A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Néhány feladat a diofantikus egyenletek köréből

(Dr. Urbán János)

Néhány összegzési feladat

(Dr. Molnár István)

Mi fér bele a tananyagba projektív geometriából?

(Molnár Zoltán)

A paralelogrammatétel

(Dr. Darvasi Gyula)

XX. ÉVFOLYAM 2012 4

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Kosztolányi József

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 1800 Ft
Megjelenik évente 4 alkalommal.
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat e-mailen a kattila@mozaik.info.hu címre küldjék meg. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön fájlokban is kérjük mellékelni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat.

Dr. Urbán János (1939–2012)

„Nem hiszünk a halálnak, bármilyen nagy hitető is. Nem hiszünk neki, mert nem akarunk hinni; sem a magunkénak, sem a másokénak. Ha megérint, ha megvacogtat, ha átfúj is rajtunk előszele: félelmünk és képzeletünk mindenestül az életé."

(Csoóri Sándor)

2012. június 11-én, életének 73. évében gyógyíthatatlan betegség következtében elhunyt kollégánk, dr. Urbán János, lapunk főszerkesztője, a Berzsenyi Dániel Gimnázium tanára.

A gyerekkorról, a matematika és a tanári pálya iránti elkötelezettségének kialakulásáról az Élet és Tudomány 2002. július 5-i számában így vallott Horányi Gábornak:

„Igazából a tanárság családi indíttatás. Anyai és apai ágon dédszüleim és nagyszüleim között többen voltak pedagógusok, falusi tanítók. Édesanyám matematikatanár, édesapám ugyan jogász, de a nevelőanyám is tanár volt. Faluhelyen nőttem fel, nehéz körülmények között, közvetlen a második világháború után édesanyám meghalt. A középiskolában éreztem rá a tanulás ízére és a matematikára. Szerencsémre, elsős gimnazista koromban nagyon jó tanárt kaptam, Láng Hugónak hívták (...). Ő biztatott, hogy dolgozzak a Középiskolai Matematikai Lapokban, induljak az Arany Dániel Matematikaversenyen. Jól szerepeltem a versenyeken, a KöMaL-ban megjelent a nevem, s ez nekem, a tizenöt éves gyereknek nagyon komoly sikerélményt jelentett. (...) Magától értetődően adódott, hogy negyedikes koromban az ELTE matematika-fizika tanári szakára jelentkezzem. Szívesen jelentkeztem volna matematika–magyarra is, de akkor ilyen választási lehetőség nem volt."

A fizika szakot később filozófiára váltotta, és 1963-ban kitűnő eredménnyel végzett az ELTE matematika-filozófia szakán. Harmadéves korától kezdve vezetett demonstrátorként gyakorlatokat, előbb algebrából és számelméletből, majd elemi matematikából. A végzéstől 1976-ig az Analízis I. tanszék tanársegédje, majd adjunktusa volt. 1969-ben kitüntetéses summa cum laude doktorált matematikai logikából. 1976 és 1990 között az Országos Pedagógiai Intézet matematikai osztályának munkatársa, majd osztályvezetője volt. Az intézet átalakulása után még egy évig, 1991-ig dolgozott az Országos Közoktatási Intézetben. Hivatali évei alatt is tanított, 3 évig a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban, és 1981-től haláláig a Ber-

zsenyi Dániel Gimnáziumban, főleg speciális matematika tagozatos osztályokban. Tanítványai közül sokan értek el kimagasló eredményt a korosztályos hazai és nemzetközi matematikaversenyeken. A már említett 2002-es interjúban így fogalmazta meg tanári „ars poetica”-ját:

„Rendkívül fontosnak tartom, hogy az órán minden diák jól érezze magát, tehát ne szorongó félelemmel vegyen részt a foglalkozásokon, mert a félelem lebénít. Szeretném, ha minden tanítványom úgy gondolna vissza a matematikaóráimra, hogy ott valami jó történt, a tehetségesek ugyanúgy, mint a kevésbé sikeresek. (...) Nagyon vigyázok arra, hogy soha ne szégyenítsek meg senkit. Aki nem készült, azt természetesen megszidom, de soha nem szégyenítem meg. A tanítványaimat partnerként próbálom kezelni.”

Aktívan kivette részét a matematikai közéletből és a matematika népszerűsítéséből is. 1974-től a TIT matematikai választmányának titkára, a Kis Matematikusok Baráti Köre versenyeinek, majd a Kalmár László Országos Matematikai Versenynek az egyik fő szervezője és feladatsorainak összeállítója volt. Több éven keresztül az MTV „Aki mer, az nyer”, majd „Körmönfontoló” nevű matematikai vetélkedőinek zsűrielnökeként népszerűsítette a matematikát. Évtizedeken keresztül tagja volt a Felvételi Feladatokat Összeállító Bizottságnak, valamint az OKTV II. kategória bizottságának. Dolgozott az Arany Dániel Országos Matematika Verseny bizottságában is, és elnöke volt a Tanárképző Főiskolák Péter Rózsa Matematika Versenye bizottságának. Nagyon fontos szerepe volt az 1992-ben indult Nemzetközi Magyar Matematika Verseny létrehozásában és szervezésében, 15 évig volt a magyarországi régió vezetője. Haláláig tagja volt a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottságának. A Társulat által évente megszervezett Rátz László Vándorgyűlésen több alkalommal tartott emlékezetes, kiváló előadást. A matematika tanítását és népszerűsítését szolgálta igen jelentős publikációs és szerkesztői tevékenységével is, tantervek, tan-

könyvek, feladatgyűjtemények, népszerűsítő és tehetséggondozó kiadványok, módszertani cikkek és tanulmányok szerzőjeként és társszerzőjeként. Hatása a magyarországi matematika tanítására és a matematikai tehetséggondozásra felbecsülhetetlen.

Tevékenységének elismeréseként számos rangos díjban részesült: a Bolyai János Matematikai Társulat Beke Manó Emlékdíja; Apáczai Csere János-díj (1994); Rátz Tanár Úr Életmű-díj (2001); Németh László-díj (2010); a főváros Bárczy István-díja (2011).

A nekrológ írója itt, ezen a ponton, az életút rövid ismertetése után személyesebb hangot fog megütni. Ennek oka, hogy Urbán Tanár urat egyik mesterének tekinti, akitől nagyon sok emberi, tanári és szakmai finomságot tanult.

Személyesen 1987-ben ismerkedtünk meg, amikor a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium kezdő, lelkes, ám tapasztalatlan tanáraként Mike János és Vincze István kollégámmal nekiláttunk a hatosztályos speciális matematika tagozat megszervezésének, beindításának. Segítséget kértünk és kaptunk országosan ismert és elismert szaktekintélyektől, Pósa Lajostól és Urbán Jánostól. És ők nemcsak tanácsokkal segítettek bennünket, hanem az első lépéseknél jelen is voltak. A felkészítő táborokban, az első felvételi feladatsorok összeállításában és értékelésében ott voltak mellettünk. János is jött, hétvégéjét szánta rá, hogy velünk együtt javítsa a tagozatra pályázó tanulók dolgozatait. És a közös munka közben tanított. Szinte észrevétlenül, szeretettel, szelíden, alázattal. Aztán lektorunk volt az első tehetséggondozásra szánt feladatgyűjteményünk összeállításánál. Véleménye mértéket, rálátást, szemléletet adott. Szűk egy évtizeddel később közösen kezdtünk tankönyvsorozatot írni a középiskolák számára. Bámulatosan, és mindenki számára megnyugtató módon tudta feloldani a szerzői csapat tagjai közötti szakmai vitákat. Szerencsém volt, mert több berzsenyis óráját is láthattam. Igazi matematikai műhelymunka folyt ezeken az órákon, és minden egyes alkalommal látszott a tanulókon, hogy jól érzik magukat, élvezik a közös matematizálást. Több egykori gimnáziumi tanítványával beszélgettem később, és egyöntetűen nyilatkoztak Jánosról, nagyon szerették és tisztelték, nagyon sokat tanultak tőle. Sokszor találkoztunk különböző szakmai rendezvényeken, ahol feleségével, Gizivel (Forró Gizella, 49 évig hűséges és szakmai munkájában is segítő társa) harmóniát, békességet és szeretet sugároztak. Igaz volt ez azokban az esetekben is, amikor különböző szakmai és pedagógiai vélemények feszültek egymásnak. János mindig őszintén, pontosan, korrekt módon és jó értelemben vett alázattal érvelt. Általában is jellemző volt rá ez a jó értelemben vett alázat, alázat a tanítványok, a kollégák, a szakma, a matematika iránt.

Nagyon nehéz lesz megszoknunk azt, hogy János földi, fizikai valójában már nincs köztünk. Velünk marad viszont műve, szellemisége, tanítása. Sokszor fogjuk még feltenni magunknak a kérdést: „Vajon János mit mondana erre, hogyan vélekedne erről?”. Ígérjük, hogy szellemi hagyatékát megőrizzük és törekszünk arra, hogy jól sáfárkodjunk vele.

Dr. Kosztolányi József

Oláh György (1940–2012)

Hetvenkét éves korában, 2012. június 30-án váratlanul elhunyt a Felvidéken és az egész Kárpát-medencében nagyon népszerű és szeretett *Oláh György,* komáromi középiskolai matematikatanár. Halálának helyszíne és módja „stílusos”, ha lehet így fogalmazni: a fonyódi matematikatáborban adta vissza lelkét a Teremtőjének, tanártársai mellett, szeretetben, békességben, azon szakmai-lelki társak társaságában, akikkel évtizedeken keresztül együtt dolgozott a tehetséggondozás és a matematikaoktatás területén.

Oláh György 1940. május 10-én született Komáromszentpéteren (Felvidék). 1957-ben érettségizett a komáromi magyar gimnáziumban, majd 1961-ben a pozsonyi Pedagógiai Főiskolán matematikatanári oklevelet szerzett. Pedagógusi pályafutását Ekecsen kezdte, majd 1964-től 1970-ig a komáromi magyar gimnázium tanára volt. 1970 és 1978 között a Nyitrai Pedagógiai Főiskola adjunktusaként dolgozott. 1978-ban a Komáromi Ipari Középiskola tanára lett, ahol 2000-ig – nyugdíjba vonulásáig – tanított. Ezt követően meghívták őt a komáromi Mariánum Egyházi Gimnáziumba, ahol három évig működött tanárként.

Az elmúlt évtizedekben felbecsülhetetlen értékű munkát végzett a magyar matematikai tehetségek felkutatásában, gondozásában. Szakköri tevékenysége is rendkívül jelentős volt, tanítványai szép eredményeket értek el a hazai és nemzetközi matematikaversenyeken. Több, mint ötven tanulmányt írt, számos tankönyvvel, példatárral, tanári segédkönyvvel, fordítással és recenzióval járult hozzá a matematikai ismeretek bővítéséhez és népszerűsítéséhez. Többször publikált *A Matematika Tanítása*-ban, és jónéhányszor tűzött ki feladatot a lap feladatrovatába is. Nemzetközi magyar rendezvények és matematikaversenyek kezdeményezője, alapítója volt. Ezek közül talán a legjelentősebb a *Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó*, melynek húsz éven át volt a főszervezője. 1991-ben a szegedi Rátz László Vándorgyűlésen egy kötetlen baráti beszélgetés során Bencze Mihály brassói matematikatanárral együtt „kitalálták” a *Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt*, amelyet első alkalommal ő szervezett meg Komáromban, és éveken keresztül ő volt a felvidéki csapat vezetője. Ő szerkesztette az 1999-ben, a budapesti TYPOTEX Kiadó gondozásában megjelent *„Határon túli matematikaversenyek”* című kötetet. Több éven keresztül tanítványaival havonta utazott Budapestre, ahol bekapcsolta őket a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (KöMaL) feladatmegoldó versenyébe, és rendszeresen elvitte őket a Kossuth Klubba is. Több alkalommal tartott előadást Magyarországon, természetesen a tehetséggondozással kapcsolatban. Megbecsült szakemberré vált a magyarországi szakma keretein belül is.

A matematika tanítását mindig gondosan összekötötte a magyarságtudat erősítésével. Azt vallotta: *„Nem létezhetünk az anyaországból érkező egyetemes magyar gondolkodás és kultúra tiszta forrásai nélkül.”* Így is élt. – Egyszemélyes intézmény – mondták róla barátai a Kárpát-medencében. Hatékonyan ápolta a szülőfalujából, Komáromszentpéterről származó felvidéki magyar költő, tanár, Kossányi József hagyományait, életművét. Komoly szakmai munkát végzett a Csemadokban, a Szlovákiai Magyar Pedagógusok Szövetségében, a komáromi Múzeumbarátok Körében, a komáromi Öregdiákok Baráti Körében, a Széchenyi István Polgári Társulásban. Jelentősebb kitüntetései a Beke Manó-díj első és második fokozata, Komárom város Polgármesteri Díja, a Felvidéki Magyar Pedagógus-díj.

Emlékezetes marad nagy mondása: *„A magyar könyv úgy kell, mint a kenyér.”* Mindig a könyv, a könyvek bűvöletében élt, soha ki nem hagyott egy könyvhetet sem Budapesten. Saját könyvtára is rendkívül gazdag, ami egyértelműen a felvidéki magyarság legjelentősebb könyvgyűjteményei közé tartozik. Lankadatlan hévvel, szenvedéllyel, hittel és akarattal szervezte a különböző matematikai találkozókat, ahol a Kárpát-medence matematikatanárai és azok diákjai vettek részt. Sokat járt Erdélybe, ahonnan komoly szellemi táplálékot hozott haza a Felvidékre. Rendszeresen járt Budapestre, a Panoráma Világklub rendezvényeire, ahol szerették, s ahol számos barátot szerzett.

Mindig komolyan vette Pólya György szavait, és eszerint is élt: „Ha egy tanárnak nincs személyes tapasztalata az alkotó munka valamilyen formájával, akkor bajosan várható, hogy ő maga ösztönözze, vezesse, vagy akár felismerje hallgatói alkotó tevékenységét.” Arra a kérdésre, hogy szerinte milyen a jó tanár, azt mondta az egyik vele készített interjúban: „Mindenekelőtt az, aki a diákját munkatársának tekinti, és munkatársként lehetőséget ad tanítványainak az egyre bővülő, egyre magasabb szintű tudás megszerzésére. Ezen felül pedig az érdeklődést a könyvtár irányába tereli.”

Áradt retorikájából a diákszeretet. Hogy mi volt ennek az oka? Erről így nyilatkozott jelen megemlékező sorok szerzőjének a vele készített utolsó interjúban, két héttel halála előtt: *„A szentpéteri iskolai évek alatt kitűnő osztályközösséget alkottunk. Olyan pedagógusok tanítottak és szerettették meg velem a matematikát, akiknek az életművét – úgy éreztem – tovább kell vinnem. Nem volt nehéz, hiszen Imre bátyám itt tanított a komáromi gimnáziumban, láttam, miként készül az órákra. Magával ragadott. Az a tudat, hogy a felvidéki magyar diákoknak többlettudást kell adni, annak érdekében is, hogy idegen nyelvű főiskolákon is megállják a helyüket, meghatározó tényező volt. Ezekkel a tanítványaimmal sokkal emberibb, közvetlenebb kapcsolatot alakítottam ki. Nemcsak a matematikáról, a szakmáról beszélgettünk, hanem az élet nagy dolgairól is. A foglalkozások nagy hatást gyakoroltak rájuk és rám egyaránt. Sokat jártam velük Erdélybe és a történelmi Magyarország több vidékére, ott is matematikáztunk, beszélgettünk. Egy tanárnak elsősorban ezért érdemes élnie.”*

Csodálatos érzékkel mutatott rá az egyetemes magyar kulturális értékekre. Vonzódott a magyar kultúrához, támogatta, népszerűsítette azt. Tette ezt mély magyarságtudatával, hazaszeretetével, a szülőföld, a Felvidék és Komárom iránti hűségével.

Tarics Péter, újságíró, tanítvány, barát

Dr. Urbán Jánosra emlékezve újra közöljük a lap 2010. szeptemberi számában megjelent cikkét.

