A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Mivel is kezdjünk? Témaindító feladatokról a „tört szorzása törttel” anyagrész kapcsán

(Ambrus Gabriella – Anke Wagner)

A középiskolai geometriaoktatásról a mérnök-képzés és tehetséggondozás szemüvegén keresztül

(Bölcskei Attila – Szoboszlai Mihály)

A páratlan tökéletes szám és osztóinak tulajdonságai I. Egy 2500 éves probléma

(Ringler András)

XX. ÉVFOLYAM 2012 2

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó:
Török Zoltán
Tördelőszerkesztő:
Kovács Attila
Borítóterv:
Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 1800 Ft
Megjelenik évente 4 alkalommal.
A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltban: Budapest VIII., Üllői út 70.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat e-mailen a kattila@mozaik.info.hu címre küldjék meg. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön fájlokban is kérjük mellékelni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat.

Ambrus Gabriella – Anke Wagner

Mivel is kezdjünk? Témaindító feladatokról a „tört szorzása törttel" anyagrész kapcsán

Bevezetés

A „tört szorzása törttel" egyike azoknak a fejezeteknek, amelyek előtt a tanárnak külön is érdemes elgondolkodni azon, milyen feladattal indítson, hogy a gyerekekben a téma iránt érdeklődést keltsen, vagy legalábbis elegendő kedvet ébresszen a további munkához. Az érdeklődés a tanulásnál, illetve a tanultak későbbi alkalmazásánál igen fontos szerepet játszik (*Renkl,* 1996, 80. o.). Érdeklődés hiányában úgy tűnik a tanultak hamar feledésbe merülnek, a továbbiakban nem kerülnek felhasználásra.

A tanulmányban különböző bevezetési lehetőségeket tárgyalunk azzal a céllal, hogy egyrészt megmutassuk, milyen „irányokban„ lehet gondolkodni, másrészt számbavesszük azokat a szempontokat, amelyeket jó bevezető feladatok készítése során érdemes figyelembe venni. A német matematika-didaktikai irodalom a következő lehetőségeket említi a bevezető, illetve problémafelvető feladatok motiváló szerepének növelése esetében (*Barzel* et. al., 2011):

Kognitív konfliktus teremtése, kép, ábra, modell stb. bemutatása, kísérlet, tevékenység, játék elvégzése, egy történet elmesélése, célzott házi feladatok adása, mintapéldák megfelelő feldolgozása.

A továbbiakban a törtek szorzásával kapcsolatban a következő típusú matematikai bevezető feladatokra mutatunk példát:

- Bevezetés matematikán belüli kapcsolatokkal (geometria/algebra/mértékek)
- Nyelvi-értelmező bevezetés (valahányadrész megadása)
- Tevékenység-orientált bevezetés
- Bevezetés valóságközeli feladattal
- Bevezetés történettel
- Megoldás-orientált (direkt) bevezetés

Témánkat a probléma-orientált tanítási módszer alapján dolgozzuk fel (vö. *Bruder/Collet,* 2011, *Pólya,* 1977, valamint a Varga Tamás módszere szerint készült *Eglesz I.–Kovács Cs.–Sztrókay V.,* Matematika 6, tankönyv, 1983), mivel ez felel meg leginkább didaktikai felfogásunknak.

A különböző bevezető problémák a „tört szorzása törttel„ témakört több oldalról közelítik. A további feladatvariációk példákat mutatnak arra, hogyan lehet az eredeti problémát könnyíteni/nehezíteni, esetleg új tartalmakat belevinni (pl. mértékegységeket, grafikus ábrázolást, ábrázolást koordinátarendszerben…). Ilyen módon is hangsúlyozni szeretnénk, hogy a bevezető feladatok tartalma variálható, és ebben az esetben figyelembe vehetőek a különböző tanítási célok és lehetőségek is.

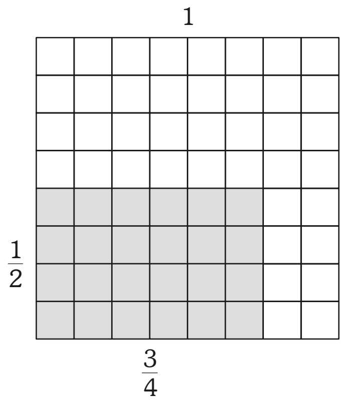
Arra is törekszünk, hogy az egyes új témákat feldolgozásuk során a bevezető feladatok segítségével a tanulók minél önállóbban fedezhessék fel, és eközben valódi matematikai tevékenységet végezzenek.

1. problémafelvetés

Bevezetés matematikán belüli kapcsolatokkal (geometria/algebra/mértékek)

Egy téglalap oldalai $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{4}$. Mekkora a téglalap területe?

Ennél a bevezetésnél a geometria az algebrával kapcsolódik össze. A megoldás során szükséges, hogy gondolatban a geometriai ábrázolás és egy oldalhossz valahányad része, illetve a keresett rész egész területhez viszonyított aránya között „ide-oda ugorjunk”. A megoldás történhet például úgy, hogy egy téglalapot egységnégyzetekkel rakunk ki. Ilyen módszert a gyerekek már alsó tagozaton is használtak. Ezután például a gyerekekkel közösen lehet elgondolkodni a következő irányban. Mi lenne, ha a téglalap egyik oldala 10 cm, a másik 12 cm? Hogyan nézne ki ebben az esetben a keresett terület? Mi lenne a helyzet egy négyzet esetében (8×8 cella)? Ekkor a cellák leszámolhatók, tehát az eredmény $\frac{24}{64} = \left(\frac{3}{8}\right)$.



1. ábra

1. variáció

Egy négyzet oldala $\frac{1}{3}$. Mekkora a területe?

2. variáció

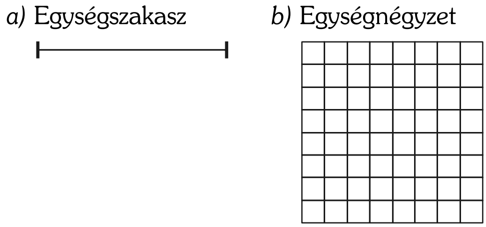
Hány kilométer egy $\frac{1}{4}$ km (1,5 km) hosszú szakasz harmadrésze?

Az 1. és 2. variációk alternatívák az 1. problémafelvetéshez, miközben láthatóan megmaradt a matematikán belüli kapcsolatok előbbi hangsúlya.

2. problémafelvetés

Nyelvi-értelmező bevezetés (valahányad rész megadása)

Mekkora az $\frac{1}{2}$-nek a $\frac{3}{4}$? Színezd be a megfelelő részt mindkét megadott ábrán!



2. ábra

Ennél a bevezetésnél a megnevezett rész kerül ábrázolásra: egy szakasz/egységnégyzet felének a $\frac{3}{4}$ részét kell kiszínezni. A két ábra segítségével meg lehet beszélni (értelmezni), hogy $\frac{1}{2}$-szer $\frac{3}{4}$ ugyanazt jelenti, mint $\frac{1}{2}$-nek a $\frac{3}{4}$ része.

A természetes számok szorzásánál 4-szer 5 nem jelenti azt, hogy 4 rész az 5-ből; a törttel való szorzásnak ez a jelentése nyilvánvalóan zavarhatja is a gyerekeket eleinte. Zech (1995) azt javasolja, hogy a valahányad rész számításánál példaként használjuk fel a következőt: ha egy futó két kört fut egy stadionban, akkor ez 2-szer 400 méter. Ha 3-at, akkor ez 3-szor 400 méter. Ha a futó $2\frac{1}{2}$ kört tesz meg, akkor ez nyilvánvalóan $2\frac{1}{2}$-szer 400 méter, és az összesen 1000 méter. Tehát van értelme annak, ha azt mondjuk, hogy $\frac{1}{2}$-szer 400 az éppen a 400 fele.

Variáció – Más számokkal

Mennyi $\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{4}$ része? Próbálj többféle megoldási módot megadni!

A feladatban szereplő számok megváltoztatása megkönnyíti további megoldási módok megadását, korábbi tapasztalatokra támaszkodva. Ezekkel a számokkal például a következőképpen gondolkodhatnak a tanulók:

– „Mivel egy egész szám $\frac{1}{4}$ részét megkaphatom úgy, hogy az egész számot megszorzom $\frac{1}{4}$-del, így az $\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{4}$ része

$\frac{1}{2}$-szer $\frac{1}{4}$. És azt már tudom, hogy $\frac{1}{2}$-szer $\frac{1}{4}$ az $\frac{1}{8}$."

– „$\frac{1}{2}$ egynegyed része azt jelenti, hogy $\frac{1}{2} : 4$, és az $\frac{1}{8}$."

3. problémafelvetés
Tevékenység-orientált bevezetés

Hajtogatás
Hajts félbe egy A3-as méretű papírt! Hajtsd szét, és színessel színezd be a felét, majd újra hajtsd össze! Ezután hajtsd még egyszer félbe a lapot!
Most hajtsd még egyszer félbe! Ezután hajtogasd teljesen szét a lapot és figyeld meg a jelölt részt! Írd le: mi történt?
Most színezd be a már kiszínezett rész felét egy másik színnel!
Ezután hajtsd megint össze a lapot, majd még egyszer félbe!
Hajtsd teljesen szét a lapot és figyeld az utóbb beszínezett részt! Írd le: mi történt?
A papírod segítségével próbáld megválaszolni a következő kérdéseket! Mekkora

- $\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{2}$ része?
- $\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{4}$ része?
- $\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{8}$ része?

Variáció – Téglalapok egymásra fektetése
(A tanulók rendelkezésére állnak különböző színű, átlátszó fóliából készült, egybevágó téglalapok. Például A, B, C sárgák és D, E, F zöldek ld. az alábbi ábrák.)
Helyezd C téglalapot D fölé! Mi történt? Írd le, mi változott!
Mit jelentenek a következő állítások?

$\frac{1}{4}$ fele $\frac{1}{8}$.

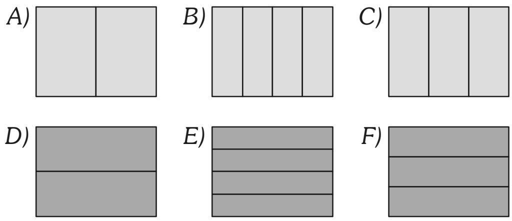
$\frac{1}{3}$ fele $\frac{1}{6}$.

Írd le gondolataidat!

Az átlátszó téglalapok segítségével ellenőrizd a következő állítások helyességét! Javítsd ki a hibákat!

- $\frac{1}{4}$-nek az $\frac{1}{4}$ része $\frac{1}{8}$.
- $\frac{1}{4}$-nek az $\frac{1}{2}$ része $\frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{2}$-nek a $\frac{3}{4}$ része $\frac{3}{8}$.

Helyezz most egymásra további téglalapokat és írj feladatot az egyes elhelyezésekhez! Indokold meg, hogyan jutott eszedbe a feladat az elhelyezés alapján!
Készíts hasonló módon téglalapokat átlátszó fóliára! Milyen szorzási feladatok fogalmazhatók meg a megfelelő téglalapokhoz? Miért?



3. ábra

A két tevékenység-orientált bevezetés lehetővé teszi, hogy a tanulók tevékenység és megfigyelés révén jussanak a megértéshez. Az egyes cselekvések során a gyerekeknek le kell írniuk, hogy mit csinálnak, milyen megfigyeléseket tesznek és milyen változások történnek.

4. problémafelvetés
Bevezetés valóságközeli feladattal

A Gustav-Schmoller-iskolában a hatodikosok hosszas tárgyalások után végre engedélyt kaptak arra, hogy egy kertet létesítsenek az udvaron. Természetesen a lehető legnagyobb területet szeretnék felhasználni ehhez és arra a kérdésükre, hogy mekkora rész áll rendelkezésükre az udvaron, a következő választ kapták:

„Legfeljebb az udvar $\frac{1}{8}$ részét használhatjátok kertnek."
Arra a kérdésre, hogy mekkora is az udvar, a következő információt kapják:

„Az iskola teljes alapterületének pontosan a $\frac{2}{3}$ *része udvar."*

A hatodikosok tanácstalanok, mivel még azt sem tudják kiszámítani, hogy az udvar hányad részét használhatják.

Kérésükre az iskolaigazgató a következő adattal segít:

„Az iskola alapterülete 2328 m^2*."*

Gondold végig, hogyan számolhatták ki a tervezett kert méretét a hatodikosok! Keress többféle megoldást!

Ennél a feladatnál a korábbi ismeretek alapján úgy járhatunk el, hogy először kiszámítjuk a 2328 m^2 $\frac{2}{3}$ részét (az udvar nagysága). Ez (2328-szor $\frac{2}{3}$) 1552 m^2. Ezután számítjuk a tervezett kert nagyságát, (1552-ször $\frac{1}{8}$), ami 194 m^2.

A számításból adódhat az a gondolat, hogy a feladat megoldása a következő módon is felírható: $\left(2328\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{8}=2328\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)$, ahol a második esetben a zárójelben a tervezett kert teljes alapterülethez viszonyított aránya található, és nyilvánvalóan mindkét számítás eredménye a keresett 194 m^2.

Ebből adódik $\frac{194}{2328}$ felírásával végül egyszerűsítés után, hogy a zárójeles szorzat eredménye $\frac{1}{12}$, azaz $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$, *és ezzel az eredménnyel* témánknak megfelelően tovább is tudunk dolgozni...

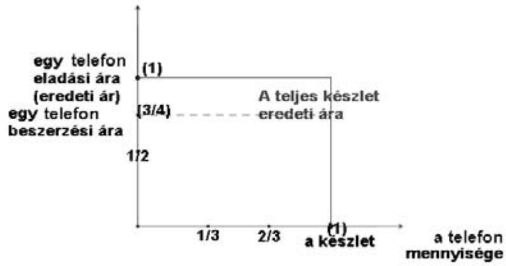
Ha szükséges, a tanulók készíthetnek vázlatot az iskola (elképzelt) alaprajzáról, amennyiben szükséges, ilyet készíthet a tanár is előre a feladathoz.

Variáció – Alternatív feladat

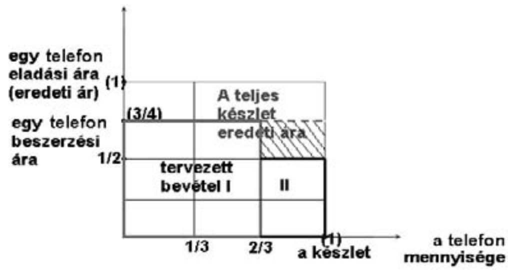
Egy marketingmenedzser az új telefon piacra kerülésével egyidejűleg azt a feladatot kapta, hogy a korábbi típus raktárkészletét számolja fel minél gazdaságosabban. Az új telefon beszerzési ára $\frac{2}{3}$ része az eladási árnak.

Abból a célból, hogy legalább a beszerzési ár megtérüljön (azaz ne legyen veszteség), a piaci lehetőségek ismeretében a menedzser a következő akciót javasolja: a készlet $\frac{2}{3}$ részét árusítsák ki az eladási ár $\frac{3}{4}$ részéért. Ezután a megmaradt készletet árulják a továbbiakban az eladási ár feléért.

Ezzel a stratégiával eléri-e célját a marketingmenedzser?



Ábra a tanulóknak



Megoldási lehetőség

4. ábra

Ebben a szituációban geometriai megjelenítést használtunk nem geometriai eszközzel való megoldáshoz. A telefonok árát téglalap segítségével jelenítettük meg.

Mivel nem várható el, hogy erre a gyerekek maguktól rájönnek, fontos a segítő rajzot is odaadni nekik a megoldáshoz.

Ennek segítségével végül megadható $\frac{2}{3}$-szor $\frac{3}{4}$, és ebből adódik $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ rész, azaz az akció

első részében az eredeti ár fele lesz a tervezett bevétel. A további akcióban a maradékot ($\frac{1}{3}$ „rész”) az ár feléért akarják eladni, és így nem teljesíthető a terv, ahogy az ábra is mutatja.
Egyes tanulók rögtön észreveszik, hogy a második akciónál általában az eredeti ár $\frac{3}{4}$ részénél kisebb árral nem érhető el a cél. Ezt a gondolatot akkor is fontos megbeszélni a tanulókkal, ha a megoldás során nem merült fel.

5. problémafelvetés
Bevezetés történettel

Izabella nagymamájától egy tábla csokoládét kapott ajándékba. Néhány kis szeletet meg is evett belőle rögtön – mert nagyon szereti. De a csokoládé $\frac{2}{3}$ része még megvolt, mielőtt elment a délutáni úszóedzésre. Ezt elindulás előtt még egyszer gondosan ellenőrizte is. Amikor hazaérkezett, azt kellett látnia, hogy öccse megette a maradék felét.
Mennyi csokoládét kell öccsének visszaadni?
- „Egy tábla ötödrészét kell visszaadnia.”
- „Egy tábla felénél többet kell visszaadnia.”
- „Egy tábla felénél kevesebbet kell visszaadnia.”
- „Pontosan egy tábla $\frac{1}{4}$ részét kell visszaadnia.”

Melyik válasz helyes az előbbi lehetőségek közül? Te mit válaszolnál?

Sok tanuló szereti a történeteket, különösen, ha ezeket érdekesen adják elő nekik.
Ez a bevezető feladat nem azt a célt szolgálja, hogy a tanulók a témához egy „beöltöztetett feladatot„ oldjanak meg, azaz a törtek szorzása egy kissé mesterkélt szituációban jelenjen meg, hanem azt, hogy talán el is mosolyodva a helyzeten, kedvet kapjanak a kérdések megválaszolásához.
A feladat végi kijelentéseket felolvashatjuk nekik, de akár írásban is megkaphatják.
Ennél a feladatnál különösen fontos a különböző megoldási utakat megbeszélni és összehasonlítani.

6. problémafelvetés
Megoldás-orientált (direkt) bevezetés

A hatodikos Jonathan a múlt órán tanult arról, hogyan lehet két törtet összeszorozni. Nézd meg, milyen megoldásai és ábrái vannak a füzetében! Próbáld megfogalmazni, hogyan számolt és magyarázd meg, milyen kapcsolatban állnak az ábrák a megoldásokkal!
Ahol szükséges, írd be a megoldásokat!

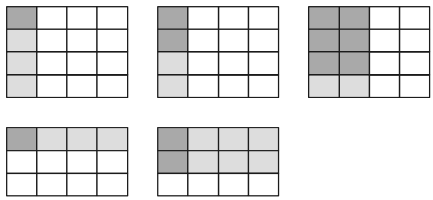
$\frac{1}{4}$-szer $\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$\frac{1}{2}$-szer $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\frac{3}{4}$-szer $\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\frac{1}{4}$-szer $\frac{1}{3} =$

$\frac{1}{5}$-ször $\frac{2}{3} =$



5. ábra

Az utolsó bevezető feladatban megoldási példákkal dolgozunk. A feladatok és az ábrák segítségével a tanulók önállóan fogalmazhatják meg a szabályt. Ez a bevezetés közvetlenül szabály megfogalmazásához vezet, míg a korábbiak ahhoz előkészítést adtak.

Gondolatok bevezető feladatok készítéséhez

Egyáltalán nem könnyű megfelelő, kellően problémaorientált bevezető feladatokat készíteni. Mindenekelőtt fontosak az eredeti ötletek, és ezek kidolgozásához nem kevés idő is szükséges esetenként.
A továbbiakban összegyűjtöttünk néhány szempontot, amelyek segíthetik a bevezető feladatok tervezését, illetve ezek iskolai felhasználását. Ez a gyűjtemény inkább elgondolkodásra szeretne késztetni, nem követ fontossági sorrendet és bizonyára nem is teljes...

Szempontok bevezető feladatok tervezéséhez	Szempontok bevezető feladatok alkalmazásához
• Megoldható-e a feladat az eddigi előismeretekkel, a korosztálynak megfelelő problémamegoldási stratégiákkal, és természetesen a józan ész segítségével? • Érdekes-e az adott feladat a tanulóknak? Esetleg izgalmas, vagy netán vidám a téma? • Megfelelő szintű-e a nehézségi fok? Eléggé gondolkodtató-e a feladat? • Lehetőséget ad-e a feladat arra, hogy a tanulók megvitassák a benne megfogalmazott kérdést? • Könnyen variálható-e a feladat? Például szükség esetén könnyíthető-e mondjuk a számok megfelelő változtatása révén, vagy ábra segítségével? • A feladattal megfelelően elérhető-e a kitűzött matematikai cél? • Milyen további feladatok szükségesek még a téma megfelelő kifejtéséhez? • Megfelelően változatos bevezető feladatokat készítek-e általában, vagy inkább ugyanolyan típusokat szeretek használni bevezetésként? • A bevezető feladatok lehetőséget adnak-e különféle ismeretek összekapcsolására? Előkerülnek-e ennek során a matematika különböző területei is? • Vannak-e olyan valós szituációk, amelyek az adott matematikai téma használhatóságát közvetlenül mutatják? ...	• A probléma megoldásához milyen külön segédanyagot kapnak a tanulók? • Milyen is legyen ez a segédanyag konkrétan? • Milyen előnye és hátránya van ezen anyagok használatának? • Mikor kapják ezeket az anyagokat a tanulók? (Mindjárt az elején, esetleg valamikor később...) • Milyen formában kapják a tanulók a feladatokat? Írásban? Képek, illetve ábrák segítségével? Szóban? Szövegesen magyarázó ábrákkal vagy anélkül? • Milyen segítséget kaphatnak a gyengébben teljesítők a feladatmegoldáshoz? ...

Az előbbiekben bemutatott bevezető feladatokból érdemes többet is bevetni ahhoz, hogy a törtek szorzásának vonatkozásai minél teljesebben kerüljenek tárgyalásra. A következőkben példaként megadunk két lehetséges feladatsor összeállítást.

I.
3. problémafelvetés
1. problémafelvetés
4. problémafelvetés, variáció

Utána: figyeld meg $\frac{1}{3}$-szor $\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

$\frac{1}{4}$-szer $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

$\frac{1}{3}$-szor $\frac{3}{4} = \frac{3}{12}$.

Hogyan számolnád ki például az $\frac{1}{3}$-szor $\frac{1}{5}$-öt? Miért?

És hogyan az $\frac{1}{3}$-szor $\frac{3}{2}$-et? Próbáld megfogalmazni a szabályt!

II.
6. problémafelvetés
1. problémafelvetés
2. problémafelvetés
4. problémafelvetés, variáció

Irodalom

[1] Barzel, B., Holzäpfel, L., Leuders, T. Streit C. (2011): Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren, Cornelsen Scriptor, Berlin.

[2] Bruder, R./Collet C. (2011): Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Cornelsen Scriptor.

[3] Eglesz I.–Kovács Cs.–Sztrókay V., (1983): Matematika 6, Tankönyvkiadó

[4] Pólya Gy. (1977): A gondolkodás iskolája, Gondolat Kiadó

[5] Renkl, A. (1996): Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird, in: Psychologische Rundschau, Hogrefe-Verlag, Göttingen, Heft 47, 78–92.

[6] Zech, F. (1995): Mathematik erklären und verstehen. Cornelsen. Berlin, 173.

Dr. Kántor Sándorné

A 2011/2012. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

A versenyről

A 2011/2012. tanévben 2011. november 16-án került megrendezésre a Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Verseny a DE Matematikai Intézete és a BJMT H-B megyei Tagozata közös szervezésében. A verseny szponzorai a DE Matematikai Intézete, Informatikai Kara és a Bolyai János Matematikai Társulat Hajdú-Bihar megyei Tagozata voltak.

A versenyre a város és a megye 25 középiskolája nevezett be, és összesen 1020 tanuló vett részt rajta. Az országos matematikaversenyek rendszeréhez hasonlóan, évfolyamonként három kategóriában értékeltük a tanulók dolgozatait : I. kategória, II. kategória és III. kategória (speciális matematika tagozat).

