

Állandó helyzetű
Simson-egyenesek

(Bíró Bálint)

Érdekességek egy speciális
háromszögben II.

(Molnár István)

Szerkesszünk párhuzamos
élű vonalzóval!

(Dr. Darvasi Gyula)

A véráramlási ellenállásról:
egy minimumprobléma

(Csete Lajos)

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:

Főszerkesztő:

Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:

6723 Szeged, Debreceni u. 3/B

Tel.: (62) 470-101,

FAX: (62) 554-666

Kiadó:

MOZAIK Kiadó Kft.

Felelős kiadó:

Török Zoltán

Tördelőszerkesztő:

Kovács Attila

Borítóterv:

Deák Ferenc

Megrendelhető:

MOZAIK Kiadó

6701 Szeged, Pf. 301.

Éves előfizetési díj: 1800 Ft

Megjelenik évente 4 alkalommal.

A lap megvásárolható a

MOZAIK Könyvesboltban:

Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült

az Innovariant Kft.-ben, Szegeden

Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Állandó helyzetű Simson-egyenesek

Bíró Bálint

tanár, Eger

Érdekeségek egy speciális háromszögben II.

Molnár István

adjunktus, Békéscsaba

Szerkesszünk párhuzamos élű vonalzóval!

Dr. Darvasi Gyula

főiskolai docens, Nyíregyháza

A véráramlási ellenállásról: egy minimumprobléma

Csete Lajos

tanár, Markotabödöge

Matematika programozási versenyeken

Erben Péter

tanár, Budapest

A sokszínű analízis elemei – könyvajánló

Trembeczki Csaba

tanár, Kaposvár

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat e-mailen a kattila@mozaik.info.hu címre küldjék meg. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön fájlokban is kérjük mellékelni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat.

Bíró Bálint

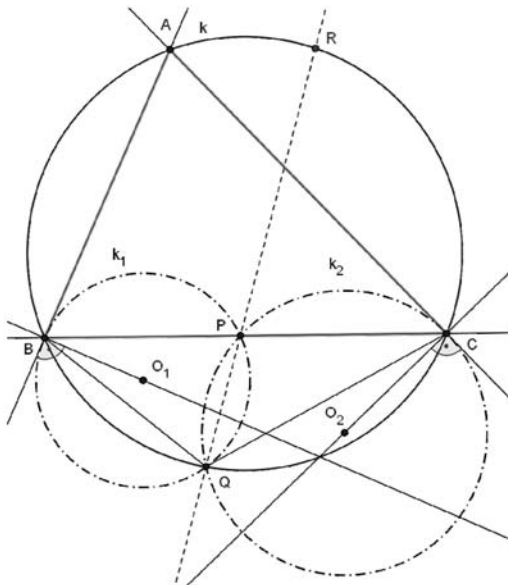
Állandó helyzetű Simson-egyenesek

Néhány évvel ezelőtt Marczis György gyulai kollégám segítségével sikerült hozzájutnom Eigel Ernő: *Síkgeometriai feladatok* című kitűnő könyvéhez. A könyv anyagát tanulmányozva egy nagyon szép feladatra bukkantam. A feladat így szól (az eredeti jelöléseket kissé megváltoztatva):

Az ABC háromszög BC oldalán a P mozgó pont. Az AB szakaszt B -ben érintő és az AC szakaszt C -ben érintő kör átmegy a P ponton. A két kör második metszéspontja Q .

- Bizonyítsuk be, hogy Q rajta van az ABC háromszög körülírt körén;
- Igazoljuk, hogy a PQ egyenesnek az ABC háromszög körülírt körével alkotott metszéspontja rögzített, nem függ a P pontnak a BC oldalon elfoglalt helyzetétől.

A megoldás egyszerű, tekintjük át röviden, ehhez készítettünk egy ábrát (1. ábra).



1. ábra

Az O_1 középpontú k_1 kör a feltételeknek megfelelően a B pontban érinti az AB egyenesét, hasonlóképpen az O_2 középpontú k_2 kör a C pontban érinti az AC egyenesét.

Az érintő tulajdonsága és a kerületi szögek tétele miatt $\angle ABC = \angle BQP$, ezek a Q pontot nem tartalmazó BP körívhez tartozó kerületi szögek a k_1 körben, ugyanígy $\angle ACB = \angle CQP$, ezek a szögek pedig a Q pontot nem tartalmazó CP körívhez tartozó kerületi szögek a k_2 körben.

Eszerint $\angle ABC + \angle ACB = \angle BQP + \angle CQP = 180^\circ - \angle BAC$, és ezért az $ABQC$ négyszög húrnégyszög, tehát a Q pont valóban rajta van az ABC háromszög körülírt körén.

A feladat b) részének bizonyításához vegyük figyelembe, hogy $\angle ABC = \angle BQP = \angle BQR$, és az ABC háromszög körülírt körében az egyenlő nagyságú kerületi szögekhez egyenlő hosszúságú húrok tartoznak, tehát $AC = BR$, valamint $\angle ACB = \angle CQP = \angle CQR$ miatt $AB = CR$.

Ezért az R pont a B és C pontoktól állandó távolságra van (hiszen az ABC háromszög oldalainak hossza adott), tehát a PQ egyenesnek az ABC háromszög körülírt körével alkotott R metszéspontja valóban rögzített, vagyis nem függ a P pontnak a BC szakaszon belüli helyzetétől. Ezzel a feladat mindkét állítását bizonyítottuk.

Ismeretes az a tétel (a [4] feladatgyűjtemény 1078. feladata), hogy ha egy háromszög oldal-egyenesére a háromszög köré írt kör egy pontjából merőlegeseket bocsátunk, akkor a merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak, ezt az egyenest nevezzük **Simson-egyenesnek**, vagy **Wallace-egyenesnek** (utóbbi elnevezés az angolszász országokban elterjedtebb).

A bevezető feladat eredménye, hogy ha a P pont helyzete a BC szakaszon belül változik, akkor az ABC háromszög körülírt körén az R pont helyzete változatlan, ezért a P pont különböző

helyzeteiben az R ponthoz tartozó Simson-egyenes is mindig ugyanaz az egyenes.

Ezt szemlélteti a 2. ábra, amely szerint a P pontnak a BC szakaszon való mozgásakor az s Simson-egyenes változatlan.

Az írás címében szereplő „**állandó helyzetű Simson-egyenesek**” kifejezés erre utal.

A feladattal kapcsolatban észrevehető, hogy az $AC = BR$, és $AB = CR$ egyenlőségek szerint az R pont nem más, mint az A pontnak a BC szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképe.

A továbbiakban elvonatkoztatunk az eredeti feladattól, és azt vizsgáljuk, hogy ha egy ABC háromszög csúcsait a csúccsal szemben levő oldal felezőmerőlegesére tükrözzük, akkor az így létrejött tükörképpontoknak az ABC háromszöghöz tartozó Simson-egyenesei milyen tulajdonságokkal rendelkeznek. Az említett tükörképpontokat ezután rendre A' ; B' ; C' -vel jelöljük.

Először két segédtételt bizonyítunk be.

1. segédtétel: Bocsássunk merőlegest az ABC háromszög körülírt körének A' pontjából a BC egyenesére, ennek a merőlegesnek az ABC háromszög körülírt körével való második metszés-

pontja legyen A^* . Ekkor az A' ponthoz tartozó s_1 Simson-egyenes párhuzamos az AA^* egyenessel.

Bizonyítás: jelöléseink a 3. ábrán láthatók.

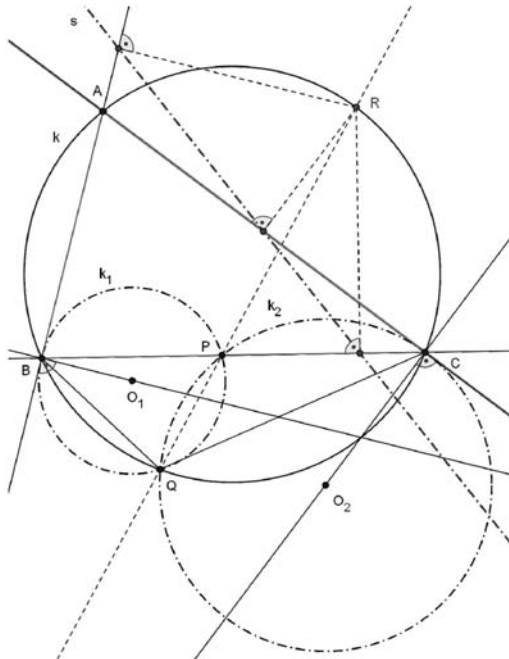
Nyilvánvaló, hogy $A'T_bT_aC$ húrnégyszög, ezért a kerületi szögek tételéből $A'CT_b\varphi = A'T_aT_b\varphi = \varphi$ következik. Ugyancsak a kerületi szögek tétele alapján (az ABC háromszög körülírt körében) $A'CA\varphi = A'A^*A\varphi = \varphi$. Így $A'A^*A\varphi = A'T_aT_b\varphi = \varphi$, és mivel a két szög egyik szára közös, a másik szárúknak szükségképpen párhuzamosnak kell lennie, vagyis $s_1 \parallel AA^*$ valóban teljesül.

2. segédtétel: Az ABC háromszög körülírt körének egy pontjához tartozó Simson-egyenes áthalad a pontot az ABC háromszög M magasságpontjával összekötő szakasz felezőpontján.

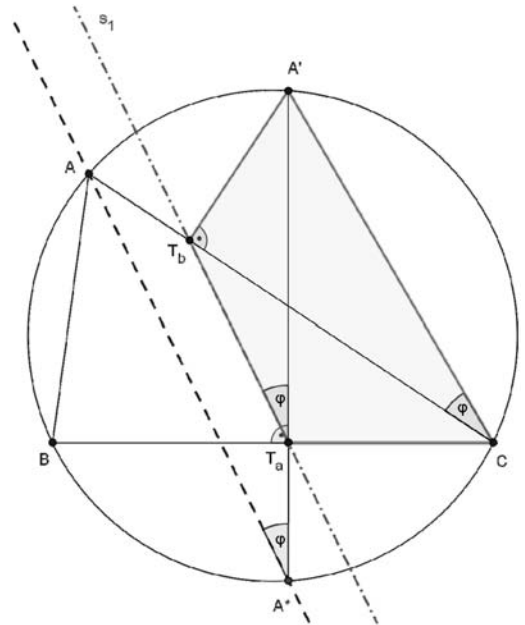
Bizonyítás: tekintsük most a 4. ábrát.

Tükrözzük az A' pontot az AC oldalra, így kapjuk az E pontot (az E pont a T_b pontra vonatkozó tükörkép is).

A bizonyításban felhasználjuk azt a tételt, amely szerint a háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körön vannak (a megjelölt irodalom [4] könyvében).



2. ábra



3. ábra

Eszerint az M pontnak az AC oldalra, és így a T_2 pontra vonatkozó M_2 tükörképe is a körülírt körön van. Ez éppen azt jelenti, hogy az $A'M_2$ szakasznak az AC oldalra vonatkozó tükörképe EM .

Mivel $A'E \parallel M_2M$, ezért az előzőek alapján $A'EMM_2$ egyenlő szárú trapéz. Nyilvánvaló továbbá, hogy $A'DBM_2$ is egyenlő szárú trapéz, ebből következik, hogy $EM \parallel DB$.

A $BCA'D$ és $T_aCA'T_b$ húrnégyszögek, amelyeknek a közös A' és C csúcshoz tartozó szögei nyilván egyenlők, így a két húrnégyszög B és T_a pontokhoz tartozó szögei is egyenlők ($DBC\alpha = T_bT_aC\alpha = 180^\circ - T_bA'C\alpha$), eszerint DB párhuzamos a T_aT_b szakasszal, vagyis T_aT_b párhuzamos EM -mel. Ez pontosan azt jelenti, hogy a $A'EM$ háromszög $A'E$ oldalának T_b felezőpontján áthaladó T_bF szakasz a háromszög középvonala, tehát az A' ponthoz tartozó s_1 Simson-egyenes valóban felezi az $A'M$ szakaszt. Ezzel a segédítél állítását bizonyítottuk.

(A két segédítél bizonyítása megtalálható az irodalom [1] könyvében, a 2. bizonyítása [5] alapján készült).

Az ABC háromszögnek az $A'; B'; C'$ pontokhoz három Simson-egyenes tartozik, ezeket $s_1; s_2; s_3$ -mal jelöljük. Nyilvánvaló, hogy az $A'B'C'$ há-

romszögnek is van három, az $A; B; C$ pontokhoz tartozó Simson-egyenes, legyenek ezek $s'_1; s'_2; s'_3$. A továbbiakban az $s_1; s_2; s_3$ és az $s'_1; s'_2; s'_3$ egyenesek néhány nevezetes tulajdonságát mutatjuk be.

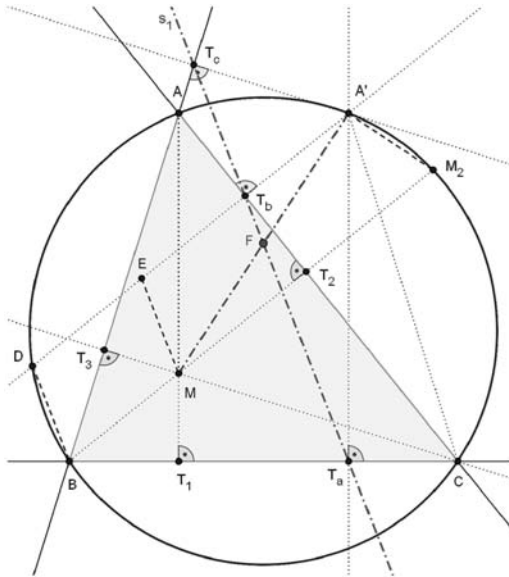
Tétel: Az ABC háromszögnek az $A'; B'; C'$ pontokhoz tartozó Simson-egyenesei rendre merőlegesek a $B'C'; C'A'$ és $A'B'$ egyenesekre, és az $A'B'C'$ háromszögnek az $A; B; C$ pontokhoz tartozó Simson-egyenesei rendre merőlegesek a $BC; CA$ és AB egyenesekre.

Bizonyítás: jelöléseink az 5. ábrán láthatók.

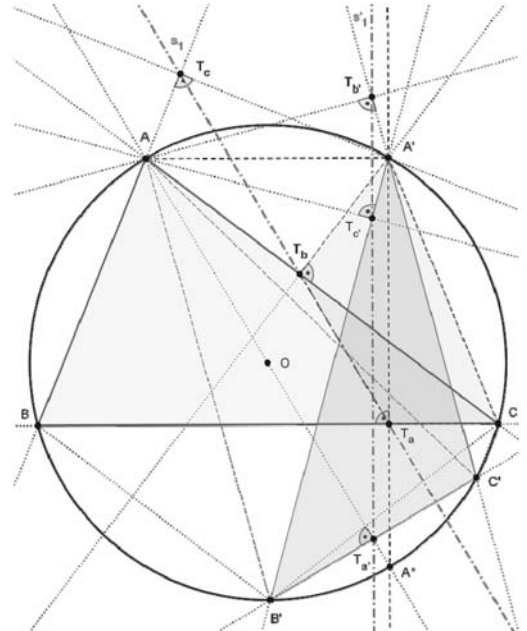
Legyen az A^* pont az 1. segédítélben meghatározott pont.

Mivel $ABCA'$ húrtrapéz, ezért $AA' \parallel BC$, és így $A'A^*$ nem csak a BC , hanem a vele párhuzamos AA' egyenesre is merőleges. Ez azt jelenti, hogy $AA'A^*\alpha = 90^\circ$, tehát az $AA'A^*$ háromszög derékszögű, és ezért az AA^* szakasz az ABC háromszög körülírt körének átmérője.

A bevezető feladat következménye volt (az 5. ábra jelöléseivel), hogy $AB' = AC' = BC$, vagyis az $AB'C'$ háromszög egyenlő szárú. Ezért az AA^* átmérő merőlegesen felezi $B'C'$ szakaszt és a $B'C'$ ívet. Ugyanakkor az 1. segédítél sze-



4. ábra



5. ábra

rint $s_1 \parallel AA^*$, így s_1 is merőleges a $B'C'$ egyenesére. Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy s_2 merőleges a $A'C'$, és s_3 merőleges a $A'B'$ egyenesére.

Az 1. segédtételből az is következik, hogy az $A'B'C'$ háromszögnek az A ponthoz tartozó s_1 Simson-egyenesé párhuzamos az $A'A^*$ egyenessel. Mivel azonban $A'A^*$ merőleges a BC egyenesére, ezért s_1 is merőleges a BC egyenesére. Hasonló módon bizonyítható, hogy s_2 merőleges a AC , és s_3 merőleges az AB egyenesére. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyzés: a bizonyítás során az is kiderült, hogy mivel az AA^* átmérő merőlegesen felezi a $B'C'$ szakaszt, ezért felezi a $B'C'$ ívet is, tehát a $B'A'A^*$ és a $C'A'A^*$ a körülírt körben azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az $A'B'C'$ háromszögben $A'A^*$ szögfelező, amely párhuzamos a $B'C'$ oldal felezőpontján átmenő s_1 egyenessel, és hasonlóképpen látható be, hogy s_2 és s_3 rendre párhuzamosak az $A'B'C'$ háromszög B' , illetve C' csúcsaihoz tartozó szögfelezőkkel.

Ismert geometriai tétel, hogy ha az ABC háromszög körülírt körét a háromszög M magasságpontjából $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyítjük, akkor az

ABC háromszög Feuerbach-körét kapjuk.

Könnyen bizonyítható, hogy ez a kör átmegy a háromszög oldalfelező pontjain, a magasságok talppontjain és a csúcsokat a magasságponttal összekötő szakaszok felezőpontjain (az [1], [3], [4] könyvekben kiemelten szerepel), ezért *kilencpontos körnek* is nevezik.

A bizonyítás lényegében három elemi geometriai tételre vezethető vissza:

- a körülírt kör középpontja fele akkora távolságra van egy oldaltól, mint a magasságpont az oldallal szemközti csúcstól.
- a háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körön vannak (a 2. segédtétel bizonyításánál már hivatkoztunk rá).
- a magasságpontnak az oldalfelező pontokra vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körön vannak.

Mindhárom tétel és bizonyítása megtalálható a [4] feladatgyűjteményben (az 551., 1079., és 1081. feladatok).

A Feuerbach-körnek sok szép tulajdonsága van, jelen írásban ezekkel most részletesebben nem foglalkozunk, csak annyit említünk meg, hogy a középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonsága miatt a Feuerbach-kör R' sugara és az ABC háromszög körülírt körének R sugara között a $R' = \frac{R}{2}$ reláció áll fenn, továbbá a

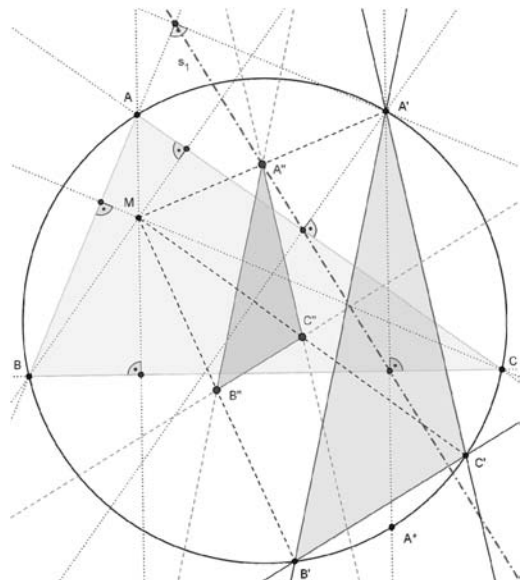
Feuerbach-kör középpontja az ABC háromszög körülírt körének középpontját és magasságpontját összekötő szakasz felezőpontja.

Nyilvánvaló tehát, hogy ha az ABC háromszög körülírt körének bármelyik háromszögét az M magasságpontból $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyítjük, akkor

olyan háromszöget kapunk, amelynek csúcspontjai az ABC háromszög Feuerbach-körén vannak.

A következő tétel az A' ; B' ; C' pontokhoz tartozó s_1 ; s_2 ; s_3 Simson-egyenesek egy érdekes tulajdonságát mondja ki.

Tétel: Az s_1 ; s_2 ; s_3 Simson-egyenesek annak az $A''B''C''$ háromszögnek a magasságpontjában metszik egymást, amelyet úgy kapunk, hogy az



6. ábra

$A'B'C'$ háromszöget az ABC háromszög M magasságpontjából $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyítjük.

Bizonyítás: jelöléseink a 6. ábrán láthatók.

A 2. segédtétel szerint az A' ponthoz tartozó s_1 Simson-egyenes áthalad az $A'M$ szakasz felezőpontján, vagyis az A'' ponton.

Ugyanakkor az 1. tétel miatt s_1 merőleges a $B'C'$ egyenesére, és az $\frac{1}{2}$ arányú középpontos

hasonlóság tulajdonságából következően $B''C'' \parallel B'C'$, így s_1 merőleges a $B''C''$ egyenesére is.

Mivel azonban s_1 áthalad az A'' ponton, ezért s_1 nem más, mint az $A''B''C''$ háromszög A'' ponthoz tartozó magasságvonala. Hasonlóképpen bizonyítható, hogy s_2 és s_3 az $A''B''C''$ háromszög rendre a B'' és C'' csúcsain átmenő magasságvonalai, ezek pedig az $A''B''C''$ háromszög magasságpontjában metszik egymást (7. ábra).

A 7. ábra szerint az $s_1; s_2; s_3$ egyenesek metszéspontja az $A''B''C''$ háromszög M'' -vel jelölt magasságpontja.