Dr. Urbán János

Néhány feladat a diofantikus egyenletek köréből

Az itt következő oldalakon olyan példákat mutatunk be, amelyek egy része a 9., 10. osztályban tárgyalható, de a 11. osztályban már mindegyik feldolgozható. Rendes tanórán kiegészítő anyagként, esetleg szakkörön érdemes ezekkel foglalkozni.

A témakör gyakran előfordul versenyeken, a KöMal pontversenyein is.

A feladatok többsége önmagában is érdekes, a bemutatott megoldások során jó alkalom nyílik azonos átalakítások gyakorlására, különböző algebrai ötletek megismertetésére.

Néhány feladatról az elején még nem látszik, csak megoldás közben derül ki, hogy az egész számok körében kell megoldanunk egy egyenletet.

Lássuk a feladatokat és a vázlatos megoldásokat.

1. Egy egész hosszúságú négyzetet feldaraboltunk 15 darab 1×1-es négyzetre és egy nagyobb négyzetre. Mekkora volt az eredeti négyzet oldala?

Megoldás:
Jelölje x az eredeti négyzet oldalának hosszát, y a darabolás után kapott nem 1×1-es négyzet oldalának hosszát ($x > y > 1$), x, y egészek.
A feltétel szerint $x^2 = y^2 + 15$, azaz

$$x^2 - y^2 = 15,$$
$$(x - y)(x + y) = 15.$$

Mivel x, y pozitív egészek, $0 < x - y < x + y$ is egészek, a 15-öt tehát fel kell bontani két pozitív egész szám szorzatára: $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$ (más nincs). Így a szóba jöhető megoldások:

(1) $x - y = 1$, $x + y = 15$, és (2) $x - y = 3$, $x + y = 5$.

Az (1) –es egyenletrendszerből $x = 8$, $y = 7$, tehát az eredeti négyzet oldala 8 egység, a 15 darab 1×1-es négyzet levágása után megmaradt négyzet oldala 7 egység.
A (2)-es egyenletrendszerből $x = 4$, $y = 1$, ami nem jó megoldás, mivel a megmaradó négyzet oldala is 1 egység.

2. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:
a) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 20$;
b) $6x^2 - xy - 12y^2 = 14$.

Megoldás:
a) Alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalán álló kifejezést:

$$(x + y)^2 - (2y)^2 = (x - y)(x + 3y) = 20.$$

A 20-at kell két azonos paritású tényező szorzatára bontani, hiszen $(x - y) + (x + 3y) = 2x + 2y = 2(x + y)$ páros szám, tehát a két tényező azonos paritású.
Mivel a 20 bármely szorzattá bontásában legalább az egyik tényező páros, ezért mindkét tényező csak páros lehet. Így a $2 \cdot 10$ és a $(-2) \cdot (-10)$ felbontások jöhetnek szóba. Ezekből a következő négy megoldást kapjuk: $(4; 2)$, $(-4; -2)$, $(8; -2)$, $(-8; 2)$.

b) Itt is szorzat alakban írjuk fel a bal oldalon álló kifejezést:

$$6x^2 - xy - 12y^2 = (2x - 3y)(3x + 4y) = 14.$$

A lehetséges szorzatfelbontásokat végigpróbálva azt találjuk, hogy

(1) $2x - 3y = 7$, $3x + 4y = 2$; és (2) $2x - 3y = -7$, $3x + 4y = -2$

ad megoldást, méghozzá $(2; -1)$ és $(-2; 1)$ lesz a kapott két számpár.

3. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$2xy + 3y^2 = 24.$$

Megoldás:
Itt is szorzattá érdemes alakítani a bal oldalon álló kifejezést.

$$y(2x + 3y) = 24.$$

Ha y páratlan, akkor $2x + 3y$ is páratlan. Ilyen megoldás nincs, mert két páratlan szám szorzata nem lehet páros.
Az y tehát 24-nek egy páros osztója lehet: 2, 4, 6, 8, 12, 24, –2, –4, –6, –8, –12, –24 valamelyike. Sorra nézve az egyes eseteket, 8 megoldáspárt kapunk x-re és y-ra.

4. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán :

a) $x(y + 1)^2 = 243y$;
b) $x^2 - xy + 2x - 3y = 11$.

Megoldás:

a) Mivel $(y; y + 1) = 1$, $(y + 1)^2$ osztója $243 = 3^5$-nek, tehát $(y + 1 \geq 2)$, $(y + 1)^2 = 3^2$, vagy $(y + 1)^2 = 3^4$, azaz $y + 1 = 3$, $y_1 = 2$ vagy $y + 1 = 9$, $y_2 = 8$, és így $x_1 = 54$, $x_2 = 24$.

b) Fejezzük ki y-t az egyenletből:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 11}{x + 3},$$

hiszen $x + 3 > 0$. Ebből

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3 - 8}{x + 3} = x - 1 - \frac{8}{x + 3}.$$

y csak akkor lehet egész, ha $x + 3$ osztója 8-nak, azaz $x + 3$ lehet 1, 2, 4 és 8, mivel $x > 0$, $x + 3 \geq 4$. Ha $x + 3 = 4$, azaz $x = 1$, akkor $y < 0$, ez nem jó megoldás. Így $x + 3 = 8$ lehet csak, azaz $x = 5$, és $y = 3$ az egyetlen megoldáspár a pozitív egész számok körében.

5. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $x(x + 1) = 4y(y + 1)$;
b) $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$.

Megoldás:

a) Azonos átalakításokat és szorzattá alakítást célszerű végezni:

$$4x^2 + 4x + 1 = 4(4y^2 + 4y + 1) - 3,$$

ahonnan ezt kapjuk:

$$(2(2y + 1))^2 - (2x + 1)^2 = 3.$$

A 3 csak a következőképpen írható fel két négyzetszám különbségeként: $2^2 - 1^2 = 3$. Tehát $|2y + 1| = 1$ és $|2x + 1| = 1$. Ezekből a lehetséges megoldás párok: (0; 0), (–1; 0), (0; –1), (–1; –1).

b) Szorozzuk össze a bal oldali kifejezésben az első és utolsó, valamint a két középső tényezőt

$$(x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = y^2.$$

Legyen $x^2 + 8x = z$, így az egyenlet a következő alakot ölti: $z(z + 7) = y^2$. Alakítsuk át a kapott egyenletet így:

$$4z^2 + 28z + 49 - 4y^2 = 49,$$

azaz

$$(2z + 7)^2 - (2y)^2 = 49.$$

A bal oldalt szorzattá alakítva:

$$(2z + 7 + 2y)(2z + 7 - 2y) = 49.$$

Mindkét tényező páratlan, így 49 bármely két tényezős szorzat előállítása szóba jöhet. A következő megoldásokat kapjuk $(y; z)$-re: (12; 9), (–12; 9), (0; 0), (0; –7), (12; –16), (–12; –16).
Végül $(x; y)$-ra a következő tíz megoldás adódik: (1; 12), (1; –12) (–9; 12), (–9; –12), (0; 0), (–1; 0), (–8; 0), (– 7; 0), (–4; 12), (–4; –12).

6. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében a következő egyenletrendszert:

$$x + yz = 19,$$
$$x + y + z = 14.$$

Megoldás:
Az egyenletrendszerből y, z-re a következő egyenletet kapjuk:

$$yz - z - y = 5, \text{ azaz } (y - 1)(z - 1) = 6.$$

Az x, y, $z > 0$ egészek, így e feltétel miatt $y - 1$, $z - 1 \geq 0$. Következésképpen 6-nak a következő szorzat alakjai jöhetnek szóba: $1 \cdot 6$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 2$, $6 \cdot 1$. Ezeknek megfelelően $(x; y; z)$-re a következő számhármasokat kapjuk: (5; 2; 7), (5; 7; 2), (7; 3; 4), (7; 4; 3).

7. Hány megoldása van az egész számok körében a következő egyenletnek?

$$x^2 - y^2 = 2^{100}$$

Megoldás:
Az egyenlet bal oldalát alakítsuk szorzattá:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 2^{100}.$$

Mivel $x - y$ és $x + y$ összege páros, a két szám azonos paritású, tehát mindkettő páros. Így akkor kapunk megoldást, ha

$$x - y = 2^k,\ \ x + y = 2^{100-k},$$

vagy

$$x - y = -2^k,\ \ x + y = -2^{100-k},$$

$0 < k < 100$.
Tehát összesen $2 \cdot 99 = 198$ megoldás lesz az egész számok halmazán.

8. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán:

$$3^x - 2^y = 1.$$

Megoldás:
Rendezzük át az egyenletet és a bal oldalon kapott kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$3^x - 1 = 2^y.$$
$$2(3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3 + 1) = 2^y.$$

Ha $x = y = 1$, akkor teljesül az egyenlőség, tehát ez jó megoldás.
Ha $y - 1 > 0$, akkor

$$3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3 + 1 = 2^{y-1},$$

a jobb oldal páros, tehát $x > 0$ páros, $x = 2z$, ahol $z > 0$, egész szám.
A $3^{2z} - 1 = 2^y$ egyenlet bal oldalán álló kifejezést szorzattá alakítjuk:

$$(3^2 - 1)(3^{2z-2} + 3^{2z-4} + \ldots + 3^2 + 1) = 2^y.$$

Ez akkor teljesül, ha $y \geq 3$, az $x = 2$, $y = 3$ jó megoldás.
A két oldalt 8-cal osztva ezt kapjuk:

$$3^{2z-2} + 3^{2z-4} + \ldots + 3^2 + 1 = 2^{y-3}.$$

Ha $y > 3$, akkor z páros, $z = 2u$, tehát $x = 4u$. Az eredeti egyenlet ekkor $3^{4u} - 1 = 2^y$ alakú. A bal oldalt szorzattá alakítva

$$(3^4 - 1)(81^{u-1} + \ldots + 1) = 2^y.$$

Mivel $3^4 - 1 = 80$ osztható 5-tel, de 2^y nem osztható 5-tel, ez nem teljesülhet. Tehát több megoldás nincs.

9. Két szomszédos pozitív egész szám köbének különbsége n^2 ($n > 0$, egész). Igazoljuk, hogy n két négyzetszám összege. (Például: $8^3 - 7^3 = 512 - 343 = 169 = 13^2$, $13 = 2^2 + 3^2$.)

Megoldás:
A feltevés szerint

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - k^3 &= 3k^2 + 3k + 1 = \\ &= 3k(k+1) + 1 = n^2, \qquad (1)\end{aligned}$$

ahol $k > 0$ egész szám. Mivel $3k(k + 1)$ páros, n^2 páratlan, így n is páratlan szám.
(1)-ből azonos átalakítással ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}4(3k^2 + 3k + 1) &= 3(4k^2 + 4k + 1) + 1 = \\ &= 3(2k + 1)^2 + 1 = (2n)^2,\end{aligned}$$

tehát

$$3(2k + 1)^2 = (2n)^2 - 1 = (2n + 1)(2n - 1).$$

Mivel $2n + 1$ és $2n - 1$ relatív prímek, és szorzatuk egy négyzetszám háromszorosa, ezért vagy $2n + 1$, vagy $2n - 1$ is négyzetszám.
Ha $2n + 1 = (2l - 1)^2 = 4l^2 - 4l + 1$, akkor $n = 2l^2 - 2l$ páros szám, ami nem lehet.
Tehát $2n - 1 = (2l - 1)^2 = 4l^2 - 4l + 1$, amiből ez következik: $n = 2l^2 - 2l + 1 = l^2 + (l - 1)^2$, ahol $l > 0$ egész, és ezt kellett igazolni.

10. Vizsgáljuk egyszerre a következő két egyenlet megoldásait az egész számok halmazán:

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$
$$x^2 - 2y^2 = -1.$$

Igazoljuk, hogy ha $(a; b)$ megoldása az egyik egyenletnek, akkor $(a + 2b; a + b)$ megoldása a másik egyenletnek és fordítva.
Mutassuk meg ennek alapján, hogy mindkét egyenletnek végtelen sok megoldása van.

Megoldás:
Tegyük fel, hogy az $(a; b)$ egész számpárra valamelyik egyenlet teljesül, azaz

$$a^2 - 2b^2 = \pm 1.$$

Ekkor

$$(a + 2b)^2 - 2(a + b)^2 = -a^2 + 2b^2 = \mp 1$$

is teljesül. Tehát valóban megoldásai a másik egyenletnek. Az $a = 1$, $b = 0$ számpár kielégíti az $x^2 - 2y^2 = 1$ egyenletet, ebből már végtelen sok megoldást kaphatunk. Ezek közül néhány:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} x: & 1, & 1, & 3, & 7, & 17, & 41, & 99, & \ldots \\ y: & 0, & 1, & 2, & 5, & 12, & 29, & 70, & \ldots \\ x^2 - 2y^2: & 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & \ldots \end{array}$$

11. Mutassuk meg, hogy az $x^2 - 2y^2 = -1$ egyenletnek végtelen sok olyan megoldása van az egész számok halmazán, ahol x és y is páratlan szám.

Megoldás:
Akár az előző 10. feladat alapján mondhatjuk, hogy az állítás nyilván igaz. Közvetlenül így látható be: $(1; 1)$ megoldása az egyenletnek, és ha $(a; b)$ megoldás, akkor $(3a + 4b; 2a + 3b)$ is megoldás, mert ha $a^2 - 2b^2 = -1$, akkor

$$(3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 = a^2 - 2b^2 = -1$$

is teljesül.

12. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan derékszögű háromszög van, amelynek oldalhosszait egész számokkal lehet megadni, és a két befogó hossza két szomszédos egész szám.

Megoldás:
Ismert, hogy a 3, 4, 5 egységoldalú derékszögű háromszög ilyen tulajdonságú $(3^2 + 4^2 = 5^2)$. Azt kell igazolni, hogy az $x^2 + (x + 1)^2 = y^2$ egyenletnek a pozitív egész számok körében végtelen sok megoldása van.
Azonos átalakításokat végzünk:

$$2x^2 + 2x + 1 = y^2,$$
$$4x^2 + 4x + 2 = 2y^2,$$
$$(2x + 1)^2 - 2y^2 = -1.$$

Azt kell igazolni, hogy a $z = 2x + 1$ jelöléssel a

$$z^2 - 2y^2 = -1$$

egyenletnek végtelen sok olyan megoldása van, ahol z pozitív páratlan egész szám. Nyilván y is páratlan egész, ezt pedig az előző 11. feladat megoldásából tudjuk.
Néhány példa megoldásokra:

$$\begin{array}{rl} z: & 7,\ 41,\ 239,\ \ldots \\ y: & 5,\ 29,\ 169,\ \ldots \\ x: & 3,\ 20,\ 119,\ \ldots\ . \end{array}$$

13. A következő két egyenlőség nyilván igaz:
$1 + 2 = 3$, $\quad 1 + 2 + 3 + \ldots + 13 + 14 = 105 =$
$= 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20.$
Adjunk meg végtelen sok olyan n-et, amelyre teljesül, hogy az első n pozitív egész szám összege egyenlő a következő néhány egész szám összegével.

Megoldás:
Legyenek $k > n > 0$ egészek, és oldjuk meg az

$$1 + 2 + \ldots + n = n + 1 + n + 2 + \ldots + k$$

egyenletet. Az ismert összegképletek szerint az egyenlet így írható:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2},$$

azonos átalakításokkal

$$n^2 + n = \frac{k^2 + k}{2},$$
$$8n^2 + 8n = 4k^2 + 4k,$$
$$2(2n+1)^2 - 2 = (2k+1)^2 - 1,$$
$$(2k+1)^2 - 2(2n+1)^2 = -1.$$

Legyen $x = 2k + 1$, $y = 2n + 1$, ekkor

$$x^2 - 2y^2 = -1.$$

A 11. feladat megoldásából tudjuk, hogy az egyenletnek végtelen sok olyan megoldása van, ahol x és y is páratlan pozitív egész szám.
Néhány megoldás:

$$\begin{array}{rl} 2k+1: & 7,\ 41,\ 239,\ \ldots \\ 2n+1: & 5,\ 29,\ 169,\ \ldots \\ k: & 3,\ 20,\ 119,\ \ldots \\ n: & 2,\ 14,\ \ 84,\ \ldots\ . \end{array}$$

14. Igazoljuk, hogy az

$$x^2 - xy - y^2 = \pm 1$$

egyenleteknek végtelen sok megoldása van a nemnegatív egész számok halmazán. (Mutassuk meg, hogy $(0; 1)$ megoldás, és ha $(a; b)$ megoldás, akkor $(a + b; a)$ is megoldás.)