Az 5 feladatból álló feladatsor kidolgozására 3 óra állt a versenyzők rendelkezésére. A tanulók csak zsebszámológépet, vonalzót és körzőt használhattak segédeszközként. Egy-egy feladatsor összpontszáma minden esetben 60 pont volt. A tanulók a dolgozatot saját iskolájukban írták, és tanáraik javították ki, majd a legalább 30 pontos dolgozatokat, vagy ha ilyen nem volt, akkor az adott évfolyamról a legjobb iskolai dolgozatot továbbították a versenybizottsághoz.

177 dolgozat érkezett be 22 iskolából a következő megoszlásban: 9. évfolyam – 71 dolgozat, 10. évfolyam – 39 dolgozat, 11. évfolyam – 39 dolgozat, 12. évfolyam – 28 dolgozat.

Ebben a tanévben a feladatsorok közül legkönnyebbnek a 9. évfolyam, míg a legnehezebbnek a 12. évfolyam feladatsora bizonyult. Mindegyik sorozatban volt könnyebben és nehezebben megoldható feladat.

A versenybizottság jónak értékelte a tanulók teljesítményét. A 2011/2012. tanévben 12 iskolából 29 tanárt és 50 diákot részesített helyezésben vagy dicséretben. 11 első, 17 második, 9 harmadik díjat és 13 dicséretet kaptak a helyezettek. A 9. évfolyamról 12 tanuló, a 10. évfolyamról 8 tanuló, a 11. évfolyamról 10 tanuló és a 12. évfolyamról 8 tanuló teljesítményét ítéltük kiválónak.

Maximális, azaz 60 pontszámú dolgozatot írtak: Herendi Zsolt (DE Kossuth Gimnázium 9. évf.), Kocsis Péter (Hőgyes E. Gimnázium Hajdúszoboszló, 9. évf.), Almási Péter (Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen, 9. évf.), Bán Balázs (Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen, 9. évf.), Dobos Kristóf (Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen, 9. évf.), Kátay Tamás (Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen, 9. évf.), Rózsa Alida (Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen 9. évf.), Varga Dániel (Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen, 11. évf.), Szilágyi Gergely Bence (Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen, 11. évf.).

Majdnem maximális pontszámú dolgozatot írtak: Varnyú József (Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen, 11. évf.), Nemkin Viktória (Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen, 11. évf.) és Erdész Balázs (Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen, 11. évf.).

A feladatsorokat a DE Matematikai Intézetének oktatói állították össze: 9. évfolyamon † Dr. Kovács András és Deli Lajos, 10. évfolyamon Dr. Kántor Sándor, 11. évfolyamon Dr. Bessenyei Mihály és Dankó Sándor, 12. évfolyamon Dr. Kántor Sándorné.

A versenybizottság vezetője Dr. Kántor Sándorné volt.

A feladatsorok lektorai Balla Éva, Dankó Sándor, Deli Lajos és Károlyné Teleki Anikó, a hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnázium tanárai voltak.

Versenyeredmények, helyezések

9. évfolyam

I. kategória

I. díj: Halász Tamás (Hajdúszoboszló, Közgazdasági SZKI)

II. díj: Kaskötő Dávid (Mechwart Gépipari és Informatikai SZKI) és Szendrei Fruzsina (Tóth Árpád Gimnázium)

III. díj: Nagy Gergely Tamás (Mechwart Gépipari és Informatikai SZKI)

II. kategória

I. díj: Herendi Zsolt (DE Kossuth Gimn.) és Kocsis Péter (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló)

II. díj: Hajdú Kristóf (DE Kossuth Gimn.)

III. kategória speciális matematika tagozat (Fazekas Mihály Gimn. Debrecen): Almási Péter, Bán Balázs, Dobos Kristóf, Kátay Tamás és Rózsa Alida

10. évfolyam

I. kategória

III. díj: Uzonyi Noémi (Mechwart Gépipari és Informatikai SZKI)

II. kategória

II. díj: Bakó Aletta (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló), Ulveczky Balázs (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló), Seress Dániel (Dóczy Gedeon Ref. Gimn.) és Tóth Amanda (Tóth Árpád Gimnázium)

III. díj: Vass Máté (Tóth Árpád Gimnázium) és Papp Ágoston (Ref. Kollégium Gimn.)

III. kategória speciális matematika tagozat (Fazekas Mihály Gimn. Debrecen):

I. díj Varga Dániel

11. évfolyam

I. kategória

II. díj: Bende László (Erdey-Grúz Vegyipari és Környezetvédelmi SZKI)

II. kategória

II. díj: Kovács Dániel (Tóth Árpád Gimnázium), Palya Dóra (Karacs F. Gimn. Püspökladány), Sayfo Petra (DE Kossuth Gimn.)

III. díj: Nagy Imre (Bocskai Gimn. Hajdúböszörmény), Kacsó Zoltán (Bocskai Gimn. Hajdúböszörmény)

III. kategória speciális matematika tagozat (Fazekas Mihály Gimn. Debrecen):

I. díj: Szilágyi Gergely Bence

II. díj: Varnyú József, Nemkin Viktória és Erdész Balázs.

12. évfolyam

I. kategória

III. díj: Bora László (Mechwart Gépipari és Informatikai SZKI)

II. kategória

I. díj: Balogh István (Tóth Árpád Gimnázium)

II. díj: Bodogán Krisztina (Kölcsey Gimn. Nyíradony), Balogh Veronika (Kölcsey Gimn. Nyíradony) és Mercs Nóra (Kölcsey Gimn. Nyíradony)

III. kategória speciális matematika tagozat (Fazekas Mihály Gimn. Debrecen):

II. díj: Beke Lilla

III. díj: Kovács Adrienn és Remete László

Az egyes évfolyamok feladatsorai

9. évfolyam

1. Egy gazda egy tenyésztőtől 46 kopekért vett három szép tyúkot. Az egyik tyúk naponta három tojást tojt, a másik 3 naponként 2 tojást, a harmadik 2 naponként 1 tojást. A gazda a tojásokat eladta. 5 tojásért fél kopekeket kért. Mennyi idő alatt térült meg a tyúkok ára?

(18. századi orosz feladat nyomán)
8 pont

2. Igaz-e, hogy a

$$2011 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2010)$$

összeg egy természetes szám négyzete?

10 pont

3. Legalább hány, és legfeljebb hány közös pontja lehet egy háromszög és egy négyszög oldalainak, ha nincs a két alakzat kerületének közös szakasza? (Mutassuk meg, hogy a kapott értékek meg is valósíthatók!)

12 pont

4. Egy 31 fős osztály tanulói háromféle szakkörre járnak: matematika, fizika és biológia szakkörre. 17 tanuló jár matematika szakkörre, 9 fizika szakkörre és 11 biológia szakkörre.
A matematika és biológia szakkört is négyen, a fizika és biológia szakkört is hárman, a matematika és fizika szakkört is heten látogatják. Azoknak a tanulóknak a száma, akik egyik szakkörre sem járnak, kettővel kevesebb a pontosan két szakkörre járók számánál.

a) Hány tanuló jár pontosan egy szakkörre a három lehetséges közül?

b) Hányan járnak az osztályból mind a három szakkörre?

14 pont

5. Oldjuk meg az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=n$ diofantikus egyenletet, ahol $x<y<z$, valamint x, y, z, n pozitív egész számok!

16 pont

10. évfolyam

1. Egy szobában öt ember van, akiknek egy része olyan, hogy mindig igazat mond, a többiek mindig hazudnak (a részek lehetnek üres halmazok is). Mindegyikük tudja, hogy ki az igazmondó és ki a hazudós. Megkérdeztük mindegyiket, hogy a szobában hány igazmondó van? Válaszként a 0, 1, 2, 3, 4 számok hangzottak el. Hány igazmondó van a szobában? Miért?

10 pont

2. Az ABC háromszögben $AB=AC$, és BC-nek D, AC-nek E belső pontjára $AD=AE$ és $EDC\sphericalangle=15^\circ$ teljesül. Mekkora a $BAD\sphericalangle$?

10 pont

3. Adott ABC derékszögű háromszög AB átfogójának P belső pontjából az AC, illetve a BC befogóra bocsátott merőleges talppontja Q, illetve R. Melyik P pont esetén lesz a QR szakasz hossza a legkisebb? Mennyi a minimális hossz, ha $AC=3$, $BC=4$?

12 pont

4. Bizonyítsa be, hogy ha a és b egész számok, akkor $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ osztható 30-cal!

14 pont

5. Az x, y pozitív számokra $x^2+y^2=1$ teljesül. Bizonyítsa be, hogy $xy+\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{x+y}+\frac{1}{2}$.

14 pont

11. évfolyam

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{x^2+3x-18}\cdot(x^2-2x-35)=0$$

8 pont

2. Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög α és β szögére fennáll az alábbi összefüggés, akkor a háromszög vagy derékszögű, vagy $\beta=90^\circ+\alpha$.

$$\frac{\cos\beta}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\cos\beta}$$

10 pont

3. Egy cég logójában egy szabályos háromszög és egy kör van elhelyezve úgy, hogy közös a középpontjuk. A kör a háromszög oldalait az oldalak harmadoló pontjaiban metszi. Hogyan aránylik egymáshoz a körnek a háromszögön kívül, és a háromszögön belül levő részének a területe?

12 pont

4. Tekintsük a következő két számot!

$$x=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{2010}+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}$$

$$y=\frac{1}{2012}+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2010}+\ldots+\frac{1}{1008}+\frac{1}{1007}$$

a) Bizonyítsa be, hogy $\frac{1}{2}<x<1$ és $\frac{1}{2}<y<1$!

b) Melyik szám a kisebb, x vagy y?

14 pont

5. Melyek azok a pozitív egész számok, amelyek felírhatók két 1-nél nagyobb, egymáshoz relatív prím egész szám összegeként? (Két pozitív egész szám relatív prím egymáshoz, ha legnagyobb közös osztójuk 1.)

16 pont

12. évfolyam

1. Adja meg közönséges tört alakban a következő kifejezés értékét!

$$S=\frac{1}{2011^{-2010}+1}+\frac{1}{2011^{-2009}+1}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2011^{2009}+1}+\frac{1}{2011^{2010}+1}$$

8 pont

2. András és Bandi Gazdálkodj okosan társasjátékot játszik. A játék során többször előfordul, hogy egyest szeretnének dobni. András azt kérdezi Banditól, aki jó matematikából, hogy mi a valószínűbb: az, hogy egy dobókockával négyszer dobva lesz egyes dobása, vagy az, hogy két dobókockával 24-szer dobva lesz dupla egyes dobása. Válaszolja meg András kérdését!

12 pont

3. A koordinátasíkot az $y^2+2xy+40|x|=$ $=400$ egyenlet által meghatározott görbe több részre osztja. Határozza meg ezek közül a korlátos terület nagyságát!

12 pont

4. Legyen

$$f_m(x)=\begin{cases}x(m-2)+3, & \text{ha } x<4,\\ -(12+4m)x+5m-11, & \text{ha } x\ge 4,\end{cases}$$

ahol $m\in\mathbb{R}$.

a) Adja meg azokat a m egész számokat, amelyekre az f_m függvény szigorúan monoton csökkenő!

6 pont

b) Határozza meg az f_7 és $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-15$ függvények grafikonjainak a metszéspontját!

6 pont

Összesen: 12 pont

5. Az $ABCD$ paralelogramma síkjára az A pontban az AS merőlegest emeljük. A $DAB\sphericalangle$ szögfelezője a CD oldalt E-ben, az $ADC\sphericalangle$ szögfelezője pedig AB oldalt F-ben metszi.

a) Bizonyítsa be, hogy ha M az SAB háromszög, N az ABE háromszög súlypontja, akkor MN párhuzamos az SDE síkkal!

4 pont

b) Igazolja, hogy DF merőleges SE-re!

5 pont

c) Számítsa ki az S pontnak a DF egyenestől való távolságát, ha $BCD\sphericalangle=120°$, AC merőleges AD-re, $AC=AS=a$.

3 pont

d) Adja meg az $ABCD$ és SBC síkok hajlásszögét!

3 pont

Összesen: 15 pont

Megoldások

9. évfolyam

1. Ahhoz, hogy megtérüljön a befektetett pénz, $\left(46:\frac{1}{2}\right)\cdot 5=460$ tojást kell eladni. 2 nap alatt az első tyúk 9, a második 8, a harmadik 6 tojást tojik. 12 nap alatt a 3 tyúk összesen 23-at. $460=23\cdot 20$, és $12\cdot 20=240$ miatt a tyúkok 240 nap alatt tojnak 460 tojást.
Tehát 240 nap alatt térül meg a tyúkok ára.

2. Írjuk fel a $2011+2\cdot(1+2+3+\ldots+$ $+2010)$ kifejezést a következő módon:

$$\begin{array}{cccc}1+ & 2+\ldots+ & 2009+ & 2010\\ 2010+ & 2009+\ldots+ & 2+ & 1\end{array}$$

Az összegzést oszloponként elvégezve az eredmény: $2010\cdot 2011$.
Így a keresett összeg: $2011+2010\cdot 2011=$ $=2011^2$ $(=4\,044\,121)$.

3. Mivel a háromszög konvex, egy négyszögoldal legfeljebb két pontban metszheti a háromszög egy oldalát. Így a négy négyszögoldal maximálisan nyolc metszéspontot hozhat létre. Legalább 0 és legfeljebb 8 közös pontja lehet egy háromszög és egy négyszög oldalainak. Ezek az értékek meg is valósíthatók, ezt ábrákkal tudjuk megmutatni.

4. Jelölje x a mindhárom szakkörre járók számát. A pontosan két szakkörre járók száma rendre $4-x$, $3-x$ és $7-x$. A pontosan egy szakkörre járók száma rendre $6+x$, $x-1$ és $4+x$. Egyik szakkörre sem jár $12-3x$ tanuló. A fentiek összege éppen az osztálylétszám. Így $35-2x=31$, amiből $x=2$. Pontosan egy szakkörre $6+x+4+x+x-1=15$ tanuló jár.

5. Mivel $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1\frac{5}{6}$, így $n=1$ és $x>1$ lehet.

Ha $x\ge 3$ lenne, akkor $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<$ $<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1,$ ezért $x<3$ lehet csak.

Így $x=2$, $y>2$ és $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. Ha $x=2$, $y=3$ és $z=6$, akkor $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1,$ így ez megoldás.

Ha $y\ge 4$ lenne, akkor $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$ $=\frac{1}{2},$ így az $x<y<z$ feltétel miatt csak $y<4$ lehet.

Tehát az adott diofantikus egyenlet egyetlen megoldása: $x=2$, $y=3$, $z=6$.

10. évfolyam

1. Az igazmondók száma a 0, 1, 2, 3, 4 számok között van, és közöttük annyiszor fordul elő, mint amennyi az értéke. Mindegyik szám egyszer fordul elő, így pontosan egy igazmondó van, az, aki az 1-et mondta.

2. $AB=AC$ miatt $ABC\sphericalangle=ACB\sphericalangle=\beta$, és $AD=AE$ miatt $ADE\sphericalangle=\delta$. EDC külső szöge E-nél: $\delta=15^\circ+\beta$, és $BAD\sphericalangle=x$ jelöléssel DAB külső szöge D-nél: $\delta+15^\circ=\beta+x$. Ezekből nyilván $x=30^\circ$.

3. $PQCR$ nyilvánvalóan téglalap, így QR és CP hossza megegyezik. Tehát a minimális hossz akkor van, ha P az átfogóhoz tartozó magasság talppontja. Ekkor $CP=\frac{AC\cdot BC}{AB}$. Ez a mi esetünkben $\frac{3\cdot 4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}=2{,}4.$

4. Nyilván elegendő bebizonyítani, hogy 2-vel, 3-mal és 5-tel osztható az adott

$$K=ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)$$

kifejezés. Ha a és b közül legalább az egyik páros, akkor ab páros, így K is páros.
Ha a is és b is páratlan, akkor a^2 is és b^2 is páratlan, így a^2-b^2 páros, tehát K is páros.
Ha a és b közül legalább az egyik osztható 3-mal, akkor ab is osztható 3-mal, így K is osztható 3-mal.
Ha $|a|$-nak és $|b|$-nek a maradéka 3-mal osztva ugyanaz, akkor a^2-b^2 osztható 3-mal, tehát K is osztható 3-mal.
Ha $|a|$ és $|b|$ 3-mal osztva különböző, de nem 0 maradékot adnak, akkor a^2-b^2 osztható 3-mal, tehát K is osztható 3-mal.
Ha a és b közül legalább az egyik osztható 5-tel, akkor ab is osztható 5-tel, így K is osztható 5-tel.
Ha sem $|a|$, sem $|b|$ nem osztható 5-tel és a kettő osztási maradéka vagy megegyezik, vagy az egyiké 1, a másiké 4, vagy az egyiké 2, a másiké 3, akkor a^2-b^2 osztható 5-tel, tehát K is osztható 5-tel.
Ha sem $|a|$, sem $|b|$ nem osztható 5-tel és az egyik osztási maradéka 1 vagy 4, a másiké 2 vagy 3, akkor a^2+b^2 osztható 5-tel, így K is osztható 5-tel.
Tehát K minden esetben osztható 5-tel.

5. $0=(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=1-2xy$ miatt $xy\le\frac{1}{2}$.
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=1+2xy=2$ miatt $\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{x+y}$.
$xy\le\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{x+y}$ megfelelő oldalainak összeadásával a bizonyítandó állítást kapjuk.

11. évfolyam

1. Mivel egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényező nulla, ezért az eredeti egyenlet megoldása a $\sqrt{x^2+3x-18}=0$ és $x^2-2x-35=0$ egyenletek megoldását jelenti.
A másodfokú egyenlet gyökképletéből adódóan ha $\sqrt{x^2+3x-18}=0$, akkor $x_1=-6$ és $x_2=3$. Ugyanígy, ha $x^2-2x-35=0$, akkor $x_3=-5$ és $x_4=7$.
Azonban $x_3=-5$ esetén a gyökjel alatt negatív szám szerepel, így ez kizárandó; a többi esetben azonban nyilvánvalóan megoldásokat kapunk.

2. $\cos\beta \neq 0$, tehát $\beta \neq 90°$. A közös nevezővel való beszorzás után következik, hogy

$$\cos^2\beta = 1-\cos^2\alpha, \quad \cos^2\beta=\sin^2\alpha,$$
$$|\cos\beta| = |\sin\alpha|.$$

Mivel α a háromszög szöge, ezért $\sin\alpha>0$, tehát $|\cos\beta| = \sin\alpha$.

a) Ha $\beta<90°$, akkor $\cos\beta=\sin\alpha$, vagyis $\cos\beta=\cos(90°-\alpha)$. Mivel α és β a háromszög szögei, ez azt jelenti, hogy $\beta=90°-\alpha$. Ebből következik, hogy $\alpha+\beta=90°$, vagyis $\gamma=90°$. Ezért a háromszög derékszögű.

b) Ha $\beta>90°$, akkor $\cos\beta=-\sin\alpha$, vagyis $\cos\beta=-\cos(90°-\alpha)$. Ebből $\beta+(90°-\alpha)=$ $=180°$ adódik, azaz $\beta=90°+\alpha$.

3. A háromszög oldalai legyenek $3a$ hosszúak. Könnyen belátható, hogy a háromszögvonal és a körvonal közös pontjai szabályos háromszöget határoznak meg, melynek oldalai a hosszúságúak. Ebből következik, hogy a kör sugara is a. A hatszög oldalaihoz, mint húrokhoz tartozó középponti szögek 60°-osak, tehát a hozzá tartozó körcikk a körlap hatod része, amiből elvéve egy a oldalú szabályos háromszöget, adódik egy körszelet.
A körnek a háromszögön kívüli három körszelete összesen

$$3\cdot\left(\frac{a^2\cdot\pi}{6}-\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\right)=a^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}\right)$$

területű.
A körnek a háromszögön belüli része

$$a^2\cdot\pi-3\cdot a^2\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=a^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}\right)$$

területű.
A kettő aránya:

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}}=\frac{2\cdot\pi-3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\pi+3\cdot\sqrt{3}} \quad (\approx 0{,}095).$$

4. *a)* $x=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+$

$+\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right)=\frac{1}{2}+\text{pozitív számok}>\frac{1}{2}.$

$x=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots+$

$+\left(-\frac{1}{2010}+\frac{1}{2011}\right)+\left(-\frac{1}{2012}\right)=$

$=1+\text{negatív számok}<1$

$y=\frac{1}{2012}+\frac{1}{2011}+\ldots+\frac{1}{1007}>$

$>\frac{1}{2012}+\frac{1}{2012}+\ldots+\frac{1}{2012}=\frac{1006}{2012}=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2012}+\frac{1}{2011}+\ldots+\frac{1}{1007}<$

$<\frac{1}{1006}+\frac{1}{1006}+\ldots+\frac{1}{1006}=\frac{1006}{1006}=1$

b) $x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012}-$

$-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+$

$+\frac{1}{2012}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1006}\right)=\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+$

$+\ldots+\frac{1}{2012}=y$

Tehát $x=y$.

5. Az 1; 2; 3 nem állítható elő, mert ha a két tag x és y, akkor $x+y\geq 2+2=4$.
A 4 nem állítható elő, mert csak $4=2+2$ lehet, de $(2;2)=2$.
Az 5 előállítható, mert $5=2+3$ és $(2;3)=1$.

A 6 nem állítható elő, mert $6 = 2 + 4$ vagy $6 = 3 + 3$ lehet, és $(2; 4) = 2$; $(3; 3) = 3$.
Megmutatjuk, hogy minden 6-nál nagyobb egész előállítható a kívánt módon.
Ha $n > 6$ és n páratlan, akkor $n = 2 + (n - 2)$. Ez megfelelő előállítás, mert $n - 2$ páratlan, 2-nek pedig csak 1 és 2 az osztója, így $(n - 2; 2) = 1$.
Ha $n > 6$ és n páros, akkor $n = 4k$ vagy $n = 4k + 2$ alakú, ahol $k > 1$ egész.
Ha $n = 4k$, akkor $n = (2k - 1) + (2k + 1)$, ahol $2k + 1 > 2k - 1 > 1$, és lévén két szomszédos páratlan számról van szó, relatív prímek.
Ha $n = 4k + 2$, akkor $n = (2k + 3) + (2k - 1)$, ahol $2k + 3 > 2k - 1 > 1$, és mindkét szám páratlan.
Ha m osztója a két számnak, osztója a különbségüknek is, azaz $2k + 3 - (2k - 1) = 4$-nek. De 4-nek 1-en kívül csak páros osztói vannak, így $(2k + 3; 2k - 1) = 1$.

12. évfolyam

1. Az adott kifejezésben a negatív hatványkitevőket pozitív hatványkitevőkre írjuk át:

$$S=\frac{1}{2011^{-2010}+1}+\frac{1}{2011^{-2009}+1}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2011^{2009}+1}+\frac{1}{2011^{2010}+1}=$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{2011^{2010}}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2011^{2009}}+1}+\ldots+\frac{1}{1+1}+$$
$$+\frac{1}{2011+1}+\ldots+\frac{1}{2011^{2009}+1}+\frac{1}{2011^{2010}+1}=$$
$$=\frac{2011^{2010}}{1+2011^{2010}}+\frac{2011^{2009}}{1+2011^{2009}}+\ldots+\frac{1}{1+1}+$$
$$+\frac{1}{2011+1}+\ldots+\frac{1}{2011^{2009}+1}+\frac{1}{2011^{2010}+1}.$$

Csoportosítsuk az egyenlő nevezőjű összeadandókat. Így kapjuk, hogy

$$S=\frac{2011^{2010}+1}{1+2011^{2010}}+\frac{2011^{2090}+1}{1+2011^{2090}}+\ldots+\frac{1}{2}=$$
$$=2010\cdot 1+\frac{1}{2}=2010+\frac{1}{2}=\frac{4021}{2}.$$

2. *a)* Ha egy dobókockával négyszer dobunk, akkor $6^4 = 1296$ számú különböző dobássorozat van, ez az összes esetek száma. Ezek között $5^4 = 625$ esetben nem dobtunk egyest. $1296 - 625 = 671$ esetben dobtunk egyest, vagyis a kedvező esetek száma: 671.
Így az egyes dobásának valószínűsége $\frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$.

b) Két dobókockával 24-szer dobva 36^{24} különböző sorozat lehetséges.
A kedvezőtlen esetek száma: 35^{24}. Ezeknek a valószínűsége $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} > \frac{1}{2}$.

