A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Egy alapozó tárgyhoz kapcsolódó felmérés eredményei
(Dékány Éva – Székely László – Veres Antal)

Az amerikai elnök Deegan-Packel-féle hatalmi indexéről
(Csete Lajos)

Írjunk adott paralelogrammába hozzá hasonlót!
(Dr. Darvasi Gyula)

Sonkás szendvics és egyéb folytonos csemegék
(Csonka Dorottya)

XX. ÉVFOLYAM 2012 3

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 1800 Ft
Megjelenik évente 4 alkalommal.
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

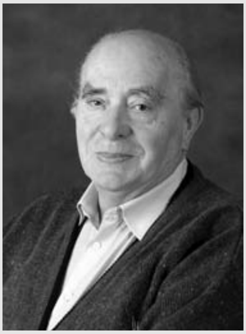
Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat e-mailen a kattila@mozaik.info.hu címre küldjék meg. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön fájlokban is kérjük mellékelni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat.



Megrendülten és szomorúan tudatjuk a Tisztelt Olvasókkal, hogy 2012. június 11-én, életének 73. évében elhunyt dr. Urbán János, lapunk főszerkesztője. Halálával egy nagy tudású, karizmatikus matematikatanárt, egy kiváló tankönyvszerzőt és főszerkesztőt és egy nagyszerű, szeretetreméltó, mindig segítőkész kollégát veszítettünk el. Emlékét és tanítását megőrizzük és továbbadjuk.

Dékány Éva – Székely László – Veres Antal

Egy alapozó tárgyhoz kapcsolódó felmérés eredményei[1]

Mind a műszaki, mind a természettudományos felsőoktatás egyik nagy problémája, hogy a belépő hallgatók jelentős részének matematikatudása nem éri el az intézmények által elvárt, a tantervben szereplő matematika, illetve szakmai tárgyak elsajátításához szükséges szintet, melyet mérések is igazolnak (lásd pl. *Csákány és Pipek*, 2010, és a benne szereplő hivatkozásokat). Az egyetemek és főiskolák jelentős része alapozó, felzárkóztató kurzusokat tesz kötelezővé vagy fakultatív tárgyként ajánl a hallgatóinak.

Tanulmányunkban a Szent István Egyetem Gépészmérnöki Karán folyó gépészmérnöki, mezőgazdasági és élelmiszeripari gépészmérnöki, mechatronikai mérnöki és műszaki menedzser BSc szakok elsőéves nappali tagozatos hallgatóinak tartott Matematikai alapok című tantárgyhoz kapcsolódó felmérés eredményeit mutatjuk be. A tárgy 2001 óta része a tantervnek, a tanulmány első szerzője 2010 óta a tárgy felelőse. A kurzus oktatása 2007 óta nem a félév során, a többi tárggyal párhuzamosan, hanem még a tanév megkezdése előtt, augusztusban történik: 10 napon át napi 3 órát tartunk tömbösítve, napi 1 óra konzultációs lehetőséggel kiegészítve. A diákok ugyanezen időszakban a Fizikai alapok című kurzust is hallgatják. A matematikai alapozó tárgyakat több egyetemen félév közben oktatják, ezen kurzusok tapasztalatairól lásd pl. *Máder* (2010), illetve *Pálfalviné* (2009) tanulmányait. Az augusztusi oktatási periódus végén a hallgatók egy zárthelyi dolgozatot írnak, amelyen legalább 51%-os eredményt kell elérniük a tárgy sikeres teljesítéséhez. A tárgy kritériumtárgy, nem teljesítése esetén a hallgató nem veheti fel a Matematika I. kurzust. Tárgyunk célja a középszintű érettségi szintjének megfelelő tananyag áttekintése: halmazok, logika, elsőfokú egyismeretlenes egyenletek és egyenlőtlenségek, elemi algebrai ismeretek, másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek, a hatványozás azonosságai, számolás hatványokkal és gyökökkel, algebrai átalakítások, magasabb fokú egyenletek és egyenletrendszerek, vektorok, vektorműveletek, alapvető trigonometriai fogalmak, trigonometrikus egyenletek, nevezetes szögek szögfüggvényei, függvények, függvénytranszformációk. Az anyag kiegészül még az addíciós tételekkel,

[1] A tanulmány Dékány Évának a Varga Tamás Módszertani Napok Konferencián 2011. november 12-én Budapesten elhangzott Examining the efficiency of preparation courses in mathematical studies for university című előadásának szerkesztett és kibővített változata

mely már túlmutat a középszintű érettségi témakörén. Az oktatás formája miatt nem várható el, hogy a nagy többségében középszinten érettségizett hallgatókat az emelt szintű érettségi által megkövetelt tudásanyagra készítsük fel. Tanulmányunkban egy, a 2011/12-es tanévben történt felmérést mutatunk be, mely során arra voltunk kíváncsiak, hogy a kurzus ilyen formában szükséges-e, illetve hasznos-e a hallgatóinknak. Technikai okokból a felmérést nem az egész évfolyamon, hanem csak a hallgatók egy csoportján végeztük: augusztusban két idősávban zajlott az oktatás, mintánkba csak az egyik idősávba járó hallgatókat választottuk ki. Ezen hallgatók teljesítményét három különböző időpontban is mértük. A mérés eszköze egy olyan, hét feladatból álló rövid teszt volt, amely feladatok a zárthelyi dolgozatban is szerepeltek. A három mérési alkalommal csak a feladatokban szereplő számokat változtattuk meg úgy, hogy a tesztek nehézségi szintje egyforma legyen. Elsőként röpdolgozat formájában a tárgy oktatásának kezdetén, másodjára a zárthelyi dolgozattal, a harmadik mérésre pedig szintén röpdolgozatként a félév 8. hetében került sor. Ennek alapján képet kaphattunk a hallgatók tudásáról az egyetemre történő belépésükkor, másrészt láthattuk, hogy a tárgy oktatásának hatására eredményeik hogyan változtak. A félévközi, harmadik mérés segítségével az is kiderült, hogy menynyit felejtettek a hallgatók az áttekintett anyagból akkor, amikor már nem közvetlenül az érintett témakörökkel foglalkoztunk.

A mérés mintája

A kérdéses tanévben 245 hallgató írta meg a zárthelyi dolgozatot. Közülük augusztusban a kiválasztott idősávba 100 hallgató járt. Ahhoz, hogy elemzéseink segítségével a hallgatók teljesítményéről árnyaltabb képet kapjunk, figyelembe vettük a hallgatók alábbi négy háttéradatát is:

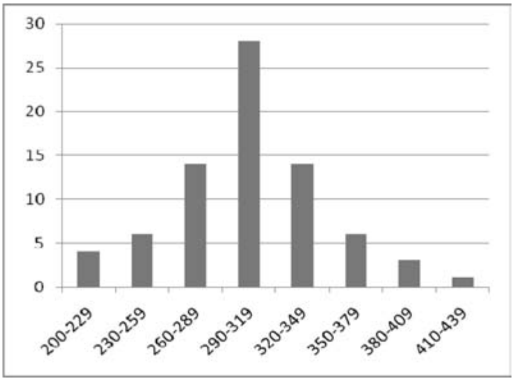
- felvételi pontszám,
- matematika érettségi jegye,
- középiskola típusa,
- érettségi éve.

Az adatok tisztítása után mintánk összesen 76 hallgatóból áll. Közülük 70 tett csak középszintű és 4 emelt szintű érettségi vizsgát, 2 hallgató pedig mindkét szinten érettségizett. Az adatok könnyebb összehasonlíthatósága és a két érettségi szint közötti nagy különbség miatt a csak emelt szintű érettségit tett hallgatókat úgy tekintettük, mintha jeles középszintű érettségit tettek volna (a mindkét szinten érettségiző hallgatók középszinten eleve jelesre érettségiztek). A harmadik mérési alkalommal a 12 hiányzón kívül azok a hallgatók, akik nem teljesítették a tárgyat (3 fő) már nem vettek részt a felmérésben, azonban az ő augusztusi időszakban nyújtott teljesítményük változása is érdekes, ezért abban az esetben, amikor az első és a második mérési pont eredményeiről beszélünk, illetve ezeket hasonlítjuk össze, akkor a 76 fős mintát, egyéb esetekben a 61 fős mintát vesszük alapul.

A Karunkon folyó gépészmérnöki, mezőgazdasági és élelmiszeripari gépészmérnöki, mechatronikai mérnöki és műszaki menedzser szakokon az államilag finanszírozott képzésekre rendre 270, 292, 268, illetve 304 pont volt a felvételi ponthatár, a költségtérítéses képzési formára pedig egységesen 200 pont. A mintánkba technikai okokból ugyan csak az első két szakra járó hallgatók kerültek be, azonban a gépészmérnöki és mechatronika, illetve a mezőgépész és menedzser szakok felvételi ponthatárai közötti kis különbségek alapján, továbbá az adott szakos hallgatók felvételi pontjainak eloszlásának hasonlósága miatt mintánk az egész évfolyamra nézve reprezentatív. Mivel a harmadik mérés során csak arra voltunk kíváncsiak, hogy az egész évfolyam tudása átlagosan hogyan változott, ezért a következőkben csak az eredeti minta esetében tekintjük át az egyes háttérváltozók eloszlását.

Az alábbi táblázatban és grafikonon a mintában szereplő hallgatók felvételi pontszámának eloszlását mutatjuk be.

Felvételi pontszám	Gyakoriság
200–229	4
230–259	6
260–289	14
290–319	28
320–349	14
350–379	6
380–409	3
410–439	1



A felvételi pontok átlaga 302,4, szórása pedig 41,8. A matematika érettségi jegyek eloszlása a következő:

Érettségi jegy	Gyakoriság
3	21
4	41
5	14

A jegyek átlaga 3,9, szórása 0,7. A hallgatók közül 46-an gimnáziumban, 30-an pedig szakközépiskolában érettségiztek. 2011-ben 53-an, míg 23-an már korábban szerezték meg az érettségi vizsgát, azaz a felvettek közel egyharmada nem a felvételi évében érettségizett.

Hány éve érettségizett	Gyakoriság
0	53
1	7
2	9
3	6
4	1

A korábban érettségizettek átlagosan 2 évvel a felvétel előtt maturáltak.

A mérőeszköz

A felmérés során használt 7 feladatból álló teszt – melyet alább bemutatunk – a zárthelyi dolgozat egy rövidített feladatsora, melynek a három mérési alkalommal használt változatai csak számokban tértek el egymástól, azok ekvivalensnek tekinthetőek.

1. Írja fel egyetlen a alapú hatványként:

$$\frac{a^2}{a \cdot \sqrt[4]{a}} =$$

(3 pont)

2. Számolja ki az értékét:

$$\sqrt{6^2 + 8^2} =$$

(1 pont)

3. Gyöktelenítse a nevezőt:

$$\frac{1}{3 + \sqrt{2}}$$

(2 pont)

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$5x + 2y = 1$$
$$4x + 3y = 5$$

(4 pont)

5. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$x^2 + 15 > 8x$$

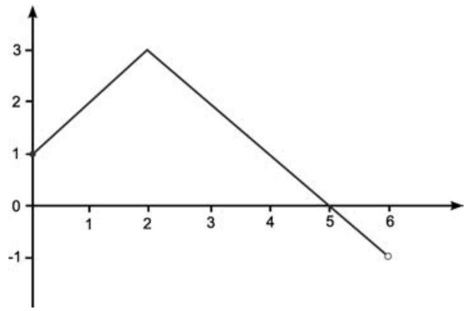
(4 pont)

6. Ábrázolja a függvény grafikonját:

$$f(x) = (x + 3)^2 + 1$$

(2 pont)

7. Jellemezze az alábbi grafikonjával adott függvényt!



Értelmezési tartomány:
Értékkészlet:
Zérushely:
Monoton nő:
Abszolút maximumhely:
Abszolút maximumérték:

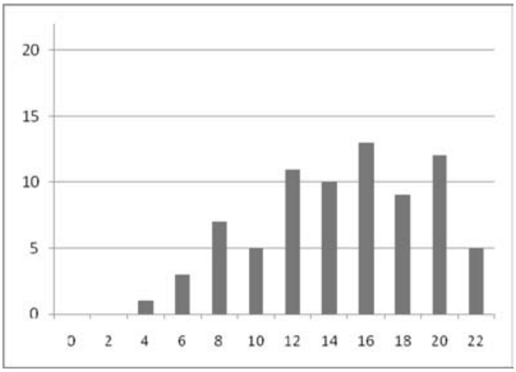
(6 pont)

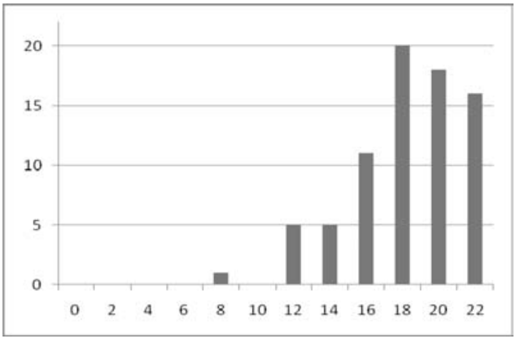
A feladatok pontszáma megegyezik a megoldásukhoz szükséges logikai lépések számával, így a teszten összesen 22 pont szerezhető. A dolgozatok értékelésének fő szempontja szerint a hibás logikai lépés nem ér pontot, azonban a rossz részeredménnyel végrehajtott helyes logikai lépések igen. Szeretnénk kiemelni, hogy ezen feladatok mind a középiskolai matematika anyagnak, mind az egyetemen a továbbtanuláshoz szükséges ismereteknek elengedhetetlen részét képezik. A feladatok megoldásához a hallgatók segédeszközként csak számológépet használhattak, négyjegyű függvénytáblázatot nem. A zárthelyi dolgozat és az adott teszten elért pontszámok közötti korreláció 0,76, ami alapján elmondható, hogy a tesztünk által mért tudásterületen szerzett pontszám elég jól közelíti a teljes dolgozaton elért pontszámot.

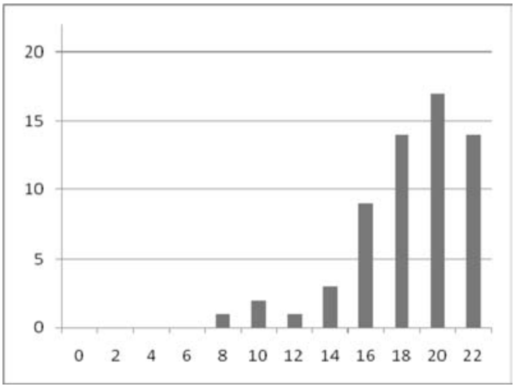
Eredmények

Elsőként a három mérési pont átlagait és szórásait mutatjuk be.

	Hallgatók száma	Átlag	Szórás
1. mérés	76	14,3	4,6
2. mérés	76	17,8	3,1
3. mérés	61	18,0	3,3







Érdemes megnézni, hogy a pontszámok eloszlása a három mérés során hogyan változott.

Látható, hogy az első mérés esetében a hallgatók pontszámának eloszlása jól közelíthető egy „lapos" Gauss-görbével, míg a másik két esetben a görbe csúcsosabb és jobbra tolódik el, utóbbiak karakterisztikája jó közelítéssel meg is egyezik. Ennek alapján arra következtethetünk, hogy a hallgatók teljesítménye a második méréskor az első méréshez képest ténylegesen javult, vagyis az oktatás, illetve a hallgatók tanulása révén a zárthelyi dolgozaton jobb eredményt értek el, mint az egyetemre történő belépésükkor. A második és a harmadik mérés hisztogramjának hasonlósága pedig arra utal, hogy a korábban átismételt anyagot nem felejtették el. A mérések átlageredményeit egy statisztikai próbával, az ún. párosított t-próbával (lásd pl. *Reiczigel, Harnos és Solymosi*, 2007) is összehasonlítottuk[2]. Arra voltunk kíváncsiak, hogy az egyes mérési pontok között a hallgatók átlagteljesítményében valóban történt-e változás, azok között ún. szignifikáns különbség van-e, vagy az eredmények közötti különbség kicsi és a két érték statisztikai szempontból egyenlőnek tekinthető-e. A próbát az első és a második mérés adatain elvégezve azt kaptuk, hogy a két mérés között a hallgatók átlagos teljesítménye ténylegesen javult. Ezzel szemben a második és a harmadik mérés eredményeinek – az utóbbiban is részt vevő 61 hallgató mintáján – a próbával történő összehasonlítása alapján kijelenthető, hogy a hallgatók ezen két alkalommal átlagosan ugyanolyan teljesítményt nyújtottak.

[2] A próbát – akárcsak a későbbiekben a többi próbát is – 95%-os megbízhatósági szinten hajtottuk végre.

A következőkben tekintsük át, hogy az egyes feladatokban a három mérés során hogyan teljesítettek a hallgatók. Előrebocsátjuk, hogy a második és a harmadik mérés esetében általában közel azonos volt a pontszámok eloszlása, ahol nem, ott azt külön jelezzük.

A hatványok értelmezése és a hatványozás azonosságainak alkalmazása alapvető középiskolai matematikai anyag, elengedhetetlen a differenciál- és integrálszámításhoz. Ugyanakkor jól mutatja, hogy a hallgató érti-e a hatványok lényegét, illetve képes-e egyszerű szabálykövetésre. Ennek ellenére az első feladatot a bemeneti méréskor mindössze a hallgatók 20%-a tudta hibátlanul, közel 40%-a pedig a három szükséges logikai lépésből kettőt tudott helyesen megoldani. A zárthelyi dolgozatra a hibátlan megoldások aránya valamivel több, mint 60% lett, a két pontot elérők aránya 20% volt.

A három mérés során általában a hallgatók 5–10%-a vont tagonként gyököt; sajnos a tapasztalat azt mutatja, hogy látszólag bonyolultabb feladatok esetében ez az arány jóval magasabb.

A nevező gyöktelenítése a zsebszámológépek elterjedésével mára elveszítette eredeti fontosságát a középiskolában, csak mint azonos átalakításnak van jelentősége, viszont az egyetemen több feladattípusnál is jól alkalmazható. Ezt jól jelzi, hogy belépéskor a diákok 60%-a egyáltalán nem tudott mit kezdeni a feladattal, míg a hallgatók ehhez kapcsolódó ismeretei a rövid ismétlés után felelevenedtek és a zárthelyi dolgozatban már csak a 40%-uk hibázott.

Az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása egyszerű, több ismert módszer is van rá, és szinte minden tudományágban alkalmazzák. Az első mérés alkalmával a hallgatók fele adott hibátlan megoldást a feladatra, negyedük pedig 3 pontot ért el. A kurzus alatt precízebbé váltak a diákok, a második alkalomkor már közel háromnegyedük helyesen oldotta meg a feladatot, és közel a negyedük 3 pontot szerzett.

Egy másodfokú egyenletet elég könnyen felismernek a hallgatók és hála a sok középiskolai gyakorlásnak, legtöbben hibátlanul meg is oldanak. Ehhez képest megdöbbentő, de közismert, hogy ugyanezt a problémát egyenlőtlenségként csak a legjobbak képesek helyesen megoldani. Esetünkben is az egyetemre történő belépéskor a hallgatók közel 70%-a megállt a másodfokú egyenlet megoldásánál, 20%-uknak sajnos pedig ezzel is problémája akadt. A zárthelyi dolgozatban már elenyésző volt azon hallgatók száma, akik ne tudták volna hibátlanul megoldani a másodfokú egyenletet, és már 40%-uk kezelte valóban egyenlőtlenségnek a kitűzött problémát. A félév közbeni méréskor ez az arány már 65%-ra javult. Ennek egyik oka az lehet, hogy a Matematika I. tárgy keretein belül több feladat esetében is szükség volt ilyen egyenlőtlenség megoldására.

A másodfokú függvény grafikonjának ábrázolását transzformációval és a függvényjellemzők leolvasását elég jól tudták a hallgatók, csak rövid ismétlésre volt szükség. A hatodik feladat esetében 80–90% között volt a helyes megoldást adók aránya. Belépéskor a grafikon leolvasása során a hallgatók fele ért el 5 vagy 6 pontot, a többi pontszám eloszlása közel egyenletes volt. Örvendetes, hogy szinte alig volt olyan hallgató, aki a zárthelyi dolgozatban ne ért volna el legalább 4 pontot, az 5 pont felett teljesítők aránya pedig 70%-ra nőtt, utóbbiak aránya a harmadik mérési alkalommal még tovább növekedett.

Hogy az évfolyamon belül még árnyaltabban lássuk a tárgy oktatásának eredményét, a minta bizonyos részcsoportjaira is végeztünk elemzéseket, illetve összehasonlításokat. Elsőként tekintsük át, hogy a belépéskor 51% alatti teljesítményt nyújtó (legfeljebb 11 pontot szerző), azaz akkori tudásuk alapján a tárgyat nem teljesítő diákok eredménye hogyan változott a zárthelyi dolgozatra. Összesen 24 hallgató, azaz közel a mintában szereplők harmada ért el legfeljebb 11 pontot, az ő átlagos teljesítményük az első mérés alkalmával 8,8 pont volt, míg a második méréskor már 15,5 pont, azaz a kurzus és a tanulás hatására átlagosan 6,7 ponttal javult a teljesítményük (párosított t-próbával a javulást statisztikailag is igazoltuk).

Az alábbiakban bemutatjuk, hogy az érettségi jegyek függvényében hogyan alakult az első két mérés során a hallgatók teljesítményének átlaga.

Érettségi jegy	**Gyakoriság**	**1. mérés**	**2. mérés**	**Javulás**
3	21	10,9	15	4,1
4	41	14,2	18,4	4,2
5	14	19,4	20	0,6

Látható, hogy azok a hallgatók, akik közepes vagy jó jegyet szereztek, átlagosan közel 4 pontot, azaz 18,2%-ot javítottak a belépéskor mért teljesítményükhöz képest, míg a jelesre érettségizetteknél ez a változás 0,6 pont. Párosított t-próbával kiderült, hogy ez a különbség az első két esetben valóban szignifikáns, míg az ötössel végzők esetében statisztikailag nem kimutatható a különbség az eredmények között. Utóbbi érthető is, hisz aki az első mérésen közel maximálisan teljesített, annak már nem volt lehetősége a teszteredményén jelentősen javítani. Mindkét kérdéses mérési pontban kétmintás t-próbát (lásd pl. *Lukács*, 2002) használva megmutatható, hogy a hármassal és négyessel végzettek eredményei között valódi a különbség. Hasonló a helyzet a négyesre, illetve ötösre érettségizettek esetében a bemeneti méréskor, azonban az előbbiek felzárkózásának köszönhetően a hallgatók ezen két csoportja már ugyanolyan jól teljesített a zárthelyi dolgozatban.

Vizsgáljuk meg, hogyan függött a hallgatók teljesítménye a középiskola típusától.

Iskola típusa	Gyakoriság	1. mérés	2. mérés	Javulás
Gimnázium	46	15,2	17,9	2,7
Szakközépiskola	30	12,8	17,5	4,7

A két mérési pont között a gimnáziumban érettségizettek átlagos javulása 2,7 pont (12,3%), a szakközépiskolások teljesítménye pedig átlagosan 4,7 ponttal, azaz 21,4%-kal bizonyult jobbnak a zárthelyi dolgozaton. Kétmintás t-próba alkalmazásával ellenőriztük, hogy a gimnazisták átlagosan jobban teljesítettek a belépéskor, mint a szakközépiskolában végzettek, a zárthelyi dolgozaton azonban már nem volt statisztikailag kimutatható különbség a két iskolatípus között.

A következőkben azt tekintjük át, hogyan változott a hallgatók teljesítménye az első két mérés között attól függően, hogy a hallgató a felmérés évében vagy korábban érettségizett-e.