Kézenfekvőnek látszik az a gondolat, hogy ha az ABC háromszögnek az $A'; B'; C'$ pontokhoz

tartozó Simson-egyenesei az $A''B''C''$ háromszög magasságpontjában metszik egymást, akkor az $A'B'C'$ háromszögnek az $A; B; C$ pontokhoz tartozó Simson-egyenesei is egy pontban metszhetik egymást.

Ennek megfogalmazásához és bizonyításához először ismét egy minden háromszögre érvényes segédtételt bizonyítunk be.

3. segédtétel: A háromszög oldalfelező pontjain átmenő, és a szemközti szögfelezővel párhuzamos egyenesek egy pontban metszik egymást.

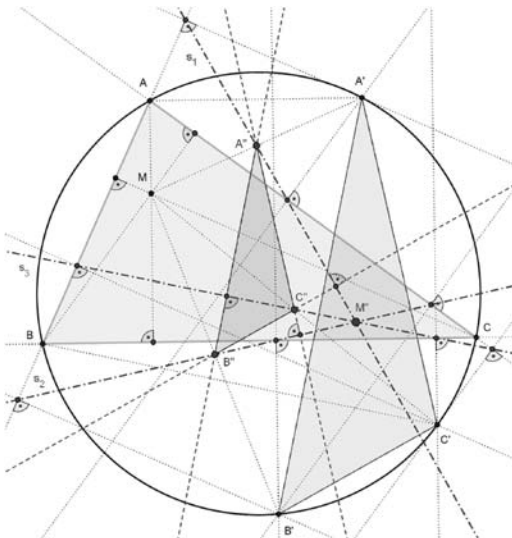
Bizonyítás: jelöléseink a 8. ábrán láthatók.

A 8. ábra általános ABC háromszöge az S súlypontra vonatkozó $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal átvihető az oldalfelező pontok alkotta $A_1B_1C_1$ háromszögbe.

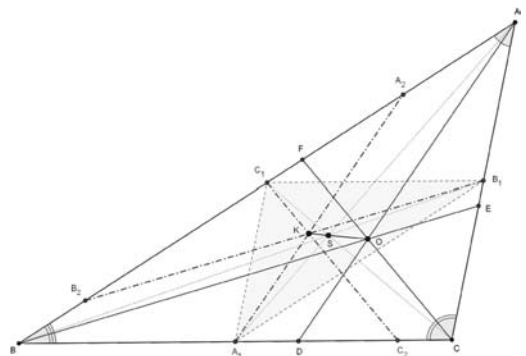
Ez a hasonlóság az ABC háromszög szögfelezőit az $A_1B_1C_1$ háromszög szögfelezőibe viszi át, ezek pedig éppen az eredeti szögfelezőkkel párhuzamos $A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2$ egyenesek.

Mivel a középpontos hasonlóság illeszkedéstartó, ezért az ABC háromszög beírt körének O középpontja az $A_1B_1C_1$ háromszög beírt körének középpontjába megy át, ebben a K pontban metszik egymást az $A_1A_2; B_1B_2$ és C_1C_2 egyenesek.

A 3. segédtétel, illetve feladat és megoldása megtalálható a megjelölt irodalom [6] könyvében.



7. ábra



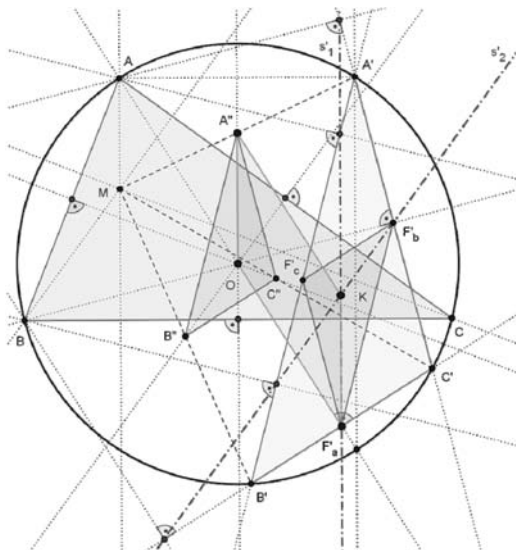
8. ábra

Az 1. tétel bizonyítása után tett megjegyzés szerint az $A'B'C'$ háromszögnek az $A; B; C$ pontokhoz tartozó, és az $A'B'C'$ háromszög oldalfelező pontjain átmenő s_1, s_2 és s_3 Simson-egyenesei rendre párhuzamosak az $A'B'C'$ háromszög $A'; B'$ és C' csúcsaihoz tartozó szögfelezőkkel. Ez a 3. segédétel miatt azt is jelenti, hogy s_1, s_2 és s_3 egy pontban metszik egymást. Ez a pont pedig nem más, mint az $A'B'C'$ háromszög oldalfelező pontjaiból álló háromszög beírt körének középpontja. A 3. tétel még ennél is többet állít.

3. tétel: Az ABC háromszögnek az $A'; B'; C'$ pontokhoz tartozó Simson-egyenesei, és az $A'B'C'$ háromszögnek az $A; B; C$ pontokhoz tartozó Simson-egyenesei ugyanabban a pontban metszik egymást.

Bizonyítás: Azt már a 2. tétel bizonyításánál beláttuk, hogy az ABC háromszögnek az $A'; B'; C'$ pontokhoz tartozó Simson-egyenesei egy pontban metszik egymást, ez a pont az $A''B''C''$ háromszög M'' magasságpontja.

Az előbbieken azt is bizonyítottuk, hogy az $A'B'C'$ háromszögnek az $A; B; C$ pontokhoz tartozó Simson-egyenesei is egy pontban metszik egymást.



9. ábra

Ha ezt az utóbbi pontot K -val jelöljük, akkor a 3. tétel állítása szerint $M'' = K$.

Ezt kell most bizonyítanunk. Vizsgáljuk ehhez a 9. ábrát, amelyen a könnyebb áttekinthetőség céljából az s_3 egyenest nem ábrázoltuk.

A 3. segédétel szerint az $A'B'C'$ háromszög oldalfelező pontjaiból álló $F'_a F'_b F'_c$ háromszög az $A'B'C'$ háromszögből állt elő egy olyan középpontos hasonlósággal, amelynek középpontja az $A'B'C'$ háromszög súlypontja, és a hasonlóság aránya $-\frac{1}{2}$.

Ugyancsak a 3. segédételből következik, hogy s_1, s_2 (és természetesen s_3) közös pontja az $F'_a F'_b F'_c$ háromszög beírt körének K középpontja.

Tudjuk, hogy az $A''B''C''$ háromszög M középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal

származik az $A'B'C'$ háromszögből.

Ebből azonnal adódik, hogy az $F'_a F'_b F'_c$ és $A''B''C''$ háromszögek egybevágók, oldalaik páronként ellentétes irányításúak (például az F'_a kezdőpontú és F'_b végpontú vektor egyenlő hosszúságú, de ellentétes irányú az A'' kezdőpontú és B'' végpontú vektorral), ezért a két háromszög egy középpontos tükrözéssel átvihető egymásba.

Ennél a középpontos tükrözésnél az $F'_a F'_b F'_c$ háromszög $F'_a K$ belső szögfelezője az $A''B''C''$ háromszög szögfelezőjébe megy át, ahol F'_a és A'' egymásnak megfelelő pontok.

Könnyen belátható, hogy az $A''O$ egyenes merőleges BC -re. Az 1. tételben pedig bizonyítottuk, hogy $F'_a K$ (a $B'C'$ felezőpontját ott másként jelöltük) is merőleges BC -re, továbbá F'_a és A'' a tükrözésnél egymásnak megfelelő pontok.

Mindezekből következik, hogy az $F'_a K$ szögfelező tükrörképe nem lehet más, csak az $A''O$ egyenes.

Az említett középpontos tükrözésben a K és O is egymásnak megfelelő pontok. Ez azt is jelenti, hogy az $F'_a K$ és $A''O$ szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

Eszerint a 9. ábra $A''OF'_aK$ négyszöge paralelogramma, vagyis OF'_a párhuzamos a KA'' egyenessel.

Azt már az előzőekben beláttuk, hogy OF'_a merőleges a $B'C'$ egyenesre, ezért OF'_a merőleges a $B''C''$ egyenesre, de így az OF'_a -val párhuzamos KA'' egyenes is merőleges a $B''C''$ egyenesre.

Ez éppen azt jelenti, hogy az $A''B''C''$ háromszögnek az A'' ponton átmenő magasságvonala átmegy a K ponton. Hasonlóképpen bizonyítható, hogy K illeszkedik az $A''B''C''$ háromszög másik két magasságvonalára is. Beláttuk tehát, hogy $M'' = K$, és ezzel a 3. tétel állítását igazoltuk.

Bár eddigi ábráink az ABC háromszöget hegyesszögűnek mutatták, bizonyítható, hogy mindhárom tétel teljesül tompaszögű háromszögre is,

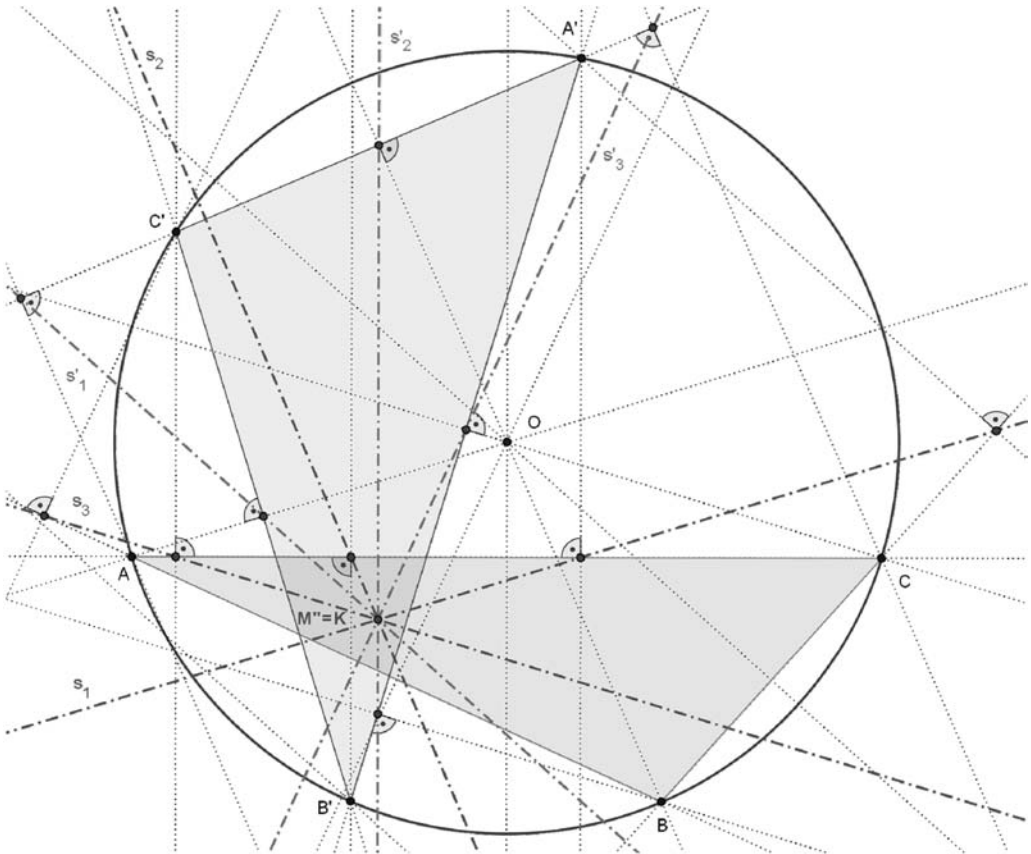
a 3. tétel tompaszögű esetét a 10. ábra szemlélteti.

A tételek fennállnak derékszögű háromszögre is, ebben az esetben azonban az $A'B'C'$ háromszög két csúcsa egybeesik.

A tételek mindkét utóbbi esetre az eddigiekhez hasonló módon bizonyíthatók be.

Irodalom

- [1] Érdekes matematikai gyakorló feladatok II.
- [2] Eigel Ernő: Síkgeometriai feladatok
- [3] Reiman István: Geometria és határterületei
- [4] Geometriai feladatgyűjtemény I. kötet
- [5] Bíró Bálint: Egy csodálatos egyenesről (előadás 2010 októberében, Nagykanizsán)
- [6] Elemi Matematika II. (ELTE-jegyzet), szerkesztette: Molnár Emil



10. ábra

Molnár István

Érdekességek egy speciális háromszögben II.

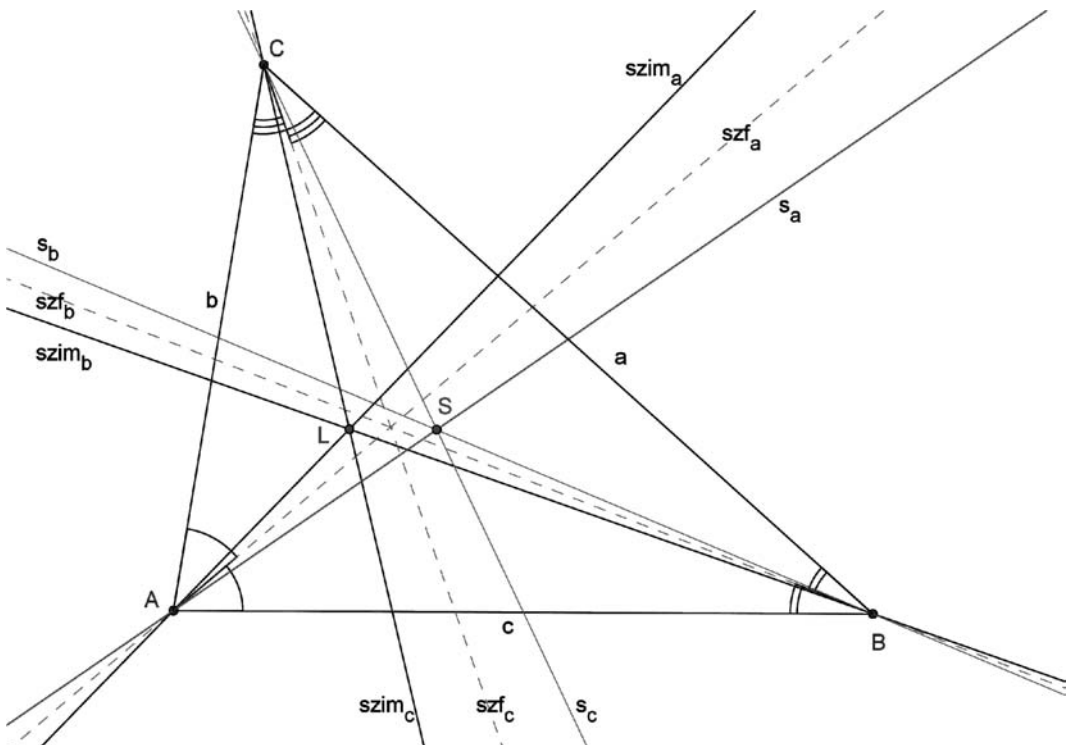
A dolgozat első részében [1] az $a^2 + b^2 = 2c^2$ feltételnek eleget tevő háromszögekre vonatkozó metrikus összefüggéseket, tulajdonságokat írtunk fel. Ezúttal a háromszög három nevezetes pontjához – magasságpont, súlypont, Lemoine-Grebe-féle pont – kapcsolódóan mutatunk be és bizonyítunk különböző tulajdonságokat, főképp trigonometrius eszközökkel.

Mielőtt rátérnénk a tulajdonságok bemutatására, előbb a Lemoine-Grebe-féle pont definícióját, majd a ponttal kapcsolatban néhány érdekességet szeretnénk ismertetni.

Egy háromszög adott csúcsához tartozó *szimediánjának* nevezzük azt az egyenest, melynek az adott csúcsból induló belső szögfelezőre vonatkozó tükörképe a súlyvonal. Egy háromszög három szimediánja egy pontban metszi egymást. A szimediánok metszéspontját a háromszög Lemoine-Grebe-féle pontjának nevezzük, és L -vel jelöljük (II.1. ábra).

A háromszög Lemoine-Grebe-féle pontjával kapcsolatban nagyon sok érdekes tulajdonság megemlíthető, ezek közül néhány:

- a) Az ABC háromszög síkjában egyetlen olyan pont van, amelynek a BC , CA , AB olda-



II.1. ábra

laktól vett távolsága $BC : CA : AB$ arányú, ez a pont az L .

- b) Az L pont az egyetlen olyan pont, amely súlypontja saját talpponti háromszögének.
- c) A magasságszakasz felezőpontját a szemközti oldal felezőpontjával összekötő három egyenes az L ponton megy keresztül.
- d) Legyen egy P pont előjeles távolsága a három oldalegyenestől x, y, z . Ekkor

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4T^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2},$$

ahol egyenlőség csak a $P = L$ esetben áll fenn.

Ezen tulajdonságok bizonyítását és még sok más tulajdonságot találhatunk [2]-ben.

A folytatásban térjünk rá a megnevezett pontok vizsgálatára. Legyen ABC egy háromszög, melyben tekintsük az alábbi jelöléseket: $AB = c, BC = a, CA = b, BAC\angle = \alpha, ACB\angle = \gamma, CBA\angle = \beta$. Jelölje m_a, m_b, m_c a megfelelő

oldalához tartozó magasságokat, illetve s_a, s_b, s_c a megfelelő oldalához tartozó súlyvonalakat.

Jelölje:

- M a háromszög magasságpontját,
- S a háromszög súlypontját,
- L pedig a háromszög Lemoine-Grebe-pontját.

Ha az ABC háromszög oldalai között fennáll az

$$a^2 + b^2 = 2c^2 \quad (*)$$

összefüggés, akkor teljesülnek az alábbiak:

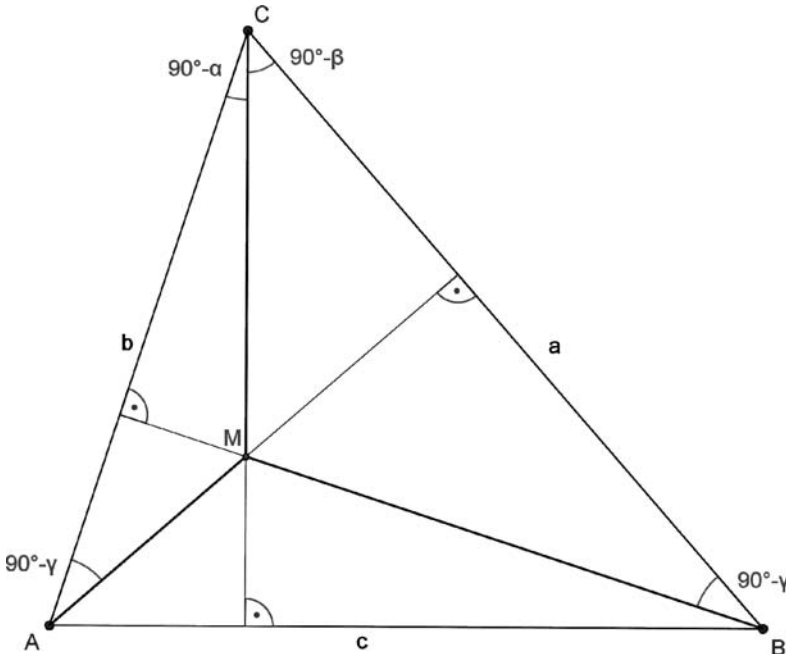
$$1) AM^2 + BM^2 = 2 \cdot CM^2$$

Bizonyítás:

A CMB háromszögben (II.2. ábra) alkalmazzuk a szinusz-tételt:

$$\frac{BM}{\sin BCM\angle} = \frac{CM}{\sin CBM\angle} \Rightarrow \frac{BM}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{CM}{\sin(90^\circ - \gamma)}$$

Innen $BM \cdot \cos\gamma = CM \cdot \cos\beta$.



II.2. ábra

A CMA háromszögben alkalmazzuk a szinusz-tételt:

$$\frac{AM}{\sin \angle ACM} = \frac{CM}{\sin \angle CAM} \Rightarrow$$

$$\frac{AM}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{CM}{\sin(90^\circ - \gamma)}$$

Innen $AM \cdot \cos \gamma = CM \cdot \cos \alpha$.

A kapott eredményeket négyzetre emelve, összegezve, majd az I.1. részben felírt $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 2 \cos^2 \gamma$ összefüggést felhasználva:

$$AM^2 \cdot \cos^2 \gamma + BM^2 \cdot \cos^2 \gamma =$$

$$= CM^2 \cdot \cos^2 \alpha + CM^2 \cdot \cos^2 \beta$$

$$(AM^2 + BM^2) \cdot \cos^2 \gamma = CM^2 \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)$$

$$(AM^2 + BM^2) \cdot \cos^2 \gamma = CM^2 \cdot 2 \cos^2 \gamma$$

Tudva, hogy $\cos \gamma \neq 0$ (hiszen $\gamma \leq 60^\circ$), végigoszthatunk $\cos^2 \gamma$ -val. Kapjuk, hogy:

$$AM^2 + BM^2 = 2 \cdot CM^2.$$

Q.e.d.

2) Az S talpponti háromszöge egyenlő szárú.

Bizonyítás:

Jelöljük S merőleges vetületét az AC, AB és BC szakaszokon rendre N, P, Q-val (II.3. ábra).