A kedvező eset valószínűsége: $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} < \frac{1}{2}$.

Az a valószínűbb, hogy egy dobókockával négyszer dobva kapunk egyest.

3. Esetszétválasztást végzünk.
a) Ha $x = 0$, akkor a görbe egyenlete:

$$y^2 - 400 + 2x(y + 20) = 0,$$
$$(y - 20 + 2x)(y + 20) = 0,$$

amit az $y = -2x + 20$ és az $y = -20$ egyenletű félegyenesek pontjai elégítenek ki.

b) Ha $x = 0$, akkor a görbe egyenlete:

$$y^2 - 400 + 2x(y - 20) = 0,$$
$$(y + 20 + 2x)(y - 20) = 0,$$

ami ismét két félegyenest határoz meg, melyek egyenlete: $y = -2x - 20$ és $y = 20$.
A félegyenesek paralelogrammát zárnak be, melynek alapja 20, magassága 40, így a területe 800.

4. *a)* Az $f(x) = ax + b$ lineáris függvény akkor szigorúan monoton csökkenő, ha $a < 0$.
Ezért a mi esetünkben az $m - 2 < 0$ és $-(12 + 4m) < 0$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülnie ahhoz, hogy $f_m(x)$ szigorúan monoton csökkenő legyen.
Tehát a $-3 < m < 2$ intervallumbeli egész értékeket kell megadni. Ezek: -2; -1; 0; 1.

b) 1. Ha $x < 4$, akkor $f_7(x) = 5x + 3$ és $g(x) = 3x - 15$ függvények metszéspontját kell meghatározni.
A metszéspont x koordinátáját az $5x + 3 = 3x - 15$ egyenletből kapjuk meg.
$x = -9$ adódik és visszahelyettesítéssel $f(-9) = g(-9) = -42$.
Tehát a metszéspont $A(-9; -42)$.

2. Ha $x = 4$, akkor $f_7(x) = -40x + 24$, $g(x) = 3x - 15$.
A metszéspont x koordinátáját a $-40x + 24 = 3x - 15$ egyenletből kapjuk meg.
Ebből $x = \frac{39}{43} \notin [4; \infty)$. Ekkor nem kapunk metszéspontot.

5. *a)* Jelöljük az SAB háromszög súlyvonalait AP-vel, illetve SR-rel. AP és SR metszéspontja az M pont, az SAB háromszög súlypontja. Így $RM : RS = 1 : 3$.
Hasonlóan az AEB háromszögben $RN : RE = 1 : 3$.
A fenti arányokból következik, hogy $RM : RS = RN : RE$.
A párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt az RSE háromszögben MN párhuzamos SE-vel. De SE illeszkedik az SDE síkra, így MN párhuzamos az SDE síkkal.

b) SA merőleges az $ABCD$ paralelogramma síkjára, DF pedig benne van az $ABCD$ paralelogramma síkjában, így SA merőleges DF egyenesre.
Jelöljük O-val az AE és DF szakaszok metszéspontját. Az ADO háromszögben $OAD\sphericalangle + ODA\sphericalangle = \frac{1}{2}(BAD\sphericalangle + ADC\sphericalangle) = 90°$, tehát AE merőleges DF-re, így DF merőleges az SAE síkra. Mivel SE illeszkedik az SAE síkra, ezért DF merőleges SE-re.

c) SA merőleges az $ABCD$ paralelogramma síkjára, AO merőleges DF-re, így a három egymásra merőleges egyenes tétele miatt SO merőleges DF-re, vagyis S és DF távolsága SO. Az ACD derékszögű háromszögben $\operatorname{ctg}60° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AD}{a}$, ebből $AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Az AOD derékszögű háromszögben $AO = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Így $SO^2 = a^2 + AO^2 = \frac{39a^2}{36}$, tehát $SO = \frac{a\sqrt{39}}{6}$.

d) AC merőleges AD-re, így AC merőleges BC-re, de SA merőleges az $ABCD$ paralelogramma síkjára, ezért a három egymásra merőleges egyenes tétele alapján SC merőleges CB-re. Így az SBC és $ABCD$ síkok hajlásszöge egyenlő az $SCA\sphericalangle$-gel. Mivel $SA = AC = a$ az SAC egyenlő szárú derékszögű háromszögben $SCA\sphericalangle = 45°$. Tehát az SBC és $ABCD$ síkok hajlásszöge: $45°$.

Tapasztalatok és tanulságok

A versenyfeladatok megfogalmazása általában eltér a tankönyvi feladatoktól, mert egyrészt nyitottabbak, másrészt elméletiek, tehát bizonyításokat, érveléseket igényelnek.

A 9. évfolyamon elsősorban az általános iskolai ismeretekre támaszkodtunk. A magasabb évfolyamokon inkább elméleti, mint alkalmazás és gyakorlati jellegűek a kitűzött problémák, ezért matematikai hátteret és tárgyi ismereteket is igényelt a feladatok megoldása.

Jól alkalmazható ismeretek voltak: az arányos következtetés, algebrai átalakítások ismerete, számelméleti tételek, az oszthatóság, a maradékos osztás, a négyzetszámok tulajdonságai, diofantikus egyenletek megoldása, halmazelméleti ismeretek, a logikai szita, a polinomok szorzattá alakítása, a csoportosítás módszere, az abszolútérték ismerete, első és másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, trigonometrikus egyenletek megoldási módszerei, a függvények – elsősorban a lineáris függvények – tulajdonságai, a monotonitás fogalma. Geometriából a háromszögek nevezetes vonalai és pontjai, Pitagorasz tétele, háromszögek egybevágósága és hasonlósága, a párhuzamos szelők tételének megfordítása, a területszámítás, a háromszög és a kör részeinek területe, a trigonometria alkalmazásai, geometriai szélsőérték megkeresése, koordináta-geometria, térgeometriai alapismeretek, sík és egyenes párhuzamossága és merőlegessége, a három egymásra merőleges egyenes tétele, a klasszikus valószínűség kiszámítása.

Korlátoztuk a segédeszközök használatát. A négyzetrácsos papíron kívül a szerkesztési eszközök használatát és a zsebszámológép igénybe vételét engedtük meg, a függvénytáblázatét nem. Így a tanulóknak nem volt lehetőségük képletek, definíciók kikeresésére. Ezt a versenyfelhívásban előre közöltük.

A feladatsorok összeállításának egyik szempontja az, hogy három feladatot mindenki meg tudjon oldani, vagyis a benne lévő ismeret az iskolai tananyagnak része legyen. A többi feladat viszont legyen olyan, ami differenciálja a mezőnyt, sőt legyen olyan feladat is, amely a speciális matematika tagozatosok számára is kihívást jelent. Az egyes kategóriák esetében természetesen a speciális matematika tagozatos tanulók teljesítménye a legegyenletesebb és a legmagasabb.

Ebben a tanévben, a váratlan események miatt, a *9. évfolyam* feladatsora könnyűre sikerült és nem okozott nehézséget egyik kategóriában sem. Ezt mutatja az is, hogy 7 darab 100%-os dolgozat született. Igaz a 4. feladatot régebben általános iskolások számára tűzték ki a Kalmár László versenyen.

A *10. évfolyam*on az 5. feladat, vagyis a bizonyítási feladat megoldása okozott gondot. Az egyetlen maximális pontszámot elért, speciális matematika tagozatos tanulón kívül a többiek nem tudták megoldani, legfeljebb részpontokat kaptak.

A *11. évfolyam*on az 1. feladatnál azzal vesztettek pontot egyes tanulók, hogy nem vették figyelembe az értelmezési tartományt és nem zárták ki azokat a gyököket, amelyekre a négyzetgyökös kifejezés nem volt értelmezve. A 2. feladatnál megrekedtek a trigonometriai bizonyítás során. A 4. *b)* résznél nem sikerült megmutatni, hogy $x = y$.

A *12. évfolyam*on örvendetes, hogy a valószínűség-számítási témájú 2. feladat megoldása nem okozott problémát egyik kategóriában sem. A 3. feladat megoldásában az abszolútérték felbontásában voltak bizonytalanok a tanulók. Érdekes, hogy a 4. feladat megoldása a speciális matematika tagozatos tanulóknál kevésbé volt sikeres, mint az I. és II. kategóriában. Az 5. feladat, ami térgeometriai feladat volt, nehéznek számított mindegyik iskolatípusban. Egyetlen speciális matematika tagozatos tanuló oldotta meg kifogástalanul, a többiek csak részpontokat kaptak.

Ha visszanézünk az előző évek tapasztalataira, akkor megállapíthatjuk, hogy az abszolútérték felbontása, a számelméleti vizsgálatok, a bizonyításos feladatok és a térgeometriai feladatok változatlanul nehézséget jelentenek még a versenyzők számára is.

Irodalom

[1] Dr. Kántor Sándorné: A 2005/2006. és 2006/2007. tanévi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2007. 2. szám, 5–15.

[2] Dr. Kántor Sándorné: A 2007/2008. tanévi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2008. 2. szám, 3–8.

[3] Dr. Kántor Sándorné – Dr. Kántor Sándor: Versenyfeladatok Matematikából Középiskolások Hajdú-Bihar megyei Versenye, 1975–2007. Studium ’96 Bt, Debrecen, 2008

[4] Dr. Kántor Sándorné: A 2008/2009. tanévi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2009. 2. szám, 16–24.

[5] Dr. Kántor Sándorné: A 2009/2010. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2010. 2. szám, 12–21.

[6] Dr. Kántor Sándorné: A 2010/2011. évi Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematika Versenyről. A matematika tanítása, 2011. 2. szám, 33–41.

Nagy Lehocky Zsuzsa

Döntéseket hozni nem mindig egyszerű

„A matematikai gondolkodási képesség csupán úgy növelhető, ha működtetik.”
(Alain Schoenfeld)

Bevezetés

A Nyitrai Konstantin Filozófus Egyetem Közép-európai Tanulmányok Karának Természettudományi és Informatika Intézetében három éve aktív megoldójuk vagyunk egy, a matematika oktatásának minőségi fejlesztésére fókuszáló projektnek, ahol a kollégákkal közösen igyekszünk olyan problémákat alkotni, melyek a matematika gyakorlat-orientáltságát hivatottak erősíteni.

Projekt-motiváció

Ösztönzően hatott ránk a PISA-felmérés és az új szlovák oktatási reform is. Ismert, hogy a „PISA a vizsgált tudásterületeket (matematika, természettudomány és olvasás-szövegértés) nem a tantervi követelményeknek való megfelelés, hanem a tudás és képességek mindennapi életben való alkalmazhatósága szempontjából közelítette meg.” [Pedagógiai szemle, 2005]. A tanulóknak olyan alapvető ismeretekkel kell rendelkeznie, amelyek az életben való helytálláshoz, továbbtanuláshoz és nem utolsósorban a munkában való érvényesüléshez szükségesek. A tudást nem elég megszerezni, elsősorban alkalmazni kell tudni. A tudásnak és képességeknek, melyek elengedhetetlenek a mindennapi életben való tevékeny részvételhez.

Az új szlovák oktatási reform szerint a matematika öt fő témakörre lett felosztva:

- Számok, számolás
- Függvények, táblázatok, diagrammák
- Geometria, mérés
- Kombinatorika, valószínűség-számítás, statisztika
- Logika, bizonyítások [www.minedu.sk].

Sajnos a reform bevezetésekor nem lettek időben elkészítve sem a tankönyvek, sem módszertani útmutatók, melyek az új oktatási tartalomhoz igazodnának.

Logikus, nem?!

Ezen témakörök közül ezúttal a logika témakörét részletezzük, mely nincs egy adott korosztályhoz, sem egy adott évfolyamhoz kötve, hanem áthatja a matematika egészét. Tananyagtól függetlenül mindig becsempészhetünk az órába olyan feladatokat, melyek a logikus gondolkodás fejlesztését, a logikai formulákkal és módszerekkel való helyes bánásmód kialakítását célozzák meg. Ami az általunk javasolt feladatokat illeti, ezúttal kicsit más típusú feladatokat válogattunk össze a logika témaköréből, mint ami megszokott, tehát: vannak állítások, lehetőségek: döntsük el melyik a helyes és …. Ezen feladatokban – hétköznapi szituációkból kiindulva – helyesen kell értelmezni a kínálatokat, adott adatok alapján el kell dönteni, hogy melyik számomra a jó megoldás. Tapasztalatszerzés, melyek mögött szintén a problémamegoldó és -elemző képesség, logikus gondolkodás fejlesztése rejtőzik. Ebből adódhat, hogy nagyobb segítséget nyújthatnak a PISA-felmérésre való felkészülésben összehasonlítva a tankönyvi vagy más forrásokból származó feladatokkal.

Az egyes problémák kidolgozásánál igyekeztünk a tanulók belső motivációjára építeni, ösztönözni őket az értelmes tanulásra. A tanár elsődleges feladata az, hogy lehetővé tegye a tanuló számára a tanulást azáltal, hogy ébren tartja benne az érdeklődést. A tények elsajátításának csupán kis értéke van a jelenben és rendszerint még kisebb értéke van a jövőben. Ezzel szemben az értelmes tanulást a tanuló maga kezdeményezi, mely a felfedezést és a megértés iránti igényt is magában foglalja. A megértés magába foglalja azt a folyamatot, amikor a tanuló az új ismeretet összekapcsolja a már meglévővel. Az új elemet úgy ismeri fel, mint ami valami általánosabb sémába illeszkedik. De minden új megismeréssel maguk a kognitív sémák (fogalmi hálók, történetsémák, vizuális reprezentációk stb.) is átalakulnak: bonyolultabbá, gazdagabbá, differenciáltabbá válnak, azaz hatékonyabb értelmezési folyamatokat tesznek lehetővé. A megértett ismeret alkalmazható ismeretté válhat, ha az ismeretek alkalmazása automatikussá válik, és segítségével értelmezni tudjuk az addig ismeretlen problémákat is [*Nagy Lehocky,* 2011].

A matematika tanulásának alapja a tapasztalatszerzésből kiinduló induktív megismerés. Ennek keretében kerül sor a megfigyelés irányítására, a spontán megfigyelésből a tudatos, célirányos megfigyelésre való felkészülésre, az észrevételek megfogalmazására, rendezésére, értelmezésére és lejegyzésére, valamint a szerzett tapasztalatok más tanulási helyzetekben való alkalmazására.

A matematika tanításának egyik fontos célkitűzése a tanulók tudatos és eredményes problémamegoldó gondolkodásának minél hatékonyabb fejlesztése. A hatékony matematikai nevelés egésze ahhoz járul hozzá, hogy a tanulók képesekké válnak különböző problémák önálló, logikus átgondolására és megoldására. Ezek a képességek a matematikában megismert gondolkodási mód transzferje során szilárdulhatnak meg. Az iskola, azon belül pedig főként a pedagógusok fontos szerepet játszanak abban, hogy megfelelő környezetet alakítsanak ki a tanulók számára, felkeltsék érdeklődésüket a matematika iránt, fejlesszék kreativitásukat, önállóságukat [*Nagy Lehocky,* 2011].

A matematika órákon (időhiányra hivatkozva) legtöbbször csak a sablonos megoldási módokat veszik sorra, nem mutatják meg adott témakör, új ismeret gyakorlati feladatokban való felhasználási lehetőségeit. A tanárok egy része nem bízik abban sem, hogy a tanulók képesek elsajátítatni az önálló matematikai gondolkodás alapjait. Ha nem is mindenki, de talán sokan képesek lennének rá, ha megtanítanák őket.

Feladatok

A következő feladatokat alapiskolában tanító pedagógusok kipróbálták. Kutatásunkban több mint 30 alapiskola, és kb. 900 tanuló vesz részt. Nem szerettünk volna csak elméleti szinten maradni és olyan feladatokat közzétenni a nagyközönségnek, melyek csak elméleti szinten működnek.

A projektünkben részt vett tanulók nemcsak megoldották feladatainkat, hanem kérdőív segítségével ki is értékelték azokat. A feladatokat elsősorban újszerűnek tartották, hisz eddig még nem találkoztak hasonlóakkal. Nagyon tetszett nekik, hogy ismerős szituációkat írnak le a feladatok, melyek közelebb állnak hozzájuk, mint sok más matematikai tankönyvben szereplő feladat. A tanárok értékelésükkor kiemelték, hogy ezen feladatok megoldatását több megbeszélés előzte meg és követte. A feladatok kerülik a sablonosságot, kötöttséget. Segítségükkel a tanulóknál kialakíthatják a bátorságot, hogy merjenek kérdezni, tévedni, ezáltal is növelve kockázatvállalásukat, javítva döntéshozatali képességeiket.

Az alábbi feladatsor által többek között a következő kompetenciák fejleszthetőek: tapasztalatszerzés, alkotás és kreativitás, kommunikációs készségek, emlékezés, gondolkodás, ismeretek rendszerezése.

1. feladat: Kitartó futás

A sportoló, Tóth László a nehéz körülmények ellenére végigfutott Szlovákián kelet–nyugati irányban. A távot rekordidő, alig több, mint 5 nap alatt teljesítette. Az 51 éves futó 485 km megtétele után vasárnap érkezett meg Pozsonyba. „Soha nem adtam fel, de biztos bolond vagyok” – mondta Laci. Minden nap lefutotta a betervezett 95 km-t. Ellenőrizd, összhangban vannak-e a közölt adatok! Mikor indult a futó?

2. feladat: Bevásárlás az illatszerboltban

Kati bevásárolni indult az illatszerboltba. Szappanon és mosóporon kívül még sampont is akart venni. A boltban a sampont kétféle csomagolásban kínálták: 100 ml-es 3,19 €-ért, vagy 10 ml-es 2,32 €-ért. Kati a 10 ml-est vette meg. Jól döntött? Az előnyösebb árú sampont választotta? Kérdés, hogy a nagyobb csomagolású árut érdemes megvenni? Érdemes-e nagy csomagot venni annak, aki egyedül él? Menynyivel kerül többe ugyanannyi ml a kisebbből?

3. feladat: Házfelújítás

A Kovács család elhatározta, hogy nyáron felújítja családi házát. Két szakembertől kértek árajánlatot. Az első közölte, hogy 4 €-s órabérért dolgozik, a második az egész munkáért 70 €-t kért. A ház javítása 3 napig tartott, naponta 5 órát dolgoztak. A Kovács család az első szakembert hívta. Helyesen döntöttek?

4. feladat: Telekeladás

Molnárék elhatározták, hogy kertet vásárolnak. Zöldséget akartak termeszteni, és gyümölcsfákat ültetni.

Az első ajánlat: Eladó 300 négyzetméter kert 900 €-ért. Megegyezés lehetséges. Érdeklődni a 0905 175645-ös telefonszámon lehet.

A második ajánlat: Családi okokból eladom 500 négyzetméter kertemet 1 500 €-ért. Elérhetőség: 0918 778899.

Segíts Molnáréknak az előnyösebb ajánlat kiválasztásában! A telek vásárlásánál az is döntő, hogy mekkora telket képzeltek el, ugyanígy a lakás megvásárlását sem csak az ár dönti el.

5. feladat: Lakáseladás

A fiatal házasok elhatározták, hogy önálló életet kezdenek, ezért új lakást vásárolnak. A lakásokat hirdető internetes oldalon a következő érdekes ajánlatokat találták:

Eladó 3 szobás felújított lakás saját fűtéssel, balkonnal és kamrával Nyitra központjában. Első emelet, 80 m^2, magántulajdon. Ár 56 000 €. Alacsony rezsiköltségek.

Eladom 3 szobás Kovács utcai lakásomat. Első emelet, nagy balkon, 50 m^2, magántulajdon. Teljesen felújítva. Látni kell. Ár 50 000 €.

A fiatalok a Kovács utcai lakást vásárolták meg. Az előnyösebb árajánlatot választották? Mennyit takarítottak meg?

6. feladat: Mitévő legyek?

Feri már régóta szeretné eladni a garázsát 5000 €-ért, de eddig sajnos nem sikerült. Többen viszont érdeklődtek a garázs bérlése felől havi 40 €-ért. Ferinek most lenne szüksége a pénzre, de a legrosszabb esetben még tud várni maximum öt évet a garázs eladásával. Megérné Ferinek várni és bérbe adni a garázsát, és csak öt év múlva áruba bocsátani?

Egyéni vagy közös órai munka, de bevezető óra utáni otthoni tevékenységre is használhatók a feladatok. A feladatsor alapos, elmélyült munkát igényel, bár maguk a kérdések nem nehezek. A sikeres és eredményes munkához azonban szükséges, hogy a tanuló figyelmesen olvassa el a szöveget, és minden apró részletre odafigyelve elemezze a feladatot és a szövegkörnyezetet is. Pontosan kell érteni az egyes mondatok jelentését, a köztük lévő összefüggéseket. Figyelni kell az egyértelmű, pontos megfogalmazásra is.

Záró gondolatok

A feladatok a korosztálynak megfelelő nehézségűek, tehát 10–11 évesek különösebb nehézség nélkül meg tudják oldani. Ezek a feladatok azért is jók, mert ha figyelmetlenül olvassák el a tanulók, akkor bizonyos információk elveszhetnek. A megoldások nem igényelnek nagyobb segítséget, de ösztönözni kell a gyerekeket a többszöri, alapos olvasásra. Az értő olvasás hiánya sok gondot okoz, nem csak a matematikában, hanem más tantárgyakon belül is.

A megoldásokhoz a gondolkodás kreatív módja szükséges, továbbá segíti a tanulókat abban, hogy fejlődjön problémamegoldó képességük. A feladatok megoldása során szerzett tapasztalatoknak van további alkalmazási lehetősége is. A feladatok hasznosak az egyén számára a másokkal való napi kommunikációban, mivel fejlesztik gondolataink egyértelmű megfogalmazásának képességét, úgyszintén a mindennapi információk értelmezésében segítséget nyújtanak, hiszen valós problémákat tartalmaznak.

Felhasznált irodalom:

[1] Nagy Lehocky Zs. (2011):Rendhagyó matematikai tehetséggondozás. In: Veda pre vzdelanie - vzdelanie pre vedu = Tudomány az oktatásért - oktatás a tudományért = Science for education - Education for science, Nitra : UKF, 2011, ISBN 978-80-8094-973-0, S. 251–254.

[2] www.midedu.sk

[3] Pedagógiai szemle, 2005: http://epa.oszk.hu/00000/00035/00088/2005-01-vt-Felvegi-Gyorsjelentes.html

Dr. Kalácska József

Cornides István Matematika-Fizika Emlékverseny a komáromi Selye János Magyar Gimnáziumban

Iskolánkban több évtizedes múltja van a tantárgyi versenyeknek. Ezek legrégebbike a matematikaverseny, mely menet közben fizikával bővült. 2001-től versenyünk e sorok írójának javaslatára a CORNIDES ISTVÁN MATEMATIKA-FIZIKA EMLÉKVERSENY nevet kapta.

A verseny névadója iskolánk elődjében, a komáromi Szt. Benedek rendi Gimnáziumban érettségizett 1938-ban. Négy évvel később szerzett matematika-fizika szakos tanári oklevelet Budapesten, a Pázmány Péter Egyetemen. Fiatal tanárként a későbbi Nobel-díjas Békési György tanársegédje, 1957-ig az ELTE docense, 1956-ban az ELTE TTK forradalmi bizottságának elnöke. Letartóztatása után több hétig – ahogy mondani szokta – a „Fő utcai szanatórium" lakója volt. Büntetése az lett, hogy Magyarországon eltiltották a tanítástól. Kazincbarcikai és miskolci működés után a Bányászati Kutatóintézetbe került, a tömegspektrometria és a klaszterkémia nemzetközileg elismert szaktekintélye lett. Vendégtanárként tanított a tokiói műszaki egyetemen.