Idén érettségizett?	Gyakoriság	1. mérés	2. mérés	Javulás
igen	53	15,8	18,4	2,6
nem	23	10,8	16,2	5,4

A 2011-ben érettségizett hallgatók teljesítménye átlagosan 2,6 ponttal (11,8%), a korábban érettségizetteké pedig átlagosan 5,4 ponttal (24,5%) javult; a párosított t-próbák eredményei alapján elmondható, hogy a változás egyik esetben sem a véletlen műve. A hallgatók ezen két csoportja között lévő teljesítménykülönbség mindkét mérési pontban statisztikailag kimutatható, azaz a korábban érettségizettek átlageredménye sem a belépéskor, sem a zárthelyi dolgozatban nem érte el az érettségi évében felvételizőkét.

Diszkusszió és konklúziók

Ismételten szeretnénk hangsúlyozni, hogy a teszteken használt feladattípusok nagy hangsúlyt kapnak a középiskolai oktatás során és alapvetőek az egyetemi tanulmányokhoz, nem csak matematikában, hanem szinte minden más tudományterület esetében is.

Eredményeink alapján elmondható, hogy a kurzus hasznos volt azon hallgatóknak, akik hármas vagy négyes jegyre érettségiztek. Előbbiek átlagteljesítménye belépéskor még a minimálisan megkövetelt szint alatt volt, a tanulás és ismétlés hatására azonban eredményük jelentősen javult. Érdekes, hogy az e két csoportba tartozó hallgatók esetében ez a teljesítményjavulás ugyanakkora mértékű volt, azaz a tudásuk közötti különbséget az oktatás két hete alatt nem sikerült megszüntetnünk, de az nem is volt várható, hogy az évek alatt kialakult téves beidegződéseket és hiányosságokat ennyi idő alatt kijavítjuk. A jelesre érettségizők eredménye nem változott számottevően, viszont a négyesek teljesítménye a kurzus végére már megközelítette az ő eredményüket; úgy véljük, ez részben köszönhető a mért anyag nehézségi szintjének is.

Azt tapasztaltuk, hogy a szakközépiskolások eredetileg gyengébben teljesítettek gimnáziumban tanult társaikhoz képest, de az ismétlések hatására már nem volt különbség a két iskolatípusban tanult hallgatók eredménye között. Fizikát oktató kollégáink elmondása szerint az ő tárgyuk esetében az iskolák típusa szempontjából épp fordított a helyzet.

A korábban érettségizett hallgatókat vizsgálva azt láttuk, hogy az első méréskor az átlagteljesítményük közel volt a tárgy teljesítéséhez szükséges ponthatárhoz, azonban a második mérésre eredményeik már számottevően javultak. Több mérés igazolja, hogy a diákok az általános és középiskolában megszerzett tudásuk jelentős részét, ha azt nem használják, az érettségi után átlagosan 3 év alatt elfelejtik (*Földes*, 2002). A korábban érettségizett hallgatóink átlagosan két évvel a felvételük előtt fejezték be középiskolai tanulmányaikat, így ez a folyamat az ő esetükben is elindult. A felmérés évében maturáló hallgatók kisebb mértékben ugyan, de szintén javítottak teljesítményükön. Bár a két csoport közötti különbség az oktatás hatására csökkent, a 2011-ben érettségizettek átlagteljesítménye a zárthelyi dolgozaton még mindig szignifikánsan jobb volt.

Összefoglalva: azt találtuk, hogy kurzusunk a közepesre, illetve a nem a felvételi évében érettségizetteknek szükséges volt ahhoz, hogy tudásuk elérje az elégséges szintet, de tárgyunk egyben hasznos is volt számukra, hisz átlagos teljesítményük jelentősen javult. Általánosságban elmondható, hogy a többi hallgatónk közül azoknak, akik nem jelesre érettségiztek, de különösképpen a szakközépiskolában végzetteknek a kurzus által nyújtott áttekintés hasznosnak bizonyult, hisz teljesítményük a zárthelyi dolgozatra jobb lett, ezáltal felkészültebben kezdhették meg egyetemi tanulmányaikat. A szakközépiskolások esetében a gimnazistákkal szemben tapasztalt kezdeti hátrányt is sikerült ledolgozni. A harmadik mérési alkalommal – melyre a félév 8. hetében került sor – kapott eredmények pedig azt igazolják, hogy a hallgatók teljesítménye a zárthelyi dolgozat óta nem romlott, a kurzuson zajlott ismétlés hatásos volt. Érdemes még megemlítenünk, hogy a hallgatókkal folytatott beszélgetések is azt támasztják alá, hogy kurzusunk a felkészülésben sokuknak hasznos segítséget jelentett.

Úgy véljük, tárgyunk tömbösített oktatási formája előnyösebb a hallgatóknak a félév közbeni párhuzamos alapozásnál, felzárkóztatásnál. Mivel az ilyen típusú kurzusukon áttekintett tudásanyagra már az egyetemi tanulmányok kezdetén szükség van, így a tömbösített tárgyalás esetében nem fordulhat elő az a helyzet, hogy a hallgatók az alapjaik egyes hiányosságaival a félév közben, „éles helyzetben” találkoznak először és a hiánypótlásra ezután akár hetekkel később kerül csak sor. Jelenlegi adataink a 2007 előtti dolgozatokkal, illetve más felsőoktatási intézmények hasonló tárgyainak eredményével nehezen összehasonlíthatóak, így ezen hipotézist statisztikailag nem tudjuk igazolni.

A felmérés során keletkezett adatbázisunk lehetőséget nyújt arra, hogy a későbbi évfolyamok eredményeit is összehasonlítsuk a jelenlegiével, ezáltal a köz- és felsőoktatásban lejátszódó folyamatoknak a jövőbeli hallgatóink matematikatudására vonatkozó hatásairól is képet alkothatunk. A későbbiekben pedig megvizsgálhatjuk, hogy a hallgatóknak a Matematika I. tárgyon elért pontszámai, illetve az alapozó tárgyon elért eredményei között milyen összefüggés van, azaz kurzusunk hatása a rá épülő matematikai tanulmányokban megmutatkozik-e.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnénk megköszönni tanszéki kollégáink támogatását és közreműködését a felmérések elvégzésében, továbbá hallgatóinknak, hogy a felmérésben való részvételüket önként vállalták. Köszönjük Tóth Editnek (MTA SZTE Képességkutató Csoport) a cikk írása során adott értékes javaslatait.

Hivatkozások

[1] Csákány Anikó, Pipek János: A 2009 szeptemberében a műszaki és természettudományos szakokon tanulmányaikat kezdő hallgatók által írt matematikafelmérő eredményeiről. *Matematikai lapok*, 16/1 (2010) 1–15.

[2] Földes Petra: Élő matematika. Hogyan válhatnak hasznossá és használhatóvá a matematikai ismeretek – Beszélgetés Vancsó Ödön kutatóval. *Új pedagógiai szemle*, 52/9 (2002) 133–140.

[3] Lukács Ottó (2002): *Matematikai statisztika*. Bolyai-könyvek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

[4] Máder Attila: Mit tud(hat) a hallgató? Mit lát az egyetem? Egy felmérés és következtetései. *A matematikai tanítása*, 18/3 (2010) 3–12.

[5] Pálfalvi Józsefné: Szintfelmérő dolgozatok az ELTE TTK-n 2006–2008, *A matematika tanítása*, 17/5 (2009) 3–14.

[6] Reiczigel Jenő, Harnos Andrea, Solymosi Norbert (2007): *Biostatisztika nem statisztikusoknak.* Pars Kft., Nagykovácsi.

Csete Lajos

Az amerikai elnök Deegan-Packel-féle hatalmi indexéről

1. Bevezetés

A formális hatalom mérésére többféle módszert találtak ki. Korábban foglalkoztunk a hatalom mértékének Shapley-Shubik-féle indexével [1] és a hatalom Banzhaf-indexével. [2,3]

Most a hatalom Deegan-Packel-féle indexét alkalmazzuk az amerikai elnök hatalmának egy lehetséges mérésére. Mint tudjuk, 1978-ban John Deegan Jr. és Edward Packel vezette be a hatalom egy új mértékét, az úgynevezett Deegan-Packel-féle indexet. [4,8]

A hatalom mértékének Deegan-Packel-féle indexe három feltevésen alapszik.

1. Csak a minimális győztes koalíciókat fogjuk figyelembe venni az egyes szavazók hatalmi arányának a meghatározásához.
2. Minden minimális győztes koalíció egyforma valószínűségű.
3. Egy szavazó hatalmának része, amely valamely minimális győztes koalícióhoz való tartozásból következik, ugyanaz, mint ugyanennek a minimális győztes koalícióhoz tartozó másik szavazónak azon hatalmi része, amely ehhez a minimális győztes koalícióhoz való tartozásból következik.

1. Definíció:

Tegyük fel, hogy egy igen-nem szavazórendszer szavazói $p_1, p_2, \ldots, p_n$ és p_i tetszőleges szavazó ($i = 1, 2, \ldots, n$) a szavazók közül. Ekkor a p_i szavazó *teljes Deegan-Packel hatalmát* $TDPP(p_i)$-vel jelöljük és a következő módon kaphatjuk meg:

Tegyük fel, hogy a p_i szavazó a $K_1, K_2, \ldots, K_j$ minimális győztes koalíciókba tartozik bele. Tegyük fel, hogy k_1 darab szavazó tartozik K_1-be, k_2 darab szavazó tartozik K_2-be, s így tovább, k_j darab szavazó tartozik K_j-be.

Ekkor legyen $TDPP(p_i) = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_j}$.

2. Definíció:

Tegyük fel, hogy egy igen-nem szavazórendszer szavazói $p_1, p_2, \ldots, p_n$ és p_i tetszőleges szavazó ($i = 1, 2, \ldots, n$) a szavazók közül.

Ekkor a p_i szavazó *Deegan-Packel-féle hatalmi indexének jelölése* $DPI(p_i)$ és legyen

$$DPI(p_i) = \frac{TDPP(p_i)}{TDPP(p_1) + TDPP(p_2) + \ldots + TDPP(p_n)}.$$

(Intuitív módon láthatjuk, hogy a p_i szavazó Deegan-Packel-féle hatalmi indexe megmutatja a p_i szavazó részesedését a teljes Deegan-Packel-féle hatalomból.)

1. állítás:

Tegyük fel, hogy egy igen-nem szavazórendszer szavazói $p_1, p_2, \ldots, p_n$ és p_i tetszőleges szavazó ($i = 1, 2, \ldots, n$) a szavazók közül. Ekkor a p_i szavazó Deegan-Packel-féle hatalmi indexére fennáll, hogy

$$0 \le DPI(p_i) \le 1.$$

A bizonyítás a $DPI(p_i)$ definíciójából következik. Esetleg érdemes meggondolnunk, hogy mindig értelmes-e a definíció. Vagyis $TDPP(p_1) + TDPP(p_2) + \ldots + TDPP(p_n) \neq 0$ mindig fennáll?

2. állítás:

Tegyük fel, hogy egy igen-nem szavazórendszer szavazói $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ekkor

$$DPI(p_1) + DPI(p_2) + \ldots + DPI(p_n) = 1.$$

Bizonyítás:

$$DPI(p_1) + DPI(p_2) + \ldots + DPI(p_n) =$$

$$= \frac{TDPP(p_1)}{TDPP(p_1) + TDPP(p_2) + \ldots + TDPP(p_n)} +$$

$$+ \frac{TDPP(p_2)}{TDPP(p_1) + TDPP(p_2) + \ldots + TDPP(p_n)} + \ldots +$$

$$+ \frac{TDPP(p_n)}{TDPP(p_1) + TDPP(p_2) + \ldots + TDPP(p_n)} =$$

$$= \frac{TDPP(p_1) + TDDP(p_2) + \ldots + TDPP(p_n)}{TDPP(p_1) + TDPP(p_2) + \ldots + TDPP(p_n)} = 1$$

2. Az amerikai elnök, a szenátus és a képviselőház teljes Deegan-Packel-féle hatalma

2.1. A szavazási rendszer vázlata

Az amerikai hatalmi rendszerben a politikai hatalom formálisan az elnök, a szenátus és a képviselőház között oszlik meg. A szenátusnak 100 tagja, azaz szenátora van, míg a képviselőháznak 435 tagja, azaz képviselője van. Egy olyan döntést vizsgálunk, amelynek meghozatalához mindhárom hatalmi tényező szavaz.

1. típus:

Egy javaslatot elfogadnak, ha az elnök szavaz mellette, a szenátus legalább 51 tagja és a képviselőház 218 tagja. Ez a szenátus esetében 50% és még 1 szavazat, míg a képviselőház esetében 217,5 az 50%, így ebben az esetben nem követelik meg az 50% + 1 szavazatot, hanem azt mondják, hogy 50%-nál több szavazat kell. Ez a megfogalmazás persze érvényes a szenátusra is, erre is mondhatjuk, hogy 50%-nál több szavazat szükséges a döntéshez.

2. típus:

Egy javaslatot akkor is elfogadhatnak, ha az elnök nem szavaz mellette, ebben az esetben a szenátus tagjainak legalább kétharmadának és a képviselőház tagjainak is legalább kétharmadának a javaslat mellett kell szavaznia. Figyeljük meg, hogy itt nem azt mondják, hogy a kétharmadnál több szavazat kell, hanem azt, hogy legalább kétharmad.

Vagyis a szenátus 100 tagja közül legalább 67-nek a javaslat mellett kell szavaznia, míg a képviselőház 435 tagja közül legalább 290-nek kell a javaslat mellett szavaznia.

2.2. A minimális győztes koalíciók száma

Az 1. lehetőségnél a minimális győztes koalíciók száma $\binom{1}{1}\cdot\binom{100}{51}\cdot\binom{435}{218}$, hiszen az 1 elnökből 1-et kell kiválasztanunk, a 100 szenátorból 51-et kell kiválasztanunk, míg a 435 képviselőből 218-at kell kiválasztanunk a minimális győztes koalícióhoz.

A 2. lehetőségnél a minimális győztes koalíciók száma $\binom{1}{0}\cdot\binom{100}{67}\cdot\binom{435}{290}$, hiszen az 1 elnökből 0-át kell kiválasztanunk, a 100 szenátorból 67-et kell kiválasztanunk, míg a 435 képviselőből 290-et kell kiválasztani a minimális győztes koalícióhoz.

2.3. Az elnök teljes Deegan-Packel-féle hatalma

Az elnök $\binom{1}{1}\cdot\binom{100}{51}\cdot\binom{435}{218}$ darab minimális győztes koalícióban szerepel, tehát ennyit tud szétrombolni, ha kilép belőlük. Az ilyen típusú minimális győztes koalíciókban $1 + 51 + 218 =$ $= 270$ tag szerepel. Így definíció szerint az elnök teljes Deegan-Packel-féle hatalma:

$$TDPP(\text{elnök}) = \frac{1}{270}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{100}{51}\cdot\binom{435}{218} \approx$$

$$\approx 1{,}241\,326\,087\,902\cdot 10^{156}.$$

2.4. Egy szenátor teljes Deegan-Packel-féle hatalma

Szemeljünk ki egy tetszőleges szenátort és határozzuk meg, hogy mennyi minimális győztes koalícióban szerepel.

Nézzük először az 1. típusú minimális győztes koalíciókat!

Ha kiszemeltük az 1 szenátort, akkor már csak 50 szenátort kell kiválasztanunk, hogy 51 szenátort kapjunk. Az 50 szenátort már csak 99 szenátor közül kell kiválasztanunk.

Ezt $\binom{99}{50}$-féleképpen végezhetjük el. Másrészt továbbra is 218 képviselőt kell kiválasztanunk a 435 képviselőből, ezt $\binom{435}{218}$-féleképpen tehetjük meg.

Így a kiszemelt szenátor $\binom{1}{1}\cdot\binom{99}{50}\cdot\binom{435}{218}$ darab 1. típusú győztes koalícióban szerepel.

Nézzük a 2. típusú minimális győztes koalícióit!

A kiszemelt szenátor mellé már csak 66 szenátort kell kiválasztanunk, hogy megkapjuk a szükséges 67 szenátort. A 66 szenátort már csak 99 szenátor közül kell kiválasztanunk. Ezt $\binom{99}{66}$-féleképpen tehetjük meg. (A Taylor-könyv 224. oldalán $\binom{100}{66}$ szerepel, ez szerintünk sajtóhiba. Különben a végeredményeket lényegében nem befolyásolja ezen sajtóhiba. Még akkor sem, ha ezzel számoltak tovább.) A 435 képviselőből most 290-et kell kiválasztanunk, ezt $\binom{435}{290}$-féleképpen tehetjük meg.

Így a kiszemelt szenátor $\binom{1}{0}\cdot\binom{99}{66}\cdot\binom{435}{290}$ darab 2. típusú minimális győztes koalícióban vesz részt.

Egy 1. típusú minimális győztes koalíció tagjainak száma 270, míg a 2. típusú minimális győztes koalíció tagjainak száma $0 + 67 + 290 = 357$.

Így egy kiszemelt szenátor teljes Deegan-Packel-féle hatalmi indexe:

$$TDPP(\text{szenátor}) = \frac{1}{270}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{99}{50}\cdot\binom{435}{218} + \frac{1}{357}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{99}{66}\cdot\binom{435}{290} \approx \approx 0{,}633\,076\,304\,830\cdot 10^{156}.$$

2.5. Egy képviselő teljes Deegan-Packel-féle hatalma

Szemeljünk ki egy tetszőleges képviselőt és vizsgáljuk meg, hogy mennyi minimális győztes koalícióban szerepel!

Nézzük először az 1. típusú minimális győztes koalíciókat!

Itt a kiszemelt képviselő mellé még 217 képviselőt kell választanunk, hogy 218 képviselőt kapjunk. Ezen 217 képviselőt már csak 434 képviselőből választhatjuk.

Ezt $\binom{434}{217}$-féleképpen tehetjük meg. Másrészt 100 szenátor közül 51-et kell kiválasztanunk. Ezt $\binom{100}{51}$-féleképpen tehetjük meg. Az 1 elnökből az 1 elnököt kiválasztjuk $\binom{1}{1}$-féleképpen.

Összesen $\binom{1}{1}\cdot\binom{100}{51}\cdot\binom{434}{217}$ darab 1. típusú győztes koalícióban szerepel a kiválasztott képviselő.

Nézzük most a 2. típusú minimális győztes koalíciókat!

Itt a kiszemelt képviselő mellé 289 képviselőt kell választanunk, hogy a 290 képviselőt megkapjuk. A 289 képviselőt már csak 434 képviselőből választjuk ki.

Ezt $\binom{434}{289}$-féleképpen tehetjük meg.

A 100 szenátorból 67 szenátort kell kiválasztanunk, ezt $\binom{100}{67}$-féleképpen tehetjük meg.

Az 1 elnökből 0 elnököt $\binom{1}{0}$-féleképpen választhatunk ki.

Összesen $\binom{1}{0}\cdot\binom{100}{67}\cdot\binom{434}{289}$ darab 2. típusú minimális győztes koalícióban szerepel a kiválasztott képviselő.

Az 1. típusú koalíciók 270 tagúak, míg a 2. típusú koalíciók 357 tagúak. Így a definíció szerint egy kiválasztott képviselő teljes Deegan-Packel-féle hatalma:

$$TDPP(\text{képviselő}) = \frac{1}{270}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{100}{51}\cdot\binom{434}{217}+$$

$$+\frac{1}{357}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{100}{67}\cdot\binom{434}{289}\approx$$

$$\approx 0{,}622\,089\,855\,546\cdot 10^{156}.$$

3. Az amerikai elnök, a szenátus és a képviselőház Deegan-Packel-féle hatalmi indexe

Az elnök Deegan-Packel-féle hatalmi indexe definíció szerint:

$$DPI(\text{elnök}) =$$

$$= \frac{TDPP(\text{elnök})}{TDPP(\text{elnök}) + 100\cdot TDPP(\text{szenátor}) + 435\cdot TDDP(\text{képviselő})}\approx$$

$$\approx 0{,}003\,703\,703\,704 \approx 0{,}370\%.$$

Egy szenátor Deegan-Packel-féle hatalmi indexe:

$$DPI(\text{szenátor}) =$$

$$= \frac{TDPP(\text{szenátor})}{TDPP(\text{elnök}) + 100\cdot TDPP(\text{szenátor}) + 435\cdot TDDP(\text{képviselő})}\approx$$

$$\approx 0{,}001\,888\,888 \approx 0{,}189\%.$$

Egy képviselő Deegan-Packel-féle hatalmi indexe:

$$DPI(\text{képviselő}) =$$

$$= \frac{TDPP(\text{képviselő})}{TDPP(\text{elnök}) + 100\cdot TDPP(\text{szenátor}) + 435\cdot TDDP(\text{képviselő})}\approx$$

$$\approx 0{,}001\,856\,109 \approx 0{,}186\%.$$

A szenátus tagjainak összes *DPI* hatalma: kb. $100\cdot 0{,}189 = 18{,}9\%$.

A képviselőház tagjainak összes *DPI* hatalma: kb. $435\cdot 0{,}1856 \approx 80{,}74\%$.

4. Kísérletünk a képviselőház létszámának a változtatására

Érdekes lehet megvizsgálni, hogyan változna meg az elnök, a szenátorok és a képviselők *DPI* hatalma, ha megváltozna a képviselők száma. Az elnök és a szenátus létszámának megváltoztatása lehetséges, de még valószínűtlenebb kísérletekhez vezetne.

Csökkentsük képzeletben 10%-kal a képviselőház létszámát és vizsgáljuk meg az egyes szereplők *DPI* hatalmát! Ez 391,5 képviselő lenne, legyen 391 képviselő, hogy páratlan szám legyen. Itt az 50%-ot meghaladó létszám legalább 196 képviselő, míg a kétharmadot éppen meghaladó létszám 261 fő.

Az elnök $\binom{1}{1}\cdot\binom{100}{51}\cdot\binom{391}{196}$ darab minimális győztes koalícióban vesz részt.

$$TDPP(\text{elnök}) = \frac{1}{248}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{100}{51}\cdot\binom{391}{196}\approx$$

$$\approx 8{,}101\,219\,820\cdot 10^{142}$$

$$TDPP(\text{szenátor}) = \frac{1}{248}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{99}{50}\cdot\binom{391}{196}+$$

$$+\frac{1}{328}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{99}{66}\cdot\binom{391}{261}\approx 4{,}131\,622\,108\cdot 10^{142}$$

$$TDPP(\text{képviselő}) = \frac{1}{248}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{100}{51}\cdot\binom{390}{195}+$$

$$+\frac{1}{328}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{100}{67}\cdot\binom{390}{260}\approx$$

$$\approx 4{,}060\,969\,526\cdot 10^{142}$$

$$DPI(\text{elnök}) \approx 0{,}004\,032\,258 \approx 0{,}403\%$$

Mivel $\dfrac{0,403-0,370}{0,370}\cdot 100\% \approx 8,9\%,$ *ezért* az elnök *DPI* hatalma kb. 8,9%-kal nőtt volna.

$$DPI(\text{szenátor}) \approx 0{,}002\ 056\ 451 \approx 0{,}206\%$$

Mivel $\dfrac{0,206-0,189}{0,206}\cdot 100\% \approx 8,25\%,$ *ezért* egy szenátor *DPI* hatalma 8,25%-kal nőtt volna.

$$DPI(\text{képviselő}) \approx 0{,}002\ 021\ 285 \approx 0{,}202\%$$

Mivel $\dfrac{0,202-0,186}{0,202}\cdot 100\% \approx 7,92\%,$ *ezért* egy képviselő *DPI* hatalma 7,92%-kal nőtt volna.