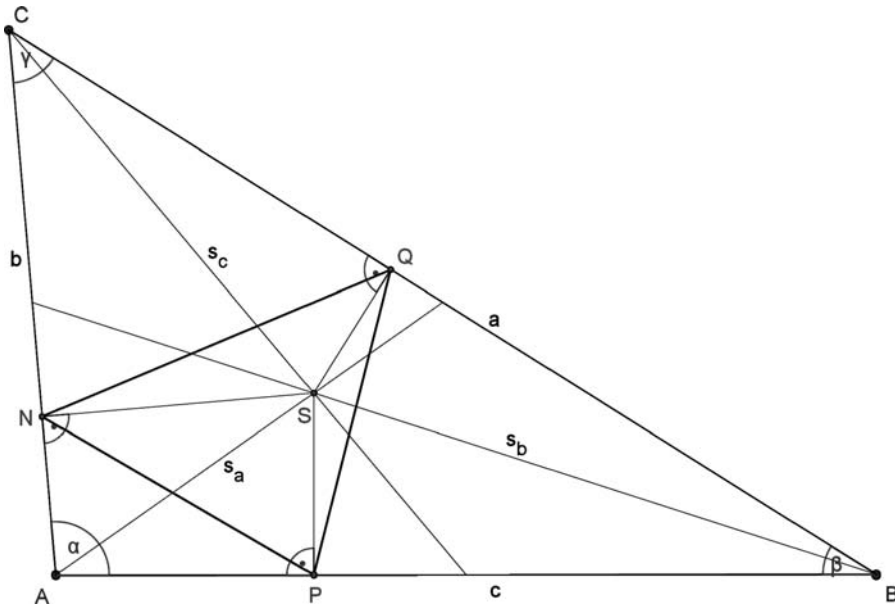
Az ANSP négyszög húrnégyszög, mert $\angle ANS + \angle APS = 180^\circ$. Felhasználva, hogy az AS az ANSP négyszög köré írható kör átmérője, következik, hogy $NP = AS \cdot \sin \alpha$.

Hasonló gondolatmenettel a CNSQ és BPSQ húrnégyszögekben felírható, hogy $QN = CS \cdot \sin \gamma$ és $QP = BS \cdot \sin \beta$.

Figyelembe véve, hogy $AS = \frac{2}{3} \cdot s_a$ és

$BS = \frac{2}{3} \cdot s_b$, az I.3. rész megjegyzése alapján:

$$\left\{ \begin{aligned} NP^2 &= \frac{4}{9} \cdot s_a^2 \cdot \sin^2 \alpha = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot b^2 \cdot \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot \sin^2 \alpha \\ QP^2 &= \frac{4}{9} \cdot s_b^2 \cdot \sin^2 \beta = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot a^2 \cdot \sin^2 \beta = \\ &= \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sin^2 \beta. \end{aligned} \right.$$



II.3. ábra

Felírva a szinusztételt az eredeti ABC háromszögben, kapjuk, hogy $b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$.

Innen egyszerű számításokkal levezethető, hogy

$$\frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sin^2 \beta.$$

A kapott egyenlőséget figyelembe véve, az NP és QP négyzeteire kapott eredmények alapján következik, hogy $NP^2 = QP^2$, azaz $NP = QP$, tehát az NPQ háromszög egyenlő szárú.

Q.e.d.

3) Az L talpponti háromszöge hasonló az eredeti háromszöghöz.

Bizonyítás:

Jelöljük az L merőleges vetületét a BC , AC és AB szakaszokon rendre D , E , F -vel (II.4. ábra).

Induljunk ki abból az ismert tényből, hogy tet-szöleges háromszögben teljesül az $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 =$

$$= \frac{3}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \text{ összefüggés. Ezt alkalmazva}$$

a háromszög minden oldala kifejezhető csupán a háromszög súlyvonalainak segítségével.

Tehát, például

$$s_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2}{4} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3} \cdot (s_a^2 + s_b^2 + s_c^2) - 3a^2}{4}$$

$$4s_a^2 = \frac{8}{3} \cdot (s_a^2 + s_b^2 + s_c^2) - 3a^2.$$

Innen

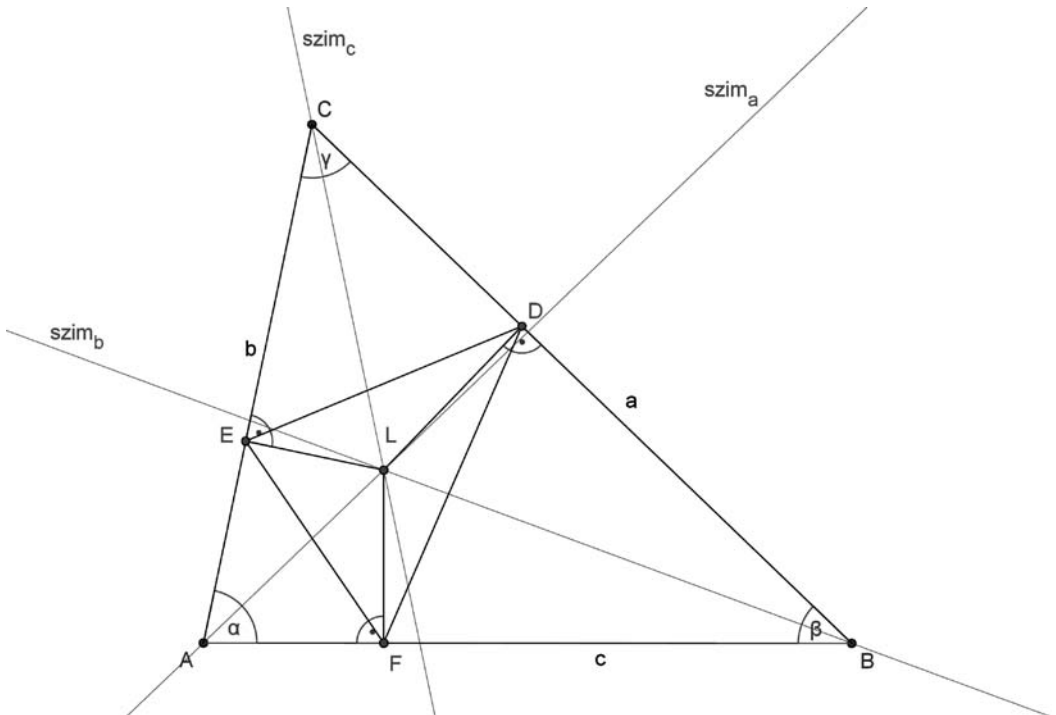
$$3a^2 = \frac{8}{3} \cdot (s_a^2 + s_b^2 + s_c^2) - 4s_a^2 =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot (2s_b^2 + 2s_c^2 - s_a^2)$$

$$a^2 = \frac{4}{9} \cdot (2s_b^2 + 2s_c^2 - s_a^2).$$

Hasonlóan levezethető, hogy

$$b^2 = \frac{4}{9} (2s_a^2 + 2s_c^2 - s_b^2)$$



II.4. ábra

és

$$c^2 = \frac{4}{9} \cdot (2s_b^2 + 2s_a^2 - s_c^2).$$

Egyfelől L rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a BC , CA , AB oldalaktól vett távolsága $BC : CA : AB$ arányú, ezért $LD = \lambda a$, $LE = \lambda b$ és $LF = \lambda c$ lesz, ahol λ pozitív valós szám.

Másrészt pedig L súlypontja saját talpponti háromszögének, így a DEF háromszög súlyvonalai $\frac{3}{2} \cdot \lambda a$, $\frac{3}{2} \cdot \lambda b$ és $\frac{3}{2} \cdot \lambda c$ nagyságúak lesznek.

Mindezeket és az $a^2 + b^2 = 2c^2$ összefüggést felhasználva a DEF háromszögre:

$$EF^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \lambda^2 b^2 + 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \lambda^2 c^2 - \frac{9}{4} \cdot \lambda^2 a^2 \right) = \lambda^2 (2b^2 + 2c^2 - a^2) = 3b^2 \lambda^2,$$

$$DF^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \lambda^2 a^2 + 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \lambda^2 c^2 - \frac{9}{4} \cdot \lambda^2 b^2 \right) = \lambda^2 (2a^2 + 2c^2 - b^2) = 3a^2 \lambda^2,$$

$$DE^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \lambda^2 a^2 + 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \lambda^2 b^2 - \frac{9}{4} \cdot \lambda^2 c^2 \right) = \lambda^2 (2a^2 + 2b^2 - c^2) = 3c^2 \lambda^2.$$

A kapott összefüggések alapján:

$$\frac{EF^2}{b^2} = \frac{DF^2}{a^2} = \frac{DE^2}{c^2} = 3\lambda^2,$$

ahonnan

$$\frac{EF}{b} = \frac{DF}{a} = \frac{DE}{c} = \lambda\sqrt{3},$$

vagyis a megfelelő oldalak arányossága miatt az $EDF_{\Delta} \sim ABC_{\Delta}$.

Q.e.d.

Megjegyzés

1. A λ egyszerűen kifejezhető az eredeti háromszög oldalainak függvényében.

Ha T jelöli az ABC háromszög területét, akkor:

$$T = \frac{LD \cdot a}{2} + \frac{LE \cdot b}{2} + \frac{LF \cdot c}{2}.$$

Felhasználva, hogy $LD = \lambda a$, $LE = \lambda b$ és $LF = \lambda c$, akkor egyfelől kapjuk, hogy

$$2T = \lambda a^2 + \lambda b^2 + \lambda c^2 = \lambda(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\lambda = \frac{2T}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahol $s = \frac{K}{2}$.

Másrészt pedig figyelembe véve az $a^2 + b^2 = 2c^2$, valamint az I.2. részben bizonyított $T = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4a^2b^2 - c^4}$ összefüggéseket:

$$\lambda = \frac{2T}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2T}{3c^2} = \frac{2}{3c^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4a^2b^2 - c^4} = \frac{1}{6c^2} \cdot \sqrt{4a^2b^2 - c^4}.$$

2. Igazolható, hogy az L talpponti háromszögében az oldalak úgy aránylanak egymáshoz, mint az ABC háromszög súlyvonalai.

Felhasználva az I.3. részben bizonyított

$$\frac{s_a}{b} = \frac{s_b}{a} = \frac{s_c}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

összefüggést, valamint

$$a) \text{ 3) tulajdonság bizonyításánál kapott } \frac{EF}{b} = \frac{DF}{a} = \frac{DE}{c} = \lambda\sqrt{3}$$

$$\text{eredményt, azonnal adódik, hogy } \frac{EF}{s_a} = \frac{DF}{s_b} = \frac{EF}{s_c} = 2\lambda.$$

$$4) CL^2 = AL \cdot BL$$

Bizonyítás:

A II.4. ábra jelöléseit használva, az $AELF$ négyszög egy húrnégyszög, mert $\sphericalangle AEL + \sphericalangle AFL = 180^\circ$. Figyelembe véve, hogy AL a négyszög köré írható kör átmérője, következik, hogy $EF = AL \cdot \sin \alpha$.

Hasonló gondolatmenettel a $CELD$ és $BFLD$ húrnégyszögekben felírható, hogy $DE = CL \cdot \sin \gamma$ és $DF = BL \cdot \sin \beta$.

A kapott összefüggéseket és a 3) tulajdonság bizonyításánál kapott $\frac{EF^2}{b^2} = \frac{DF^2}{a^2} = \frac{DE^2}{c^2}$ eredményt felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{AL \cdot \sin \alpha}{b} = \frac{BL \cdot \sin \beta}{a} = \frac{CL \cdot \sin \gamma}{c}.$$

Innen

$$\left(CL \cdot \frac{\sin \gamma}{c} \right)^2 = AL \cdot \frac{\sin \alpha}{b} \cdot BL \cdot \frac{\sin \beta}{a}$$

$$CL^2 \cdot \left(\frac{\sin \gamma}{c} \right)^2 = AL \cdot BL \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{ab}.$$

Felírva a szinusz-tételt az eredeti ABC háromszögben kapjuk, hogy $\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a}$, amiből egyszerű számításokkal levezethető a $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{ab} = \left(\frac{\sin \gamma}{c} \right)^2$ összefüggés.

Ez utóbbi egyenlőséget figyelembe véve:

$$CL^2 \cdot \left(\frac{\sin \gamma}{c} \right)^2 = AL \cdot BL \cdot \left(\frac{\sin \gamma}{c} \right)^2.$$

Végigosztva $\left(\frac{\sin \gamma}{c} \right)^2$ -vel $\left(\frac{\sin \gamma}{c} \neq 0 \right)$ kapjuk,

hogy

$$CL^2 = AL \cdot BL.$$

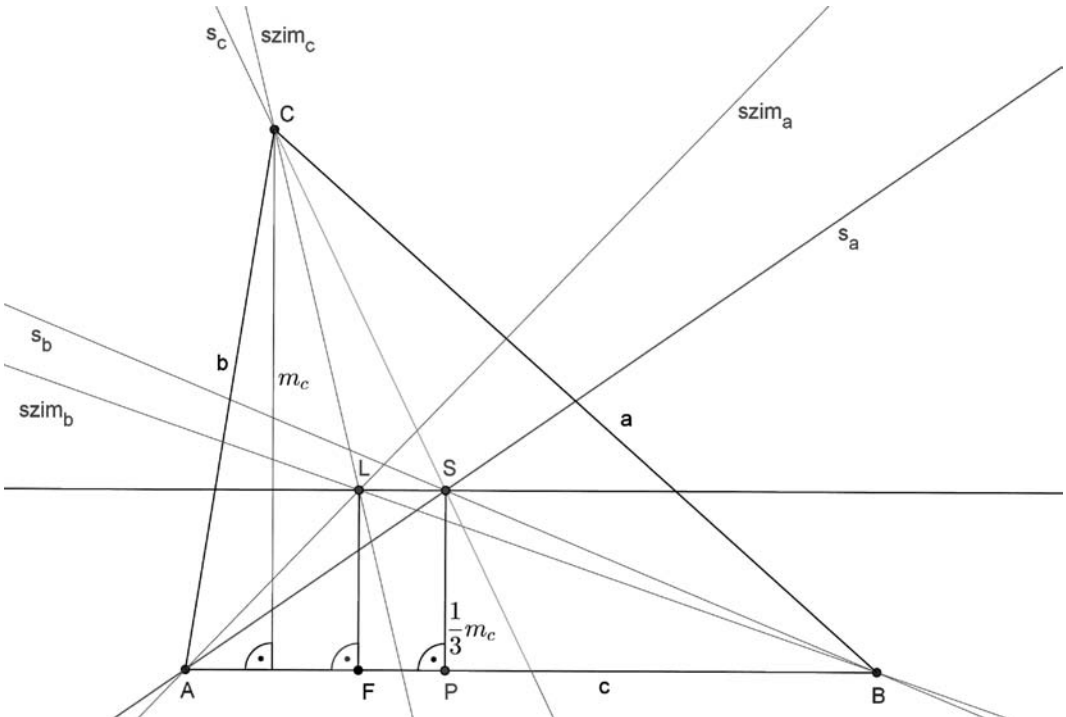
Q.e.d.

5) Az *SL* egyenes párhuzamos az *AB* egyenessel.

Bizonyítás:

A 3) tulajdonság alapján az *L* talpponti háromszöge hasonló az eredeti háromszöghöz (II.5. ábra).

A hasonlósági arány $\lambda = \frac{2T}{a^2 + b^2 + c^2}$, ahol *T* az *ABC* háromszög területét jelöli.



II.5. ábra

Ekkor

$$d(L, AB) = LF = \frac{2T}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot c = \frac{2T}{3c^2} \cdot c = \frac{1}{3} \cdot \frac{2T}{c} = \frac{1}{3} \cdot m_c.$$

Az S súlypont a súlyvonalakat 2 : 1 arányban osztja. Innen egyszerűen belátható, hogy

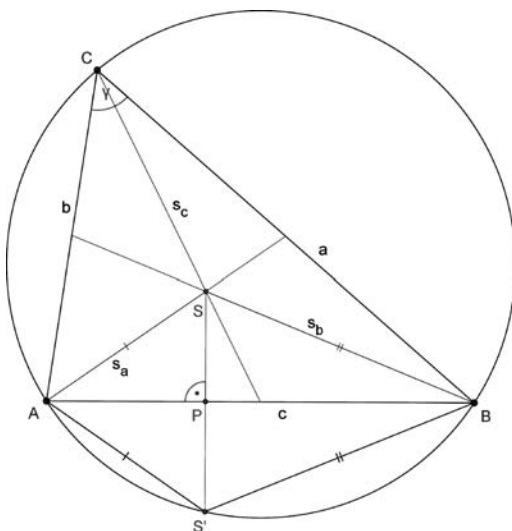
$$d(S, AB) = SP = \frac{1}{3} \cdot m_c.$$

Figyelembe véve, hogy $d(L, AB) = LF = \frac{1}{3} \cdot m_c$

és $d(S, AB) = SP = \frac{1}{3} \cdot m_c$ – azaz mindkét pont ugyanolyan távol van az AB egyenestől –, valamint hogy az L és az S pontok az AB egyenes által meghatározott félsíkok közül ugyanazon félsíkban találhatóak, következik, hogy SL párhuzamos AB-vel.

Q.e.d.

6) S-nek az AB oldalegyenesre vonatkozó tükörképe rajta van az ABC háromszög köré írható körön.



II.6. ábra

Bizonyítás:

Legyen S' S-nek az AB oldalegyenesre vonatkozó tükörképe (II.6. ábra).

A tengelyes tükrözés tulajdonságai következtében S'A = AS = $\frac{2}{3} \cdot s_a$ és S'B = BS = $\frac{2}{3} \cdot s_b$.

Alkalmazzuk a koszinusztételt az AS'B háromszögben:

$$AB^2 = S'A^2 + S'B^2 - 2 \cdot S'A \cdot S'B \cdot \cos AS'B \sphericalangle$$

$$c^2 = \frac{4}{9} \cdot s_a^2 + \frac{4}{9} \cdot s_b^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot s_a \cdot \frac{2}{3} \cdot s_b \cdot \cos AS'B \sphericalangle.$$

Felhasználva az I.3. részben bizonyított

$$s_a^2 = \frac{3}{4} \cdot b^2 \text{ és } s_b^2 = \frac{3}{4} \cdot a^2 \text{ összefüggéseket:}$$

$$c^2 = \frac{1}{3} \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot a^2 - \frac{8}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos AS'B \sphericalangle$$

$$3c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos AS'B \sphericalangle = 2c^2 - 2ab \cdot \cos AS'B \sphericalangle$$

$$c^2 = -2ab \cdot \cos AS'B \sphericalangle$$

$$\cos AS'B \sphericalangle = -\frac{c^2}{2ab}.$$

Az I.1. részben bebizonyítottuk, hogy

$$\cos \gamma = \frac{c^2}{2ab}, \text{ ezért teljesül, hogy}$$

$$\cos \gamma + \cos AS'B \sphericalangle = \frac{c^2}{2ab} - \frac{c^2}{2ab} = 0.$$

Innen $\gamma + AS'B \sphericalangle = 180^\circ$ vagy $\gamma - AS'B \sphericalangle = 180^\circ$, ám ez utóbbi eset nem lehetséges, mert $\gamma < 180^\circ$.

Tehát $ACB \sphericalangle + AS'B \sphericalangle = 180^\circ$, ahonnan következik, hogy az ACBS' négyszög húrnégyszög, azaz S' rajta van az ABC háromszög köré írható körön.

Q.e.d.

7) S rajta van az A'B'C háromszög köré írható körön, ahol az A' a BC oldal, míg B' az AC oldal felezőpontja.

Bizonyítás:

Azt kell belátnunk, hogy a $CA'SB'$ négyszög egy húrnégyszög (II.7. ábra).

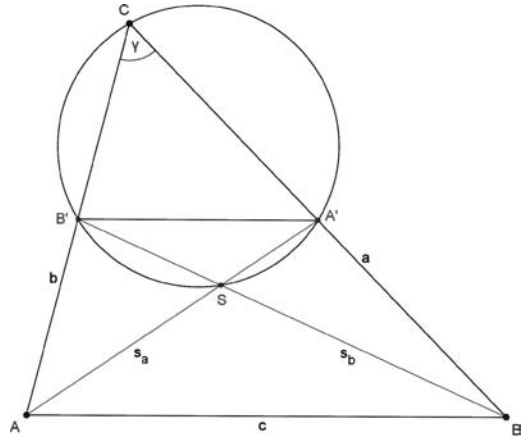
Egyfelől az $A'B'$ középvonal az ABC háromszögben és így $A'B' = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$.

Másfelől viszont

$$B'S = \frac{1}{3} \cdot s_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a$$

és

$$A'S = \frac{1}{3} \cdot s_a = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b.$$



II.7. ábra

Az $A'SB'$ háromszögben felírjuk a koszinusztételt az $A'SB'$ szögre:

$$\begin{aligned} \cos A'SB' \sphericalangle &= \frac{B'S^2 + A'S^2 - A'B'^2}{2 \cdot B'S \cdot A'S} = \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)}. \end{aligned}$$

Figyelembe véve a (*) összefüggést, a műveletek elvégzése és az összevonások után:

$$\begin{aligned} \cos A'SB' \sphericalangle &= \frac{\frac{1}{12} \cdot (a^2 + b^2) - \frac{c^2}{4}}{\frac{ab}{6}} = \\ &= \frac{\frac{c^2}{6} - \frac{c^2}{4}}{\frac{ab}{6}} = \frac{-\frac{c^2}{12}}{\frac{ab}{6}} = -\frac{c^2}{2ab}. \end{aligned}$$

Mivel $\cos \gamma = \frac{c^2}{2ab}$, ezért $\cos \gamma + \cos A'SB' \sphericalangle =$
 $= \frac{c^2}{2ab} - \frac{c^2}{2ab} = 0.$

Innen $\gamma + A'SB' \sphericalangle = 180^\circ$ vagy $\gamma - A'SB' \sphericalangle = 180^\circ$. Ez utóbbi eset nem lehetséges, hiszen $\gamma < 180^\circ$. Tehát $A'CB' \sphericalangle + A'SB' \sphericalangle = 180^\circ$, ahonnan következik, hogy a $CA'SB'$ négyszög egy húrnégyszög,

szög, azaz S rajta van az $A'B'C$ háromszög köré írt körön.

Q.e.d.