E sorok írója másodéves hallgatóként 1968-ban ismerte meg, amikor a Nyitrai Tanárképző Főiskola Fizika Tanszékén a magyar tagozaton tanított és tudományos diákkört szervezett, lehetővé téve ezáltal, hogy a tanszék magyar oktatói Budapesten folytathassanak kutatómunkát. Haláláig – harminc éven át – a felvidéki magyar fizikatanár-képzés támasza, fáradhatatlan, lelkes segítője lett a nyitrai egyetemen. Élete, munkássága, elhivatottsága, a szülőföldhöz és az alma materhez való ragaszkodása, szeretete példaértékű.

A versenyt minden év decemberének első péntekjén tartjuk a felvidéki magyar középiskolák és meghívott anyaországi gimnáziumok – Pannonhalma, Budapest-Szt. István Gimn., Tata-Eötvös Gimn., Komárom-Jókai Gimn. – diákjainak részvételével. A verseny kezdete előtt mindig megemlékezünk a Tanár úrról. Egykori diákjai, munkatársai emelik ki emberi nagyságát, beszélnek tudományos sikereiről. Az elmúlt években többek között Daniel Kluvanec, a Nyitrai Konstantin Egyetem rektora, Gál Tibor, Kecskés Árpád, Morvay László, a Fizika Tanszék oktatói, Barna Péter, Kálmán Alajos, Lelik László, Fehér István, Czókoly Béla egykori budapesti tanítványai és e sorok írója a Tanár úr egész életét, tevékenységét példaként állítottuk nemcsak a matematikát és fizikát kedvelő versenyzők elé, hanem iskolánk diákjai elé is. Özvegye minden évben jutalomban részesíti a verseny négy kategóriájában győztes diákot, a további helyezetteket pedig értékes szakkönyvvel ajándékozza meg. Június végén, a tanévzárón kiosztásra kerül a szintén az özvegye által adományozott CORNIDES ISTVÁN ÖSZTÖNDÍJ, amelyet a tanév folyamán matematikában és fizikában legkiemelkedőbb versenyeredményt elérő diák kap.

Szép hagyománya iskolánknak, hogy egyes tantermeit neves elhunyt tanárairól és diákjairól nevezi el. A Tanár úr volt az első, aki nevesített tantermet kapott gimnáziumunkban. A tanterem ajtaján lévő emléktáblán a következő szöveg olvasható, alján a temetésekor elhangzott vezérigével:

Dr. Cornides István, egyetemi tanár (1920. XII. 7. – 1999. XI. 1.)

A komáromi bencés gimnázium eminens diákja (1930–38)

Matematika-fizika szakos tanár

A tömegspektrometria magyarországi megalapozója

A klaszterkémia nemzetközileg elismert szaktekintélye

1957-ig az ELTE docense, 1956-ban az ELTE TTK forradalmi bizottságának elnöke

A tokiói műszaki egyetem vendégtanára

Haláláig – 30 éven át – a felvidéki magyar fizikatanár-képzés támasza, fáradhatatlan, lelkes segítője a nyitrai egyetemen

A magyar köztársasági érdemérem tisztikeresztjének kitüntetettje

Élete, munkássága, elhivatottsága, a szülőföldhöz és az alma materhez való ragaszkodása, szeretete példaértékű

„légy hív mindhalálig, és néked adom az életnek koronáját." Jel.2.10.

A tavalyi évben, május 12-én az ELTE TTK Gömb aulájában Békésy György és Ortvay Rudolf mellszobra között egykori tanítványai kezdeményezésére emléktáblát avattak, megörökítendő a Tanár úr emlékét.

Az idei tanév versenyére 2011. december 1-jén került sor, amikor is küzdelemre készen ült be iskolánk aulájába három anyaországi, nyolc felvidéki gimnázium és középiskola 81 diákja, hogy kétszer másfél órás versenyen eldöntse, ki az, aki legsikeresebben oldja meg a kitűzött matematika és fizika feladatokat.

A verseny megkezdése előtt üdvözöltük Cornides Istvánnét, aki mindig nagy szeretettel jön néhai férje alma materébe.

A verseny díjazottjai

1. évfolyam

1. Tamás Ambrus, Bencés Gimnázium, Pannonhalma
2. Báskay János, Szent István Gimnázium, Budapest
3–4. Bese Bernadett, Selye János Gimnázium, Komárom
3–4. Rózsa Tamás, Magángimnázium, Dunaszerdahely

2. évfolyam

1. Balogh Tamás, Pázmány Péter Gimnázium, Érsekújvár
2. Markó Ádám, Selye János Gimnázium, Komárom
3. Kovács Benjámin, Szent István Gimnázium, Budapest

3. évfolyam

1. Földes Balázs, Selye János Gimnázium, Komárom
2. Mázik László, Selye János Gimnázium, Komárom
3. Skoda Máté, Selye János Gimnázium, Komárom

4. évfolyam

1–2. Kaposi Ágoston, Bencés Gimnázium, Pannonhalma
1–2. Schulhoff József, Simon Eötvös József Gimnázium, Tata
3. Csala Tamás, Szent István Gimnázium, Budapest

A díjazottak közül a tavalyi versenyen is díjazott volt Markó Ádám, Mázik László és Kaposi Ágoston. Kaposi Ágoston mindkét évben kategóriájának győztese lett.

A díjkiosztásra hagyományosan a Magyar Kultúra Napján kerül sor.

A feladatsorokat készítették és a dolgozatokat javították a matematika és a fizika munkaközösség tanárai: Bukor Emőke, Horváth Katalin, Kalácska József, Keszegh István, illetve Hevesi Anikó, Szakál Ilona és Szabó Endre.

A versenyen kitűzött feladatok

1. évfolyam

1. Legyen az $\alpha = 120°$ szögű körszelet kerülete p. Határozd meg a körszelet területét! (Az eredményt pontos értékekkel add meg!)

2. Az a oldalú ABC szabályos háromszög tetszőleges P belső pontjának oldalakra eső merőleges vetülete a csúcsokkal szemközti oldalakra rendre E, F és G. Fejezd ki az a oldallal az $AG + BE + CF$ összeg nagyságát!

3. Adott az $A(x) = \dfrac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1}$ kifejezés.

a) Bizonyítsd be, hogy bármely x valós számra $A(x) = 3$.

b) Határozd meg az $A(x)$ kifejezés legnagyobb értékét!

2. évfolyam

1. Határozzuk meg azt a legkisebb, 11-gyel osztható hatjegyű számot, amelynek a számjegyei különbözőek!

2. Adott az ABC derékszögű háromszög; befogóinak hossza $|AC| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm. Jelöljük a C pontnak az AB átfogóra húzott merőleges vetületét D ponttal. Legyen az ACD háromszög ill. a BCD háromszög beírt körének középpontja O_1 ill. O_2. Határozzuk meg az O_1, O_2 középpontok távolságát!

3. Oldjuk meg az

$$\frac{x}{y} = x + \frac{1}{x}$$
$$\frac{4y}{3z} = 2y + \frac{1}{2y}$$
$$\frac{6z}{x} = 3z + \frac{1}{3z}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán!

3. évfolyam

1. Legyen x, y olyan pozitív valós szám, amelyre érvényes, hogy

$$(1 + x) \cdot (1 + y) = 2$$

Bizonyítsátok be, hogy $xy + \dfrac{1}{xy} \geq 6$!

2. Egy tetszőleges természetes számot elosztunk a 2, 3, 4, …, 11 számok mindegyikével, majd a kapott maradékokat összeadjuk. (A maradék lehet 0 is.) Határozzátok meg az összes olyan 25000-nél kisebb természetes számot, amelyek esetében ez az összeg a lehető legkisebb!

3. A k_1 és k_2 körvonalak M és N pontban metszik egymást. Az M pontban mindkét körvonalhoz érintőt húzunk. A k_1 körvonalhoz húzott érintő a k_2 körvonalat B pontban, a k_2 körvonalhoz húzott érintő a k_1 körvonalat A pontban metszi. Az AN egyenes a k_2 körvonalat C pontban, a BN egyenes a k_1 körvonalat D pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy $|AC| = |BD|$!

4. évfolyam

1. Egy ABC egyenlőszárú, de nem egyenlő oldalú háromszögben jelölje S a beírt kör középpontját, T a súlypontot. Legyen $|AB| = c$ az alap, $|BC| = |AC| = b$ a szárak. Legyen P a C-ből induló magasságvonal talppontja.

a) Számítsátok ki az oldalak segítségével a $|PT| : |PS|$ arányt!

b) Határozzátok meg a háromszög oldalainak arányát, ha $|PT| : |PS| = 2$!

2. Jelölje n az összes olyan hatjegyű szám összegét, amelyek az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek mindegyikét tartalmazzák. Határozzátok meg, milyen maradékot ad az n szám 77-tel osztva!

3. Az a, b nem negatív számokra $a^3 + b^3 = 2ab$. Igaz-e, hogy akkor $a^2 + b^2 \leq 1 + ab$?

Dr. Darvasi Gyula

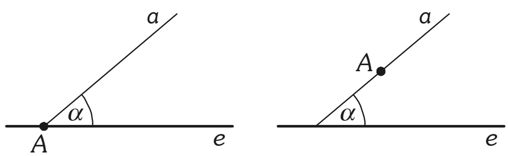
Szerkesszünk szögvonalzóval!

A szögvonalzó olyan beosztás nélküli vonalzó, amelynek két nem párhuzamos éle van: közös pontjukat a szögvonalzó csúcsának, α-val jelölt szögüket a szögvonalzó szögének nevezzük, amire $0° < \alpha < 180°$ teljesül. A $0° < \alpha < 90°$, az $\alpha = 90°$ és a $90° < \alpha < 180°$ eseteknek megfelelően használatos a hegyesszögű, a derékszögű, illetve a tompaszögű szögvonalzó elnevezés ([1] 204–209. oldal, [5] 97–105. oldal, [6] 131–132. és 259–261. oldal, [7] 55–59. oldal). Ezzel a vonalzóval a síkban az alábbi szerkesztési lépések elvégzése megengedett:

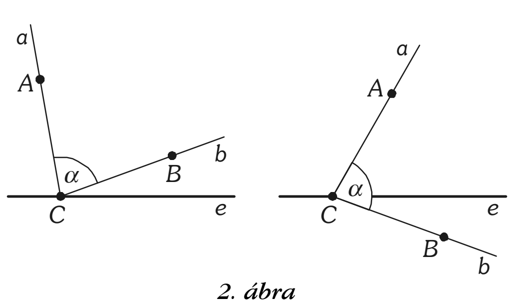
1. Két adott pont összekötő egyenesének megrajzolása.
2. Adott ponton áthaladó és egy adott egyenessel a vonalzó szögét bezáró egyenes megrajzolása.
3. Két adott ponton át egy-egy olyan egyenes megrajzolása, amelyek egy adott egyenesen metszik egymást úgy, hogy hajlásszögük egyenlő a vonalzó szögével.

Az 1. lépéshez a szögvonalzónak csak az egyik éle szükséges, vagyis ez a szerkesztés az euklideszi vonalzóval ugyanígy elvégezhető. A 2. lépésnél két eset különböztethető meg aszerint, hogy az adott pont illeszkedik az adott egyenesre, avagy nem *(1. ábra)*. A szerkesztés mindkét esetben azzal kezdődik, hogy a szögvonalzó egyik élét az adott egyenesre illesztjük, majd ezt az illeszkedést megtartva a vonalzót eltoljuk úgy, hogy az első esetben a vonalzó csúcsa az adott pontba essen, míg a második esetben a vonalzó másik éle az adott pontra illeszkedjen, s végül a szögvonalzónak az adott egyenesre nem illeszkedő éle mentén mindkét esetben egyenest rajzolunk. $\alpha = 90°$ esetén pontosan egy, míg $\alpha \neq 90°$ esetén két ilyen egyenes húzható, amelyek az adott pontból az adott egyenesre állított merőlegesre tengelyesen szimmetrikusak. A 3. lépés végrehajtásának előfeltétele, hogy a két adott pont ne illeszkedjen az adott egyenesre *(2. ábra)*. Ekkor a szögvonalzót úgy helyezzük el, hogy egyik éle az egyik adott pontra, a másik éle pedig a másik adott pontra illeszkedjen, majd ezt az illeszkedést megtartva a szögvonalzót úgy mozgatjuk, hogy csúcsa az adott egyenesre essen, s ezután mindkét éle mentén egyenest rajzolunk. Az adott e egyenesen így előálló C pont rajta van az $\overline{AB}$ szakasz α-szögű látókörívén, s minthogy az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre szimmetrikusan két ilyen körív létezik, ezért a kívánt C pontra $0° < \alpha < 90°$ esetén 0, 1, 2, 3 vagy 4, míg $90° \leq \alpha < 180°$ esetén 0, 1 vagy 2 megoldás adódhat.

A 2. és 3. lépésnél előálló egyenesek euklideszi eszközökkel (körzővel és beosztás nélküli egyélű vonalzóval) is megszerkeszthetők, ha tudunk euklideszi módon szerkeszteni α mértékű szöget. A szögvonalzós szerkesztések elméletét George E. Martin ([5] 99. oldal) szerint elsőként Poncelet dolgozta ki részletesen, s eredményeit 1822-ben tette közzé. 1890-ben Adler bebizonyította, hogy minden körzővel és beosztás nélküli egyélű vonalzóval elvégezhető szerkesztés



1. ábra



2. ábra

megoldható kizárólag csak szögvonalzót használva. Megfordítva: a szögvonalzóval megoldható szerkesztések pontosan akkor végezhetők el körzővel és beosztás nélküli egyélű vonalzóval, ha a rendelkezésre álló adatokból a szögvonalzó szöge megszerkeszthető körzővel és egyélű vonalzóval ([6] 259. oldal).

Az alábbiakban a [2]-ben és [3]-ban tárgyalt síkgeometriai szerkesztésekre mutatunk be a teljesség igénye nélkül olyan megoldási módokat, amelyek kivitelezéséhez csak szögvonalzó használatát engedjük meg. Mindezen szerkesztések közül itt nem tárgyaljuk azokat, amelyek menete kizárólag a szögvonalzót használva is teljesen ugyanaz marad, de az olvasó megteheti, hogy a szögvonalzó használatának gyakorlásaként ezeket is elvégzi, jóllehet nem kell foglalkoznia a csak betoló vonalzóval megoldható szögharmadolással és köbgyökvonással. Ha valamely szerkesztésnél egy azt megelőzőt felhasználunk, akkor annak részletes kivitelezését az ábránk jobb áttekinthetősége céljából mellőzzük és csupán a végeredményként előálló pontot vagy egyenest rajzoljuk be, ám egy újabb pont vagy egyenes megszerkesztése kizárólag szögvonalzóval értendő. Néhány ábrában mégis találhatók körívek, de csak szemléltetés céljából, s így azok sehol sem képezik a szerkesztés részét. Ha egy bemutatott szerkesztés bizonyítására nem térünk ki, akkor az vagy megtalálható az adott hivatkozásban, vagy annak elvégzéséhez elegendő néhány elemi geometriai tételnek az ismerete.

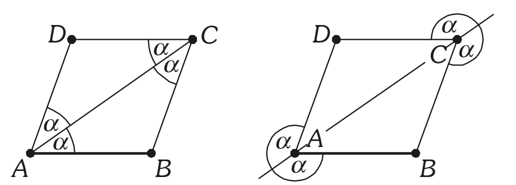
A hegyes- és tompaszögű szögvonalzóval előállítható egy olyan $ABCD$ rombusz, melynek $\overline{AB}$ oldala adott szakasz, továbbá a $BAD\sphericalangle$ mértéke hegyesszögű szögvonalzó esetén 2α, tompaszögű szögvonalzóra pedig $360° - 2\alpha$ *(3. ábra)*. Ehhez az A pontot a szögvonalzó csúcsának választva és a szögvonalzó egyik élét az $\overrightarrow{AB}$ félegyenesre illesztve a szögvonalzó másik éle mentén egyenest rajzolunk, amire az előbbi eljárást megismételjük; így megkapjuk az A-ból kiinduló átló és a másik oldal egyenesét. Ezután az átló egyenesének B pontot tartalmazó oldalán a szögvonalzó egyik élét az átló egyenesére illesztjük úgy, hogy a másik éle ne legyen $\overleftrightarrow{AB}$-vel párhuzamos, majd addig toljuk el a szögvonalzót, míg a B pontra nem illeszkedik ez az éle, ami mentén egyenest rajzolva megkapjuk a rombusz C csúcsát. S végül a C pontot a szögvonalzó csúcsának választva a szögvonalzó egyik élét az átlónak B pontot nem tartalmazó oldalán az átló egyenesére illesztjük úgy, hogy a másik éle $\overleftrightarrow{AB}$-vel párhuzamos legyen, majd ezen éle mentén egyenest rajzolunk, ami a rombusz elsőként megszerkesztett oldalának egyenesét a még hiányzó D csúcspontban metszi ([6] 261–262. oldal).

Tárgyalásunkat három részre tagoljuk aszerint, hogy a szögvonalzó hegyes-, derék- vagy tompaszögű. Egyúttal azt is hangsúlyozzuk, hogy szerkesztés alatt a továbbiakban mindig a megfelelő alcím szerinti szögvonalzós szerkesztés értendő, hacsak mást nem mondunk.

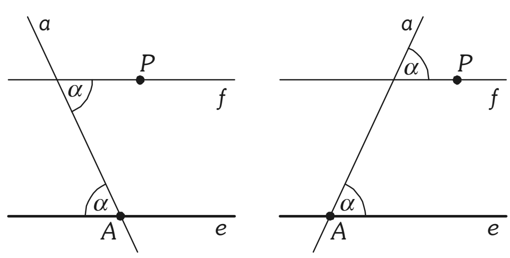
Hegyesszögű szögvonalzós szerkesztések

Párhuzamos egyenes

Az adott e egyenessel egy rá nem illeszkedő adott P ponton áthaladó f párhuzamos szerkesztéséhez rögzítjük az e egyenes valamely A pontját *(4. ábra)*, amit a szögvonalzó csúcsának választva a szögvonalzó egyik élét az e egyenesre illesztjük, majd a másik éle mentén az A ponton át egy a egyenest rajzolunk. Ezután a szögvonalzó egyik élét erre az a egyenesre illesztjük, miközben a szögvonalzó a-nak P pontot tartalmazó oldalán helyezkedik el és a szögvonalzó szöge az A-nál előbb megrajzolt szöggel együtt váltó-, illetve egyállású szögpárt alkot,



3. ábra

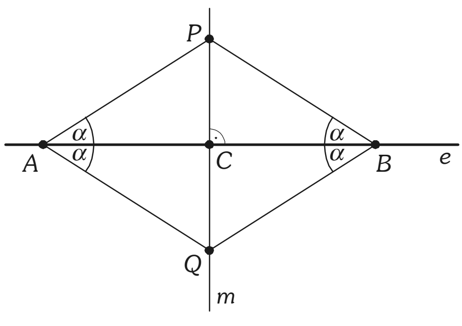


4. ábra

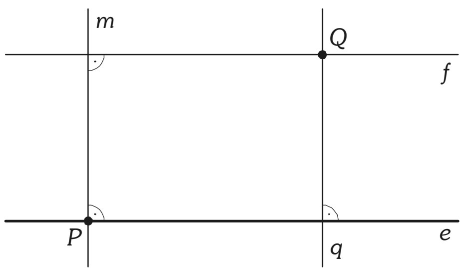
majd ezt az illeszkedést megtartva a szögvonalzót eltoljuk úgy, hogy a másik éle az adott P pontra essen, s végül ezen él mentén meghúzzuk az f egyenest, ami a keresett párhuzamos ([7] 56. oldal). Megjegyezzük, hogy a leírt szerkesztés a $P \notin a$ elrendezésre vonatkozik: ha viszont $P \in a$, akkor a második lépésben P a szögvonalzó csúcsa lesz.

Merőleges egyenes

Ha az adott e egyenesre egy rá nem illeszkedő adott P pontból kívánunk m merőlegest állítani *(5. ábra),* akkor az e egyenes P pontot tartalmazó oldalán a szögvonalzó egyik élét kétféleképpen az e egyenesre illesztjük, majd ezt az illeszkedést megtartva a szögvonalzót eltoljuk úgy, hogy a másik éle a P pontra essen, s ezen él mentén egy-egy egyenest rajzolunk, amelyek az e egyenest az A és B pontban metszik. Ezután az A, illetve B pontot a szögvonalzó csúcsának választva a szögvonalzó egyik élét e-re illesztjük, s a másik éle mentén egy-egy egyenest rajzolunk úgy, hogy azok az e egyenes P pontot nem tartalmazó oldalán egy Q pontban messék egymást. Ekkor $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes a keresett m merőleges, minthogy az $APBQ$ négyszög egy rombusz ([7] 56. oldal).



5. ábra



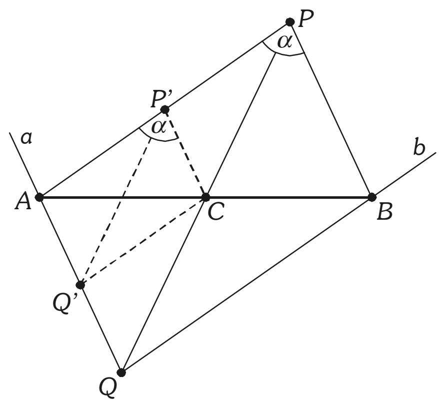
6. ábra

Ha viszont az adott e egyenesre egy rá illeszkedő P pontban kell m merőlegest állítani *(6. ábra),* akkor egy $Q \notin e$ ponton át e-vel párhuzamosan szerkesztett f egyenesre az előbbi módon P-ből m merőlegest állítunk, ami P-ben merőlegesen metszi az e egyenest. Az is megtehető, hogy a $Q \notin e$ pontból e-re állított q merőlegessel a $P \in e$ ponton át m párhuzamost szerkesztünk.

A merőleges szerkesztése az $\alpha = 45°$ speciális esetben egyszerűsödik. Az 5. ábrán az A pont előállítása után a 45°-os szögvonalzó csúcsának a P pontot választva az egyik élét a $\overrightarrow{PA}$ félegyenesre illesztjük úgy, hogy a másik éle ne legyen e-vel párhuzamos; ezen él mentén megrajzolt egyenes az m merőleges. A 6. ábrán a 45°-os szögvonalzó csúcsának a P pontot választva és egyik élét az e egyenesre illesztve a másik éle mentén egy P kezdőpontú félegyenest rajzolunk, amire az előbbi eljárást megismételve az m merőlegest kapjuk.

Szakasz felezése és kétszerezése

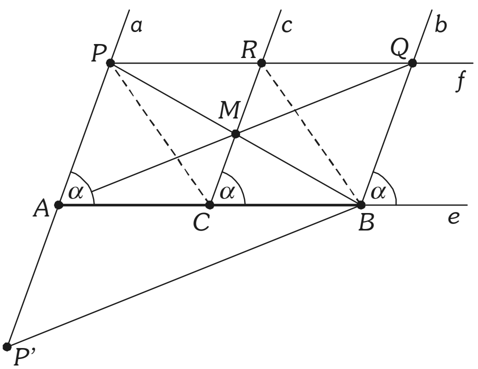
Ha az adott $\overline{AB}$ szakasz C felezőpontja a szerkesztendő, akkor egy megoldás azonnal leolvasható az 5. ábráról, ahol m egyenes az $\overline{AB}$ szakasz felezőmerőlegese. Egy másik egyszerű megoldáshoz jutunk *(7. ábra),* ha a szögvonalzó egyik élét az A, másik élét a B pontra illesztve, s a szögvonalzó csúcsát valamely P pontban rögzítve megrajzoljuk az $\overline{AP}$ és $\overline{BP}$ szakaszokat, majd az A ponton át $\overline{BP}$-vel és a B ponton át $\overline{AP}$-vel párhuzamos a és b



7. ábra

egyenesek Q metszéspontját összekötjük P-vel: ekkor $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes az $\overline{AB}$ szakaszt a keresett C felezőpontban metszi. A szerkesztés során lényeges, hogy az $APBQ$ négyszög paralelogramma, melynek a P-nél lévő szöge tetszőleges 0° és 180° közötti szög lehet; vagyis ez a szerkesztés ugyanígy kivitelezhető a derékszögű és a tompaszögű szögvonalzóval, sőt a P pontnak csupán a $P \notin \overleftrightarrow{AB}$ feltételt kielégítő megadása után még a betoló és a párhuzamos élű vonalzóval is. A kissé bonyolultabb harmadik módhoz (8. ábra) a szögvonalzó egyik élét az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre illesztve a szögvonalzót úgy toljuk el, hogy csúcsa rendre az A, illetve B pontba essen, ahol a másik éle mentén megrajzoljuk az a, illetve b egyeneseket. Ezután felveszünk egy $P \in a \setminus \{A\}$ pontot és ezen át $\overleftrightarrow{AB}$-vel f párhuzamost szerkesztünk, ami b egyenest egy Q pontban metszi. Végül az $ABQP$ paralelogramma $\overline{AQ}$ és $\overline{BP}$ átlóinak M metszéspontján át a-val c párhuzamost húzunk, ami az $\overline{AB}$ szakaszt a keresett C felezőpontban metszi.