A szenátus tagjainak összes *DPI* hatalma kb. 20,6% lenne. Ez kb. 8,25%-os növekedésnek felel meg.

A képviselőház tagjainak összes *DPI* hatalma kb. $391 \cdot 0{,}202 \approx 78{,}98\%$ lenne.

Mivel $\dfrac{78,98-80,74}{80,74}\cdot 100\% \approx -2,18\%,$ tehát a képviselőház tagjainak együttes *DPI* hatalmának csökkenése 2,18% lenne.

Vegyük észre, hogy mindenki növelte a *DPI* hatalmát, még a képviselők is, de a képviselőház tagjainak együttes *DPI* hatalma kissé csökkent; ez nem ellentmondás, hiszen a képviselők száma csökkent.

Cikkünket csak ismeretterjesztőnek szánjuk, újdonságok nincsenek benne, csak kissé részletesebben tárgyalja a témát, mint a [7] könyv és egy sajtóhibáját javítja ki a e könyvnek. Remélem, hogy új hibákat nem helyeztem el a cikkben. Másrészt a kongresszus 10%-os képzeletbeli csökkentésének számítása e cikkünkben szerepel új gyakorlatként.

Irodalom és jegyzetek

[1] Csete Lajos (2004): A hatalom Shapley-Shubik-féle indexéről. *A Matematika Tanítása*, 2004/5. 16–24.

[2] Csete Lajos (2006): A hatalom Banzhaf-féle indexéről. *A Matematika Tanítása,* 2006/2. 3–9. Hibajavítás: *A Matematika Tanítása,* 2006/3. 29.

[3] Csete Lajos (2007): A hatalom Banzhaf-féle indexének alkalmazásai: A Biztonsági Tanács és az USA hatalmi rendszerének egy elemzése. *Matematikai Lapok,* 2004–2005/2. (Megjelent 2007-ben), 48–58.

[4] Deegan, John and Edward Packel (1978): A new index for simple *n*-person games. *International Journal of Game Theory,* 7, 113–123.

[5] Kemeny, J. G. – J. L. Snell – G. L. Thompson (1971): *A modern matematika alapjai (Véges struktúrák).* Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 90–93. és 123–127.

[6] Packel, Edward (1981): *The Mathematics of Games and Gambling.* The Mathematical Association of America, Washington D.C.

[7] Taylor, Alan D. (1995): *Mathematics and Politics. Strategy, Voting, Power and Proof.* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg etc., 63–75.

[8] Theisz György (2003): Igen-nem szavazórendszerek. *Polygon*, XII. kötet 1–2. szám, 2003. június, 63–69.
E cikkben formálisan is definiálják az igen–nem szavazórendszert.
„Legyen adva az összes szavazó *X* halmaza. Szavazásnak nevezzük *X* egy *A* részhalmazát. Az *A* halmazbeli szavazók igennel szavaztak, míg a többi szavazó nemmel szavazott. Egy szavazórendszertől elvárjuk, hogy minden *A* szavazásra adjon pontosan egy végeredményt, vagyis döntse el, hogy elfogadták a javaslatot vagy nem. Másképpen a szavazórendszer egy $v\colon P(X) \to \{i, n\}$ leképezés, ahol $P(X)$ az X halmaz részhalmazainak a halmaza, és $v(A) = i,$ ha $A \subseteq X$ szavazás esetén igent mond a szavazórendszer, és $v(A) = n,$ ha nemet mond a szavazórendszer."

Köszönöm szépen Varga Ferencné könyvtárvezetőnek (Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete) a Taylor-könyv kölcsönzését.

Katona Gyula

Búcsú Reiman Istvántól

A magyar matematika egy nagy alakjától, Reiman István matematikustól búcsúzunk, a szó nagyon széles értelmében. Kevesen tudták róla, hogy kiváló kutató volt, szép és fontos eredményekkel. A Zarankiewicz-problémáról szóló kombinatorikus cikkének gondolatait például az elsős matematikus hallgatóknak tanítom, a cikkre 78 hivatkozás található a neten, közülük több 2010-es és 2011-es. De sok szép geometriai eredménye is volt.

A matematikusi feladatok közül az egyetemi oktatásban is kiválót nyújtott. 1953-tól 1970-ig az Eötvös Lóránd Tudományegyetemen, majd 1996-ig a Budapesti Műszaki Egyetem Geometriai Tanszékén tanította azokat, akiknek olyan szerencséjük volt, hogy hozzá kerültek. 1986 és 1992 között az utóbbi helyen tanszékvezető is volt. Mint minden tevékenységét, az egyetemit is nagy tudással, alapos felkészüléssel és határtalan szerénységgel végezte.

Leghíresebb azonban a magyar matematikai tehetségek kiválasztásában, kinevelésében játszott szerepe által lett. 1961-től 2002-ig volt a Nemzetközi Matematikai Olimpiákon résztvevő magyar csapat felkészítője. Az alap a Reiman-szakkör volt, amit kéthetente szombat délutánonként tartott. Azután az Olimpiák előtt volt egy intenzív felkészítés is. Sajnos idős korom megakadályozott abban, hogy részese legyek ezeknek az élményeknek, én két évvel korábban, 1959-ben voltam olimpikon. De a kiemelkedő magyar matematikusok, akadémikusok, nagydoktorok négy évtizednyi hada ebből az iskolából került ki. Ők mesélnek a szakkör csodálatos hangulatáról. Kis füzetéből a táblára felírta a gondosan összeválogatott szép és izgalmas feladatokat, azután a háttérbe húzódott. Hagyta a diákokat érvényesülni, csak néha fűzött kommentárt egy-egy feladat megoldásához.

Mennyi munka volt e mögött! Hány és hány könyvből, szaklapból gyűjtötte össze a feladatokat! És micsoda pedagógiai érzéket kívánt a kihívás, az ország legtehetségesebb matematikus diákjaival dolgozni, mekkora felelősség, hogy belőlük kihozza a maximumot! Vezetése alatt sok nagy sikert ért el a magyar olimpiai csapat. Pedig nem ezt tartotta fő célnak, hanem azt, hogy kiváló, egészséges gondolkodású matematikusokat neveljen az országnak.

A nemzetközi matematikai közvélemény is jól ismerte és elismerte a tevékenységét. Részben az eredmények miatt, részben az olimpiai feladatokat összegyűjtő, angolul is megjelent kötetei alapján. A Matematikaversenyek Nemzetközi Szövetsége ezért 2000-ben Erdős-éremmel tüntette ki.

Szerénysége vitte e területre. Felvetődik a kérdés, hogy ha nem tölti idejét a fiatalok nevelésével, mennyivel több szép matematikai tételt alkothatott volna. De azt hiszem, helyesebb úgy számolni, hogy annak a több száz matematikusnak, akiket nevelt, egy-két cikkét a javára írjuk, hiszen ezek a cikkek Reiman tanár úr nélkül – talán – nem születtek volna meg hazánk és a világ matematikája hasznára.

A Bolyai János Matematikai Társulat nevében is köszönetet kell mondanom áldozatos tehetségkiválasztó, -nevelő munkájáért, de a különböző bizottságaink munkájában végzett tevékenységéért, hasznos tanácsaiért is.

Volt még egy érdekes munkája, amely ismertté tette az ország közvéleménye előtt is. Éveken át a fél ország ült az éjjeli órákban a képernyő elé, hogy világos magyarázatait hallgatva megtudja, hogyan kellett volna a koszinuszos feladatot megoldani az egyetemi felvételin.

Az ország és a szakma megpróbálta kitüntetésekkel kifejezni háláját. 1993-ban Apácai Csere János-díjat, 2002-ben Rácz Tanár Úr Életműdíjat, 2007-ben pedig a Magyar Köztársaság Érdemérem tisztikeresztjét nyerte el.

Kedves Pista Bácsi, köszönjük Neked ezt az életet, és rengeteg munkát! Tudd, hogy érdemes volt. Százaknak adtál egy jó kezdetet, életre szóló élményt. Te vagy az egyik oka a magyar matematika világhírének.

Ambrus András

Peller József (1933–2012)

Peller József először a Budai Tanítóképzőben szerzett tanítói képesítést, majd az ELTE TTK-n 1956-ban matematika-fizika szakos tanárként diplomázott. 1956 és 1961 között a Budapesti Árpád Gimnázium tanára, 1961-től az ELTE TTK oktatója volt. Dolgozott az akkori Analízis II. tanszéken, később az Ábrázoló és Projektív Geometria tanszéken, majd a Matematikai Szakmódszertani Csoportban, továbbá az Oktatástechnikai Csoportban. 1995-től három évig a kaposvári Csokonai Mihály Tanítóképző Főiskola matematikai tanszékének vezetője volt.

Búcsúzunk a tudóstól

Egyetemi doktori értekezését „A differenciálhányados és az integrálszámítás a középiskolában" címmel 1966-ban védte meg az ELTE TTK-n. Tudományos aspirantúra ideje alatt kétszer is volt három hónapos tanulmányúton Moszkvában. Kandidátusi értekezését 1989-ben védte meg „A számfogalom és a függvénytanítás fejlesztésére irányuló matematikai-didaktikai vizsgálatok, kísérleti eredmények" címmel. E munka egy rendszer leírása, amely felöleli az általános iskola alsó és felső tagozatos, a középiskolai matematikaoktatási vizsgálatokat, elemzéseket és a tanárjelöltekkel való szakmódszertani foglalkozásokat is. Tudománytörténeti tény, hogy Magyarországon hárman írtak kandidátusi dolgozatot matematikadidaktikából (matematika szakmódszertanból): Varga Tamás, Peller József és Ambrus András.

Abban a szerencsés helyzetben vagyok, hogy végigkövethettem a matematikai szakmódszertannak – ma matematikadidaktikának nevezzük – a magyarországi fejlődését és önálló tudományággá válását. Az ELTE TTK Matematikai Szakmódszertani Csoportjának megalakulásában, kutatómunkájában, fejlődésében nagy szerepe volt Peller Józsefnek. Részt vett a „Matematika tanítása" tárgy tantervének, államvizsgai tematikájának, rendszerének kidolgozásában.

Egyik alapítója volt a Szakmódszertani Közlemények című, félévenként megjelenő periodikának, szerkesztőként, szerzőként számos tanulmány megjelentetésében működött közre. Mint vidéki, kisgimnáziumi matematikatanárnak, nagyon fontos segítséget jelentettek e kötetek. Az ELTE TTK kétéves tanár-továbbképzési rendszerének kidolgozásában, a kurzusok tartásában nagy szerepet vállalt. E továbbképzési formát követte az egyetemi doktorátus megszerzésének lehetősége, mellyel több kiváló középiskolai matematikatanár élt.

Peller József kutatómunkájának kiemelkedő része két nagyformátumú oktatási kísérlet. „A matematikaoktatás tartalmának és módszerének korszerűsítése" (5–8. osztály), illetve „A tanulók tevékenységének tervezése és irányítása" (9–12. osztály) kutatóprojekt volt, amelynek keretében gyakorlóiskolai matematika vezetőtanárok bevonásával kidolgoztak egy részletes, a mindennapi matematikatanítás realizálását segítő, teljes tanítási anyagot. A klasszikus középiskolai osztályok anyagát a Tankönyvkiadó könyv formájában is megjelentette.

Mint tanítóképzőt végzett szakember, az első négy osztály matematikai tananyagának feldolgozását is elkészítette Kovács Bertalanné gyakorlóiskolai vezetőtanár közreműködésével. Peller Józsefnek szívügye volt, hogy a sok jó gyakorlati munka mellett tudományágunk is fejlődjön, elméleti háttere ki legyen dolgozva. A Debreceni Egyetem matematikadidaktikai PhD programjának megalapításában szakértő tanácsaival, a későbbiekben kurzusok tartásával vett részt.

Búcsúzunk a tanártól

Ritka az olyan tanár, akinek saját tapasztalata van minden életkorról, a kiselsősöktől az egyetemi diplomáig átölelő időszak matematikaoktatásáról. Fejlődésében tekintette a gyerekeket, az alapvető matematikai fogalmak kialakításának szakaszos elméletét dolgozta ki a számfogalommal és a függvényfogalommal kapcsolatban. Ez a kisgyermekkortól a diplomáig terjedő fejlődés, fokozatos matematizálás jellemző volt didaktikai gondolkodására. Szakmailag nagyon igényes, minden órájára alaposan felkészülő, a hallgatóit, tanulóit szerető, támogató tanár volt. Jellemző a segítőkészségére, hogy a módszertani oktatáson túl a matematika-fizika szakos tanárjelöltek számára segítséget nyújtott az elméleti fizika megértéséhez szükséges matematikai ismeretek rendezésében speciálkollégiumok tartásával.

Együtt tanítottunk az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában. Megható volt az a szeretet, amellyel pátyolgatta a kis hatodikosokat, támogatta a tehetségesebb tanulókat.

„Tanárok tanára” is volt, a tanulók tevékenységének tervezése projekt keretében sokat utazott vidékre is, ahol személyesen vizsgálta, hogyan realizálódnak matematikaoktatási elvei. A kísérletben részt vevő tanároknak idejét nem kímélve sokat segített. A Rátz László Vándorgyűléseken többször tartott előadást, sok matematikatanár vette mindig körül, népszerű volt az egyszerű tanárok körében.

„A matematika tanítása” módszertani kurzus tantervének, tartalmának, valamint a gyakorlóiskolai ötödéves tanítási gyakorlat tematikájának kidolgozásában alapvető szerepe volt. A gyakorlóiskolai matematika vezetőtanárok szakfelügyeletét, az ötödéves hallgatók látogatását a tőle megszokott gondossággal, alapossággal szervezte, vezette.

A matematika tanításával kapcsolatos fontosabb Peller-könyvek:

- A matematikai ismeretszerzési folyamatról. ELTE Eötvös Kiadó, 2003
- A matematikai ismeretszerzés gyökerei. ELTE Eötvös Kiadó, 2003
- Az analízis elemeinek tanítása középiskolában. Tankönyvkiadó, 1967
- A számfogalom fejlesztésének szintjei az oktatási gyakorlatban. Tankönyvkiadó, 1974

Búcsúzunk a kedves kollégától, az embertől

Jóskával egy kedves, segítőkész, szenvedélyesen igazságkereső kollégánk távozik. Őszinte, egyszerű, tisztalelkű, családszerető, nagy humánumú, elveiért kiálló, azokért pozitív értelemben megszállottan küzdő ember volt. Közvetített, békített hallgatók és oktatók között kényes kérdésekben.

Nagy szeretettel, türelemmel kísérte, támogatta beilleszkedésünket, szakmai fejlődésünket. Számomra, a kis vidéki matematikatanár számára nagyon fontos volt, hogy a kezdetektől fogva mellém állt, minden szakmai és szakmán kívüli kérdésben segített. A volt kollégák nagy szeretettel emlékeznek a sok beszélgetésre, közös kirándulásra, a Jóska által nagyon szeretett balatonkenesei telkén tett látogatásra, további együttlétekre.

Váci Mihály – aki maga is volt nyírségi tanító – „Eső a homokra” című versében Jóskára is oly jellemzően ír:

„Használni akartam – nem tündökölni,
sem esztétikák rangsorát pörölni.
A halhatatlan szent tülekedésben
Lemaradtam – a startnál már lekéstem.
Osztani magad, hogy így sokasodjál,
Kicsikhez hajolni – hogy magasodjál,
Hallgatni őket, hogy tudd a világot,
Róluk beszélni, ha szólsz a világhoz.
Széjjel szóródni – eső a homokra –
sivatagnyi reménytelen dologra,
s ha nyár se lesz tőled – s a táj se zöldebb,
kutakká gyűjt a mély – sokan isznak belőled!”

Csete Lajos

Egy ciklikus egyenlőtlenség általánosítása

1. Bevezetés

Ismert a következő egyenlőtlenség:

Legyenek a_1, a_2, ..., a_n pozitív valós számok. Ekkor fennáll, hogy

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Ez például versenyfeladat volt 2001-ben az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen, illetve korábban egyéb helyeken is kitűzték. [3],[4],[6],[9],[10].

(A [3] cikkben olvashatunk a történetéről és 8 megoldást tekinthetünk meg.)

A következőkben célunk ezen egyenlőtlenség egy általánosítása. Ehhez először egy segédtételt idézünk fel.

2. Egy Young-féle segédtétel

A következő segédtételt azért nevezzük Young-féle segédtételnek, mert ez a Young-féle egyenlőtlenség (1912) egy speciális esete. Ebből különben könnyen levezethető a Hölder-féle egyenlőtlenség is.

A Young-féle segédtétel:

Ha a és b nemnegatív valós számok és $p>1$, $q>1$ olyan valós számok, amelyekre teljesül $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, akkor fennáll, hogy

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq a\cdot b,$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a^p=b^q$.

Bizonyítás:

A súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget fogjuk alkalmazni. [7]

Mint tudjuk, fennáll, hogy

$$w_1\cdot x_1+w_2\cdot x_2+\ldots+w_n\cdot x_n\geq x_1^{w_1}\cdot x_2^{w_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{w_n},$$

ahol x_1, x_2, ..., x_n pozitív valós számok és w_1, w_2, ..., w_n szintén pozitív valós számok, az úgynevezett súlyok.

Legyen $n=2$ és $x_1=a^p$, $x_2=b^q$, míg a súlyok $w_1=\frac{1}{p}$ és $w_2=\frac{1}{q}$.

Ekkor a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq(a^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(b^q)^{\frac{1}{q}}=a\cdot b.$$

3. A Bernoulli-féle egyenlőtlenség levezetése a Young-féle segédtételből

A Young-féle segédtételből indulunk ki: $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq a\cdot b$, ahol a és b nemnegatív valós számok, míg p és q 1-nél nagyobb olyan valós számok, amelyekre $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ebből $q=\frac{p}{p-1}$.

Ezt felhasználva kapjuk, hogy:

$$\frac{a^p}{p}\geq a\cdot b-\frac{b^q}{q},$$

vagyis

$$\frac{a^p}{p}\geq a\cdot b-\frac{p-1}{p}\cdot b^{\frac{p}{p-1}}.$$

Ezenkívül legyen $b=1$, tehát

$$\frac{a^p}{p}\geq a-\frac{p-1}{p}\cdot 1^{\frac{p}{p-1}}$$

vagyis

$$\frac{a^p}{p}\geq a-\frac{p-1}{p}.$$

Az utóbbi egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$a^p \geq 1+p\cdot(a-1).$$

Ez éppen a Bernoulli-féle egyenlőtlenség egy alakja.

4. Egy ciklikus egyenlőtlenség általánosítása

Az előbb kaptuk az $\dfrac{a^p}{p} \geq a\cdot b - \dfrac{p-1}{p}\cdot b^{\frac{p}{p-1}}$ egyenlőtlenséget.

Ebből következik, hogy

$$a^p \geq p\cdot a\cdot b-(p-1)\cdot b^{\frac{p}{p-1}}.$$

Ezt fogjuk felhasználni az 1. pontban felidézett ciklikus egyenlőtlenség általánosítására.

Legyen itt az a helyett a_1, míg a b helyett $\dfrac{a_1+a_2}{2}$. Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$a_1^p \geq p\cdot a_1\cdot\frac{a_1+a_2}{2}-(p-1)\cdot\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

Ezt egy kissé átrendezzük:

$$\frac{a_1^p}{a_1+a_2} \geq p\cdot\frac{a_1}{2}-(p-1)\cdot\frac{(a_1+a_2)^{\frac{p}{p-1}-1}}{2^{\frac{p}{p-1}}},$$

azaz

$$\frac{a_1^p}{a_1+a_2} \geq p\cdot\frac{a_1}{2}-\frac{p-1}{2^{\frac{p}{p-1}}}\cdot(a_1+a_2)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ebből a típusú egyenlőtlenségből fogunk összeadni n darabot:

$$\frac{a_1^p}{a_1+a_2}+\frac{a_2^p}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^p}{a_n+a_1} \geq$$
$$\geq p\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}-\frac{p-1}{2^{\frac{p}{p-1}}}\cdot$$
$$\cdot\left((a_1+a_2)^{\frac{1}{p-1}}+(a_2+a_3)^{\frac{1}{p-1}}+\ldots+(a_n+a_1)^{\frac{1}{p-1}}\right).$$

Ezzel megkaptuk a következő problémát:

Probléma: *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok és $p > 1$ valós szám, ekkor fennáll, hogy*

$$\frac{a_1^p}{a_1+a_2}+\frac{a_2^p}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^p}{a_n+a_1} \geq$$
$$\geq p\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}-\frac{p-1}{2^{\frac{p}{p-1}}}\cdot$$
$$\cdot\left((a_1+a_2)^{\frac{1}{p-1}}+(a_2+a_3)^{\frac{1}{p-1}}+\ldots+(a_n+a_1)^{\frac{1}{p-1}}\right).$$

E problémát volt szerencsém kitűzni 2005-ben az *American Mathematical Monthly* folyóiratban is. [1] és [2]

5. Egy speciális eset $p = 2$-re

Figyeljük meg, hogy ha a $p = 2$ helyettesítést végezzük el, akkor kapjuk, hogy

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq$$
$$\geq 2\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}-\frac{2-1}{2^{\frac{2}{2-1}}}\cdot$$
$$\cdot\left((a_1+a_2)^{\frac{1}{2-1}}+(a_2+a_3)^{\frac{1}{2-1}}+\ldots+(a_n+a_1)^{\frac{1}{2-1}}\right)=$$
$$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)-$$
$$-\frac{1}{4}\cdot((a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\ldots+(a_n+a_1))=$$
$$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)-$$
$$-\frac{1}{4}\cdot 2\cdot(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Ezzel kész a 9. bizonyítása az 1. pontban felidézett versenyfeladatnak.

Irodalom és jegyzetek

[1] *American Mathematical Monthly, The* (2005): Vol. 112. 2005. 929. oldal, Problem 11189 (Proposer: Lajos Csete, Markotabödöge, Hungary)

[2] *American Mathematical Monthly, The* (2007): Vol. 114. 2007. 645. oldal, Problem solution 11189. Megoldók: R. Bagby (USA), O. Bagdasar (Romania), R. Chapman (U.K.), P. P. Dályai (Hungary) [Dályai Pál Péter, Deák Ferenc Középiskola, Szeged], G. Kiss (Hungary), [Dr. Kiss Géza Ph.D., Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium, Budapest], R. Strong (USA), L. Zhou (USA), Szeged Problem Solving Group „Fejéntaláltuka" [Szegedi Tudományegyetem]
A folyóirat O. P. Lossers professzor (Eindhoven University of Technology, Hollandia) meg-

oldását közli, aki átírja a bizonyítandó egyenlőtlenséget a következő alakra:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{p}{2b_k}\cdot\left[\frac{a_k^p}{p}+\frac{b_k^q}{q}-a_kb_k\right]\ge 0,$$

ahol

$$b_k=\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\quad \text{és}\quad q=\frac{p}{p+1}.$$

Majd megmutatja, hogy a szögletes zárójelben levő kifejezések nemnegatívak.

Ehhez az $f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{b^q}{q}-xb$ függvény vizsgálatát említi, ahol $x>0$ és tetszőleges rögzített $b>0$. Megemlíti, hogy *e* függvény globális minimuma $x=b^{\frac{1}{p-1}}$-nél van, mégpedig 0-val egyenlő.

[3] Csete Lajos (2003): A komáromi trükk és egy versenyfeladat. *A Matematika Tanítása*, 2003/4. 4–11.

[4] Engel, Arthur (1998): *Problem-Solving Strategies.* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 185. oldal, 84. feladat, megoldása a 202. oldalon.