Megoldás:
A (0; 1) számpár nyilván megoldás: $0 - 0 - 1 = = -1$. Tegyük fel, hogy $(a; b)$ megoldás, azaz $a^2 - ab - b^2 = \mp 1$.
Helyettesítsük az egyenletbe az $(a + b; a)$ számpárt:

$$(a + b)^2 - (a + b)a - a^2 = -a^2 + ab + b^2 = \mp 1,$$

tehát ez is megoldás. Írjuk fel az első tíz megoldáspárt:

x: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …
y: 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …
$x^2 - xy - y^2$: –1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, … .

Ha a kapott x értékekre bevezetjük az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ jelölést, akkor világos, hogy ezek a Fibonacci sorozat elemei. Az y értékek egy „ütemmel" később szintén a Fibonacci sorozat elemei. Az egyenlet végtelen sok megoldását adják tehát a következő számok: $(f_{n+1}; f_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
(Az is igazolható – kissé hosszadalmasabban –, hogy a nemnegatív egészek körében nincs más megoldás.)

15. Írjuk fel a Pascal háromszög 14. és 15. sorát, és figyeljük meg, hogy $\binom{15}{5} = \binom{14}{6}$.
Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan $x, y > 0$ egész szám van, amelyre teljesül, hogy

$$\binom{x}{y-1} = \binom{x-1}{y}.$$

Megoldás:
Írjuk fel a Pascal háromszög 14. sorának első 8 elemét:

1, 14, 91, 364, 1001, 2002, **3003**, 3432, …

majd a 15 sor elejét:

1, 15, 105, 455, 1365, **3003**, 5005, … .

A definíció alapján alakítsuk át az $\binom{x}{y-1} = \binom{x-1}{y}$ egyenletet:

$$\frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} = \frac{(x-1)!}{y!(x-1-y)!},$$

$$xy = (x - y + 1)(x - y). \qquad (1)$$

Tegyük fel, hogy $x, y > 0$ egészek, és megoldásai az egyenletnek. Ekkor $x = a \cdot d$, $y = b \cdot d$ alakba írható, ahol $(a; b) = 1$. Ezeket (1)-be helyettesítve, és d-vel egyszerűsítve ezt kapjuk:

$$abd = (ad - bd + 1)(a - b).$$

Mivel $(ab; a - b) = 1$ és $(ad - bd + 1; d) = 1$, csak a következő lehetőség maradt:

$$a - b = d \quad \text{és} \quad ab = ad - bd + 1.$$

Az első egyenletből $a = b + d$, ezt a második egyenletbe helyettesítve és rendezve:

$$(b + d)b = (b + d)d - bd + 1,$$
$$b^2 + bd - d^2 = 1,$$
$$d^2 - bd - b^2 = -1. \qquad (2)$$

Az előző, 14. feladat megoldása alapján tudjuk, hogy a kapott (2) egyenletnek végtelen sok megoldása van, ezek így írhatók:

$$d = f_{2k}, \quad b = f_{2k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Ekkor $a = d + b = f_{2k+1}$, tehát

$$x = f_{2k} \cdot f_{2k+1}, \quad y = f_{2k} \cdot f_{2k-1}.$$

Igazolható az $f_{2k}^2 - f_{2k+1} \cdot f_{2k-1} = -1$ azonosság felhasználásával, hogy ezek valóban megoldások. (További meggondolással az is igazolható, hogy a nemnegatív egészek körében más megoldás nincs.)
A talált megoldások közül az első néhány:

d: 1, 3, 8, 21, 55, …
b: 1, 2, 5, 13, 34, …
a: 2, 5, 13, 34, 89, …
x: 2, 15, 104, 714, 4895, …
y: 1, 6, 40, 273, 1870, … .

Irodalom

[1] A. V. Szpivak (2008): Aritmetika 2. A Kvant kiskönyvtára, 109. kötet

[2] Dr. Sárközi András: Számelmélet. Műszaki Kiadó

Dr. Molnár István

Néhány összegzési feladat

„Én azt mondom, hogy nem az a feladata a matematikának, hogy bemagoltasson az emberrel bizonyos dolgokat, hanem hogy gondolkodásra próbáljon nevelni.”

Dr. Urbán János

A következőkben néhány összegzési feladaton keresztül érdekes összefüggéseket mutatunk be a pozitív egész számok körében.

I. Egy érdekes „szabályszerűség” figyelhető meg a pozitív egész számok esetén, nevezetesen:

$$1+2=3$$
$$4+5+6=7+8$$
$$9+10+11+12=13+14+15$$
$$16+17+18+19+20=21+22+23+24$$
$$\vdots$$

Tegyük fel a kérdést általánosan:

1. Igaz-e, hogy bármely pozitív egész n esetén létezik $2n+1$ darab egymást követő pozitív egész szám úgy, hogy az első $n+1$ darab szám összege egyenlő az utolsó n darab szám összegével?

Megoldás

Legyen a $2n+1$ darab egymást követő pozitív egész szám:

$$x;\ x+1;\ x+2;\ \ldots;\ x+n;\ x+n+1;\ \ldots;\ x+2n-1;\ x+2n,\ \text{ahol } x\in\mathbb{Z}^+.$$

Teljesülnie kell az alábbi összefüggésnek:

$$x+(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+n)= \\ =(x+n+1)+\ldots+(x+2n-1)+(x+2n)$$

Átrendezve:

$$x+n=(x+2n)-x+(x+2n-1)-(x+1)+ \\ +\ldots+(x+n+1)-(x+n-1)$$

$$x+n=2n+(2n-2)+\ldots+2$$

$$x+n=2\cdot(n+n-1+\ldots+2+1)=$$

$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$$

Innen $x=n^2$.

Tehát a keresett $2n+1$ szám, bármely $n\in\mathbb{Z}^+$ esetén: n^2; n^2+1; n^2+2; ...; n^2+2n, azaz általánosan

$$n^2+(n^2+1)+(n^2+2)+\ldots+(n^2+n)= \\ =(n^2+n+1)+(n^2+n+2)+\ldots+(n^2+2n).$$

Megjegyzés

Mivel az n-edik sor utolsó eleme n^2+2n és a következő természetes szám az $n^2+2n+1=(n+1)^2$, épp az $(n+1)$-edik sor első eleme, így az összes pozitív egész szám benne lesz a „táblázatban”.

II. A következőkben vizsgáljunk meg egy általánosabb feladatot!

2. Létezik-e végtelen sok olyan pozitív egész n, amelyre teljesül, hogy az első n darab pozitív egész szám összege egyenlő a következő néhány egymás utáni egész szám összegével?

Megoldás

Legyenek n, k pozitív egész számok úgy, hogy $0<n<k$.

Teljesülnie kell az alábbi összefüggésnek:

$$1+2+3+\ldots+n=(n+1)+(n+2)+\ldots+k$$

$$\sum_{i=1}^{n} i=\sum_{i=1}^{k} i-\sum_{i=1}^{n} i$$

Az ismert összegképletek alapján kapjuk, hogy

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{k(k+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Átrendezve:

$$\frac{k(k+1)}{2}-n(n+1)=0$$

$$4k^2+4k-8n^2-8n=0$$

$$(2k+1)^2-1-2(2n+1)^2+2=0$$

$$(2k+1)^2-2(2n+1)^2=-1$$

Legyen $x=2k+1$ és $y=2n+1$.

Így az $x^2-2y^2=-1$ diofantikus egyenlethez jutunk.

Figyelembe véve, hogy x és y is páratlan szám, elegendő belátnunk, hogy az $x^2 - 2y^2 = -1$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a pozitív páratlan egész számok halmazán.
Némi próbálkozás után ez könnyen bizonyítható, hiszen egyfelől, ha u és v páratlan számok, akkor $3u + 4v$ és $2u + 3v$ szintén páratlan számok lesznek, másrészt pedig, ha $(u; v)$ megoldása az $x^2 - 2y^2 = -1$ egyenletnek, akkor $(3u + 4v; 2u + 3v)$ szintén megoldása lesz, mivel

$$(3u + 4v)^2 - 2(2u + 3v)^2 = 9u^2 + 24uv + 16v^2 - 8u^2 - 24uv - 18v^2 = u^2 - 2v^2 = -1.$$

A $(7; 5)$ megoldása az egyenletnek (ugyan az $(1; 1)$ szintén megoldás, de ebben az esetben $n = k = 0$, ami nem jó a kezdeti feltételek miatt), így az előbbiekben leírtak alapján végtelen sok megoldást származtathatunk.
Néhány megoldás:

x	7	41	239	1393	...
y	5	29	169	985	...
k	3	20	119	696	...
n	2	14	84	492	...

azaz

$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 14 = 15 + 16 + \ldots + 20$$
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 84 = 85 + 86 + \ldots + 119$$
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 492 = 493 + 494 + \ldots + 696$$
$$\vdots$$

Megjegyzés
A 2. feladat több, a diofantikus egyenletekhez kapcsolódó feladattal együtt megtalálható [1]-ben is.

III. Feltehető a kérdés, hogy mi történik akkor, ha az első feladatban a pozitív egész számok helyén azok négyzetei állnak?

3. Létezik-e $2n + 1$ darab (n pozitív egész) egymást követő pozitív egész szám úgy, hogy az első $n + 1$ darab szám négyzeteinek összege egyenlő az utolsó n darab szám négyzeteinek összegével?

Megoldás
Legyen a $2n + 1$ darab egymást követő pozitív egész szám:

$$x;\ x + 1;\ x + 2;\ \ldots;\ x + n;\ x + n + 1;\ \ldots;\ x + 2n - 1;\ x + 2n, \text{ ahol } x \in \mathbb{Z}^+.$$

Teljesülnie kell az alábbi összefüggésnek:

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + \ldots + (x + n)^2 = (x + n + 1)^2 + \ldots + (x + 2n - 1)^2 + (x + 2n)^2.$$

Átrendezve, majd alkalmazva az $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ azonosságot kapjuk, hogy

$$(x + n)^2 = (x + 2n)^2 - x^2 + (x + 2n - 1)^2 - (x + 1)^2 + \ldots + (x + n + 1)^2 - (x + n - 1)^2.$$

$$(x + n)^2 = (2x + 2n) \cdot 2n + (2x + 2n) \cdot (2n - 2) + \ldots + (2x + 2n) \cdot 2.$$

$$(x + n)^2 = 2 \cdot (2x + 2n)(n + n - 1 + \ldots + 2 + 1) = 2 \cdot (2x + 2n) \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2(x + n)(n^2 + n).$$

Mivel $x + n > 0$, ezért végigoszthatunk vele, így $x + n = 2n^2 + 2n$, ahonnan $x = 2n^2 + n$.
Tehát a keresett $2n + 1$ szám, bármely $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén:

$$2n^2 + n;\ 2n^2 + n + 1;\ 2n^2 + n + 2;\ \ldots;\ 2n^2 + 3n,$$

azaz általánosan

$$(2n^2 + n)^2 + (2n^2 + n + 1)^2 + \ldots + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n + 2)^2 + \ldots + (2n^2 + 3n)^2$$

Megjegyzés
Írjuk fel az első néhány n érték esetén kapott eredményt:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$
$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$
$$\vdots$$

Megfigyelhető, hogy a felírt sorok első eleme egy háromszögszám négyzete.
(A háromszögszámok olyan számok, amelyek előállnak az első néhány egymást követő pozitív egész szám összegeként, azaz az $1 + 2 + \ldots + n$ alakú számok. Nevüket onnan kapták, hogy szabályos háromszög alakba rendezhetők. Az első húsz háromszögszám: 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45; 55; 66; 78; 91; 105; 120; 136; 153; 171; 190; 210.
Ez a megfigyelés minden sor esetén igaznak bizonyul, mivel az n-edik sor első eleme a $(2n^2 + n)^2$ és $2n^2 + n$ átírható $2n^2 + n = n(2n + 1) = \frac{2n(2n+1)}{2}$ alakra, tehát háromszögszám lesz (és pedig a $2n$-edik háromszögszám).

IV. A továbbiakban a háromszögszámokat tanulmányozva a következő megfigyelést tehetjük:

$$1+3+6=10$$
$$15+21+28+36=45+55$$
$$66+78+91+105+120=136+153+171$$
$$\vdots$$
$$t_1+t_2+t_3=t_4$$
$$t_5+t_6+t_7+t_8=t_9+t_{10}$$
$$t_{11}+t_{12}+t_{13}+t_{14}+t_{15}=t_{16}+t_{17}+t_{18}$$
$$\vdots$$

ahol t_n-nel jelöljük az n-edik háromszögszámot. A fentiek kapcsán adódik a következő kérdés:

4. Igaz-e, hogy bármely pozitív egész n esetén létezik $2n$ darab egymás utáni háromszögszám úgy, hogy az első $n+1$ darab háromszögszám összege egyenlő az utolsó $n-1$ darab háromszögszám összegével?

Megoldás

Legyen a $2n$ darab egymás utáni háromszögszám:

$$t_x;\ t_{x+1};\ t_{x+2};\ \ldots;\ t_{x+n};\ t_{x+n+1};\ \ldots;\ t_{x+2n-2};\ t_{x+2n-1},\ \text{ ahol } x\in\mathbb{Z}^+.$$

Teljesülnie kell az alábbi összefüggésnek:

$$t_x+t_{x+1}+t_{x+2}+\ldots+t_{x+n}= \\ =t_{x+n+1}+t_{x+n+2}+t_{x+2n-1}$$

Átrendezve:

$$t_x+t_{x+n}=(t_{x+n+1}-t_{x+1})+(t_{x+n+2}-t_{x+2})+\ldots+(t_{x+2n-1}-t_{x+n-1})$$

$$t_x+t_{x+n}=\sum_{k=1}^{n-1}(t_{x+n+k}-t_{x+k})$$

Mivel

$$t_{x+n+k}-t_{x+k}=\frac{(x+n+k)(x+n+k+1)}{2}-\frac{(x+k)(x+k+1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot(x^2+n^2+k^2+2nx+2kx+2nk+x+n+k-x^2-2kx-k^2-x-k)=\frac{1}{2}\cdot(n^2+2nx+2nk+n)=$$
$$=\frac{n}{2}\cdot(2x+2k+n+1),$$

így

$$\frac{x(x+1)}{2}+\frac{(x+n)(x+n+1)}{2}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{n}{2}\cdot(2x+2k+n+1)\right]=\frac{n}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}[(2x+2k+n+1)]$$
$$\frac{1}{2}\cdot(x^2+x+x^2+2nx+n^2+x+n)=$$
$$=\frac{n}{2}\cdot\left[2x(n-1)+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}+(n+1)(n-1)\right].$$

A műveletek elvégzése, átrendezés és az összevonások után kapjuk, hogy

$$x^2+2nx-xn^2+x-n^3+n^2+n=0$$
$$x^2+nx+nx+n^2-xn^2-n^3+x+n=0$$
$$x(x+n)+n(x+n)-n^2(x+n)+(x+n)=0$$
$$(x+n)(x+n-n^2+1)=0$$

Mivel $x+n>0$, ezért végigoszthatunk vele, így $x+n-n^2+1=0$, ahonnan $x=n^2-n-1$. Tehát a keresett háromszögszámok:

$$t_{n^2-n-1};\ t_{n^2-n};\ t_{n^2-n+1};\ \ldots;\ t_{n^2+n-3};\ t_{n^2+n-2},$$

azaz általánosan

$$t_{n^2-n-1}+t_{n^2-n}+t_{n^2-n+1}+\ldots+t_{n^2-1}= \\ =t_{n^2}+t_{n^2+1}+\ldots+t_{n^2+n-2}$$

Megjegyzés

Mivel az n-edik sorban álló utolsó háromszögszám indexe n^2+n-2 és a következő index az $n^2+n-2+1=n^2+n-1=(n+1)^2-(n+1)-1$, ami épp az $(n+1)$-edik sorban álló első háromszögszám indexe, így az összes háromszögszám megtalálható a fenti táblázatban.

Remélhetőleg az ismertetett feladatokkal sikerült az érdeklődést felkeltenünk, valamint ösztönzőleg hatnunk hasonló összefüggések keresésére és bemutatására. Végezetül néhány további feladat, melyek tanulmányozását a Tisztelt Olvasóra bízzuk:

- Létezik-e $2n+1$ darab (n pozitív egész) egymást követő pozitív egész szám úgy, hogy első $n+1$ darab szám köbeinek összege egyenlő az utolsó n darab szám köbeinek összegével?
- Létezik-e $2n$ darab (n pozitív egész) egymást követő pozitív egész szám úgy, hogy első $n+1$ darab szám (négyzeteinek, köbeinek) összege egyenlő az utolsó $n-1$ darab szám (négyzeteinek, köbeinek) összegével?
- Vannak-e olyan n-ek, amelyekre teljesül, hogy az első n darab háromszögszám összege egyenlő a következő néhány egymás utáni háromszögszám összegével?

Felhasznált irodalom

[1] Dr. Urbán János: *Néhány feladat a diofantikus egyenletek köréből.* A Matematika Tanítása, 2010/4. sz., 15–19.

Molnár Zoltán[1]

Mi fér bele a tananyagba projektív geometriából?

Kivonat. Hogyan lehet a heti három órás kilencedikes matematika tananyagban elhelyezni a Desargues-tételkört? Erre adnék részleges választ, kitérve természetesen az általánosítások, ill. a későbbi tizedikes alkalmazhatóság lehetőségére is.

1. Bevezetés

Bár csak szubjektív benyomásokra alapozom, de egészen biztosra veszem, hogy a geometria szerepe a középiskolai matematika tantárgy keretein belül egészen megváltozott, legalábbis a diákok szemében. Egyfelől a számítógépes animáció elterjedése a mindennapi életben, másfelől az animációk minőségének intenzív fejlődése nyilvánvalóan kihat arra, hogy milyen élményt várnak a középiskolások a vizuális műveltségterület tantárgyaitól, illetve ezen belül a geometria témakörétől. Egyetlen illusztráló példa: míg a '90-es évek elejéig a szakközépiskolákban az ábrázoló geometriát, illetve az ezzel rokon szakrajzot külön tantárgyként tanították, addig ez a terület mostanra integrálódott más részterületekkel együtt, mint például a számítógépes tervezés, CAD-CAM programok használata komplexebb műszaki kommunikációs tantárgyakban. Mindez értékelhető a geometria háttérbe szorulásaként, amennyiben geometrián az elemi síkgeometriát értjük. Értékelhető azonban úgy is, hogy a geometria kiszabadult a matematikaórákról a vizuális kommunikáció általánosabb színtereire, maga után hagyva a fogalmai köré szerveződött évezredes axiomatikus-verbális védőövet. A szerkeszthetőség és a diszkusszió korlátozó, ill. verbális tevékenysége után most a hangsúly a láttatáson van.

Ennek a hangsúlyeltolódásnak kísérletképpen megfelelve a perspektívát és a térszemléletet próbáltam bevonni a kilencedikes geometria tananyagba. A feladatokat úgy szerkesztettem össze, hogy a szokásos szerkesztéseket gyakorló, alapfogalmakat átismétlő feladatok „burkológörbéje" egy új témakört jelenítsen meg, éspedig a Desargues-tételt és a hozzá kapcsolódó tétel- és példakört. Mindezt úgy, hogy lehetőleg ne bővüljön lényegesen a tananyag, csak néhány plusz órát és néhány szokásostól eltérő feladatot szúrtam be a második féléves geometria témakörbe.

A budapesti Sztehlo Gábor Evangélikus Gimnázium rajz és művészet tagozatos kilencedikesei a saját kezük munkájára rácsodálkozva ismerték meg a perspektivikus és axonometrikus ábrázolás elemeit, természetesen csak az idő rövidségét tekintetbe vevő naiv szinten.

A bevezető végén megemlíteném, hogy a cím egy kis indoklásra szorul. A hosszabb verzió biztos ez lenne: „Mi fér bele a minimális heti három órába projektív geometriából?". Emelt óraszámban ugyanis sok izgalmas témakört lehet érinteni, ami akár a diák, akár a tanár számára élvezetessé teszi a matematikaórát, új módszerek, megoldási módok felmutatásával hasznossá teszi az adott témakörre fordított időt. Most inkább azt mutatnám be, hogy alacsony óraszámban hogyan lehet úgy strukturálni a kilencedikes geometria témakört, hogy mégis beleférjen egy kicsi másból is. Az alábbi feladatsor

[1] Köszönetemet fejezem ki Wettl Ferencnek, a BME Algebra Tanszéke docensének, akivel a perspektivitás témakörében számomra nagyon tanulságos beszélgetést folytathattam.

elsősorban matematika tanároknak szól, nem fogalmaztam úgy át, hogy az tankönyvrészletként is megállja a helyét. Tanítását elő kell készíteni azzal, hogy a feladatok és magyarázatok szóhasználatát az adott diákcsoport igényeinek és befogadóképességének megfelelően alakítjuk át.

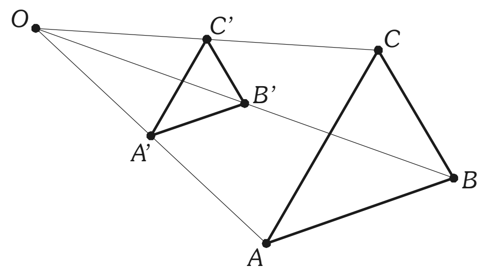
2. Perspektivitás

A kiindulópontunk az, hogy a geometriát a térelemek illeszkedésének témakörével kezdjük, olyan alapvető feladatok áttekintésével, amelyekben síkok, sík és egyenes, egyenesek kölcsönös elhelyezkedéseit ismerhetjük meg. Ezt követően, az alapszerkesztéseket átismételve máris rátérhetünk néhány, már az általános iskolából jól ismert síkbeli transzformáció végrehajtására. Az alábbiak azonnal közel visznek minket a projektív geometria fogalmaihoz.

1. feladat. Adott pontból kicsinyítsünk felére egy adott háromszöget! (Vö.: [Kosztolányi 2003, 133. o., 1. példa].)

Megjegyzés. Természetesen a feladat a matematikai szigorúság egy adott fokát megkövetelve csak a középpontos hasonlóság alapos ismeretével oldható meg. Ám, ha ez az általános iskolában nem volt olyan akadály, ami a szerkesztés kivitelezését bemutathatatlanná tette volna, akkor ez most sem okozhat problémát.

Megoldás. Felezzük meg az OA, OB, OC szakaszokat (*1. ábra*). Ekkor például az OAB háromszög kicsinyített képe az $OA'B'$ háromszög lesz, így az ABC háromszög oldalainak kicsinyített képei rendre az $A'B'C'$ háromszög oldalai lesznek.



1. ábra

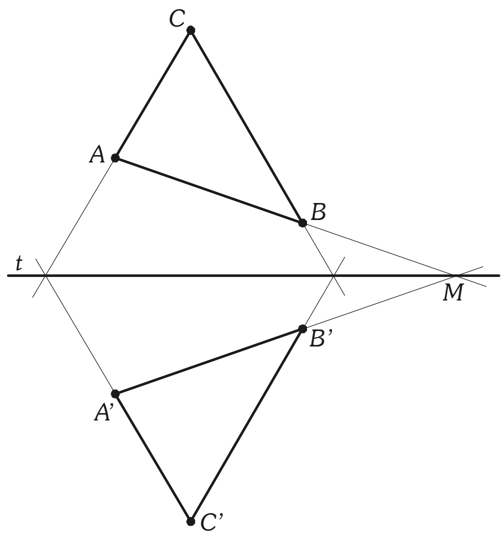
Rögtön rámutathatunk arra, hogy a háromszög és képe egymáshoz a kicsinyítés középpontjára vonatkozóan perspektív, általában pedig:

1. definíció. Az ABC háromszög és a neki megfeleltetett $A'B'C'$ háromszög *pontra perspektív,* ha van olyan pont, melyen a megfelelő csúcspárok által meghatározott egyenesek mind áthaladnak. (Vö.: [Hajós 1991, 452. o.].)

Az előző feladathoz hasonlóan a korábban tanult szerkesztési eljárások felelevenítésére szolgálhat a következő is.

2. feladat. Adott egyenesre tükrözzünk egy háromszöget, melynek oldalai nem párhuzamosak a tükörtengellyel! Hol metszik egymást a megfelelő oldalak egyenesei? (Vö.: [Kosztolányi 2003, 133. o., 1. példa].)

Megjegyzés. Szokásos a tengelyes tükrözést úgy megvalósítani, hogy kijelölünk a tengelyen két tetszőleges pontot, majd előbb az egyikbe, majd a másikba beszúrjuk a körzőt és rendre körívezünk a tükrözni kívánt pontokig kinyitott körzővel. Itt is érdemes kitérni arra, hogy azt gondos érveléssel kéne belátni, hogy ez a szerkesztés valóban a tükörképet adja.



2. ábra

Megoldás. A szerkesztési pontatlanság dacára a szimmetria miatt mindenki számára világos, hogy az egyenesek a tengelyen metszik egymást. Valóban, például ha az *AB* oldal egyenese az *M* pontban metszi a tengelyt (*2. ábra*), akkor az *A*, *B*, *M* pontok közös egyenesének képe (a tükrözés egyenestartása miatt) az *A'*, *B'*, *M* pontok egyenes lesz, melyek metszéspontja az *M* tengelypont.

2. definíció. Az *ABC* háromszög és a neki megfeleltetett *A'B'C'* háromszög *egyenesre perspektív,* ha a megfelelő oldalegyenesek metszéspontjai egy egyenesre esnek. (Vö.: [Hajós 1991, 452. o.].)

Tudjuk, hogy az első és második feladat a perspektivitás jellegzetes, de atipikus esetei: az első alakzat egyenesre is perspektív, de a perspektíva egyenese az ideális egyenes, a második alakzat pontra is perspektív, de az a pont egy ideális pont.[2] Ezeket a lényeges, de kivételes vonatkozásokat egyelőre elhallgathatjuk diákjaink előtt. A teljesség kedvéért azonban itt leírjuk a megfelelő definíciókat.

3. definíció. Az S sík egymással párhuzamos egyenesei egy-egy ekvivalenciaosztályt határoznak meg. Ezeket az osztályokat *ideális pontoknak,* az ideális pontok halmazát ($\mathcal{I}$) *ideális egyenesnek* nevezzük. A $\mathcal{P} = S \cup \mathcal{I}$ halmaz az ideális elemekkel kibővített sík, azaz a *projektív sík.* Az $I \in \mathcal{I}$ ideális pont rajta van az $e \subseteq S$ egyenesen, ha $e \in I$, azaz I az e-vel párhuzamos síkbeli egyenesek halmaza. Az ideális pontok rajta vannak az ideális egyenesen. (Vö.: [Hajós 441. o., 44.1.].)

Megjegyzés. Az ideális pontok definíciója után a pontra és egyenesre perspektivitás fogalmát érdemes értelemszerűen kiterjeszteni az ideális elemekre is. Ez esetben a kicsinyítéses példa elrendezése nem csak pontra, de egyenesre vonatkozó perspektivitást, a tükrözéses példa pedig pontra perspektvitást is mutat. Az első esetben a perspektivitás tengelye az ideális egyenes, a másodikban a perspektivitás középpontja a tengelyre merőleges egyenesek által meghatározott ideális pont. A bölcsész érdeklődésű diákok előtt a világért se mulasszuk el megjegyezni, hogy a projektív sík szóhasználatában érvényessé válik a Bolyai-parafrázis: a párhuzamosok az ideális pontban találkoznak.

[2] Lásd [Hajós 1991, 453. o. B megj.].

3. Desargues tétele

3. feladat. Rajzoljunk két háromszöget, melyek pontra perspektívek és ahol a megfelelő oldalak egyenesei metszik egymást! Egyenesre is perspektívek-e ezek? (Vö.: [Hajós 1991, 452. o., Tétel a)].)

Megoldás. Természetesen a válasz a szerkesztés alapján csak sejtésként fogalmazható meg. A gyanút, miszerint igen: egyenesre is perspektív az elrendezés, Desargues tétele[3] igazolja, melynek egy esetét és egy irányát be fogjuk bizonyítani.

Megjegyzés. A Desargues-tétel szokásos térgeometriai bizonyítása nagy erővel mutatja azt a geometriai hagyományt, mely az Eukleidész előtti matematikáig vezethető vissza és amely abban a megfigyelésben érhető legjobban tetten, hogy az ógörögök bizonyításra használt szava egyszerre „megmutatást", „belátást" is jelent. Az ábra mintegy megelevenedik és létrehozza a szemlélőben a szubjektív bizonyosság élményét, mindenféle verbális érvelés nélkül, afelől, hogy a tétel igaz. Az érvelő matematika előtti korról olvashatunk Szabó Árpád számos munkájában[4], de ugyanerre a jelenségre utal Reuben Hersh is, amikor rámutat arra, hogy Eukleidész Elemeiben *minden egyes* tételnél szerepel egy ábra, mely a belátást segíti elő, s mely egyáltalán nem csak mellékes illusztráció.[5]

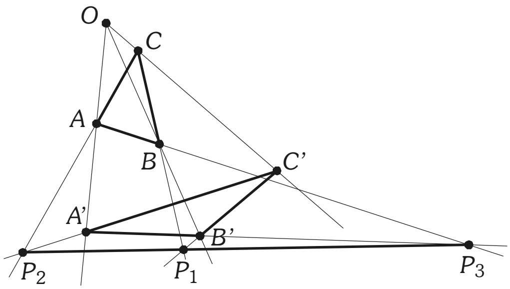
4. feladat. (*Desargues-tétel*) Bizonyítsuk be térgeometriai eszközökkel, hogy ha két háromszög pontra perspektív és a megfelelő oldalak egyenesei metszik egymást, akkor a két háromszög

[3] Lásd [Hajós 1991, 452. o.].
[4] Lásd különösképpen pl.: [Szabó 1997, 19. o.].
[5] Lásd [Hersh 1997, p. 186].

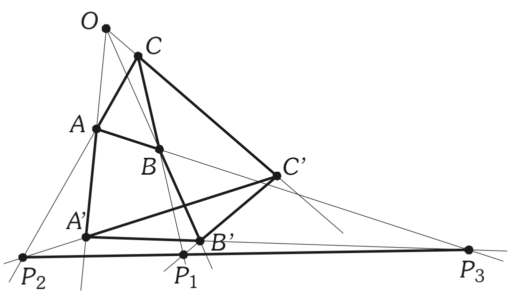
egyenesre is perspektív! (Vö.: [Hajós 1991, 452. o., Tétel a)].)

Megoldás. A Desargues-tétel ezen változatát a térgeometria illeszkedési témakörének következő gondolatmenetével igazolhatjuk.[6] A síkbeli *ABCA'B'C'* sokszög (*3-4. ábra*) tekinthető egy háromoldalú csonkagúlának, melynek alapsíkja az *A'B'C'* háromszög síkja, a metszés síkja pedig az *A*, *B*, *C* pontok által kifeszített sík.
Az $ABC_\triangle$ oldalegyenesei mind a metsző síkban, az $A'B'C'_\triangle$ minden oldalegyenese az alap síkjában van. Tehát ha ezek az egyenesek metszik egymást, akkor a metszéspontok csak a két sík metszésvonalán lehetnek, azaz egy egyenesbe esnek.

Megjegyzés. Látható volt, hogy a bizonyítás tisztán térgeometriai illeszkedési feladat, és hasonlóképpen – bár kissé összetettebb módon – a tétel megfordításának igazolása is tisztán ilyen feladat. Következésképp a Desargues-tétel tekinthető az első geometriai témakör átismétlésének, alkalmazásának.



3. ábra



4. ábra

[6] Lásd [Hajós 1991, 453. o., B megj.].

4. Általánosítások

A Desargues-tétel kimondása és bizonyítása, ha akarjuk, tekinthető az elemi illeszkedési témakör gyakorlásának, ezért plusz órát nem emészt föl, ismétlő órának minősíthető. A Desargues-tétel általánosításának témaköre már azért egy-két plusz óra beiktatását igényli.

A tétel két irányba terjeszthető ki. Egyfelől gondolkodhatunk azon, hogy a tükrözéses feladatban szereplő elrendezés alapján milyen új tételt mondhatunk ki. Ez az út feltételezi, hogy beszéltünk a diákoknak az ideális alakzatokról.

5. feladat. Igazoljuk, hogy ha két háromszög megfelelő csúcsai párhuzamos egyeneseket határoznak meg és a megfelelő oldalegyeneseik metszik egymást, akkor a két háromszög egyenesre perspektív!

Megoldás. A megoldás a Desargues-tétel bizonyításának megismétlése háromoldalú csonka hasábra.

Megjegyzés. Talán nehézkesnek tűnik az állítás megfogalmazása, de gondoljunk bele: az ideális térelemek alapos megtanítása, a projektív sík axiómarendszerének és dualitási tételének ismertetése együtt már biztosan nem fér bele a feszített tempójú, heti három órás rohanásba.

A másik általánosítási lehetőség a sokszögek esete. Két *n*-szög pontra, ill. egyenesre vonatkozó perspektivitásán azt értjük, hogy megfelelő csúcsaik közös pontba érkező egyeneseken vannak, ill. megfelelő oldalegyeneseik közös egyenesen metszik egymást.

6. feladat. Rajzoljunk pontra perspektív négyszögpárokat! Egyenesre perspektívek-e ezek?

Megoldás. Már az első próbálkozásokból kiderül, hogy négyszögekre a Desargues-kijelentés általában nem fog teljesülni. Elég sok szimmetriát mutató elrendezésre azonban igen, például négyzet vagy szimmetrikus trapéz nagyított képeinél.

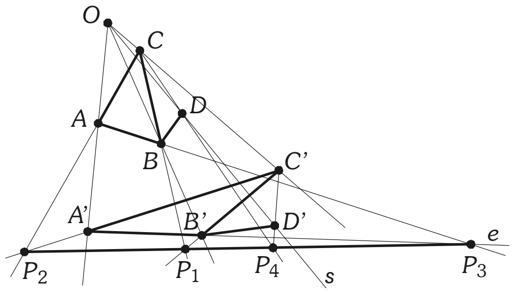
Megjegyzés. Felvetődik a kérdés, hogy mi a feltétele annak, hogy ha adott az első alakzat, akkor a pontra perspektivitás általi képével együtt mikor lesznek ők egyenesre is perspektívek. Sajnos a [Vigassy 1972] szakköri kiadványban a szerző félreérthetően fogalmaz, amikor azt írja: „Sőt, a [Desargues-]tétel nem csak háromszögekre érvényes, hanem négyszögekre is és tetszőleges oldalszámú sokszögekre is.”[7] A tétel sokszögekre általában nem igaz.

Megjegyzés. A lehetséges általánosítások felkutatását kezdetben síkgeometriai, ill. térgeometriai konstrukciós feladatként is felfoghatjuk. Mindkettő érdekes megállapításokra vezet. Egyfelől érdeklődhetünk, hogy a Desargues-tétel *térgeometriai bizonyítása* milyen általános elrendezésekre működik még. Például milyen körre, ellipszisre, sokszögre?
Persze ehhez rá kell mutatnunk arra, hogy az ellipszis *merőleges affinitással* származtatható a körből és hogy az ellipszis tekinthető egy ferde síkban lévő kör képének. Ezek a projekt jellegű feladatok inkább házi feladatként adhatók föl.
Másfelől felvethetjük a következő síkbeli konstrukciós feladatot is.

7. feladat. Legyen adva egy tetszőleges négyszög és a perspektivitás középpontja. Rajzoljunk pontra perspektív négyszöget hozzá, mellyel egyenesre perspektív párt alkotnak!

Megjegyzés. Segítségként érdemes mondanunk, hogy először rajzoljunk két perspektív háromszöget, majd vegyünk fel egy új sugáron egy új pontot és keressük meg a képét, mely alkalmas lesz. Ezután könnyen megtalálható a keresett pont. A nehézség a konstrukció helyességének belátásában van.

Megoldás. Vegyünk fel az *5. ábra* szerint egy O pontra perspektív ABC és $A'B'C'$ háromszöget, melyek perspektivitásának tengelye az e egyenes, amit a megfelelő oldalegyenesek P_1, P_2, P_3 metszéspontjai határoznak meg. Vegyük föl tetszőlegesen az O-ból induló s sugarat és legyen rajta a D pont tetszőleges. Tekintsük a D és C pontok egyenesét, ahol ez az egyenes metszi a perspektivitás tengelyét, legyen az a P_4 pont. Legyen a D' pont az a pont, melyben a P_4 és C' egyenese metszi az s sugarat. Állítjuk, hogy ekkor az $ABDC$ négyszög egyenesre perspektív az $A'B'D'C'$ négyszöghöz. Valóban, elég a BD, $B'D'$ egyeneseinek metszéspontját vizsgálni, a másik metszéspont hasonlóan viselkedik. A CBD és $C'B'D'$ háromszögek pontra perspektívek, így egyenesre is. A CB és $C'B'$ egyeneseinek metszéspontja az e-n van (P_1), a konstrukció miatt a CD és $C'D'$ egyeneseinek metszéspontja is az e-n van (P_4). A CBD és $C'B'D'$ háromszögek perspektivitási tengelye tehát egybeesik az e-vel, mely így a négyszögek számára is a perspektivitás tengelye lesz.



5. ábra

Megjegyzés. Az érvelés szinte gráfelméleti és valóban, az általánosítás síkbeli teljes gráfokról szól.[8]

4. definíció. *Teljes n csúcspontú sokszög* alatt értünk a síkon n különböző pontot az őket összekötő $\frac{n(n-1)}{2}$ egyenes szakasszal együtt. (Vö.: [Dowling 1917, p. 13, Sect. 13].)
Ekkor egy lehetséges sokszöges általánosítást fogalmaz meg az alábbi feladat.

8. feladat. Legyen adva az S és S' egymásnak megfeleltetett teljes n-szög, valamint az O pont és a sokszögekben az a, a' élpár. Ha mind az $n-2$ darab T, T' háromszögpár rendre az S, S' sokszögekben, melynek oldala rendre az a, a' él az O-ra perspektív, akkor a két sokszög is pontra perspektív. (Vö.: [Dowling 1917, p. 24, Ex. 6].)

[7] Lásd [Vigassy 1972, 59. o.].

[8] Lásd a [Dowling 1917] tankönyvet.

Megjegyzés. A feladat megoldása közvetlenül adódik az alábbi feladatból.

9. feladat. Igazoljuk, hogy két teljes négyszög egyenesre perspektív, ha bennük két háromszög egyazon egyenesre perspektív. (Vö.: [Dowling 1917, p. 23, Sect. 20, Thm. II].)

Megjegyzés. Ennek a feladatnak a megoldása a 7-es konstrukciós feladattal rokon. A részletes megoldást lásd itt: [Dowling 1917, p. 23–24].

5. Alkalmazások

A témakör számos alkalmazásra lelhet a síkgeometria témakörében. Csak ízelítőként néhány, elsősorban illeszkedéssel kapcsolatos példa.

10. feladat. Tekintsük az ABC nem egyenlő szárú háromszöget. A magasságok talppontjai legyenek T_a, T_b, T_c. Legyen P az a oldal és T_bT_c egyenese, Q a b oldal és a T_aT_c egyenese és R a c oldal és a T_aT_b egyenese által alkotott metszéspont. Igaz-e, hogy P, Q és R egy egyenesbe esik?

Útmutatás. A háromszög és talpponti háromszöge egymáshoz pontra perspektív.

11. feladat. Tekintsük egy háromszög belső szögfelezőinek a beírt körrel alkotott metszéspontjait. Ebből a hat pontból alkossunk legalább három olyan háromszöget, melyek az adott háromszöggel pontra perspektívek!

Útmutatás. Az oldalhoz közelebbi metszéspontok, a csúcsokhoz közelebbi metszéspontok ill. például két csúcshoz közelebbi és egy oldalhoz közelebbi metszéspont hármasa.

12. feladat. Legyenek egy háromszög hozzáírt köreinek középpontjai: K_1, K_2, K_3, a beírt körének középpontja K. Egyenesre, ill. pontra perspektívek-e a K_1K_2K, K_3K_2K háromszögek? Ha igen, mi a perspektivitás centruma és tengelye?

Útmutatás. A K_1K_3 szakasz egyenese áthalad egy csúcson, a K_2K szintén ugyanezen. Két-két megfeleltetett oldal metszéspontja kijelöli a tengelyt.

13. feladat. Legyen az ABC nem egyenlő szárú háromszög. Legyen F_a az a oldal, F_b a b oldal felezéspontja, O a körülírt körének középpontja, M a magasságpontja. Igazoljuk, hogy az ABM háromszög és az F_aF_bO háromszög az ideális egyenesre perspektív! Melyik a perspektivitás középpontja?

Útmutatás. Párosítsuk úgy a két háromszög oldalait, hogy azok egymással párhuzamosak legyenek. Ekkor a perspektivitás tengelye az ideális egyenes lesz.

14. feladat. Az előző feladatnál melyik középpontra perspektív a két egyenesre is perspektív háromszög? Igazoljuk ebből, hogy O, M és az ABC háromszög súlypontja egy egyenesbe esnek (Euler-egyenes).

Útmutatás. Két-két megfelelő csúcs egyenese áthalad a súlyponton. A harmadik csúcspár egyenese is ezen kell, hogy áthaladjon a pontra vonatkozó perspektivitás folytán.

Hivatkozások

[1] [Hajós 1991] Hajós György (1991): *Bevezetés a geometriába.* Tankönyvkiadó

[2] [Szabó 1997] Szabó Árpád, *A görög matematika.* In: Csíky Gábor (szerk.) (1997): Magyar Tudománytörténeti Szemle Könyvtára

[3] [Hersh 1997] Reuben Hersh (1997): *What Is Mathematics, Really?* Oxford University Press

[4] [Vigassy 1972] Vigassy Lajos (1972): *Geometriai transzformációk.* Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó

[5] [Dowling 1917] L. Wayland Dowling (1917): *Projective Geometry.* McGraw-Hill, New York

[6] [Kosztolányi 2003] Kosztolányi J. at al. (2003): *Sokszínű Matematika 10.* Mozaik Kiadó, Szeged

Dr. Darvasi Gyula

A paralelogrammatétel

Egy olyan síkgeometriai tétellel kívánunk foglalkozni, amely összefüggést fejez ki a paralelogramma oldalai és átlói között: *A paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével* ([3] 111. oldal 1671. feladat, [4] 32. oldal 289. feladat).

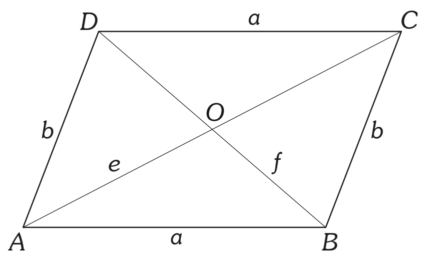
Az $ABCD$ paralelogrammára az $a = AB = CD$, $b = AD = BC$, $e = AC$ és $f = BD$ jelöléseket elfogadva (*1. ábra*) az előbbi állítás az $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ algebrai alakba írható. Geometriailag ez a tétel azt jelenti, hogy a paralelogramma átlói fölé rajzolt négyzetek területeinek összege egyenlő az oldalak fölé rajzolt négyzetek területeinek összegével.

A tétel algebrai alakját tekintve felvetődhet a kérdés, hogy van-e olyan paralelogramma, amelyre $e^2 = 2a^2$ és $f^2 = 2b^2$ teljesül. A válasz megadásához az ABD és AOD háromszögekre felírt koszinusztétel révén hasonlítsuk össze az $\alpha = m(BAD\sphericalangle)$ és $\varphi = m(AOD\sphericalangle)$ szögeket (*2. ábra*, ahol a $PQRS$ paralelogramma oldalai párhuzamosak az $ABCD$ megfelelő átlóival):

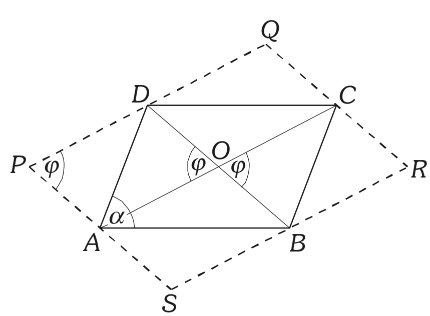
$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - f^2}{2ab} = \frac{\frac{e^2}{2} + \frac{f^2}{2} - 2b^2}{2 \cdot \frac{e}{\sqrt{2}} \cdot \frac{f}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} - b^2}{2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2}} = \cos\varphi,$$

ahonnan $0^\circ < \alpha, \varphi < 180^\circ$ miatt $\alpha = \varphi$ következik, mivel a $]0; \pi[$ intervallumon a koszinusz függvény szigorúan monoton. Megfordítva: tegyük fel, hogy $\alpha = \varphi$ teljesül. Ekkor az $\frac{a^2 + b^2 - f^2}{2ab} = \frac{\frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} - b^2}{2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2}}$, az $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$, továbbá az $ABCD$ és $PQRS$ paralelogrammák területeinek összehasonlításából adódó $2ab = ef$ összefüggésekből rövid számolással előbb $f^2 = 2b^2$, majd $e^2 = 2a^2$ kapható. Megállapítható tehát, hogy $e^2 = 2a^2$ és $f^2 = 2b^2$ pontosan akkor áll fenn, ha a paralelogramma oldalainak szöge egyenlő az átlói szögével, vagyis ez a paralelogramma sem téglalap, sem rombusz nem lehet.

Téglalap esetén az átlók egyenlősége miatt a paralelogrammatételből visszajutunk a Pitagorasz-tételhez: $e^2 = a^2 + b^2$. Rombusz esetén az oldalak egyenlősége miatt $e^2 + f^2 = 4a^2$ adódik, ami az átlók merőlegessége révén geometriailag nagyon jól szemléltethető. Ehhez a $\overline{BD}$ átlót toljuk el úgy, hogy D képe a C pontba essen (*3. ábra*). Ekkor egy olyan $AB'C$ derékszögű háromszöget kapunk, melynek két befogója e és f, az átfogója pedig $2a$ hosszúságú, s a hozzá tartozó pitagoraszi alakzat a keresett szemlélte-



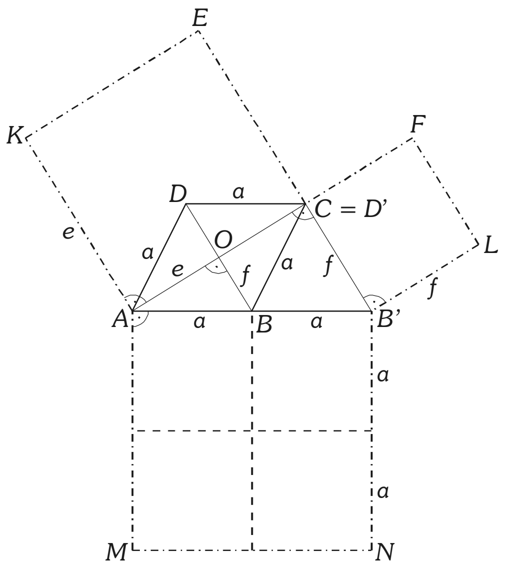
1. ábra



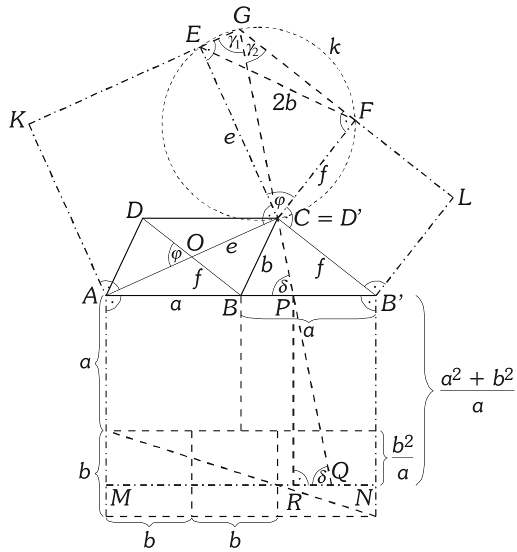
2. ábra

tés: $e^2+f^2=AC^2+B'C^2=t(ACEK)+t(B'LFC)=$ $=t(AMNB')=(AB')^2=(2a)^2$.

A paralelogrammatétel szemléltetése az $a>b$ és $e>f$ általános esetben ugyanígy kezdődhet: az $ABCD$ paralelogramma megadása után a $\overline{BD}$ átlót toljuk el úgy, hogy $D'=C$ teljesüljön (*4. ábra*). Az így előálló $AB'C$ háromszögben $AB'=2AB=2a$, $AC=e$, $B'C=f$ és $m(ACB'\sphericalangle)=$ $=180°-\varphi$. Ezután az $\overline{AB}$, $\overline{BB'}$, $\overline{AC}$ és $\overline{B'C}$ szakaszok fölé szerkesszünk négyzeteket, továbbá a két b oldalú négyzetből összeállított b és $2b$ oldalú téglalapot alakítsuk át egy $2a$ és $\frac{b^2}{a}$ oldalú téglalappá ([3] 102. oldal 1531. feladat), amit az $\overline{AB'}$-re rajzolt a és $2a$ oldalú téglalap alá illesztve egy $2a$ és $\frac{a^2+b^2}{a}$ oldalú $AMNB'$ téglalapot kapunk. Ennek a területe $2(a^2+b^2)$, s így az a paralelogrammatétel szerint egyenlő az $\overline{AC}$ és $\overline{B'C}$ szakaszok fölé rajzolt $ACEK$ és $B'LFC$ négyzetek területeinek e^2+f^2 összegével. Könnyen észrevehető, hogy az $ACEK$ és $B'LFC$ négyzetek, valamint az $AMNB'$ téglalap együttesen olyan alakzatot adnak, amely átdarabolásával eljuthatunk az $AB'C$ háromszögre vonatkozó Papposz-tételhez ([3] 100. oldal 1508. és 1509. feladatok). E célból legyen G az $\overleftrightarrow{EK}$ és $\overleftrightarrow{FL}$ egyenesek, továbbá P és Q a $\overleftrightarrow{CG}$-nek az $\overleftrightarrow{AB'}$, illetve $\overleftrightarrow{MN}$ egyenesekkel alkotott metszéspontja. A kívánt átdarabolhatósághoz meg kell mutatnunk, hogy $CG=PQ$ teljesül. Minthogy a $\overline{CG}$ szakasz a $CFGE$ négyszög köré írható k kör átmérője, ezért a CEF háromszögre felírt általános szinusztétel ([1] 17. oldal 1.1.1. tétel) szerint $CG=\frac{2b}{\sin\varphi}$. A $\overline{PQ}$ szakasz hosszának meghatározásához szükségünk lesz az $APC\sphericalangle$-re, amihez legyen $\gamma_1=m(CGE\sphericalangle)$, $\gamma_2=m(CGF\sphericalangle)$, $x=PB'$ és $\delta=m(APC\sphericalangle)$. Ekkor $\sin\gamma_1=\frac{CE}{CG}=$ $=\frac{e\sin\varphi}{2b}$, $\sin\gamma_2=\frac{CF}{CG}=\frac{f\sin\varphi}{2b}$, továbbá az APC és $B'PC$ háromszögekre felírt szinusztétel szerint $\frac{AP}{AC}=\frac{2a-x}{e}=\frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta}$ és $\frac{B'P}{B'C}=\frac{x}{f}=$ $=\frac{\sin\gamma_2}{\sin(180°-\delta)}$, amiből $\sin\delta=\frac{(e^2+f^2)\sin\varphi}{4ab}$, s ezáltal a PQR derékszögű háromszögből $PQ=\frac{PR}{\sin\delta}=\frac{B'N}{\sin\delta}=\frac{a^2+b^2}{a}\cdot\frac{4ab}{(e^2+f^2)\sin\varphi}=$ $=\frac{2b}{\sin\varphi}\cdot\frac{2(a^2+b^2)}{e^2+f^2}$, ahonnan a paralelogram-



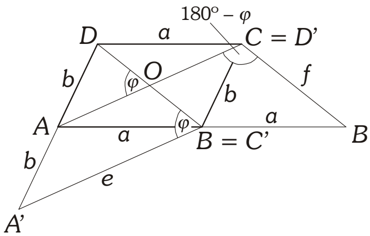
3. ábra



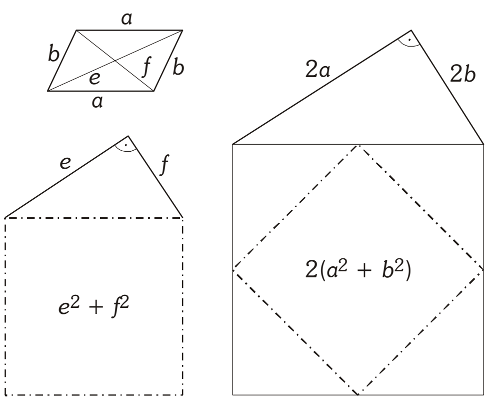
4. ábra

matétel szerint $PQ = \dfrac{2b}{\sin\varphi}$, s így $PQ = CG$ következik. Ezután a kívánt átdarabolás elvégezhető, ha a $\overleftrightarrow{CG}$ egyenessel az A és B' ponton át párhuzamosokat húzunk.

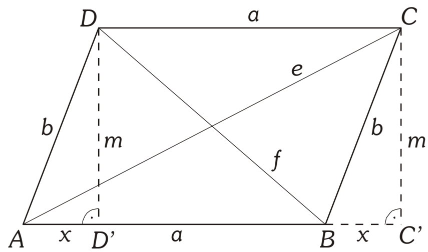
Az $ABCD$ paralelogrammából a $\overline{BD}$ átló $\overrightarrow{DC}$, illetve az $\overline{AC}$ átló $\overrightarrow{DA}$ vektorú eltolásával egyértelműen állíthatók elő az $AB'C$ illetve az $A'BD$ háromszögek (*5. ábra*), amelyek bármelyikét tekintve a paralelogrammatétel $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ algebrai alakja a következő állításhoz vezet: *A háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal és a harmadik oldal fele négyzetösszegének a kétszeresével.* Ez az általános érvényű állítás az Apolloniusz-tétel ([5]). S minthogy az $AB'C$ (vagy az $A'BD$) háromszögből kiindulva szintén egyértelműen juthatunk vissza az $ABCD$ paralelogrammához, ezért a paralelogrammatétel és az Apolloniusz-tétel bármelyike következik a másikból, vagyis ez a két tétel ekvivalens egymással. Az Apolloniusz-tétel geometriai megfogalmazása és szemléltetése itt kitérőt jelentene, így azt átengedjük az olvasónak. Megjegyezzük még, hogy az Apolloniusz-tétel a Stewart-tételnek ([2] 319. oldal 36.4/1. tétel) a háromszög súlyvonalára vonatkozó speciális esete.



5. ábra



6. ábra



7. ábra

A paralelogrammatétel felfedezhető a Pitagorasz-tétel ismeretében (*6. ábra*). Ehhez elsőként szerkesszünk egy olyan derékszögű háromszöget, melynek befogói egybevágók az $ABCD$ paralelogramma AC és BD átlóival: az átfogó fölé rajzolt négyzet területe $e^2 + f^2$. Ezután szerkesszünk egy olyan derékszögű háromszöget, melynek befogói $2a$ és $2b$ hosszúak: az átfogó fölé rajzolt négyzet oldalainak felezőpontjait összekötve egy $2(a^2 + b^2)$ területű négyzetet kapunk. Kellő pontosságú szerkesztés esetén e két négyzetet kivágva meggyőződhetünk arról, hogy azok kölcsönösen fedik egymást: ezáltal eljuthatunk a tétel megfogalmazásához is. A tétel felfedezését követheti annak bizonyítása, amire most hat különböző módot ismertetünk.

1. mód: Pitagorasz-tétel alapján ([3] 111. oldal 1671. feladat).

Ha C' és D' jelöli a C és D pontokból az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre állított merőlegesek talppontjait (*7. ábra*), akkor $CC' = DD' = m$ és $AD' = BC' = x$ jelölésekkel az ACC', BDD' és BCC' derékszögű háromszögekre $e^2 = (a + x)^2 + m^2$, $f^2 = (a - x)^2 + m^2$ és $b^2 = m^2 + x^2$ teljesül, amiből rövid számolással a tétel állításához jutunk.

2. mód: Stewart-tétel alapján ([2] 319. oldal 36.4/1. tétel)

Minthogy a paralelogrammatétel ekvivalens az Apolloniusz-tétellel, ami viszont a Stewart-tétel speciális esete, ezért könnyen célba érhetünk, ha a Stewart-tételt alkalmazzuk az 5. ábrán lévő $AB'C$ háromszögre: $AB'(BC^2 + AB \cdot BB') = AC^2 \cdot BB' + B'C^2 \cdot AB$, vagyis $2a(b^2 + a^2) = e^2 \cdot a + f^2 \cdot a$, amit a-val elosztva a bizonyítandó állítást kapjuk. Ugyanígy célt érhetünk, ha a Stewart-tételt az $A'BD$ háromszögre alkalmazzuk.

3. mód: Analitikus geometriai úton ([8])

Az A pontot origónak választva legyen $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes az x tengely (*8. ábra*). Ekkor a paralelogramma alaptulajdonságai miatt bevezethetők a következő koordináták: $A(0, 0)$, $B(x_1, 0)$, $D(x_2, y_2)$ és $C(x_1 + x_2, y_2)$, s így $AC^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_2)^2$ és $BD^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2)^2$, amelyek megfelelő oldalait összeadva $AC^2 + BD^2 = 2[x_1^2 + (x_2^2 + y_2^2)] = 2(AB^2 + AD^2)$ adódik.

4. mód: Koszinusztétel alapján ([6], [4] 32. oldal 289. feladat)

Két változatot fogunk bemutatni. Mindkettőben felhasználjuk a $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ azonosságot.

Az első változatban (*8. ábra*) a koszinusztételt az *ABC* és *ABD* háromszögekre alkalmazzuk: $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$ és $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, amelyek megfelelő oldalait összeadva kész a bizonyítás.

A második változatban (*5. ábra*) a koszinusztételt az *AB'C* és *A'BD* háromszögekre alkalmazzuk: $(2a)^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos(180^\circ - \varphi) = e^2 + f^2 + 2ef\cos\varphi$ és $(2b)^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos\varphi$, amelyeket összeadva és 2-vel osztva jutunk célba).

5. mód: Vektorok skaláris szorzásával ([2] 264–269. oldal)

Felhasználjuk a skaláris szorzás azon tulajdonságát, hogy bármely vektor önmagával vett skaláris szorzata egyenlő a vektor hosszának négyzetével: $\underline{v}^2 = \underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$. A 8. ábra jelöléseit elfogadva legyen $\underline{a} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{b} = \overrightarrow{AD}$, $\underline{e} = \overrightarrow{AC}$ és $\underline{f} = \overrightarrow{DB}$. Ekkor $\underline{e} = \underline{a} + \underline{b}$ és $\underline{f} = \underline{a} - \underline{b}$ miatt

$$e^2 + f^2 = |\underline{e}|^2 + |\underline{f}|^2 = (\underline{a} + \underline{b})^2 + (\underline{a} - \underline{b})^2 =$$

$$= \left(\underline{a}^2 + 2\underline{a}\underline{b} + \underline{b}^2\right) + \left(\underline{a}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{b}^2\right) = 2(\underline{a}^2 + \underline{b}^2) =$$

$$= 2\left(|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2\right) = 2(a^2 + b^2).$$

6. mód: Komplex számokkal ([7])

Felhasználjuk a komplex számok szorzásának azon tulajdonságát, hogy bármely komplex számot a konjugáltjával megszorozva eredményként a komplex szám abszolút értékének négyzetét kapjuk: $z\overline{z} = |z|^2$. Ha az *ABCD* paralelogramma *A* csúcsát origónak választva (*8. ábra*) z_1 és z_2 a *B*, illetve *D* pont helyvektorához rendelt komplex számot jelöli, akkor

$$e^2 + f^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$$

$$= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) + (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1 - z_2}\right) =$$

$$= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) + (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) =$$

$$= 2\left(z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}\right) = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) = 2(a^2 + b^2).$$

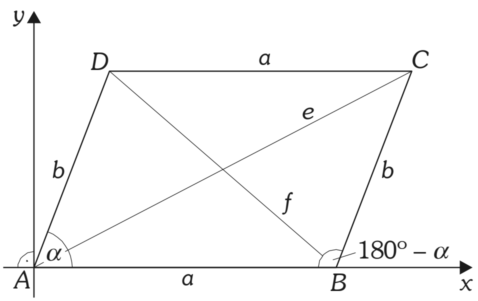
Mindezek után foglalkozzunk a paralelogrammatétel két általánosításával.

Az első általánosításhoz az *ABCD* paralelogramma $\overline{KM}$ és $\overline{LN}$ középvonalait tekintve (*9. ábra*) $\overline{KM} \cong \overline{AB}$ és $\overline{LN} \cong \overline{AD}$ ([2] 82. oldal 14.3/2. tétel) miatt $KM = a$ és $KN = b$ teljesül, vagyis a paralelogrammatételben az oldalak helyett a középvonalak is állhatnak. Ez az észrevétel a következő módon általánosítható: *Bármely négyszögben az átlók négyzetösszege egyenlő a középvonalak négyzetösszegének kétszeresével* ([3] 112. oldal 1677. feladat). Ugyanis tetszőleges *ABCD* négyszög oldalainak felezőpontjai (*10. ábra*) egy *KLMN* paralelogrammát adnak ([1] 89. oldal 3.1.1. tétel), melynek oldalai a négyszög átlóival párhuzamosak és feleakkora hosszúságúak: $KN = LM = \dfrac{AC}{2}$ és $KL = MN = \dfrac{BD}{2}$. Ennélfogva *KLMN*-re a paralelogrammatétel szerint

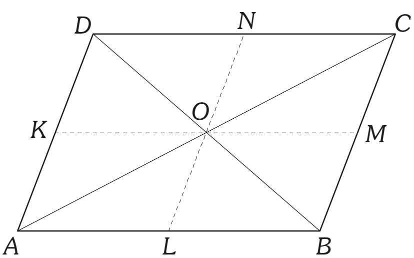
$$KM^2 + LN^2 = 2(KN^2 + KL^2) =$$

$$= 2\left[\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2\right] = \frac{AC^2}{2} + \frac{BD^2}{2},$$

ahonnan $AC^2 + BD^2 = 2(KM^2 + LN^2)$.



8. ábra



9. ábra

A második általánosításhoz legyen E és F a tetszőleges $ABCD$ négyszög $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ átlójának a felezőpontja (*11. ábra*). Ekkor a következő állítás fogalmazható meg: *Bármely négyszög átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegének és az átlók felezőpontjait összekötő szakasz négyzete négyszeresének a különbségével* ([3] 112. oldal 1678. feladat). Ez az állítás az ábránk jelöléseivel az $e^2 + f^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4x^2$ algebrai alakba írható, s a bizonyítása elvégezhető az Apolloniusz-tétel alábbi ciklikus alkalmazásával:

$ABC_\triangle$-re: $a^2 + b^2 = 2\left(BE^2 + \dfrac{e^2}{4}\right)$,

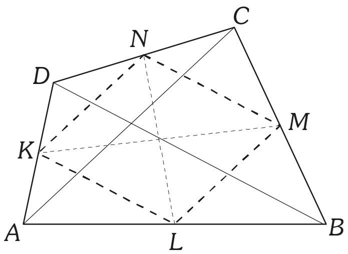
$BCD_\triangle$-re: $b^2 + c^2 = 2\left(CF^2 + \dfrac{f^2}{4}\right)$,

$CDA_\triangle$-re: $c^2 + d^2 = 2\left(DE^2 + \dfrac{e^2}{4}\right)$ és

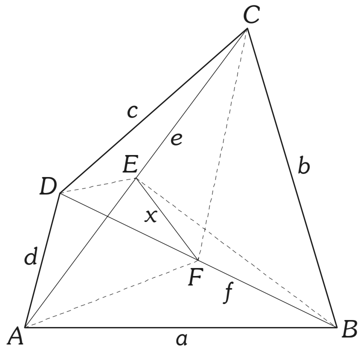
$DAB_\triangle$-re: $d^2 + a^2 = 2\left(AF^2 + \dfrac{f^2}{4}\right)$, továbbá

$AFC_\triangle$-re: $AF^2 + CF^2 = 2\left(x^2 + \dfrac{e^2}{4}\right)$ és

$BED_\triangle$-re: $BE^2 + DE^2 = 2\left(x^2 + \dfrac{f^2}{4}\right)$,



10. ábra



11. ábra

ahonnan az első négy egyenlet megfelelő oldalait összeadva és 2-vel osztva: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2\left(\dfrac{e^2}{4} + \dfrac{f^2}{4}\right) + (AF^2 + CF^2 + BE^2 + DE^2)$, majd a két utolsó egyenletet is összeadva: $AF^2 + CF^2 + BE^2 + DE^2 = 4x^2 + 2\left(\dfrac{e^2}{4} + \dfrac{f^2}{4}\right)$, amit az előbbi egyenletbe helyettesítve és rendezve a bizonyítandó összefüggés adódik.

Végezetül tekintsük ezt a második általánosítást a paralelogramma, a trapéz és a deltoid speciális eseteiben.

Paralelogramma esetén $c = a$, $d = b$ és $x = 0$ miatt az általánosításból visszajutunk a paralelogrammatételhez. Ha pedig egy konvex négyszögre $x = 0$ teljesül, akkor ezen négyszög átlóinak felezőpontjai egybeesnek, vagyis ez a négyszög paralelogramma. Tehát egy konvex négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha érvényes rá a paralelogrammatétel.

Az a és c alapú, valamint b és d szárú trapézra $a > c$ esetén $x = \dfrac{a-c}{2}$, s ennélfogva ez az általánosítás $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$ alakú lesz.

Ha a deltoidra $b = a$, $d = c$ és az e átló egyenese a szimmetriatengely, akkor $x = \dfrac{e}{2} \mp \mp\sqrt{c^2 - \dfrac{f^2}{4}}$ miatt $e^2 = a^2 - c^2 \mp e\sqrt{4c^2 - f^2}$ adódik, ahol + illetve – jel áll aszerint, hogy a deltoid konvex vagy konkáv.

Irodalom

[1] Coxeter, H.S.M. – Greitzer, S.L. (1977): Az újra felfedezett geometria. Gondolat

[2] Hajós György (1966): Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó

[3] Horvay K. – Reiman I. (1987): Geometriai feladatok gyűjteménye I. Tankönyvkiadó

[4] Soós P. – Czapáry E. (1991): Geometriai feladatok gyűjteménye II. Tankönyvkiadó

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Apollonius'_theorem

[6] http://lexikon.fazekas.hu/147

[7] http://www.nerdburrow.com/complexparallelogramlaw/

[8] www.unlvkappasigma.com/parallelogram_law/

Dr. Kiss Sándor – Dr. Urbán János

Beszámoló a 41. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről

A TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület hagyományosan Vácott, a Táncsics Mihály Mezőgazdasági Szakképző Iskolában rendezte meg 2012. június 27–29-ig a Kalmár László Matematikaverseny döntőjét. A döntő fordulóba az ország minden részéből összesen 97, 5–8. osztályos tanuló kapott meghívást; azok, akik a verseny megyei (fővárosi) fordulójában a legjobb eredményt érték el.

A kétfordulós döntőn az összesített eredmények alapján a legjobb helyezéseket a következő tanulók érték el:

5. évfolyam

I. Kerekes Anna, Budapest, Hajós Alfréd Két Tanítási Nyelvű Iskola (tanára: Sztanó Zsuzsanna)
II. Mészáros Anna, Budapest, Eötvös József Általános Iskola (tanára: Vincze Imréné)
III. Szabó Blanka, Nyíregyháza, Eötvös József Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (tanárai: Róka Sándorné, Róka Sándor)

6. évfolyam

I. Molnár-Sáska Zoltán, Budapest, Városligeti Általános Iskola (tanárai: Turányi Zsuzsanna, Pósa Lajos)
II. Imolay András, Budapest, Pannónia Általános Iskola (tanára: Nagypál Ildikó)
Lakatos Ádám, Budapest, Áldás utcai Általános Iskola (tanára: Kruckió Mária)
III. Alexy Marcell, Vác, Juhász Gyula Általános Iskola (tanára: Horváth Gáborné)

7. évfolyam

I. Gál Hanna, Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium (tanárai: Mike János, Schultz János)
II. Williams Kada, Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium (tanárai: Mike János, Schultz János)
III. Almási Nóra, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium (tanárai: Lakatos Tibor, Tóth Mariann, Pósa Lajos)

8. évfolyam

I. Szabó Eszter, Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimnázium (tanárai: Katonáné Cserepes Mária, Varga Szilveszter)
II. Sal Kristóf, Pécs, Koch Valéria Általános Iskola (tanárai: Kamarás Lajos, Lipták Éva, Pósa Lajos)
III. Szabó Barnabás, Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (tanárai: Táborné Vincze Márta, Gyenes Zoltán)

A döntő két napjára a versenybizottság a következő feladatokat tűzte ki:

5. évfolyam
1. nap

1. Melyik az a legkisebb, tízes számrendszerbeli pozitív egész szám, amelyben a számjegyek szorzata 200?

2. Adjunk meg három különböző pozitív egész számot úgy, hogy a középső szám a másik kettő összegének a fele, és a három szám szorzata egy egész szám négyzete legyen!

3. Számítsuk ki 1-től 10 000-ig a pozitív egész számok számjegyeinek összegét!

4. Van 60 darab 1 cm oldalú kis kockánk, tömör téglatestet akarunk belőlük építeni. Hány különböző tömör téglatest építhető ezekből, ha az építéshez mind a 60 kis kockát fel kell használni?

6. évfolyam
1. nap

1. Két pozitív egész szám különbsége 2012. Ha a nagyobbik szám végéről elhagyjuk a 0 számjegyet, akkor az így kapott számnak a 6-szorosa a kisebbik szám. Melyik ez a két szám?

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható 7-tel, de 2-vel, 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztva mindig 1 maradékot ad?

3. Adjunk meg 4 különböző pozitív egész számot úgy, hogy ha ezeket páronként összeadjuk, akkor a kapott számok hat egymást követő pozitív egész számot alkotnak.

4. Az 5×5-ös sakktábla minden mezőjére egy-egy „bogarat” teszünk. Adott idő alatt minden bogár átmászik valamelyik élben szomszédos mezőre. Előfordulhat-e, hogy ekkor is minden mezőn lesz bogár?

7. évfolyam
1. nap

1. Számítsuk ki a következő 13 tört összegét:

$$\frac{11}{13}+\frac{1111}{1313}+\frac{111111}{131313}+\ldots+\frac{11\ldots11}{13\ldots13}.$$

2. Tíz különböző pozitív egész szám összege 62. Igazoljuk, hogy a számok szorzata osztható 60-nal.

3. Az a, b és c betűk számjegyeket jelölnek. Van-e négyzetszám az $\overline{abcabc}$ alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli számok között?

4. Melyek azok az n egész számok, amelyekre a $\frac{3n-6}{n+3}$ tört értéke egész szám?

5. Egy tetszőleges háromszöget daraboljunk fel négy egyenlőszárú háromszögre.

8. évfolyam
1. nap

1. Melyek azok az n egész számok, amelyekre az $\frac{n^2+5n+10}{n+3}$ tört értéke is egész szám?

2. Lehet-e 2^{100} legalább két egymást követő pozitív egész szám összege?

3. Egy szabályos dobókockát háromszor feldobunk. Hányféle eredményt kaphatunk, ha csak az számít, hogy hány 1-est, 2-est, 3-ast, 4-est, 5-öst, 6-ost dobtunk?

4. Az ABC háromszög AB és AC oldalára (kifelé) megszerkesztjük az $ABDE$ és $ACFG$ paralelogrammákat. A DE és FG egyenesek a P pontban metszik egymást. A B, illetve C ponton át az AP egyenessel párhuzamosokat húzunk, ezek a DE, illetve FG egyeneseket a Q, illetve R pontban metszik. Igazoljuk, hogy $BCRQ$ négyszög paralelogramma, és ennek területe egyenlő az $ABDE$ és $ACFG$ paralelogrammák területének összegével.

5. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$a \cdot b + 2a + 3b = 36.$$

5. évfolyam
2. nap

1. Hány olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek (balról jobbra) növekvő sorrendben követik egymást? És hány olyan van, amelyben csökkenő sorrendben követik egymást?

2. Hány olyan 4-jegyű, tízes számrendszerbeli szám van, amely nem változik, ha felcseréljük az egyesek és az ezresek helyén álló számjegyét?

3. Leírjuk egymás mellé sorra 1-től kezdve a pozitív egész számokat:

$$123456789101112\ldots\,.$$

Melyik számjegy áll ebben a sorban a 2012-dik helyen?

4. Egy 5 cm oldalú szabályos háromszöget az oldalaival párhuzamos egyenesekkel 1 cm oldalú kis szabályos háromszögekre bontottunk. Hány olyan szabályos háromszög van, amelynek csúcsai az így kapott háló rácspontjai közül kerülnek ki?

6. évfolyam
2. nap

1. Melyik nagyobb: 2^{300} vagy 3^{200}?

2. Számítsuk ki minél egyszerűbben a következő összeget:

$$\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 12}+\frac{1}{4\cdot 15}+\frac{1}{5\cdot 18}+\ldots+\frac{1}{31\cdot 96}.$$

3. Egy futóversenyen két csapat indult, mindegyik csapat 7 versenyzővel. Mindenki annyi pontot kapott 1 és 14 pont között, ahányadik helyen végzett (holtverseny nem volt). A végén összeadták a csapattagok pontjait, ez lett a csapatverseny eredménye. Tehát az a csapat győzött, amelyiknek kevesebb pontja lett. Hányféle pontszámot érhetett el a győztes csapat?

4. Hány olyan 3, 4 és 5 hosszúságú sorozat van, amelynek minden tagja a 0 vagy az 1 számjegy, és nincs benne két szomszédos 1?

7. évfolyam
2. nap

1. 13 különböző pozitív egész szám összege 92. Melyek ezek a számok?

2. Egy régi feladat: „Egy gazdag ember elment a vásárba és vett kecskéket, birkákat és malacokat. A kecskék darabjáért 2 aranyat, a birkák darabjáért 4 aranyat, a malacok darabjáért 5 aranyat fizetett, így összesen 54 aranyat adott ki az állatokért. 22 állatot vitt haza a vásárból. Hányat vitt haza az egyes állatfajtákból?”

3. Az a és b számjegyekről tudjuk, hogy $a\cdot b=a+b+1$. Melyek lehetnek a $10a+b$ alakú kétjegyű számok?

4. Adott egy 120°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög. Daraboljuk fel 5 egyenlő szárú háromszögre!

8. évfolyam
2. nap

1. Igazoljuk, hogy 121, 10201, 1002001 teljes négyzet (négyzetszám). Általánosítsunk!

2. Szabályos háromszöget daraboljunk fel 5 egyenlőszárú háromszögre!

3. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben a számjegyek (balról jobbra) nem csökkenő sorrendben követik egymást?

4. Igazoljuk, hogy $x^2+y^2+2x-4y+7\geq 2$, ha x, y tetszőleges valós számok.

A versennyel kapcsolatos további információk (többek között a kitűzött feladatok megoldásai) megtalálhatók a http://www.kalmarverseny.hu honlapon.

Csete Lajos

Kiss Sándor: Analitikus geometriai módszerek komparatív vizsgálata című könyvének rövid ismertetése

A szatmárnémeti dr. Kiss Sándor tanár úr újabb könyvét ismertetjük röviden. Az *Analitikus geometriai módszerek komparatív vizsgálata* (ISBN 978-973-30-2110-0) című könyvét a román Országos Kutatási Hatóság támogatásával a bukaresti Editura Didactică şi Pedagogică adta ki 2008-ban 500 példányban. A könyv a 171. oldalon végződik. Lektorok: Kovács Zoltán (Nyíregyházi Főiskola) és Páll R. Olga (Csíkszereda). A könyvet a kiadótól lehet megrendelni. (www.edituradp.ro, marketing@edituradp.ro, office@edituradp.ro)

A könyv előszava után az analitikus geometria kialakulását és rövid történetét olvashatjuk a 10–15. oldalon. Itt ismert és kevésbé ismert nevekkel találkozhatunk, ezek közül néhányan: Apollóniosz, Hipparkhosz, Klaudiosz Ptolemaiosz, Descartes, Fermat, Oresme, van Schooten, Wallis, de Witt, Newton, Euler, Plücker, Hachette, Biot, Lacroix, Monge, Poncelet. A szerző megemlíti, hogy az „analitikus geometria" kifejezést Sylvestre François Lacroix (1765–1843) használta először – persze franciául –, 1797–1798-ban kiadott egyik híres könyvében.

A jelölések elővezetése után az 1. fejezet címe: „Koordináta-rendszerek és koordináták az euklideszi síkon". Itt tárgyalja a szerző a derékszögű koordinátákat és a ferdeszögű koordinátákat. Utóbbiaknak szentelte a szerző a korábbi könyvét: *A háromszög nevezetes körei. Háromszögmértan ferdeszögű koordinátákkal,* Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, 1999. Ezt korábban már ismertette *A Matematika Tanítása* (2001/5. 18–19. oldal).

Majd még ugyanebben a fejezetben a kontravariáns és kovariáns koordináták, valódi trilineáris koordináták, trilineáris koordináták, baricentrikus koordináták, területi koordináták, homogén egyenletek, homogén koordináták és ideális síkelemek következnek.

Itt felidézzük H. S. M. Coxeter geométer véleményét, aki szerint: „A homogén koordináták bevezetése, ami Möbius érdeme, a matematika történetének egyik legnagyobb horderejű gondolata;…" (*A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987. 227. oldal).

A jelenleg tárgyalt könyv 2. fejezete: „Koordináta-transzformációk." E fejezetben az előző koordináták közötti kapcsolatokat tárgyalja a szerző keresztül-kasul. A 3. fejezet: „Síkmértani alakzatok és a közöttük fennálló kapcsolatok algebrai jellemzése különböző koordinátarendszerekben". A 4. fejezet tárgyalja az „Alkalmazások"-at. Az alkalmazások között szerepel a kúpszeletek egyenletei derékszögű és polárkoordinátákban, majd ugyanez a kevésbé ismert ferdeszögű koordináta-rendszerekben, és az általánosított Fermat-pontok metrikus jellemzése.

Majd a szerző egy önálló eredménye következik, mégpedig Clark Kimberling egyik sejtésének igazolása kontravariáns koordináták alkalmazásával.

Clark Kimberling (Evansville-i Egyetem) a következőt sejtette: ha a háromszög hegyesszögű, akkor a háromszög talpponti háromszögének érintő háromszöge és érintő háromszögének talpponti háromszöge párhuzamosan hasonlók.

(Kimberling, C.: Triangle Centers and Central Triangles, *Congr. Numer.* 129, 1998. 274.)

Dr. Kiss Sándor tanár úr jelen könyvében a 138–146. oldalon igazolja ezen sejtést, itt hemzsegnek az egyenletek, akárcsak a könyv egyéb részeiben, de az analitikus geometria már csak ilyen. Az időrend miatt megemlítjük, hogy a tanár úr 2005. április 3-án kezdte a bizonyítást és két nap alatt fejezte be.

Könyvének 148–151. oldalán írja meg a felfedezésének az amerikaiakkal való kommunikációját. Ez érdekes, itt csak azt tudjuk megemlíteni, hogy az amerikaiak (Clark Kimberling és Paul Yiu, a *Forum Geometricorum* szerkesztője) nem kedvelik a ferdeszögű koordinátákat. Dr. Kiss Sándor tanár úr erre átírta a cikket baricentrikus koordinátákra, amelyeket már elfogadtak. Így a történet kedvező véget ért. Dr. Kiss Sándor tanár úrnak nagyon jó véleménye van Kimberling és Yiu urakról, mind a kommunikációjukról, mind a segítőkészségükről.

A sejtés bizonyítását tárgyaló cikk megjelent a *Forum Geometricorum* folyóirat 6. kötetében 2006. május 1-jén. (Sándor Kiss, The Orthic-of-Intouch and Intouch-of-Orthic Triangles, *Forum Geometricorum* 6 (2006) pp. 171–177). A cikk letölthető a következő helyről: http://forum geom.fau.edu/FG2006volume6/FG200617.pdf

Az alkalmazásokat a könyv az egyenlő szárú hiperbola egyenleteivel fejezi be.

A könyv Függelékében szerepel magyarul is a cikk, vagyis a sejtés igazolása baricentrikus koordinátákkal. Majd a könyvet az irodalom felsorolása zárja. Ezek közül csak a következőket említjük meg:

Yiu, Paul, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, 2002.

http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

Whithworth, W. A., *Trilinear Coordinates and Other Methods of Modern Analytical Geometry of Two Dimensions*, Cambridge: Deighton, Bell and Co., London: Bell and Daldy, 1866. http://ia600301.us.archive.org/20/items/trilinearcoordin029731mbp/trilinearcoordin029731mbp.pdf

Dr. Kiss Sándor tanár úr alapos, részletes és kitűnő könyvet írt az előbb említett témákról. Könyvében kimerítően tárgyalja a témát, önálló eredményeit is közli.

Kinek is ajánlhatjuk e könyvet? Aki a háromszög geometriája után mélyebben érdeklődik, annak mindenképpen forgatnia kell a művet. Érdeklődő, kutató tanárok, érdeklődő egyetemisták, diákok, leendő geométerek jól teszik, ha beleolvasnak.

Érdemes lenne néhány magyarországi könyvtárban is elhelyezni, mint egy-egy palackpostát. Hátha sok évtized múlva is lesz még egy-két olyan tanár vagy diák, akiknek váratlanul segítséget nyújthat a szatmárnémeti dr. Kiss Sándor tanár úr könyve az analitikus geometria témájában.

De mi lesz a folytatás a ferdeszögű koordináták és az összehasonlító elemzés után?

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2013. január 31.

Feladatok (450–454.)

450. Jelölje H az első 2012 darab pozitív egész szám halmazát. H minden nem üres X részhalmazára legyen $m(X)$ az X halmaz legkisebb és legnagyobb elemének összege. Határozzuk meg az $m(X)$ összegek számtani közepét.

451. Jelölje egy háromszög köré írt körének sugarát R, beírt körének sugarát r, félkerületét pedig s. Igazoljuk, hogy

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \geq s^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

452. Oldjuk meg az egész számok körében a következő egyenletet.

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$$

453. Egy matematikai előadást öt matematikus hallgatott. Az előadás alatt mind az öt matematikus kétszer szundított el, és bármelyik két matematikushoz volt olyan időintervallum, amikor mindketten szunyókáltak. Mutassuk meg, hogy volt olyan időintervallum, amikor egyszerre három matematikus is szunyókált.

454. Bizonyítsuk be, hogy ha m pozitív egész szám, akkor

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (2k+1)\left(2^{\left[\log_2 \frac{2m}{2k+1}\right]} - 1\right) = \binom{m+1}{2},$$

ahol $[x]$ az x valós szám (alsó) egészrészét jelöli.

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (435–439. feladatok)

435. Igazoljuk, hogy ha α, β, γ egy hegyesszögű háromszög belső szögei, akkor

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geq 2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

Dályay Pál Péter, Szeged

I. megoldás: Mivel a háromszög hegyesszögű, és a $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon a tangens függvény szigorúan konvex, a szinusz függvény szigorúan konkáv, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát a megfelelő módon tudjuk becsülni a Jensen-egyenlőtlenség alapján. Egyrészt

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{3} \geq \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

másrészt

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

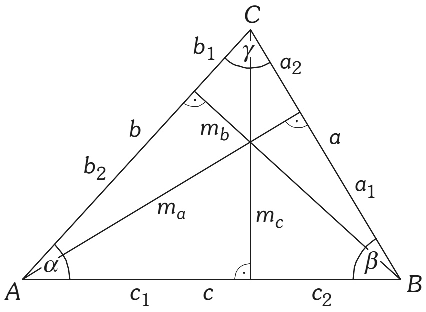
Így

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt{3} \geq 2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos.

Több megoldás alapján

II. megoldás: Az *1. ábra* jelöléseit használjuk. Ezekkel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_c}{c_1} = \frac{m_b}{b_2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{m_c}{c_2} = \frac{m_a}{a_1}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{m_a}{a_2} = \frac{m_b}{b_1}$.



1. ábra

Ezek alapján

$$2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma) =$$
$$= m_a\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) + m_b\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right) + m_c\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right).$$

A számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával a jobb oldal tagjainak második tényezői alulról becsülhetők. Így

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \ge \frac{2m_a}{a} + \frac{2m_b}{b} + \frac{2m_c}{c}, \qquad (1)$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a háromszög szabályos.

Szintén az *1. ábra* jelöléseivel: $\sin\alpha = \frac{m_c}{b}$, $\sin\beta = \frac{m_a}{c}$, $\sin\gamma = \frac{m_b}{a}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $m_a \ge m_b \ge m_c$. Mivel $2T = am_a = bm_b = cm_c$ (T a háromszög területe), ezért a magasságokra feltett rendezés alapján $a \le b \le c$, ami pontosan akkor teljesül, ha $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b} \ge \frac{1}{c}$. A rendezési tételt alkalmazva:

$$\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \ge \frac{m_a}{c} + \frac{m_b}{a} + \frac{m_c}{b} =$$
$$= \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma. \qquad (2)$$

(1) és (2) összevetéséből adódik a feladat állítása. Egyenlőség csak szabályos háromszög esetén áll fenn.

Rakamazi Richárd, Eger

A megoldók száma: 9.

436. Legyen $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Hány olyan $Q(x)$ polinom van, amelyhez létezik olyan harmadfokú $R(x)$ polinom, hogy $P(Q(x)) = P(x) \cdot R(x)$ teljesül?

Megoldás: Mivel $P(x) \cdot R(x)$ hatodfokú, ezért $Q(x)$ másodfokú. Ennélfogva $Q(x)$-et egyértelműen meghatározza $Q(1)$, $Q(2)$ és $Q(3)$. A feltétel alapján

$$P(Q(1)) = P(Q(2)) = P(Q(3)) = 0.$$

Mivel $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, ezért $Q(1)$, $Q(2)$ és $Q(3)$ mindegyike az $\{1; 2; 3\}$ halmaz valamelyik eleme.
Mivel $Q(x)$ másodfokú, ezért

$$(Q(1); Q(2); Q(3)) \ne (1; 1; 1),$$
$$(Q(1); Q(2); Q(3)) \ne (2; 2; 2),$$
$$(Q(1); Q(2); Q(3)) \ne (3; 3; 3),$$
$$(Q(1); Q(2); Q(3)) \ne (1; 2; 3),$$
$$(Q(1); Q(2); Q(3)) \ne (3; 2; 1).$$

(Ellenkező esetben ugyanis $Q(x)$ konstans, vagy elsőfokú polinom lenne.)
A fennmaradó 22 esetben az $(1; Q(1))$, $(2; Q(2))$, $(3; Q(3))$ pontok nem illeszkednek egy egyenesre, így ezekben az esetekben $Q(x)$ másodfokú. Tehát 22 megfelelő $Q(x)$ polinom van.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 5.

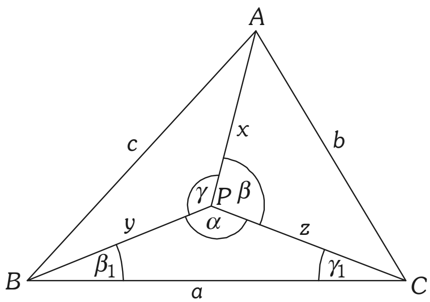
437. Legyen P az ABC háromszög tetszőleges belső pontja és legyen $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$. Jelölje R_a, R_b, R_c rendre a PBC, PCA, PAB háromszög körülírt körének sugarát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{R_a}{y+z} + \frac{R_b}{z+x} + \frac{R_c}{x+y} \ge \frac{3}{2}.$$

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: A *2. ábra* jelöléseit használva egyrészt $a = 2R_a \sin\alpha$, másrészt a szinusztétel alapján

$$\frac{y+z}{a} = \frac{\sin\beta_1 + \sin\gamma_1}{\sin\alpha}.$$



2. ábra

A szinusz függvény szigorúan konkáv a $]0; \pi[$ intervallumon, ezért

$$\frac{\sin\beta_1 + \sin\gamma_1}{\sin\alpha} \le \sin\frac{\beta_1+\gamma_1}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Így

$$\frac{R_a}{y+z} = \frac{a}{2(y+z)\sin\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2(\sin\beta_1 + \sin\gamma_1)} \ge \frac{1}{4\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$\frac{R_b}{z+x} \ge \frac{1}{4\cos\frac{\beta}{2}} \quad \text{és} \quad \frac{R_c}{x+y} \ge \frac{1}{4\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Egyenlőség mindhárom egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y = z$.

P az *ABC* háromszög belső pontja, ezért $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ hegyesszögek. A koszinusz függvény pozitív és szigorúan konkáv a $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon, ezért a reciproka szigorúan konvex ezen az intervallumon. Alkalmazva a Jensen-egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right)} = \cos\frac{\pi}{3} = 2,$$

tehát

$$\frac{R_a}{y+z} + \frac{R_b}{z+x} + \frac{R_c}{x+y} \ge$$

$$\ge \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}\right) \ge \frac{3}{2}.$$

Ezzel beláttuk az egyenlőtlenséget. A fentiek alapján könnyen látható, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha *P* egy szabályos háromszög köré írt körének középpontja.

Hornung Tamás, Zalaegerszeg
Velkeyné Gréczi Alice, Ipolyszög

A megoldók száma: 6.

438. *S* a térbeli derékszögű koordináta-rendszer azon $P(x; y; z)$ pontjainak halmaza, amelyek koordinátái a $\{0; 1; 2\}$ halmaz elemei. Hány szabályos háromszöget határoznak meg *S* elemei?

Megoldás: A megfelelő háromszögek megkereséséhez felhasználjuk, hogy ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ egy szabályos háromszög két, egy csúcsból induló oldalvektora, akkor $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2$, és $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\cdot\mathbf{u}^2$. Mivel jelen esetben az oldalvektorok koordinátái egész számok, ezért $\mathbf{u}^2$ páros szám (*).

Jelölje $\mathbf{a}$ a feladat feltételeinek megfelelő szabályos háromszög egy oldalvektorát.

Könnyen látható, hogy a páratlan sok páratlan (1-es) koordinátával rendelkező $\mathbf{a}$ vektorok nem jók, ugyanis ekkor $\mathbf{a}^2$ páratlan, azaz nem teljesül a szükséges (*) feltétel. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{a}(1; 0; 0)$, $\mathbf{a}(1; 1; 1)$, $\mathbf{a}(2; 1; 0)$, $\mathbf{a}(2; 2; 1)$ típusú vektorok nem megfelelőek. (Mivel a koordináták permutációjára nézve invariáns ez a paritási feltétel, ezért ha egy vektor nem lehet oldalvektor, akkor a koordináták bármely permutációjával kapott vektor sem lehet oldalvektor.)

Nem lehetnek megfelelő oldalvektorok az $\mathbf{a}(2; 0; 0)$ és $\mathbf{a}(2; 2; 2)$ típusú vektorok sem, mert ellenkező esetben a háromszöget felére kicsinyítve az előzőekben kizárt oldalvektorú szabályos háromszöget kapnánk.

Az $\mathbf{a}(1; 1; 0)$ típusú vektor egy egységkocka lapátló vektora. Egy ilyen egységkockának mind a 8 csúcsához tartozik egy $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszög, és ezek csúcsonként különbözőek. Így az ilyen típusú szabályos háromszögből $8 \cdot 8 = 64$ darab van.

Az $\mathbf{a}(2; 1; 1)$ típusú vektorok a 2 egység élű kocka két kitérő élének felezőpontját összekötő vektorok. Egy kocka három, páronként kitérő élének felezőpontja szabályos háromszöget határoz meg. Minden egyes élhez kétféleképpen tudunk másik két élt választani úgy, hogy azok páronként kitérő él hármast alkossanak. Ekkor viszont minden szabályos háromszöget háromszor (minden oldalánál) megszámolunk, ezért az ilyen típusú szabályos háromszögek száma $\frac{12 \cdot 2}{3} = 8$.

Az $\mathbf{a}(2; 2; 0)$ típusú vektorok a 2 egység élű kocka lapátló vektorai. A lapátlók 8 szabályos háromszöget határoznak meg.

Minden esetet végignéztünk, így a feltételeknek megfelelő szabályos háromszögek száma: $64 + 8 + 8 = 80$.

Rakonczai György, Budapest

A megoldók száma: 4.

439. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_0 = x$, $a_1 = y$, $a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}}$ $(n \geq 1)$. Melyek azok az x és y valós számok, amelyekre teljesül, hogy van olyan n_0 pozitív egész, hogy bármely $n \geq n_0$ esetén $a_n = c$ (konstans)?

Megoldás: Először vegyük észre, hogy $n \geq 1$ esetén

$$(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} - a_{n-1}) = $$
$$= a_{n+1}^2 - a_{n+1}(a_n + a_{n-1}) + a_n a_{n-1} = $$
$$= a_{n+1}^2 - (a_n a_{n-1} + 1) + a_n a_{n-1} = $$
$$= a_{n+1}^2 - 1. \qquad (1)$$

Ezután tegyük fel, hogy x, y olyan valós számok, amelyekre van olyan n_0 pozitív egész, hogy bármely $n \geq n_0$ esetén $a_n = c$. Ekkor (1) alapján

$$0 = (c - c)(c - a_{n-1}) = $$
$$= (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} - a_{n-1}) = a_{n+1}^2 - 1 = c^2 - 1,$$

ahonnan $|c| = 1$.

Most jelölje m azt a legkisebb nem negatív egészet, amelyre $a_m = c$. Feltevésünk alapján ilyen m létezik, és $m \leq n_0$. Ha $m \geq 2$ lenne, akkor (1) szerint

$$(c - a_{m-1})(c - a_{m-2}) = $$
$$= (a_m - a_{m-1})(a_m - a_{m-2}) = $$
$$= a_m^2 - 1 = c^2 - 1 = 0,$$

azaz $a_{m-1} = c$ vagy $a_{m-2} = c$ következnék, ami ellentmondana m minimalitásának. Így $m \leq 1$, és $a_0 = x = c$ vagy $a_1 = y = c$.

Végül megmutatjuk, hogy ha $a_m = c$, akkor $n_0 = m$ választás megfelel a követelménynek, vagyis minden $n \geq n_0$ esetén $a_n = c$. Valóban: $n = m$ esetén igaz az állítás, és ha valamely $n \geq m$ esetén $a_n = c$, akkor

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}} = \frac{c \cdot a_{n-1} + c^2}{c + a_{n-1}} = c.$$

Ezért a feladatbeli n_0 akkor és csak akkor létezik, ha $|x| = 1$ vagy $|y| = 1$, de $x \neq -y$ (ellenkező esetben a_2 nem lenne értelmezve).

Hornung Tamás, Zalaegerszeg

A megoldók száma: 6.

A megoldók névsora: Borbély József, Tata (435–437., 439.); Dályay Pál Péter, Szeged (435–439.); Hornung Tamás, Zalaegerszeg (435–437., 439.); Kallós Béla, Nagyhalász (435., 436., 438.); Nagy Sándor, Békéscsaba (435. 2 mód, 436., 437.); Rakamazi Richárd, Eger (435.); Rakonczai György, Budapest (435., 437–439.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (435. 4 mód, 439.); Velkeyné Gréczi Alice, Ipolyszög (435., 437–439.).