Ha az $\overline{AC}$ szakaszt tekintjük adottnak, akkor annak kétszerezéséhez a 7. ábrán a felezésnél megismert módon előállítjuk a P' és Q' pontokat, s ezután a C ponton át $\overline{P'Q'}$-vel párhuzamost húzunk, ami az $\overleftrightarrow{AP'}$ egyenest a P pontban metszi. Ezt a pontot a szögvonalzó csúcsának választva a szögvonalzó egyik élét $\overleftrightarrow{AP}$-nek a C pontot tartalmazó oldalán $\overleftrightarrow{AP}$-re illesztjük úgy, hogy a másik éle $\overline{AQ'}$-vel párhuzamos legyen, s ezen éle mentén egyenest rajzolunk, ami az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenest a keresett B pontban metszi. A 8. ábrán pedig a felezésnél leírtak szerint előbb előállítjuk az a és c egyeneseket, majd az azokat P és R pontokban metsző $\overleftrightarrow{AC}$-vel párhuzamos f egyenest. A folytatáshoz két mód is kínálkozik: az R ponton át $\overleftrightarrow{CP}$-vel párhuzamos egyenes, valamint a $\overline{CR}$ szakasz M felezőpontját és a P pontot összekötő egyenes az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenest a keresett B pontban metszi.



8. ábra

Pont tükrözése

Az 5. ábra alapján a $P \notin e$ pontnak megszerkeszthető az e egyenesre vonatkozó tükörképe, ami a Q pont lesz.

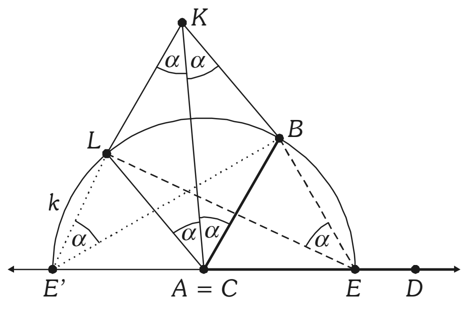
A 7. és 8. ábrák szerint elvégzett kétszerezés pedig az A pontnak C pontra vonatkozó tükörképéhez vezet, ami a B ponttal azonos. Továbbá a 8. ábrán a B ponton át $\overleftrightarrow{AQ}$-val párhuzamos, az $\overleftrightarrow{AP}$ egyenest P-nek A-ra vonatkozó P' tükörképében metszi.

Szakasz másolása

Az adott $\overline{AB}$ szakasznak egy adott $\overrightarrow{CD}$ félegyenesre történő másolásához keressük $\overrightarrow{CD}$-nek azon E pontját, amelyre $\overline{CE} \cong \overline{AB}$ teljesül.

Az $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ eset szerkesztésének menete azonos a betoló vonalzóséval ([3] 13. oldal 7a. 7b és 7c ábrák).

Az $A = C$ és $\overline{AB} \nparallel \overrightarrow{CD}$ esetben *(9. ábra)* előbb előállítjuk az $ABKL$ rombuszt, melynek A-nál lévő belső szöge 2α mértékű. Ezután a szögvonalzó éleit B és L pontokra illesztjük úgy, hogy a szögvonalzó csúcsa a $\overrightarrow{CD}$ félegyenesre essen: ez a csúcspont lesz a keresett E pont ([5] Exercise 6.17, p. 104). Az $ABKL$



9. ábra

rombuszt úgy kell elhelyezni, hogy a $\overrightarrow{CD}$ félegyenes ne haladjon a $BAL\sphericalangle$ szögtartományban; ez elérhető a rombusz körüljárási irányának alkalmas megválasztásával. Megjegyezzük, hogy ha a szögvonalzó éleinek B és L pontokra való illeszkedését megtartva a szögvonalzó csúcsa a $\overrightarrow{CD}$-vel ellentétes félegyenesre esik, akkor ez a csúcspont az E-nek C-re vonatkozó E' tükörképe lesz.

Ha pedig az $A \neq C$ és $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{CD}$ eset áll fenn, akkor az $\overline{AB}$ szakaszt előbb átmásolhatjuk egy A kezdőpontú és $\overrightarrow{CD}$-vel párhuzamos $\overrightarrow{AD'}$ félegyenesre ([3] 13. oldal 7d ábra), vagy pedig egy C kezdőpontú és $\overrightarrow{AB}$-vel párhozamos félegyenesre, s végül az így kapott szakaszt az adott $\overrightarrow{CD}$ félegyenesre.

Szög felezése és kétszerezése

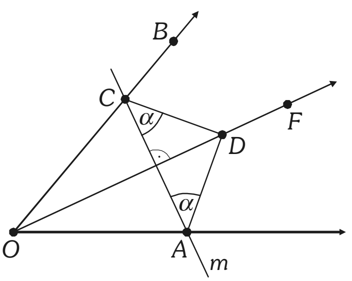
Minthogy egy adott $AOB\sphericalangle$ szög felezése $m(AOB\sphericalangle) = 180°$ esetén az O-ban $\overleftrightarrow{AB}$-re állított merőleges megszerkesztéséhez vezet, továbbá $m(AOB\sphericalangle) > 180°$ esetén az $AOB\sphericalangle$-et 360°-ra kiegészítő szög felezésével megoldható, ezért a szögfelezésnél elegendő a $0° < m(AOB\sphericalangle) < 180°$ esettel foglalkozni. Legyen adott egy ilyen $AOB\sphericalangle$, melynek $\overrightarrow{OF}$ szögfelezőjét kívánjuk megszerkeszteni *(10. ábra)*. Ehhez az $\overline{OA}$ szakaszt átmásoljuk az $\overrightarrow{OB}$ szárra: így kapjuk a C pontot. Ezután a szögvonalzó egyik élét az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenesre illesztjük úgy, hogy a szögvonalzó csúcsa rendre az A, illetve C pontba essen, majd a másik éle mentén (az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenes O pontot nem tartalmazó oldalán) egy-egy egyenest rajzolunk, amelyek egy O-tól különböző D pontban metszik egymást; ekkor $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF}$ félegyenes a kívánt szögfelező.

Ha a 10. ábrán az $AOF\sphericalangle$ szöget tekintjük adottnak, akkor annak kétszerezéséhez A-ból állítsunk $\overrightarrow{OF}$-re m merőlegest, amire a szögvonalzó egyik élét ráillesztjük úgy, hogy a szögvonalzó csúcsa az A pontba essen, majd a másik éle mentén egyenest rajzolunk, ami az $\overrightarrow{OF}$-et egy D pontban metszi. Ezután az m egyenesen a szögvonalzót átfordítjuk, s addig toljuk el, míg a másik éle a D pontba nem jut; ezen él mentén rajzolt egyenes az m merőlegest egy olyan C pontban metszi, amelyre az $AOC\sphericalangle$ szög mértéke kétszerese az $AOF\sphericalangle$ szögének.

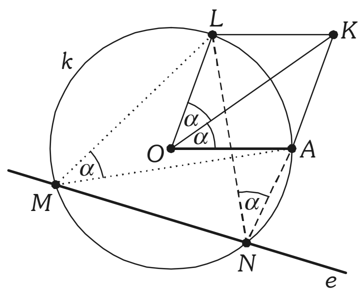
Kör és egyenes metszéspontjai

Jelölje $k = k(O, A)$ az O középponttal és a körvonal egy A pontjával megadott kört, továbbá k síkjában e az O-tól OA-nál kisebb távolságra lévő adott egyenest, s legyen $k \cap e = \{M, N\}$. Ezen M és N metszéspontok megszerkesztése $O \in e$ esetén elvégezhető az $\overline{OA}$ szakasznak az e egyenes O kezdőpontú félegyeneseire történő másolása révén, lásd a 9. ábrát, ahol most $\overleftrightarrow{CD} = e$, $C = O$, $B = A$, $E' = M$ és $E = N$.

Ha viszont $O \notin e$ *(11. ábra)*, akkor előbb előállítjuk az $OAKL$ rombuszt, melyre $m(AOL\sphericalangle) = 2\alpha$ teljesül, s ezután a szögvonalzó éleit az A és L pontokra illesztve úgy mozgatjuk el a szögvonalzót, hogy annak csúcsa az e egyenesre essen, ami két esetben lehet: ekkor a szögvonalzó csúcsa adja a keresett M és N pontokat ([6] 260–261. oldal, [7] 56. oldal). Az $OAKL$ rombuszt úgy kell megszerkeszteni, hogy a keresett $\overrightarrow{OM}$ és $\overrightarrow{ON}$ félegyenesek közül legalább



10. ábra



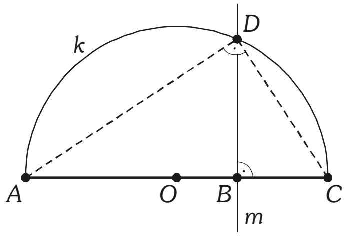
11. ábra

az egyik ne haladjon az $AOL\sphericalangle$ szögtartományban, ami a szakasz másolásánál leírt módon elérhető.

Két szakasz mértani közepe

Az $\overline{AB}$ és $\overline{BC}$ adott szakaszok mértani közepének a magasságtételre alapuló megszerkesztéséhez *(12. ábra)* legyen B az $\overline{AC}$ szakasz belső pontja, m a B-ben $\overleftrightarrow{AC}$-re emelt merőleges, $k = k(\overline{AC})$ az $\overline{AC}$ átmérőjű kör, továbbá D a k és m egyik közös pontja: ekkor $BD = \sqrt{AB \cdot BC}$. Az eddigiek alapján mindez megszerkeszthető csak szögvonalzóval, miközben a k kört nem rajzoljuk meg. A befogótételre alapuló szerkesztést átengedjük az olvasónak.

Megjegyezzük, hogy $AB = 3$ és $BC = 1$ esetén $BD = \sqrt{3}$, s így a BCD derékszögű háromszögben C-nél 60° és D-nél 30° van.

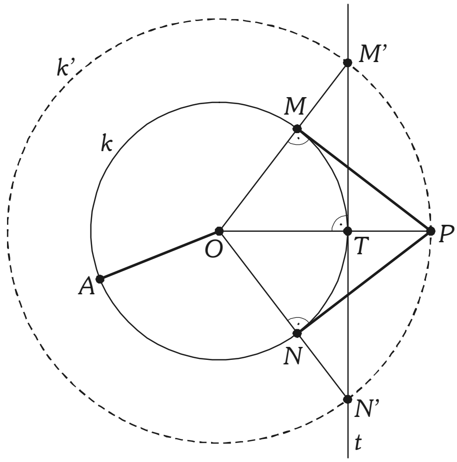


12. ábra

Kör érintője

A $k = k(O, A)$ körnek az A pontbeli t érintője azonos az $\overrightarrow{OA}$-ra A-ban állított merőlegessel.

Legyen P az adott $k(O, A)$ kör külső pontja *(13. ábra)*. A P-ből k-hoz húzható két érintő megszerkesztéséhez az Eukleidész által leírt utat járjuk be ([4] III. 17. tétel, 115. oldal). Ehhez először is előállítjuk a k körvonal és az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenes azon T közös pontját, amelyre O–T–P teljesül. Ezután megszerkesztjük a k kör T-beli t érintőjét, a $k'(O, P)$ kör és t egyenes M' és N' közös pontjait, majd az $\overline{OM'}$ és $\overline{ON'}$ szakaszokra P-ből állított merőlegesek M és N talppontjait, ekkor $\overrightarrow{PM}$ és $\overrightarrow{PN}$ a keresett érintők. Megjegyezzük, hogy a Thalész-tételre alapuló közismert megoldást azért kerültük ki, mivel az adott k kör és az $\overline{OP}$ szakasz fölé rajzolt Thalész-kör közös pontjainak szögvonalzós megszerkesztése kissé bonyolultabb: ugyanis előbb meg kell szerkeszteni e két metsző kör hatványvonalát (F.2052-es feladat, KöMal, 1977/1. szám, 10–11. oldal), ami által a probléma visszavezethető az egyik kör és a hatványvonal metszéspontjainak megszerkesztésére.



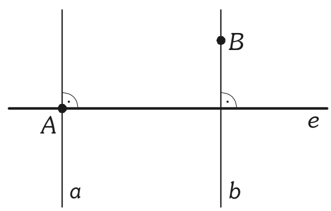
13. ábra

Derékszögű szögvonalzós szerkesztések

Az előbb megismert hegyesszögű szögvonalzós szerkesztések közül csak azokkal foglalkozunk részletesen, amelyek derékszögű szögvonalzós szerkesztési menete különböző.

Merőleges és párhuzamos

Ha az adott e egyenesre egy adott $A \in e$ vagy $B \notin e$ pontból kívánunk merőlegest állítani *(14. ábra)*, akkor a derékszögű szögvonalzó egyik élét az e egyenesre illesztve úgy toljuk el a szögvonalzót, hogy csúcsa az A-ba essen, illetve másik éle B-re illeszkedjen; ekkor az e-re nem illeszkedő él mentén megrajzolt a és b egyenesek a keresett merőlegesek.



14. ábra

Ha ugyanezen ábrán b egyenest és a rá nem illeszkedő A pontot tekintjük adottnak, akkor az A ponton áthaladó b-vel párhuzamos megszerkesztéséhez előbb A-ból b-re e merőlegest állítunk, majd A-ban e-re az a merőlegest, ami a keresett párhuzamos.

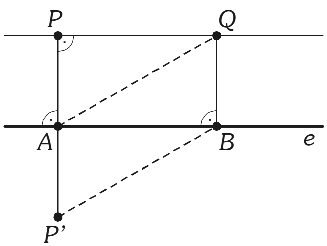
Szakasz felezése és kétszerezése

Ehhez a szerkesztéshez $\alpha = 90^\circ$ választással felhasználható a 7. ábra ([5] Exercise 6.14, p. 104), valamint a 8. ábra is, miközben a szerkesztés menete ugyanaz marad.

Pont tükrözése

Ha az adott e egyenesre egy adott $P \notin e$ pontot kívánunk tükrözni *(15. ábra),* akkor legyen A a P-ből e-re állított merőleges talppontja, Q az $\overleftrightarrow{AP}$-re P-ben állított merőlegesen egy P-től különböző pont, továbbá B a Q-ból e-re állított merőleges talppontja, amelyen át az $\overleftrightarrow{AQ}$-val párhuzamos az $\overleftrightarrow{AP}$ egyenest a keresett P' pontban metszi.

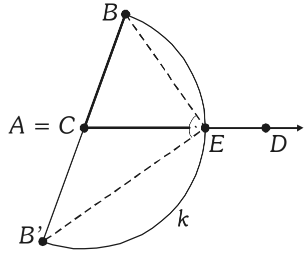
Ha az adott A pont esetén egy $P \neq A$ pontnak az A-ra vonatkozó P' tükörképét kívánjuk megszerkeszteni *(15. ábra),* akkor előbb előállítjuk az A-ban $\overleftrightarrow{AP}$-re merőleges e egyenest, s a további lépések ugyanazok, mint a tengelyes tükrözésnél. Megjegyezzük, hogy a centrális tükrözés elvégezhető a szakaszkétszerezés által is.



15. ábra

Szakasz másolása

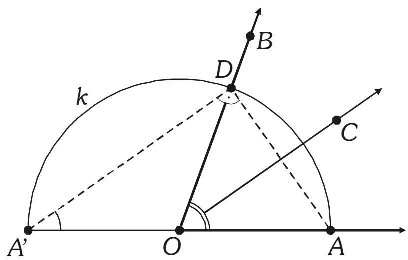
Az adott $\overline{AB}$ szakasznak egy adott $\overrightarrow{CD}$ félegyenesre történő másolásához az $A = C$ és $\overline{AB} \nparallel \overrightarrow{CD}$ esetben előbb előállítjuk B-nek C-re vonatkozó B' tükörképét *(16. ábra),* majd a derékszögű szögvonalzó éleit B és B' pontokra illesztve úgy mozgatjuk a szögvonalzót, hogy csúcsa a $\overrightarrow{CD}$ félegyenesre essen; ez a pont lesz a keresett E pont, amelyre $\overline{CE} \cong \overline{AB}$ teljesül ([5] Exercise 6.16, p. 104).



16. ábra

Szög felezése

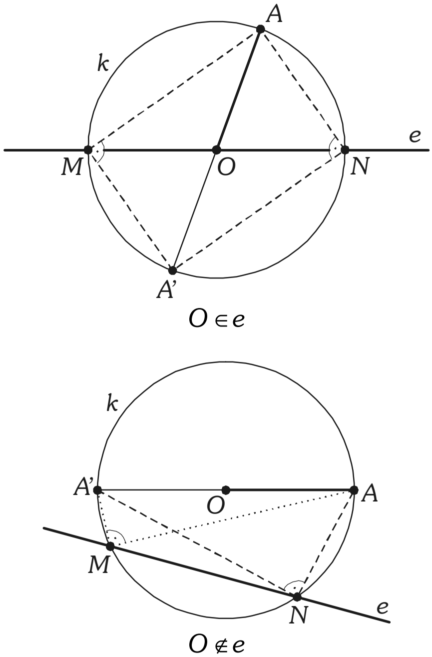
A $0^\circ < m(AOB\sphericalangle) < 180^\circ$ esetben az $AOB\sphericalangle$ megfelezéséhez előbb előállítjuk A-nak O-ra vonatkozó A' tükörképét *(17. ábra),* majd a derékszögű szögvonalzó éleit az A és A' pontokra illesztve addig mozgatjuk a szögvonalzót, míg csúcsa az $\overrightarrow{OB}$ szárra nem esik: jelölje D ezt a pontot. Ezután az O ponton át $\overleftrightarrow{A'D}$-vel párhuzamos $\overrightarrow{OC}$ félegyenes a keresett szögfelező ([5] Exercise 6.15, p. 104).



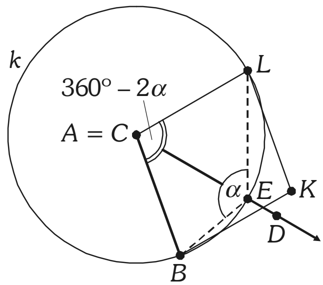
17. ábra

Kör és egyenes metszéspontjai

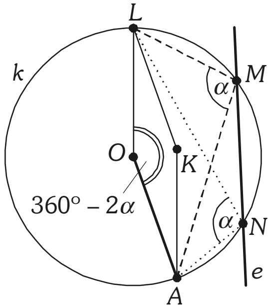
Ha az adott e egyenes az adott $k(O, A)$ kör középpontjától OA-nál kisebb távolságra halad *(18. ábra),* akkor k és e közös pontjainak megszerkesztéséhez előbb előállítjuk A-nak O-ra vonatkozó A' tükörképét, majd a derékszögű szögvonalzó éleit A és A' pontokra illesztve úgy mozgatjuk el a szögvonalzót, hogy annak csúcsa az e egyenesre essen: ez a két helyzet adja az M és N metszéspontokat ([1] 206–207. oldal, [7] 57. oldal).



18. ábra



19. ábra



20. ábra

Tompaszögű szögvonalzós szerkesztések

Ha a 4., 5. és 10. ábráinkon az α hegyesszögnek a mellékszögét tekintjük a szögvonalzó szögének, akkor azonnal észrevehető, hogy mindezen szerkesztések elvégezhetők a tompaszögű szögvonalzóval is, miközben a szerkesztés menete ugyanaz marad. Szintén változatlan a szerkesztés menete a 6., 7., 8., 9., 11., 12. és 13. ábrák esetén. A szakasz tompaszögű szögvonalzós másolásakor a 9. ábrához képest annyi az eltérés, hogy az *ABKL* rombusz *A*-nál lévő szöge $360^\circ - 2\alpha$ mértékű, továbbá a $\overrightarrow{CD}$ félegyenes a $BAL\sphericalangle$ szögtartományban halad *(19. ábra)*. Ugyanez a megjegyzés vonatkozik a kör és egyenes metszéspontjainak tompaszögű szögvonalzós szerkesztésére *(20. ábra)*. A merőleges szerkesztése az $\alpha = 135^\circ$ speciális esetben ugyanúgy egyszerűsödik, miként $\alpha = 45^\circ$ esetén.

Zárószó

A szögvonalzók közül a geometria tanítása során a hegyes- és tompaszögű mellőzött eszközök, a derékszögű viszont közismert, jóllehet az euklideszi szerkesztéseknél csak olyan lépésekhez használjuk, amelyek a derékszögű szögvonalzó nélkül is elvégezhetők. Összeállításunk célja, hogy a síkgeometriai alapszerkesztésekre bemutassuk a szögvonalzó alkalmazási lehetőségeit, s ezáltal felkeltsük az érdeklődést a többféle megoldás keresése iránt.

Irodalom

[1] Czédli Gábor – Szendrei Ágnes (1997): Geometriai szerkeszthetőség. Polygon

[2] Darvasi Gyula: Síkgeometriai alapszerkesztések betoló vonalzóval – I. rész. A Matematika Tanítása, 2011/2. szám, 8–14.

[3] Darvasi Gyula: Síkgeometriai alapszerkesztések betoló vonalzóval – II. rész. A Matematika Tanítása, 2011/3. szám, 13–20.

[4] Euklidesz (1983): Elemek. Gondolat

[5] Martin, George E. (1998): Geometric constructions. Springer

[6] Schreiber, Peter (1975): Theorie der geometrischen Konstruktionen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

[7] Szőkefalvi Nagy Gyula (1943): A geometriai szerkesztések elmélete. Minerva, Kolozsvár

Dr. Urbán János

A XLI. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5–8. osztály)

Ötödik osztály

1. Három szám összege 66. Az első szám háromszorosa a másodiknak, a második szám 14-gyel több, mint a harmadik. Számítsuk ki a három számot!

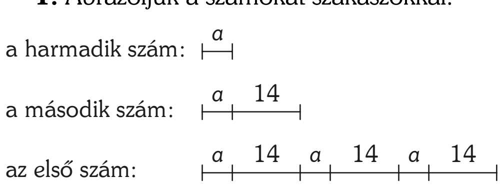
2. Az *AB* és *CD* szakaszok közös része a *CD* szakasz. Az $AB = 20$ cm, $CD = 24$ cm, és $CB = 8$ cm. Mekkora az *AD* szakasz?

3. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám a tízes számrendszerben, amelyre igaz, hogy a számjegyei szorzata 100?

4. A 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan háromjegyű szám készíthető, amelynek számjegyei különbözők? Mennyi ezeknek a háromjegyű számoknak az összege?

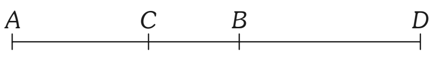
Az 5. osztály feladatának megoldása

1. Ábrázoljuk a számokat szakaszokkal:



A számok összege: $5a + 56 = 66$, tehát $a = 2$
A három szám tehát: 48, 16, 2.

2. Ábrázoljuk a szakaszokat:



Mivel $AB = 20$ cm és $CD = 24$ cm, továbbá $CD = 8$ cm, $AD = 20 + 24 - 8 = 36$ cm.

3. A 100-at három tényező szorzatára egyféleképpen tudjuk úgy bontani, hogy mindegyik tényező számjegy: $100 = 4 \cdot 5 \cdot 5$.
Két számjegy szorzataként nem állítható elő a 100.
Így a legkisebb szám háromjegyű és ez a 455.