Végezetül néhány további érdekes tulajdonság (ezek bizonyítását a Tisztelt Olvasóra bízuk):

- Az OL egyenes merőleges CL egyenesre, ahol O az ABC háromszög köré írt kör középpontja.
- Ha az ABC háromszög két csúcsát rögzítjük, akkor a harmadik csúcs által leírt mértani hely egy kör lesz.
- M rajta van az ASB háromszög köré írt körén.
- Az AB közös érintője a CSB és a CSA háromszögek köré írt köreinek.

Felhasznált irodalom

- [1] Molnár István: *Érdekeségek egy speciális háromszögben I.* A Matematika Tanítása, 2011/4.
- [2] Surányi László: *A háromszög kevésbé ismert nevezetes pontjairól. II. rész.* KÖMAL, 1984/8–9. sz., 337–351. o.

Dr. Darvasi Gyula

Szerkesszünk párhuzamos élű vonalzóval!

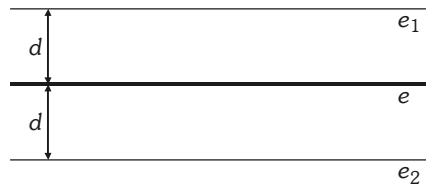
A párhuzamos élű vonalzó olyan beosztás nélküli vonalzó, amelynek két párhuzamos éle van, s ezek d -vel jelölt távolságát a vonalzó szélességének nevezzük, amit egységnek is választhatunk ([2] 99–100. oldal, [4] 129–131. oldal). Ezzel a vonalzóval a síkban az alábbi szerkesztési lépések elvégzése megengedett:

1. Két adott pont összekötő egyenesének megrajzolása.
2. Adott egyenestől d távolságra lévő párhuzamosok megrajzolása.
3. Két adott pontra illeszkedő, d távolságú párhuzamosok megrajzolása.

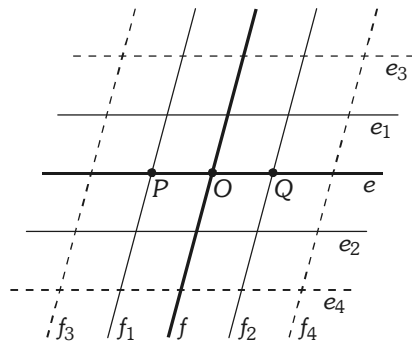
Az 1. lépéshez a párhuzamos élű vonalzónak csak az egyik éle szükséges, vagyis ez a szerkesztés az euklideszi vonalzóval ugyanígy elvégezhető. A 2. lépésnél a párhuzamos élű vonalzót úgy helyezzük el, hogy egyik éle illeszkedjen az adott egyenesre, s ekkor a másik éle mentén meghúzható az adott egyenestől d távolságra lévő párhuzamos (1. ábra). Ez az eljárás az adott egyenes mindkét oldalán elvégezhető, s így mindig két párhuzamost kapunk, amelyek középpárhuzamosa az adott egyenes. Ha ezt a lépést két adott metsző egyenesre végezzük el, akkor a szerkesztés eredményeként mindkét adott egyenesen előáll egy-egy szakasz és azoknak a felezőpontjai: például az e -re illeszkedő \overline{PQ} szakasznak O a felezőpontja (2. ábra). Ennek a lépésnek a megismétlésével az adott e és f metsző egyeneseken az O metszésponttól elkezdve egybevágó szakaszokat tudunk előállítani, s ha még $e \perp f$ is teljesül, akkor ezen egybevágó szakaszok hossza éppen egyenlő a párhuzamos élű vonalzó d szélességével. A 3. lépés végrehajtásának előfeltétele, hogy a két adott pont távolsága ne legyen kisebb a párhuzamos élű vonalzó d szélességénél. Ekkor a párhuzamos élű vonalzót úgy helyezzük el, hogy egyik éle az egyik adott

pontra, a másik éle pedig a másik adott pontra illeszkedjen, s ezután mindkét éle mentén egyenest rajzolunk. Ha az adott A és B pontokra $AB = d$ teljesül, akkor ezzel a lépéssel az A és B ponton át egy-egy egyenes húzható, amelyek az \overline{AB} -re merőlegesek (3a ábra). Ha viszont az $AB > d$ eset áll fenn, akkor ezzel a lépéssel az A és B pontok mindegyikén át két-két egyenes húzható, s a párhuzamosok közötti sávok metszete egy rombuszt ad (3b ábra). Az A pontot tekintve megállapítható, hogy a B ponton át megrajzolt egyenesek érintik az A középpontú és d sugarú k kört. Hasonló állítás kimondható a B pontra is.

A 2. és 3. lépésnél előálló egyenesek euklideszi eszközökkel (körzövel és beosztás nélküli, egyélű vonalzóval) is megszerkeszthetők, ha tudunk euklideszileg szerkeszteni d hosszúságú szakaszt. A kétélű vonalzók (párhuzamos élű vonalzó, szögvonalzó) elméletét George E. Martin



1. ábra



2. ábra

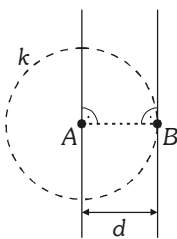
szerint ([2] 99. oldal) elsőként Poncelet dolgozta ki részletesen, s eredményeit 1822-ben tette közzé. 1890-ben Adler bebizonyította, hogy minden körzövel és beosztás nélküli egyélű vonalzóval elvégezhető szerkesztés megoldható kizárólag csak párhuzamos élű vonalzóval. Megfordítva: a párhuzamos élű vonalzóval megoldható szerkesztések pontosan akkor végezhetők el körzövel és beosztás nélküli egyélű vonalzóval, ha a rendelkezésre álló adatokból a párhuzamos élű vonalzó szélessége megszerkeszthető körzövel és egyélű vonalzóval ([4] 259. oldal).

Az alábbiakban előbb párhuzamos és merőleges egyenesek szerkesztésére, szakasz és szög felezésére illetve kétszerezésére, a síkbeli transzformációk esetén egy pont képének a megszerkesztésére, majd szakaszokkal és szögekkel kapcsolatos további problémákra, harmonikus pontnégyes szerkesztésére, s ezután kör és egyenes metszéspontjainak, a kör érintőjének és két szakasz mértani közepének a megszerkesztésére mutatunk be a teljesség igénye nélkül olyan megoldási módokat, amelyek kivitelezéséhez csak a párhuzamos élű vonalzó használatát engedjük meg. Eközben az ábráink jobb áttekinthetősége céljából, ha valamely szerkesztésnél egy azt megelőzőt felhasználunk, akkor annak a részletes kivitelezését mellőzzük és csak a végeredményként előálló pontot vagy egyenest rajzolunk be,

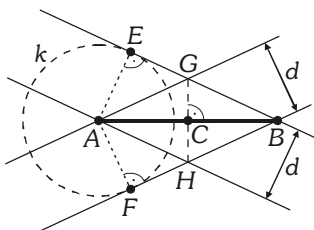
de egy újabb pont vagy egyenes megszerkesztése kizárólag párhuzamos élű vonalzóval értendő. Néhány ábrában mégis találhatók körívek, de csak szemléltetés céljából, s így azok nem képezik a szerkesztés részét. Ha egy bemutatott szerkesztés bizonyítására nem térünk ki, akkor az vagy megtalálható az adott hivatkozásban, vagy annak elvégzéséhez elegendő néhány elemi geometriai tételnek az ismerete. S minthogy mostani tárgyalásunk sok tekintetben követi a betoló vonalzó használatáról [1]-ben írt összeállítását, ennél fogva megtehető, hogy itt csak hivatkozunk az olyan szerkesztésekre, amelyek menete teljesen ugyanaz, jóllehet nem kell foglalkoznunk a csak betoló vonalzóval megoldható szögharmadolással és köbgyökvonással.

Az adott e egyenessel egy rá nem illeszkedő P ponton áthaladó párhuzamos szerkesztéséhez az e egyenes egy tetszőleges A pontját rögzítjük, majd a párhuzamos élű vonalzó egyik élét az \overline{AP} egyenesre illesztve a másik él mentén egyenest rajzolunk, amire ezt az eljárást megismételve kapjuk az e egyenes A -tól különböző B pontját (4. ábra). Ezután a \overline{BP} szakasz az elsőként megrajzolt párhuzamost C pontban, az \overline{AC} egyenes a második párhuzamost D pontban metszi: ekkor \overline{DP} egyenes a keresett párhuzamos ([2] 104. és 177. oldal Exercise 6.8 és Figure 10a).

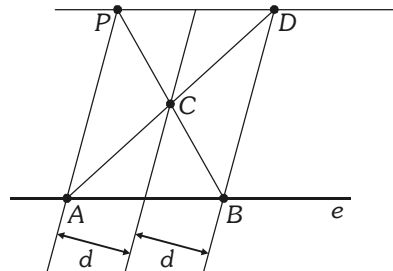
Ha az adott e egyenesre egy rá illeszkedő P pontban kívánunk merőlegest állítani (5. ábra), akkor a P ponton át húzunk egy e -től különböző f egyenest, amelynek két oldalán a párhuzamos élű vonalzóval az e egyenest A és B pontokban metsző f_1 és f_2 párhuzamosokat rajzolunk. Ezután a vonalzó élét a B és P pontok-



3a. ábra

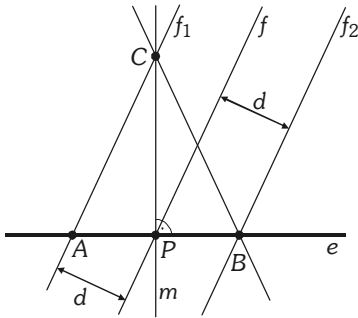


3b. ábra

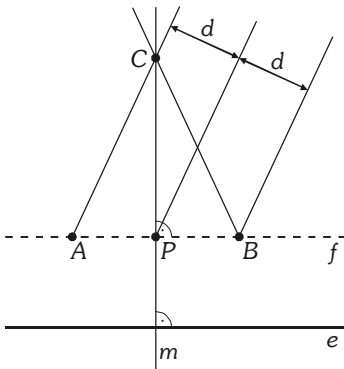


4. ábra

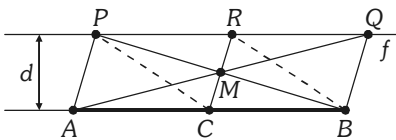
ra helyezve a B -re illeszkedő él mentén újabb egyenest rajzolunk, amely az f_1 -et egy C pontban metszi: ekkor \overline{CP} a keresett m merőleges. Ugyanis a BCP_{Δ} háromszög \overline{BC} oldalához tartozó súlyvonala egyenlő ezen oldal felével, s ennél fogva a P pont rajta van a \overline{BC} szakasz fölé írt Thalész-körön ([2] 101. oldal Figure 6.4). Ha viszont az adott e egyenesre merőleges állításakor a P pont nem illeszkedik e -re, akkor előbb a P ponton át egy e -vel párhuzamos f egyenest szerkesztünk, amire P -ben merőlegest állítva kapjuk a kívánt m egyenest (6. ábra). Az f -et merőlegesen metsző m egyenes ugyanis merőlegesen metszi az f -fel párhuzamos e egyenest is.



5. ábra



6. ábra



7. ábra

Az adott \overline{AB} szakasz C felezőpontjának megszerkesztéséhez az $AB = 2d$ esetben az \overline{AB} egyenesre A -ban állított merőlegessel (ennek B -t tartalmazó oldalán) d távolságban húzott párhuzamos az \overline{AB} szakaszt C -ben metszi. Ha $AB > d$, akkor a szerkesztés elvégezhető a 3. ábra alapján, ahol az $AHGB$ rombusz \overline{GH} átlója merőlegesen felezi az \overline{AB} szakaszt. Tetszőleges hosszúságú adott \overline{AB} szakasz C felezőpontjának párhuzamos élű vonalzó megszerkesztésére itt két módot tárgyalunk. További lehetőségekhez juthatunk az [1]-ben ismertetett 2., 3. és 4. mód alapján.

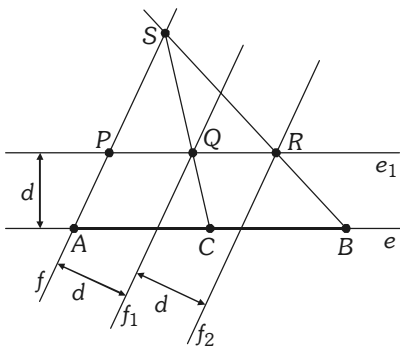
1. mód: Az \overline{AB} egyenes egyik oldalán \overline{AB} -től d távolságban meghúzott f párhuzamos egy P pontját összekötjük A -val és B -vel (7. ábra), majd f és a B ponton át \overline{AP} -vel párhuzamos Q metszéspontját összekötjük A -val. Ezután az \overline{AQ} és \overline{BP} szakaszok M metszéspontján át \overline{AP} -vel párhuzamosot húzunk, ami az \overline{AB} szakaszt a keresett C felezőpontban metszi, mint-hogy \overline{CM} egyenes tartalmazza az $ABQP$ paralelogramma egyik középvonalát. (Ez a szerkesztés elvégezhető kizárólag betoló vonalzóval is, ha f az \overline{AB} -vel húzott tetszőleges párhuzamos.)

2. mód: Az A ponton át egy \overline{AB} -től különböző f egyenest, majd az f egyik oldalán A -tól d és $2d$ távolságban f_1 és f_2 párhuzamosokat rajzolunk (8. ábra), s ezeket az \overline{AB} egyik oldalán \overline{AB} -től d távolságra meghúzott e_1 párhuzamos egyenes P , Q és R pontokban metszi. Ezután $B \notin f_2$ esetén az \overline{AP} és \overline{BR} egyenesek S metszéspontját Q -val összekötjük: a \overline{QS} egyenes az \overline{AB} szakaszt a keresett C felezőpontban metszi ([2] 104. és 176–177. oldal Exercice 6.11), s jóllehet $B \in f_2$ esetén S nem keletkezik, de ekkor már $C \in f_1$ úgyszintén teljesül.

A 7. ábráról a szakasz párhuzamos élű vonalzó megszerkesztésének két módja is leolvasható. Ehhez az \overline{AC} szakaszt adottnak tekintve mindkettőnél megrajzoljuk az f egyenest, azon kijelölünk egy P pontot és a C ponton át \overline{AP} -vel párhuzamosot húzunk, ami f -et egy R

pontban metszi. Ezután az 1. mód szerint megszerkesztjük a \overline{CR} szakasz M felezőpontját és meghúzzuk a \overline{PM} egyenest, ami az \overline{AC} félegyenest a keresett B pontban metszi. A 2. módnál pedig megrajzoljuk a \overline{PC} szakaszt, majd azzal az R ponton áthaladó párhuzamost, ami az \overline{AC} félegyenest a keresett B pontban metszi. A 8. ábra alapján egy harmadik módhoz jutunk, ha a P, Q és R pontok előállítását után $C \notin f_1$ esetén az \overline{AP} és \overline{CQ} egyenesek metszeteként előállítjuk az S pontot: ekkor \overline{RS} az e -t B -ben metszi. Ha viszont $C \in f_1$, akkor $B \in f_2$ teljesül.

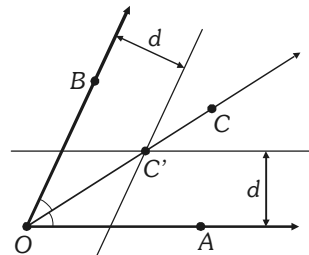
Az adott $AOB \sphericalangle$ hegyesszög felezése céljából az \overline{OA} -nak B -t tartalmazó oldalán a párhuzamos élű vonalzó egyik élét az \overline{OA} szárhoz illesztve a másik éle mentén egyenest húzunk (9. ábra), s ezt az eljárást az \overline{OB} szárra is megismételjük: az így megrajzolt két egyenes C' metszéspontja mindkét szögszártól d távolságra van, s ezért az $\overline{OC'}$ félegyenes a keresett szögfelező. A szögfelezésre [1]-ben leírt összes többi mód is elvégezhető párhuzamos élű vonalzóval az adott szerkesztési menet megváltoztatása nélkül. Ugyanott az is megtalálható, hogy miért elegendő csak hegyesszög felezésével foglalkozni részletesen. Az $AOC \sphericalangle$ szög kétszerezéséhez \overline{OA} -nak C -t tartalmazó oldalán \overline{OA} -tól d távolságra az \overline{OC} szögszárat C' pontban metsző párhuzamost húzunk, s ezután a párhuzamos élű vonalzó élét O és C' pontokra illetve megrajzoljuk az \overline{OB} félegyenest.



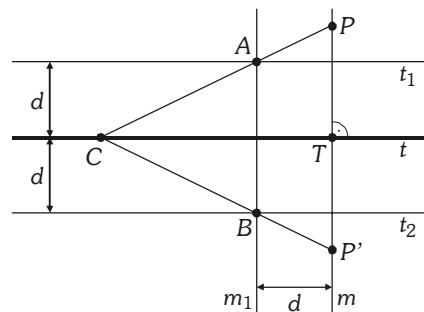
8. ábra

A t egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés esetén t minden pontja fix, s így csak egy $P \notin t$ pont P' képét kell megszerkesztetni párhuzamos élű vonalzóval. Elsőként a párhuzamos élű vonalzó egyik élét t -re illetve t -nek a P pontot tartalmazó oldalán megrajzoljuk a t_1 és a másik oldalán a t_2 egyenest (10. ábra), majd P -ből t -re m merőlegest állítunk, s ennek az egyik oldalán megrajzoljuk t_1 és t_2 egyeneseket A -ban, illetve B -ben metsző m_1 egyenest. Ekkor $A \neq P$ miatt létezik az \overline{AP} egyenes, amely $P \notin t_1$ esetén a t tengelyt egy C pontban metszi, s a \overline{BC} és az m egyenes közös pontja a keresett P' pont. Ha viszont $P \in t_1$ áll fenn, akkor m_1 -et nem kell megrajzolni, mivel m és t_2 metszete lesz a P' képpont.

Ha egy adott szög egyik szárának valamely belső pontját tükrözzük a szögfelező egyenesére, akkor a tükrökép a másik szárra esik: ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy ezt a pontot a szög csúcsa körül leforgattuk a szög másik szárára. Ezt a leforgatást a továbbiakban többször felhasználjuk. Ha például adott egy kör középpontja és a körvonal egy pontja, akkor csak párhuzamos élű vonalzóval megszerkeszthető e kör-



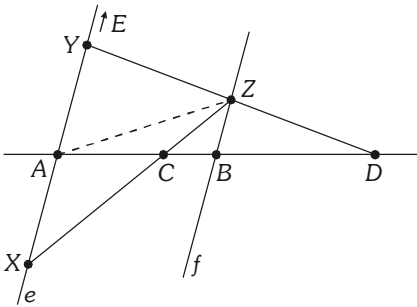
9. ábra



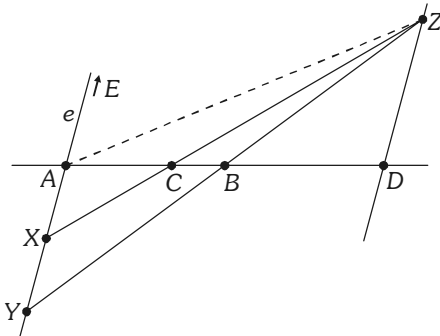
10. ábra

vonal egy újabb pontja úgy, hogy a középpontból kiinduló, de az adott ponton át nem haladó félegyenesre az adott pontot a középpont körül leforgatjuk, miközben a körvonalat nem rajzolhatjuk meg.

A tengelyes tükrözésre a párhuzamos élű vonalzóval adott fenti szerkesztésről észrevehető, hogy annak menete sok tekintetben hasonlít a betoló vonalzóval [1]-ben leírt módhoz. S mint-hogy ez a hasonlatosság megtalálható a pont körüli elforgatás, a középpontos tükrözés, az eltolás, a homotécia és a tengelyes affinitás, továbbá a szakasz és szög másolása, valamint a szakasz harmadolása és adott arányban történő felosztása esetén is, ezért részletes tárgyalásukat itt mellőzhetjük, jóllehet ezeket a szerkesztéseket gyakorlásnak mégis célszerű elvégezni. Ugyanez vonatkozik két szakasz összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának, egy szakasz négyzetének és reciprokának, három adott szakaszhoz negyedik arányosnak, valamint egy adott szakasz aranymetszés szerinti osztópontjának a megszerkesztésére.



11. ábra



12. ábra

Ha az irányított \overline{AB} egyenesen C és D az \overline{AB} szakasznak olyan belső, illetve külső pontja, amelyekre $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1$ teljesül, akkor a D

pontot a C pontnak az A és B pontokra vonatkozó harmonikus társának nevezzük, ahol $AC = CB$ esetén D az \overline{AB} egyenes végtelen távoli pontja. Ha adott A, B és C páronként különböző kollineáris pontokra, C az \overline{AB} szakasz belső pontja és $AC > CB$, akkor D az \overline{AB} egyenes B kezdőpontú és C -t nem tartalmazó félegyenesére illeszkedő közöséges pont, amelynek párhuzamos élű vonalzóval megszerkesztésére az alábbiakban három módot ismertetünk. Az $AC < CB$ eset hasonlóképpen tárgyalható.

1. mód: Legyen e az A -ra illeszkedő, de \overline{AB} -től különböző egyenes, amellyel B ponton át f párhuzamost húzunk (11. ábra). Az e egyenesen $X - A - Y$ és $XA = AY$ feltétellel előállítjuk az X és Y pontokat, amihez X lehet tetszőlegesen kijelölt pont, az Y pedig X -nek A -ra vonatkozó tükörképe. A \overline{CX} egyenes messe f -et a Z pontban, s ekkor az \overline{YZ} egyenes az \overline{AB} egyenest a keresett D pontban metszi. Ugyanis a szerkesztés miatt $ACX_{\Delta} \sim BCZ_{\Delta}$ és $ADY_{\Delta} \sim BDZ_{\Delta}$ teljesül, s ennél fogva egyrészt $AC > CB$ miatt $AY = XA > BZ \Rightarrow \overline{YZ} \parallel \overline{AB}$, másrészt $\frac{AC}{CB} = \frac{XA}{BZ} = \frac{AY}{BZ} = \frac{AD}{BD}$ és $DB = -BD$ miatt $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1$ kapható. Ha mindezt projektív

síkon tekintve az e egyenes végtelen távoli pontját E -vel jelöljük, akkor X, Y, A és E harmonikus pontnégyest alkot ([3] 458. oldal). Az e egyenesnek Z pontból \overline{AB} -re történő centrális vetítésekor $A' = A, E' = B, X' = C$ és $Y' = D$, s mivel ez a vetítés megtartja a kettős viszonyt ([3] 455. oldal), ezért C és D harmonikusán választják el az A és B pontokat. Az előbbi szerkesztés egy másik változatához jutunk, ha az e egyenesen lévő X és Y pontokat $A - X - Y$ és $AX = XY$ feltétellel állítjuk elő (12. ábra). Ez a változat szintén tárgyalható euklideszi síkon

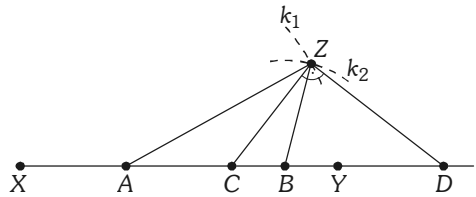
hasonló háromszögekkel, vagy pedig projektív síkon centrális vetítéssel, amikor a \overline{CX} és \overline{BY} egyenesek Z metszéspontja lesz a vetítés centruma, amely $AC > CB$ miatt közönséges pont, s ekkor $A' = A$, $Y' = B$, $X' = C$ és $E' = D$ miatt a keresett D pontot az \overline{AB} egyenesből a Z ponton át e -vel párhuzamos metszi ki. S mivel az elválasztásnál az A és B pontok szerepe felcserélhető, ezért azt is megtehetjük, hogy ezen X és Y pontokat a B ponton át megrajzolt egyenesen vesszük fel.

2. mód: A C pontot tükrözzük A -ra és B -re: a kapott pontokat jelölje X és Y (13. ábra). Szerkesszük meg a $k_1(A, XC)$ és $k_2(B, CY)$ körök egyik metszéspontját: ez legyen a Z pont. Ezután rajzoljuk meg a \overline{CZ} egyenest és állítsunk rá Z -ben merőlegest, ami az \overline{AB} -t a keresett D pontban metszi. Az $XC = 2AC$ és $CY = 2CB$ feltétel miatt $XC + CY = 2(AC + CB) > AB$ és így a k_1 és k_2 körívek egy $Z \notin \overline{AB}$ pontban metszik egymást, s ekkor $\frac{AZ}{BZ} = \frac{AC}{CB}$ miatt \overline{CZ} fél-egyenes az ABZ_{Δ} háromszög Z -nél lévő belső szögének a felezője, amire a Z -ben állított merőleges felezi a Z -nél lévő külső szöveget ([3] 21. oldal) és $AC \neq CB$ miatt metszi \overline{AB} -t a keresett D pontban ([3] 123. és 460. oldal). Megjegyezzük, hogy egyrészt az X és Y pontok előállításához $XC + CY > AB$ szükséges feltétel, s jóllehet a tükrözést könnyebb elvégezni, de a 2-es szorzó helyett bármely más 1-nél nagyobb érték is választható. Másrészt a k_1 és k_2 körívek Z metszéspontja körzővel egyszerűen adódik, ha viszont a körző használata nem megengedett, akkor ez a mód csak a két metsző kör közös pontjainak párhuzamos élű vonalzóval megszerkesztését követheti, amit később fogunk tárgyalni.

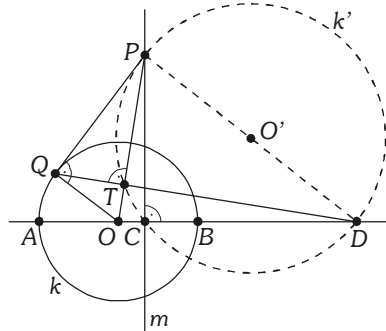
3. mód: Legyen $AB = 2d$ és O az \overline{AB} szakasz felezőpontja. Állítsunk C -ben \overline{AB} -re merőleges m egyenest, amelyen $OP > d$ feltétellel megadunk egy P pontot (14. ábra). Helyezzük el a párhuzamos élű vonalzókat úgy, hogy élei rendre az O és P pontra illeszkedjenek, majd

a P -re illeszkedő éle mentén rajzoljunk egy egyenest, amelyre az O -ból állított merőleges talppontját jelölje Q . Rajzoljuk meg az \overline{OP} egyenest, amelyre a Q -ból állított merőleges talppontja legyen T , s ekkor \overline{QT} az \overline{AB} egyenest a keresett D pontban metszi. Ugyanis egyrészt $O \neq C$ miatt $\overline{QT} \parallel \overline{AB}$, másrészt $m(\angle PCD) = m(\angle PTD) = 90^\circ$ miatt a $PTCD$ négyszög köré egy \overline{DP} átmérőjű k' kör írható, amelyre az O pont hatványa az OPQ_{Δ} derékszögű háromszögre vonatkozó befogótétel miatt $OC \cdot OD = OT \cdot OP = OQ^2 = d^2$, s ennélfogva C és D a $k(O, d)$ körre vonatkozóan inverz pontpárt alkotnak, vagyis az A és B pontokat harmonikusan választják el ([4] 265. oldal). Az $AB \neq 2d$ eset erre visszavezethető egy középpontos hasonlósággal.

Legyen adott a $k(O, r)$ kör \overline{AB} átmérője, továbbá az e egyenes, melynek O -tól mért t távolsága r -nél kisebb. Szerkesztendők a k kör és az e egyenes M és N metszéspontjai csak párhuzamos élű vonalzóval a kör megrajzolása nélkül. Az is feltételbe vehető, hogy $e \perp \overline{AB}$ teljesül, mivel ellenkező esetben az A és B pontokat



13. ábra



14. ábra

az O körül leforgathatjuk az O -ból e -re állított merőlegesre.

A $t = 0$ esetben az e egyenes áthalad a k kör O középpontján (15. ábra), s ekkor bármely r esetén a keresett M és N metszéspontokat úgy kapjuk meg, hogy az A és B pontokat az O középpont körül leforgatjuk az e egyenesre.

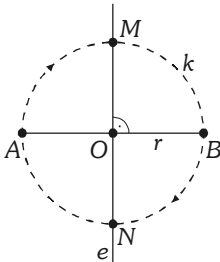
A $0 < t < r$ eset két részre bontható aszerint, hogy $r = d$, avagy $r \neq d$ teljesül.

Az $r = d$ esetben jelölje C az e egyenes és az \overline{AB} átmérő metszéspontját (16. ábra), s szerkesszük meg C -nek az A és B pontokra vonatkozó D harmonikus társát. Ezután a párhuzamos élű vonalzó egyik élét O -ra és a másikat D -re illetve rajzoljunk egyenest a D -re illeszkedő éle mentén: így két egyenest kapunk, amelyek az e egyenest a keresett M és N pontokban metszik. Ugyanis a D pont előállítására miatt k és e metszéspontjai azonosak a D -ből ily módon meghúzott két egyenesnek az e -vel alkotott metszéspontjaival ([4] 264–265. oldal, [5] 55. oldal).

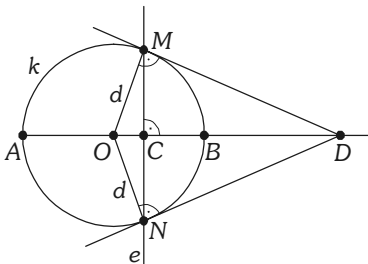
Az $r \neq d$ esetben legyen $r > d$, továbbá P egy olyan pont, amelyre $OP > d$ és $OP' \neq d$ is teljesül, ahol P' a P -nek \overline{AB} -re eső merőleges vetülete (17. ábra). Helyezzünk el a párhuzamos élű vonalzót úgy, hogy egyik éle O -ra és

a másik P -re illeszkedjen, s ezen utóbbi éle mentén rajzoljunk egy egyenest, amelyre az O -ból állított merőleges talppontját jelölje Q' , ami $OP' \neq d$ miatt nem illeszkedik \overline{AB} -re. Húzzuk meg az $\overline{OQ'}$ félegyenest, s az O pont körül for-gassuk le rá az A pontot: az így kapott pont legyen Q . Ezután a \overline{CQ} egyenessel Q' ponton át húzott párhuzamos az \overline{AB} egyenest C' -ben metszi, amelyre $0 < t < r$ és $r > d$ miatt $0 < OC' < d$ teljesül, s így a C' ponton át e -vel párhuzamos e' egyenes a $k'(O,d)$ kört az M' és N' pontokban metszi: ezek a metszéspontok az előbbi eset szerint megszerkeszthetők. S végül az $\overline{OM'}$ és $\overline{ON'}$ egyenesek az e egyenest a keresett M és N pontokban metszik. Ugyanis a $k(O,r)$ kör és az e egyenes metszéspontjainak megszerkesztését O középpontú és $d : r$ arányú hasonlósággal visszavezettük a $k'(O,d)$ kör és az e' egyenes M' és N' metszéspontjainak megszerkesztésére, s ezután az M és N pontok megkaphatók egy O középpontú és $r : d$ arányú hasonlóság révén. Az $r < d$ eset hasonlóképpen tárgyalható.

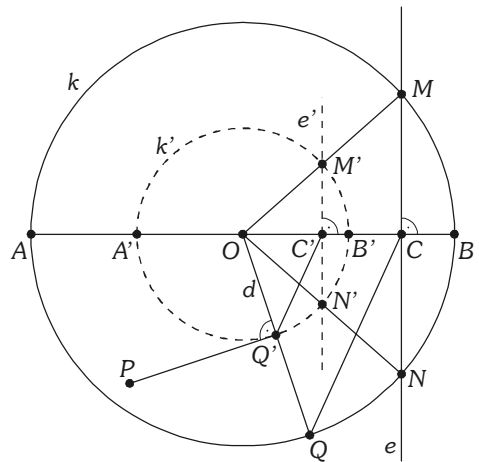
A $k_1(O_1,r_1)$ és $k_2(O_2,r_2)$ körök h hatványvonalának létezéséhez szükséges az $O_1 \neq O_2$ feltétel, amit megtartva legyen $r_1 = O_1A_1$ és $r_2 = O_2A_2$ úgy, hogy A_1 és A_2 az $\overline{O_1O_2}$ egyenes egyik oldalán van, továbbá $\overline{O_1A_1}$ és $\overline{O_2A_2}$ merőleges az $\overline{O_1O_2}$ -re (18. ábra). Szerkesszük



15. ábra



16. ábra



17. ábra

meg az $\overline{A_1A_2}$ szakasz F felezőpontját, majd F -ben az $\overline{A_1A_2}$ -re merőleges f egyenest, ami az $\overline{O_1O_2}$ egyenest egy P pontban metszi. Legyen O az $\overline{O_1O_2}$ szakasz felezőpontja, amire vonatkozóan P tükörképét jelölje Q , s ekkor Q -ban az $\overline{O_1O_2}$ -re merőleges a keresett h hatványvonal. Ehhez azt kell belátnunk, hogy a Q pontnak k_1 és k_2 körökre vonatkozó $h_1(Q)$ és $h_2(Q)$ hatványai egyenlők. Az $A_1PO_1\Delta$ és $A_2PO_2\Delta$ derékszögű háromszögekből $A_1P^2 = O_1P^2 + (A_1O_1)^2 = O_1P^2 + r_1^2$ és $A_2P^2 = O_2P^2 + (A_2O_2)^2 = O_2P^2 + r_2^2$, ahonnan $A_1P = A_2P$, $O_1Q = O_2P$ és $O_1P = O_2Q$ miatt

$$\begin{aligned} h_1(Q) &= O_1Q^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_1^2 = \\ &= (A_2P^2 - r_2^2) - r_1^2 = (A_1P^2 - r_1^2) - r_2^2 = \\ &= O_1P^2 - r_2^2 = O_2Q^2 - r_2^2 = h_2(Q) \end{aligned}$$

teljesül (KöMal F.2052-es feladat, 1977/1-es szám 10. oldal).

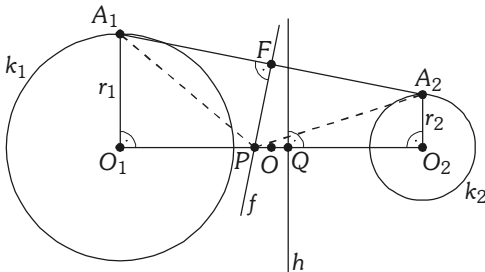
Két metsző kör közös pontjainak megszerkesztése visszavezethető az egyik kör és a két kör hatványvonala közös pontjainak a megszerkesztésére, minthogy két metsző kör hatványvonala azonos az e két kör közös pontjait összekötő egyenessel.

Most tegyünk egy kitérőt a 30° -os és a 60° -os szögek párhuzamos élű vonalzó szerkesztésének bemutatása céljából. Legyen \overline{AB} a $k(O,d)$ kör átmérője, továbbá C a \overline{BO} szakasz felezőpontja és e az \overline{AB} -re C -ben állított merőleges (19. ábra). Szerkesszük meg az \overline{AB} átmérőjű k félkörív és az e egyenes M metszéspontját: ekkor $m(\widehat{BAM}) = 30^\circ$ és $m(\widehat{ABM}) = 60^\circ$. Ugyanis az $ABM\Delta$ háromszögnek M -nél derékszöge van,

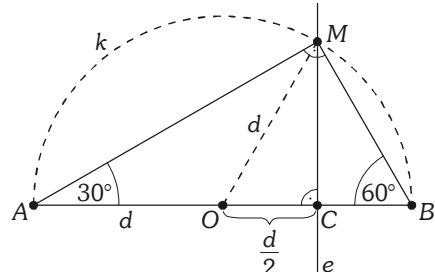
valamint $ABM\Delta \sim MBC\Delta$ miatt $BM = d$, s így az $OBM\Delta$ háromszög szabályos.

A továbbiakban bemutatjuk a körhöz egy adott pontjában, valamint egy külső pontból húzható érintő párhuzamos élű vonalzó szerkesztését, miközben a körvonal megrajzolása nem lesz megengedett. Elsőként foglalkozunk a körvonal egy adott pontjában húzható érintővel. Ekkor a k kör megadható az O középponttal és a körvonal egy P pontjával, vagy pedig egy \overline{AB} átmérőjével. Az első esetben az érintőt az 5. ábra alapján tudjuk megszerkesztetni. Ugyanerre juthatunk vissza a második esetben, ha az érintőt az A vagy B , illetve egy $P \in k \setminus \{A, B\}$ pontban kívánjuk meghúzni: ez utóbbi esetben a P pontot előbb fel kell venni a tengelyes tükörözésnél leírtak szerint.

Ezután rátérhetünk a körhöz egy külső pontból húzható két érintő megszerkesztésére, amihez legyen adott a $k(O,r)$ kör O középpontja, a körvonal egy A pontja és egy P pont, amelyre $OP > r$ teljesül. Az $r = d$ esetben a párhuzamos élű vonalzót úgy helyezzük el, hogy egyik éle az O , a másik a P pontra illeszkedjen, s ezután a P -re illeszkedő éle mentén megrajzolt egyenes lesz a keresett érintő. Ezt az \overline{OP} egyenes mindkét oldalán elvégezve kapjuk a két érintőt, amelyekre az O -ból állított merőlegesek E és F talppontjai az érintési pontok (20. ábra). Ha $r \neq d$, akkor legyen $r > d$ és $P \notin \overline{OA}$ (21. ábra). Az \overline{OA} szakaszra O -ban merőlegest állítunk, majd a párhuzamos élű vonalzó egyik élét erre a merőlegesre illesztve (a merőleges A pontot tartalmazó oldalán) a másik éle mentén egyenest húzunk, ami az \overline{OA} szakaszt egy



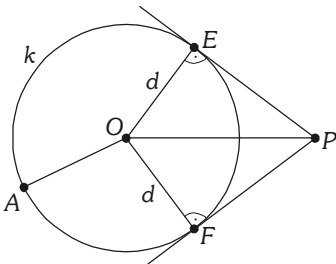
18. ábra



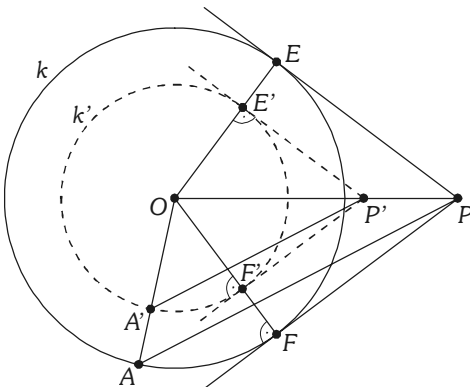
19. ábra

olyan A' pontban metszi, amelyre $OA' = d$ teljesül. Ezen A' ponton át az \overline{AP} -vel párhuzamosan húzott egyenes az \overline{OP} -t egy P' pontban metszi úgy, hogy $OP' = OA' \cdot \frac{OP}{OA} = d \cdot \frac{OP}{r} > d$ miatt P' a $k'(O, d)$ kör külső pontja. Ekkor k' körhöz P' pontból az előbbi eset szerint megszerkeszthetők a $\overline{P'E'}$ és $\overline{P'F'}$ érintők, melyekkel a P ponton át húzott párhuzamosok az $\overline{OE'}$ és $\overline{OF'}$ félegyeneseket a keresett E és F érintési pontokban metszik. Az $r < d$ eset hasonlóképpen tárgyalható. Megjegyezzük még, hogy az $r \neq d$ esetben a $P \notin \overline{OA}$ feltétel csak a P' pont egyszerűbb megszerkesztéséhez kellett.

Az a és b hosszúságú két szakasz mértani közepe megszerkesztéséhez legyenek A, B és C különböző adott pontok úgy, hogy $A - B - C$, $AB = a$, $BC = b$ és $a > b$ teljesül. A szerkesztést a magasságtétel alapján végezzük el (22. ábra). Jelölje O az \overline{AC} szakasz felezőpontját, s az \overline{AB} félegyenesen $A - O' - C'$ és $AO' = C'O' = d$



20. ábra



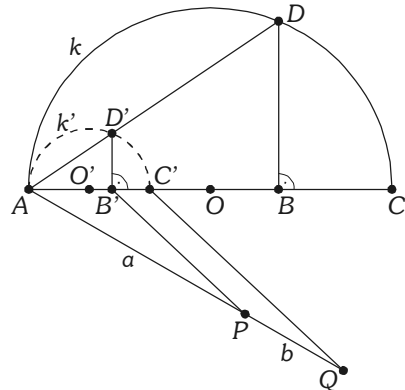
21. ábra

feltétellel határozzuk meg az O' és C' pontokat. Szerkesszük meg az $\overline{AC'}$ szakaszt $a : b$ arányban osztó B' pontot, majd a $k'(O', d)$ félkörív és a B' -ben $\overline{AB'}$ -re merőleges egyenes D' metszéspontját: ekkor az $\overline{AD'}$ egyenes a B -ben \overline{AB} -re állított merőlegest olyan D pontban metszi, amelyre \overline{BD} az \overline{AB} és \overline{BC} mértani közepe. A befogótételre alapuló megszerkesztést gyakorlatként átengedjük az olvasónak.

A párhuzamos élű vonalzó korunk geometria oktatásában mellőzött eszköznek számít, jóllehet az eszközök sokfélesége és azok célszerű alkalmazása csak gazdagíthatná a tanulók ismereteit és elősegíthetné kreativitásuk fejlesztését. A kereskedelemben forgalmazott csuklós vagy görgős szerkezetű párhuzamvonalzók kínálhatnak bizonyos alternatívát, de mivel ezek iskolai használata általában nincs betervezve, ezért többnyire csak érdekességnek tekinthetők.

Irodalom

- [1] Darvasi Gyula: Síkgeometriai alapszerkesztések betoló vonalzóval. A Matematika Tanítása, 2011/2 és 2011/3.
- [2] Martin, George E. (1998): Geometric constructions. Springer
- [3] Hajós György (1966): Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó
- [4] Schreiber, Peter (1975): Theorie der geometrischen Konstruktionen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
- [5] Szőkefalvi Nagy Gyula (1943): A geometriai szerkesztések elmélete. Minerva (Kolozsvár)



22. ábra

Csete Lajos

A véráramlási ellenállásról: egy minimumprobléma

1. Bevezetés

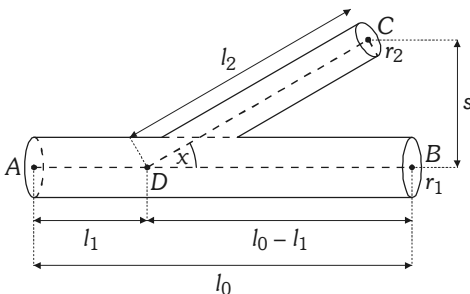
A vérkeringésnek a testben lehetőleg hatékonynak kell lennie, amennyire csak ez lehetséges. Az optimális minimumhoz sok minden szükséges. Például a vér turbulencia nélküli áramlása, viszkozitásának megfelelő szintje, a rugalmas falú és el nem szűkülő véretek. A következő modellben ezeket és az egyéb feltételeket itt nem vizsgáljuk, hanem csak azt, hogy milyen szögben kellene elágazniuk a véreteknek ahhoz, hogy a vér áramlási ellenállása a minimális legyen.