[5] Kiss Géza Dr. Ph.D. e-mail üzenete, 2006. március
A tanár úr bizonyítása:
A súlyozott számtani és mértani közép közötti következő egyenlőtlenséget használta:
$xa+yb\ge a^xb^y$, ahol x és y olyan pozitív valós számok, amelyekre $x+y=1$.

Legyen $x=\frac{1}{p}$ és $y=\frac{p-1}{p}$, ahol $p>1$.

Alkalmazzuk az előbbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{a_i^p}{a_i+a_{i+1}}+\frac{p-1}{p}\cdot\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2^p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\ge$$

$$\left(\frac{a_i^p}{a_i+a_{i+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2^p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}=$$

$$=\frac{a_i}{(a_i+a_{i+1})^{\frac{1}{p}}}\cdot\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\frac{a_i}{(a_i+a_{i+1})^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{(a_i+a_{i+1})^{\frac{1}{p}}}{2}=\frac{a_i}{2}.$$

Ezt p-vel szorozva kapjuk, hogy:

$$\frac{a_i^p}{a_i+a_{i+1}}+(p-1)\cdot\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2^p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\ge p\cdot\frac{a_i}{2}.$$

Másképpen felírva:

$$\frac{a_i^p}{a_i+a_{i+1}}+\frac{p-1}{2^{\frac{p}{p-1}}}\cdot\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2^p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\ge p\cdot\frac{a_i}{2}.$$

Alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget $i=1, 2, \ldots, n$-re, majd ezeket összeadva kapjuk, hogy:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^p}{a_i+a_{i+1}}+\frac{p-1}{2^{\frac{p}{p-1}}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2^p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\ge$$

$$\ge\frac{p}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

Átrendezve:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^p}{a_i+a_{i+1}}\ge\frac{p}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i-$$

$$-\frac{p-1}{2^{\frac{p}{p-1}}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2^p}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

[6] Kolmogorov, A. N. – Sz. V. Fomin (1981): *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 56.

[7] Kuznyecova, G. M. – I. N. Szergejev (1991): XXIV Vszeszojuznaja matematicseszkaja olimpiada skolnyikov. *Matematika v Skole*, 91/6. 49–55., különösen a 49. és az 52. oldal

[8] Lozansky, Edward – Cecil Rousseau (1996): *Winning Solutions.* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 123.

[9] Mitrinović, D.S. – J. E. Pečarić – A. M. Fink (1993): *Classical and New Inequalities in Analysis.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, Chapter XIV. Young's inequality

[10] Panaitopol, L. – V. Băndilă – M. Lascu (1996): *Egyenlőtlenségek.* GIL Könyvkiadó, Zilah (Fordította András Szilárd)

[11] Vavilov, V. – Sz. Reznyicsenko (1990): XXIV Vszeszojuznaja olimpiada po matematike. *Kvant*, 90/11. 58–60. oldal, különösen az 59. oldal. A megoldásvázlatok a *Kvant* 90/12. 72–75. oldalain, az idevágó rész a 73. oldalon.

Köszönöm szépen Varga Ferencné könyvtárvezetőnek (Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet) a [4], [8], [9] könyvek kölcsönzését.

Dr. Darvasi Gyula

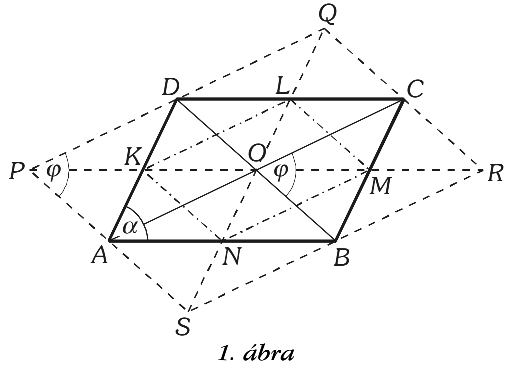
Írjunk adott paralelogrammába hozzá hasonlót!

A címben kitűzött probléma és annak megoldása ismerős lehet a KöMaL Gy. 2492-es gyakorló feladata révén ([4] 163–165. oldal). Mostani célunk nem csupán a felelevenítés lesz, hanem több új irányban elvégzett vizsgálat és további megoldások bemutatása.

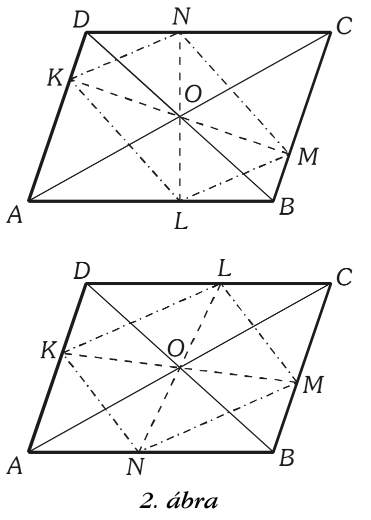
Az $ABCD$ paralelogrammára legyen $a = AB = CD$, $b = AD = BC$, $e = AC$, $f = BD$, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$, $m(BAD\sphericalangle) = \alpha$ és $m(BOC\sphericalangle) = \varphi$ (1. ábra), ahol $0° < \varphi \le 90°$ esetén $a \ge b$ teljesül ([2] 68. oldal, 11.5/1. tétel). Az oldalak és az átlók között fennáll az $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ ([3] 32. oldal, 289. feladat), valamint a területekre a $2t(ABCD) = 2ab\sin\alpha = ef\sin\varphi = t(PQRS)$ összefüggés, ahol a $PQRS$ paralelogramma oldalai az $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ átlókkal párhuzamosak.

Ha az $ABCD$ paralelogrammába egy $KLMN$ paralelogrammát kívánunk beírni, akkor annak csúcsaira megköveteljük, hogy azok bármelyike az $ABCD$ különböző oldalain belső pont legyen. A beírás kétféleképpen végezhető el aszerint, hogy az adott és a beírt paralelogramma körüljárása egyező vagy ellentétes (2. ábra). Mindkét esetben teljesül, hogy az adott és a beírt paralelogramma középpontja egybeesik. Ennek belátásához felhasználjuk, hogy a paralelogramma középpontja illeszkedik mindkét középpárhuzamos egyenesére ([2] 82. oldal, 14.3/2. tétel). Ha a beírt $KLMN$ paralelogramma középpontját O^*-gal jelöljük, akkor az $\overline{AD}$ oldalon lévő K pontnak O^*-ra vonatkozó $K' = M$ tükörképe rajta van $\overline{AD}$-nek O^*-ra vonatkozó $\overline{A'D'}$ tükörképén, ami a centrális tükrözés miatt párhuzamos $\overline{AD}$-vel, s így $\overleftrightarrow{A'D'} = \overleftrightarrow{BC}$ adódik, mivel az $M \in \overleftrightarrow{AD}$ ponton át $\overleftrightarrow{AD}$-vel csak egy párhuzamos húzható. Ennélfogva O^* egyenlő távolságra van az $\overleftrightarrow{AD}$ és $\overleftrightarrow{BC}$ egyenesektől, vagyis illeszkedik azok középpárhuzamosára. Ugyanígy látható be, hogy O^* rajta van az $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{CD}$ egyenesek középpárhuzamosán is: tehát O^* ezen két középpárhuzamosnak a metszéspontja, ami viszont egybeesik az $ABCD$ paralelogramma O középpontjával ([4] 163. oldal).

Ha az adott $ABCD$ paralelogrammába egy hozzá hasonló $KLMN$ paralelogrammát írunk be, akkor ezen hasonlóság során mindig fennáll



1. ábra



2. ábra

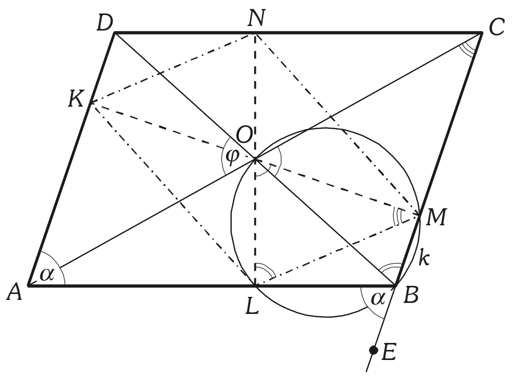
az $A \leftrightarrow K$, $B \leftrightarrow L$, $C \leftrightarrow M$ és $D \leftrightarrow N$ megfeleltetés, miközben az adott paralelogramma jelölését rögzítve a beírtnak a csúcsai a centrális szimmetria miatt kétféleképpen is betűzhetők: a 2. ábrán egyidejűleg cseréljük fel a K és M, valamint az L és N pontokat. S minthogy bármely paralelogrammát egyértelműen meghatározza két szomszédos csúcsa és a középpontja, ezért az adott és a beírt paralelogramma pontosan akkor hasonló, ha két-két szomszédos csúcsuk és a közös középpontjuk által meghatározott megfelelő háromszögek hasonlók, amelyek körüljárása ugyanúgy lehet egyező vagy ellentétes.

Elsőként foglalkozunk azzal az esettel, amikor az adott $ABCD$ és a hozzá hasonló beírt $KLMN$ paralelogramma azonos körüljárású, amihez elegendő az egyező körüljárású $OBC_\triangle$ és $OLM_\triangle$ hasonló háromszögeket vizsgálni (3. ábra). Ekkor a megfelelő szögeket azonos számú körívvel jelölve észrevehető, hogy az $\overline{OM}$ szakasz a B és L pontokból egyenlő szögben látszik, vagyis a B, L, O és M pontok egy k körre illeszkednek. Ezen k körben az $\overline{OL}$ húrt tekintve adódik az $OBL\sphericalangle$ és $OML\sphericalangle$ kerületi szögek egyenlősége, s mivel a hasonlóság miatt $OML\sphericalangle \cong OCB\sphericalangle$, ezért $OBL\sphericalangle \cong OCB\sphericalangle$ is fennáll. Ha E jelöli a B kezdőpontú, $\overrightarrow{BC}$-vel ellentétes félegyenes valamely belső pontját, akkor az $m(ABE\sphericalangle) = m(BAD\sphericalangle) = \alpha$, $m(OBL\sphericalangle) = 180° - [m(ABE\sphericalangle) + m(OBC\sphericalangle)]$ és $m(OCB\sphericalangle) = 180° - [m(BOC\sphericalangle) + m(OBC\sphericalangle)]$ összefüggésekből $OBL\sphericalangle \cong OCB\sphericalangle$ miatt $\alpha = m(ABE\sphericalangle) = m(BOC\sphericalangle) = \varphi$ kapható: tehát az adott $ABCD$ paralelogramma átlóinak szöge megegyezik két oldalának szögével. Ennélfogva arra jutottunk, hogy egyező körüljárást tekintve csak az ilyen tulajdonságú adott paralelogrammába írható hozzá hasonló paralelogramma ([4] 164. oldal).

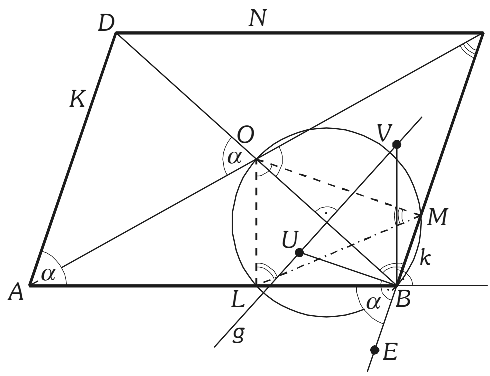
A szerkesztés kivitelezéséhez tételezzük fel, hogy az adott $ABCD$ paralelogrammára $\alpha = m(BAD\sphericalangle) = m(AOD\sphericalangle)$ teljesül (4. ábra). Ezután szerkesszük meg az $\overline{OB}$ szakasz g felező merőlegesét, majd a B pontban $\overline{AB}$-re és $\overline{BC}$-re merőlegeseket, amelyek g-ből kimetszenek egy $\overline{UV}$ szakaszt, s ennek tetszőleges belső pontját középpontnak választva rajzoljuk meg az O és B ponton áthaladó k kört, ami az $\overline{AB}$ oldalt L és a $\overline{BC}$ oldalt M belső pontban metszi. Az így kapott $OLM_\triangle$ háromszög szögeit feleltessük meg az $OBC_\triangle$ háromszög szögeinek. Megmutatjuk, hogy a megfelelő szögek között van két egybevágó. Ugyanis a k körben az $\overline{OL}$ és $\overline{OM}$ húrokat tekintve $OBL\sphericalangle \cong OML\sphericalangle$ és $OBC\sphericalangle \cong OLM\sphericalangle$, s így

$$m(OCB\sphericalangle) = 180° - [m(BOC\sphericalangle) + m(OBC\sphericalangle)] = \\ = 180° - [\alpha + m(OBC\sphericalangle)] = m(OBL\sphericalangle) = \\ = m(OML\sphericalangle)$$

miatt $OBC_\triangle \sim OLM_\triangle$ is igaz. Ezen szerkesztés során lényeges, hogy a k kör az $\overline{AB}$ és $\overline{BC}$ oldalakat egy-egy belső pontban messe: ez a k kör középpontjának a felvétele miatt teljesül. S minthogy az $\overline{AB}$-re és $\overline{BC}$-re B-ben állított merőlegesek hajlásszöge α-val egyenlő, ezért nem eshetnek egybe, s így a g-ből általuk kimetszett $\overline{UV}$ szakasznak végtelen sok belső pontja van: tehát az adott $ABCD$ paralelog-



3. ábra



4. ábra

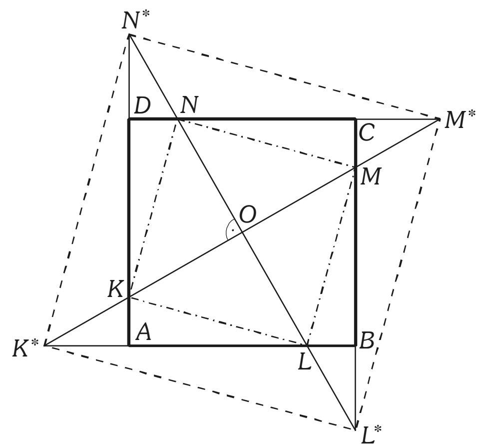
rammába $BAD\sphericalangle \cong AOD\sphericalangle$ esetén végtelen sok hozzá hasonló és vele egyező körüljárású $KLMN$ paralelogramma írható.

A négyzettől különböző speciális paralelogrammák közül nem jöhet számításba sem a téglalap, sem a rombusz, minthogy ezekre az oldalak szöge nem egyenlő az átlók szögével. A négyzetre viszont az oldalak és az átlók szöge egyaránt derékszög, s így bármely négyzetbe végtelen sok hozzá hasonló és ugyanolyan körüljárású négyzet írható, aminek megszerkesztéséhez célra vezet akár az általános esetre fentebb leírt mód, de sokkal egyszerűbb is lehet a dolgunk: K-nak az $\overline{AD}$ oldal tetszőleges belső pontját választva az $\overleftrightarrow{OK}$ egyenes $\overline{BC}$-t M-ben, az O-ban $\overleftrightarrow{KM}$-re merőleges az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ oldalakat az L és N pontokban metszi (5. ábra). A hasonlóság λ arányára $AK = x$ jelöléssel $0 < x < a$ miatt $\lambda^2 = 1 - \dfrac{2x(a-x)}{a^2} < 1$ teljesül. Megjegyezhető, hogy az előbbi két merőleges $x \notin \left\{0, \dfrac{a}{2}, a\right\}$ esetén a négyzet oldalainak egyeneseit külső pontokban is metszi, amelyek egy körülírt négyzetnek a csúcsai.

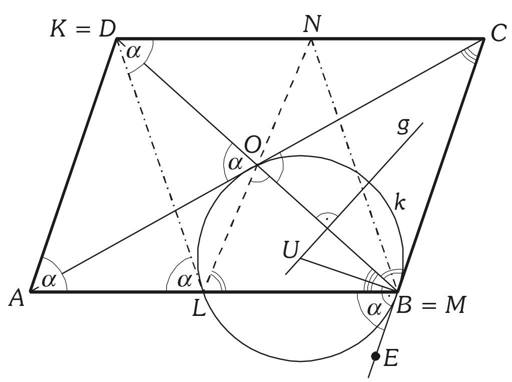
A $BAD\sphericalangle \cong AOD\sphericalangle$ feltételt kielégítő $ABCD$ paralelogrammára keressünk összefüggéseket annak oldalai és átlói között (1. ábra). Elsőként $2ab = ef$ adódik a terület kétféle kiszámítása révén, majd az $OAB_\triangle$-re koszinusz-tételt felírva: $a^2 = \dfrac{e^2}{4} + \dfrac{f^2}{4} - 2 \cdot \dfrac{e}{2} \cdot \dfrac{f}{2} \cdot \cos(180° - \alpha)$, ahonnan $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$, $ef = 2ab$ és $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}$ miatt $a = \dfrac{e\sqrt{2}}{2}$ kapható. Hasonló módon jutunk a $b = \dfrac{f\sqrt{2}}{2}$ összefüggéshez. Mindezek alapján fennáll az $a : b = e : f$ arány, s ezért $BAD\sphericalangle \cong AOD\sphericalangle \cong QPS\sphericalangle$ miatt az $ABCD$ és $PQRS$ paralelogrammák hasonlók. E hasonlóság aránya $t(PQRS) = 2t(ABCD)$ miatt $\sqrt{2}$-vel egyenlő, s így $e = a\sqrt{2}$ és $f = b\sqrt{2}$ is fennáll.

Az $ABCD$ paralelogrammára az $a \geq b$ és $\alpha = \varphi$ feltételeket elfogadva $\dfrac{a}{b}$-re felső korlátot kívánunk adni. Ehhez induljunk ki az $ABD_\triangle$ háromszögből: $a < b + f$, ahonnan $f = b\sqrt{2}$ miatt $a < b + b\sqrt{2} \Rightarrow 1 \leq \dfrac{a}{b} < 1 + \sqrt{2}$ kapható. S mivel $a : b = e : f$, ezért $1 \leq \dfrac{e}{f} < 1 + \sqrt{2}$ is teljesül.

Tegyünk most egy kitérőt annak a kérdésnek a megválaszolására, hogy mi történik akkor, ha az előbbi szerkesztésben előforduló k kör középpontját a g egyenesen nem csupán az $\overline{UV}$ szakasz belsejéből választjuk. Elsőként legyen U a k kör középpontja (6. ábra). Ekkor az előbb leírt szerkesztést elvégezve $K = D$, A–L–B, $M = B$ és C–N–D adódik, s így az ugyanúgy bizonyítható hasonlóság miatt a $KLMN$ beírt pa-

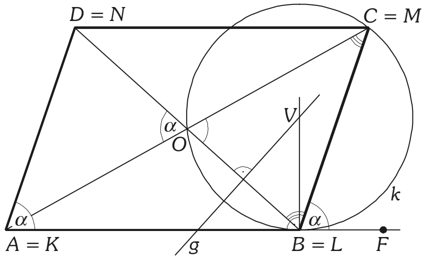


5. ábra

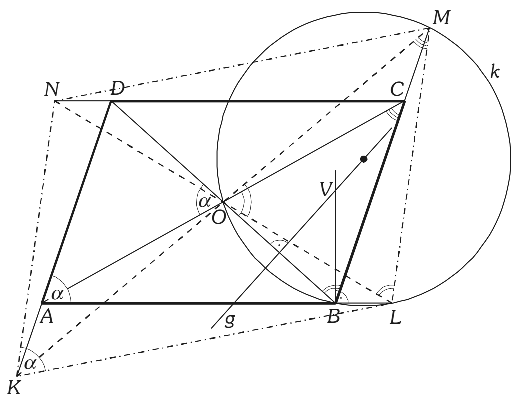


6. ábra

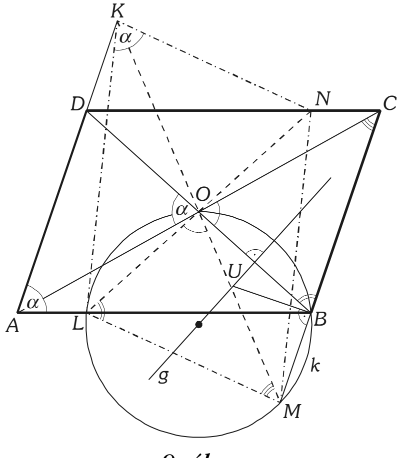
ralelogrammára $KL = AD$ és $LM = \dfrac{AD^2}{AB}$ teljesül. A második esetben a k kör középpontja legyen a V pont (7. ábra), ami azonos az $OBC_\triangle$ háromszög körülírt körének a középpontjával, mivel V rajta van az $\overline{OB}$ szakasz felező merőlegesén és az $FBC\sphericalangle$ kerületi szög $\overrightarrow{BF}$ szárára B-



7. ábra



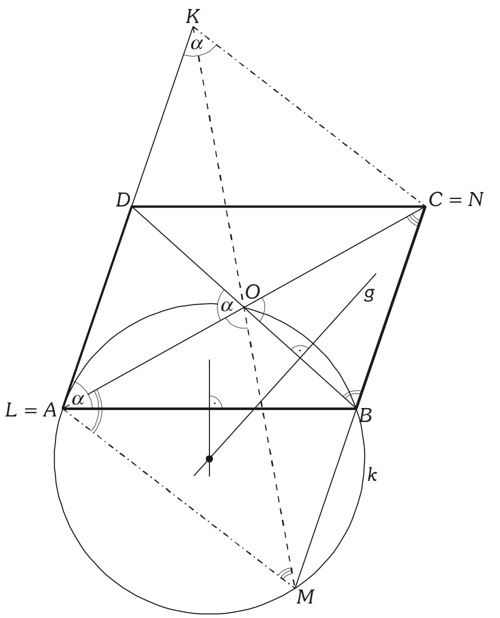
8. ábra



9. ábra

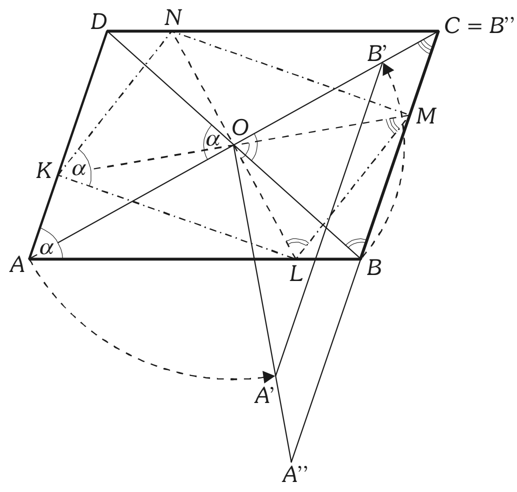
ben állított merőlegesen. Ekkor a szerkesztés eredményeként $K = A$, $L = B$, $M = C$ és $N = D$ kapható: tehát $KLMN$ egybevágó az adott $ABCD$ paralelogrammával, s így a hasonlóság nyilvánvaló, bár ezt nem fogjuk beírtnak tekinteni. Ha pedig a k kör középpontjának a V kezdőpontú $\overrightarrow{VU}$-val ellentétes félegyenes azon belső pontját választjuk, amelyre az $ABCD$ hosszabb oldala egyenlő a $KLMN$ rövidebb oldalával (8. ábra), akkor a K, L, M és N csúcsok, bár illeszkednek az $ABCD$ oldalainak egyeneseire, de az oldalaknak külső pontjai: tehát $KLMN$ az $ABCD$-re nézve egy körülírt paralelogramma. S minthogy $OC = \dfrac{e}{2}$, $e = a\sqrt{2}$, $\lambda = \dfrac{a}{b}$ és $OM = \lambda \cdot OC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2b}$, ezért az $OBC_\triangle$ háromszögből Stewart-tétellel $BM = \dfrac{a^2 + b^2}{2b}$ kapható ([2] 319. oldal 36.4/2. tétel). Ezután a k kör középpontja legyen az U kezdőpontú, $\overrightarrow{UV}$-vel ellentétes félegyenes azon belső pontja, amelyre $KLMN \cong ABCD$ (9. ábra). Ekkor a K, L, M és N csúcsokra A–D–K, A–L–B, M–B–C és C–N–D, s mivel az egybevágóság miatt $OM = OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, ezért az $OBC_\triangle$-ből $BM = \dfrac{a^2 - b^2}{2b}$ adódik. S végül a k kör középpontja legyen azonos az $OAB_\triangle$ háromszög körülírt körének középpontjával (10. ábra), amikor $KLMN$ csúcsira A–D–K, $L = A$, M–B–C és $N = C$, továbbá a hasonlóság miatt $KN = a = LM$ és $\dfrac{KL}{LM} = \dfrac{BC + BM}{LM} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow$ $BM = \dfrac{a^2 - b^2}{b}$ teljesül.