4. A háromjegyű szám első jegye 4-féle, második jegye 3-féle, harmadik jegye 2-féle lehet, tehát összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ adott tulajdonságú háromjegyű szám készíthető.
Mindhárom helyiértéken mind a 4 számjegy 6-szor szerepel. Tehát az egyesek helyén álló számjegyek összege $6(3 + 4 + 5 + 6) = 108$.
Ugyanennyi a tízesek és a százasok helyén álló számjegyek összege is, tehát a 24 szám összege: $10\,800 + 1080 + 108 = 11\,988$.

Hatodik osztály

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege 2012?

2. Az *ABCD* téglalap *AB*, illetve *CD* oldalán a *P* és *R* pontok az *A*-hoz, illetve *C*-hez közelebbi harmadoló pontok. A *Q* és *S* pontok a *BC*, illetve *DA* oldalak felezőpontjai. Hányad része a *PQRS* paralelogramma területe az *ABCD* téglalap területének?

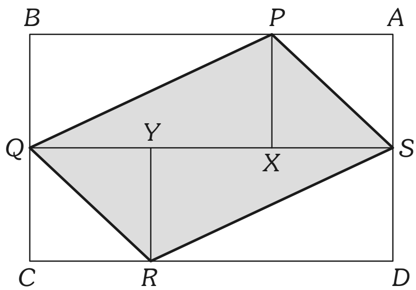
3. Tizenkét egymást követő pozitív egész szám összege 246. Melyek ezek a számok?

4. Az 1-től el kell jutni a 2012-ig pozitív egész számokon át a következő kétféle művelet alkalmazásával: az utoljára kapott számhoz 1-et adunk, vagy a számot megkétszerezzük. Mely számokon át vezet az út 1-től 2012-ig a lehető legkevesebb lépésben?

A 6. osztály feladatainak megoldása

1. A legkisebb pozitív egésznek a számjegyei a lehető legnagyobbak, tehát a legtöbb 9-es szerepel benne.
Mivel $2012 = 9 \cdot 223 + 5$, ezért a keresett szám 224 jegyű, az első jegye 5, a többi 223 jegye 9.

2. Kössük össze a Q és S pontokat, és P-ből, illetve R-ből állítsunk merőlegest QS-re, ezek talppontja legyen X és Y.



Az eredeti téglalapot így 4 téglalapra bontottuk. Ezen téglalapok területének a fele tartozik a $PQRS$ paralelogrammához. Tehát a paralelogramma területe a téglalap területének a fele.

3. Tizenkét pozitív egész szám összegét így írhatjuk fel:

$$n + 1 + n + 2 + n + 3 + \ldots + n + 12 = 246$$

A bal oldal így írható:

$$12n + 6 \cdot 13 = 246,$$

ebből $12n = 168$, és $n = 14$.
Tehát a keresett számok: 15, 16, 17, 18, ..., 26.

4. Induljunk el fordítva, a 2012-től az 1-et akarjuk elérni. A két lépés most: 2-vel való osztás, 1 kivonása.
Minél több 2-vel való osztást célszerű elvégezni, és minél kevesebb 1 kivonását.
Minden páros számot tudunk 2-vel osztani, páratlan számból csak 1-et lehet kivonni.
Így a következő sorozatot kapjuk:

2012, 1006, 503, 502, 251, 250, 125,
124, 62, 31, 30, 15, 14, 7, 6, 3, 2, 1

Így tehát 17 lépésben eljuthatunk 1-től 2012-ig, de kevesebbel nem.

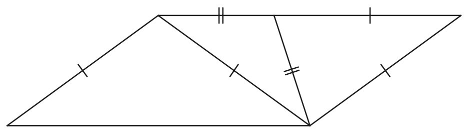
Hetedik osztály

1. A 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan 6-tal osztható négyjegyű szám készíthető, amelynek a számjegyei különbözők?

2. A hetedik osztályosok 40%-a fiú, a többi lány. A hetedikes lányok 20%-a szemüveges. A hetedik osztály hány százalékát teszik ki a nem szemüveges lányok?

3. Igazoljuk, hogy ha p és $p^2 + 8$ prímszámok, akkor $p^2 + p + 1$ is prímszám!

4. Egy paralelogramma az ábrán látható módon három egyenlőszárú háromszögre bontható. Számítsuk ki a paralelogramma szögeit.



5. Adott egy háromszög, és a belsejében 30 pont úgy, hogy ezek közül semelyik 3 sem esik egy egyenesbe, és bármely két belső pont által meghatározott egyenesen nincs rajta a háromszög egyik csúcsa sem. A háromszöget kisebb háromszögekre bonthatjuk úgy, hogy minden ilyen részháromszög minden csúcsa valamelyik belső pont, vagy a háromszög csúcsa, és mind a 30 belső pont és a 3 csúcs is valamelyik kis háromszög (esetleg többnek is) csúcsa. Hány kis háromszögből áll a felbontás?

A 7. osztály feladatainak megoldása

1. A 6-tal osztható számok azok, amelyek 2-vel és 3-mal is oszthatók, tehát párosak, és számjegyeik összege osztható 3-mal.
Az adott számjegyekből kiválasztott számnégyesek közül csak a

$$3+4+5+6=18 \text{ és a } 2+3+4+6=15$$

összeg osztható 3-mal, tehát ezekből a számjegyekből lehet 6-tal osztható négyjegyű számokat készíteni.
A 3, 4, 5, 6 számjegyekből készíthető páros számok 4-re vagy 6-ra végződnek, összesen $6+6=12$ ilyen van.
A 2, 3, 4, 6 számjegyekből készíthető páros számok 2-re, 4-re vagy 6-ra végződnek, összesen $6+6+6=18$ ilyen szám van.
Tehát 30 db kívánt tulajdonságú szám van.

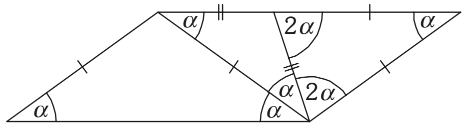
2. Készítsünk ábrát!

Fiúk	Lányok
40%	60%

A lányok 20%-a, tehát ötöd része szemüveges, tehát $\frac{4}{5}$ része, azaz $60\cdot\frac{4}{5}=48\%$-a a 7. osztálynak a nem szemüveges lányok.

3. A $p=3$ jó, mert ekkor $p^2+8=17$ és $p^2+p+1=13$ is prímszám.
Ha $p\neq 3$ prímszám, akkor p nem osztható 3-mal, így p a 3-mal osztva 1 vagy 2 maradékot ad, de ekkor p^2 a 3-mal osztva 1 maradékot ad, tehát p^2+8 osztható 3-mal, azaz nem prím.

4. Az ábra alapján a szögek jelölésénél már felhasználtuk, hogy az egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, a váltószögek egyenlők, és egy háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.



Így azt kapjuk, hogy $5\alpha=180°$, tehát $\alpha=36°$.
A paralelogramma szögei így 36°, és 144°.

5. Jelöljük k-val a keletkezett kis háromszögek számát. A kis háromszögek szögeinek összege így $k\cdot 180°$.
Számoljuk össze más módon is a részháromszögek szögeinek összegét.
A belső pontok körül elhelyezkedő szögek összege $30\cdot 360°$, ezen kívül még a nagy háromszög csúcsaiban levő szögek összege 180°.
Ez összesen: $30\cdot 360°+180°=61\cdot 180°$.
A kétféle számolás eredménye nyilván azonos, tehát $k=61$.

Nyolcadik osztály

1. Igazoljuk zsebszámológép használata nélkül, hogy

$$2007\cdot 2009\cdot 2011\cdot 2013+16$$

négyzetszám.

2. Állítsuk elő 2013-at a lehető legtöbb egymást követő pozitív egész szám összegeként.

3. Adjunk meg 20 nullától különböző (egymástól nem feltétlenül különböző) egész számot úgy, hogy ezeket egy sorba írva bármely három szomszédos szám összege negatív, de az összes (20 darab) szám összege pozitív legyen.

4. Az ABC derékszögű háromszög AB befogóján a P, BC befogóján pedig a Q pontot úgy vettük fel, hogy $AP=CB$ és $BP=CQ$. Igazoljuk, hogy az AQ és CP szakaszok szöge 45°.

5. Egy 5×5-ös táblázat mind a 25 mezőjébe $+1$-et vagy -1-et írtunk. Minden sor jobb oldalára írtuk a sorban szereplő számok szorzatát, és minden oszlop alá az oszlopban szereplő számok szorzatát. Lehet-e az így kapott 10 szám összege 0?

A 8. osztály feladatainak megoldása

1. Célszerű általánosan számolni. Négy egymást követő páratlan szám szorzatához 16-ot adunk.

$$(2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3)+16 = \\ = (4k^2-9)(4k^2-1)+16 = \\ = 16k^4-40k^2+25 = (4k^2-5)^2.$$

2. Tegyük fel, hogy $n+1+n+2+\ldots+$ $+n+k=2013$.

Ebből $nk+\dfrac{k(k+1)}{2}=2013$, $2nk+k(k+1)=$ $=4026$, $k(2n+k+1)=4026$.

k és $2n+1+k$ különböző paritásúak, és $2n+1+k>k$.

Az a cél, hogy k-t a lehető legnagyobbra válaszszuk.

Mivel $4026 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$, $k=61$, és $2n+1+$ $+k=66$, tehát $n=2$ a jó választás.

Így $2013 = 3+4+\ldots+62+63$.

3. Például a következő konstrukció célravezető. Legyenek a és b pozitív egészek, és nézzük a következő 20 számot a megadott sorrendben.

$$a, -b, -b, a, -b, -b, \ldots, a, -b, -b, a, -b.$$

A feltétel szerint $a-2b<0$, tehát $a<2b$, másrészt

$$7a-13b>0, \text{ azaz } a>\frac{13}{7}b.$$

Így $\dfrac{13}{7}b<a<2b$, azaz $13b<7a<14b$.

A kapott egyenlőtlenséget kielégítik például az $a=17$, $b=9$ számok, így a következő sorozatot kapjuk:

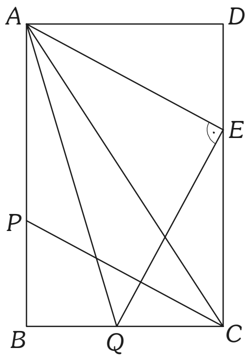
$$17, -9, -9, 17, -9, -9, \ldots, 17, -9, -9, 17, -9,$$

vagy egy másik eset: $a=27$, $b=14$, ekkor a következőt kapjuk:

$$27, -14, -14, 27, -14, -14, \ldots, 27, \\ -14, -14, 27, -14.$$

Bármely helyes megoldás 7 pontot ér.

4. Egészítsük ki az ABC derékszögű háromszöget az $ABCD$ téglalappá.



AE párhuzamos CP-vel, tehát $DE=BP=CQ$ és $CE=AP=AD$.

Ezért az AED és EQC derékszögű háromszögek egybevágóak, tehát $QE=AE$, és a QEA szög $90°$.

Az AEQ háromszög tehát derékszögű, egyenlőszárú háromszög, így a QAE szög $45°$.

Mivel AE párhuzamos CP-vel, az AQ és CP szakaszok szöge is $45°$.

5. Szorozzuk össze az egyes sorok végére és az egyes oszlopok aljára írt 5–5 számot. Ez a szorzat biztosan 1, hiszen ebben pontosan a táblázatban írt számok négyzete szerepel, mindegyiké egyszer.

Ez azt jelenti, hogy a felsorolt 10 szám között csak páros számú -1 szerepelhet.

Másrészt az összeg úgy lehetne csak 0, ha 5 darab $+1$ és 5 darab -1 szerepel a számok között. Tehát az összeg nem lehet 0.

Bölcskei Attila – Szoboszlai Mihály

A középiskolai geometriaoktatásról a mérnökképzés és tehetséggondozás szemüvegén keresztül

A felsőoktatásba jelentkező diákok egy jelentős része műszaki pályákon képzeli el jövőjét. Annál is inkább, mivel az új felsőoktatási koncepcióval nyilvánvaló lett: a kormányzat a műszaki és természettudományos képzéseknek ad prioritást. Egyfelől tehát a várhatóan és szándékok szerint egyre nagyobb számú mérnökhallgató sikeres tanulmányainak előkészítéséhez igyekszünk hozzájárulni jelen dolgozatunkkal. A másik ok, ami az alábbi áttekintés megírására ösztönzött, a műszaki tehetséggondozás fontosságára való figyelemfelhívás. Úgy érezzük, hogy gondolataink közzétételével hozzájárulhatunk ahhoz, hogy az arra képes diákok tanáraik segítségével már a középiskolában céltudatosabban készülhessenek tudományos pályára, elkerülendő azt, hogy a tehetséggondozás kizárólag a felsőoktatásra maradjon.

Még közelebbről megfogalmazva célunkat, áttekintést kívánunk adni a geometria középiskolai oktatásának kapcsolatáról a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen folyó építészmérnök-képzés alapozó tárgyaival, különös tekintettel a CAD tárgyak oktatásának elvárásaira. Minderre több évtizedes, felsőoktatásban eltöltött tapasztalatunk által érezzük feljogosítva magunkat. Megjegyezzük, hogy alábbi megállapításaink és javaslataink tágabb körben is érvényesek, mivel jó áttekintéssel és személyes tapasztalattal rendelkezünk más intézmények és más karok (például gépész-, építő-, stb.) mérnökképzéseinek vonatkozásában is.

Általánosságban véve, egy hasonlattal úgy fogalmazhatnánk meg a középiskolai és felsőfokú matematika kapcsolatát, mint a latin nyelv és az újlatin nyelvek viszonyát: középiskolában latinul tanítunk, ezzel mintegy általános alapot teremtve arra, hogy aztán a szakmai és a szakirány sajátságos igényeinek megfelelő specializáció szerinti újlatin nyelvek valamelyikét tanítsuk egyetemen és főiskolán. Emiatt tanul több statisztikát egy közgazdász, több gráfelméletet egy informatikus, több differenciálegyenletet egy gépész és ezért van több geometriai ismeretre szüksége egy építő- vagy építészmérnöknek. Úgy érezzük, hogy egyetemi oktatóként segítséget tudunk adni abban, hogy a középiskolai oktatás-nevelésben a legalkalmasabb helyekre kerüljenek a geometriatanítás hangsúlyai.

Ami a fejlesztési célokat illeti, úgy véljük, hogy az önállóságra nevelés egyike a legfontosabbaknak. Itt nem csak arról van szó, hogy a jövendő hallgató konkrét problémákat önállóan tudjon megoldani, hanem arról is, hogy önállóan képes legyen anyagrészeket feldolgozni. Ebben nélkülözhetetlen lenne számára a matematikai szakszövegek értő olvasásában való jártassága, értve ezalatt a hagyományos nyomtatott, illetve internet alapú források feldolgozásának képességét. Ez a képesség a felsőoktatás egészében fontos, mégis különösen kiemelendő a matematikában, geometriában, ahol a közlendő ismeretek pontos megfogalmazásának igénye sokszor szül a hétköznapi nyelvhasználattól nagyon különböző nyelvi megoldásokat. Tapasztalatunk szerint hallgatóinknál egy geometria jegyzet szaknyelvének megértése – melyre pedig az ismeretek elmélyítése vagy esetleges hiányzás pótlása miatt szükség van – nagyon próbára teszi a figyelmet és koncentráló képességet. Az elmondottak egyúttal kapcsolódnak a kitartó és pontos munkára való nevelés pedagógiai célkitűzéshez is. A jövendő (építész)mérnökök képzése szempontjából ugyancsak fontos célja a középiskolai matematikának (is) az esztétikára nevelés, és annak ismerete, hogy a matematika számos területen, így a mérnöki tudományokban is alkalmazható. Ennek kibontása már az egyetem feladata lesz.

Mindezeken túl, az építő- és építészmérnökképzésben természetesen különös jelentősége van a térben való tájékozódás és gondolkodás fejlesztésének is, mely feladatot a felsőoktatás csak akkor tudja sikerrel ellátni, ha a középiskolából hozott tudás e téren is kellően megalapozott. A tanult tételek és összefüggések alkalmazási szintű elsajátítása kívánatos és semmiképpen sem a kísérletező, „trial and error” jellegű megközelítések.

Kissé részletesebben elemezve a középiskolai geometria által érintett témaköröket, a következő hangsúlyokra hívjuk fel a figyelmet.

A szűken vett térgeometriáról szólva, az ismereteknek egy csoportja közvetlenül felhasználható a felsőfokú tanulmányokban. Ide tartoznak az általános iskolában megtanult testek (elnevezések és elemi tulajdonságok), a kilencedik évfolyamban tanult térbeli ponthalmazok, a tizedikben és tizenegyedikben sorra kerülő, gyakorlati életből származó, és emiatt szükségképpen három dimenziós távolság és szög feladatok megoldásai; továbbá a tizenkettedik évfolyamban hosszasan tárgyalt térgeometriai fejezet: a térelemek kölcsönös helyzetével, szögek és távolságok, térelemek merőlegességének szabatos értelmezésével, a poliéderek és görbe felületű testek mélyebb vizsgálatával. Különösen hasznosaknak véljük a poliéderek és forgásfelületek be- ill. körülírt gömbjeivel kapcsolatos feladatokat, mivel azok összetett térbeli gondolkodást igényelnek. Tekintve, hogy ezt az anyagrészt az utolsó évfolyamon tanulják a hallgatók, mikor már a továbbtanulási prioritások eldőltek, lehetőség van rá, hogy a mérnöki pályákra készülőknél ezen ismereteket hangsúlyozottabban kérjék számon a kollégák.

Biztos térgeometriai tudás csakis a síkgeometria kellő szintű ismeretére épülhet. Ennek fontossága egyfelől nyilvánvaló – talán elég csak az analógiás gondolkodásra utalni –, másfelől az építészmérnök képzésben fontos szerepet játszó, alapozó jellegű ábrázoló geometria szerkesztéseiben felhasználja a síkgeometriai ismereteket. Ebből a szempontból külön felhívjuk a figyelmet a kilencedik osztályos tananyagból a körrel kapcsolatos anyagrészekre, a tizedikesből a párhuzamos szelők tételére és alkalmazására szakaszok felosztásában; a tizenegyedikes tananyagból a parabolával kapcsolatos ismeretek fontosságára.

Nem titkolhatjuk, hogy a középiskolai geometriaoktatás egyik nagy hiányossága ma az, hogy a diákok pszichomotoros képességeit nem, vagy alig fejleszti. Manualitást igénylő, klasszikus körző-vonalzós szerkesztések mindössze a kilencedik (és kis mértékben a tizedik) osztályban kerülnek elő, és akkor sem a jó pár évvel korábban tanított szinten. Ezek a hiányosságok az életkori sajátosságokat is figyelembe véve igen nehezen kompenzálhatók az egyetemi képzésben. Itt ráadásul a megtanítandó tananyag hatalmas mérete miatt például a vonalzókkal való merőleges állítás mikéntjének tanítására végképp kár az időt pazarolni. Sajnálatos, de igaz, hogy hallgatóink egy része azért teljesít képességeinél gyengébben, mert kellő automatizáció híján nem képes feladatait adott idő alatt megfelelő szinten elkészíteni. Mindezt elkerülendő javasoljuk a kollégáknak, hogy a síkbeli szerkesztéseket lehetőség szerint fokozott hangsúlylyal kérjék számon diákjaiktól. Ennek ugyanis nem csak az esetleges későbbi mérnöki tanulmányokban látják hasznát, hanem egy általánosabb oktatási-nevelési célt is szolgálunk.

Felsőbb évfolyamokon geometriai feladatok vázlatainak elkészítését is kérhetjük körzővel, vonalzóval. A térélmény kifejezésre juttatásában, vázlatrajzok, vagy akár modellek elkészítésében is igényeljük a rajzeszközök használatát. Megjegyezzük, hogy mindez nem csak rutinszerűvé teszi az eszközhasználatot, hanem a konstrukció alapjainak megértésével az analizáló gondolkodást is fejleszti. A felsőfokú tanulmányokban szokásos hosszabb lélegzetű szerkesztések nem képzelhetők el anélkül, hogy a tanulók az algoritmikus gondolkodást el ne sajátítsák, így ennek fejlesztése szintén elsőrendű feladat lenne.

Ha a mérnökképzésben alapozó tárgyként szereplő, de máskülönben a térgeometriával szorosan összefüggő CAD rendszerek oldaláról vizsgáljuk a középiskolai geometriaoktatást, szintén megtalálhatjuk a súlypontokat. Ebből a szempontból a dinamikus geometriai szemléletet fejlesztő transzformációs szemléletre külön is felhívjuk a figyelmet. A megvalósítható geometriai transzformációk egy része már középiskolában előkerül. Kilencedikben az egybevágósági transzformációk és a függvények transzformálásával kapcsolatban a merőleges tengelyes affinitás; tizedikben a középpontos nagyítás. Ugyancsak fontos előfeltétele a CAD rendszerek használatának a sík és tér analitikus kezelésében való jártasság. Ehhez a középiskola tizedik és főleg tizenegyedik osztályában, a koordinátageometriában kapnak segítséget a diákok. A szoftverek használata során, objektumok definiálásakor tudatában kell lenniük annak, hogy mely adatok megadása vezet eredményre, ezek a problémák gyakran túl is mutatnak a középiskolai szinten, hiszen a tér analitikus geometriájának ismeretét igénylik. Modellezéskor a halmazműveletek alkalmazására szintén sor kerül, így a műveletek hatását a diákoknak ismerniük kell. Ugyancsak fontos, hogy az elnevezéseknek, eljárásoknak a hallgatók tudatában legyenek, ugyanis a modellező rendszerek néha eltérő terminológiával élnek, sajátos nyelvezetük nem szabad, hogy megtévessze a hallgatót, lássa benne visszaköszönni a geometriai tartalmakat.

Itt kívánjuk aláhúzni, hogy a számítógép használata nem helyettesíti a térben való gondolkodás képességét. Természetesen nem mondhatunk le a számítógép adta szemléltetési lehetőségekről (ha erre mód van, akkor a középiskolában sem), de tudnunk kell, hogy a modellek képernyőn való megjelenítésével és a látvány passzív befogadásával legfeljebb a megértésig lehet eljutni, de az alkotó, problémamegoldó, valódi térbeli gondolkodás csak a térgeometria és ábrázoló geometria művelésével érhető el.

Végezetül néhány gondolat arról, hogy milyen irányban lenne érdemes a középiskola szűken vett törzsanyagát meghaladni abból a célból, hogy diákjaink felsőfokú tanulmányait még zökkenőmentesebbé tehessük, vagy akár azért, hogy a tehetséges és kutatáshoz kedvet érző legjobbak minél könnyebben érhessenek el sikereket. A gondolkodási műveletek oldaláról közelítve a kérdést: a problémaérzékenység és az ismeretek komplex alkalmazni tudása elengedhetetlen. Ami konkrét témakörök esetleges bevonását illeti: mindenképpen javasolható a parabola mellett az ellipszis és a hiperbola elmélyültebb tanítása; az érintő fogalmának bevezetése. A tér szintetikus geometriájából a vetítés (mind párhuzamos, mind centrális) vizsgálata, a térbeli mozgások, illetve egybevágósági transzformációk ismerete szintén hasznos. Érdemes szót ejteni a tóruszról, csavargörbékről is. A CAD rendszerekben könnyebben boldogul, aki térbeli koordinátarendszerben már dolgozott, abban objektumokat helyezett el, illetve mozgatott. Ekkor hasznos lehet az egyenes és sík analitikus leírásának ismerete is.

A tanárkollégáknak segítséget kívánunk nyújtani azzal is, hogy a hivatkozásban közöljük egy, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem elsőéves építészmérnök hallgatói körében, a félév elején kitöltetett geometriateszt feladatainak és megoldásainak listáját [1]. A kérdések tanulmányozásával képet kaphatunk arról, hogy a jövendő hallgatóknak milyen típusú elvárásoknak kéne megfelelni, míg a válaszok kiértékelése rámutat a tipikus hibákra, ezzel is segítve a felkészülés hatékonyabbá tételét.

Ugyancsak felhívjuk a figyelmet kollégáink összefoglaló tanulmányára [2], mely az egyetemi matematikaoktatás szempontjából értékeli a hallgatók középiskolából hozott ismereteit.

Tehetséges és lelkes hallgatók tudományos diákköri dolgozatokban adtak számot arról, hogyan kamatoztathatók a geometriai ismeretek az alapkutatásban. Az utóbbi évek termését a [3] hivatkozáson érhetik el az érdeklődők.

Reméljük, azzal, hogy ezt a néhány gondolatot megosztottuk a tanár társadalommal, segítettünk mindazokon, akik a jövendő mérnökeinek képzését szívükön viselik és azon a nem kevés diákon is, akik felsőfokú tanulmányaikat még csak ezután tervezik megkezdeni.

A munka szakmai tartalma kapcsolódik a „Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műegyetemen” c. projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az Új Széchenyi Terv TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 programja támogatja.

Irodalom

[1] http://www.epab.bme.hu/oktatas/2011-2012-1/a-AbrGeo1/felmero_2011_eredmenyek.pdf

[2] Csákány Anikó – Pipek János: A 2009 szeptemberében a műszaki és temészettudományos szakokon tanulmányaikat kezdő hallgatók által írt matematika felmérő eredményeiről, Matematikai lapok, 2010/1, 1–15.

[3] http://www.epab.bme.hu/docs/SzM/TDK/

Dr. Kalácska József

A Sokszínű Matematika tankönyvcsalád hasznáról külhoni szemmel

A 2000/2001-es tanévben egy harminckét fős matematika-fizika szakirányú osztály vezetését és benne a matematika tanítását kaptam meg a Rév-Komárom-i Selye János Gimnáziumban. Nagy lendülettel és odaadással kezdtem munkához osztályfőnökként és szakos tanárként is – kiváltképp azért, mert ez egy „peregrinus" osztály lett. Ketten voltak komáromiak, a többiek a Szenctől Rimaszombatig tartó, körülbelül kétszáz kilométeres vidékről jöttek, mindannyian azzal a határozott szándékkal, hogy tanulni, minél többet befogadni akarnak.

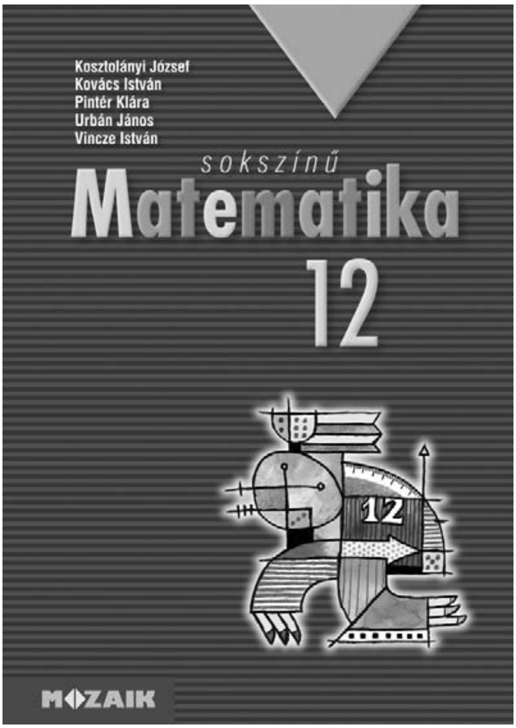
Minden elérhető matematikaversenybe beneveztünk (Matematikai Olimpia, Kenguru, Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, Öveges Verseny, Cornides István Matematika-Fizika Emlékverseny, Felvidéki Matematikaverseny stb.). Bekapcsolódtunk – de csak versenyen kívül, mert határon kívüliek vagyunk – az Arany Dániel Matematikaversenybe is. Az országos döntőbe három diákom jutott be, közülük Rakyta Péter (jelenleg az ELTE végzős doktorandusza) teljes pontszámot ért el. Oklevelet erről nem kaphatott, de meghívást kapott (velem együtt) a Lajos Józsefné által a Kőszegi Jurisich Miklós Gimnáziumban szervezett országos tehetséggondozó táborba.

A tanári program része volt a Mozaik Kiadó által akkor frissen kiadott Sokszínű Matematika 9. tankönyv bemutatása. A szerzők: Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István. Mi akkor Szlovákiában egy, az 1980-as évek közepén megjelent cseh szerzők által írt, s lefordított tankönyvet használtunk. Azonnal „ráharaptam", s azóta a teljes sorozatot a példatárakkal, CD melléklettel együtt segédkönyvként használom. Néhány alkalommal elvittem magammal a szlovák kollégákkal együtt tartott, több megyét átfogó továbbképzésre is a Sokszínű Matematika tankönyvcsaládot, s bemutattam az ott résztvevő kollégáknak, akiknek egybehangzóan az volt a véleménye, hogy érdemes lenne lefordítani szlovákra.

A benne foglalt tananyag sorrendje természetesen nem egyezett, s ma sem egyezik meg a Szlovákiában előírt sorrenddel, de ez nem zavar bennünket, mert egyszerre két évfolyamot vásárolunk meg, s mindig az aktuális kötetet vesszük elő. Abban az időben a hivatalos szlovákiai gimnáziumi, négy évre szóló tankönyv-

együttes tizenhárom füzetből állt. Ezek közül igazán csak az évfolyamonkénti egy-egy feladatgyűjtemény volt használható, a többi nem volt alkalmas az érettségire és felvételire való felkészülésre. Ezt megerősítették az általam a kőszegi tábor mintájára Rév-Komáromban több éven át szervezett tehetséggondozó tábor egyikében a versenygyőztes diákok tanáraiként résztvevő kollégák is, a hazai tankönyvíró csapat gesztora, Tomás Hecht és a Sokszínű Matematika sorozat társszerzője, dr. Urbán János jelenlétében megtartott vitafórumon. Nagy szerencsémnek tartom, hogy időben rátaláltam a Sokszínű Matematika tankönyvcsaládra, mert azóta nemcsak a mi iskolánk, hanem több felvidéki gimnázium is használja, segédkönyvként a diáksághoz eljuttatja őket.

Az egyes fejezetek feldolgozásán látszik, hogy a szerzők alapos módszertani tudással és tanítási tapasztalattal rendelkeznek. A könyvek nyelvezete érthető, precíz, tökéletes. Nekünk, külhoniaknak ez különösen fontos, mert diákjaink általában szlovákból fordított könyvekből tanulnak. A fordítók pedig legfeljebb érettségiig



tanultak anyanyelven, egyetemi tanulmányaikat szlovákul vagy csehül végezték.

Felesleges szószaporítás nincs benne. Felépítése, sokszínű ábrái, az ismeretátadás induktív útja mind-mind a fogalmak, definíciók, tételek és az egyes lépések megértését szolgálja. Sík- és térmértani ábrái, a függvények és azok traszformációinak feldolgozása, a koordinátageometria előírt tananyagának bemutatása igazán „beszédesre” sikeredett (elloptam az egykorvolt szürke könyvek egyik címét).

A fejezetek előtti történeti visszatekintés, a neves matematikusok rövid életrajzát bemutató írások felkeltik a tanulók érdeklődését, ez a világhálón való keresésre sarkallt több diákomat is.

Nagyon jó és hasznos a fontos képletek, összefüggések, megtanulandó információk lapszéli kiemelése. Nekem Kőszegen, amikor először kezembe vettem a tankönyvet, meghökkentőnek, nem oda valónak tűntek az illusztrátor rajzai. Tízévnyi használat alatt láttam, hogy egy-egy rajz miként csal mosolyt a diákok arcára, s hogy lehet pici felsóhajtás után felüdülve folytatni az órát.

A fejezetek utáni feladatok didaktikai szerepe átgondolt, sorrendjük, választásuk nem ötletszerű, hanem követik a bemutatott mintapéldák nehézségi fokát.

Ugyanez érvényes a Feladatgyűjteményekre is. Fontos érdeme a Sokszínű Matematika tankönyvcsaládnak, hogy alkalmas a diák önálló ismeretszerzésére, tanulásra – hiányzás esetén az átvett tananyag könnyen pótolható, feldolgozható.

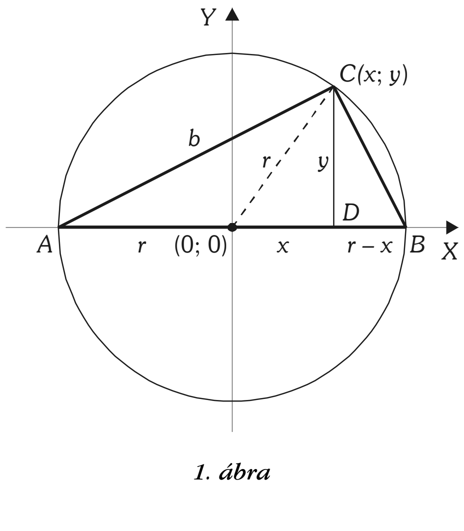
Nálunk, Szlovákiában az idén érettségizik az a generáció, akik a drasztikus tananyagcsökkentés áldozatai lettek. Jelenleg a gimnázium első és második évfolyama részére van szlovák nyelvű és magyarra is lefordított tankönyv, amely merőben más felépítésű, mint az eddig megjelent tankönyvek bármelyike. Nyíltan vállalja, hogy a benne foglalt anyag messze nem elég annak, aki érettségizni szeretne matematikából. Tanulja meg onnan, ahonnan tudja!(?) Még szerencse, hogy mindegyikük táskájában-polcán ott van a „Sokszínű–család”.

Ringler András

A magasság-tétel és a befogó-tétel is „azonos" a kör egyenletével

A derékszögű háromszögekre kimondott magasság-tétel és a befogó-tétel levezetéséhez csupán a hasonlóság ismeretére van szükség. Könnyű megmutatni, hogy e két tétel mindegyike egyenértékű a kör egyenletével.

Az egyszerűség kedvéért, a c átfogóján, vízszintesen fekvő ABC derékszögű háromszög köré rajzolt, $r = \frac{c}{2}$ sugarú kör középpontja legyen a koordináta-rendszer origója (lásd az 1. ábrát!).



1. ábra

Írjuk fel a c átfogóhoz tartozó y magasságra az $y^2 = AD \cdot DB = (r + x) \cdot (r - x)$ magasság-tételt, amelynek rendezésével

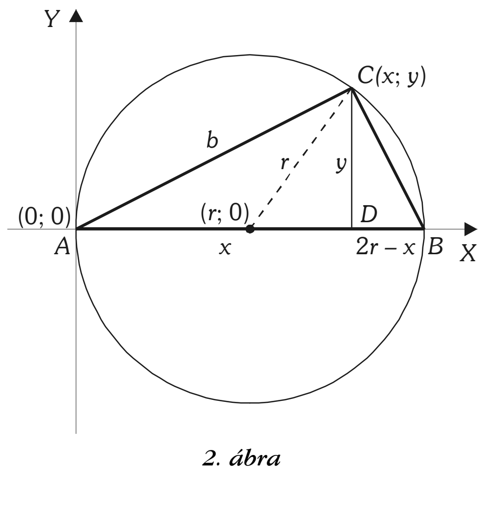
$$y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

adódik; ez pedig a központi helyzetű kör egyenlete, ha úgy tetszik, a Pythagorász-tétel.

A b oldalra felírt befogó-tétel szerint $b^2 = AD \cdot AB = (r + x) \cdot 2r = 2r^2 + 2rx$, amelyben a b^2 helyére $b^2 = AD^2 + CD^2 = (r + x)^2 + y^2$-et írva

$$(r + x)^2 + y^2 = 2r^2 + 2rx \Rightarrow$$
$$r^2 + 2rx + x^2 + y^2 = 2r^2 + 2rx \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

adódik, és ez is a központi helyzetű kör egyenlete, ha úgy tetszik, a Pythagorász-tétel.



2. ábra

Az általánosabb bizonyításhoz azonban egy kicsivel több leleményességre van szükség, ha az ABC háromszög köré rajzolt háromszög középpontja nem az origóban, hanem valahol máshol, mondjuk, az $(r, 0)$ koordinátákkal megadott pontban van (lásd a 2. ábrát!). Ekkor a c átfogóhoz tartozó y magasságra felírt $y^2 = AD \cdot DB = x \cdot (2r - x)$ magasság-tétel rendezésével

$$y^2 = 2rx - x^2 \Rightarrow x^2 - 2rx + y^2 = 0,$$

mindkét oldalhoz r^2-et adva

$$x^2 - 2rx + r^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

adódik; ez pedig az $(r, 0)$ középpontú kör egyenlete, ha úgy tetszik, a Pythagorász-tétel.

Ugyanerre az elrendezésre, a b oldalra írjuk fel a $b^2 = AD \cdot AB = x \cdot 2r$ befogó-tételt, majd a b^2 helyére $b^2 = AD^2 + DC^2 = x^2 + y^2$-et írva

$$x^2 + y^2 = 2rx \Rightarrow$$
$$x^2 - 2rx + y^2 = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 - 2rx + r^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

adódik; vagyis újból „előáll” az $(r, 0)$ középpontú kör egyenlete, ha úgy tetszik, a Pythagorász-tétel.

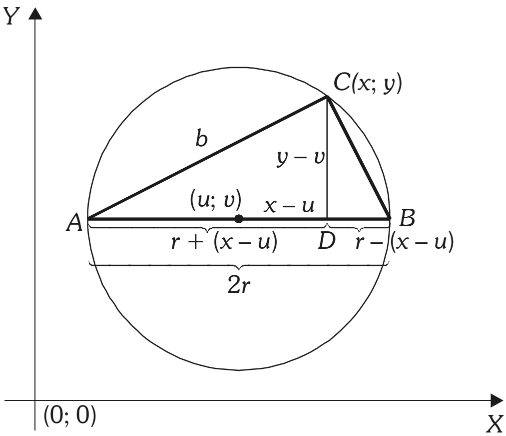
Az általános helyzetű, (u, v) középpontú kör $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ alakú egyenletét az $x^2 + y^2 = r^2$ alakú egyenletet transzformálásával állíthatjuk elő; de sokkal tanulságosabb az eddig mutatott geometriai út. Ha az utóbbit követjük, és az ABC háromszög köré rajzolt kör középpontját az (u, v) koordináták jelölik ki, akkor a 3. ábrán bejelölt távolságokkal, a c átfogóhoz tartozó $CD = (y - v)$ magasságra felírt

$$(y - v)^2 = AD \cdot DB =$$
$$= (r + (x - u)) \cdot (r - (x - u)) =$$
$$= r^2 - (x - u)^2$$

magasság-tételből, rendezéssel

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

adódik, és ez az (u, v) középpontú kör egyenlete, ha úgy tetszik, a Pythagorász-tétel.



3. ábra

Ugyanezen elrendezés esetén, a b oldalra írjuk fel a $b^2 = AD \cdot AB = (r + (x - u)) \cdot 2r$ befogó-tételt, majd a b^2 helyére $b^2 = AD^2 + CD^2 = (r + (x - u))^2 + (y - v)^2$-et írva

$$b^2 = (r + (x - u))^2 + (y - v)^2 =$$
$$= (r + (x - u)) \cdot 2r$$

adódik, amelyből rendezéssel „előáll” az (u, v) középpontú kör

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

alakú egyenlete, ha úgy tetszik, a Pythagorász-tétel.

Az elmondottak nyilván azt igazolják, hogy a derékszögű háromszögekre kimondott magasság- és befogó-tételek valójában a kör egyenletével, illetve a Pythagorász-tétellel „egyeznek meg”.

Ringler András

A páratlan tökéletes szám és osztóinak tulajdonságai I. Egy 2500 éves probléma

„A tudományok királynője a matematika, a királynő koronája a számelmélet, és a koronán lévő legszebb gyémánt a négyzetes reciprocitás tétel.”

(Gauss)

Azokat az egész számokat, amelyek előállnak a náluknál kisebb, pozitív egész osztóik összegeként, tökéletes számoknak nevezzük. Az ismert páros tökéletes számok mellett ma még nyitott a kérdés, vajon páratlan tökéletes szám létezik-e; vajon mi lehet az oka annak, hogy eddig még senki sem talált egyetlen páratlan tökéletes számot sem?

Nyilvánvaló dolog, hogy a ≈2500 éve keresett páratlan tökéletes számot osztóinak a tulajdonságaiból ismerhetjük meg, hiszen az osztók tulajdonságai „mesélik el” legjobban, hogy valójában milyen is ez a szám. A páratlan tökéletes szám létezésére vonatkozó kérdés megválaszolásával, tulajdonságainak vizsgálatával már nagyon sokan foglalkoztak, és nekem is sok álmatlan éjszakát okozott.

Most azt mutatom meg, hogy ha létezik a $(4n+1)^{4m+1}\cdot Q^2$ alakú páratlan tökéletes szám, akkor annak $(4n+1)$ alakú prímosztója mellett a $(2n+1)$ alakú szám is biztosan osztója; ezért ha létezik a páratlan tökéletes szám, akkor annak

$$\begin{aligned}&(4n+1)^{4m+1}\cdot Q^2 =\\ &=(4n+1)^{4m+1}\cdot(2n+1)\cdot q\end{aligned}$$

alakú számnak kell lennie.

Euler szerint, ha a páratlan tökéletes szám létezik, akkor annak

$$\begin{aligned}&(4n+1)^{4m+1}\cdot Q^2\equiv\\ &\equiv(4n+1)^{4m+1}\cdot p_1^{2m_1}\cdot p_2^{2m_2}\cdot p_3^{2m_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{2m_k}\end{aligned}$$

alakú számnak kell lennie, amelyben a $4n+1$, p_1, p_2, p_3, …, p_k számok páratlan prímek, ($p_i=2n_i+1$); a kitevőkben lévő m, m_1, m_2, m_3, …, m_k számok pedig pozitív egészek.

Nyilvánvaló dolog, hogy a páratlan számok osztói páratlanok; ezért a páratlan tökéletes szám csakis páratlan számú, páratlan egész szám összegeként állhat elő; az összes osztók összege viszont páros számot eredményez, mégpedig a páratlan tökéletes szám kétszeresét.

Fenti állításom bizonyításához tegyük fel, hogy létezik a páratlan tökéletes szám, ezért „állítsuk elő” minden osztóját, és vegyük az összegüket; így

$$\begin{aligned}&(1+(4n+1)^1+(4n+1)^2+(4n+1)^3+\ldots+\\ &+(4n+1)^{4m+1})\cdot(1+p_1^1+p_1^2+p_1^3+\ldots+p_1^{2m_1})\cdot\\ &\cdot(1+p_2^1+p_2^2+p_2^3+\ldots+p_2^{2m_2})\cdot\ldots\cdot\\ &\cdot(1+p_k^1+p_k^2+\ldots+p_k^{2m_k})=2\cdot(4n+1)^{4m+1}\cdot Q^2\end{aligned}$$

adódik. Ebből a kifejezésből azonnal látszik, hogy az egyenlőség bal oldalán lévő első tényező, az egyszerűség kedvéért a *bal oldali euleri tényező*, a

$$\begin{aligned}&(1+(4n+1)^1+(4n+1)^2+(4n+1)^3+\ldots+\\ &+(4n+1)^{4m+1})\end{aligned}$$

alakú összeg kiszámolásához $4m+2$ darab páratlan egész számot kell összeadni; ezért ez az összeg biztosan páros. Vegyük észre azt is, hogy ez a tényező teszi a kifejezés bal oldalát párossá, mégpedig 4-gyel nem osztható páros számmá! Ha ez a tényező 4-gyel is osztható páros szám lenne, akkor az előző kifejezés 2-vel való osztásával ellentmondáshoz jutunk; a bal oldali szorzat páros maradna, a jobb oldali szorzat értéke viszont páratlanná válna. Mivel a bal oldalon lévő többi tényező, a zárójelekben lévő összegek értékének a kiszámolásához, külön-külön, $2m_i + 1$ darab, vagyis páratlan számú, páratlan egész számot kell összeadni; ezért ezek az összegek, vagyis az egyes tényezők mindig páratlan egész számok lesznek. Ezeknek a páratlan számoknak (összegeknek) szintén páratlan

$$(1 + p_1^1 + p_1^2 + p_1^3 + \ldots + p_1^{2m_1}) \cdot$$
$$\cdot (1 + p_2^1 + p_2^2 + p_2^3 + \ldots + p_2^{2m_2}) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot (1 + p_k^1 + p_k^2 + \ldots + p_k^{2m_k})$$

szorzatát a továbbiakban a rövidség kedvéért P-vel jelölöm; így a korábbi kifejezés

$$(1 + (4n+1)^1 + (4n+1)^2 + (4n+1)^3 + \ldots + (4n+1)^{4m+1}) \cdot P = 2 \cdot (4n+1)^{4m+1} \cdot Q^2 \quad (*)$$

alakú lesz, amelyben a *bal oldali euleri tényezőt,* mint páros összeget, rövidebben, az

$$1 + (4n+1)^1 + (4n+1)^2 + (4n+1)^3 + \ldots + (4n+1)^{4m+1} = \frac{(4n+1)^{4m+2} - 1}{4n}$$

alakba írom, majd

$$\frac{(4n+1)^{4m+2} - 1}{4n} = \frac{((4n+1)^{2m+1} + 1) \cdot ((4n+1)^{2m+1} - 1)}{4n} = ((4n+1)^{2m+1} + 1) \cdot \frac{(4n+1)^{2m+1} - 1}{4n}$$

szorzattá alakítom. Ezzel az utóbbi trükkel további érdekes eredményekhez juthatunk, ha a $((4n + 1)^{2m+1} + 1)$ alakú, páros tényezőt is szorzattá alakítjuk. Ehhez használjuk fel, hogy az $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ alakú összegeknek az $(a + b)$ összeg mindig osztója: $(a+b) \mid a^{2k+1} + b^{2k+1}$; ezért a $((4n + 1)^{2m+1} + 1)$ alakú tényező is felírható a

$$(4n+1)^{2m+1} + 1^{2m+1} \equiv (4n+1+1) \cdot (\mathrm{VALAMI}) = 2 \cdot (2n+1) \cdot (\mathrm{VALAMI})$$

alakba. Mivel **ez az „átírás" azt mutatja, hogy a $(2n + 1)$ alakú tényező biztosan osztója a bal oldali *euleri* tényezőnek, ezért a (*) *egyenlőség teljesülése esetén* ez a $(2n + 1)$ alakú szám a $(4n + 1)^{4m+1} \cdot Q^2$ alakú páratlan tökéletes számnak is osztója kell, hogy legyen.** Ez pedig nyilván azt jelenti, hogy a $(4n + 1)^{4m+1} \cdot Q^2$ alakú páratlan tökéletes szám létezése esetén a $(4n + 1)$ alakú prím osztója mellett a $(2n + 1)$ alakú páratlan szám is biztosan osztója. Mivel a $(4n + 1)$ alakú szám prím, *ezért* a $(2n + 1)$ alakú szám csak a Q^2 tényezőnek lehet az osztója, vagyis $Q^2 = (2n + 1) \cdot q$ biztosan teljesül; *ezért* **ha a páratlan tökéletes szám létezik, akkor annak $(4n + 1)^{4m+1} \cdot Q^2 = (4n + 1)^{4m+1} \cdot (2n + 1) \cdot q$ alakú számnak kell lennie.** Mivel a Q^2 tényezőre, mint páratlan négyzetszámok szorzatára, vagyis mint egy páratlan szám négyzetére a $Q^2 \equiv 1 \pmod 8$ biztosan teljesül; *ezért 2 nem* $\mid n$ (*2 nem osztója n-nek*) esetén a q számra is teljesülnie kell, hogy $q = 2k + 1$ és 2 nem $\mid k$ (*2 nem osztója k-nak*); vagyis $q \equiv 3 \pmod 4$. Páratlan n szám esetén a k szám azért nem lehet páros szám, mert ekkor a

$$Q^2 = (2n+1) \cdot (2k+1) = 2n \cdot 2k + 2 \cdot (n+k) + 1 \equiv 1 \pmod 8$$

nem teljesülne. Páros n szám esetén viszont az $(n + k)$ számnak legalább 4-gyel osztható páros számnak kell lennie; a $Q^2 \equiv 1 \pmod 8$ tehát csak azonos paritású n és k számokkal teljesülhet.