Tegyük fel, hogy a fő vérér sugara r_1 és az ábrán az A -tól B -ig levő szakaszát vizsgáljuk. A fő vérérből elágazik egy mellék vérér, amelynek sugara legyen r_2 . Az egyszerűség kedvéért válasszuk ki a C pontot úgy, hogy a BC merőleges legyen az AB -re.

Legyen $BC = s$, és legyen D az a pont, ahol a mellékér tengelye metszi a főér tengelyét.

Jelöljük a BCD szöget x -szel.

A probléma a következő. Határozzuk meg azon x szöveget, amelyre a véráramlással szembeni ellenállás a legkisebb a véráramlás ADC útján. Nyilván minél kisebb az ellenállás, annál kevesebb fölösleges munkát kell végeznie a szívnek.



2. A probléma fizikai megfogalmazása

A turbulencia nélküli, lamináris áramlásokra fennáll Poiseuille törvénye, amelyet Hagen-Poiseuille-féle törvénynek is neveznek, amely törvény 1839–1840 körüli.

Jean Louis Marie Poiseuille (1799–1869) francia fizikus és fiziológus volt. Poiseuille 1838-ban kísérletileg észrevette, majd 1840-ben megfogalmazta és publikálta a törvényt.

Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797–1884) német vízépítő mérnök volt és 1839-ben találta kísérleti úton a Hagen-Poiseuille-törvényt.

Lamináris vagy réteges áramlásoknak nevezzük azokat az áramlásokat, amelyeknél a folyadék különböző sebességű rétegekre osztható. Lamináris áramlások általában szűk csövekben és kis folyadéksebességeknél alakulnak ki a Budókönyv [2] szerint.

A Poiseuille-törvény szerint stacionárius áramlásnál a cső bármely keresztmetszetén az időegység alatt áthaladó folyadék térfogata a nyomáséssal és a cső sugarának negyedik hatványával arányos, a folyadék viszkozitásával pedig fordítottan arányos.

Stacionárius áramlásnak nevezzük azt az áramlást, amelynél a sebesség, a nyomás, a sűrűség és általában az egész áramlási állapot az áramlási tér minden helyén független az időtől. ([2], 256.)

Vagyis ha V a folyadék térfogata, t az idő, akkor az áramlás „áramerőssége”:

$$(2.1) \quad I = \frac{V}{t} \text{ definíció szerint.}$$

A Poiseuille-törvény matematikai alakja:

$$(2.2) \quad I = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot r^4, \text{ ahol } I \text{ az áramlás}$$

„áramerőssége”, η a folyadék viszkozitása, l a

csőszakasz hossza, p_1 a csőszakasz elején a nyomás, p_2 a csőszakasz végén a nyomás és r a cső belső sugara.

A Budó-könyv szerint kétféle ellenállást is megszoktak különböztetni a folyadékok csövekben való áramlásánál.

a) Az elektromos áramra vonatkozó Ohm-törvény analógiájára a cső ellenállása:

$$(2.3) \frac{p_1 - p_2}{I} = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot r^4}$$

b) Ha \bar{v} az átlagos sebessége az áramlásnak, akkor azt mondhatjuk, hogy az $F = p \cdot A$ törvény alapján

$$(2.4) 8 \cdot \eta \cdot l \cdot \bar{v} \text{ súrlódási ellenállást fejt ki a cső.}$$

(Hiszen $F = p \cdot A = (p_1 - p_2) \cdot r^2 \cdot \pi = 8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot \bar{v}$, mert $I = \frac{V}{t} = r^2 \cdot \pi \cdot \bar{v}$.)

A Batschelet-könyv [1] az a) esetben értelmezett csőellenállást veszi.

Mégpedig azt írja, hogy legyen R a cső ellenállása lamináris áramlásnál és ez fordítottan arányos a cső sugarának negyedik hatványával, vagyis:

$$(2.5) R = k \cdot \frac{l}{r^4}, \text{ ahol } k \text{ egy állandó és } l \text{ a csőszakasz hossza. Összevetve ezt az a) értelmezés képletével kapjuk, hogy:}$$

$$(2.6) k = \frac{8 \cdot \eta}{\pi}.$$

A mi problémánkban legyen $AB = l_0$, $AD = l_1$ és $DC = l_2$.

A BDC derékszögű háromszögből kapjuk, hogy

$$(2.7) l_2 = \frac{s}{\sin x} \text{ és } (2.8) l_0 - l_1 = s \cdot \text{ctg} x$$

Az ADC úton a vérrel szembeni teljes csőellenállás:

$$(2.9) R_{ADC} = R_{AD} + R_{DC} = k \cdot \frac{l_1}{r_1^4} + k \cdot \frac{l_2}{r_2^4}, \text{ ahol}$$

a (2.5) képletet használtuk fel.

A (2.7) és (2.8) képleteket felhasználva kapjuk, hogy:

$$(2.10) R_{ADC} = k \cdot \frac{l_0 - s \cdot \text{ctg} x}{r_1^4} + k \cdot \frac{s}{r_2^4 \cdot \sin x} = k \cdot \left(\frac{l_0 - s \cdot \text{ctg} x}{r_1^4} + \frac{s}{r_2^4 \cdot \sin x} \right)$$

3. A probléma megoldása differenciálszámítással

Vegyük észre, hogy a (2.10) képlettel megkaptuk a teljes csőellenállást a mellék vérér x hajlásszögének függvényében.

Differenciáljuk x szerint az $R_{ADC} = R_{ADC}(x)$ függvényt!

Kapjuk, hogy:

$$R'_{ADC}(x) = k \cdot \left(-\frac{s}{r_1^4} \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' + \frac{s}{r_2^4} \cdot \left(\frac{1}{\sin x} \right)' \right) = k \cdot \left(-\frac{s}{r_1^4} \cdot \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} + \frac{s}{r_2^4} \cdot \frac{-1 \cdot \cos x}{\sin^2 x} \right),$$

vagyis

$$(3.1) R'_{ADC}(x) = k \cdot \left(\frac{s}{r_1^4 \cdot \sin^2 x} - \frac{s \cdot \cos x}{r_2^4 \cdot \sin^2 x} \right).$$

Oldjuk meg az $R'_{ADC}(x) = 0$ egyenletet!

A nem nulla $\frac{s}{\sin^2 x}$ -szel való osztás után a meg-

oldandó egyenletünk:

$$(3.2) \frac{1}{r_1^4} - \frac{\cos x}{r_2^4} = 0.$$

Ebből

$$(3.3) \cos x = \frac{r_2^4}{r_1^4}.$$

Vagyis a keresett szög (3.4) $x = \arccos \left(\frac{r_2^4}{r_1^4} \right)$. Ez

a jelölt arra a szögére, amelynél a teljes csőellenállásnak minimuma van.

A továbbiakban azt kell igazolnunk, hogy erre a szögére valóban a minimumot veszi fel a teljes csőellenállás.

Nézzük a második deriváltat! Elég erről kimutatnunk, hogy pozitív a (3.4) jelölt értékénél.

Azt kaphatjuk előbb-utóbb például, az egyszerűsítések és átalakítások után, hogy:

$$(3.5) R''_{ADC}(x) = k \cdot \left(\frac{2 \cdot s \cdot \text{ctg} x \cdot (-1 - \text{ctg}^2 x)}{r_1^4} + \frac{2 \cdot s \cdot \cos^2 x}{r_2^4 \cdot \sin^3 x} + \frac{s}{r_2^4 \cdot \sin x} \right) \text{ és ebből}$$

$$(3.6) R''_{ADC}(x) = \frac{k \cdot s}{r_1^4 \cdot r_2^4} \cdot \frac{r_1^4 \cos^2 x - r_2^4 \cdot 2 \cdot \cos x + r_1^4}{\sin^3 x}.$$

Feltehetjük, hogy $r_2 < r_1$, hiszen az r_2 a mellék vérér sugara. Ezt felhasználva nem nő az előző tört értéke, ha a számlálóban kicseréljük az r_1 -eket r_2 -kre.

Azaz

$$(3.7) R''_{ADC}(x) = \frac{k \cdot s}{r_1^4 \cdot r_2^4} \cdot \frac{r_1^4 \cos^2 x - r_2^4 \cdot 2 \cdot \cos x + r_1^4}{\sin^3 x} > \frac{k \cdot s}{r_1^4 \cdot r_2^4} \cdot \frac{r_2^4 \cos^2 x - r_2^4 \cdot 2 \cdot \cos x + r_2^4}{\sin^3 x}.$$

Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség megfelelő jobb oldali számlálója teljes négyzetté alakítható.

$$\text{Vagyis (3.8) } R''_{ADC}(x) > \frac{k \cdot s}{r_1^4 \cdot r_2^4} \cdot r_2^4 \cdot \frac{\cos^2 x - 2 \cdot \cos x + 1}{\sin^3 x} = \frac{k \cdot s}{r_1^4} \cdot \frac{(\cos x - 1)^2}{\sin^3 x}.$$

A (3.4) kifejezés egy 0° és 90° közötti szöget határoz meg, erre a szögre $\sin x > 0$, így

$$(3.9) \frac{k \cdot s}{r_1^4} \cdot \frac{(\cos x - 1)^2}{\sin^3 x} \geq 0, \text{ hiszen a többi tényező nyilván pozitív vagy nemnegatív.}$$

Ebből következik, hogy (3.10) $R''_{ADC}(x) > 0$.

Ebből viszont az következik, hogy a (3.4) egyenlet által meghatározott jelölt valóban szélsőérték hely, mégpedig minimum hely.

Ezzel megoldottuk a problémát.

4. A probléma megoldása elemi úton

A következőkben a differenciálszámítást kikerülő, elemi megoldást igyekszünk adni a problémára.

A (2.10) képlet alapján

$$(4.1) R_{ADC}(x) = k \cdot \left(\frac{l_0 - s \cdot \text{ctg } x}{r_1^4} + \frac{s}{r_2^4 \cdot \sin x} \right) = k \cdot \frac{l_0}{r_1^4} + k \cdot s \cdot \left(\frac{1}{r_2^4 \cdot \sin x} - \frac{1}{r_1^4} \cdot \text{ctg } x \right).$$

Láthatjuk, hogy elég a

$$(4.2) f(x) = \frac{1}{r_2^4} \cdot \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{r_1^4} \cdot \text{ctg } x \text{ függvény mi-}$$

nimumát meghatározni, ahol az x a 0° és 90° között van. Hiszen az f függvénynek pontosan ott van minimumhelye, ahol az R_{ADC} -nek.

Tervünk az, hogy az x szög szinusztát és koszinuszát az $\frac{x}{2}$ szög szinuszával illetve koszinuszával

fogjuk kifejezni.

$$(4.3) f(x) = \frac{1}{r_2^4} \cdot \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{r_1^4} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{r_2^4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} - \frac{1}{r_1^4} \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}.$$

Ezt tovább alakítva:

$$(4.4) f(x) = \frac{1}{r_2^4} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} - \frac{1}{r_1^4} \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget igyekszünk alkalmazni. Ehhez alkalmas módon átalakítjuk a (4.4) egyenletet.

$$(4.5) f(x) = \frac{1}{r_2^4} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{x}{2}} + \frac{1}{r_2^4} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{r_1^4} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} + \frac{1}{r_1^4} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{x}{2}}.$$

$$\text{Azaz (4.6) } f(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4} \right) +$$

$$+ \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{r_2^4} - \frac{1}{r_1^4} \right).$$

Vegyük észre, hogy itt mindkét tag pozitív $r_2 < r_1$ miatt.

Ezért alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$(4.7) \frac{\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4} \right) + \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{r_2^4} - \frac{1}{r_1^4} \right)}{2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4} \right) \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{r_2^4} - \frac{1}{r_1^4} \right)}$$

Ebből

$$(4.8) f(x) \geq \sqrt{\frac{1}{r_2^8} - \frac{1}{r_1^8}}$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha

$$(4.9) \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4} \right) = \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{r_2^4} - \frac{1}{r_1^4} \right)$$

Ezt legegyszerűbb $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$ -re visszavezetni.

$$(4.10) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{r_2^4} - \frac{1}{r_1^4}}{\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4}} = \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1^4 + r_2^4}$$

Ebből könnyen meg lehet határozni azt a szöveget, amelynél az f függvény s így az R_{ADC} függvény felveszi a minimumát. Érdekes összehasonlítani a differenciálszámítással kapott szöggel.

A trigonometriából ismert, hogy

$$(4.11) \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \text{ minden olyan szögre,}$$

amelyre e képlet jobb oldala értelmezett.

A mi problémánkban levő 0° és 90° közötti szögekre fennáll a képletbeli egyenlőség.

$$\text{Így (4.12) } \cos x = \frac{1 - \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1^4 + r_2^4}}{1 + \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1^4 + r_2^4}} = \frac{r_2^4}{r_1^4}, \text{ vagyis}$$

$$(4.13) x = \arccos\left(\frac{r_2^4}{r_1^4}\right), \text{ azt kaptuk, mint korábban. Ezzel ismét megoldottuk a problémát.}$$

Még kiszámítjuk az R_{ADC} minimális értékét is.

A (4.1) és (4.8) alapján

$$R_{ADC}(x) = k \cdot \frac{l_0}{r_1^4} + k \cdot s \cdot f(x) \geq$$

$$\geq k \cdot \frac{l_0}{r_1^4} + k \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{r_2^8} - \frac{1}{r_1^8}}$$

Tehát a minimális teljes csőellenállás

$$(4.14) R_{ADC \min} = k \cdot \frac{l_0}{r_1^4} + k \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{r_2^8} - \frac{1}{r_1^8}}, \text{ ahol}$$

egyenlőség arra az x hegyesszögre lép fel, amelyre $\cos x = \frac{r_2^4}{r_1^4}$.

A cikkben új a 4. részben tárgyalt elemi megoldás, amelynek az ötletét a [4] cikk alapozta meg.

Irodalom és jegyzetek

- [1] Batschelet, Edward (1971): Introduction to mathematics for Life Scientists, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 235–237. A cikkünkben a 3. részben levő második derivált vizsgálata nem szerepelt az [1] könyvben, ahol differenciálszámítással meghatározzák ugyan a minimumhely jelöltét, de nem igazolják, hogy valóban minimumhely, csupán egy numerikus számítással támasztják alá.
- [2] Budó Ágoston (Pócza Jenő közreműködésével) (1978): Kísérleti fizika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 268–269.
- [3] Csákány Béla (1971): A méhek lépsejtjeiről, matematikus szemmel. KöMaL, 1971. november, 109–117.
- [4] Csete Lajos (2007): A méhek lépsejtjeiről: egy minimumprobléma. A Matematika Tanítása, 2007/4. 7–10.
- [5] Nagy László, Dr. (2011): A véráramlás különleges fizikai sajátosságai, A Biológia Tanítása, 2011. február, 9–17.old.

Erben Péter

Matematika programozási versenyeken

1. Bevezető

Több olyan – ingyenes – programozási verseny létezik, amelynek feladatanyagában tanulságos matematikai észrevételek is szerepet kapnak. Ezek egyike a Google Code Jam, amely 2008 óta évente kerül megrendezésre és interneten bárki részt vehet rajta. A fordulók után általában elérhetővé válnak a megoldások, amelyek az átlagosnál igényesebben foglalkoznak az algoritmusok helyességével és hatékonyságával, ezért a matematika-tanításban is jól használhatók.

Az alábbiakban a verseny egy olyan feladát mutatjuk be, ami a várható érték fogalmának elmélyítéséhez nyújthat segítséget.

2. A feladat

A Google Code Jam 2011-es versenyén tűzték ki a következő feladatot:

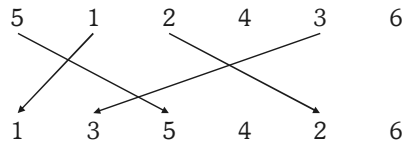
Goronak négy karja van. Goro nagyon erős. Nem érdemes kikezdeni vele. Goro sorba akar rendezni N különböző egész számot. (Képzeltjük úgy, hogy a számok kártyákra vannak felírva, a kártyák pedig sorban egymás mellett fekszenek az asztalon.) Az algoritmikus gondolkodás nem erőssége Goronak, Goro erőssége a nyers erő. Terve a következő: két kezének ujjaiával lefog bizonyos számokat, a másik két kezével pedig rávág az asztalra, amilyen erősen csak bír. Erre azok a kártyák, amiket nem fogott le, felrepülnek a levegőbe és (csodák-csodája) valamilyen véletlen sorrendben visszahullanak az üresen maradt helyekre.

Goro szeretné a lehető leggyorsabban sorba rendezni a számokat. Ha intelligensen döntené el, hogy melyik kártyákat rögzíti az egyes ütések előtt, akkor átlagosan hány ütés után kapná meg a rendezett sorozatot? (Feltesszük, hogy

a kártyák lefogására használt kezein végtelen sok ujj van, tehát bármennyi szám rögzítésére képes.)

A probléma matematikai tartalma persze sokkal tömörebben is elmondható, de szándékosan mutattuk be a programozási versenyeken megszokott tálalási módot: a kérdéseket szokás valamilyen mesébe csomagolni, így a megfelelő matematikai modell megtalálása is a versenyző feladata.

Feladatunk tehát N különböző egész szám növekvő rendezése úgy, hogy egy lépésben a számok egy tetszőleges részhalmazát permutálhatjuk véletlenszerűen. A permutálás úgy történik, hogy a rögzített elemek helyben maradnak, a nem rögzítettek pedig a nem rögzített pozíciókban vesznek fel egy új sorrendet. Például:



2.1. Egy mohó algoritmus

Természetes arra gondolni, hogy Goro legjobb stratégiája a következő: mindig lefogja az összes „jó helyen álló” számot, és az összes többi keveri meg. Egy szám akkor áll jó helyen, ha pozíciója megfelel a növekvő rendezésben elfoglalt helyének. Ha nem akarunk ilyen körülményesen fogalmazni, akkor képzeltjük úgy, hogy az $1, 2, 3, \dots, N$ számok rendezéséről van szó, hiszen a számok sorrendjének van csak jelentősége. A továbbiakban ezért feltételezzük, hogy az $1, 2, 3, \dots, N$ számokat rendezzük, így a vizsgált stratégiában Goro akkor rögzíti az i számot az ütés előtt, ha az pont az i helyen áll.

Most meghatározzuk ennek a mohó stratégiának a várható lépésszámát.

Az első észrevétel az lehet, hogy bármilyen részben rendezett sorozatra alkalmazva Goro algoritmusát, csak a rossz helyen álló elemek érdekesekek; azok, akik már helyre kerültek, semmiben nem befolyásolják a folytatást. Tehát a lépésszám a pillanatnyilag rossz helyen álló elemek számának függvényében adható meg. Jelölje ezt a számot $L(n)$.

Ha a keverés előtt n elem áll rossz helyen, akkor utána $0, 1, 2, \dots, n$ lehet a rossz helyen álló elemek száma. (Valójában 1 nem lehet a rossz helyen álló elemek száma, de ezt 0 -ás szorzóval fogjuk számolni a továbbiakban.) Ha p_i a valószínűsége, hogy egy véletlen permutációban i darab elem áll rossz helyen, akkor $n > 1$ esetén

$$L(n) = 1 + p_0L(0) + p_1L(1) + \dots + p_nL(n),$$

továbbá $L(0) = L(1) = 0$.

Ahhoz, hogy $L(n)$ értékét meghatározzuk, szükségünk lesz a p_i valószínűségekre. Bevezetünk egy jelölést: $f(n, k)$ jelentse az $1, 2, \dots, n$ számok olyan permutációinak számát, amelyekben pontosan k elem áll rossz helyen.

$$\text{Ezzel a jelöléssel } p_i = \frac{f(n, i)}{n!}.$$

Érdeemes néhány kis értékre „kézzel” kiszámolni az $f(n, k)$ értékeket.

n / k	0	1	2	3	4
1	1	0	-	-	-
2	1	0	1	-	-
3	1	0	3	2	-
4	1	0	6	8	9

A táblázat alapján

$$L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \rightarrow L(2) = 2,$$

$$L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \rightarrow L(3) = 3 \text{ és}$$

$$L(4) = 1 + \frac{6}{24} \cdot L(2) + \frac{8}{24} \cdot L(3) + \frac{9}{24} \cdot L(4) \rightarrow L(4) = 4.$$

Az eddigiekből a következő nyilvánvaló sejtést fogalmazhatjuk meg:

$$L(n) = n.$$

A sejtés bizonyításához szükségünk lesz a véletlen permutációban rossz helyen álló elemek átlagos számára. A következőkben $\#H$ a H halmaz elemeinek számát jelöli. Az összes permutációra úgy összegezzük a rossz helyen álló elemek számát, hogy az összes számra összegezzük azon permutációk számát, amiben az adott elem rossz helyen áll.

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \text{ permutációk}} \#\{\pi\text{-ben rossz helyen álló elemek}\} = \\ & = \sum_k \#\{\pi \mid k \text{ szám rossz helyen áll } \pi\text{-ben}\} = \\ & = n \cdot (n-1) \cdot (n-1)! = (n-1) \cdot n! \end{aligned}$$

Tehát átlagosan $\frac{(n-1) \cdot n!}{n!} = n-1$ elem áll rossz helyen:

$$p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 + \dots + p_n \cdot n = n-1$$

Most már be tudjuk fejezni a bizonyítást:

$$\begin{aligned} L(n) &= 1 + \sum_{i=0}^n p_i L(i) = \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) = \\ &= 1 + \sum_{i=0}^n p_i \cdot i - p_n \cdot n + p_n L(n) = \\ &= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) = \\ &= n - p_n \cdot n + p_n L(n) \end{aligned}$$

Nullára rendezve: $(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$.

Minden p_i 1 -nél kisebb, tehát csak úgy teljesülhet az előző egyenlőség, ha $L(n) = n$.

2.2 A várható érték linearitása

A várható érték fogalmának ismeretében az előző pont számítása jelentősen egyszerűsíthető. Jelölje X_i azt a valószínűségi változót, amelynek értéke 0 , ha i rossz helyen áll egy véletlen permutációban, és 1 , ha i jó helyre került, vagyis fixpont. Mivel egy tetszőleges elem n helyre kerülhet, $\frac{1}{n}$ valószínűséggel kerül a saját helyére,

$$\text{így } E(X_i) = \frac{1}{n} \text{ minden } i = 1, 2, \dots, n \text{ esetén.}$$

A véletlen permutációban jó helyen álló számok várható értéke

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n).$$

Most felhasználjuk, hogy $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, és ez akkor is igaz, ha X és Y nem függetlenek.

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Ha a jó helyre kerülő elemek várható száma 1, akkor a rossz helyen átlagosan $n - 1$ elem áll.

(Érdeemes megjegyezni, hogy a várható érték linearitásának bizonyítása lényegében azonos gondolattal megy, mint ahogy a fenti leveletésben átrendeztük az összegzéseket.)

2.3. Lehet jobban csinálni?

A fenti elemzésben azt mutattuk meg, hogy ha mindig az összes rossz helyen álló elemet permutáljuk, és az összes jó helyen álló elemet rögzítjük, akkor a várható lépésszám egyenlő az eredetileg rossz helyen álló elemek számával. Felmerül a kérdés, hogy ez-e a legjobb lehetséges stratégia. Esetleg elképzelhető, hogy érdemes néhány jó helyen álló számot is megkeverni egy későbbi nyereség reményében.

Bár „érezzük”, hogy nincs jobb stratégia, ennek bizonyítása nem nyilvánvaló. A nehézséget az okozza, hogy ha jó helyen álló elemeket is „bekeverhetünk”, akkor átmenetileg növekedhet a rossz helyen álló elemek száma, tehát nem lehet egyszerűen felírni egy indukciós bizonyítást.

Az érdeklődő Olvasó a verseny honlapján találhat egy vázlatos bizonyítást a mohó stratégia optimalitására:
<http://code.google.com/codejam/contest/dashboard?c=975485#s=a&a=3>.

3. Merre tovább?

Lezárásként megemlítünk néhány továbblépési lehetőséget.

3.1. Fixpontmentes permutációk

Az $f(n, n)$ értékek n elem fixpontmentes permutációinak számát adják meg. Ez a meny-

nyiség az *elcserélt levelek problémájában* vált ismertté, amelyet Nicolaus Bernoulli tárgyalt először, majd Leonhard Euler is foglalkozott vele:

Hányféleképpen tehetünk n darab levelet n megcímezett borítékba úgy, hogy egyik levél sem kerül az eredeti címzetthez?

3.2. Véletlen permutáció előállítás

Ha szimulációt szeretnénk készíteni Goro stratégiájának teszteléséhez, szükségünk van egy olyan algoritmusra, amivel előállíthatjuk n elem egy véletlen permutációját. Az algoritmus akkor tekinthető helyesnek, ha bármelyik sorrend azonos valószínűséggel jön létre.

Bizonyítható, hogy az alábbi algoritmus jó eredményt ad:

```
minden i-re T[i] := i
Ciklus i := 1, 2, ..., n-1
  j := Véletlen(i, n)
  Csere(T[i], T[j])
Ciklus vége
```

Véletlen(i, n) az $i, i + 1, \dots, n$ számok közül választ egyet, véletlenszerűen, egyenlő valószínűséggel. Ilyen függvény általában rendelkezésre áll a legtöbb programozási nyelvben.

3.3 Karácsonyi húzás

Végül megjegyezzük, hogy a következő is kiderül számításainkból: ha egy társaság „karácsonyi húzást” szervez, akkor várhatóan egyvalaki fogja saját magát húzni.

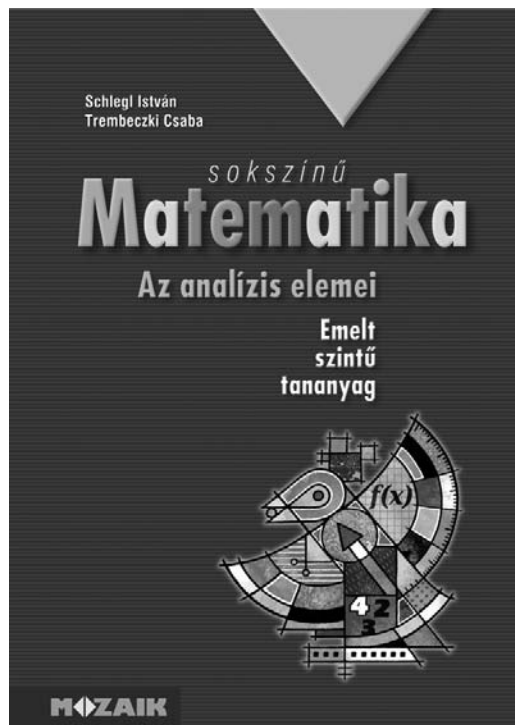
Érdekes annak vizsgálata is, hogy a véletlen húzás hány „ciklust” hoz létre. A ciklusok száma azt adja meg, hogy hány kör jön létre, ha úgy történik az ajándékok átadása, hogy egy tetszőleges ember átadja az ajándékot annak, akit húzott, majd a megajándékozott folytatja a kört az általa húzottal, és ez addig folytatódik, amíg vissza nem érnek az első emberhez. Ha a kör lezárulása után még vannak olyanok, akik nem kerültek sorra, akkor közülük választunk egy tetszőleges személyt, és vele folytatódik az ajándékozás.

Trembeczki Csaba

A sokszínű analízis elemei – könyvajánló

Fgy hosszú, ámde roppant színes út végéhez közelít a Mozaik Kiadó. Engedjék meg, hogy ajánlómat néhány pusztaszámértékkel kezdjem. A kiadó *Sokszínű matematika* sorozata gyakorlatilag átöleli a teljes nyolc osztályos általános, illetve négy osztályos középiskolai matematika anyagot. Ebben a hatalmas munkában 11 év alatt 22 szerző összesen 44 művet hozott (hoz) létre, melyek nyomtatásban több, mint 7600 (!) oldal terjedelmet tesznek ki – eddig.

A középiskolai könyvek esetében felkerült az i-re a pont, megjelent a tankönyvcsalád utolsó két tagja is. Mindkét emelt szintű könyv *Az analízis elemei* címmel jelent meg, a tankönyv kódja MS-2313, a feladatgyűjteményé MS-2327.



A három szerző közül a feladatgyűjtemény egyik írójának neve egybeforrt a könyvekkel. Kovács István mindvégig motorja volt úgy a középiskolai tankönyv-, mint a feladatgyűjtemény-családnak. Trembeczki Csaba nyelvtörő neve is ismerős lehet, a feladatgyűjtemények egyes fejezetei kapcsolódnak hozzá. Esetünkben a két szerzőpáros metszeteként vigyázott az emelt szintű feladatgyűjtemény és a tankönyv összhangjára. Harmadik, új szerzőnk nevét a Matematika Tanári Kincsestár olvasói minden bizonnyal jól ismerik: Schlegl István matematikus, eme cikk írójának jó barátja és „padtársa”, jelenleg középiskolai tanár.

A tankönyv fejlesztése 2010 nyarán kezdődött el, a feladatgyűjtemény összeállítása kis csúszással követte a tankönyvet. Elsőként azt kellett tisztáznunk, hogy a piacon egyébként már megtalálható tankönyv-felépítések közül melyiket használjuk. Kiegészítő kötetet vagy önálló könyvet írunk? Az önálló könyv kiváltaná az emelt szinten tanulók többi tankönyvét – azonban ilyen csak akkor szabad felvállalni, ha a sorozat már megjelent tagjai egyáltalán nem, vagy csak minimális mértékben foglalkoztak az emelt szintű követelmények tárgyalásával. A *Sokszínű matematika* sorozat könyveit áttanulmányozva teljesen egyértelművé vált, hogy csak a kiegészítő kötet jöhet szóba, a tankönyvek már tartalmazzák az emelt szintű követelmények jó részét. „Alig” maradt olyan tananyag, amit az emelt szintű könyvbe beleírhatunk! Azért találtunk három ilyen témakört: a *végtelen halmazokat*, az *analízis elemeit* és a *valószínűség-számítás* egyes részeit. Utóbbiból azért csak egyes elemeket, mert például a geometriai valószínűség a 12.-es könyvben, a binomiális eloszlás pedig – bár nincs néven nevezve – a 11.-es könyvben szerepel.

Mozgásterünket tehát a három nevezett téma alkotta. A logika úgy diktálta, hogy a könyv elejére kerüljön a halmazokkal foglalkozó rész, másodiknak az analízis, harmadik helyre pedig a valószínűség-számítás. Így lehetőség nyílt arra, hogy az utolsó fejezetben kihasználjuk a korábbi részekben kapott eredményeket. Erre végül csak kismértékben került sor.

A következő kérdés, amit tisztáznunk kellett, az volt, hogy kinek szóljon a könyv. Ez csak első ránézésre egyszerű kérdés. „Kinek, kinek? Hát akik emelt szinten tanulnak matematikát a középiskolában!” – mondhatná valaki. Ez igaz, csak hogy emelt szinten sokféleképpen tanítunk matematikát. Vannak olyan iskolák, ahol magas óraszámban, heti 8 vagy több órában van lehetőségük a diákoknak foglalkozni szeretett tárgyunkkal (jellemzően tagozatokon). Itt van idő nagyon részletesen, alaposan tárgyalni a tananyagot. Aztán vannak olyan iskolák, ahol heti 2–6 óra jut az emelt szintű követelmények teljesítésére. Itt nincs mit tenni, haladni kell. A tanulók szempontjából vannak olyan csoportok, ahol a diákok nagyon komolyan veszik a tanulmányokat, de vannak olyanok is, ahol néhány tétel bemutatása után a következő évre egyszerűen megszűnik a csoport. Sőt, akár egy csoporton belül is lehetnek olyan diákok, akik csak a pontszámra hajtanak, és lehetnek olyanok, akiknek a felsőoktatásban töltött éveit alapozzuk meg a tárgyalt anyagokkal. Ugye nem is olyan egyszerű a kérdés: kinek szóljon a könyv?

A válasz az első perctől kezdve egyértelmű volt: azt akartuk, hogy a könyvet *mindenki* használni tudja, aki ma Magyarországon akármilyen összetételű csoportban, akármekkora óraszámban emelt szinten vagy tagozaton tanul-tanít matematikát. Ez azt (is) jelenti, hogy a könyvben megtalálható szinte minden tétel – kevés, apró betűs kivételtől eltekintve – bizonyítást nyer a könyv oldalain.

A kollégák munkáját megkönnyítendő, az összefüggéseket, definíciókat három kategóriába soroltuk. A kötelezően tárgyalandó tudnivalókat *világoszöld háttérben piros sorszám és név* jelzi. Ha valaki tanárként úgy ítéli meg, hogy csoportjával van ideje helyenként ennél

mélyebben is tárgyalni bizonyos részeket, akkor nekik ajánljuk a szintén *világoszöld alapú, de fekete sorszámú és fekete nevű* tételekből, definíciókból való válogatást. Könyvünk zömét az ilyen összefüggések teszik ki. Heti 6 órába minden ilyen tétel részletes bizonyítása biztosan nem fér bele, ám a csoportot tanító tanár szerencsés esetben ismeri a diákjait, így el tudja dönteni, melyik anyagrész fekszik nekik jobban, mit érdemes velük mélyebben megismertetni (esetleg pályaeorientációjukat is figyelembe véve mit fognak a jövőben többet használni). A kiegészítő anyagrészek tárgyalását – ezeket a könyvben *világoslila háttéren lila betűkkel* látjuk – pedig azoknak szánjuk, akik tényleg magas óraszámban dolgoznak, van idejük, és a diákjaik is motiváltak az összefüggések megértésére. Tapasztalataink szerint a felsőoktatásban megjelenő analízis tananyag sokként éri a hallgatók egy – főként persze a nem emelt szinten érettségiző – részét. Reméljük, hogy akik ezen a könyvön „nőnek fel”, felismerik majd a kapcsolódási pontokat a középiskolai és az egyetemi-főiskolai analízis között, és a felsőfokú tanulmányaikhoz is segítségül tudják majd hívni a könyvet.

A tankönyv és a feladatgyűjtemény a feladatokat egységesen három kategóriába sorolja. A feladatok sorszáma nehézségük alapján növekvő sorrendben: sárga, piros és lila. A *sárga példák* könnyebb, gyakorló feladatok. A *pirosak* az adott fejezet anyagrészéhez kapcsolódó „emelt szintű” példák. A *lila feladatok* vagy kiegészítő anyagrészekhez kötődnek, vagy levezetésük hosszabb kitérőt igényel, vagy nehezen kitalálható ötletet tartalmaz – esetleg mindhárom egyszerre.


A könyvek feldolgozása már a középiskola 11. évfolyamán megkezdhető, ugyanis a tankönyv minden olyan összefüggést tartalmaz, amire szükség van, ám későbbi tananyag (pl. mértani sorozat). Egyes részeket, melyek már előfordultak a korábbi sokszínű könyvekben, újra tárgyalunk. Ilyen esetekben mélyebb magyarázatot adunk, amennyiben lehet, pontosabb definíciót (pl. függvény konvexitása).

Jelen sorok írója akkor „zúgott bele” a kiadó *Sokszínű* sorozatába, amikor meglátta a könyvek margóra rajzolt ábráit. A bennem rejlő gyermek ugrott egyet örömeiben, a matematikatanár pedig azt hümmögte: így kell ezt csinálni. Tárgyunkat nem lehet eladni az arra nem fogékony diákoknak, csak úgy, ha felkeltjük az érdeklődésüket. Például azzal, ha egy Recip róka tűzi zászlajára az $n^{-5} = \frac{1}{n^5}$ összefüggést. Erre ilyen formában az emelt szintű könyvben *elvileg* nincs szükség, hiszen azt motivált diákok tanulják. Ezért aztán a rajzok „játékossága” és gyakorisága csökkent a 9–12.-es könyvekhez képest, cserébe több ábra segíti a tananyag konkrét feldolgozását. Azért két példát említenék. Az első fejezet második leckéjében összefoglaljuk a matematika „állati” ötleteit, például a teszünk-veszünk rövidítéséből kapott *teve-módszert*. Már középszinten is sok helyen előfordul ez az átalakítás, magasabb szinten megkerülhetetlen. Vagy ott van a rendőr-elv: kiírhatnánk minden helyen szöveggel, hogy „Figyelj,

itt újra a rendőr-elvet alkalmazzuk ám!” – de minek, ha egy jópofa ábra ezerszer többet mond a szavaknál. Csak a *Műveletek konvergens sorozatokkal* című leckében ötször találkozunk a margón tevékkel és kétszer rendőrökkel.



Igyekeztünk a margó adta lehetőségekkel jól gazdálkodni. A rajzokon túl itt találhatóak a könyvben felbukkanó személyek (teljes név, nemzetiiség, születési és halálozási idő), betűk (mely nemzet ábécéjének hányadik betűje), tételek, definíciók (rövid leírás, név) alapvető adatai. Egyes összefüggéseket „konyhanyelven” is (amit jellemzően előszóban használunk) megfogalmaztunk a margón. Sőt, itt utalunk rá, hogy egy fogalom, összefüggés melyik korábbi tankönyv



A DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS ALKALMAZÁSAI

6. Középtérték-tételek (kiegészítő anyag)

Az előzőekben megismertünk egy új matematikai műveletet, a deriválást. Lényegűnként az ismét Bothuárharmá, és kezdünk el elméleti, mire használható ez az új ismeret.

„Ha felétek megyek a hegyen és szemem sugarát a hegy csúcsára vetem, akkor tekintetem egyenesen mindig emelkedik. Ha lefelé megyek a hegyen és lenézek a völgyben lévő pagoda csúcsára, akkor tekintetem egyenesen mindig ereszkedik. Ha a csúcsom állva a látóhatár fürkészem, akkor tekintetem egyenesen párhuzamosan mutatja a végtelen a patakkal.”

Matematikai konyhanyelvre lefordíva ez azt jelenti, hogy a növekvő függvény érintőjének meredeksége pozitív, a csökkenő függvény érintőjének meredeksége negatív, illetve ha megállunk a „hegy csúcsán”, azaz a függvény helyi maximumánál, akkor az érintő meredeksége éppen zérus az *aaa*. A függvények meneti jellemzőit az érintő meredekségével, amit vízszint a derivált ad meg. A pontos megfogalmazáshoz szükségünk van további tételekre.

Először vizsgáljuk a hegy csúcsán húzott érintőt.

4.12. ROLLE TÉTELE: Legyen $f(x)$ folytonos az $[a; b]$ zárt intervallumon, differenciálható az $]a; b[$ nyitott intervallumon, továbbá $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $c \in]a; b[$ pont, amelyre $f'(c) = 0$.


Megjegyzések: Azzal, hogy zárt intervallumon követjük meg a folytonosságot, biztosítjuk, hogy $f(a)$ és $f(b)$ véges valós értékek legyenek.

Bizonyítás

A 3.7-es Weierstrass-tétel miatt zárt intervallumon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit. Jelölje M az $f(x)$ maximumát és m a minimumát.

Ha $M \neq m$, akkor ezek közül legalább az egyik különbözik $f(a) = f(b)$ -től, ezt az értéket $f(x)$ az $]a; b[$ nyitott intervallumon belsejében veszi fel. Tegyük fel, hogy $M \neq f(a) = f(b)$ és $a < c < b$ olyan pont, amire $f(c) = M$. *aaa*

Írjuk fel c -ben a bal és jobb oldali differenciáhányadosokat! Közelítve (de ne éjje el) x^+ alólól, x^+ felőlől c -t úgy, hogy $x^+ =]a; b[$. Mivel a számláló és a nevező is negatív, minden bal oldali differenciáhányadosra $\frac{f(x^+) - f(c)}{x^+ - c} \geq 0$. A jobb oldali differenciáhányadosok számlálója negatív, nevezője pozitív, ezért mindre $\frac{f(x^-) - f(c)}{x^- - c} \leq 0$.



Ebből következik határértékre, hogy a bal oldali differenciáhányados nemnegatív, a jobb oldali pedig nem pozitív. Am a feltétel szerint mindenhol, így $c \in]a; b[$ pontban is létezik a függvény differenciáhányadosa! Ez csak úgy teljesülhet, ha $f'(c^-) = f'(c^+) = 0$. Ha $M = m$, akkor $f(x)$ konstans $]a; b[$ -on. Mivel konstans függvény deriváltja 0, ezért minden $c \in]a; b[$ -re $f'(c) = 0$.

Tételek fontos, a bizonyításból kiolvasható következményét külön tételként nevezzük meg.

4.13. FERMAT TÉTELE: Legyen $f(x)$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontban helyi szélsőértéke, és legyen $f(x)$ differenciálható x_0 -ban. Ekkor $f'(x_0) = 0$.

Megjegyzések:

- Az értelmezési tartomány azon pontjait, ahol $f(x)$ differenciálható és differenciáhányadosa 0, stacionárius pontoknak nevezzük.
- A tétel csak szükséges feltételt az x_0 -beli szélsőértéknek. Pl az $f(x) = x^3 + 1$ függvény $x_0 = 0$ pontbeli $f'(x) = 3x^2$ első differenciáhányadosa 0, ám a függvénynek ebben a pontban nincs szélsőértéke. (It *aaa*)
- Az $f(x) = |x|$ függvény az $x = 0$ hely kivételével minden pontban differenciálható, de éppen ebben a pontban van a függvénynek minimuma. Amőt, hogy egy függvény valószínűleg nem differenciálható, meg lehet szűrni. (It *aaa*)

Általánosítsuk Rolle tételét!

4.14. CAUCHY TÉTELE: Ha $f(x)$ és $g(x)$ függvények folytonosak $[a; b]$ -on, differenciálhatóak $]a; b[$ -on és bármely $x \in]a; b[$ -re $g'(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $c \in]a; b[$, amelyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Bizonyítás

Rolle tételéből következik, hogy $g(a) \neq g(b)$, vagyis $g(x)$ az a és b pontokban más értéket vesz fel. Mért ha $g(a) = g(b)$, akkor lenne olyan $c \in]a; b[$, hogy $g'(c) = 0$, de ez kizárjuk. A tétel visszavezetjük Rolle tételére: elkészítünk egy olyan $h(x)$ függvényt, amelyre teljesülnek a Rolle-tétel feltételei.

Legyen $h(x) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$, ahol λ egy meghatározandó konstans. Nyilván a tétel feltételeiben adott intervallumokon a $h(x)$ függvény folytonos és differenciálható, hiszen két ilyen típusú függvény összege és konstansszorzása is az.) A konstánst úgy adjuk meg, hogy teljesüljenek a 4.12-es tétel feltételei: követjük meg, hogy

$$h(a) = f(a) + \lambda \cdot g(a), h(b) = f(b) + \lambda \cdot g(b) \text{ és } h(a) = h(b).$$

124

125

hányadik oldalán található. A tananyag megértését könnyítő rövidebb megjegyzéseket is itt helyeztük el, kisebb ábrákkal egyetemben. A hosszabb vagy összetettebb, több pontból álló megjegyzéseket jellemzően a tételek, definíciók után a folyó szövegben, apró betűs részként szerepeltetjük. Ezekben kitekintéseket, érdekességeket, általánosításokat vagy épp speciális eseteket, pontosító magyarázatokat találunk.

Talán említenem sem kell, hogy a tételeket, definíciókat vagy felvezető példák előzik meg (pl. a 4. fejezet 1. leckéjében), vagy működésüket mutatjuk be számtalan kidolgozott feladattal (2. fejezet 3. lecke). Vannak olyan leckék, amelyek csak feladatmegoldásból állnak a tankönyvben, például a *Kidolgozott deriválási feladatok*. Ugyanakkor egy egész fejezet foglalkozik *A differenciálszámítás alkalmazásaival*, több lecke a *határozott integrál alkalmazásaival* (I-II). Természetesen vannak tisztán elméletet feldolgozó leckék is, a *Határozott integrál fogalmának előkészítése* során például csak definíciókat tárgyalunk. A mintapéldák megoldásait részletesen közöljük, illetve ahol úgy éreztük, megjegyzésekkel is elláttuk őket. Találunk olyan feladatokat, amelyekre több megoldást mutatunk, sőt van, ahol „rossz megoldást” is közlünk – így irányítva a figyelmet a típushibára.

A tankönyvben szinte minden lecke végén vannak feladatok, ezek megoldásait azonban a könyv már nem tartalmazza (a kiadó weblapjára felkerülnek majd, www.mozaik.info.hu), ráadásul számuk is „véges”.

Mindenképpen ajánljuk a tankönyv feldolgozásához a 225-ig sorszámozott, ám – mivel sok példa kimeríti az ábécé teljes betűkészletét – ennél jóval több feladatot számláló *Analízis elemei* feladatgyűjteményt is. Ennek fejezetei követik a tankönyv beosztását, és a feladatok megoldásait is tartalmazza. A feladatgyűjtemény alapvető koncepciója ugyanaz, mint a korábbi sokszínű feladatgyűjteményeké: a gyakorló (sárga) feladatok esetében csak a végeredményeket, az emelt szintű (piros) feladatoknál a részletesebb megoldást (esetleg átugorva egy-két könnyebb részletet), míg a lila feladatok esetében a teljesen részletezett megoldásokat közli. Igyekeztünk ebben a kiadvány-

ban is több megoldást adni egy-egy feladatra, amennyiben azok alapvetően más megközelítésre épülnek. Helyenként itt is találunk a feladat megoldásán túlmutató utalásokat: mit lehetne még vele kapcsolatban meggondolni, minek lenne érdemes utánanézni. Remek példa erre a feladatgyűjtemény 6114. f) feladatának megjegyzése. A példában az x^x függvényt kellett jellemeznünk:

„Megjegyzés: Kilencedik évfolyamon szokott felmerülni a 0^0 problémája. Értelmezzük úgy, hogy '0 minden hatványa 0', vagy inkább 'minden szám 0-adik hatványa 1'? Nem tudunk dönteni, ezért a 0^0 -t kizárjuk a számok világából. A fenti függvény 0-ban vett határértéke az utóbbit erősíti (erősebben hat a kitevő konvergenciája): $0^0 = 1$, $x > 0$ -ra $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$. Azon-

ban ha jelentősen gyorsítjuk az alap 0-hoz való konvergenciáját, akkor befolyásoljuk az ered-

ményt: $\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = 0$, ami alapján $0^0 = 0$. Pró-

bálgjuk meg igazolni, hogy $\frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{1}{n!}\right) \rightarrow -\infty!$ ”



A konkrét matematikai tartalomról nehéz szólni, mert szerzteágazó és az eddigi kiadványokhoz képest *mély*. Mit értünk ez alatt például a nyolc leckéből álló *Sorozatok* fejezetben?

1. lecke. Bevezeti a számsorozat (általában a sorozat), illetve a mértani sorozat fogalmát.

2. lecke. Definálja a korlátos sorozatot, a sorozat határát. Apró betűs rész írja le, hogy a felülről (alulról) korlátos sorozatnak van felső (alsó) határa. A határfogalom segítségével két részletben bizonyítja az egymásba skatulyázott intervallumok viselkedését. A tétel megjegyzéseiben kitér a feltételekre, illetve rámutat az egzisztencia és az unicitás fogalmára. Megadja a monotonitás fogalmát. Ennek vizsgálatára a_{n+1} és a_n különbségeinek, illetve hányadosainak vizsgálatát javasolja.

3. lecke. A határérték fogalmát egy konkrét sorozaton keresztül vezeti be, egyszerű modellt alkotva. Megadja a környezet (távolság, metrikus tér) fogalmát. A határérték két definícióját rögtön négy megjegyzés is követi, pl. hogy a határérték nem feltétlenül eleme a sorozatnak, vagy szűkebb környezetbe később lép be a sorozat. A 2. példa a 0-hoz tartó átmérőjű, egymásba skatulyázott sorozatok végpontjainak viselkedéséről, a 3. példa a $\sqrt{5}$ -öt közelítő racionális számok sorozatáról szól. Megjegyzésben új definíciót is ad a valós számokra: „ r valós szám, ha megadható hozzá olyan racionális számokból álló sorozat, melynek r a határértéke”. A befejező példák előtt igazolja, hogy a két konvergencia definíció ekvivalens.

4. lecke. Bizonyítja a határérték unicitását, a konvergens sorozat korlátosságát, illetve a korlátos, monoton sorozat konvergenciáját. Definálja a részsorozat fogalmát, majd igazolja a konvergens sorozat részsorozatáról szóló összefüggést. Két bizonyítást is ad a rendőr-elve.

5. lecke. A három kötelezően tárgyalandó nevezetes sorozat részletes bemutatását látjuk itt a korábbi tételek alapján. Az $\frac{1}{n}$ határértékét

kétféleképpen vizsgálja, az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ -re háromféle utat is javasol, melyek közül a közepekre épülőt végigviszi. Bevezeti az Euler-féle számot. A q^n -hez bevezeti a végtelenbe divergáló sorozatot.

6. lecke. Bizonyítja a konvergens sorozatokkal végzett műveletek szabályait, majd $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, illetve $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ típusú határértékeket számol ki 11 mintapéldában. A törtes típust osztályozza a számláló-nevező nagyságrendje szerint.

7. lecke. A Cauchy-sorozat definíciója után a Cauchy-féle konvergencia kritérium bizonyítása történik két részletben. A megjegyzések filozófiai problémával (teljes metrikus tér), illetve a torlódási pont fogalmával foglalkoznak. Kimondásra kerül a Bolzano-Weierstrass tétel is, illetve ha korlátos sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, akkor az egyben határérték.

8. lecke. Végtelen valós számsor, illetve konvergens végtelen valós számsor definíciójával kezd, majd igazolja a mértani sor konvergenciáját. Szükséges feltételt ad sor konvergenciájára. A példák között tárgyalja racionális számok tört alakját, elei Zenon problémáját.

Binomiális tétellel igazolja, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatnak felső korlátja $K = 3$, illetve megvizsgálja a Koch-féle hópolyhet (megjegyezve, hogy az egy *fraktál*).

Természetesen ez csak egy kiragadott fejezet nagyon rövid összefoglalója. A többi hasonló alaposággal viszi végig a differenciálszámítás, határozatlan és határozott integrálás, valószínűség-számítás felépítését.

Végezetül azt kívánom minden kedves leendő Olvasónknak, hogy forgassák a könyveket legalább akkora szeretettel, amekkora szeretettel készítették az alkotóik, és legyen bennük legalább akkora örömük, mint volt munka közben az íróknak! Kövessenek minket, Önökkel együtt bemutatjuk diákjaiknak a matematika csodálatos világát. Kezdhetjük az utazást?

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtják össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2012. március 31.

Feladatok (435–439.)

435. Igazoljuk, hogy ha α , β , γ egy hegyesszögű háromszög belső szögei, akkor

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geq 2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

Dályay Pál Péter, Szeged

436. Legyen $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Hány olyan $Q(x)$ polinom van, amelyhez létezik olyan harmadfokú $R(x)$ polinom, hogy $P(Q(x)) = P(x) \cdot R(x)$ teljesül?

437. Legyen P az ABC háromszög tetszőleges belső pontja és legyen $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$. Jelölje R_a , R_b , R_c rendre a PBC , PCA , PAB háromszög körülírt körének sugarát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{R_a}{y+z} + \frac{R_b}{z+x} + \frac{R_c}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Dályay Pál Péter, Szeged

438. S a térbeli derékszögű koordináta-rendszer azon $P(x; y; z)$ pontjainak halmaza, amelyek koordinátái a $\{0; 1; 2\}$ halmaz elemei. Hány szabályos háromszöget határoznak meg S elemei?

439. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_0 = x$, $a_1 = y$, $a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}}$ ($n \geq 1$). Melyek azok az x és y valós számok, amelyekre teljesül, hogy van olyan n_0 pozitív egész, hogy bármely $n \geq n_0$ esetén $a_n = c$ (konstans)?

Feladatmegoldások (420–424. feladatok)

420. Van-e olyan pozitív egész n , amelyre $3^n + 2 \cdot 17^n$ négyzetszám?

I. megoldás: Belátjuk, hogy nincs megfelelő n .

Ha $n = 2k$, akkor

$$\begin{aligned} 3^{2k} + 2 \cdot 17^{2k} &= 9^k + 2 \cdot 289^k = \\ &= (10-1)^k + 2 \cdot (290-1)^k \equiv \\ &\equiv (-1)^k + 2 \cdot (-1)^k \equiv \pm 3 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Ha $n = 2k+1$, akkor

$$\begin{aligned} 3^{2k+1} + 2 \cdot 17^{2k+1} &= 3 \cdot 9^k + 34 \cdot 289^k \equiv \\ &\equiv 3 \cdot (-1)^k - (-1)^k \equiv \pm 2 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Mivel a négyzetszámok 5-tel osztva 0, 1 vagy 4 maradékot adhatnak, ezért a kifejezés egyetlen pozitív egész n esetén sem lehet négyzetszám.

Több megoldás alapján

II. megoldás: A $3^n + 2 \cdot 17^n$ utolsó számjegyet vizsgálva látjuk be, hogy nincs megfelelő n .

Mivel

$$\begin{aligned} 3^{4k} &\equiv 1 \pmod{10}, \\ 3^{4k+1} &\equiv 3 \pmod{10}, \\ 3^{4k+2} &\equiv 9 \pmod{10}, \\ 3^{4k+3} &\equiv 7 \pmod{10}, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} 17^{4k} &\equiv 1 \pmod{10}, \\ 17^{4k+1} &\equiv 7 \pmod{10}, \\ 17^{4k+2} &\equiv 9 \pmod{10}, \\ 17^{4k+3} &\equiv 3 \pmod{10}, \end{aligned}$$

ezért $3^n + 2 \cdot 17^n$ végződése 3 vagy 7. Ezekre a számjegyekre viszont négyzetszám nem végződik.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 6.

421. A 100, 200, 300 olyan háromjegyű számok, amelyek négyzetében ugyanannyi 0-tól különböző számjegy van, amennyi az eredeti számban. A felsorolt három számon kívül van-e még olyan háromjegyű szám, amelyik rendelkezik ezzel a tulajdonsággal?

Megoldás: A tízes számrendszerben felírt n természetes szám értékes (0-tól különböző) jegyeinek számát jelölje $E(n)$. Legyen T_k azon k jegyű természetes számok halmaza, amelyekre $E(n) = E(n^2)$.

Nilvánvaló, hogy $T_1 = \{1; 2; 3\}$.

Vizsgáljuk T_2 -t.

Egy kétjegyű szám négyzete három- vagy négyjegyű szám lehet. A lehetséges alakok:

- (1) $n^2 = \overline{a00}$;
- (2) $n^2 = \overline{a0b}$;
- (3) $n^2 = \overline{a00b}$ ($a \neq 0, b \neq 0$).

(1)-ből $n = 10, n = 20$ vagy $n = 30$ adódik.

Ha egy négyzetszám végződése $\overline{0b}$, akkor b csak 1, 4 vagy 9 lehet. Legyen $b = d^2$ ($d = 1, 2, 3$).

(2)-ből

$$a = \frac{n^2 - d^2}{100} = \frac{(n-d)(n+d)}{100}$$

Mivel $n - d$ és $n + d$ páros és csak az egyik osztható 5-tel, ezért $n \mp d = 50l, n \pm d = 50l \pm 2d$ (l pozitív egész). Így viszont $a = l \cdot (25l \pm d)$, ami nem lehet, hiszen a jobb oldal 9-nél nagyobb.

(3) esetén

$$a = \frac{n^2 - d^2}{1000} = \frac{(n-d)(n+d)}{1000}$$

ahonnan $n \mp d = 250l, n \pm d = 250l \pm 2d$, és így

$$a = \frac{l \cdot (125l \pm d)}{2}$$

Ez viszont nem lehet, mert a jobb oldal 9-nél nagyobb.

Kaptuk, hogy (2) és (3) egyike sem teljesülhet, azaz $T_2 = \{10; 20; 30\}$.

Az eredeti feladat T_3 meghatározása. Ha $n = 10m \in T_3$, akkor $m \in T_2$, ezért 100, 200, 300 T_3 -beli.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy n nem osztható 10-zel, és $E(n) = E(n^2) = 2$. Ekkor két lehetőségünk van:

- (4) $n^2 = \overline{a000b}$;
- (5) $n^2 = \overline{a0000b}$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezekben az esetekben nincs megfelelő T_3 -beli szám.

Legyen $E(n) = E(n^2) = 3$. Ekkor a következő esetek lehetségesek ($abc \neq 0$):

- (6) $n^2 = \overline{ab00c}$;
- (7) $n^2 = \overline{a0b0c}$;
- (8) $n^2 = \overline{a00bc}$;
- (9) $n^2 = \overline{ab000c}$;
- (10) $n^2 = \overline{a0b00c}$;
- (11) $n^2 = \overline{a00b0c}$;
- (12) $n^2 = \overline{a000bc}$.

(6)-ból a kétjegyű esethez hasonlóan adódik, hogy

$$\overline{ab} = \frac{n^2 - d^2}{1000} = \frac{(n-d)(n+d)}{1000}$$

ahonnan $n \mp d = 250l, n \pm d = 250l \pm 2d$. Így

$$\overline{ab} = \frac{l \cdot (125l \pm d)}{2}$$

amelynek csak $l = 1$ esetén van megoldása, azaz $\overline{ab} = \frac{125 \pm d}{2}$.

$d = 1, c = 1$ esetén $\overline{ab} = 62$ vagy $\overline{ab} = 63$, azaz $n^2 = 62001, n = 249$ vagy $n^2 = 63001, n = 251$.
 $d = 3, c = 9$ esetén $\overline{ab} = 61$ vagy $\overline{ab} = 64$, azaz $n^2 = 61009, n = 247$ vagy $n^2 = 64009, n = 253$.

(7)-ből hasonlóan adódik:

$$\overline{a0b} = \frac{n^2 - d^2}{100} = \frac{(n-d)(n+d)}{100}$$

ahonnan $n \mp d = 50l$, $n \pm d = 50l \pm 2d$. Így $\overline{a0b} = l \cdot (25l \pm d)$, amelynek csak $l = 4, 5, 6$ esetén lehet megoldása. Könnyen ellenőrizhető, hogy egyik esetben sincs megfelelő megoldás. (9)-ből

$$\frac{\overline{ab}}{ab} = \frac{n^2 - d^2}{10000} = \frac{(n-d)(n+d)}{10000},$$

ahonnan $n \mp d = 1250l$, $n \pm d = 1250l \pm 2d$. Így $\frac{\overline{ab}}{ab} = \frac{l \cdot (625l \pm d)}{2}$, amihez nincs alkalmas l .

(10)-ből

$$\frac{\overline{a0b}}{a0b} = \frac{n^2 - d^2}{1000} = \frac{(n-d)(n+d)}{1000},$$

ahonnan $n \mp d = 250l$, $n \pm d = 250l \pm 2d$. Így $\frac{\overline{a0b}}{a0b} = \frac{l \cdot (125l \pm d)}{2}$, amelynek csak $l = 2, 3$ esetén lehet megoldása. Könnyen ellenőrizhető, hogy egyik esetben sincs megoldás.

A szisztematikus vizsgálatot tovább folytatva kiderül, hogy a (8) típus esetén két megfelelő n számot kapunk: $n = 245$, $n^2 = 60025$; $n = 283$, $n^2 = 80089$. A (11) esetben három megfelelő n van: $n = 448$, $n^2 = 200704$; $n = 548$, $n^2 = 300304$; $n = 949$, $n^2 = 900601$. A (12) esetben nem kapunk megoldást. Az esetek vizsgálata során felhasználtuk azt a tényt, hogy ha egy szám két szomszédos négyzetszám közé esik, akkor nem négyzetszám.

Kaptuk: $T_3 = \{100; 200; 245; 247; 249; 251; 253; 283; 300; 448; 548; 949\}$.

Nagy Sándor, Békéscsaba

A megoldók száma: 5.

422. Legyenek a_1, a_2, \dots, a_n olyan pozitív számok, amelyek összege 1. Tetszőleges $1 \leq i \leq n$ esetén jelölje S_i a $\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_i}$ összeget.

Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^n S_{2k} \leq \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} S_{2k+1} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Legyen $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$. Viète formulái alapján

$$P(x) = x^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i S_i x^{n-i}.$$

Így egyrészt $P(1) = 1 + \sum_{i=1}^n (-1)^i S_i$, másrészt $P(1) = (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)$. Ebben a szorzatban $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) és $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ miatt minden tényező pozitív, ezért a számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján

$$P(1) \leq \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (1 - a_i)\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Innen

$$1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S_{2k} \leq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} S_{2k+1} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

amiből $S_1 = 1$ alapján a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Hornung Tamás, Zalaegerszeg

Nagy Sándor, Békéscsaba

Borbély József, Tata

A megoldók száma: 4.

423. Az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok az egységnyi élű szabályos tetraéder körülírt gömbjére (gömbfelületére) illeszkednek úgy, hogy $A_i A_j < 1$ bármely $i \neq j$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy a gömbnek van olyan félgömbje, amelyik mind a négy pontot tartalmazza.

Megoldás: Legyen O a gömb középpontja, R a sugara és legyen $ABCD$ egy, a gömbbe írt szabályos tetraéder egységnyi hosszú éllel. Legyen továbbá $\vec{a} = \overline{OA}$, $\vec{b} = \overline{OB}$, $\vec{c} = \overline{OC}$, $\vec{d} = \overline{OD}$. Mivel $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$, ezért

$$0 = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})^2 = 4R^2 + 12R^2 \cos AOB\alpha.$$

Innen $\cos AOB\alpha = -\frac{1}{3}$.

Azt fogjuk belátni, hogy ha az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder olyan, hogy $A_iA_j < 1$, és ez a tetraéder a tekintett gömbbe van írva, akkor ez a tetraéder nem tartalmazza a belsejében az O pontot.

Indirekt bizonyítunk, azaz feltesszük, hogy létezik olyan beírt $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder, amely belsejében tartalmazza az O pontot. Legyen $\bar{a}_i = \overline{OA_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Mivel az O pontot tartalmazza a tetraéder, ezért vannak olyan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ pozitív valós számok, amelyekre $\sum_{i=1}^4 \alpha_i \bar{a}_i = \vec{0}$.

Mivel $A_iA_j < 1$ minden $1 \leq i < j \leq 4$ esetén, ezért $\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j > -\frac{1}{3}R^2$ minden $1 \leq i < j \leq 4$ esetén. Így

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i \bar{a}_i \right)^2 = R^2 \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \alpha_i \alpha_j \bar{a}_i \cdot \bar{a}_j > \\ &> R^2 \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}R^2 \right) \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \alpha_i \alpha_j = \\ &= \frac{1}{3}R^2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy egyetlen, a feltételnek megfelelő beírt $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder sem tartalmazza belsejében a köré írt gömb középpontját, azaz minden ilyen tetraéderhez van olyan félgömb, ami tartalmazza az A_i pontokat.

Borbély József, Tata

A megoldók száma: 3.

424. Határozzuk meg azt a legnagyobb K valós számot, amelyre teljesül a következő állítás: „Ha a, b, c egy tompaszögű háromszög oldalai, akkor $K \cdot (a + b + c)^2 < a^2 + b^2 + c^2$, ahol K az a, b és c értékétől független állandó.”

Megoldás: Legyen a háromszög leghosszabb oldala c . A feltételeket az

$$(a + b)^2 > c^2 > a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2} \tag{1}$$

egyenlőtlenségek biztosítják.

Az

$$L_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} \geq \frac{\frac{(a + b)^2}{2} + c^2}{(a + b + c)^2} = L_2$$

kifejezések minimumát (vagy infimumát) kell meghatározni.

Nem jelent megszorítást, ha feltesszük az egyszerűbb számolás végett, hogy $a + b = 2$. Ekkor

$$L_2(c) = \frac{c^2 + 2}{(c + 2)^2},$$

ahol c eleget tesz (1)-nek, azaz $\sqrt{2} < c < 2$. Cél tehát a $\min_{\sqrt{2}; 2[} L_2(c)$ meghatározása. Alakítsuk

$L_2(c)$ -t:

$$\begin{aligned} L_2(c) &= \frac{c^2 + 2}{(c + 2)^2} = \frac{c^2 - 4 + 6}{(c + 2)^2} = \\ &= \frac{6}{(c + 2)^2} - \frac{4}{c + 2} + 1 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{c + 2} \right)^2 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Látható, hogy $L_2(c)$ az $[1; \infty[$ intervallumon szigorúan növekvő. Így

$$\inf_{\sqrt{2}; 2[} L_2(c) = \min_{\sqrt{2}; 2[} L_2(c) = L_2(\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}.$$

Az L_1 és L_2 folytonosságát figyelembe véve $K = 6 - 4\sqrt{2}$ a válasz.

Nagy Sándor, Békéscsaba

A megoldók száma: 4.

A megoldók névsora: Borbély József, Tata (420–424.); Dályay Pál Péter, Szeged (420. 3 mód, 421–424.); Hornung Tamás, Zalaegerszeg (420., 422.); Nagy Sándor, Békéscsaba (420. 3 mód, 421. 2 mód, 422–424.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (420., 421.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (420., 421., 424.).