Ezen kitérő révén felfedezhető, hogy a $BAD\sphericalangle \cong AOD\sphericalangle$ feltételt kielégítő $ABCD$ paralelogramma megadása után a hozzá hasonló $KLMN$ paralelogramma beírásához mellőzhető az előbbi k kör megrajzolása: ugyanis az M csúcs a $\overline{BC}$ oldal tetszőleges belső pontja lehet. Ennélfogva megtehető, hogy egy $M \in \operatorname{int} \overline{BC}$ pont kijelölése után az $\overleftrightarrow{OM}$ egyenes B-t tartalmazó oldalán az $\overrightarrow{OM}$ félegyenesre másoljuk az



10. ábra

α szöget, melynek $\overrightarrow{OM}$-től különböző szára az $\overline{AB}$ oldalt L pontban metszi, s a még hiányzó K és N csúcsok megkaphatók az O-ra vonatkozó szimmetriát felhasználva (3. ábra). Ezt a felfedezést erősíti meg a következő szerkesztési mód is. Az $OLM_\triangle$ és $OBC_\triangle$ háromszögek hasonlósága miatt $OM : OL = OC : OB = e : f$ és $m(LOM\sphericalangle) = m(BOC\sphericalangle) = \alpha$, s így az O középpontú, α szögű és $\frac{e}{f}$ arányú forgatva nyújtás (vagy nyújtva forgatás) során az $\overleftrightarrow{AB}$-re illeszkedő L pont képe M-mel azonos, amit $\overleftrightarrow{BC}$-ből az $\overleftrightarrow{AB}$-nek a képe metsz ki (11. ábra). Ha az A és B pontok képeit az O középpontú, α szögű forgatás során A' és B' jelöli, akkor $OC > OB$ és $m(BOC\sphericalangle) = \alpha$ miatt B' az $\overline{OC}$ szakasz belső pontja, továbbá $m(BAD\sphericalangle) = \alpha$ miatt az $\overleftrightarrow{A'B'}$ egyenes párhuzamos $\overleftrightarrow{BC}$-vel. S ha az O középpontú, $\frac{e}{f}$ arányú nyújtásnál az A' és B' pontok képeit A'' és B'' jelöli, akkor $B'' \in \overrightarrow{OB'}$ és $OB'' = \frac{e}{f} \cdot OB' = \frac{e}{f} \cdot OB = \frac{e}{f} \cdot \frac{f}{2} = \frac{e}{2}$ miatt



11. ábra

$B'' = C$, továbbá a centrális nyújtás párhuzamosságtartó volta miatt $A'' \in \overleftrightarrow{BC}$ teljesül, s ezért az $\overleftrightarrow{A''B''}$ egyenes egybeesik $\overleftrightarrow{BC}$-vel: tehát M a $\overleftrightarrow{BC}$ egyenes bármely pontja lehet, de a beíráshoz csak a $\overline{BC}$ oldal belső pontjai tekinthetők.

A $KLMN \sim ABCD$ hasonlóság az irányítástartás miatt vagy $\vartheta = m(AOK\sphericalangle)$ szögű O körüli elforgatás, vagy pedig O középpontú forgatva nyújtás. E hasonlóság $\lambda = OM : OC$ arányának jellemzéséhez legyen m a BM irányított szakasz előjeles hossza (3. ábra). Ekkor $BC = b$, $OB = \frac{f}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ és $OC = \frac{e}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ miatt $OM = x$ jelöléssel az $OBC_\triangle$-ből a Stewart-tétel szerint $b[x^2 + m(b-m)] = \frac{a^2}{2}m + \frac{b^2}{2}(b-m)$, ahonnan $x^2 = \frac{2bm^2 + (a^2 - 3b^2)m + b^3}{2b}$, melynek számlálója $1 \le \frac{a}{b} < 1 + \sqrt{2}$ miatt minden m-re pozitív, s így a λ arányra $\lambda^2 = \frac{2bm^2 + (a^2 - 3b^2)m + b^3}{a^2 b}$ kapható. Ha tehát M befutja a $\overleftrightarrow{BC}$ egyenest, akkor m függvényében λ-ra az alábbi esetek állnak fenn:

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{b}{a}, \qquad \text{(6. ábra)}$$

$$0 < m < b \ \vee \ \frac{b^2 - a^2}{2b} < m < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} < \lambda < 1,$$

$$m = b \ \vee \ m = \frac{b^2 - a^2}{2b} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1, \qquad \text{(7. és 9. ábra)}$$

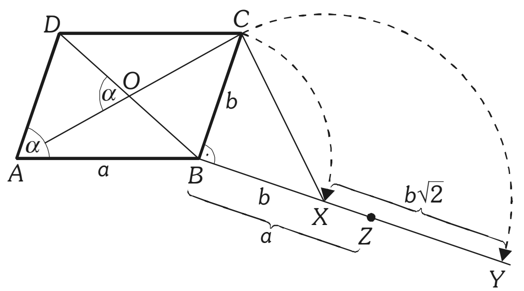
$$b < m < \frac{a^2 + b^2}{2b} \ \vee \ \frac{b^2 - a^2}{b} < m < \frac{b^2 - a^2}{2b} \quad \Rightarrow \quad 1 < \lambda < \frac{a}{b},$$

$$m = \frac{a^2 + b^2}{2b} \ \vee \ m = \frac{b^2 - a^2}{b} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a}{b}, \qquad \text{(8. és 10. ábra)}$$

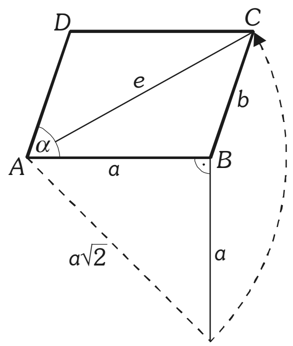
$$m > \frac{a^2 + b^2}{2b} \ \vee \ m < \frac{b^2 - a^2}{b} \quad \Rightarrow \quad \lambda > \frac{a}{b}.$$

A $\lambda = 1$ esetén ható elforgatásra $\vartheta = 0^\circ$ (7. ábra), vagy $\cos\vartheta = -\left(\frac{a^2 - b^2}{2ab}\right)^2$ (9. ábra), a $\lambda \neq 1$ esetén ható forgatva nyújtásra pedig $\vartheta = \alpha$ (6. ábra), $\cos\vartheta = \frac{a^4 - 4a^2b^2 - b^4}{4a^3b}$ (8. ábra), vagy $\cos\vartheta = \frac{b^2 - a^2}{2ab}$ (10. ábra) teljesül.

Az egyező körüljárás esetének befejezéseként vizsgáljuk meg, hogy miként szerkeszthető meg a $BAD\sphericalangle \cong AOD\sphericalangle$ feltételt kielégítő $ABCD$ paralelogramma. Erre több különböző mód is kínálkozik attól függően, hogy kiinduláskor mit tekintünk adottnak. S minthogy a speciális paralelogrammák közül sem a téglalap, sem a rombusz nem jöhet számításba, ezért az $a = b$, az $e = f$ és az $\alpha = 90^\circ$ esetek mindegyike négyzetre vezet, amivel itt már nem kell foglalkoznunk. Ha az a és b oldalakat tekintjük adottnak, akkor a $b < a < b\left(1 + \sqrt{2}\right)$ feltétel miatt célszerű előbb a $\overline{BC}$ oldalt felvenni, s a B-ben rá merőleges félegyenesen B–X–Y, $BX = b$ és $XY = b\sqrt{2}$ feltétellel előállítani az X és Y pontokat (12. ábra). Ekkor az a egyik végpontja B, másik pedig az $\overline{XY}$ szakasz valamely belső Z pontja lehet. Ezen szerkesztésnél az $\overline{XY}$ szakasz egybevágó a $\overline{BD}$ átlóval, s így $a < b\left(1 + \sqrt{2}\right) = b + f$ miatt az a, b és f szakaszokból megszerkeszthető az $ABD_\triangle$ háromszög, s ezután $\overline{BD}$-nek az O felezőpontjára A-t tükrözve a hiányzó C csúcs is. Az előbbi esetre könnyen visszavezethető az a és f (vagy b és e), valamint az e és f eset. Ugyanis a és f ismeretében b előállítható a $b = \frac{f\sqrt{2}}{2}$ összefüggés alapján. Továbbá e és f ismeretében $e = a\sqrt{2}$ és $f = b\sqrt{2}$ alapján a és b is előállítható, miközben e és f felvételénél teljesülni kell az $f < e < f\left(1 + \sqrt{2}\right)$ feltételnek.



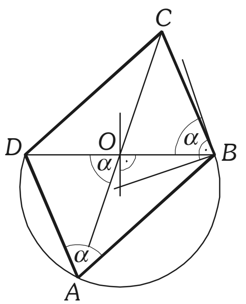
12. ábra



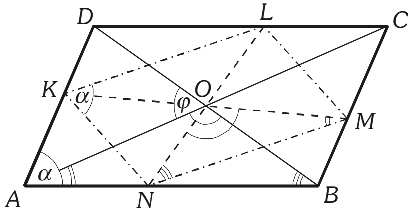
13. ábra

Ha a és α az adott, ahol $0° < \alpha < 90°$, akkor az a oldal felvétele után az $e = a\sqrt{2}$ összefüggés révén előállítjuk az e átlót: így az a, e és $180° - \alpha$ adatokból az $ABC_\triangle$ háromszög megszerkeszthető (13. ábra). A hiányzó D csúcs az $\overleftrightarrow{AB}$-vel C-n át és a $\overleftrightarrow{BC}$-vel A-n át húzott párhuzamosok metszéspontja. Hasonló módon tárgyalható a b és α eset. Ha pedig f és α adott, akkor előállítjuk $\overline{BD}$-nek az O felezőpontját, az $\overrightarrow{OD}$ félegyenesre átmásoljuk az α szöget, amelynek $\overrightarrow{OD}$-től különböző szára a $\overline{BD}$ szakasz fölé rajzolt α szögű k látókörívet az A pontban metszi (14. ábra). A még hiányzó C csúcs előállítható A-nak O-ra vonatkozó tükrözésével, vagy az előbbi esetnél követett úton. Hasonló módon tárgyalható az e és α eset.

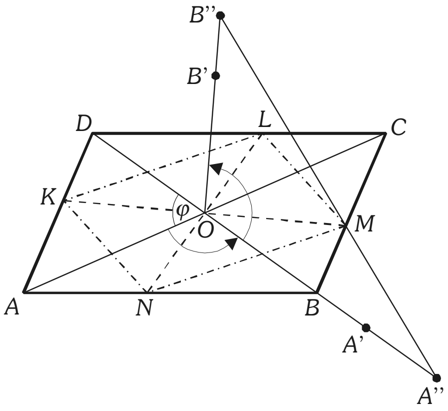
Az adott $ABCD$ paralelogrammába beírt ellentétes körüljárású $KLMN$ paralelogramma akkor hasonló $ABCD$-hez, ha az $OAB_\triangle$ és $OKL_\triangle$ megfelelő háromszögek hasonlók (15. ábra), jóllehet $OKL_\triangle \cong OMN_\triangle$ miatt az $OAB_\triangle$ és $OMN_\triangle$ háromszögek hasonlósága is teljesül, amiből $OM : ON = OA : OB = e : f$ és $m(MON\sphericalangle) = m(AOB\sphericalangle) = 180° - \varphi$ adódik. Ekkor az O középpontú, $180° - \varphi$ szögű és $\frac{e}{f}$ arányú forgatva nyújtás (vagy nyújtva forgatás) az $\overleftrightarrow{AB}$-re illeszkedő N pontot M-be viszi át: ezért ezen forgatva nyújtásnál az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes $\overleftrightarrow{A''B''}$ képe a $\overleftrightarrow{BC}$ egyenest az M pontban metszi. Az M ismeretében a még hiányzó K, L és N csúcsok is megszerkeszthetők, mivel K az $\overleftrightarrow{AD}$ és $\overleftrightarrow{OM}$ egyenesek metszéspontja, továbbá a $\overleftrightarrow{KM}$ egyenesnek az O körüli $\varphi - 180°$ szögű elforgatással kapott képe az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ oldalakat N és L pontokban metszi (16. ábra: forgatva nyújtás, 17. ábra: nyújtva forgatás). Ha pedig az O pontot origónak választjuk, akkor az előbbi forgatva nyújtást (vagy nyújtva forgatást) leíró



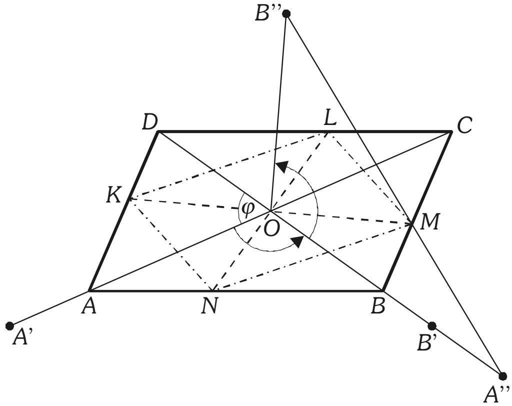
14. ábra



15. ábra



16. ábra



17. ábra

$$\begin{pmatrix} -\frac{e}{f}\cos\varphi & -\frac{e}{f}\sin\varphi \\ \frac{e}{f}\sin\varphi & -\frac{e}{f}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

mátrix felírható a

$$\begin{pmatrix} -\frac{e}{f}\cos\varphi & 0 \\ 0 & -\frac{e}{f}\cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{e}{f}\sin\varphi \\ \frac{e}{f}\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

összeg alakban ([1] 205–206. oldal), s ennélfogva egy vektornak az előbbi forgatva nyújtással kapott képe előállítható ezen vektor $\left(-\frac{e}{f}\cos\varphi\right)$-szeresének és 90°-os elforgatottja $\left(\frac{e}{f}\sin\varphi\right)$-szeresének összegeként. Az *ABCD* paralelogramma felvétele és az *O* középpont megszerkesztése után ezt az eljárást az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorokra alkalmazva kapjuk az *A*'' és *B*'' pontokat:

$$\overrightarrow{OA'} = \left(-\frac{e}{f}\cos\varphi\right)\overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{A'A''} = \left(\frac{e}{f}\sin\varphi\right)\mathrm{rot}90^\circ\left(\overrightarrow{OA}\right),$$

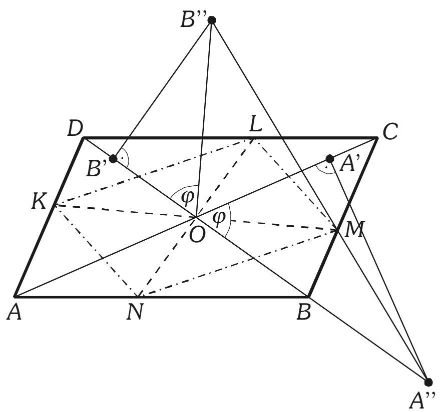
$$\overrightarrow{OB'} = \left(-\frac{e}{f}\cos\varphi\right)\overrightarrow{OB} \quad \text{és}$$

$$\overrightarrow{B'B''} = \left(\frac{e}{f}\sin\varphi\right)\mathrm{rot}90^\circ\left(\overrightarrow{OB}\right),$$

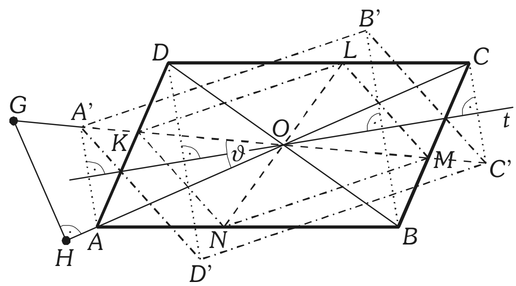
ahol rot90° jelöli a vektor 90°-os elforgatottját (18. ábra).

Mindezek alapján nem speciális paralelogrammára a szerkeszthetőség szükséges feltétele: $\overline{A''B''} \nparallel \overline{BC} \Leftrightarrow \alpha + \varphi \neq 180^\circ$, ami $0^\circ < \alpha, \varphi < 90^\circ$ miatt mindig teljesül, miközben $\alpha = \varphi$ is lehetséges. Sőt $\alpha = \varphi$ esetén az 1. ábra alapján egy újabb megoldáshoz jutunk, ha az *ABCD*-hez hasonló és vele ellentétes körüljárású *PQRS* paralelogrammát az *O* pontból felére kicsinyítjük: az így kapott *KLMN* paralelogramma a hasonlóság tranzitív volta miatt hasonló *ABCD*-hez és e hasonlóság aránya $\sqrt{2}:2$, aminek az ismeretében viszont *PQRS* mellőzhető. Ugyanis $\overline{KL} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ és $KL = \frac{PQ}{2} = \frac{AC}{2} = AO$ miatt $\overline{AK} \parallel \overline{OL}$, s így az *O* ponton át $\overline{AD}$-vel párhuzamos az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ oldalakat *N* és *L* pontokban metszi. Ezután a még hiányzó *K* és *M* pontok előállítására több mód is kínálkozik.

Minthogy az *ABCD*-t a beírt *KLMN*-be átvivő irányításváltó hasonlóság nem lehet egybevágóság, ezért létezik egy tükrözve nyújtás (vagy nyújtva tükrözés), amely során az *ABCD* paralelogramma képe az ellentétes körüljárású *KLMN* beírt paralelogramma lesz, miközben a tükrözésnél $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$ és $D \mapsto D'$, a nyújtásnál pedig $A' \mapsto K$, $B' \mapsto L$, $C' \mapsto M$ és $D' \mapsto N$ értendő. E tükrözve nyújtás centruma azonos az *O* ponttal, aránya egyenlő $\frac{OK}{OA}$-val, tengelye pedig az $AOK\sphericalangle$ felezőjének az egyenese (19. ábra). Az általános eset túl



18. ábra

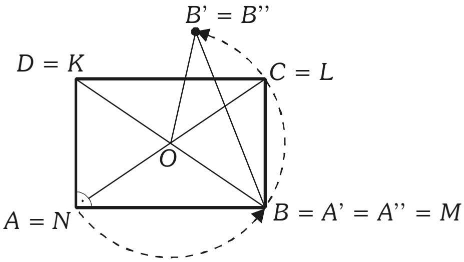


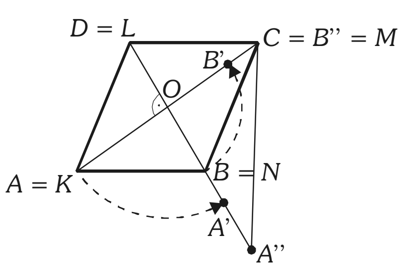
19. ábra

bonyolult volta miatt a tükrözés tengelyének és a nyújtás arányának meghatározását csak az $AC = 12$, $BD = 8$ és $m(AOB\sphericalangle) = 120°$ speciális esetre mutatjuk be. Ehhez első lépésként az $OAB_\triangle$ illetve az $OAD_\triangle$ háromszögből $\vartheta = m(AOK\sphericalangle)$ függvényében meghatározzuk az $\overline{ON}$ és $\overline{OK}$ szakaszok hosszait: $ON = \frac{12\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\cos\vartheta - \sin\vartheta}$ és $OK = \frac{6\sqrt{3}}{2\sin\vartheta + \sqrt{3}\cos\vartheta}$, amiből az $\frac{OK}{ON} = \frac{OA}{OD} = \frac{3}{2}$ arányt felhasználva $\tan\vartheta = \frac{2\sqrt{3}}{7}$ kapható, s ezáltal az $OH = 7$ és $GH = 2\sqrt{3}$ befogójú $OGH_\triangle$ derékszögű háromszög O-nál lévő szögeként megszerkeszthető az $AOK\sphericalangle$ szög és annak felezésével a tükrözés t tengelye. Továbbá a $\sin\vartheta = \frac{\tan\vartheta}{\sqrt{1+\tan^2\vartheta}}$ és $\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\vartheta}}$ összefüggéseket felhasználva $OK = \frac{6\sqrt{61}}{11}$, s így $OA = 6$ miatt a nyújtás arányára $\lambda = \frac{OK}{OA'} = \frac{OK}{OA} = \frac{\sqrt{61}}{11} < 1$ adódik.

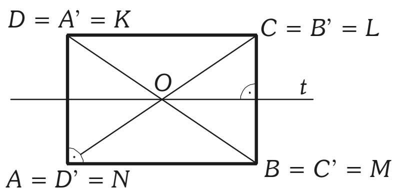
Ha a 19. ábrán a $KLMN$ paralelogrammát O-ra tükrözzük, akkor az így kapott $K'L'M'N'$ paralelogramma nyilván megoldása a feladatnak, s bár a most ható tükrözve nyújtás centruma és aránya ugyanaz marad, de az $AOK'\sphericalangle$ az előbbi $AOK\sphericalangle$-nek mellékszöge, s így ezen tükrözés tengelye O-ban merőleges az előbbire.

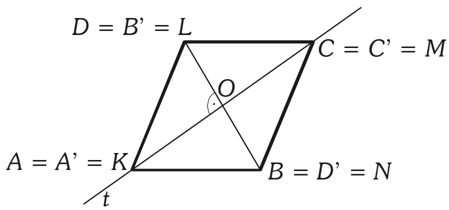
A téglalap és a rombusz esetén a forgatva illetve tükrözve nyújtásos fenti szerkesztéseket elvégezve visszajutunk az eredeti alakzathoz, ekkor tehát nincs megoldás (20. ábra: forgatva nyújtás, 21. ábra: tükrözve nyújtás). Ugyanezen eljárás a négyzet esetén is alkalmazható, de a négyzetre a 11. ábrán bemutatott szerkesztést követve végtelen sok megoldást kapunk, ha az ottani L és N pontokat felcseréljük.





20. ábra





21. ábra

Irodalom

[1] Athen, H. und Bruhn, J. (1978): Lexikon der Schulmathematik, Band 1. Aulis Verlag

[2] Hajós György (1966): Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó

[3] Soós Paula, Czapáry Endre (1991): Geometriai feladatok gyűjteménye II. Tankönyvkiadó

[4] Gyakorlatmegoldások: Gy. 2492. Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1989/4-es szám.

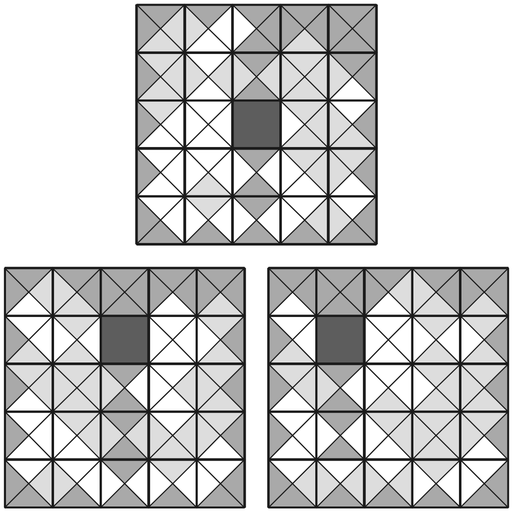
Dr. Darvasi Gyula

Quadrominó 5 x 5-ös lyukas négyzetek

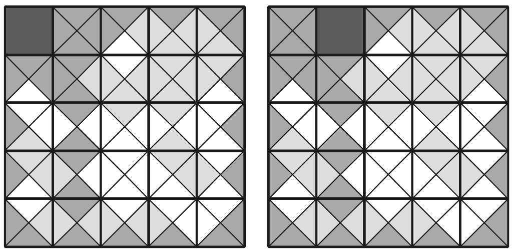
A quadrominó elnevezésű színdominó játék négyzet alakú lapjai a két átló berajzolásával adódó négy háromszöget legfeljebb háromszínűre festve könnyen előállíthatók ([1] 136–142. oldal, [2] 5–36. oldal, [3]). A 24 lapból most egy 5×5-ös négyzetet kívánunk összerakni, melybe egy lyuk lesz beépítve, miközben a négyzet szélén lévő háromszögek egyforma színűek: ez adja a peremszínt, a belül lévő lapok pedig azonos színű háromszögekkel kapcsolódnak egymáshoz: ez a dominó-feltétel. A lyuk előfordulhat a négyzet szélén vagy a belsejében, de mindig megköveteljük, hogy a szemközti oldalaira azonos színű háromszögek kerüljenek. A négyzet belsejében bárhol állhat lyuk (1. ábra), viszont a szélén nem állhat a középső helyen (2. ábra), mivel ehhez nincs elegendő olyan lap, amelyen legalább két szomszédos háromszög színe azonos a négyzet szélén álló háromszögekével.

A lyuk helyének és a négyzet szélére kerülő háromszögek színének eldöntése után a négyzet összeállítása a szélén lévő lapok kirakásával kezdődik. Majd a befelé álló peremszínű háromszögeket lekötjük azokkal a lapokkal, amelyeken vannak átellenes peremszínű háromszögek; így a négyzet két szemközti oldalát összekötő hidat építünk, amely mindig tartalmazza a lyukat. Ezután már csak annyi a dolgunk, hogy a peremszínt nem tartalmazó lapokkal kitöltsük a még kimaradt mezőket, de előfordulhat, hogy ez elsőre nem sikerül: ilyenkor át kell rendezni a négyzet szélén és a hídban álló lapokat.

A négyzet szimmetria tulajdonságaiból adódóan nem tekintjük különbözőnek azokat az elrendezéseket, amelyek elforgatással, illetve tengelyes vagy középpontos tükrözéssel egymásba vihetők.



1. ábra



2. ábra

Irodalom

[1] Darvasi Gyula: Egy színdominó játék: a quadrominó. A matematika tanítása, 1986/5.

[2] Jens Carstensen: Legespiele. Der Mathematikunterrict, 1980/2.

[3] www.rodina.cz/g/myclanky/quadrominokameny.jpg

Csonka Dorottya

Sonkás szendvics és egyéb folytonos csemegék

Bevezetés

A budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium Matematika táborában 11.-es és 12.-es speciális matematika tantervű és érdeklődő tatai diákok foglalkoztak a folytonosság témakörével két órán keresztül. A foglalkozás gerincét Tabachnikov Considerations of Continuity (Quantum 1990 májusi száma 8–12. oldal) cikke adta. A cikkben az itt elhangzottakkal ismertetjük meg a kedves Olvasót.

Az alábbiakban csak egzisztencia bizonyításokkal találkozunk. A feladatok során csak a megoldás létezését bizonyítjuk, nem számítjuk ki a gyök pontos értékét, nem szerkesztjük meg a keresett egyeneseket, érintőket.

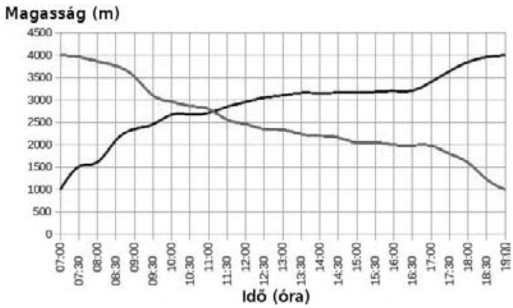
Ismerkedés a fogalommal

Először nézzük egy hegymászó esetét. Ez a hegymászó az 1000 méteren lévő alaptáborból reggel 7 órakor indulva este 7 órára érkezik meg a 4000 méteres csúcsra. Másnap reggel 7 órakor indul vissza (nem feltétlenül azonos útvonalon), de ugyanúgy este 7-re érkezik meg az alaptáborba. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan időpont a lefele vezető út során, amikor ugyanolyan magasan volt, mint előző nap ugyanabban a pillanatban.

Képzeljük el, hogy egyszerre két hegymászót indítunk útnak: az egyiket az 1000 méteren lévő alaptáborból, a másikat a 4000 méteren lévő csúcsról reggel 7-kor. Útjuk során folytonosan haladnak, minden magassági értéket felveszznek. Az egyik hegymászó felér a 4000 méteren lévő csúcsra, a másik pedig megérkezik az 1000 méteren lévő alaptáborba este 7 órára.

Útjuk során biztosan lesz egy olyan pillanat, amikor ugyanolyan magasan lesznek, hiszen a fentről érkező hegymászó magassága *folyamatosan* csökken, míg a lentről felfelé tartóé *folyamatosan* növekszik.

Ábrázoljuk közös grafikonon a tengerszint feletti magasságot az idő függvényében. Példaképp álljon itt egy lehetséges grafikon:



1. ábra

Mivel a két függvény kezdeti és végállapotai páronként megegyeznek, és folytonosak, következik, hogy lesz egy olyan időpillanat, amikor a két grafikon metszi egymást.

A folytonos függvény azon tulajdonságát használtuk ki, hogy két függvényértéke között minden értéket felvesz. Ez az állítás elég magától értetődő[1], viszont sok nyilvánvaló állításhoz hasonlóan nem egyszerű a bizonyítása. De ez nem

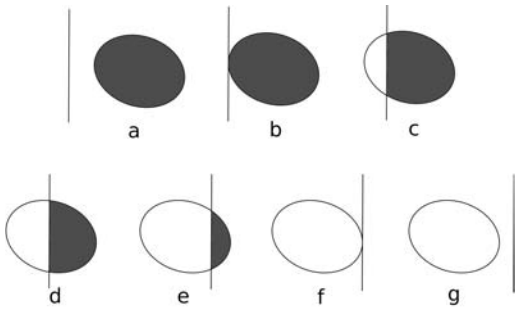
[1] Ezt a szemléletességet nagyon nehéz legyőzni. Max Planck a XX. század elején mégis merészen feltette, hogy a hullámoszcillátor energiája a klasszikus fizika folytonos képével ellentétben energiakvantumok egész számú többszöröse, azaz csak diszkrét értékeket vehet fel. A folytonossággal való zseniális szakítása megmagyarázott egy sor, a klasszikus fizikából nem következő jelenséget, és az atomok és a még ennél is kisebb objektumok fizikai törvényeinek felismeréséhez, a kvantummechanika megszületéséhez vezetett.

is célja a foglalkozásnak. Azonban a problémák megoldásánál mindig *ezt* fogjuk használni.

Alap problémák

1. állítás: Tetszőleges irányhoz létezik olyan egyenes, amely felezi egy tetszőleges (területtel rendelkező) halmaz területét.

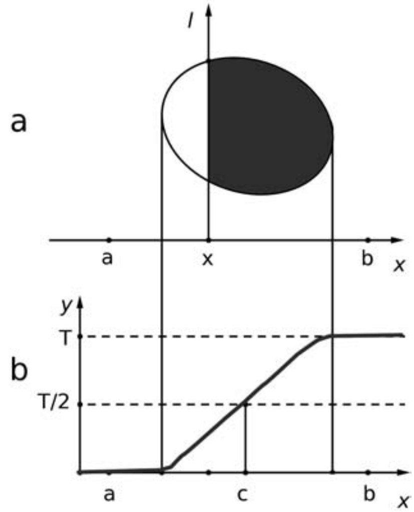
Vegyünk a tetszőleges iránnyal párhuzamos egyenest úgy, hogy az az alakzatunk bal oldalán helyezkedjen el (*2/a. ábra*). Majd mozgassuk az egyenest jobbra. Először érinteni fogja az egyenes a halmazt (*2/b. ábra*), majd kettévágja azt (*2/c-f ábra*), mígnem már egészen az egyenes bal oldalára nem kerül a tetszőleges alakzat.



2. ábra

Míg az egyenes halad balról jobbra, a bal, illetve a jobb oldalán lévő terület *folytonosan* változik. Mivel kezdetben az egyenes bal oldalán lévő rész területe nulla volt, majd végül az egész terület az egyenes bal oldalán helyezkedett el, így biztosan volt olyan helyzete az egyenesnek, amikor pont felezte a területet. Nem tudjuk, hol van ez az egyenes, csak abból, hogy a terület folytonosan változik, azt tudjuk biztosan, hogy *létezik* ilyen egyenes.

Vegyük fel az x tengelyt az egyenesre merőlegesen. Készítsünk egy $f(x)$ függvényt, ami az egyenes bal oldalán lévő terület nagyságát ábrázolja az egyenes helyzetének függvényében. Ekkor a felező egyenes megtalálása egyenértékű azzal a problémával, hogy megtaláljuk azt a c pontot a és b közt, melyre igaz, hogy $f(c)=\frac{T}{2}$, ahol T az alakzat területe (*3. ábra*).



3. ábra

Húzzuk meg az $y=\frac{T}{2}$ egyenest. Az $f(x)$ függvény bal oldala biztosan ezen egyenes alatt helyezkedik el, a jobb oldala pedig felette, mivel $f(a)=0<\frac{T}{2}$, míg $f(b)=T>\frac{T}{2}$. Ezért léteznie kell egy $c\in[a;b]$, ahol a függvény metszi az $y=\frac{T}{2}$ egyenest, mert az $f(x)$ függvény folytonos, azaz $f(c)=\frac{T}{2}$.

Ennek következménye az 1.b állítás. Bizonyítása indirekt módon történhet, az olvasóra bízom.

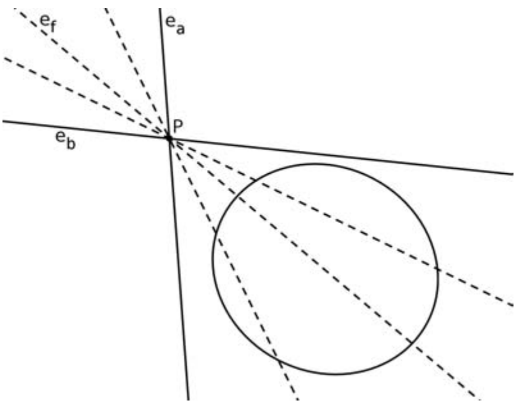
1.b állítás: Minden irányhoz *pontosan egy* területfelező egyenes létezik.

Megjegyzés: Az állítás igaz konkáv és nem összefüggő alakzatokra is. Az egyszerűség kedvéért azonban a továbbiakban csak konvex alakzatokat tekintünk.

2. állítás: Egy konvex halmazon kívüli P pontból mindig létezik olyan P-n átmenő egyenes, ami felezi a halmaz területét.

Az állítás bizonyítása nagyon hasonló az első állításéhoz. Ezt a diákok megkapták önálló bizonyításra, miután az első állítást megbeszéltük. Lássuk a bizonyítást röviden:

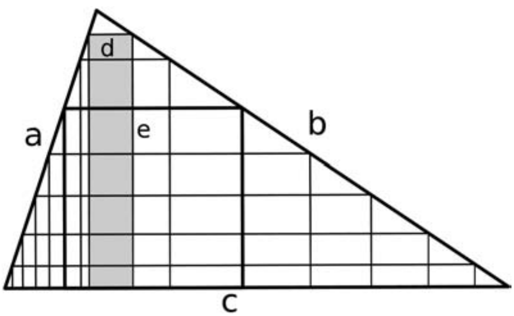
Biztos van olyan P-n átmenő egyenes, amely még nem metszi az alakzatot, és az egész alakzat annak egyik oldalán van (e_a). Mozgatva az egyenest az alakzat felé, miután áthaladt rajta, lesz olyan egyenes, melynek másik oldalán van az alakzat (e_b). Mivel az egyenest folytonosan mozgattuk, és a terület is folytonosan változott, ezért kellett lennie egy olyan egyenesnek a mozgatás során, amely éppen felezte az alakzatunkat (e_f) (*4. ábra*).



4. ábra

3. állítás: Tetszőleges háromszögbe írható négyzet úgy, hogy egy-egy csúcsa egy-egy oldalon, a másik két csúcsa pedig a harmadik oldalon helyezkedik el.

A feladat ismert, a nagyítás témakörén belül tárgyalni is szokás ennek a négyzetnek a megszerkesztése. De most csak a létezését szeretnénk bizonyítani.



5. ábra

Az a, b, c oldalú háromszögbe írjunk úgy téglalapot, hogy annak d oldala legyen párhuzamos a háromszög c oldalával, e oldala pedig merőleges rá (*5. ábra*). Vegyük úgy fel a téglalapot, hogy $d < e$ teljesüljön. Közelítsük a d oldalt a háromszög c oldalához. Mikor már „kellően" közel van a d oldal a c-hez, biztosak lehetünk benne, hogy lesz olyan állapot, ahol $e < d$. Mivel d folytonosan nő a mozgatás során, és a téglalap e oldala folytonosan csökken, így szükségszerűen lesz olyan állapot, amikor $d = e$, azaz amikor a téglalap négyzet.

4. állítás: Ha $f(x)$ egy T szerint periodikus, folytonos függvény, akkor létezik $f(x)$-nek $\frac{T}{2}$ hosszú húrja.

Az $f(x)$ függvénynek akkor van $\frac{T}{2}$ hosszú húrja, ha $f\left(x+\frac{T}{2}\right) = f(x)$. Definiáljuk a $g(x)$ függvényt a következőképpen: $g(x) = f\left(x+\frac{T}{2}\right) - f(x)$. Ha van olyan a, ahol $g(a) = 0$, akkor készen vagyunk.

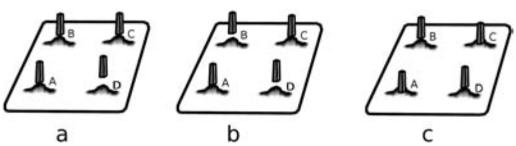
Tegyük fel, hogy $g(a) < 0$. Legyen $b = a + \frac{T}{2}$.

$$g(b) = g\left(a+\frac{T}{2}\right) = f\left(a+\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right) - f\left(a+\frac{T}{2}\right) =$$

$$= f(a+T) - f\left(a+\frac{T}{2}\right) = f(a) - f\left(a+\frac{T}{2}\right) = -g(a),$$

azaz $g(b) > 0$. Mivel a $g(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumon **előjelet vált,** ezért van olyan $c \in [a; b]$, hogy $g(c) = 0$. Ezt kellett belátnunk.

5. állítás: Tekintsük azokat a négyzet alakú asztallappal rendelkező asztalokat, melynek lábai a négyzet négy csúcsában vannak. Tetszőleges folytonos felületen mozgatható az asztal olyan állapotba, ahol nem billeg. (Ebben a stabil állapotban nem követeljük meg, hogy az asztallap vízszintes legyen.)



6. ábra

Jelöljük az asztal lábainak helyzetét az A, B, C és D betűkkel. Ha az asztal lábai billegnek, akkor minden esetben megoldható, hogy az asztal három lába lent, a negyedik lába a levegőben legyen, mert 3 pont meghatároz egy síkot. A *6/a. ábrán* a D helyzetben lévő láb legyen a levegőben, az A, B és C pozíción lévők pedig legyenek a földön. Forgassuk az asztalt AC egyenese körül úgy, hogy a B és D pozícióban lévő láb is azonos távolságra legyen a földtől (6/b. ábra), legyen ez a távolság *d*, a földtől mérve.

Képzeljük el most, hogy a földet helyettesítjük egy kocsonyaszerű anyaggal. Megtehetjük, hogy elforgatjuk az asztalt a középpontja körül úgy, hogy két lába (kezdetben a *6/b. ábrán* A és C helyen lévők) folyamatosan a felületen vannak, a másik két lába pedig mindig ugyanannyival (*d*-vel) feljebb tőlük. Mikor a lent lévő lábak negyed fordulat után B és D helyzetbe kerülnek, akkor még mindig a földön lesznek – hiszen így forgattuk. De mivel a másik két láb hozzájuk képest *d* távolsággal lejjebb van, így most azok (A és C helyen a *6/c. ábrán*) a föld alatt helyezkednek el *d* távolsággal. Mivel a 6/*b. és* 6/*c.* ábrán jelölt helyzetet figyelve először a B-D, majd az A-C helyzetben lévő két – nem végig a felületen lévő – asztalláb felszíntől vett távolsága előjelet vált, így szükségszerűen kellett lennie egy olyan pillanatnak, amikor azok a földön helyezkedtek el. Azaz akkor az asztal mind a négy lába a földön helyezkedett el, nem billegett az asztal.

A megoldásban fontos szerepet játszott, hogy az asztal lábai egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el. Ismeretlen eddig, hogy ez az állítás igaz téglalap alakú asztalra is, vagy sem.

További problémák

Az alábbi, öt csoportba osztott feladatok elsőit egyszerre kapták meg a diákok gondolkodásra. A csoportokban a feladatok nehézségi sorrendben követik egymást. A foglalkozáson a tanulók tetszőlegesen választhattak, hogy melyiken gondolkodnak. Amikor készen voltak, akkor a csoport következő feladatait kapták meg. Majd ha mind készen volt – vagy a másik témakörbe is bele akartak kóstolni –, akkor tovább ugrottak egy másik feladatkörre.
Idő hiányában nem hangzott el az összes feladat. Itt azoknak a vázlatos megoldásait közlöm, amelyek új gondolatokat tartalmaznak, a többi megoldását az Olvasóra bízom.

A világ körülöttünk – könnyebb feladatok

6. a. állítás: Tegnap éjfélkor hidegebb volt, mint tegnapelőtt éjfélkor és ma éjfélkor is. Bizonyítsd be, hogy ma valamikor ugyanannyi volt a hőmérséklet, mint tegnap ugyanakkor! (Pl. tegnap 15.23-kor ugyanúgy 14 °C volt, mint ma 15.23-kor.)

6. b állítás: Egy *l* hosszú létrát falnak támasztunk. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pontja a létrának, amely ugyanolyan távol van a földtől, mint a faltól!

6. c állítás: Létezik az egyenlítőn két átellenes pont, ahol a hőmérsékletek megegyeznek.

6. d állítás: A Földön mindig létezik két átellenes pont, ahol egyszerre a nyomás és a hőmérséklet értékei is megegyeznek. (Ez már nehéz feladat...)

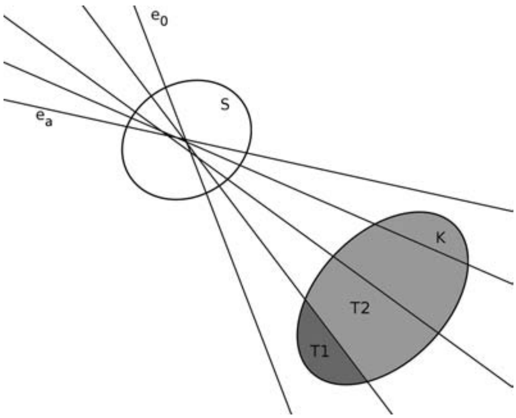
Sonkás-szendvics és barátai – két halmaz szimultán felezése

7. a állítás (Pizza-tétel): Létezik olyan egyenes, amely egyszerre felezi egy tetszőleges konvex halmaz kerületét és területét.

Megoldás: Válasszunk két pontot (*A*-t és *B*-t) a konvex alakzat határán úgy, hogy azok felezzék az alakzat kerületét. Mozgassuk *A*-t és *B*-t úgy, hogy azok határon mért távolsága állandó maradjon, az alakzat kerületének fele. Tekintsük az *A* és *B* egy tetszőleges állapotában az *AB* egyik és másik oldalán lévő területek különbségét. Ez az érték előjelet vált, midőn *A* és *B* helyet cserél.

7. b állítás (Kétdimenziós sonkás szendvics-tétel): Két konvex alakzat egy egyenessel megfelezhető. Azaz létezik olyan egyenes vágás, amivel egy kenyér és egy sonka egyszerre megfelezhető.

Megoldás: Az 1. állításnál láttuk, hogy létezik tetszőleges irányú felező egyenes. Legyen a két alakzatunk S (mint sonka) és K (mint kenyér). Húzzunk meg egy olyan S-t felező egyenest, amelynek egyik oldalán helyezkedik el K. Legyen ez a 0°-hoz tartozó felező egyenes. Majd ezt a szöget folytonosan változtatva hozzuk létre mindig a szöghöz tartozó S-t felező egyenest. Lesz olyan α, amikor már a K alakzat az egyenes másik oldalán helyezkedik el. Az egyenes egyik oldalán lévő területet nevezzük T_1-nek, a másik oldalán lévő területet T_2-nek. Kezdetben $T_1 - T_2$ negatív, α esetén pozitív. Azaz előjelet vált. Tehát van olyan szög, amely egyszerre felezi K és S területét (*7. ábra*).



7. *ábra*

Megjegyzés: A Pizza-tétel és a Sonkás szendvicstétel analóg, ha a kerületet megfeleltetjük az S halmaznak. Valamint vegyük észre, hogy a bizonyításban nem volt fontos, hogy hol helyezkedik el egymáshoz képest az S és a K halmaz. Azaz a bizonyítás akkor is igaz, ha a kenyérszelet még a péknél, a sonkaszelet pedig még a hentesnél van...

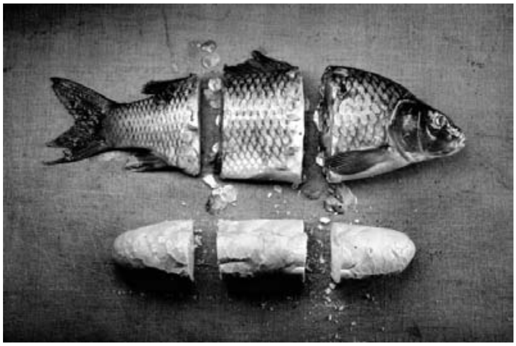
7. c állítás (Háromdimenziós sonkás szendvics-tétel): Létezik olyan sík, amely egyszerre felez három konvex alakzatot.

Darabolós problémák – kérdések a konvex alakzatokon belül

8. a állítás (Tükörtojás-tétel) Konvex alakzat tartalmaz egy másik konvex alakzatot. A belső alakzatnak léteznek olyan *e* és *f* érintői, amelyek párhuzamosak, és a külső alakzatból egyenlő területű részeket vágnak le (*8. ábra*).

8. *ábra*

8. b állítás: Minden konvex alakzatnak vannak olyan *e* és *f* húrjai, melyek egyszerre párhuzamosak, egyenlő hosszúak és a konvex alakzatot három egyenlő területű részre osztják fel.

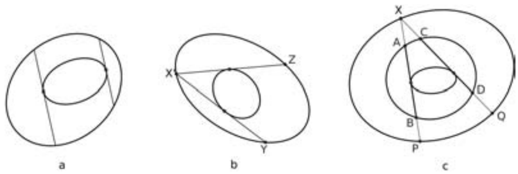


8. c állítás: Adott két konvex alakzat úgy, hogy az egyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy a kisebb alakzatnak vannak olyan érintői, melyek egymással párhuzamosak, és egyenlő hosszú részük fut a külső alakzaton belül (*9/a ábra*)!

8. d állítás: Adott két konvex alakzat úgy, hogy az egyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy a külső alakzatnak van olyan pontja, amiből egyenlő hosszú érintőket húzhatunk a belső alakzathoz! ($\exists X' \in$ *Külső:* $XZ = XY$) (*9/b ábra*)

8. e állítás: Adott három konvex alakzat a *9/c ábra* szerint egymásba ágyazva. Bizonyítsuk be, hogy a külső alakzaton van olyan X pont , hogy abból a legbelső alakzatba húzható olyan érintő, melynek a második alakzatba eső részei azonos hosszúak. ($\exists X \in$ *Külső:* $AB = CD$)

Megoldás: Legyen $AB = a$ és $CD = b$. Vegyük fel X-et úgy, hogy b a legnagyobb húzható érintő legyen. Ekkor $b - a > 0$. Most X fusson végig a külső alakzaton mindaddig, míg a két húr helyet cserél. Ekkor $a - b > 0$. Mivel a $b - a$ előjelet vált, ezért volt olyan pont, ahol $a = b$ volt.



9. ábra

Négyzetes feladatok – konvex burok

9. a állítás: Tetszőleges konvex alakzat köré négyzet írható.
Megjegyzés: Olyan alakzatokra igaz az alábbi bizonyítás, ahol az érintő folytonosan változik.

9. b állítás: Magyarország térképe is négyzetbe foglalható.

9. c állítás: Tetszőleges test kockába írható.

Függvények

10. a állítás: Az $f(x)$ egy tetszőleges T szerint periodikus, folytonos függvény. Létezik $f(x)$-nek

a) $\frac{T}{3}$ hosszú húrja.

b) $\frac{T}{n}$ hosszú húrja.

c) $\frac{p}{q} \cdot T$ hosszú húrja.

Megoldás: A b. részt bizonyítjuk.

Legyen $g(x) = f\left(x + \frac{T}{n}\right) - f(x)$.

$$g(0) = f\left(\frac{T}{n}\right) - f(0)$$

$$g\left(\frac{T}{n}\right) = f\left(\frac{2T}{n}\right) - f\left(\frac{T}{n}\right)$$

$$g\left(\frac{2T}{n}\right) = f\left(\frac{3T}{n}\right) - f\left(\frac{2T}{n}\right)$$

$$g\left(\frac{3T}{n}\right) = f\left(\frac{4T}{n}\right) - f\left(\frac{3T}{n}\right)$$

$$\ldots$$

$$g\left(\frac{(n-1)T}{n}\right) = f(T) - f\left(\frac{(n-1)T}{n}\right)$$

A fenti teleszkopikus összegnél $f(T) - f(0) = 0$, mivel az f függvény T szerint periodikus.
Ha a fentiek közül az egyik $g\left(\frac{k \cdot T}{n}\right)$ érték nulla, akkor készen vagyunk.
Ha nem, akkor kell, hogy legyen negatív és pozitív tag is felsorolva, mert az összeg nulla. Ha viszont a g függvény előjelet vált, akkor létezik olyan c pont, ahol $g(c) = 0$, azaz van az f függvénynek $\frac{T}{n}$ hosszú húrja.

10. b állítás: Minden harmadfokú polinomnak van gyöke.

10. c állítás: Minden páratlan kitevős polinomnak van valós gyöke.

10. d állítás: Az $f(x)$ egy tetszőleges $[a; b]$ zárt intervallumon folytonos függvény, melynek értékkészlete az $[a; b]$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan x, amire $f(x) = x$.

10. e állítás: Az $f(x)$ egy tetszőleges $[a; b]$ zárt intervallumon folytonos függvény, ahol $b - a = T$, és az intervallum végpontjainál azonos értékeket vesz fel: $f(a) = f(b)$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan l hosszú húrja az $f(x)$ függvénynek, ahol

a) $l = \frac{T}{2}$

b) $l = \frac{T}{3}$

c) $l = \frac{T}{n}$

d) Állíts elő egy olyan $f(x)$ függvényt, amelynek nincs $l = \frac{2T}{3}$ hosszú húrja!

10. f állítás: Az

$$f(x) = a_1 \cdot \sin x + a_2 \cdot \sin 2x + a_3 \cdot \sin 3x + \ldots + a_n \cdot \sin(nx) + b_1 \cdot \cos x + b_2 \cdot \cos 2x + b_3 \cdot \cos 3x + \ldots + b_k \cdot \cos(kx)$$

függvénynek van zérushelye $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ esetén.

Nemecskó István

Beszámoló a XXI. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről

A XXI. Nemzetközi Magyar Matematikaversenynek 2012. március 14–18. között rendhagyó módon a tavalyihoz hasonlóan ismét magyarországi város, Kecskemét adott otthont. A kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium látta vendégül a magyar nyelven tanuló, matematikából tehetséges diákokat a Kárpát-medence minden tájáról. A versenyre közel 250 diákot és 80 matematikatanárt hívtak meg.

A verseny nyitóünnepsége március 15-én volt a Kecskeméti Kulturális és Konferencia Központban. A köszöntő beszédek mellett az iskola diákjai színes kulturális műsorral emlékeztek meg a nemzeti ünnepről. A megnyitó után a rendezvény résztvevői csatlakoztak a városi ünnepséghez. Délután tanárok és diákok egyaránt megismerkedhettek Kecskemét híres épületeivel, tereivel. A diákoknak a helyi gimnazisták szerveztek játékos vetélkedőt, melynek keretében felfedezhették Kecskemét nevezetességeit. A délutánt Dr. Lajkó Károly: Függvényegyenletek című előadása zárta. Este a kollégiumban a diákok különböző játékos programokon vehettek részt. A tanárok szakmai beszélgetésen vitatták meg a matematika oktatással kapcsolatos legfontosabb változásokat, azok lehetséges hatásait.

A matematikaversenyre másnap, március 16-án került sor. Az öt régióból beérkező feladatjavaslatokból a zsűri állította össze a feladatsorokat. A zsűri elnökének Dr. Kosztolányi József egyetemi docenst kérték fel. A versenyző diákoknak mind a négy évfolyamon 6–6 feladatot kellett 4 óra alatt megoldaniuk. A verseny alatt a tanároknak Mák Kornél alpolgármester úr mutatta be a kecskeméti Városházát. Délután a kollégák a feladatokat javították. A diákok a verseny után a Kecskeméti Főiskola Gépipari és Automatizálási Műszaki Főiskolai Karával ismerkedhettek meg. Előadást hallgathattak a főiskolán folyó különböző érdekes kutatásokról, többek között a kis fogyasztású járművek tervezéséről, a szupravezetésről. Este a Katona József Színházban Arthur Miller: Pillantás a hídról című darabját tekintették meg a verseny résztvevői.

A rendezvény hagyományainak megfelelően a következő napon egész napos kirándulásokat szerveztek a vendéglátók, ahol a részt vevők megismerkedhettek a környék történelmi, irodalmi emlékeivel. Az egyik kirándulás érintette Kiskőröst, Petőfi szülőházát, Kecelt és Hajóst. A másik kirándulás úti célja Ópusztaszer, a Nemzeti Történeti Emlékpark volt. A Feszty-körkép lenyűgözte a látogatókat. Este a tanárok közös ünnepi vacsorán vettek részt, a diákoknak zenés, táncos búcsúestet szerveztek.

A verseny lezárásaként március 18-án került sor az ünnepélyes eredményhirdetésre. A zsűri elnöke értékelte a tanulók teljesítményét. Minden évfolyamon a legjobb eredményt elért diák részesült első díjban. A díjazás során több mint 70 diák munkáját jutalmazták díjjal vagy dicsérettel.

A díjak átadása után a régióvezetők megköszönték a helyi szervezők munkáját. Dr. Lukács Lajos igazgató úr és kollégái mindent megtettek azért, hogy a rendezvény résztvevői jól érezzék magukat. A rendezvény programjai segítették a régi ismeretségek megerősítését, újak születését. Tovább erősödött a matematikát magyarul tanulók, magyarul tanítók összetartozása.

A XXII. verseny megrendezését Győr városa, több győri középiskola együtt vállalta fel, melyre szeretettel meghívták a verseny résztvevőit.

A verseny díjazottjai évfolyamonként

9. évfolyam

I. díj
Juhos Attila, Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Kollégium

II. díj:
Holczer András, Pécs, Janus Pannonius Gimnázium
Di Giovanni Márk, Győr, Révai Miklós Gimnázium
Fehér Zsombor, Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium

III. díj:
Koncz Botond, Csíkszereda, Márton Áron Gimnázium
Szilágyi Gábor, Beregszász, Beregszászi Magyar Gimnázium
Nemes György, Bonyhád, Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium

10. évfolyam

I. díj:
Simon Péter, Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium

II. díj:
Forrás Bence, Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium
Herczeg József, Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium
Dobra Gábor, Pécs, Janus Pannonius Gimnázium

III. díj:
Balogh Tamás, Érsekújvár, Pázmány Péter Gimnázium
Fonyó Viktória, Keszthely, Vajda János Gimnázium
Kacz Dániel, Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium
Bíró Dominik, Zenta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium
Maga Balázs, Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium

11. évfolyam

I. díj:
Szabó Lóránt, Kisvárda, Bessenyei György Gimnázium

II. díj:
Oláh Mátyás, Margita, Horváth János Iskolaközpont
Gema Barnabás, Veszprém, Lovassy László Gimnázium
Szaksz Bence, Győr, Kazinczy Ferenc Gimnázium

III. díj:
Bingler Arnold, Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium
Venczel Tünde, Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium
Nagy Róbert, Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium
Bősze Zsuzsanna, Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium

12. évfolyam

I. díj:
Gyarmati Máté, Pécs, Leőwey Klára Gimnázium

II. díj:
Szőts János, Baja, III. Béla Gimnázium

III. díj:
Mester Márton, Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium
Viharos Andor, Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium
Broda Balázs, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium

A versenyen kitűzött feladatok

9. osztály

1. A Gumimacik megszervezték a Nemzetközi Gumibogyó Szüreti Fesztivált, ahol minden résztvevő Gumimaci ugyanannyi üveg idei termésből készült gumibogyó szörpöt kapott ajándékba. Ha a Szüreti Fesztiválon tízzel kevesebb Gumimaci lett volna jelen, akkor az elkészített mennyiségből minden résztvevő két üveggel több gumibogyó szörpöt kaphatott volna. Amennyiben a Szüreti Fesztiválon nyolc Gumimacival többen vettek volna részt, akkor az idén sajtolt gumibogyó szörp mennyiségből mindannyian egy üveggel kevesebbet kaptak volna. Valójában hány Gumimaci vett részt a Nemzetközi Gumibogyó Szüreti Fesztiválon, és fejenként hány üveg gumibogyó szörpöt kapott ajándékba?

Péics Hajnalka, Szabadka

2. Az $ABCDE$ szabályos ötszög AD és EB átlóinak metszéspontja legyen S, az AC és EB szakaszok metszéspontja P, az AD és EC átlók metszéspontja R, a DB és EC szakaszok metszéspontja pedig Q. Határozzuk meg az $APQD$ négyszög területét, ha az átlók által meghatározott $ABCDE$ csillagötszög (ötágú csillag) területe 2 egység!

Nemecskó István, Budapest

3. Az asztalon egy egyenes mentén 50 zsetont helyeztek el. Aladár és Bea a következő játékot játssza: felváltva vesznek el a zsetonok közül alkalmanként 3–3 darabot addig, amíg 2 zseton nem marad. Ha ezek nem szomszédosak, akkor a kezdő játékos győz, ha pedig szomszédosak, akkor a második játékos a győztes. Kinek van nyerő stratégiája, ha a játékot Bea kezdi?

Szabó Magda, Szabadka

4. Határozzuk meg azokat a pozitív egész n számokat, amelyekre a $2^n - 1$ és a $2^n + 1$ számok közül legalább az egyik osztható 7-tel!

Kántor Sándor, Debrecen

5. Az ABC háromszög AB és AC oldalainak belsejében úgy vesszük fel rendre a D és E pontokat, hogy $BD = CE$ teljesüljön. Legyen F és G rendre a BC és DE szakaszok felezőpontja, valamint legyen M az FG egyenesnek az AC oldallal vett metszéspontja! Határozzuk meg az AM szakasz hosszát az AB és AC oldalak hosszának függvényében!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

6. Egy valós számokból álló $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ véges sorozat tagjaira teljesül, hogy bármely 5 egymást követő tagjának összege negatív, és bármely 8 egymást követő tagjának összege pozitív. Legfeljebb hány tagja lehet egy ilyen sorozatnak?

Kallós Béla, Nyíregyháza

10. osztály

1. Van-e olyan egész együtthatós $P(x)$ polinom, amelyre $P(0) = 12$, $P(1) = 20$ és $P(2) = 2012$?

Pintér Ferenc, Nagykanizsa

2. Határozzuk meg mindazokat a p, q, r prímszámokat, amelyekre

$$pqr < pq + qr + rp\ !$$

Oláh György, Révkomárom

3. Mely n pozitív egész számok esetén lesz az $n^2 + n + 19$ kifejezés értéke négyzetszám?

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

4. Határozzuk meg az

$$E = \frac{2x}{3y+4z} + \frac{3y}{4z+2x} + \frac{4z}{2x+3y}$$

kifejezés legkisebb értékét, ha x, y és z pozitív valós számok!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

5. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$, az AB alap felezőpontja D, az A és a D pontból a BC szakaszra bocsátott merőlegesek talppontja rendre a BC szakasz E, illetve F belső pontja. A DF szakasz G felezőpontját a C ponttal összekötő szakasz, és az AF szakasz metszéspontja H. Igazoljuk, hogy a H pont az AC szakasz mint átmérő fölé írt Thalész-körön van!

Bíró Bálint, Eger

6. Az első 2012 darab pozitív egész szám mindegyikét átírjuk hármas számrendszerbe. Hány palindrom szám van a kapott 2012 darab hármas számrendszerbeli szám között? (Palindrom számon olyan pozitív egész számot értünk, amelynek számjegyeit fordított sorrendben írva az eredeti számot kapjuk vissza.)

Kosztolányi József, Szeged

11. osztály

1. Határozzuk meg azokat a pozitív egész számpárokat, amelyek számtani közepe 1-gyel nagyobb a mértani közepüknél!

Kallós Béla, Nyíregyháza

2. Az ABC háromszögben H a BC oldal C-hez közelebbi harmadoló pontja, N pedig az AB oldal B-hez közelebbi negyedelő pontja. Az AH és CN szakaszok metszéspontja M.

a) Milyen arányban osztja az M pont az AH és CN szakaszokat?

b) Hányad része az ABC háromszög területének a $HMNB$ négyszög területe?

Katz Sándor, Bonyhád

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$3^{2x+1} - (x-1)\cdot 3^x = 10x^2 + 13x + 4$$

Bencze Mihály, Brassó

4. Az ABC háromszög AB oldalán vegyük fel a D pontot, AC oldalán pedig az E és F pontokat úgy, hogy $\frac{AE}{AC} = \frac{CF}{AC} = \frac{AD}{AB}$ teljesüljön! Az F ponton keresztül húzzunk párhuzamost az AB oldallal, messe ez a párhuzamos a BC oldalt a G pontban! Mely D, E, F pontok esetén lesz a $DEFG$ négyszög területe a lehető legnagyobb?

Nemecskó István, Budapest

5. Mely n pozitív egész számok esetén osztható az $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n$ összeg 5-tel?

Oláh György, Révkomárom

6. Aladár és Béla a következő játékot játszszák: a táblára felírják az 1, 2, ..., 2012 számokat, melyek közül felváltva törölnek le egy-egy számot. Aladár kezd. A játék akkor ér véget, amikor két szám marad a táblán. Ha ezek különbségének abszolút értéke egy előre megadott rögzített pozitív egész k számnál nagyobb prímszám, akkor Béla nyer, egyébként pedig Aladár nyer. Döntsük el, hogy k értékétől függően melyik játékosnak van nyerő stratégiája!

Borbély József, Tata

12. osztály

1. A tízes számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan néggyel osztható számot választunk, melynek jegyei páronként különbözőek?

Tarcsay Tamás, Szeged

2. Határozzuk meg a

$$\sqrt{2012}\cdot x^{\log_{2012} x} = x^2$$

egyenlet megoldásai szorzata egészrészének utolsó öt számjegyét!

Kántor Sándorné, Debrecen

3. Mutassuk meg, hogy

$$\sin^{2010}x + \cos^{2011}x + \sin^{2012}x \le 2$$

bármely valós x esetén!

Katz Sándor, Bonyhád

4. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$, az AB alap felezőpontja D, az A és a D pontból a BC szakaszra bocsátott merőlegesek talppontja rendre a BC szakasz E, illetve F belső pontja. A DF szakasz G felezőpontját a C ponttal összekötő szakasz és az AF szakasz metszéspontja H. Bocsássunk merőlegeseket a D pontból az AE és az AF egyenesekre, a merőlegesek talppontjai legyenek rendre K és L! Bizonyítsuk be, hogy az AF, EH és KL egyenesek az ABC háromszöghöz hasonló háromszöget zárnak közre!

Bíró Bálint, Eger

5. A, B, C véges halmazok, amelyekre teljesül, hogy $|A| = |B| = |C| = a$ és $|A \cap B \cap C| = b$, ahol a és b nemnegatív egészek. Adjuk meg a és b függvényeként az $|A \cup B \cup C|$ minimumát és maximumát! ($|X|$ az X halmaz elemeinek számát jelöli.)

Gecse Frigyes, Kisvárda

6. Legyen $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ és

$$\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}\cdot(a_k + a_{k+1} + a_{k+2})}$$

($n \ge 1$ egész)

Adjuk meg a_n-t zárt formában, azaz n függvényeként!

Bencze Mihály, Brassó

Jelentés a 2012. évi Beke Manó Emlékdíjak odaítéléséről

A 2012. évi Beke Manó Emlékdíj bizottság körültekintő mérlegelés után az alábbi határozatot hozta:

A Beke Manó díj második fokozatában részesül
Csatár Katalin

Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen kitüntetéssel szerzett matematika-fizika szakos tanári diplomát, majd az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában kezdett el tanítani, ahol azóta is dolgozik. Tudását, emberségét és korrekt ítéleteit kollégái is elismerik és elfogadják, ezért bizalmukat élvezve 1979-2003 között a 12 tagú matematika munkaközösség vezetője volt. Szakmai munkáját az igényesség, a pontosság és a sokszínűség jellemzi. A matematikát úgy tudja oktatni, hogy az a gyerekeknek élményt nyújtson, a kevésbé tehetségesek figyelmét is felkeltse.

Kiváló diákokat nevelt, akik a tanulmányi versenyeken szép eredményeket értek el, többek között az OKTV-n az Arany Dániel, a Kalmár László és a Zrínyi Ilona versenyeken, s a felvételi vizsgákon kivétel nélkül sikeresen szerepeltek.

A Radnóti Miklós Gyakorlóiskola tehetségnevelést biztosító matematika tantervének egyik kidolgozója. Több tankönyvcsalád szerzője és szerkesztője, kollégáival és tanítványaival együtt írták meg a nyolc évfolyamos gimnázium tankönyveit, kidolgozták a Suli Nova kiadásában megjelent középiskolai tankönyveket. Jelenleg az Apáczai Kiadó által gondozott gimnáziumi tankönyvcsalád utolsó kötetén dolgoznak.

Éveken keresztül oktatóként dolgozott a felsőoktatásban magyar és angol nyelven. Szakmai tanácskozásoknak, konferenciáknak, tanári ankétoknak meghatározó személyisége.

Tankönyv- és tantervíróként országosan ismert szakmai körökben, továbbképzéseket is tart. Publikációival a matematika népszerűsítését szolgálja.

Érettségi elnökként, majd később közoktatási szakértőként sok iskola munkájának részese. A tanulmányi versenyek versenybizottságában az országos feladatokból is kiveszi részét. Munkássága komoly hatással van a magyar matematikaoktatás módszertanára.

Sok tanítványa lett matematikatanár.

2002-ben Graphisoft és 2007-ben Ericsson díjjal is jutalmazták.

A Beke Manó díj második fokozatában részesül
dr. Kiss Géza

Pályafutását a Kunhegyesi Gimnázium és Híradástechnikai Szakközépiskolában kezdte, a kisújszállási Móricz Zsigmond Gimnázium és Közgazdasági Szakközépiskolában folytatta, ahol igazgatóként is tevékenykedett. 2003-tól az ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimnázium tanára volt. Jelenleg a Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium vezetőtanára, ahol különböző versenyek szervezésével motiválja a tanulókat.

Rendszeresen képzi magát, Phd fokozatát a Debreceni Egyetemen szerezte. Tanárként részt vesz a Matematika Tanítása folyóirat feladatmegoldó rovatának versenyében. Hosszú időn át vett részt a Matematika OKTV III. bizottságának munkájában, érdekes feladatjavaslatai rendszeresen kitűzésre kerültek. Több előadást tartott a matematika tanárok Rátz László Vándorgyűlésén. Rendszeres előadója a Rév-Komáromban rendezett Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozónak, a Nagykanizsán kétévente megrendezett konferenciának, és a zalai nyári táborokon foglalkozásokat vezet. Az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó iskolában is tanít.

2007-től a KöMaL felügyelőbizottságának, majd később szerkesztőbizottságának tagja.

Diákjainak eredményei kimagaslóak és nem egyetlen iskolához köthetőek; rendszeresen szerepelnek az Arany Dániel és az OKTV díjazottjai illetve első 10 helyezettje között.

Több tudományos publikációja jelent meg angolul és magyarul a Frobeniusz problémáról. 2011-től a Magyar Matematikai Tehetségsegítő Tanács elnöke.

1992-ben Kiváló Munkáért díjjal, 2006-ban Graphisoft díjjal jutalmazták munkásságáért.

A Beke Manó díj második fokozatában részesül
Nagy Tibor

Szegeden, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán szerzett matematika - számítástechnika - technika szakos tanári diplomát, majd a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen végezte el a középiskolai számítástechnika tanári szakot is. A kecskeméti Zrínyi Ilona Általános Iskolában kezdte el tanári pályáját, majd a Kodály Zoltán Általános Iskola, Gimnázium és Zeneművészeti Szakközépiskola informatika tanára lett. 2003-tól a Kecskeméti Református Általános Iskolában tanít matematikát.

Munkáját nagy odaadással, szakmai hozzáértéssel végzi. Évek óta a kecskeméti városi matematika szakkör vezetője. Tanítványai rendszeres résztvevői a Varga Tamás, Zrínyi Ilona, Kenguru, Bátaszéki matematika versenyeknek, ahol többször végeztek az első három hely valamelyikén. Több tanítványa eredményesen vett részt az Abacus matematikai lapok pontversenyén.

Már főiskolás korában bekapcsolódott az akkor induló Zrínyi Ilona Matematikaverseny szervezésébe. Az országos forduló szervezését segíti, 1993-tól a verseny feladatsorának egyik összeállítója. 1994-től a verseny után minden évben megjelenő feladatgyűjtemény szerzője és szerkesztője. A Gordiusz verseny megyei bizottság elnöke és szervezi az országos döntőt.

2000-től a Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány Kuratóriumának tagja. Kezdetektől aktívan részt vesz az Abacus matematikai lapok szerkesztésében. Az idei tanévtől a Varga Tamás Matematikaverseny szervezőbizottságának elnöke. Kezdeményezője és több kötet társszerzője volt a 2005-ben elindított Kecskeméti Matematikai Füzetek könyvsorozatnak.

Rendszeres látogatója a Rátz László vándorgyűlésnek, 2010-ben a kecskeméti Vándorgyűlés szervezésében komoly részt vállalt. A tanárok versenyében az általános iskolai kategória háromszoros győztese.

2007-ben Ericsson díjban részesült.

A Beke Manó díj második fokozatában részesül
Németh Julianna

1982 óta az Áldás Utcai Általános Iskola tanítója. Dinamikus, határozott egyénisége pozitívan hat az alsó tagozatos munkaközösség munkájára. Az iskolai pedagógiai munkában a tervezéstől a feladatok megvalósításáig minden szinten aktív résztvevő. Komoly hivatástudattal és szeretettel foglalkozik tanítványaival.

2000-től a Tanítóképző Főiskola szakvezető tanára. Rendszeresen szervezi a csoport előtti tanítási és a 10 hetes gyakorlatokat. A főiskola felkérésére 3. éve részt vesz a hallgatók államvizsgáztatásában.

2009-ben elnyerte a „kiváló szakvezető” elismerést.

A tehetséggondozásban és versenyeztetésben is aktív szerepet vállal, diákjai különböző tantárgyakhoz kapcsolódó versenyeken érnek el kiemelkedő eredményeket. Pl. vers- és prózamondó verseny, fővárosi mesemondó verseny, a Bolyai magyar és matematika csapatverseny területi fordulója, Zrínyi Ilona Matematikaverseny országos fordulója.

2004 óta kerületi munkaközösség vezető. Egyéni ötletei, módszertani javaslatai felfrissítették a kerület szakmai életét. Nagyon jó kapcsolatot alakított ki a kerületi PSZK-val, akik minden évben elismerően nyilatkoznak munkájáról. Második éve a tehetség-tanács aktív tagja. 2007-ben az iskola javaslatára polgármesteri dicséretben részesült.

A Beke Manó díj második fokozatában részesül
Polcz Katalin

1973-tól 1994-ig a Pécsi Nagy Lajos Gimnáziumban (ma Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma), 1994-től 1997-ig az Apáczai Nevelési Központban, 1997-től a Janus Pannonius Gimnáziumban tanít matematikát.

39 éves pályafutását igényes és magas szakmai színvonal, lelkiismeretesség, precizitás, az új dolgok iránti fogékonyság jellemzi. Középiskolai

tanárként sokat tett a tehetséges tanulók fejlesztéséért, versenyeztetéséért. Tagja volt annak a csoportnak, amely Magyarországon elindította és éveken keresztül szervezte a Gordiusz Matematika Versenyt. Nemcsak szervezőként, hanem feladatkitűzőként és lektorként is részt vett a munkában.

Kollégáival és tanítványaival jó a kapcsolata, segítőkész, ezért szakmai témában sokszor kérnek tőle tanácsot.

A matematika tagozatos osztály osztályfőnökeként komoly mentori munkát végzett. Nemcsak a tehetséges, de az átlagos képességű tanulókkal is képes megszerettetni tantárgyát.

Tanítványai rendszeresen szerepeltek a KöMaL feladatmegoldó versenyén, valamint országos és megyei matematika versenyeken sokszor az élmezőnyben végeztek. Kiemelkedő eredményeket értek el az Arany Dániel, a Gordiusz, a Kenguru, a Zrínyi Ilona országos, a Baranya-Tolna–Somogy területi, illetve a Fejér Lipót, és Zipernowsky megyei matematikaversenyeken.

2000-ben Ericsson díjban részesült.

A Beke Manó díj második fokozatában részesül
Szabó Matúz Magdolna

Az Újvidéki Egyetem Természettudományi Matematikai Karán matematikus diplomát szerzett.

Pályafutását a Zentai Műszaki Középiskolában kezdte, a Szabadkai Matematikai és Nyelvi Gimnáziumban folytatta, végül a Szabadkai Szvetozár Márkovity Gimnáziumban tevékenykedett nyugdíjazásáig. Több diákja is eljutott az Országos Matematikaversenyre, s ott jó helyezést ért el.

Egyik alapítója és elnökségi tagja volt az Észak-bácskai Magyar Pedagógus Egyesületnek. Az egyesület keretein belül működő Cofman Judit Tehetségfejlesztő Központnak fő szervezője, amit 2011-ben a Nemzeti Tehetségsegítő Tanács Akkreditált Kiváló Tehetségponttá nyilvánított.

A kezdetektől egyik szervezője a szabadkai Nyári Akadémia néven ismertté vált tanítói és tanári továbbképzésnek.

A Nemzetközi Magyar Matematikaversenyek állandó résztvevője és délvidéki régióvezetője.

Ösztönzően és kreatívan hatott a 2004-ben először megrendezett Fekete Mihály Emlékversenyre, amely a vajdasági magyar ajkú középiskolás tanulók válogatóversenye a NMMV-re. A versenynek azóta is szervezője.

Nyugdíjasként napjainkig a zentai Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium tanára. Több mint 20 éve rendszeres látogatója a Rátz László Vándorgyűlésnek, s azóta sok más fiatal és idősebb kollégát is ösztönzött a Vándorgyűlés látogatásának fontosságára.

A Beke Manó díj második fokozatában részesül
Szamosfalvy Jánosné

1991-től a Herman Ottó Gimnázium tanára, 1995-től nyugdíjba vonulásáig pedig a gimnázium első számú vezetője volt. Vezetői munkájában a demokratikus, kollegiális stílust képviselte.

Megyei szakfelügyelőként és szaktanácsadóként sok éven át segítette a középiskolák matematika tanárait. OKTV bizottsági tagként versenyek feladatlapjait állította össze, és javította a középdöntők és a döntők dolgozatait. Országos alkotó munkaközösség vezetőjeként NAT-kompatibilis matematika tantervet készített a középiskolák számára. 2004-ig szakértőként sok országos mérés mérőlapjainak elkészítésében és értékelésében vett részt. Háromfős bizottság tagjaként központi írásbeli feladatsorokat készített a nyolc évfolyamos gimnáziumba jelentkezők mérésére, 2005 és 2007 között ezek lektorálását végezte az OKÉV felkérésére.

A Miskolci Egyetem Matematika Tanszékének támogatásával tehetséges tanulók önképzőkörét vezette, felkészítette őket nemzetközi konferenciákra.

A Bolyai János Matematika Társulat megyei tagozatának alelnökeként Európai Matematika Kongresszusokat szervezett. Minőségbiztosítási szakértőként miskolci iskolákban koordinálta partnerközpontú működés kialakítását. A miskolci Szakértők Regionális Egyesületének alelnöke. A Borsodi tagozat Oktatási Bizottságának elnökeként Ifjúsági Matematikai Kongresszusokat szervez. A 2001. évi miskolci Rátz László Vándorgyűlés szervezésében komoly szerepet vállalt.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2012. november 30.

Feladatok (445–449.)

445. Egy szabályos oktaéder mindegyik csúcsában van egy hangya. Egy adott pillanatban mindegyik hangya – egymástól függetlenül, azonos sebességgel – elindul egy, az eredeti helyéről kifutó él mentén egy szomszédos csúcsba. Mindegyik hangya egyenlő valószínűséggel választja a csúcsából kiinduló négy él valamelyikét. Mi annak a valószínűsége, hogy egyik csúcsba sem érkezik kettő vagy több hangya?

446. Az A, B, C, D és E pontok úgy helyezkednek el a térben, hogy teljesülnek a következő feltételek:
(1) $AB = BC = CD = DE = EA = 2$;
(2) $ABC\sphericalangle = CDE\sphericalangle = DEA\sphericalangle = 90°$;
(3) az ABC háromszög síkja párhuzamos a DE egyenessel.
Mekkora a BDE háromszög területe?

447. A természetes számok (a 0-t is beleértve) növekvő sorozatából elhagyjuk azokat a számokat, amelyeknek tízes számrendszerbeli alakja tartalmazza a 3, 6, 9 számjegyek valamelyikét. Melyik az így kapott sorozat 587-dik tagja?

448. Jelölje $H[x]$ azon x határozatlanú 11-ed fokú polinomok halmazát, amelyek együtthatói a $\{-1; 1\}$ halmaz elemei. Melyek azok a $H[x]$-beli polinomok, amelyeknek az 1 a legnagyobb multiplicitású gyöke?

Dályay Pál Péter, Szeged

449. Az a_1, a_2, ..., a_n és a pozitív egész számok úgy, hogy $\sum_{i=1}^{n} a_i < a$. Igazoljuk, hogy ha $b = \max_{1 \le i \le n} a_i$, akkor

$$\sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a}{k} \prod_{i=1}^{n} \binom{a-k}{a_i} = 0.$$

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (430–434. feladatok)

430. Marci 96 darab, különböző országokban használatos pénzérmét gyűjtött össze egy dobozba. Azt tapasztalta, hogy akármelyik 11 érmét is veszi ki a dobozból, mindig van legalább 3 olyan érme, amelyek ugyanannak az országnak a pénzérméi. Igaz-e, hogy Marci érméi között van legalább 20 darab olyan, amelyek ugyanabban az országban használatosak?

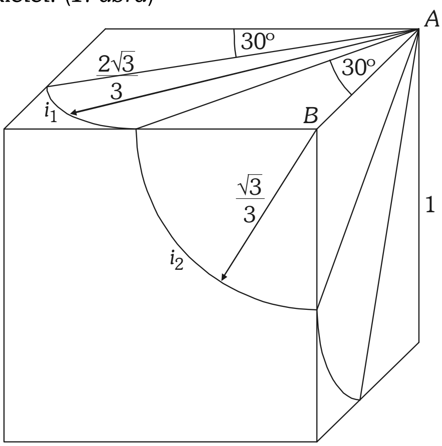
Megoldás: A feladat kérdésére a válasz: igaz. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy Marci érméi között legfeljebb 19 darab, egy országból való érme van. Mivel $5 \cdot 19 = 95$, ezért feltételezésünk következményeként Marci érméi legalább 6 országból valók. Ekkor viszont ki lehet választani 11 érmét úgy, hogy közöttük ne legyen 3 darab, ugyanabban az országban használatos érme, például $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 11$. Ez ellentmond a feladat feltételének, ami állításunkat bizonyítja.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 6.

431. Adott egy egységnyi élű kocka, és az egyik csúcsa mint középpont köré írt $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ sugarú gömb. Milyen hosszú az a görbe, amelyben a gömbfelület metszi a kocka felületét?

Megoldás: A középpont csúcsot tartalmazó három oldallapon egy-egy 30°-os, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ sugarú körívben, a másik három lapon egy-egy $\frac{\sqrt{3}}{3}$ sugarú negyed körben metszi a gömb a kocka felületét. (*1. ábra*)



1. ábra

Mivel

$$i_1 = \frac{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

és

$$i_2 = \frac{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi,$$

ezért a kocka felületéből kimetszett ív hossza

$$i = 3 \cdot (i_1 + i_2) = \frac{5\sqrt{3}}{6}\pi.$$

Rakonczai György, Budapest

A megoldók száma: 6.

432. Legyen f a valós számok halmazán értelmezett, 2π szerint periodikus függvény. Mutassuk meg, hogy vannak olyan, a valós számok halmazán értelmezett f_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ függvények, amelyekre teljesül, hogy

(1) f_i π szerint periodikus, páros függvény $(i = 1, 2, 3, 4)$;

(2) $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \cdot \cos x + f_3(x) \cdot \sin x + f_4(x) \cdot \sin 2x$ bármely valós x esetén.

Megoldás: Tekintsük (2)-t rendre az x, $-x$, $x + \pi$, $-x + \pi$ helyeken. A trigonometrikus függvények periodicitását és paritási tulajdonságait, valamint az (1) feltételt figyelembe véve az f_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ függvényekre a következő egyenletrendszert kapjuk:

(*a*) $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \cdot \cos x + f_3(x) \cdot \sin x + f_4(x) \cdot \sin 2x$

(*b*) $f(-x) = f_1(x) + f_2(x) \cdot \cos x - f_3(x) \cdot \sin x - f_4(x) \cdot \sin 2x$

(*c*) $f(x + \pi) = f_1(x) - f_2(x) \cdot \cos x - f_3(x) \cdot \sin x + f_4(x) \cdot \sin 2x$

(*d*) $f(-x + \pi) = f_1(x) - f_2(x) \cdot \cos x + f_3(x) \cdot \sin x - f_4(x) \cdot \sin 2x$

(*a*) + (*b*):

$$f(x) + f(-x) = 2f_1(x) + 2f_2(x) \cdot \cos x \qquad (*)$$

(*c*) + (*d*):

$$f(x + \pi) + f(-x + \pi) = 2f_1(x) - 2f_2(x) \cdot \cos x \qquad (**)$$

A (*) és (**) egyenletek összegéből rendezés után kapjuk:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x+\pi) + f(-x+\pi)}{4}.$$

(*) és (**) különbségéből

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) + f(-x) - f(x+\pi) - f(-x+\pi)}{4\cos x}, & \text{ha } x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ a, & \text{ha } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

(*a*) + (*c*):

$$f(x) + f(x + \pi) = 2f_1(x) + 2f_4(x) \cdot \sin 2x$$

Ebbe az egyenletbe $f_1(x)$-et helyettesítve, majd rendezve kapjuk, hogy

$$f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(-x) + f(x+\pi) - f(-x+\pi)}{4\sin 2x}, & \text{ha } x \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \\ c, & \text{ha } x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ d, & \text{ha } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

(*a*) + (*d*):

$$f(x) + f(-x + \pi) = 2f_1(x) + 2f_3(x) \cdot \sin x$$

$f_1(x)$ behelyettesítése, majd rendezés után:

$$f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(-x) - f(x+\pi) + f(-x+\pi)}{4\sin x}, & \text{ha } x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ b, & \text{ha } x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Azt kaptuk, hogy ha léteznek megfelelő f_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ függvények, akkor azok ilyen alakúak. A továbbiakban belátjuk, hogy ha f 2π szerint periodikus függvény, akkor az f_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ függvények π szerint periodikus, páros függvények.

Az f 2π szerinti periodicitása, valamint a szinusz és koszinusz függvény tulajdonságai alapján könnyen adódik, hogy $f_i(x + \pi) = f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Mivel az $x \mapsto \cos x$ függvény páros, az $x \mapsto \sin x$ és az $x \mapsto \sin 2x$ függvények pedig páratlanok, valamint $f(-x+\pi)=f(-x-\pi)$ és $f(x-\pi)=f(x+\pi)$, ezért $f_i(-x)=f_i(x)$ ($i=1, 2, 3, 4$) bármely valós x esetén.

Egyszerű számolással adódik az is, hogy az f_i ($i=1, 2, 3, 4$) függvények „problémás” helyein $\left(x=k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right)$ is teljesül a feladatbeli (2) feltétel.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 5.

433. Igazoljuk, hogy ha egy háromszög oldalainak hossza a, b, c, területe pedig T, akkor tetszőleges x, y, z pozitív valós számok esetén fennáll az

$$a^2x+b^2y+c^2z\ge 4T\cdot\sqrt[4]{3xyz(x+y+z)}$$

egyenlőtlenség. Mikor áll fenn egyenlőség?

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Jelölje $\Delta(a, b, c, t)$ azt a háromszöget, melynek oldalai a, b, c hosszúak és területe t. Előbb belátunk egy lemmát (*Neuberg-Pedoe-féle tétel*):

Az $\Delta(a, b, c, t)$ és $\Delta(A, B, C, T)$ háromszögekre érvényes a

$$(-a^2+b^2+c^2)A^2+(a^2-b^2+c^2)B^2+\\+(a^2+b^2-c^2)C^2\ge 16tT$$

egyenlőtlenség, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a két háromszög hasonló.

Bizonyítás: Az első háromszög c-vel szemközti szöge γ, a második háromszög C-vel szemközti szöge Γ. Ekkor $a^2+b^2-c^2=2ab\cos\gamma$, $A^2+B^2-C^2=2AB\cos\Gamma$, $t=\frac{ab\sin\gamma}{2}$, $T=\frac{AB\sin\Gamma}{2}$.

Ezzel

$$(-a^2+b^2+c^2)A^2+(a^2-b^2+c^2)B^2+\\+(a^2+b^2-c^2)C^2-16tT=2a^2B^2+2A^2b^2-\\-(a^2+b^2-c^2)(A^2+B^2-C^2)-16tT=\\=2a^2B^2+2A^2b^2-4abAB\cos\gamma\cos\Gamma-\\-4abAB\sin\gamma\sin\Gamma=2(ab-AB)^2+\\+4abAB(1-\cos(\gamma-\Gamma))\ge 0.$$

A fenti gondolatmenetből következik az is, hogy egyenlőség csak a két háromszög hasonlósága esetén áll fenn. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Legyenek x, y, z tetszőleges pozitív egész számok. A $\sqrt{\frac{x+y}{2}}$, $\sqrt{\frac{y+z}{2}}$, $\sqrt{\frac{z+x}{2}}$ számok teljesítik a háromszög-egyenlőtlenséget, ugyanis

$$\left(\sqrt{\frac{r+s}{2}}+\sqrt{\frac{s+t}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{r+t}{2}+s+2\cdot\sqrt{\frac{r+s}{2}}\cdot\sqrt{\frac{s+t}{2}}>\left(\sqrt{\frac{r+t}{2}}\right)^2.$$

Alkalmazzuk a lemmát a következő két háromszögre: $\Delta(a,b,c,t)$; $\Delta\left(\sqrt{\frac{x+y}{2}},\ \sqrt{\frac{y+z}{2}},\ \sqrt{\frac{z+x}{2}},\ t\right)$.

A második háromszögre a Héron-képlet kifejtett alakja (lásd pl. Reiman István: Geometria és határterületei, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., Kisújszállás, 1999, 72. oldal):

$$t^2=\frac{1}{16}\cdot\left(2\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}+2\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\right)+\\+\frac{1}{16}\cdot\left(2\cdot\frac{z+x}{2}\cdot\frac{x+y}{2}-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2-\left(\frac{z+x}{2}\right)^2\right)=\\=\frac{1}{16}\cdot(xy+yz+zx),$$

azaz $t=\frac{\sqrt{xy+yz+zx}}{4}$.

A lemma miatt

$$(-a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{y+z}{2}+(a^2-b^2+c^2)\cdot\frac{z+x}{2}+\\+(a^2+b^2-c^2)\cdot\frac{x+y}{2}=\\=a^2x+b^2y+c^2z\ge 16tT=4T\cdot\sqrt{xy+yz+zx}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$xy+yz+zx\ge\sqrt{3xyz(x+y+z)}.$$

Induljunk ki az

$$(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2\ge 0$$

egyenlőtlenségből, ahol egyenlőség pontosan akkor érvényes, ha $x=y=z$. Négyzetre emelés és átrendezés után

$$3x^2yz+3xy^2z+3xyz^2\le x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+\\+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2,$$

azaz

$$3xyz(x+y+z)\le(xy+yz+zx)^2.$$

A fentiekből következik a feladatbeli egyenlőtlenség, és látható az is, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a=b=c$ és $x=y=z$.

Borbély József, Tata
Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 2.

434. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n pozitív egész szám és $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2^n}\right[$ esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos^n(2^{i-1}\alpha)}{1-\cos^n(2^{i-1}\alpha)} \geq \frac{n \cdot \sin(2^n\alpha)}{2^n \cdot \sin\alpha - \sin(2^n\alpha)}.$$

Dálvay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Mivel tetszőleges pozitív egész n esetén $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2^n}\right[$, ezért $\sin(2^i\alpha)$ és $\cos(2^{i-1}\alpha)$ pozitív bármely $i \in \{1; 2; ...; n\}$ esetén.
Előbb egy azonosságot látunk be.

1. állítás:

$$\frac{n\sin(2^n\alpha)}{2^n\sin\alpha - \sin(2^n\alpha)} =$$

$$= \frac{n\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^{n-1}\alpha)}{1-\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^{n-1}\alpha)}.$$

Bizonyítás: Átalakításokkal a bizonyítandó azonosság a következő alakban írható:

$$\sin(2^n\alpha) = 2^n \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^{n-1}\alpha) \qquad (*)$$

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.
$n = 1$ esetén a jól ismert addíciós összefüggést kapjuk.
Tegyük fel, hogy n-ig igaz az állítás és vizsgáljuk $(n + 1)$-re.

$$\sin(2^{n+1}\alpha) = \sin(2 \cdot 2^n\alpha) = 2\sin(2^n\alpha)\cos(2^n\alpha) =$$
$$= 2 \cdot 2^n \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^{n-1}\alpha) \cdot \cos(2^n\alpha) =$$
$$= 2^{n+1} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^n\alpha)$$

Ezzel az 1. állítást bebizonyítottuk.
A feladatbeli egyenlőtlenség a most bizonyított állítás alapján a következő alakban írható:

$$\frac{\cos^n\alpha}{1-\cos^n\alpha} + \frac{\cos^n 2\alpha}{1-\cos^n 2\alpha} + \ldots + \frac{\cos^n(2^{n-1}\alpha)}{1-\cos^n(2^{n-1}\alpha)} \geq$$
$$\geq \frac{n\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^{n-1}\alpha)}{1-\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^{n-1}\alpha)}.$$

Legyen $x_i = \cos(2^{i-1}\alpha)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. A megoldás elején tett megjegyzés alapján világos, hogy $0 < x_i < 1$. Ezzel a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$\frac{x_1^n}{1-x_1^n} + \frac{x_2^n}{1-x_2^n} + \ldots + \frac{x_n^n}{1-x_n^n} \geq \frac{nx_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{1-x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Alkalmazzuk a bal oldal pozitív tagú összegére a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{x_1^n}{1-x_1^n} + \frac{x_2^n}{1-x_2^n} + \ldots + \frac{x_n^n}{1-x_n^n} \geq$$
$$\geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1^n x_2^n \ldots x_n^n}{(1-x_1^n)(1-x_2^n)\ldots(1-x_n^n)}} =$$
$$= \frac{nx_1x_2\ldots x_n}{\sqrt[n]{(1-x_1^n)(1-x_2^n)\ldots(1-x_n^n)}}. \qquad (**)$$

2. állítás: Ha $0 < a_i < 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$, akkor

$$\sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)} \leq 1 - \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Bizonyítás: Írjuk fel a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget egyrészt az $(1 - a_i)$, másrészt az a_i pozitív számokra $(i = 1, 2, ..., n)$:

$$(1 - a_1) + (1 - a_2) + \ldots + (1 - a_n) \geq$$
$$\geq n \cdot \sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)},$$

illetve

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Adjuk össze a két egyenlőtlenség megfelelő oldalait:

$$n \geq n \cdot \sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)} + n \cdot \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Mindkét oldalt n-nel osztva, majd rendezve a 2. állítás egyenlőtlenségét kapjuk.
Alkalmazzuk a 2. állítást (**) jobb oldalának nevezőjére $(a_i = x_i^n)$:

$$\frac{nx_1x_2\ldots x_n}{\sqrt[n]{(1-x_1^n)(1-x_2^n)\ldots(1-x_n^n)}} \geq \frac{nx_1x_2\ldots x_n}{1-x_1x_2\ldots x_n}.$$

Ezzel az eredeti egyenlőtlenséget bizonyítottuk.

Velkeyné Gréczi Alice, Ipolyszög

A megoldók száma: 6.

A megoldók névsora: Borbély József, Tata (430–434.); Dálvay Pál Péter, Szeged (430–434.); Nagy Sándor, Békéscsaba (430., 431., 434.); Rakonczai György, Budapest (431., 432., 434.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (430–432., 434.); Velkeyné Gréczi Alice, Ipolyszög (430., 432., 434.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (430., 431.).