Nyilvánvaló dolog, hogy a

$$(4n+1)^{2m+1} + 1 = 2 \cdot (2n+1) \cdot (\mathrm{VALAMI})$$

felbontásban, az m számtól is függő, a röviden „(VALAMI)"-vel jelölt tényező is osztója a páratlan tökéletes számnak, de az ettől, és a $\dfrac{(4n+1)^{4m+2} - 1}{4n}$ tényezőtől való függés tanulmányozása további meggondolásokat igényel.

A páratlan tökéletes szám létezésével kapcsolatos vizsgálatok fő célja annak az eldöntése, hogy a (*) alatti egyenlőség vajon teljesülhet-e, vagy sem. Ha kiderülne, hogy a (*) alatti egyenlőség nem állhat fenn, akkor ez azt jelentené, hogy a páratlan tökéletes szám nem létezik; és ez a felismerés az utóbbi 2500 év egyik legérdekesebb matematikai híre lenne.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2012. június 30.

Feladatok (440–444.)

440. Egy körvonalra felírtak 2012 darab számot úgy, hogy bármely 8 darab egymás melletti szám összege 88. Tudjuk, hogy az elsőnek felírt számtól pozitív körüljárási irányban haladva 123-adik szám a 11, az 1234-edik szám a 8, az 541-edik szám pedig a 4. Határozzuk meg a 2012-edik számot.

Nemecskó István, Budapest

441. Egy konvex négyszög oldalainak hossza pozitív körüljárási irányban a, b, c, d. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha

$$\frac{2(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}=\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{cd}{c+d}+\frac{da}{d+a}.$$

Bencze Mihály, Brassó

442. Mutassuk meg, hogy az $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=k\cdot x^2+n\cdot x+2012$ függvény bármely valós x esetén pozitív értéket vesz fel, ha k a 2012! végén található 0-k száma, n pedig olyan pozitív egész, amelyre $\frac{2012!}{2^n}$ páratlan egész szám.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

443. Legyen x olyan valós szám, amelyre $\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x=m$, ahol m egész szám. Igazoljuk, hogy $\mathrm{tg}^3x+\mathrm{ctg}^3x$ egész szám, de nem négyzetszám.

Bíró Bálint, Eger

444. (a 435. feladat egy lehetséges általánosítása) Bizonyítsuk be, hogy ha α, β, γ egy hegyesszögű háromszög belső szögei, akkor tetszőleges λ_1, λ_2, λ_3 pozitív valós számokra

$$\lambda_1^2\,\mathrm{tg}\,\alpha+\lambda_2^2\,\mathrm{tg}\,\beta+\lambda_3^2\,\mathrm{tg}\,\gamma\geq$$
$$\geq 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(\frac{\sin\alpha}{\lambda_1}+\frac{\sin\beta}{\lambda_2}+\frac{\sin\gamma}{\lambda_3}\right).$$

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (425–429. feladatok)

425. Adott 2-nél nem kisebb pozitív egész n számra az $M_0(x_0;y_0)$ pont illeszkedik az $y^2=nx-1$ parabolára és az $y=x$ egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész m esetén létezik olyan $k\geq 2$ egész, hogy az $M\left(x_0^m;y_0^m\right)$ pont közös pontja az $y^2=kx-1$ parabolának és az $y=x$ egyenesnek.

Megoldás: A feltétel szerint x_0 és y_0 az x^2-nx+ $+1=0$ egyenlet gyökei. A gyökök és együtthatók közötti összefüggésekből (Viète-formulákból) adódik, hogy $x_0+\frac{1}{x_0}=n\ (\geq 2)$ egész. A feltételekből adódik az is, hogy $x_0>0$.

Azt kell belátni, hogy bármely pozitív egész m esetén pozitív egész az $x_0^m+\frac{1}{x_0^m}=k(m)$ összeg is. Teljes indukcióval bizonyítunk.

(*i*) A feltételből: $k(1)=n$ pozitív egész.

(*ii*) Tegyük fel, hogy valamely m-ig $(m\geq 1)$ teljesül az állítás, azaz $k(m)$ pozitív egész.

$$k(m+1)=x_0^{m+1}+\frac{1}{x_0^{m+1}}=$$

$$= \left(x_0^m + \frac{1}{x_0^m}\right)\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) - \left(x_0^{m-1} + \frac{1}{x_0^{m-1}}\right) =$$
$$= n \cdot k(m) - k(m-1)$$

Az indukciós feltevés alapján $k(m+1)$ pozitív egész, azaz az állítást bizonyítottuk.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 5.

426. Legyen $H = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, és legyen $f(m; k) = \sum_{i=1}^{5} \left[m \cdot \sqrt{\frac{k+1}{i+1}} \right]$, ahol $k \in H$, m pozitív egész és $[a]$ az a szám (alsó) egészrészét jelenti. Mutassuk meg, hogy bármely pozitív egész n esetén létezik $k \in H$ és m pozitív egész, hogy $f(m; k) = n$.

Megoldás: Definiáljuk az A_k $(k \in H)$ halmazokat a következőképpen:

$$A_k = \{(k+1)x^2 \mid x \in \mathbb{N}^+\}.$$

A számelmélet alaptétele szerint az A_k halmazok páronként diszjunktak. Legyen $A = \bigcup_{k=1}^{5} A_k$.

Rendezzük az A halmaz elemeit nagyság szerint növekvő sorrendbe: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$.

Tekintsük az $a_n \in A$ számot (n tetszőleges pozitív egész). Hozzá pontosan egy olyan $k \in H$ létezik, amelyre $a_n \in A_k$. Számoljuk meg, hogy az 1, 2, …, a_n számok között hány A-beli van. Először is világos, hogy pontosan n darab, hiszen az A elemeit nagyság szerint növekvő sorrendbe raktuk. Másrészt – mivel a $(k+1)l^2$ alakú számok száma egy x korlátig éppen $\left[\sqrt{\frac{x}{k+1}}\right]$ –, ez a szám megadható úgy is, hogy $n = \sum_{i=1}^{5} \left[\sqrt{\frac{a_n}{i+1}}\right]$. Mivel $a_n \in A_k$, ezért $a_n = (k+1)m^2$ teljesül valamely alkalmas pozitív egész m-re. Így

$$n = \sum_{i=1}^{5} \left[\sqrt{\frac{a_n}{i+1}}\right] = \sum_{i=1}^{5} \left[m \cdot \sqrt{\frac{k+1}{i+1}} \right] = f(m; k).$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Borbély József, Tata

A megoldók száma: 2.

427. Legyen $f(x) = x^2 + a$ $(x \in \mathbb{R})$. Legyen $f^1(x) = f(x)$ és $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Adjuk meg az a valós paraméter összes olyan értékét, amelyre teljesül, hogy $|f^n(0)| \le 2$ bármely pozitív egész n esetén.

Megoldás: Az $a_n = f^n(0)$ jelöléssel az $a_1 = a$, $a_n = a_{n-1}^2 + a$ rekurzióval megadott sorozatot kapjuk. Keressük azokat az a valós számokat, amelyekre $|a_n| \le 2$ minden pozitív egész n esetén.

1. Ha $a < -2$, akkor az $|a_n| \le 2$ feltétel nem teljesül, ha $n = 1$.

2. Ha $-2 \le a \le 0$, akkor teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $|a_n| \le -a$ minden pozitív egész n-re, így $|a_n| \le -a \le 2$.

Ha $n = 1$, akkor $|a_1| = -a$, tehát az állítás igaz.

Tegyük fel ezután, hogy $|a_n| = -a$ valamely pozitív egész n-re. Ekkor

$$a \le a_n^2 + a \le a^2 + a = a(a+2) - a \le -a,$$

mivel $-2 \le a \le 0$ miatt $a(a+2) \le 0$. Innen $|a_{n+1}| = |a_n^2 + a| \le -a$, amit igazolni akartunk.

3. Ha $0 < a \le \frac{1}{4}$, akkor azt mutatjuk meg teljes indukcióval, hogy $|a_n| \le \frac{1}{2}$ minden pozitív egész n-re, így $|a_n| \le 2$ is teljesül.

Ha $n = 1$, akkor $|a_1| = a \le \frac{1}{4} \le \frac{1}{2}$, vagyis az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy $|a_n| \le \frac{1}{2}$ valamely pozitív egész n-re. Ekkor

$$|a_{n+1}| = |a_n^2 + a| = a_n^2 + a \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

amit igazolni akartunk.

4. Végül ha $\frac{1}{4} < a$, akkor

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a - a_n =$$
$$= \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4} \ge a - \frac{1}{4} > 0$$

miatt az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan növő. Ha $\{a_n\}$ korlátos lenne, akkor létezne a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ véges határérték, és mivel $a_{n+1} = a_n^2 + a$, ezért $A = A^2 + a$ is fennállna. Ez viszont lehetetlen, mert

$$A^2 - A + a = \left(A - \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4} \geq a - \frac{1}{4} > 0.$$

A fentiek alapján $|a_n| \leq 2$ akkor és csak akkor áll fenn minden pozitív egész n-re, ha $-2 \leq a \leq \frac{1}{4}$.

Hornung Tamás, Zalaegerszeg

A megoldók száma: 4.

428. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja K, beírt körének középpontja O. A beírt kör a BC oldalt a D, a CA oldalt az E, az AB oldalt az F pontban érinti. Az FD és CA egyenesek metszéspontja P, a DE és AB egyenesek metszéspontja pedig Q. A PE szakasz felezőpontja M, a QF szakasz felezőpontja N. Igazoljuk, hogy az OK egyenes merőleges az MN egyenesre.

Megoldás: Jelölje a, b, c rendre a BC, CA, AB oldal hosszát, s pedig a háromszög félkerületét. Tudjuk, hogy $AE = AF = s - a$, $BF = BD = s - b$ és $CD = CE = s - c$. A PC kiszámítása végett írjuk fel Menelaosz tételét az ABC háromszögre és az FD szelőre:

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CP}{AP} = 1,$$

azaz

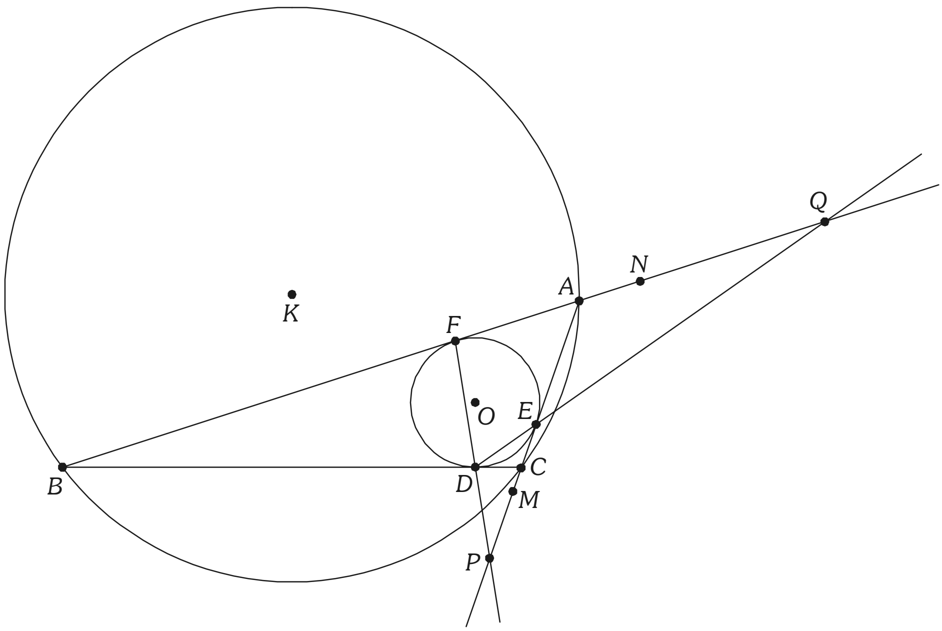
$$\frac{CP}{AP} = \frac{CD}{AF} = \frac{s-c}{s-a}.$$

Mivel a feladat feltevésében szerepel, hogy FD metszi CA-t és DE metszi AB-t, ezért $c \neq a$ és $a \neq b$. Először tárgyaljuk azt az esetet, amikor $a < c$ (*1. ábra*).

Ebben az esetben az előző összefüggésből következik, hogy $CP < AP$, ami azt jelenti, hogy P az AC szakasz C-n túli meghosszabbítására illeszkedik, ezért $AP = AC + CP$. Így

$$CP = \frac{b(s-c)}{c-a}.$$

Folytassuk a $b < a$ esettel (*1. ábra*). Ekkor az előbbiekhez hasonlóan belátható, hogy Q az



1. ábra

AB szakasz A-n túli meghosszabbítására esik, és

$$AQ = \frac{c(s-a)}{a-b}.$$

A fentiek alapján adódik, hogy

$$ME = \frac{EP}{2} = \frac{CP+CE}{2} = \frac{(s-a)(s-c)}{c-a}.$$

Mivel $c < s$, azaz $c - a < s - a$, ezért $CE < ME$, és így

$$MC = ME - CE = \frac{(s-c)^2}{c-a}$$

és

$$MA = ME + AE = \frac{(s-a)^2}{c-a}.$$

A kapott összefüggések alapján

$$MA \cdot MC = \frac{(s-a)^2(s-c)^2}{(c-a)^2} = ME^2,$$

ami azt jelenti, hogy az M pont illeszkedik a beírt és a köré írt kör hatványvonalára.
Hasonló számításokkal adódik, hogy

$$NF = \frac{(s-b)(s-a)}{a-b},$$

$$NA = \frac{(s-a)^2}{a-b},$$

$$NB = \frac{(s-b)^2}{a-b}.$$

Ezek alapján

$$NA \cdot NB = \frac{(s-a)^2(s-b)^2}{(a-b)^2} = NF^2,$$

azaz N is illeszkedik a két kör hatványvonalára.
Ismert, hogy két kör hatványvonala merőleges a körök középpontjait összekötő centrálisra, ami az állítást bizonyítja.
A $c < a$ illetve $a < b$ esetek tárgyalása analóg módon történik, az eredmények csak annyiban különböznek a fentiektől, hogy $c - a$ helyére $|c-a|$, $b - a$ helyére pedig $|b-a|$ kerül.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 4.

429. Határozzuk meg az összes olyan (p; q; n) rendezett számhármast, amelyben p és q páratlan prímszámok, n 2-nél nem kisebb egész szám, valamint $q^{n+2} \equiv 3^{n+2} \pmod{p^n}$ és $p^{n+2} \equiv 3^{n+2} \pmod{q^n}$.

Megoldás: A feltételekből könnyen adódik, hogy ha $p = 3$, akkor és csak akkor $q = 3$. Ez azt jelenti, hogy a (3; 3; n) rendezett számhármasok bármely $n \geq 2$ egész szám esetén kielégítik a feladatbeli kongruenciákat. Könnyen látható az is, hogy nincs olyan rendezett számhármas, amelyre $p = q \neq 3$ teljesülne.
A továbbiakban a fentiek alapján feltételezhetjük, hogy $5 \leq p < q$.
Ha $n = 2$, akkor $q^2 \mid p^4 - 3^4$, ahonnan adódik, hogy $q^2 \mid p^2 - 3^2$ vagy $q^2 \mid p^2 + 3^2$, és a feltételek alapján pontosan az egyik oszthatóság érvényes. Másrészt viszont $0 < p^2 - 3^2 < q^2$ és $\frac{1}{2}(p^2 + 3^2) < p^2 < q^2$, ami ellentmondás.
Tegyük fel a továbbiakban, hogy $n \geq 3$. A feltételekből adódik, hogy

$$p^n \mid p^{n+2} + q^{n+2} - 3^{n+2}$$

és

$$q^n \mid p^{n+2} + q^{n+2} - 3^{n+2}.$$

Mivel $p < q$, és prímek, ezért

$$p^n q^n \mid p^{n+2} + q^{n+2} - 3^{n+2}. \tag{1}$$

Mivel $p^n q^n \leq p^{n+2} + q^{n+2} - 3^{n+2} < 2q^{n+2}$, ezért $p^n < 2q^2$.
Mivel $q^n \mid p^{n+2} - 3^{n+2}$ és $3 < p$, ezért $q^n \leq p^{n+2} - 3^{n+2} < p^{n+2}$, és így $q < p^{1+\frac{2}{n}}$. Az eddigi becslések alapján $p^n < 2p^{2+\frac{4}{n}} < p^{3+\frac{4}{n}}$, ahonnan $n < 3 + \frac{4}{n}$. Ez pedig azt jelenti, hogy $n = 3$, és így a feltételek: $p^3 \mid q^5 - 3^5$ és $q^3 \mid p^5 - 3^5$.
Mivel $5^5 - 3^5 = 2 \cdot 11 \cdot 131$, ezért $5 < p$, és mivel prím, ezért $p \mid q^5 - 3^5$. Másrészt a „kis” Fermat-tétel alapján $p \mid q^{p-1} - 3^{p-1}$. Ebből a két tényből következik, hogy ha d jelöli $p - 1$ és 5 legnagyobb közös osztóját, akkor $p \mid q^d - 3^d$.
Ha $d = 1$, akkor $p \mid q - 3$. Mivel

$$\frac{q^5 - 3^5}{q-3} = q^4 + 3q^3 + 3^2q^2 + 3^3q + 3^4 \equiv$$
$$\equiv 5 \cdot 3^4 \pmod{p},$$

és $5 < p$, ezért p nem osztója $\frac{q^5-3^5}{q-3}$-nak, és így $p^3 \mid q-3$. Abból, hogy $q^3 \mid p^5-3^5$ következik, hogy $q^3 \le p^5-3^5 < p^5 = (p^3)^{\frac{5}{3}} < q^{\frac{5}{3}}$, ami ellentmondás, ezért $1 < d$.

Abból, hogy $1 < d$ következik, hogy $5 \mid p-1$. Hasonlóan látható be, hogy $5 \mid q-1$ is teljesül.

Mivel $7 \le p < q$, ezért q és $p-1$ relatív prímek. Ezt és a $q^3 \mid p^5-3^5$ oszthatóságot figyelembe véve kapjuk, hogy q^3 osztója $\frac{p^5-3^5}{p-3}$-nak. Így

$$q^3 \le \frac{p^5-3^5}{p-3} = p^4 + 3p^3 + 3^2p^2 + 3^3p + 3^4.$$

Abból, hogy $5 \mid p-1$ és $5 \mid q-1$ adódik, hogy $p \ge 11$ és $q \ge 31$. Így

$$q^3 \le p^4\left(1+\frac{3}{p}+\left(\frac{3}{p}\right)^2+\left(\frac{3}{p}\right)^3+\left(\frac{3}{p}\right)^4\right) <$$

$$< p^4 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{p}} \le \frac{11}{8}\cdot p^4,$$

azaz $\left(\frac{8}{11}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot q^{\frac{3}{4}} < p.$ Ezt felhasználva

$$\frac{p^5+q^5-3^5}{p^3q^3} < \frac{p^2}{q^3} + \frac{q^2}{p^3} <$$

$$< \frac{1}{q} + \left(\frac{11}{8}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot 31^{-\frac{1}{4}} < 1.$$

Ez viszont ellentmond (1)-nek, mely szerint $p^3q^3 \mid p^5+q^5-3^5$.

Kaptuk, hogy a megfelelő rendezett számhármasok $(3; 3; n)$ alakúak, ahol $n \ge 2$ egész.

Borbély József, Tata
Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 2.

A megoldók névsora: Borbély József, Tata (425–429.); Dályay Pál Péter, Szeged (425–428.); Hornung Tamás, Zalaegerszeg (425., 427., 428.); Nagy Sándor, Békéscsaba (425., 427., 428.); Velkeyné Gréczi Alice, Ipolyszög (425.).

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS
Rátz Tanár úr életműdíj – 2012
biológia-, matematika-, fizika-, kémiatanárok elismerésére

Az Ericsson Magyarország, a Graphisoft R&D. és a Richter Gedeon közös díjat alapított magyarországi tanároknak, melyet a Fasori Gimnázium legendás hírű matematikatanáráról „RÁTZ TANÁR ÚR ÉLETMŰDÍJ”-nak nevezett el. E díj gondozására létrejött az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért, amely díjazottanként az 1.200.000 forinttal járó elismerést minden évben két-két biológia-, matematika-, fizika- és kémiatanárnak ítéli oda.

A díjra a közoktatás **5–12. évfolyamain biológiát, matematikát, fizikát vagy kémiát tanító** (vagy egykor tanító) tanárok terjeszthetők fel írásban szakmai és társadalmi szervezetek, az ajánlott tanár tevékenységét jól ismerő kollektívák, kivételes esetekben magánszemélyek által.

A felterjesztés feltétele, hogy a jelölt a magyarországi közoktatás területén – nem szervezői munkakörben – dolgozó, az 5–12. évfolyamokon kimagasló oktató-nevelő tevékenységet végző/végzett, olyan életművel rendelkező tanár legyen,

– aki legalább 10 éves közoktatási tanári gyakorlattal rendelkezik,
– akinek tanítványai az országos hazai és/vagy nemzetközi versenyeken a fenti tantárgyak valamelyikében az elsők között szerepeltek vagy többször a döntőbe jutottak,
– aki tevékenységében gondot fordít a hátrányos helyzetű, tehetséges diákok felfedezésére, tudásuk gyarapítására,
– aki jelentős szerepet vállal a fenti négy tantárgy valamelyikéhez kapcsolódó országos, regionális vagy iskolai szakmai programok (pl. versenyek, továbbképzések, tanácskozások) megszervezésében, a program tartalmának felépítésében és kivitelezésében (pl. előadások tartása, szakanyagok készítése, friss információ továbbítása),
– aki rendszeresen továbbképzi magát, tájékozott az adott tudomány területén elért eredményekről, a tantárgy tanításával kapcsolatos aktualitásokról, tapasztalatait megosztja kollégáival,
– aki szakmai lapokban publikál, könyveket, tankönyveket, tanítási segédleteket írt vagy ír,
– aki a szaktárgyi felkészítés mellett hivatásának tekinti tanítványai nevelését, személyiségük fejlesztését, problémáik megoldásához segítséget nyújt,
– akinek személyisége, szakértelme, egész életvitele példamutató.

A díjakat a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat díjbizottságai, a Magyar Kémikusok Egyesülete, valamint a Magyar Biológia Társaság, a Magyar Biofizikai Társaság, illetve a Magyar Biokémiai Egyesület ajánlásai alapján a három cég által felkért Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma – melynek elnöke Dr. Kroó Norbert akadémikus – ítéli oda az adott év kitüntetettjeinek.

A négy tudományos társaság a beérkezett ajánlásokat a fenti feltételek szellemében értékeli, s ennek alapján teszi meg javaslatait a díjazottakra 2012. október 8-ig. Ezen javaslatok alapján hozza meg döntését az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma 2012. október 15-ig. A díj átadására várhatóan 2012 novemberében kerül sor.

Az írásos felterjesztéseket legkésőbb 2012. szeptember 26-ig kérjük eljuttatni elektronikusan az info@ratztanarurdij.hu e-mail címre, ahonnan azokat a megfelelő adminisztráció után, illetékesség szerint továbbítják *a Bolyai János Matematikai Társulat*hoz, *az Eötvös Loránd Fizikai Társulat*hoz, *a Magyar Kémikusok Egyesületéhez*, a *Magyar Biológia Társasághoz, a Magyar Biofizikai Társasághoz, valamint a Magyar Biokémiai Egyesülethez.* A felterjesztéshez szükséges adatlap a http://www.ratztanarurdij.hu honlapon található, a „Pályázati felhívás” oldalról letölthető.

A korábbi évek felterjesztéseit – ha azt továbbra is fenntartják a javaslattevők – ismételten írásban kell megerősíteni!

Egy személynek három éven belül az Alapítók által létrehozott díjak közül csak egy adható.

A pályázattal vagy a felterjesztéssel kapcsolatos kérdések feltehetők munkaidőben Lukovics Ildikónak a következő telefonszámon: **06-20-203-5507.**

Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratóriuma