetnek négyzetszámok, vagyis a *6. eset* feltételei mellett az első n négyzetszám $s(n^2)$ összege nem lehet négyzetszám.

Az n, $n+1$ és $2 \cdot n+1$ alakú tényezők tulajdonságainak összefoglaló táblázata

E tényezők tulajdonságainak gyors feltárásához, a táblázat kitöltési logikájának a megértéséhez mindig a két igen választól kell elindulni, és a nyíl majd megmutatja a továbbhaladás irányát.

	n tulajdonságai		$n+1$ tulajdonságai		$2 \cdot n+1$ tulajdonságai	
Esetek	Osztható-e kettővel? Alakja	Osztható-e hárommal? Alakja	Osztható-e kettővel? Alakja	Osztható-e hárommal? Alakja	Osztható-e kettővel? Alakja	Osztható-e hárommal? Alakja
1. eset	Igen $6 \cdot x$	Igen $6 \cdot x$	Nem $6 \cdot x+1$	Nem $6 \cdot x+1$	Nem $12 \cdot x+1$	Nem $12 \cdot x+1$
2. eset	Igen $2 \cdot x$ $3 \cdot (2 \cdot u+1)-1=$ $=2 \cdot (3 \cdot u+1)$	Nem $2 \cdot x$ $3 \cdot (2 \cdot u+1)-1=$ $=2 \cdot (3 \cdot u+1)$	Nem $2 \cdot x+1$ $3 \cdot (2 \cdot u+1)$	Igen $2 \cdot x+1=$ $=3 \cdot (2 \cdot u+1)$ $\Leftrightarrow$	Nem $4 \cdot x+1$ $6 \cdot (2 \cdot u+1)-1=$ $=12 \cdot u+5$	Nem $4 \cdot x+1$ $6 \cdot (2 \cdot u+1)-1=$ $=12 \cdot u+5$
3. eset	Igen $2 \cdot x$ $3 \cdot u+1=$ $=3(2w+1)+1=$ $=2 \cdot (3 \cdot w+2)$ $\Rightarrow$	Nem $2 \cdot x$ $2 \cdot (3 \cdot w+2)=$ $=6 \cdot w+4$	Nem $2 \cdot x+1$ $2 \cdot (3w+2)+1=$ $=6 \cdot w+5$	Nem $2 \cdot x+1$ $2 \cdot (3w+2)+1=$ $=6 \cdot w+5$	Nem $4 \cdot x+1$ $4 \cdot (3w+2)+1=$ $=3 \cdot (4 \cdot w+3)$	Igen $4 \cdot x+1=$ $=3 \cdot (2 \cdot u+1)=$ $=6 \cdot u+3=$ $=2 \cdot (3u+1)+1$ $\Leftarrow$ $4 \cdot (3w+2)+1=$ $=3 \cdot (4 \cdot w+3)$
4. eset	Nem $2 \cdot x-1$ $6 \cdot u+3=$ $=3 \cdot (2 \cdot u+1)$	Igen $2 \cdot x-1=$ $=3 \cdot (2 \cdot u+1)=$ $=6 \cdot u+3$ $\Leftrightarrow$ $=3 \cdot (2 \cdot u+1)$	Igen $2 \cdot x$ $6 \cdot u+4=$ $=2 \cdot (3 \cdot u+2)$	Nem $2 \cdot x$ $6 \cdot u+4=$ $=2 \cdot (3 \cdot u+2)$	Nem $4 \cdot x-1$ $12 \cdot u+7$	Nem $4 \cdot x-1$ $12 \cdot u+7$
5. eset	Nem $6 \cdot x-1$	Nem $6 \cdot x-1$	Igen $6 \cdot x$	Igen $6 \cdot x$	Nem $12 \cdot x-1$	Nem $12 \cdot x-1$
6. eset	Nem $2 \cdot x-1$ $6 \cdot w+1$	Nem $2 \cdot x-1$ $6 \cdot w+1$	Igen $2 \cdot x$ $3 \cdot u+2=$ $=3 \cdot 2 \cdot w+2=$ $=6 \cdot w+2$ $\Leftrightarrow$ $=2 \cdot (3 \cdot w+1)$	Nem $2 \cdot x$ $=6 \cdot w+2=$ $=2 \cdot (3 \cdot w+1)$	Nem $4 \cdot x-1$ $12 \cdot w+3=$ $=3 \cdot (4 \cdot w+1)$	Igen $4 \cdot x-1=$ $=3 \cdot (2 \cdot u+1)=$ $=6 \cdot u+3=$ $=6 \cdot u+4-1=$ $=2 \cdot (3u+2)-1$ $\Leftarrow$ $12 \cdot w+3=$ $=3 \cdot (4 \cdot w+1)$

Tuzson Zoltán

A Sturm-módszer és alkalmazása

Kivonat

Ebben a dolgozatban olyan egyenlőtlenségek bizonyításával foglalkozunk, amelyekben kettőnél több változó van, és az egyenlőtlenségben szimmetrikusan helyezkednek el. Emellett a változók még valamilyen feltételt (öszefüggést) is teljesítenek. Az egyenlőtlenségek általában a mértan, trigonometria, algebra és a matematikai analízis határterületén helyezkednek el, ezért elemi bizonyításuk nem könnyű. A dolgozatban bemutatott Sturm-módszerrel az említett feltételes egyenlőtlenségek könnyűszerrel és elemi módon bizonyíthatók. A módszer csak algebrai eszközökre támaszkodik és a lényege az, hogy állandó összeg (vagy szorzat) mellett valamely kétváltozós kifejezés változását követjük, miközben a változókat úgy közelítjük egymáshoz, hogy az összegük (illetve a szorzatuk) állandó maradjon. A változások megfigyeléséből, meghatározva az egyik változó értékét, újrakezdjük az eljárást, de ezúttal $n-1$ változó esetén. Véges ilyen lépés után az eljárásunk véget ér. A módszer lényegét és hatékonyságát megoldott feladatok segítségével szemléltetjük.

Abstract

In this paper we deal with the proof of such inequalities, which have more than two variables and which are situated symmetrically in the inequality. Beside this the variables fulfil some kind of condition (relation), too. The inequalities are usually situated on the borderland of Geometry, Trigonometry, Algebra and Mathematical Analysis, that's why their elementary proof is not easy. With the Sturm method presented in this paper the previously mentioned conditional inequalities can be easily proved with elementary methods. The method relies only on algebraic tools and its importance is that beside constant sum or product we follow the changing of some expression with two variables, while we are approaching the two variables to each other in such a way that their sum or product to be constant. From the observation of the changes, defining the value of one variable, we restart the procedure, but this time with the case of $n-1$ variable. After finite such steps our procedure is over. We are going to illustrate the importance and efficiency of the method with the help of solved problems.

* * *

Számtalan szélsőérték probléma megoldása, vagy egyenlőtlenség bizonyítása nagyon gyakran már a matematikai analízis eszközeire szorítkozik, mint például a Jensen-, Hölder-féle egyenlőtlenség, deriváltak stb.

A Sturm-módszerrel számos ilyen – úgymond az algebra, mértan, trigonometria, és analízis határán „elhelyezkedő” – feladat elemi eszközökkel oldható meg.

A módszert főleg $n \geq 2$ változót tartalmazó, szimmetrikus kifejezések esetén alkalmazhatjuk, amikor az ismeretlenek valamilyen kikötésnek vagy feltételnek tesznek eleget.

A módszer lényege röviden: állandó összeg (vagy szorzat) mellett valamely kétváltozós kifejezés változását követjük, miközben a változókat úgy közelítjük egymáshoz, hogy az összegük (illetve a szorzatuk) állandó maradjon. A változások megfigyeléséből meghatározva az egyik változó értékét, újrakezdjük az eljárást, de ezúttal $n-1$ változó esetén. Véges sok ilyen lépés után az eljárásunk véget ér.

A módszer lényegét a következő feladatok segítségével jobban megérthetjük. A módszer kezdetét a következő két feladat jelenti.

1. Alkalmazás: Ha $x, y \in \mathbb{R}$ és $x + y = S$ állandó, akkor a $P(x, y) = x \cdot y$ szorzat

a) növekszik, ha az $|x - y|$ különbség csökken,

b) csökken, ha az $|x - y|$ különbség növekszik.

Bizonyítás: Nyilván feltehető, hogy $x < y$, ekkor létezik olyan $e > 0$ amelyre $2e < y - x$. Így az $x + e$ és $y - e$ számok közelebb vannak egymáshoz, mint az x és y számok, az $x < x + e < < y - e < y$ elrendezés miatt. Mivel $2e < y - x$, mindenképpen $e < y - x$ (i).
Ekkor $P(x + e, y - e) - P(x, y) = e(y - x - e) > 0$, és ezért az *a)* állítás igaz. Az $x - e$ és $y + e$ számok nyilván távolabb vannak egymástól, mint az x és y számok. Az $x - e < x < y < y + e$ elrendezés miatt, hiszen $x - y < 0$, méginkább $x - y < e$ (ii).
Ekkor felírható, hogy $P(x - e, y + e) - P(x, y) = = e(x - y - e) < 0$, és ezért a b) állítás is igaz.

2. Alkalmazás: Ha $x, y \in \mathbb{R}^+$ és $x \cdot y = P$, akkor az $S(x, y) = x + y$ összeg

a) csökken, ha az $|x - y|$ különbség csökken,

b) növekszik, ha az $|x - y|$ különbség növekszik.

Bizonyítás: Nyilván feltehető, hogy $0 < x < y$, ekkor létezik olyan $k > 1$, amelyre $k^2 < \dfrac{y}{x}$. Így a kx és $\dfrac{y}{k}$ számok közelebb vannak egymáshoz, mint az x és y számok, a $0 < x < kx < \dfrac{y}{k} < y$ elrendezés miatt. Mivel $1 < k^2 < \dfrac{y}{x}$, ezért mindenképpen $1 < k < \dfrac{y}{x}$ (iii).
Ekkor $S\left(kx, \dfrac{y}{k}\right) - S(x, y) = \dfrac{x}{k}(k-1)\left(k - \dfrac{y}{x}\right) < 0$,
ezért az a) állítás igaz. A *b)* állítás bizonyítása is hasonló, ott a $k \in (0, 1)$ feltételt kell figyelembe venni.
A továbbiakban terjesszük ki az előző tulajdonságokat a klasszikus számtani- és mértani közepek közötti egyenlőtlenség bizonyítására.

3. Alkalmazás: Ha minden $n \geq 2$ esetén $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$, akkor fennáll az $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Feltételezzük, hogy $0 < x_1 \leq x_2 \leq \leq ... \leq x_n$, és legyen $P(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdot ... \cdot x_n$, valamint $x_1 + x_2 + ... + x_n = S$ állandó bármely $n \geq 2$ esetén. Rögzítsük az $x_3, x_4, ..., x_n$ értékeket, és az x_1, x_2 változó marad. Tehát $x_1 + x_2 = S - (x_3 + x_4 + ... + x_n)$ állandó. Az 1. Alkalmazás alapján, ha az $x_2 - x_1$ különbség csökken, akkor a $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ szorzat növekszik. De $x_1 \leq \dfrac{S}{n}$, ezért az $x_2 - x_1$ különbség akkor csökken a legtöbbet, ha éppen $x_1 = \dfrac{S}{n}$.

Tehát $P(x_1, x_2, ..., x_n) \leq P\left(\dfrac{S}{n}, x_2, ..., x_n\right)$. (1)

Továbbá $x_2 + x_3 + ... + x_n = S - \dfrac{S}{n} = \dfrac{(n-1)S}{n}$.

Az előbbiek mintájára rögzítsük az $x_4, x_5, ..., x_n$

számokat, az x_2, x_3 pedig legyen változó. Tehát az $x_2+x_3=\frac{(n-1)S}{n}-(x_4+x_5+\ldots+x_n)$ állandó. Továbbá az x_3-x_2 csökkenése a $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szorzat növekedését idézi elő. De $x_2\le\frac{(n-1)S}{n}:(n-1)=\frac{S}{n}$, így az előzőek alapján azt kapjuk, hogy $P\left(\frac{S}{n}, x_2, \ldots, x_n\right)\le$ $\le P\left(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, x_3, \ldots, x_n\right)$. (2)

Könnyen belátható, hogy ha tovább folytatjuk az eljárást, akkor végül is

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\le P\left(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, \ldots, \frac{S}{n}\right)=\left(\frac{S}{n}\right)^n$$

adódik, ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget jelenti.

Megjegyzések: A bizonyítottakból megállapíthatók, hogy:

1. Ha az $x_1+x_2+\ldots+x_n=S$ összeg állandó, akkor a $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$ szorzat akkor a legnagyobb, ha $x_1=x_2=$ $=\ldots=x_n$.
2. Ha az $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=P$ szorzat állandó, akkor az $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x_1+x_2+\ldots+x_n$ összeg akkor a legkisebb, ha $x_1=x_2=$ $=\ldots=x_n$.

4. Alkalmazás: Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n\ge 0$ és $\sum_{i=1}^{n}x_i=\pi$, akkor $\prod_{i=1}^{n}\sin x_i\le\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n$.

Bizonyítás: A szimmetria miatt feltételezhető, hogy $0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ (1). Rögzítsük az x_3, x_4, ..., x_n értékeket, így $x_1+x_2=S$ állandó (2), ahol $S=\pi-\sum_{i=3}^{n}x_i$. Legyen továbbá $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$ $=\prod_{i=1}^{n}\sin x_i$. Közelítsük az x_1, x_2 értékeket úgy, hogy az összegük S maradjon. Két ilyen érték tehát x_1+e és x_2-e, ahol $0<e<x_2-x_1$. Ekkor $E(x_1+e, x_2-e, \quad x_3, \ldots, x_n)-E(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$ $=\frac{1}{2}[\cos(x_2-x_1-2e)-\cos(x_2-x_1)]\cdot\prod_{i=3}^{n}\sin x_i$ (3). De $0<x_2-x_1-2e<x_2-x_1<\pi$, ezért $\cos(x_2-x_1-2e)>\cos(x_2-x_1)$, tehát a (3) sorában levő különbség pozitív. Tehát, ha x_2-x_1 csökken, és $x_1+x_2=S$ állandó, akkor $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ növekszik.

Az (1) és $\sum_{i=1}^{n}x_i=\pi$ alapján, $x_1\le\frac{\pi}{n}$ (ellenkező esetben $x_1+x_2+\ldots+x_n>\pi$ lenne).

Tehát a (2) feltétellel, az x_2-x_1 távolság a legkisebb, ha $x_1=\frac{\pi}{n}$. Így $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)\le$ $\le E\left(\frac{\pi}{n}, x_2, \ldots, x_n\right)$. Most az $x_2\le x_3\le\ldots\le x_n$, $x_2+x_3+\ldots+x_n=\frac{(n-1)\pi}{n}$ és $x_2+x_3=S$ (állandó) feltétel mellett megismételjük az eljárást és hasonlóan kapjuk, hogy $E\left(\frac{\pi}{n}, x_2, \ldots, x_n\right)\le$ $\le E\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}, x_3, \ldots, x_n\right)$. Még $(n-1)$-szer megismételve az eljárást, végül is a láncszabály alapján azt kapjuk, hogy $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)\le$ $\le E\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}, \ldots, \frac{\pi}{n}\right)=\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n$, vagyis éppen amit bizonyítani akartunk.

5. Alkalmazás: Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n\ge 0$ és $\prod_{i=1}^{n}x_i=x^n$, akkor $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\ge(1+x)^n$.

Bizonyítás: Feltételezzük, hogy $0\le x_1\le x_2\le$ $\le\ldots\le x_n$ (1). Rögzítsük az $x_3, x_4, \ldots, x_n$ értékeket, így $x_1\cdot x_2=P$ (2) állandó, ahol $P=x^n:(x_3x_4\ldots x_n)$. Legyen $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$ $=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$, $k>1$ és $k^2<\frac{x_2}{x_1}$. Ekkor kx_1 közelebb van az $\frac{x_2}{k}$ számhoz, mint az x_1 az x_2-höz, és $1 < k < \frac{x_2}{x_1}$. Tehát felírható, hogy:

$$E\left(kx_1, \frac{x_2}{k}, x_3, \ldots, x_n\right) - E(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{x_1}{k}(1-k)\left(\frac{x_2}{x_1} - k\right)\prod_{i=3}^{n}(1+x_i) < 0.$$

Tehát, ha az x_1, x_2 értékeket úgy közelítjük egymáshoz, hogy a szorzatuk $P = x_1 \cdot x_2$ állandó marad, az $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kifejezés csökken. A $\prod_{i=1}^{n} x_i = x^n$ és az (1) alapján biztosan igaz, hogy $x_1 \leq x$. Tehát az $x_2 - x_1$ különbség a legkisebb, ha $x_1 = x$, így $E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq E(x, x_2, \ldots, x_n)$. Az eljárás ismételt alkalmazásával, a láncszabály alapján azt kapjuk, hogy $E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq$ $\geq E(x, x, \ldots, x) = (1+x)^n$. Ezzel tulajdonképpen a $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq \left(1 + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)^n$ egyenlőtlenséget igazoltuk.

A továbbiakban bizonyos megszorításokkal szorzatok legkisebb, vagy összegek legnagyobb értékét vizsgáljuk.

6. Alkalmazás: Határozzuk meg az $S(x, y, z) = x + y + z$ összeg maximumát, ha $x, y, z \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$ és $x \cdot y \cdot z = 1$.

Megoldás: Feltételezzük, hogy $0 < x \leq y \leq z \leq \frac{3}{2}$. Rögzítsük a z értékét és x, y maradjon változó. Ekkor $x \cdot y = \frac{1}{z}$ állandó. Ha az $y - x$ különbség növekszik, akkor az $S(x, y, z)$ összeg csökken. Az $y - x$ különbség annál nagyobb, minél kisebb az x értéke. Mivel $x = \frac{1}{yz} \geq \frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{4}{9}$, ezért $x = \frac{4}{9}$ a legkisebb elérhető érték. Így $S(x, y, z) \leq S\left(\frac{4}{9}, y, z\right) = \frac{4}{9} + y + z$. Ezúttal most $y \cdot z = \frac{9}{4}$, és a $z - y$ különbség növekedésével az $y + z$ összeg csökken. Mivel $y = \frac{9}{4z} \geq \frac{9}{4\cdot\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$, ezért $y = \frac{3}{2}$ a legkisebb elérhető érték. De ekkor az $y \cdot z = \frac{9}{4}$ alapján $z = \frac{3}{2}$, tehát $S(x, y, z) \leq$ $\leq S\left(\frac{4}{9}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{4}{9} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{31}{9}$.

7. Alkalmazás: Ha $x, y, z \geq 0$ és $x + y + z = 1$, akkor $\frac{yz}{x+1} + \frac{zx}{y+1} + \frac{xy}{z+1} \leq \frac{1}{4}$.

Bizonyítás: A feladatot átírva azt kapjuk, hogy:

$$xy + yz + zx - xyz\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

Ha most alkalmazzuk az $x + 1$, $y + 1$, $z + 1$ értékekre a számtani és a harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget, akkor

$$\frac{3}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}} \leq$$

$$\leq \frac{x+1+y+1+z+1}{3} = \frac{4}{3}$$

vagyis $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{4}$. Így ha $x, y, z \geq 0$ és $x + y + z = 1$, elegendő bizonyítani, hogy

$$E(x, y, z) = xy + yz + zx - \frac{9}{4}xyz \leq \frac{1}{4}. \quad (*)$$

Feltételezzük, hogy $0 < x \le y \le z$ (1), és rögzítsük a z értékét. Tehát $x + y = 1 - z$ (állandó) (2). Közelítsük az $x < y$ értékeket egymáshoz úgy, hogy közben az összeg változatlan maradjon. Ekkor tehát

$$E(x+e, y-e, z) - E(x, y, z) =$$
$$= e(y-x-e)\left(1-\frac{9}{4}z\right), \quad (**)$$

ahol $0 < e < y - x$. Ennek alapján:

1. Ha $z < \frac{4}{9}$, a (**) különbség pozitív, így $E(x, y, z)$ akkor növekszik, ha az x és az y közeledik egymáshoz. Az $x + y + z = 1$ és (1) miatt $x \le \frac{1}{3}$, a (2) alapján az x legközelebb van az y-hoz, ha $x = \frac{1}{3}$. Tehát $E(x, y, z) \le E\left(\frac{1}{3}, y, z\right)$, ahol $y + z = \frac{2}{3}$ és $y \le z$. Hasonlóan $y \le \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$, így az y a legközelebb áll a z-hez, ha $y = \frac{1}{3}$, ezért $z = \frac{1}{3}$.
   Tehát $E\left(\frac{1}{3}, y, z\right) \le E\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$.

2. Ha $z > \frac{4}{9}$, akkor a (**) különbség negatív, így $E(x, y, z)$ akkor növekszik, ha x-et és y-t távolítjuk egymástól, persze $x + y = 1 - z$ állandó marad. Az (1) és (2) miatt az $x = 0$, az y-tól a legtávolabbi értéket adja. Így $E(x, y, z) \le E(0, y, z) = yz$, ahol $y + z = 1$ és $y \le z$. Most az y-t és a z-t közelítenünk kell egymáshoz. De $y \le \frac{1}{2}$ miatt a legközelebbi y érték a z-hez, az $y = \frac{1}{2}$, ahonnan $z = \frac{1}{2}$.

Tehát $E(0, y, z) \le E\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Ezek szerint $E(x, y, z)$ maximális, ha $x = y = z = \frac{1}{3}$ vagy $x = 0$, $y = z = \frac{1}{2}$, és a szimmetria miatt, ennek a cirkuláris permutációi.

8. Alkalmazás: Határozzuk meg az $E(u, v, w) = (1 + u)(1 + v)(1 + w)$ kifejezés legkisebb értékét, ha $u, v, w \in \left[0, \frac{7}{16}\right]$ és $u + v + w = 1$.

Megoldás: Feltételezzük, hogy $0 \le u \le v \le w \le \frac{7}{16}$ (1). Rögzítsük a w-t, legyen $u < v$, miközben $u + v = 1 - w$ állandó (2). Közelítsük egymáshoz az u-t és a v-t úgy, hogy az összegük maradjon állandó. Ekkor felírható, hogy

$$E(u+e, v-e, w) - E(u, v, w) =$$
$$= e(1+w)(v-u-e) > 0,$$

ami azt jelenti, hogy $E(u, v, w)$ növekszik, így a minimum meghatározásánál ez nem segít. Távolítsuk hát az u-t és a v-t úgy, hogy az összegük maradjon állandó. Ekkor az $u + v = 1 - w$ és (1) feltételek mellett a v-től a legtávolabbra eső u érték nem 0, hiszen $u = 0$ esetén $v + w = 1$ lenne, ahonnan $w \ge \frac{1}{2}$ lenne, ami ellentmond a $w \le \frac{7}{16}$ feltételnek. Mivel $1 - u = v + w \le \frac{7}{16} + \frac{7}{16}$, ezért $\frac{1}{8} \le u$, így $u = \frac{1}{8}$ a megfelelő.

Ekkor $E(u, v, w) \ge E\left(\frac{1}{8}, v, w\right)$, $\frac{1}{8} \le v \le w \le \frac{7}{27}$ és $v + w = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ (3). További csökkentés végett a w és v közötti távolságot ismét növelni kell. Mivel $\frac{7}{8} - v = w \le \frac{7}{16} \Rightarrow \frac{7}{16} \le v$, ezért $v = \frac{7}{16}$ a legközelebbi v érték a w-hez, és a (3) alapján $w = \frac{7}{16}$. Tehát $E\left(\frac{1}{8}, v, w\right) \ge E\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16}\right) = \frac{9}{8}\left(\frac{23}{16}\right)^2$.

Ezek szerint $E(u, v, w)$ akkor a legkisebb, ha $u = \frac{1}{8}$, $v = w = \frac{7}{16}$ és ennek a cirkuláris permutációi.

A módszer jobb elmélyítése végett az érdeklődő Olvasónak a következő feladatok megoldását javasoljuk:

1. Ha $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, 1]$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$, akkor $1 - S \le \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \le \frac{1}{1+S}$.

2. Ha $x_1, x_2, ..., x_n > 0$, és $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, akkor $\prod_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i) \le \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$.

3. Ha $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, 1)$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, akkor $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} \ge \frac{n^2}{n-1}$.

4. Ha $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, 1)$, akkor $\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) > 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$.

5. $x_1, x_2, ..., x_n > 1$, és $\prod_{i=1}^{n} x_i = x^n$, akkor $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} \ge \frac{n}{1+x}$.

Amennyiben $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, 1)$, akkor az egyenlőtlenség fordított irányú.

6. Ha $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$, akkor $\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_i}\right) \ge \left(1 + \frac{n}{S}\right)^n$.

7. Ha $x, y, z \ge 0$ és $x + y + z = 1$, akkor $5(x^2 + y^2 + z^2) + 18xyz \ge \frac{7}{3}$.

8. Ha $x, y, z \ge 0$ és $x + y + z = 1$, akkor $0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}$.

9. Ha $x, y, z \in \left[1, \frac{23}{16}\right]$ és $x + y + z = 4$, határozzuk meg az $F(x, y, z) = xyz$ kifejezés legkisebb értékét.

Forrásanyag:

[1] Mircea Ganga (1991): Teme si probleme de matematica. Editura Tehnica, Bucuresti, 117–123.

[2] L. Panaitopol és társai (1996): Egyenlőtlenségek (magyarra fordította András Szilárd). Gil Könyvkiadó, Zilah

Csiszár Zoltán

A római számok eredete

Kivonat

Ebben a cikkben megismerkedünk a római számok eredetével. Megvilágítjuk szoros kapcsolatát az etruszk és a székely-magyar számrovással. Ezek után bemutatásra kerül a római számolótábla, majd végül néhány egyszerű példán keresztül megmutatjuk, hogy hogyan lehet rovásszámokat egymással összeadni és szorozni.

Abstract

In this article we will learn about the origins of Roman numerals. Elucidated the close relationship between the Etruscan and Szekely-Hungarian runic numbers. After that will be presented to the roman abacus, and finally we will show some simple examples of how to runic numbers added and multiplied together.

* * *

Mindannyian kisiskolás korunk óta jól ismerjük őket. A V, X, L, C betűk és társaik ott ragyognak megannyi közintézményünk épületének homlokzatán, ennyi év távlatából is dicsőítve a Római Birodalom egykori nagyságát, és jelképezve máig tartó civilizációs hatását.

De vajon tényleg ismerjük-e ezt a számábrázolást? Tudjuk-e, hogy honnan származik, miként lett azzá, ahogyan most találkozunk vele?

Remélem, mire a cikk végére érünk, sikerül jobban megismerkednünk a római számok világával, és egy kicsit sajátunknak is érezzük majd, mint a Székely-Magyar Számrovás egyik leghíresebb leszármazottját.

Ehhez azonban mélyen vissza kell nyúlnunk az időbe. Abba a korba, amikor megkezdődik i. e. 1900 körül az Észak-Balkán felől az indoeurópai akháj törzsek bevándorlása a mai Görögország területére. Támadásaik nyomán i. e. 1450 körül megsemmisül a Krétai Kultúra. Létre jön legfontosabb központjuk, Mükéné. Kis-Ázsiában virágzik a Hettita birodalom, szoros kereskedelmi és kulturális kapcsolatokat ápolva a kor másik legendás nagy városállamával, Trójával.

Ám amikor az i. e.1200 körül az indoeurópai bevándorlás második hullámában újabb északi akháj törzsek törnek a vidékre, egy újabb nagy népmozgás veszi kezdetét. A részben Szicíliában megtelepedő szikulok, a Szardínia szigetén megtelepedő szárdok, és a Tróját (hettita nyelven Taruisa) megalapító turusa-k vagy öszszefoglaló nevükön az ún. tengeri népek egymás és a szomszéd népek ellen vezetett ismétlődő támadásai (kalandozások) átrendezik a mediterráneum hatalmi viszonyait.

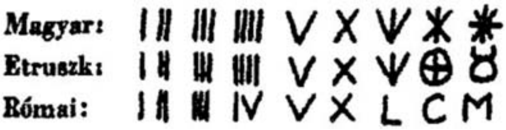
A Hettita Birodalom és Ugarit összeomlik, és még Egyiptomot is támadások érik. Számunkra azonban a legfontosabb esemény, hogy mint azt az Iliaszból is tudjuk, az akhájok elfoglalják és lerombolják Tróját. A vereség után a trójaiak egy része Észak-Itáliába vándorol, és az itt talált latin pásztortörzsekre telepedve megalapítja az etruszk városállamok évszázadokon át fennálló laza szövetségét, ami i. e. 1100-tól fokozatosan jelentős tengeri hatalmat épít ki, de végül i. e. 500 körül előbb görög, majd végül római befolyás alá kerül. Maga Róma városának első királyai is etruszk származásúak voltak, sőt a római eredetmítosz is trójai származást említ.

De mindezek hogyan kapcsolódnak a római számok eredetéhez?

Ezen történelmi események alapján válik érthetővé, hogy i. e. 1500 körül a Fekete-tenger északi partján, a Kaukázustól a Kárpátok előteréig jelen lévő, és a Kárpát-medencében mind a mai napig fennmaradt nomád eredetű számrovás hogyan bukkanhatott fel az etruszk nép számírásaként, amiből azután kialakult a klasszikus római számírás. Külön érdekesség az esetleges szikul $\stackrel{?}{=}$ sicul $\stackrel{?}{=}$ székely nép azonosságának kérdése. Egy biztos: a magyar törzseket erős és maradandó civilizációs hatások érték az ezen népekkel, néptöredékekkel való találkozásuk, egybeolvadásuk során.

Témánkat szorosan nem érinti, de e civlizációs hatás egy másik bizonyítékaként megemlíthető egyedülálló, a mai európai népektől teljesen különböző eredetű Isten szavunknak az etruszk Tin vihar(villám)istennel, vagy a hettita Isztanu-val és a hatti Estan-nal való párhuzama. Az Isten nyila kifejezés is jól példázza ezt a párhuzamot, ami akháj(zeuszi) isten-attribútumokra utal. Persze az e népekkel rokon elnevezés a még ennél is ősibb akkád nyelv egy, egyedüli, első jelentésű ištçn szavára vezethető vissza. Ezzel áll párhuzamban egyház szavunk jelentése is.

A következőkben vizsgáljuk meg közelebbről a három számrovást az alábbi összehasonlító ábra segítségével (a számok balról jobbra irányban):



Belső logikája alapján mindhárom számírás az egyiptomihoz hasonlóan additív rendszer, de a rómaiban már megjelenik a sok azonos jel egymás utáni ismétlésének elkerülésére a kivonás is (szubtrakció). Meg kell azonban említenünk, hogy ez csak jóval később lett általánosan elfogadott.

A ma is használatos latin számsorban kezdetben még a **IV**, **IX**, **XC** számokat etruszk és magyar módra így használták: **IIII**, **VIIII**, **LXXXX**.

Láthatjuk, hogy az etruszk és a magyar számrovás ötvenig tökéletesen megegyezik.

Eltérés csupán az ezres számjegyben mutatkozik, de az is látható, hogy a magyar számrovás tipográfiailag egységesebb, tehát eredetibb képet mutat, mint az etruszk rendszer.

Az etruszk számrovást a latinok teljesen átvették, és csak később hajtottak rajta végre kisebb változtatást görög mintára úgy, hogy az 50, 100, 500 és 1000 számokra betűjeleket használtak, de továbbra is megmaradt etruszk szerkezete. A görögök a számok leírásához is az ábécé betűit használták.

Kezdetben a számok sorvezetése is jobbról balra történt, csak később a latinok fordították meg azt, amikor áttértek mai írásunknak megfelelően a balról jobbra való sorvezetésre. Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy az ábrán látható sorrend egyben időrendi egymásutániságot is jelent. Tehát az alaktanilag is egységes magyar számrendszer későbbi változatait látjuk viszont az etruszkban, majd a rómaiban (latinban).

De hogyan maradhatott fenn ez az ősi rendszer több évezreden keresztül?

Mert szükség volt rá, használatban volt. A fokozatosan visszaszoruló számrovásunknak a középkorban még széles körű alkalmazása sokoldalúan bizonyított, különösen az adószedésben, a közigazgatási számvitelben. Az állami adószedők ugyan már az Anjou-korban írott lajstromokkal és levelekkel vették számba és nyugtatták a beszedett adót, alacsonyabb közigazgatási szinteken azonban a nép írástudatlansága miatt a népi rovásokat is vezetni kellett. Egy léc oldalára felrótták a tartozást, majd a lécet kettéhasították. Mindkét szerződő fél magánál tartotta egy-egy darabját, amivel bizonyíthatta igazát. Meghamisítani nem lehetett, hiszen a hasadás egyedisége bizonyító erejű volt. Még a 15. sz.-ban is királyi dekrétum írta elő, hogy a falusi bírák a rovásnyeleket (capita dicarum; a páros rovások közül a fejes rész) minden vármegyében háromévenként, írásos lajstrommal kísérve, megyei összesítésre benyújtani kötelesek.

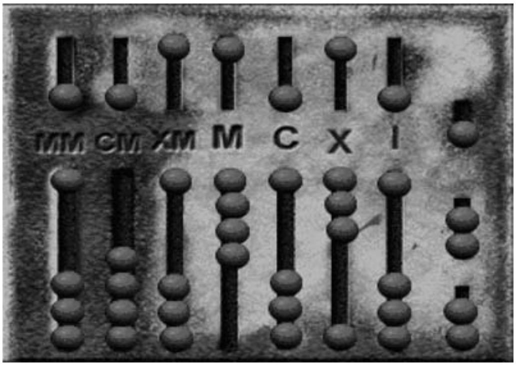
Nyelvünk is mind a mai napig őrzi e gyakorlat emlékét, gondoljunk csak a „felrótták neki.”, „sok van a rovásán”, „kirótták az adót” kifejezésekre.

Az írásbeliség elterjedése végül teljesen háttérbe szorította a rovásokat, a rovásnyelek már mind rég elkorhadtak, és csak elvétve bukkanak fel néha régi feliratokon, mégis fontosnak érzem, hogy mint nemzeti örökségünk egy darabkájáról, a római számok tanításakor megemlékezzünk róluk.

Manapság is elvárás, hogy a tanulók ismerjék a római számok jeleit, és megismerve azokat képesek legyenek nagyobb számok, például évszámok kiolvasására is. Érdemes melléjük odacsempésznünk a rovásszámokat is. Hasznos lehet ezen számrovásokkal történő „küszködés” a helyiértékes írásmód előkészítésére is, hogy a diákok megértsék annak számtalan, a mindennapokban természetesnek tűnő előnyét.

A következőkben vizsgáljuk meg, hogyan lehet egyszerű matematikai műveleteket végezni római számokkal, illetve számrovással!

A rómaiak ránk maradt számolótáblái csiszolt kőlapok, márványtáblák voltak, amelyeken kavicsokkal (calculi) számoltak. Innen erednek a latin calculus (számolás), calculare (számolni) stb. szavak, amelyeknek a módosulatai a modern európai nyelvekben is megtalálhatók. A helyiértékek a római számírást követve az egységeknek feleltek meg. Az alábbi táblán a IMM.VIXM.IVM.C.LXXX.I = 1 064 181 számot jelöltük.

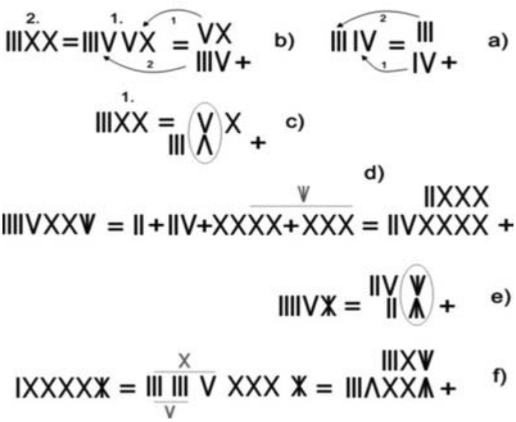


A felső csúszkák az ötös jelölők, míg az alsók az egyes jelölők. A tábla jobb szélén lévőkkel a törteket számolták.

A következőkben nézzük meg, hogyan adhatunk össze római, ill. rovásszámokat írásban!

Az alábbi ábra rovásszámok összeadását szemlélteti. Mint látható, egymás után írjuk az összeadandó két szám számjegyeit értékük szerint, majd összevonással egyszerűsítjük a számot.

Összeadás 100 alatti számokkal



A római, ill. rovásszámok szorzásához a már az egyiptomi Rhind papiruszon is szereplő, úgynevezett Orosz módszert alkalmazhatjuk.

A lényege, hogy az egyik tényezőt többször felezzük, míg a másik tényezőt ugyanakkor megkétszerezzük.

A következőkben nézzünk meg két példát római számok szorzására:

Például:

$32 \cdot 17 = 544$ XXXII · XVII = DXLIV

32	17	XXXII	XVII
16	34	XVI	XXXIV
8	68	VIII	LXVIII
4	136	IV	CXXXVI
2	272	II	CCLXXII
1	544	I	DXLIV

Ha az eljárás során páratlan számot kell feleznünk: eggyel kevesebbet kell venni és azt a számot megfelezni. A páratlan számokhoz tartozó duplázott számot viszont meg kell jelölni, és az utolsó duplázásként kapott számhoz hozzáadni.

Például:

$19 \cdot 17 = 323$ XIX · XVII = CCCXXIII

19	17*	XIX	XVII*
9	34*	IX	XXXIV*
4	68	IV	LXVIII
2	136	II	CXXXVI
1	272	I	CCLXXII

$272 + 17 + 34 = 323$ CCLXXII + XVII + + XXXIV = CCCXXIII

Remélem, élvezték rövid kalandozásunkat a történelem és a matematika határain!
Ha sikerült felkeltenem az érdeklődésüket, további hasznos információkat találnak a http://www.rovasirasforrai.hu/Rovasiras/Muveletek-rovasszamokkal.htm oldalon, vagy a wikipedia-n: http://hu.wikipedia.org/.

Dr. Kántor Sándorné

A 2012/2013. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

A versenyről

A 2012/2013. tanévben 2012. november 14-én került megrendezésre a Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Verseny a DE Matematikai Intézete és a BJMT H-B megyei Tagozata közös szervezésében. A verseny szponzorai a DE Matematikai Intézete, Informatikai Kara és a Bolyai János Matematikai Társulat Hajdú-Bihar megyei Tagozata és a Neumann János Számítógép-tudományi Társaság Hajdú-Bihar megyei Tagozata voltak.

A versenyre a város és a megye 25 középiskolája nevezett be, és közel 900 tanuló vett részt rajta. Ebben a tanévben előzetes regisztrációt kértünk a megyei versenyen való részvételhez a www.math.klte./modszertan/megyeiverseny weboldalon. Az országos matematikaversenyek rendszeréhez hasonlóan évfolyamonként három kategóriában értékeltük a tanulók dolgozatait: I. kategória, II. kategória és III. kategória (speciális matematika tagozat).

Az 5 feladatból álló feladatsor kidolgozására 3 óra állt a versenyzők rendelkezésére. A tanulók függvénytáblázatot, zsebszámológépet (olyat, amelyik szöveges feladatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas), vonalzót és körzőt használhattak segédeszközként. A felhasznált segédeszközökre a matematika írásbeli érettségi szabályait tekintettük érvényesnek.

Bármely feladat esetén csak egy megoldást értékeltünk. Ezeket az információkat a versenyfelhívásban előre közöltük.

Egy-egy feladatsor összpontszáma minden esetben 60 pont volt. A tanulók a dolgozatot saját iskolájukban írták, és tanáraik javították ki, majd a legalább 30 pontos dolgozatokat, vagy ha ilyen nem volt, akkor az adott évfolyamról a legjobb iskolai dolgozatot továbbították a versenybizottsághoz.

101 dolgozat érkezett be 13 iskolából a következő megoszlásban: 9. évfolyam 26 dolgozat, 10. évfolyam 24 dolgozat, 11. évfolyam 23 dolgozat, 12. évfolyam 28 dolgozat.

Ebben a tanévben a feladatsorok színvonala az eredményesség szempontjából lényegében azonos volt. Mindegyik sorozatban voltak könynyebben és nehezebben megoldható feladatok.

A versenybizottság jónak értékelte a tanulók teljesítményét. A 2012/2013. tanévben 14 iskolából 31 tanárt és 50 diákot részesített helyezésben vagy dicséretben. 14 első, 12 második, 9 harmadik helyezést értek el a tanulók, és 15-en kaptak dicséretet. A 9. évfolyamról 14 tanuló, a 10. évfolyamról 11 tanuló, a 11. évfolyamról 13 tanuló és a 12. évfolyamról 12 tanuló teljesítményét ítéltük kiválónak.

Maximális, azaz 60 pontszámú dolgozatot írtak a III. kategóriából: Teski Tamara (Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen, 9. évf.), Almási Péter (Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen, 10. évf.), Nagy Vendel (Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen, 11. évf.), Varnyú József (Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen, 12. évf.).

Majdnem maximális pontszámú dolgozatot írtak a II. kategóriából: Ulveczki Balázs (Hőgyes E. Gimnázium, Hajdúszoboszló, 11. évf.), Kovács Dániel (Tóth Árpád Gimnázium, Debrecen, 12. évf.).

A feladatsorokat a DE Matematikai Intézetének oktatói állították össze: 9. évfolyamon Herendiné Dr. Kónya Eszter, 10. évfolyamon

Dr. Kántor Sándor, 11. évfolyamon Dr. Bessenyei Mihály, 12. évfolyamon Dr. Kántor Sándorné.

A versenybizottság vezetői Dr. Kántor Sándorné és Herendiné Dr. Kónya Eszter voltak.

A feladatsorok lektorai: Balla Éva, Dankó Sándor, Deli Lajos és Károlyné Teleki Anikó, a hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnázium tanárai.

Versenyeredmények, helyezések

9. évfolyam

I. kategória
I. helyezett: **Illyés Gabriella** (Tóth Árpád Gimnázium),
II. helyezett: **Sotkovszki Réka** (Tóth Árpád Gimnázium)

II. kategória
I. helyezett: **Szathmári Balázs** (DE Kossuth Gimn.),
II. helyezett: **Varga Péter** (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló)
III. helyezett: **Molnár Nóra** (Debreceni Ref. Kollégium Gimn.) és **Kurgyis Pál** (Debreceni Ref. Kollégium Gimn.)

III. kategória speciális matematika tagozat
(Fazekas Mihály Gimn. Debrecen):
I. helyezett: **Teski Tamara**,
II. helyezett: **Zatik Vilmos**, **Borza Marcell** és **Szántó Imre**.

10. évfolyam

I. kategória
I. helyezett: **Berdó Dániel** (DE Kossuth Gimn.),
II. helyezett: **Herendi Zsolt** (DE Kossuth Gimn.)

II. kategória
I. helyezett: **Koncz Imre** (Debreceni Ref. Kollégium Gimn.) és **Kocsis Péter** (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló)

III. kategória speciális matematika tagozat
(Fazekas Mihály Gimn. Debrecen):
I. helyezett: **Almási Péter,**
II. helyezett: **Kátay Tamás**.

11. évfolyam

I. kategória
I. helyezett: **Szűcs Éva** (Bethlen Gábor Közgazd. Szakközépiskola) és **Uzonyi Noémi** (Mechwart Gépipari és Informatikai SZKI).

II. kategória
I. helyezett: **Ulveczky Balázs** (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló)**,**
II. helyezett: **Seress Dániel** (Dóczy Gedeon Ref. Gimn.),
III. helyezett: **Kántor Tamás** (Tóth Árpád Gimnázium)

III. kategória speciális matematika tagozat
(Fazekas Mihály Gimn. Debrecen):
I. helyezett: **Nagy Vendel**,
II. helyezett: **Panyi Dávid**,
III. helyezett: **Varga Dániel**.

12. évfolyam

I. kategória
I. helyezett: **Pánya Nándor** (Bethlen Gábor Közgazd. Szakközépiskola),
II. helyezett: **Haimhoffer Ádám** (Ady Endre Gimnázium)

II. kategória
I. helyezett: **Kovács Dániel** (Tóth Árpád Gimnázium)**,**
II. helyezett: **Dávid Bernadett** (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló),
III. helyezett: **Nagy Imre** (Bocskai Gimn. Hajdúböszörmény), **Kacsó Zoltán** (Bocskai Gimn. Hajdúböszörmény) és **Papp Ádám** (Bocskai Gimn. Hajdúböszörmény)

III. kategória speciális matematika tagozat
(Fazekas Mihály Gimn. Debrecen):
I. helyezett: **Varnyú József**,
II. helyezett: **Szilágyi Gergely**,
III. helyezett: **Nemkin Viktória** és **Erdész Balázs**.

Az egyes évfolyamok feladatsorai

9. évfolyam

1. János bácsi elindult kerékpárral Nekeresdfalváról a legközelebbi vasútállomásra. Miután az első óra alatt 12 km utat tett meg, kiszámolta, hogy ezzel a sebességgel 5 percet fog késni. Ezért a hátralévő távolságot 16 km/h sebességgel tette meg, így 15 perccel hamarabb érkezett. Hány km-re van az állomástól Nekeresdfalva?

10 pont

2. Ha két természetes szám szorzatához öszszegüket adjuk, 2012-t kapunk. Melyik ez a két szám?

10 pont

3. Egy játékgyár olyan naptárt készít, amelyen a napok sorszámát két kockán lévő számok jelzik. Mindkét kockának minden lapjára egy-egy számjegyet írnak, és a kocka egy-egy lapjának egymás mellé helyezése mutatja a megfelelő nap dátumát. Például augusztus 9-ét: az augusztus hónapot egy külön tábla mutatja, 9-ét az egyik kockán 0 számjegy és a másik kockán egy 9-es számjegy jelzi.
Milyen számokat kell a kockákra festeni, ha a 9-es 6-osnak is olvasható és fordítva?
Hány különböző kockapár készíthető, ha az említett feltételek mellett minden naptári számot ki akarunk rakni? (Nem tekintjük különbözőnek azokat a kockákat, amelyeken ugyanazok a számok másképpen vannak elhelyezve.)

12 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor n^4+14n^2+49 osztható 64-gyel.

14 pont

5. Az ABC háromszög A csúcsánál lévő szöge $150°$, B-ből induló magasságának talppontja M_1, C-ből induló magasságának talppontja M_2, AB oldalának felezőpontja F_1, AC oldalának felezőpontja F_2. Bizonyítsuk be, hogy az M_1F_1 és az M_2F_2 egyenesek egymásra merőlegesek!

14 pont

10. évfolyam

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$|x-2012|-|x-2013|=$$
$$=|2013-x|-|2012-x|$$

8 pont

2. Mennyi az alábbi S összeg értéke?

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

10 pont

3. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja O. Igazolja, hogy az ABO és CDO háromszögek területének szorzata egyenlő a BCO és DAO háromszögek területének szorzatával!

12 pont

4. Mely x egész szám esetén lesz $\dfrac{2x+1}{3x+1}$ is és $\dfrac{x-2}{4x+1}$ is egész szám?

14 pont

5. Az ABC háromszög BC oldalának egyik belső pontja P. Az AP egyenes az ABC háromszög köré írt körét a Q pontban ($Q \neq A$) metszi. Adja meg azt a P pontot, amelyre $\dfrac{AP}{PQ}$ minimális!

16 pont

11. évfolyam

1. Melyik valós számmal egyenlő az alábbi kifejezés?

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

8 pont

2. Milyen p prímszámok esetén lesz p^2+2 szintén prímszám?

10 pont

3. Oldja meg a valós számok nem üres, véges részhalmazainak halmazán az $A+A=2A$ egyenletet, ahol A, $B\subset\mathbb{R}$ és $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\},$$
$$\lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

12 pont

4. Létezik-e a síkon olyan nyolc elemből álló ponthalmaz, melynek bármely három pontja nincs közös egyenesen, és amelynek pontjai által meghatározott egyenlő szárú háromszögek száma legalább negyven?

14 pont

5. Legyen $x_1 = 1$ és $y_1 = 2$, továbbá legyen $x_{n+1} = H(x_n, y_n)$, valamint $y_{n+1} = A(x_n, y_n)$, ahol H, illetve A jelöli a harmonikus, illetve számtani közepet. Határozza meg mindazon α valós számokat, amelyekre minden n pozitív egész szám esetén $\alpha \in [x_n, y_n]$ teljesül!

16 pont

12. évfolyam

1. Egy számtani sorozat első n tagjának összege A, első $2n$ tagjának összege B. Fejezze ki A és B segítségével az első $3n$ tag összegét!

8 pont

2. Attila és Bea vasárnap délelőtt 10 és fél 11 közötti egy igen fontos üggyel kapcsolatos találkozót beszél meg, amelyre mindketten biztosan elmennek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a korábban érkező nem vár 10 percnél többet a másikra, ha mindketten betartják a megbeszélt időintervallumot?

10 pont

3. Határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + x^2} + \sqrt{(x-1)^2 + x^2}$$

függvény minimumának helyét és értékét!

12 pont

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$(\sin(x - y) + 1)(2\cos(2x - y) + 1) = 6$$

14 pont

5. Egy négyzet alapú egyenes gúla alapélének és testmagasságának hossza egész szám. Mekkora a gúla térfogata, ha felszínének és térfogatának azonos a mérőszáma?

16 pont

Megoldások

9. évfolyam

1. Jelöljük s-sel a Nekeresdfalva és az állomás közötti távolságot, valamint t-vel a vonat indulásáig hátralévő időt órában. János bácsi végig 12 km/h átlagsebességgel haladva 5 percet, azaz 1/12 órát késne, a távolság km-ben: $s = 12(t + 1/12)$.

Mivel 1 óra alatt megtett 12 km-t, már csak $(s - 12)$ km van hátra, ehhez $(t - 1)$ óra ideje maradt, de tudjuk, hogy ekkor 15 perccel (1/4 óra) hamarabb érkezik. Tehát a távolság km-ben: $s = 12 + 16(t - 1 - 1/4)$.

A két egyenletből $12t + 1 = 12 + 16t - 16 - 4$, $4t = 9$, $t = 9/4$ óra $= 2$ óra 15 perc a vonat indulásáig hátralévő idő.

$s = 12(9/4 + 1/12) = 28$ km Nekeresdfalva és a vasútállomás távolsága.

Ellenőrzés: 28 km-t 12 km/h sebességgel 7/3 óra, azaz 2 óra 20 perc alatt lehet megtenni. Ez valóban 5 perccel több a 2 óra 15 percnél. Ha a 28 km-ből 1 óra alatt 12 km-t teszünk meg, még 16 km marad hátra, amit további 1 óra alatt lehet megtenni 16 km/h sebességgel. Ez összesen 2 óra, ami valóban 15 perccel kevesebb a 2 óra 15 percnél.

2. Legyen $a; b \in \mathbb{N}$, $ab + a + b = 2012$. Adjunk mindkét oldalhoz 1-et, majd alakítsuk szorzattá a jobb oldalt: $ab + a + b + 1 = 2013$, $(a + 1)(b + 1) = 2013$.

A jobb oldalon két természetes szám szorzata szerepel, ezért bontsuk fel a 2013-at is két természetes szám szorzatára az összes lehetséges módon.

A 2013 prímtényezős felbontása: $3 \cdot 11 \cdot 61$, ezért a lehetséges kéttényezős szorzatok, és ezeknek megfelelően a megoldások:

- $(a + 1)(b + 1) = 1 \cdot 2013$, tehát $a = 0$, $b = 2012$, vagy $a = 2012$, $b = 0$.
- $(a + 1)(b + 1) = 3 \cdot 671$, tehát $a = 2$, $b = 670$, vagy $a = 670$, $b = 2$.

- $(a + 1)(b + 1) = 11 \cdot 183$, tehát $a = 10$, $b = 182$, vagy $a = 182$, $b = 10$.
- $(a + 1)(b + 1) = 61 \cdot 33$, tehát $a = 60$, $b = 32$, vagy $a = 32$, $b = 60$.

A megoldás tehát 4 db számpár.
A számpárok szorzatához hozzáadva összegüket valóban 2012-t kapunk.

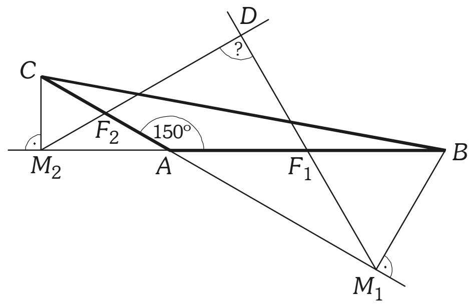
3. A 11 és a 22 csak akkor rakható ki, ha mindkét kockán szerepel az 1 és a 2.
A 01, 02, ..., 09 kirakása csak úgy lehetséges, ha a 0 mindkét kockán szerepel,mert ellenkező esetben a másik kockán az összes többi számjegynek szerepelnie kellene. Tehát a 0; 1; 2 számjegyek mindkét kockán rajta vannak. A többi 6 számjegyet (3, 4, 5, 6, 7, 8) tetszőlegesen eloszthatjuk a két kocka maradék 3-3 lapján. (9-re nincs külön szükségünk)
A 6 db számjegyből egy kockára tehát 3-at kell kiválasztanunk úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Az esetek tényleges felsorolásával, vagy formális következtetéssel 20 esetet kapunk.
Figyelembe véve, hogy ha az egyik kockára kiválasztjuk a 3 számjegyet, ezzel a másik kocka számjegyeit is meghatározzuk, a különböző kockapárok száma 20 : 2 = 10.

4. Mivel n páratlan természetes szám, felírható $n = 2k + 1$ alakban, ahol k tetszőleges természetes szám.
Alakítsuk át a kifejezést:

$$n^4 + 14n^2 + 49 = (n^2 + 7)^2 = [(2k + 1)^2 + 7]^2 =$$
$$= (4k^2 + 4k + 1 + 7)^2 = [4k(k + 1) + 8]^2.$$

Vizsgáljuk meg a kapott kifejezést a 64-gyel való oszthatóság szempontjából: k és $k + 1$ két egymást követő természetes szám, ezért szorzatuk mindig páros.
Egy páros szám négyszerese 8-cal osztható, ehhez 8-at hozzáadva az összeg is osztható lesz 8-cal. Egy 8-cal osztható számot négyzetre emelve 64-gyel osztható számot kapunk.

5. Rajzoljuk meg a háromszöget, jelöljük be a pontokat, jelölje D a M_2F_2 és az M_1F_1 egyenesek metszéspontját (*1. ábra*).



1. ábra

Az M_2AC derékszögű háromszög, A-nál lévő szöge 30°, C-nél lévő szöge 60°.
A háromszöget a 30°-os szög melletti befogóra tükrözve szabályos háromszöget kapnánk, ezért a CM_2 befogó fele az átfogónak. Ebből következik, hogy $CM_2 = CF_2 = F_2A$, mert F_2 az átfogó felezési pontja.
Így az M_2F_2C háromszögben a két egyenlő oldal által bezárt szög 60°, ami azt jelenti, hogy a háromszög szabályos, tehát másik két szöge is 60°.
Hasonlóan, az AM_1B derékszögű háromszöget az F_1 oldalfelező pont két olyan háromszögre bontja, melyek közül M_1BF_1 szabályos, tehát szögei 60°-osak.
Az AF_1DF_2 négyszögben így az F_1 és az F_2 csúcsoknál 60°-os szögek vannak. Mivel az A csúcsnál lévő szög 150°, figyelembe véve, hogy a négyszög belső szögeinek összege 360°, a D csúcsnál lévő szögre 90° adódik.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy az M_1F_1 és az M_2F_2 egyenesek merőlegesek egymásra.

10. évfolyam

1. Mivel $|x - 2012| = |2012 - x|$ és $|x - 2013| = |2013 - x|$, ezért az egyenlet ekvivalens az $|x - 2012| = |x - 2013|$ egyenlettel.
Ennek az egyenletnek az alakját vizsgáljuk három esetre bontva:

- Ha $x < 2012$, akkor az egyenlet $2012 - x = 2013 - x$, aminek nincs megoldása.

- Ha $2012 \le x \le 2013$, akkor az egyenlet $x - 2012 = 2013 - x$, aminek a megoldása $x = 2012{,}5$.
- Ha $2013 < x$, akkor az egyenlet $x - 2012 = x - 2013$, aminek nincs megoldása.

Tehát az eredeti egyenlet megoldása $x = 2012{,}5$.

2.

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{1}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{1})} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} +$$

$$+ \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{99}+\sqrt{100})(\sqrt{100}-\sqrt{99})} =$$

$$= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) =$$

$$= \sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1 = 9.$$

3. Legyen az A pont, illetve a C pont távolsága a BD egyenestől u, illetve v, $BO = p$, $DO = q$. Az ABO, CDO, BCO és DAO háromszögek területeinek szorzata rendre $\frac{1}{2}up$, $\frac{1}{2}vq$, $\frac{1}{2}vp$, $\frac{1}{2}uq$, ezért az ABO és CDO háromszögek területeinek szorzata $\frac{1}{4}upvq$, illetve a BCO és DAO háromszögek területeinek a szorzata $\frac{1}{4}uqvp$. A két szorzat nyilván egyenlő, így az igazolás megtörtént.

4. Ha $\frac{2x+1}{3x+1}$ egész, akkor $3 \cdot \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{6x+3}{3x+1} = 2 + \frac{1}{3x+1}$ is az. Mivel $\frac{1}{3x+1}$ egész x-re csak $x = 0$ esetén egész, és ekkor $\frac{x-2}{4x+1}$ is egész, ezért az $x = 0$ megfelel a feladat feltételeinek.

5. Az A, illetve Q pontból a BC egyenesre bocsátott merőleges talppontja E, illetve F.
Az $AEP_\triangle$ hasonló az $QFP_\triangle$-höz, mert két-két megfelelő szög egyenlő: P-nél csúcsszögek, E-nél, F-nél derékszögek vannak.
Tehát $\frac{AP}{PQ} = \frac{AE}{QF}$, ahol AE állandó (független P megválasztásától). Ezért $\frac{AP}{PQ}$ akkor minimális, ha QF maximális, ami nyilván akkor következik be, ha F a BC oldalnak, és így Q a kör BC ívének (az A-t nem tartalmazó ívnek) a felezőpontja. Ekkor AQ nyilván felezi a BAC szöget, tehát a keresett P pont a háromszög A-ból induló szögfelezőjének a BC oldallal való metszéspontja.

11. évfolyam

1. Azonos a 10. évfolyam 2. feladatával.

2. A $p = 3$ választással $p^2 + 2$ értéke 11, ami prím, tehát ez az eset megoldást ad. Megmutatjuk, hogy több megoldás nincs. Valóban, ha $p \ne 3$ prím, akkor p hárommal osztva ± 1 maradékot ad, így $p^2 + 2$ mindig osztható 3-mal.

3. A feladatban szereplő definíciók miatt

$$A + A = \{a_1 + a_2 \mid a_1, a_2 \in A\},$$
$$2A = \{2a \mid a \in A\}.$$

Ha $A = \{a\}$ egyelemű halmaz, akkor $A + A = \{2a\} = 2A$. Ez azt jelenti, hogy az egy elemből álló halmazok megoldásai a szóban forgó egyenletnek.
A továbbiakban megmutatjuk, hogy ezektől különböző megoldás nem lehetséges. Valóban, ha $A = \{a_1, a_2\}$ kételemű halmaz, akkor $A + A = \{2a_1, a_1 + a_2, 2a_2\}$ háromelemű halmaz. Azonban $2A = \{2a_1, 2a_2\}$ kételemű halmaz, így a fentiek miatt az $A + A$, illetve a $2A$ halmazok nem egyenlők egymással.
Ugyanezzel a gondolatmenettel azonnal adódik, hogy három, vagy annál több elemszámú halmaz nem lehet megoldás.

4. Tekintsünk a síkban egy szabályos hétszöget és annak középpontját. Ez olyan 8 elemű ponthalmaz, melyben semelyik 3 pont nincs egy közös egyenesen. Egy adott csúcsból összesen 3 egyenlő szárú háromszög képezhető: a csúcs a szomszédjaival, ezek szomszédjaival, majd a két, tőle legtávolabbi csúccsal egyenlő szárú háromszöget alkot. Hét csúcs esetén ez összesen 21 lehetőség.
A középpont a hétszög csúcsaival három típusú egyenlő szárú háromszöget alkothat: amikor két szomszédos csúccsal, majd egy, illetve két csúcs kihagyásával képezzük a háromszöget. Ezek mindegyike újabb 7, tehát összesen 21 lehetőséget jelent.
Tehát a feladat kérdésére adott válasz igen, egy szabályos hétszög csúcsai és a hétszög középpontja olyan 8 elemű halmaz, amelynek pontjai 42 egyenlő szárú háromszöget képeznek.

5. A számtani – mértani – harmonikus közepek közti egyenlőtlenség miatt minden n pozitív egész szám esetén $\sqrt{x_n y_n} \in [x_n, y_n]$ teljesül.
Azonban

$$x_n y_n = \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2} = \\ = x_{n-1}y_{n-1} = \cdots = x_1 y_1 = 2.$$

Ez azt jelenti, hogy $\sqrt{2}$ eleme a szóban forgó intervallumok mindegyikének. Megmutatjuk, hogy más valós szám nem teljesíti a feladat elvárásait. Tegyük fel ugyanis, hogy α és β olyan különböző valós számok, amelyek minden pozitív egész esetén elemei az $[x_n, y_n]$ intervallumnak. Ekkor $|\alpha-\beta| > 0$, másrészt

$$|\alpha-\beta| \le y_n - x_n \le \frac{y_{n-1}+x_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \\ = \frac{y_{n-1}-x_{n-1}}{2} \le \cdots \le \frac{y_1-x_1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Vagyis $2^{n-1} \le \frac{1}{|\alpha-\beta|}$, ami lehetetlen, hiszen itt a bal oldal felülről nem korlátos.
Összefoglalva: a feltételeknek egyedül a $\sqrt{2}$ valós szám tesz eleget.

12. évfolyam

1. Írjuk fel a számtani sorozat összegképletét az első n, $2n$, majd $3n$ tagra:

$$A = S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d),$$

$$B = S_{2n} = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d).$$

Jelölje C a számtani sorozat első $3n$ tagjának összegét, azaz

$$C = S_{3n} = \frac{3n}{2}(2a_1 + (3n-1)d).$$

Rendezéssel kapjuk, hogy $2A = 2a_1n + n^2d - nd$, $B = 2a_1n + 2n^2d - nd$. Innen $B - 2A = n^2d$.

$$2C = 2S_{3n} = 6a_1n + 9n^2d - 3nd = \\ = 6a_1n + 6n^2d - 3nd + 3n^2d = \\ = 3(2a_1n + 2n^2d - nd) + 3n^2d = \\ = 3B + 3(B - 2A),$$

amiből $C = 3(B - A)$.

2. Jelölje E azt az eseményt, hogy a korábban érkező 10 percnél, vagyis $\frac{1}{6}$ óránál nem vár többet. Érkezzen a randizók egyike x, másikuk y órával 10 óra után. Mivel betartják a megállapodásukat, így

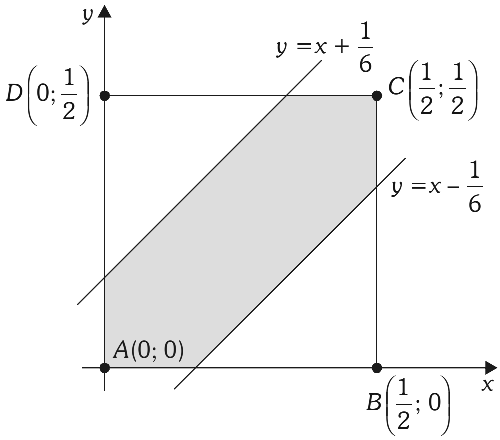
$$0 \le x \le \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}.$$

Bármely lehetséges esemény, azaz az érkezés időpontja a 2. ábrán, a derékszögű koordinátarendszerben megrajzolt, $\frac{1}{2}$ oldal hosszúságú $ABCD$ négyzetlemez egy $(x; y)$ pontjával reprezentálható.

Az $ABCD$ négyzetlemez területe: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Az E esemény akkor és csak akkor következik be, ha az $ABCD$ négyzetlemez $(x; y)$ pontjára $|x-y| \le \frac{1}{6}$, vagyis $y \le x + \frac{1}{6}$ és $y \ge x - \frac{1}{6}$ teljesül.

Így az E esemény valószínűsége arányos az $y = x + \frac{1}{6}$ és $y = x - \frac{1}{6}$ egyenletű egyenesek közötti sáv és az $ABCD$ négyzetlemez közös részének a területével.



2. ábra

Ez a terület: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{36}$.

Az E esemény valószínűsége:

$$P(E) = \frac{5}{36} : \frac{1}{4} = \frac{5}{9}.$$

3. A feladatra kétféle megoldást adunk.

1. megoldás

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + x^2} + \sqrt{(x-1)^2 + x^2} \geq 0$$

bármely x valós számra.

$$f^2(x) = 4x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 1} \geq 0.$$

A nemnegatív számok halmazában a négyzetre emelés monoton művelet, így $f(x)$ ott minimális, ahol $f^2(x)$.
Nyilvánvaló, hogy az $f^2(x)$ függvénynek az $x = 0$ helyen van minimuma.
$f(x)$ minimális értékét az $x = 0$ érték behelyettesítésével kapjuk meg, $f_{\min} = 2$.

2. megoldás

A feladatnak geometriai értelmezést adunk. A derékszögű koordináta-rendszerben tekintsük azt az ABC háromszöget, amelyre a csúcsok koordinátái: $A(0; -1)$, $B(x; x)$, $C(0; 1)$.
Ezzel a feladatot átfogalmaztuk, vagyis a $K = AB + BC$ minimumának helyét és értékét kell meghatároznunk.
A háromszög-egyenlőtlenség alapján:

$$AC \leq AB + BC.$$

Koordinátákkal:

$$2 \leq \sqrt{(x+1)^2 + x^2} + \sqrt{(x-1)^2 + x^2}.$$

Ennek minimális értéke 2, amit az egyenlőség esetében kapunk. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a B pont illeszkedik az AC szakaszra.
Ha x változik, akkor a B pont az $y = x$ egyenletű egyenes mentén mozog, így egyenlőség akkor és csak akkor következik be, ha B az origóban van, vagyis $x = 0$.
Tehát az $f(x)$ függvénynek az $x = 0$ helyen van minimuma és a minimum értéke: $f_{\min} = 2$.

4. A $(\sin(x-y) + 1)(2\cos(2x-y) + 1) = 6$ egyenletet kell megoldanunk.
Felhasználjuk, hogy

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \quad \text{és} \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

Így

$$0 \leq \sin(x-y) + 1 \leq 2,$$
$$-1 \leq 2\cos(2x-y) + 1 \leq 3.$$

Ezért $(\sin(x-y) + 1)(2\cos(2x-y) + 1) \leq 6$, vagyis csak

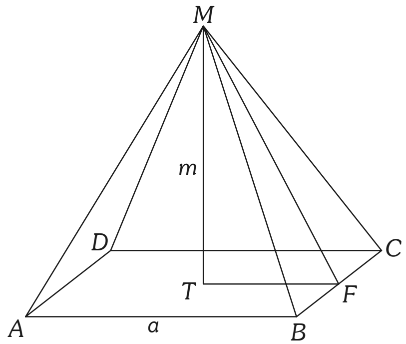
a) $\sin(x-y) = 1$ és

b) $\cos(2x-y) = 1$ együttes teljesülése esetén lehet az egyenletet megoldani.

Az *a)* esetben $x - y = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, ahol $m \in \mathbb{Z}$, a *b)* esetben $2x - y = 2\pi n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

Innen $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(n-m) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, $y = (2(n-2m) - 1)\pi = (2l - 1)\pi$, ahol $l \in \mathbb{Z}$.
Az így kapott $(x; y)$ értékek megoldások.

5. Ábrát készítünk (*3. ábra*)
A gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, az M csúcsból az alaplapra állított merőleges talppontja az $ABCD$ négyzet T középpontja. T-ből a BC élre állított merőleges a BC szakaszt az F a felezőpontban metszi. A négyzet oldalának a hossza és a gúla MT testmagasságának m hossza a feltételek szerint pozitív egész számok.



3. ábra

Kiszámítjuk a gúla felszínét és térfogatát.
Az MFT derékszögű háromszögből az oldallapok magassága Pitagorász tétele szerint

$$MF = \sqrt{\frac{a^2}{4} + m^2} = \frac{\sqrt{4m^2 + a^2}}{2}.$$

Egy oldallap területe: $a\frac{\sqrt{4m^2 + a^2}}{4}$.

Így a gúla felszíne: $A = a^2 + a\sqrt{4m^2 + a^2}$.

A gúla térfogata: $V = \frac{a^2 m}{3}$.

Mivel $A = V$, ezért $a^2 + a\sqrt{4m^2 + a^2} = \frac{a^2 m}{3}$.

Ebből az egyenletből kifejezzük m-et.

$$3\sqrt{4m^2 + a^2} = am - 3a.$$

Négyzetre emeléssel és rendezéssel:

$$36m^2 + 9a^2 = a^2m^2 + 9a^2 - 6a^2m \quad (\text{ahol } m \neq 0)$$

$$36m = a^2m - 6a^2$$

$$6a^2 = m(a^2 - 36)$$

$$m = \frac{6a^2}{a^2 - 36}.$$

Leválasztjuk az egész részt.

$$m = 6 + \frac{216}{a^2 - 36}.$$

Így $(a^2 - 36)$ értékét 216 pozitív osztói közül kell kiválasztanunk.
Egyrészről az átalakítás közben azt kaptuk, hogy $6a^2 = m(a^2 - 36)$, ezért nyilvánvaló, hogy $a^2 > 36$, másrészről $a^2 - 36 \le 216$, azaz $a^2 \le 252$.
Így a^2 lehetséges értékei: 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 225. Közülük csak $a^2 = 144$ esetén osztható $(a^2 - 36)$-tal 216, így $a = 12$.
A hozzátartozó m érték: $m = 8$.

A keresett térfogat: $V = \frac{12^2 \cdot 8}{3} = 384$.

A felszín: $A = 144 + 12\sqrt{256 + 144} = 384$. Ez valóban megegyezik a térfogat értékével.

Tapasztalatok és tanulságok

A versenyfeladatok megfogalmazása általában eltér a tankönyvi feladatoktól, mert egyrészt nyitottabbak, másrészt elméletiek, tehát bizonyításokat, illetve érveléseket igényelnek.

A 9. évfolyamon elsősorban az általános iskolai ismeretekre támaszkodtunk. A magasabb évfolyamokon inkább elméleti, mint alkalmazás- és gyakorlati jellegűek voltak a kitűzött problémák, ezért matematikai hátteret és tárgyi ismereteket is igényelt a feladatok megoldása.

A feladatsorok összeállításának egyik szempontja az, hogy három feladatot mindenki meg tudjon oldani, vagyis a benne lévő ismeret az iskolai tananyagnak része legyen. A többi feladat viszont legyen olyan, ami differenciálja a mezőnyt, sőt legyen olyan feladat is, amely a speciális matematika tagozatosok számára is kihívást jelent.

Az egyes kategóriák esetében természetesen a speciális matematika tagozatos tanulók teljesítménye a legegyenletesebb és a legmagasabb. Az viszont nem volt igaz, hogy az I. kategóriás versenyzők teljesítménye alacsonyabb lett volna, mint a II. kategóriás versenyzőké.

Ebben a tanévben a *10. évfolyam* 2. feladata azonos volt a *11. évfolyam* 1. feladatával. A pontozás már nem volt azonos, a 10. évfolyamon 10 pontot, a 11. évfolyamon 8 pontot ért a feladat megoldása. Ha a tanulók teljesítményét nézzük, akkor a 10. évfolyamon 75,2% volt, míg a 11. évfolyamon 99,4%.

A *10. évfolyamon* elsősorban a 3. feladat, és bizonyos mértékig az 5. feladat megoldása nem volt sikeres. Ez utóbbit még a speciális matematika tagozatos tanulók többsége sem oldotta meg. Mindkét feladat síkgeometriai tárgyú volt és megoldása ötletet igényelt.

A 10. évfolyam 3. feladata külön figyelmet érdemel. Ez a feladat *Pólya György: A plauzibilis következtetés című könyvének A matematikai gondolkodás művészete II. kötetében,* mint a Stanford Egyetem (USA) Matematikai versenyvizsgáján 1951-ben kitűzött feladat szerepel. Pólya György a XVI. fejezetben a *Példák és megjegyzések* című részben (171–172. oldal) mintaként a *kis lépések elméletére,* tárgyalja a 2. pont alatt, kiegészítve további feladatokkal.

„2. Egy négyszöget két átlójával négy háromszögre vágunk. Két háromszöget *szemköztinek* nevezünk, ha van közös csúcsuk, de nincs közös oldaluk. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

– Két szemközti háromszög területének a szorzata egyenlő a másik két szemközti háromszög területének a szorzatával.
– Egy négyszög akkor és csak akkor trapéz, ha van két egyenlő területű szemközti háromszöge.
– Egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha mind a négy háromszög egyenlő területű."

A *11. évfolyam*on is hasonló volt a helyzet. Elsősorban a 3. feladat és bizonyos mértékig az 5. feladat megoldása nem volt sikeres. Ez utóbbit még a speciális matematika tagozatos tanulók többsége sem oldotta meg. Itt inkább a szokatlan fogalmazás okozott nehézséget.

A *12. évfolyam*on a valószínűség-számítási feladat azoknak a tanulóknak nem ment, akik még nem tanulták a geometriai valószínűséget az iskolai matematikaórákon.

Örvendetes, hogy a 3. feladat megoldásában, ami egy függvény szélsőértékének a meghatározására vonatkozott, a javítási útmutatóban is szereplő mindkét módszert ismerték és alkalmazták a tanulók. Ilyen szempontból kiemelkedő volt Varnyú József dolgozata, aki mintaszerűen írta le mind az algebrai, mind a geometriai utat, annak ellenére, hogy erre a versenykiírás alapján többlet pontot nem kaphatott.

Irodalom

[1] Dr. Kántor Sándorné: A 2005/2006. és 2006/2007. tanévi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2007. 2. szám, 5–15.

[2] Dr. Kántor Sándorné: A 2007/2008. tanévi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2008. 2. szám, 3–8.

[3] Dr. Kántor Sándorné: A 2008/2009. tanévi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2009. 2. szám, 16–24.

[4] Dr. Kántor Sándorné: A 2009/2010. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2010. 2. szám, 12–21.

[5] Dr. Kántor Sándorné: A 2010/2011. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2011. 2. szám, 33–41.

[6] Dr. Kántor Sándorné: A 2011/2012. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2012. 2. szám, 9–17.

[7] Pólya György (1989): A plauzibilis következtetés. A matematikai gondolkodás művészete II. kötet. Gondolat, Budapest

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2013. április 31.

Feladatok (455–459.)

Az alábbi öt feladatot a *Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematikai Emlékverseny* 2012/2013-as tanévben kitűzött feladataiból válogattuk.

455. Melyik az a legkisebb pozitív valós szám, amelyre

$$[x^2] - [x]^2 = 2013?$$

($[a]$ jelöli az a-nál nem nagyobb, legnagyobb egész számot.)

456. Adott a síkon n darab ($n \geq 4$) egyenes úgy, hogy semelyik kettő nem párhuzamos, és a sík egyetlen pontjára sem illeszkedik kettőnél több egyenes. Ezek az egyenesek a síkot feldarabolják nem korlátos tartományokra és sokszögekre. Igazoljuk, hogy a keletkezett sokszögek között legalább $\frac{2n-2}{3}$ darab háromszög van.

457. Egy kapcsolótábla 100 világító gombból áll. A gombok 10 sorban és 10 oszlopban helyezkednek el. Egy gomb megnyomásakor a vele egy sorban, illetve egy oszlopban levő gombok egyszerre váltanak: az addig világítóak kialszanak, a korábban kikapcsoltak meggyulladnak. Legalább hány gombot kell megnyomni ahhoz, hogy az összes gomb kialudjék, ha eredetileg mind világított?

458. A szigorúan növekvő $\{a_n\}$ sorozat az összes olyan pozitív egész számból áll, amelyeknek tízes számrendszerbeli alakjában csak páros számjegy fordul elő. Mely pozitív egész n esetén teljesül, hogy $a_n = 12n$?

459. A $2n$ jegyű (n pozitív egész) tízes számrendszerbeli $A_n = \overline{a_1a_2...a_{2n}}$ pozitív egész számokról a következőket tudjük:

(1) $a_i \neq 0$ $(i = 1; 2; ...; 2n)$;

(2) $a_1a_2 + a_3a_4 + ... + a_{2n-1}a_{2n}$ páros szám.

Határozzuk meg n függvényében az A_n számok számát.

Feladatmegoldások (440–444. feladatok)

440. Egy körvonalra felírtak 2012 darab számot úgy, hogy bármely 8 darab egymás melletti szám összege 88. Tudjuk, hogy az elsőnek felírt számtól pozitív körüljárási irányban haladva a 123-adik szám a 11, az 1234-edik szám a 8, az 541-edik szám pedig a 4. Határozzuk meg a 2012-edik számot.

Nemecskó István, Budapest

Megoldás: Jelölje a_n az n-edikre felírt számot $(1 \leq n \leq 2012)$. Legyen továbbá $a_{n+2012} = a_n$ minden pozitív egész n esetén.

A feltétel alapján $a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+7} = 88$ bármely pozitív egész n-re. Ezt felhasználva

$$a_{n+8} - a_n =$$
$$= (a_{n+1} + ... + a_{n+8}) - (a_n + ... + a_{n+7}) = 0,$$

azaz $a_{n+8} = a_n$.
Mivel az $\{a_n\}$ sorozat 2012 szerint is és 8 szerint is periodikus, ezért $4 = 2012 - 251 \cdot 8$ szerint is periodikus, hiszen $a_{n+4} = a_{n+2016} = a_{n+252 \cdot 8} = a_n$.
A feltételek szerint $a_{123} = a_3 = 11$, $a_{1234} = a_2 = 8$, $a_{541} = a_1 = 4$. Ebből

$$a_1 + ... + a_8 = 2 \cdot (4 + 8 + 11 + a_4) = 88,$$

azaz $a_4 = 21$.
A fentiek alapján $a_{2012} = a_4 = 21$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 8.

441. Egy konvex négyszög oldalainak hossza pozitív körüljárási irányban a, b, c, d. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha

$$\frac{2(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} = \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{cd}{c+d} + \frac{da}{d+a}.$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Vonjuk ki a feltétel bal oldalából a jobb oldalt, majd bontsuk a különbséget két tagra:

$$K = \frac{2(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{bc}{b+c} - \frac{cd}{c+d} - \frac{da}{d+a} = \left(\frac{2(ab+cd)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d}\right) + \left(\frac{2(bc+da)}{a+b+c+d} - \frac{bc}{b+c} - \frac{da}{d+a}\right).$$

Alakítsuk a kapott összeg első tagját:

$$\left(\frac{2(ab+cd)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d}\right) =$$
$$= \frac{(ab(c+d) - cd(a+b))((a+b) - c + d)}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)} =$$
$$= \frac{(ac(b-d) + bd(a-c))((a-c) + (b-d))}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)} =$$
$$= \frac{(a-c)^2bd + (b-d)^2ac + (a-c)(b-d)(ac+bd)}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}.$$

Az a, b, c, d ciklikus permutációjával adódik a második tag:

$$\left(\frac{2(bc+da)}{a+b+c+d} - \frac{bc}{b+c} - \frac{da}{d+a}\right) =$$
$$= \frac{(b-d)^2ca + (c-a)^2bd + (b-d)(c-a)(bd+ca)}{(a+b+c+d)(b+c)(d+a)} =$$
$$= \frac{(a-c)^2bd + (b-d)^2ac - (a-c)(b-d)(ac+bd)}{(a+b+c+d)(b+c)(d+a)}.$$

Így

$$K(a+b+c+d)(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) =$$
$$= ((a-c)^2bd + (b-d)^2ac) \cdot$$
$$\cdot ((b+c)(d+a) + (a+b)(c+d)) +$$
$$+ (a-c)(b-d)(ac+bd) \cdot$$
$$\cdot ((b+c)(d+a) - (a+b)(c+d)).$$

Az utolsó zárójelben lévő különbség a tagonkénti szorzások elvégzésével

$$(bd + cd + ab + ac) - (ac + bc + ad + bd) =$$
$$= cd + ab - bc - ad = (a-c)(b-d)$$

alakot ölt, ezért az összeg második tagja

$$(a-c)^2(b-d)^2(ac+bd).$$

A feltétel alapján a kapott összeg egyik tagja sem negatív, továbbá K akkor és csak akkor 0, ha $a = c$ és $b = d$, vagyis a négyszög paralelogramma.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 5.

442. Mutassuk meg, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k \cdot x^2 + n \cdot x + 2012$ függvény bármely valós x esetén pozitív értéket vesz fel, ha k a 2012! végén található 0-k száma, n pedig olyan pozitív egész, amelyre $\frac{2012!}{2^n}$ páratlan egész szám.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás: A feltétel és Legendre tétele alapján

$$k=\left[\frac{2012}{5}\right]+\left[\frac{2012}{25}\right]+\left[\frac{2012}{125}\right]+\left[\frac{2012}{625}\right]=$$
$$=402+80+16+3=501,$$
$$n=\left[\frac{2012}{2}\right]+\left[\frac{2012}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{2012}{1024}\right]=$$
$$=1006+503+251+125+62+31+$$
$$+15+7+3+1=2004.$$

f főegyütthatója pozitív, diszkriminánsa pedig

$$n^2-4\cdot k\cdot 2012=2004\cdot(2004-2012)<0,$$

így $f(x)$ pozitív bármely valós x esetén.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 8.

443. Legyen x olyan valós szám, amelyre $\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x=m$, ahol m egész szám. Igazoljuk, hogy $\mathrm{tg}^3x+\mathrm{ctg}^3x$ egész szám, de nem négyzetszám.

Bíró Bálint, Eger

Megoldás: Mivel

$$\mathrm{tg}^3x+\mathrm{ctg}^3x=$$
$$=(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)^3-3\cdot\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x\cdot(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)=$$
$$=(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)^3-3\cdot(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)=$$
$$=m^3-3m=m(m^2-3),$$

ezért a vizsgált kifejezés értéke egész szám.
A továbbiakban azt igazoljuk, hogy $m(m^2-3)$ egyetlen egész m-re sem négyzetszám.
Mivel $m^2-(m^2-3)=3$, ezért $(m;m^2-3)=1$ vagy $(m;m^2-3)=3$.
Tegyük fel, hogy $(m;m^2-3)=1$. Ahhoz, hogy a vizsgált kifejezés négyzetszám legyen, szükséges, hogy $m=k^2$ és $m^2-3=l^2$, vagy $m=-k^2$ és $m^2-3=-l^2$ teljesüljön, ahol k és l pozitív egészek. A második feltétel viszont csak $m=2$ és $l=1$, vagy $m^2+l^2=3$ esetén teljesülhet, ami ellentmond annak, hogy m, k, l egészek.
Tegyük fel, hogy $(m;m^2-3)=3$. Ekkor a megfelelő szükséges feltétel: $m=3p^2$ és $m^2-3=3q^2$, vagy $m=-3p^2$ és $m^2-3=-3q^2$, ahol p és q pozitív egészek. A első esetben $3p^4-1=q^2$ adódna, ami lehetetlen, ugyanis négyzetszám 3-mal osztva nem adhat 2-t maradékul. A második esetben a $3p^4+q^2=1$ egyenletnek kellene teljesülnie, ami nyilvánvalóan nem lehetséges.
Ezzel beláttuk, hogy a tekintett kifejezés értéke nem lehet négyzetszám.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 7.

444. (a 435. feladat egy lehetséges általánosítása) Bizonyítsuk be, hogy ha α, β, γ egy hegyesszögű háromszög belső szögei, akkor tetszőleges λ_1, λ_2, λ_3 pozitív valós számokra

$$\lambda_1^2\,\mathrm{tg}\,\alpha+\lambda_2^2\,\mathrm{tg}\,\beta+\lambda_3^2\,\mathrm{tg}\,\gamma\ge$$
$$\ge 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(\frac{\sin\alpha}{\lambda_1}+\frac{\sin\beta}{\lambda_2}+\frac{\sin\gamma}{\lambda_3}\right).$$

Dályay Pál Péter, Szeged

I. megoldás: Vonjuk ki a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalából a jobb oldalt. A kapott kifejezés felírható a következő mátrixszorzat alakban:

$$(\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \lambda_3)\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{tg}\,\alpha & -\sin\gamma & -\sin\beta\\ -\sin\gamma & \mathrm{tg}\,\beta & -\sin\alpha\\ -\sin\beta & -\sin\alpha & \mathrm{tg}\,\gamma\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}=$$
$$=\lambda_1^2\mathrm{tg}\alpha+\lambda_2^2\mathrm{tg}\beta+\lambda_3^2\mathrm{tg}\gamma-2\lambda_1\lambda_2\sin\gamma-$$
$$-2\lambda_2\lambda_3\sin\alpha-2\lambda_3\lambda_1\sin\beta=f(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3).$$

Azt kell belátni, hogy $f(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3)\ge 0$ teljesül bármely λ_1, λ_2, λ_3 pozitív valós számra, azaz a fenti 3×3-as mátrix pozitív szemidefinit. Azt fogjuk megmutatni, hogy a mátrix egyetlen főminorja sem negatív.
Az első főminor, $\mathrm{tg}\alpha$ pozitív, mert α hegyesszög.
A második és a harmadik főminor vizsgálatához felhasználunk két azonosságot. (Lásd például *Reiman István: Geometria és határterületei, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., Kisújszállás, 1999., 253. oldal (1); 65. oldal (2)*)
Ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

(1) $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma$;

(2) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$.

A második főminor (1) alapján a következőképpen alakítható:

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta - \sin^2\gamma =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{tg}\,\gamma} \cdot (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma - \mathrm{tg}\gamma \cdot \sin^2\gamma) =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{tg}\,\gamma} \cdot (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma \cdot \cos^2\gamma) > 0.$$

A harmadik főminor (1) és (2) felhasználásával:

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma -$$
$$- \sin^2\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha - \sin^2\beta \cdot \mathrm{tg}\beta - \sin^2\gamma \cdot \mathrm{tg}\gamma =$$
$$= \cos^2\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha + \cos^2\beta \cdot \mathrm{tg}\beta +$$
$$+ \cos^2\gamma \cdot \mathrm{tg}\gamma - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) -$$
$$- 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = 0.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Borbély József, Tata

II. megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát alakítjuk a szögfüggvények közötti azonosságok segítségével, majd a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség tagonkénti alkalmazásával alulról becsüljük a kifejezést.

$$\lambda_1^2\mathrm{tg}\alpha + \lambda_2^2\mathrm{tg}\beta + \lambda_3^2\mathrm{tg}\gamma =$$
$$= \lambda_1^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \lambda_2^2 \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \lambda_3^2 \cdot \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} =$$
$$= \lambda_1^2 \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha} + \lambda_2^2 \cdot \frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\cos\beta} + \lambda_3^2 \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\gamma} =$$
$$= \lambda_1^2 \sin\beta \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} + \lambda_1^2 \sin\gamma \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} +$$
$$+ \lambda_2^2 \sin\gamma \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \lambda_2^2 \sin\alpha \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} +$$
$$+ \lambda_3^2 \sin\alpha \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + \lambda_3^2 \sin\beta \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} =$$
$$= \sin\alpha \cdot \left(\lambda_3^2 \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + \lambda_2^2 \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right) +$$
$$+ \sin\beta \cdot \left(\lambda_1^2 \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} + \lambda_3^2 \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right) +$$
$$+ \sin\gamma \cdot \left(\lambda_2^2 \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \lambda_1^2 \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) \geq$$
$$\geq 2(\lambda_2\lambda_3\sin\alpha + \lambda_3\lambda_1\sin\beta + \lambda_1\lambda_2\sin\gamma) =$$
$$= 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(\frac{\sin\alpha}{\lambda_1} + \frac{\sin\beta}{\lambda_2} + \frac{\sin\gamma}{\lambda_3}\right)$$

Ezzel beláttuk az állítást.

Dálybay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 2.

A megoldók névsora: Borbély József, Tata (440–444.); Dálybay Pál Péter, Szeged (440–444.); Hornung Tamás, Zalaegerszeg (440–443.); Kallós Béla, Nagyhalász (440., 442.); Nagy Sándor, Békéscsaba (440–443.); Rakamazi Richárd, Eger (440., 442., 443.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (440., 442., 443.); Velkeyné Gréczi Alice, Ipolyszög (440., 442., 443.).

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS

Rátz tanár úr életműdíj – 2013

(biológia-, matematika-, fizika-, kémiatanárok elismerésére)

Az Ericsson Magyarország, a Graphisoft SE és a Richter Gedeon közös díjat alapított magyarországi tanároknak, melyet a Fasori Gimnázium legendás hírű matematikatanáráról „RÁTZ TANÁR ÚR ÉLETMŰDÍJ"-nak nevezett el. E díj gondozására létrejött az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért, amely díjazottakként az 1.200.000 forinttal járó elismerést minden évben két-két biológia-, matematika-, fizika- és kémiatanárnak ítéli oda.

A díjra a közoktatás **5-12. évfolyamain biológiát, matematikát, fizikát vagy kémiát tanító** (vagy egykor tanító) tanárok terjeszthetők fel írásban szakmai és társadalmi szervezetek, az ajánlott tanár tevékenységét jól ismerő kollektívák, kivételes esetekben magánszemélyek által.

A felterjesztés feltétele, hogy a jelölt a magyarországi közoktatás területén – nem szervezői munkakörben – dolgozó, az 5-12. évfolyamokon kimagasló oktató-nevelő tevékenységet végző/végzett, olyan életművel rendelkező tanár legyen,

- aki legalább 10 éves közoktatási tanári gyakorlattal rendelkezik,
- akinek tanítványai az országos hazai és/vagy nemzetközi versenyeken a fenti tantárgyak valamelyikében az elsők között szerepeltek vagy többször a döntőbe jutottak,
- aki tevékenységében gondot fordít a hátrányos helyzetű, tehetséges diákok felfedezésére, tudásuk gyarapítására,
- aki jelentős szerepet vállal a fenti négy tantárgy valamelyikéhez kapcsolódó országos, regionális vagy iskolai szakmai programok (pl. versenyek, továbbképzések, tanácskozások) megszervezésében, a program tartalmának felépítésében és kivitelezésében (pl. előadások tartása, szakanyagok készítése, friss információ továbbítása),
- aki rendszeresen továbbképzi magát, tájékozott az adott tudomány területén elért eredményekről, a tantárgy tanításával kapcsolatos aktualitásokról, tapasztalatait megosztja kollégáival,
- aki szakmai lapokban publikál, könyveket, tankönyveket, tanítási segédleteket írt vagy ír,
- aki a szaktárgyi felkészítés mellett hivatásának tekinti tanítványai nevelését, személyiségük fejlesztését, problémáik megoldásához segítséget nyújt,
- akinek személyisége, szakértelme, egész életvitele példamutató.

A díjakat a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat díjbizottságai, a Magyar Kémikusok Egyesülete valamint a Magyar Biológia Társaság, a Magyar Biofizikai Társaság illetve a Magyar Biokémiai Egyesület ajánlásai alapján a három cég által felkért Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma ítéli oda az adott év kitüntetettjeinek.

A Kuratórium elnöke: Dr. Kroó Norbert
A Kuratórium tagjai: Lajos Józsefné
Dr. Falus András
Dr. Görög Sándor

A négy tudományos társaság a beérkezett ajánlásokat a fenti feltételek szellemében értékeli, s ennek alapján teszi meg javaslatait a díjazottakra 2013. október 08-ig. Ezen javaslatok alapján hozza meg döntését az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma 2013. október 15-ig. A díj átadására várhatóan 2013 novemberében kerül sor.

Az írásos felterjesztéseket legkésőbb 2013. szeptember 25-ig kérjük eljuttatni elektronikusan az info@ratztanarurdij.hu email címre, ahonnan azokat a megfelelő adminisztráció után, illetékesség szerint továbbítják *a Bolyai János Matematikai Társulat*hoz, *az Eötvös Loránd Fizikai Társulat*hoz, *a Magyar Kémikusok Egyesületéhez*, a *Magyar Biológia Társasághoz, a Magyar Biofizikai Társasághoz, valamint a Magyar Biokémiai Egyesülethez.* A felterjesztéshez szükséges adatlap a http://www.ratztanarurdij.hu honlapon található, a „Pályázati felhívás" oldalról letölthető.

A korábbi évek felterjesztéseit – ha azt továbbra is fenntartják a javaslattevők – ismételten írásban kell megerősíteni!

Egy személynek három éven belül az Alapítók által létrehozott díjak közül csak egy adható.

A pályázattal vagy a felterjesztéssel kapcsolatos kérdések feltehetők munkaidőben Lukovics Ildikónak a következő telefonszámon: **06-20-203-5507.**

Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma