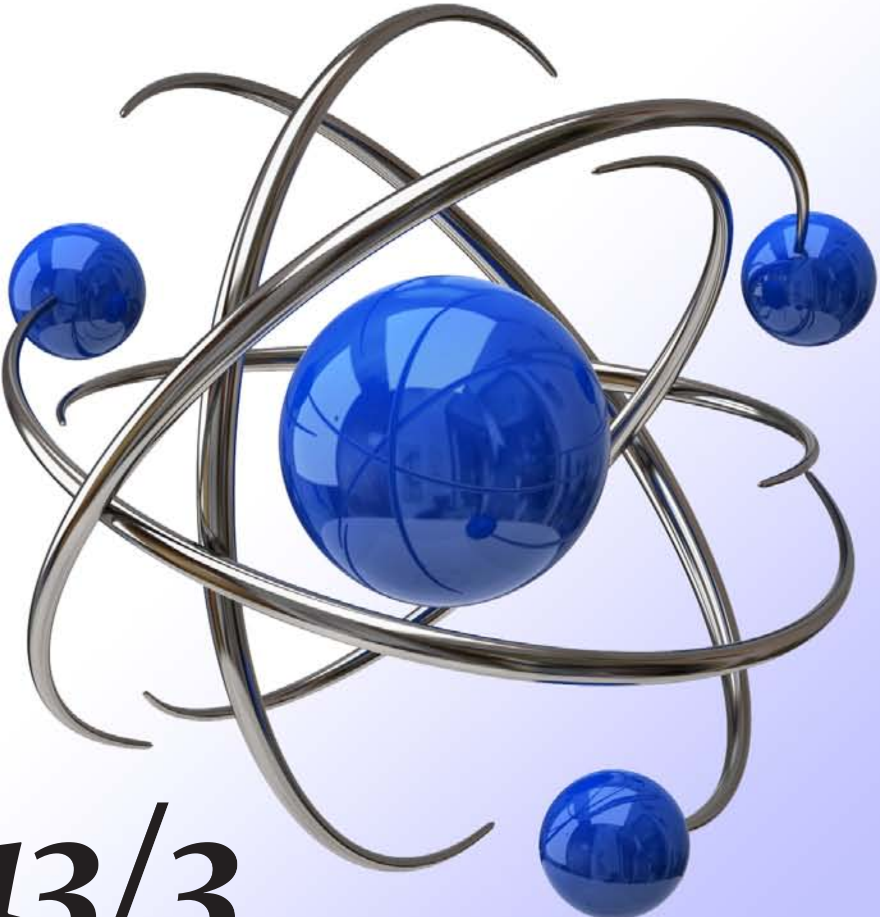
# A FIZIKA tanítása

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT



2013/3

MOZAIK

# A FIZIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

**Szerkesztőség:**

Főszerkesztő:

Bonifert Domonkosné dr.
főiskolai docens

A szerkesztőbizottság:

Dr. Kövesdi Katalin
főiskolai docens

Dr. Molnár Miklós
egyetemi docens

**Szerkesztőség címe:**

6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

**Kiadó:**

MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Szőke András




# TARTALOM




Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

FÓKUSZ

Nagy Mária – Dr. Radnóti Katalin

# A Boltzmann-eloszlás középiskolai feldolgozásának lehetőségei II. rész

Írásunk első részében szerepelt a statisztikus fizika fakultációs keretben történő feldolgozásához ajánlott módszer első két szakasza: a matematikai formula felírásának és annak magyarázatának tárgyalása, valamint a fogalmi rendszer kialakítása.

A 8 szakasz:

**1.** Matematikai formulák és azok magyarázata
**2.** Fogalmi váltások, fogalomrendszer
**3.** Jelenségek, jelenségértelmezés
**4.** Jelenségmagyarázat
**5.** A jelenségek mindennapi életben való megnyilvánulása és a történetiség
**6.** Problémamegoldás
**7.** Szintetizálás
**8.** Értékelés

Jelen második részben a témakör feldolgozásának harmadik, negyedik és ötödik szakaszának leírása következik. A három részes cikkünk utolsó részében szerepel majd a fennmaradó három szakasz.

### 3. Jelenségek, jelenségértelmezés

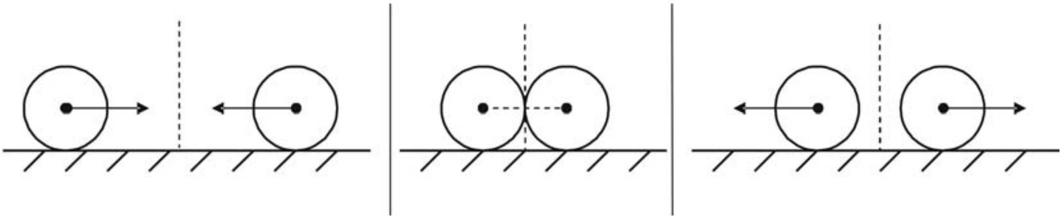
Különböző példák/kísérletek/esettanulmányok megfigyelésekor először hétköznapi kifejezésekkel írjuk le, hogy mit látunk, majd a fizika nyelvén is megfogalmazzuk a tapasztalatokat.

A harmadik szakasz jelenségei

– Atomok eloszlásának modellezése
  – 2 (biliárd) golyó centrális, tökéletesen rugalmas ütközése
  – sok biliárdgolyó kezdőlökés utáni mozgása

### Az atomok eloszlásának modellezése

**1.** Ha ütköztetünk két – biliárd – golyót az asztalon, és az ütközés centrális, tökéletesen rugalmas, akkor **megfordítható** jelenséget tapasztalunk, mint az a reverzibilis és irreverzibilis folyamatok tárgyalása elején szerepelt. A konkrét esetben a golyók egymás felé gurulnak, majd ütköznek, és ezt követően „szétszaladnak” *(21. ábra)*.



*21. ábra*

**2.** Az előző jelenségtől eltérőt tapasztalunk akkor, ha a biliárdasztalon nem két golyót ütköztetünk egymásnak, hanem a fehér golyóval kezdőlökéskor meglökjük a kezdetben háromszögelrendezésben elhelyezett, álló, színes golyókat. Az ekkor látottakat visszafelé lejátszva nemigen tudnánk elképzelni a felvétel valós mivoltát, itt **irreverzibilis** folyamatról beszélünk. Ekkor ugyanis azt látjuk, hogy a meglökött 15 golyó hirtelen szétlökődés után már **random eloszlást vesz fel** *(22. ábra)*.

**4. Jelenségmagyarázat**

Ez a szakasz 5 lépésből tevődik össze, melyek a következők:

1. lépés: Mindennapi, közérthető nyelven megalkotjuk a magyarázatot.

2. lépés: Ugyanerre a jelenségre rámutató másik kísérletet/párhuzamot keresünk.

3. lépés: Analógiát keresünk. Mikor hallhattunk ilyesmiről középszintű fizikaórán? – Brown-mozgás

4. lépés: Elméleti magyarázatot adunk – jelen esetben a statisztikus fizika alapján.

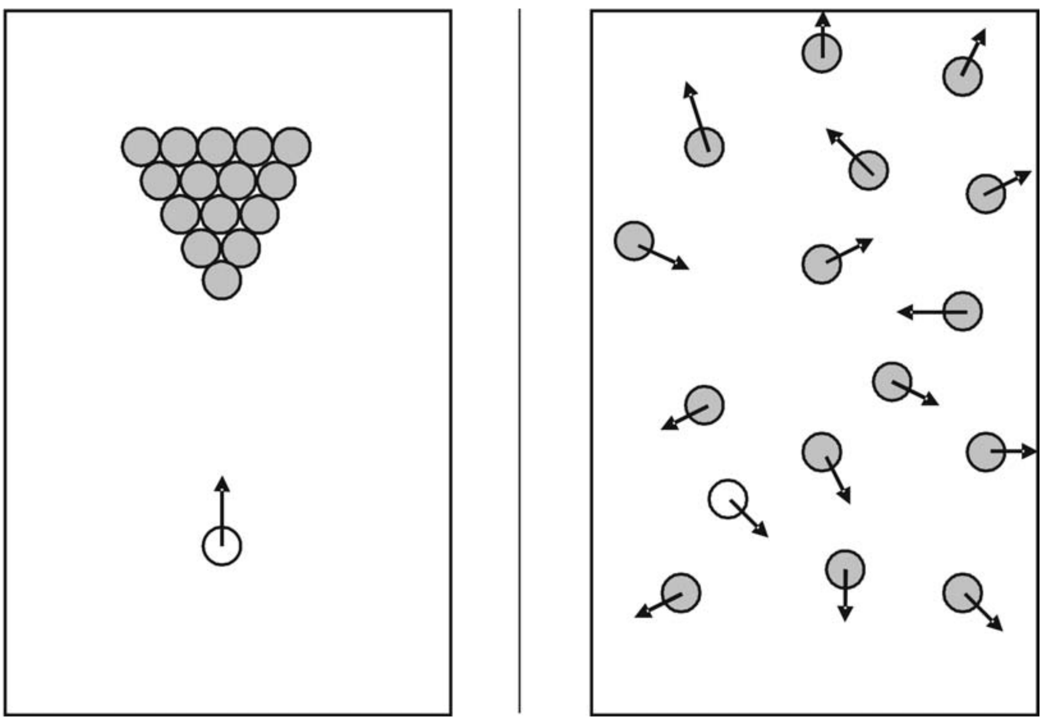
5. lépés: Levezetés.

**1. lépés:** Egyszerű „magyarázat”: **Megbolygattuk a rendszert,** s ezért az a folyamatban rendezetlenebbé vált.

**2. lépés:** Másik példa: Életszerűbb hasonlat a billiárdgolyók kezdő lökése utáni rendszertelen és véletlen mozgásánál az az eset, amikor sok **névsorba rendezett** papír, mondjuk egy **osztály dolgozatai vagy iskolai rajzai** vannak a kezünkben, s ezeket feldobjuk a levegőbe. Ekkor biztos, hogy nem névsorban fognak leesni a földre. Összekeverednek, rendezetlenné válnak.

**3. lépés:** Mikor hallhattunk ilyesmiről középszintű fizikaórán? **Részecskemozgás/Brown-mozgás** alkalmával.

Robert Brown angol botanikus vízben elkevert virágporszemcsék vizsgálata során **megfigyelte a gázokban, folyadékokban lebegő**



*22. ábra*

**parányi részecskék rendszertelen mozgását.** A részecskék ekkor a beléjük ütköző molekulák hatására mozognak. A kísérlet alátámasztja, hogy a molekulák rendszertelen mozgásban, **ún. hőmozgásban** vannak.

**4. lépés: Elméleti magyarázat a statisztikus fizika szerint:** ütközéstől ütközésig egy-egy golyó akadálytalanul gurul, ütközéskor pedig megtörik addigi mozgásának pályája, s ez utóbbi történést jól leírják a dinamikai törvények.

Ez néhány golyó esetében átlátható, de amikor nagyon sok elemű halmazt akarunk leírni, akkor **az elemek számának növekedésével egyre lehetetlenebb egyszerre követni és leírni minden egyes elem mozgását.**

Tehát **gyakorlatilag rendszertelennek látjuk** a golyók mozgását, ha egyszerre nézzük az összeset.

Ezért a nagyon sok elemű halmazok leírásakor nem is próbáljuk meg minden egyes elem (atom) mozgásának nyomon követését, nem menne és értelmetlen is volna (nem kell tudni, hogy a szoba levegőjének melyik részecskéje jut éppen a tüdőnkbe, csak legyen elegendő oxigén a lélegzéshez).

Helyette **a világ nagyon nagy számú elemi összetevőinek, pl. az atomoknak „teljesen rendszertelen" viselkedését feltételezzük.**

A biliárdgolyók szemléltethetik a testek, anyaghalmazok alkotóelemeit.

**Kémiai példa**

**A statisztikus fizika szemlélete szerint azt is meg tudjuk adni, hogy adott anyaghalmazban az alkotóelemek (a részecskék) mekkora arányban fognak kémiai reakcióba lépni, átalakulni** (vagy elpárologni). Azok a részecskék fognak, amelyek energiája számottevően eltér az átlagos értéktől, meghatározott mértékben nagyobb annál. Vagyis tulajdonképpen arra vagyunk kíváncsiak, hogy **hány atom rendelkezik az áltagostól lényegesen eltérő ε energiaértékkel.** Hogy ez a részecskék milyen hányadát jelenti, az az anyaghalmaz **energiaeloszlásával** jellemezhető.

A testekre jellemző energiaeloszlás, más néven **a statisztikus fizika Boltzmann-eloszlása** a következőképp alakul: **átlagosan N(ε) darab atom rendelkezik ε energiával *T* hőmérsékletű test esetében.** Ez **matematikailag** a cikk első részében szerepelt és a következő alakban írható fel:

$$\boxed{N(\varepsilon) = N(0) \cdot e^{-\varepsilon / kT}}$$

**5. lépés: Levezetés**
**Jelölések:**

*N:* atomok száma
*N(ε)*: N atomos kristályban az *ε* energiájú atomok száma
*w(0)*: annak a valószínűsége, hogy *N* atomos *E* energiájú testben 1 atom zérus (0) energiával rendelkezik
*w(ε):* annak a valószínűsége, hogy *N* atomos *E* energiájú testben 1 atom *ε* energiával rendelkezik.
*Y(E–ε)*: azon mikroeloszlások száma, amelyekben a test többi részére *E*-*ε* energia jut
Y(E): azon mikroeloszlások száma, amelyekben a test többi részére *E* energia jut

**Mikroeloszlás fogalma emlékeztetőül:** Olyan részletesen jellemzett állapotokat jelöl, melyek egyenlő valószínűséggel valósulnak meg.

Tapasztalat:

$$w(\varepsilon) \sim Y(E-\varepsilon) \tag{1}$$

Számítsuk ki a *w(0)/w(ε)* arányt!

$$w(0)/w(\varepsilon) = (1)\ \text{miatt} = Y(E)/Y(E-\varepsilon) \tag{2}$$

Utóbbi hányados fizikai jelentése: azon eset reprezentálása, mintha a maradék test az *E*-*ε* energiájú „kezdeti" stádiumból *Q* = *ε* energia felvételével került volna az *E* energiájú „későbbi" állapotba.

Az előbbi interpretáció miatt felhasználhatjuk a hőmérsékletre vonatkozó összefüggést, miszerint:

$$T = \frac{Q}{k \cdot \Delta \ln Y} = \frac{Q}{\Delta S}$$

A hőmérséklet az a mennyiség, mely az anyaghalmazok energialeadó képességét számszerűen jellemzi.

Önmagától az az anyaghalmaz ad át $Q$ energiát a másiknak, amelyiknek nagyobb a $T$ hőmérséklete.

A hőmérséklet definíció matematikai alakját átrendezve megkapjuk, hogy a felvett $Q$ energia $T$ hőmérsékleten épp $Q/kT$-vel változtatja meg a mikroeloszlásszámok logaritmusainak különbségét:

$$\Delta \ln Y = \frac{Q}{k \cdot T} \qquad (3)$$

A két mikroeloszlásszámunk most $Y(E)$ és $Y(E\text{-}\varepsilon)$, ezek logaritmusának változása (különbsége):

$\Delta\ln Y = \ln(Y(E)) - \ln(Y(E - \varepsilon)) =$
$=$logaritmus azonosság miatt $= \ln[Y(E)/Y(E\text{-}\varepsilon)] =$
$=(3)$ miatt $= Q/kT =$
$=$mivel $Q = \varepsilon \;\; = \varepsilon/kT$

(4)

(4)-et a logaritmus-műveletek szabályai szerint $e$-adra emelve (hogy a természetes alapú logaritmus eltűnjön):

$$\ln[Y(E)/(Y(E-\varepsilon)] = \varepsilon/kT$$

$$\Rightarrow Y(E)/Y(E-\varepsilon) = e^{\varepsilon/kT} = (2) \text{ miatt} = w(0)/w(\varepsilon) \qquad (5)$$

**Tehát $e^{\varepsilon/kT}$-vel nagyobb valószínűséggel lesz zérus energiájú állapotban a test valamely (tetszőleges) atomja, mint ε energiájú állapotban.**

(5) egyenletet átrendezve:

$$e^{\varepsilon/kT} = w(0) \,/\, w(\varepsilon) \qquad / \cdot w(\varepsilon)$$

$$w(e) \cdot e^{\varepsilon/kT} = w(0) \qquad / : e^{\varepsilon/kT}$$

$$\boldsymbol{w(\varepsilon)} = \boldsymbol{w(0)} \,/\, e^{\varepsilon/kT} = \text{hatványazonosságok miatt} = \boldsymbol{w(0)} \cdot \boldsymbol{e^{-\varepsilon kT}} \qquad (6)$$

A (6) egyenlet 1 atomra adja meg azt, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy az $\varepsilon$ energiával rendelkezzen.

Ennek alapján adódik az $\varepsilon$ energiával rendelkező atomok mennyisége $N$ atomos kristály esetén:

$\boldsymbol{N(\varepsilon)} = N \cdot w(\varepsilon) = N \cdot w(0) \cdot e^{-\varepsilon/kT} = N(0) \cdot e^{-\varepsilon kT}$

**Ez volt a levezetendő állításunk.**

## 5. A jelenségek mindennapi életben való megnyilvánulása és a történetiség

Az is fontos, hogy a fizikaórákon az egyes jelenségekhez kapcsolódóan esetlegesen megjelenő konfliktusokat és a társadalomtudományi vonatkoztatásokat is beemeljük a tanórába. A diákoknak nem elég a természettudományok világában otthonosan mozogni, szükséges a mindennapokban való eligazodás is. Továbbá fontos és érdekes, ha megnézzük az adott jelenség tudománytörténeti hátterét.

Az ötödik szakasz vázlatpontjai jelenlegi témánk esetében:

- Történetiség: Boltzmann, Maxwell, Clausius, Bernoulli
- Mindennapi életben való megnyilvánulás: barometrikus magasságformula, a légkör vastagsága
- Kémiában való megnyilvánulás: a reakciósebesség hőmérsékletfüggése
- További mindennapokban és a fizikában-kémiában való megnyilvánulás: a víz gőznyomásának változása a hőmérséklet függvényében

### Történetiség

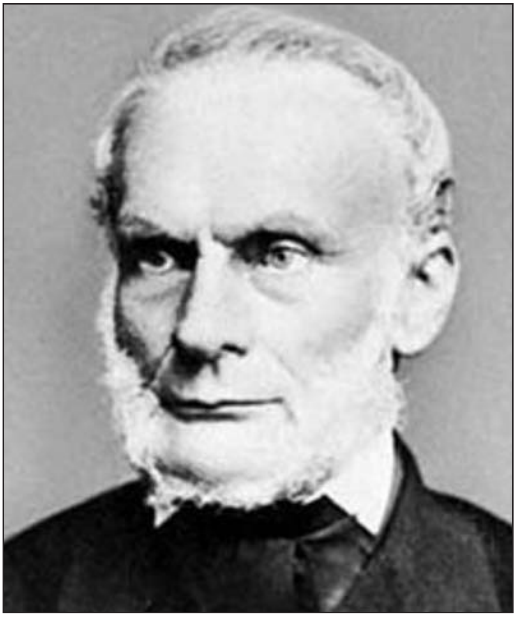
A nagyon sok elemű halmazok leírásakor az egyes elemek (atomok) mozgásának irreleváns tulajdonságát tekintő, a világ nagyon nagy számú elemi összetevőinek (pl. az atomoknak) „teljesen rendszertelen” viselkedését feltételező új stratégiát, mely a természet leírására szolgál, **Ludwig Boltzmann** *(23. ábra)* osztrák fizikus kezdeményezte. Boltzmann és az angol James **Clark Maxwell** *(24. ábra)* korábbi hasonló felfogású elméleteiből megszületett a statisztikus fizika, ami **Rudolf Clausius** *(25. ábra)* munkásságára, a molekuláris hőelméletre építkezett.

A kinetikus gázelmélet alapjai 1738-ban **Daniel Bernoulli „Hydrodynamica”** c. művében *(26. ábra)* jelentek meg. Maxwell olvasta Clausius értekezését, Boltzmann pedig olvasta Maxwell írásait.

**Mindennapi életben való megnyilvánulás: barometrikus magasságformula és a légkör vastagsága**

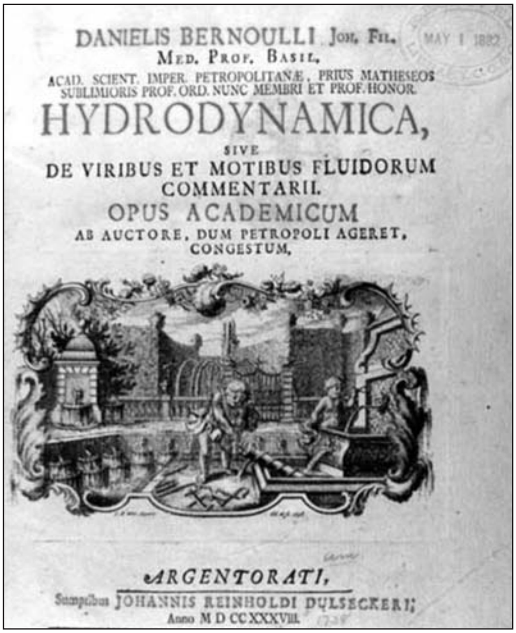
A természetben egyik fontos példa a Boltzmann-eloszlásra a barometrikus magasságfor-

*23. ábra*



*25. ábra*

*24. ábra*



DANIELIS BERNOULLI Joh. Fil.
Med. Prof. Basil.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS
SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM
COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET,
CONGESTUM.

ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI;
Anno M D CCXXXVIII.

*26. ábra*

mula. **A barometrikus magasságformula szerint állandó hőmérsékleten, homogénnek tekinthető gravitációs térben a részecskeszám-sűrűség exponenciálisan változik.** Tehát a **tengerszinttől fölfelé haladva változik a levegő nyomása: csökken a magasság függvényében** *(27. ábra).* A levegő sűrűsége és nyomása fölfelé haladva kb. 5,5 km-enként megfeleződik.

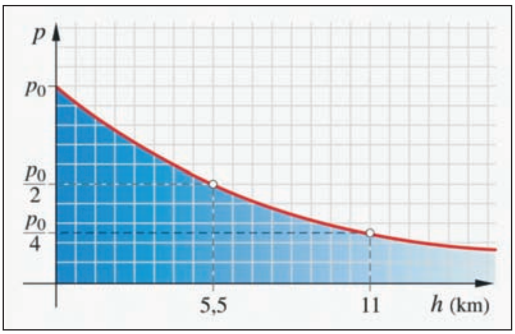
Emiatt fontos a hegymászóknak a 8000 m magasságú Himalája csúcsának *(28. ábra)* megmászásakor oxigénmaszkot viselniük, hiszen ott a levegő sűrűsége a tengerszinti viszonyokhoz képest már csak 35%.

A nyomás változása a magasság függvényében egy nyomásmérő **manométer** *(29. ábra)* segítségével egy magasabb házban (például az ELTE TTK épületében) mérhető. A mérés elvégzése, az adatok kiértékelése és az eredmények értelmezése az írás utolsó részében szerepel, mint problémamegoldás.

A sűrűségváltozás következtében fölfelé haladva **a felettünk lévő levegő tömege is csökken** *(30. ábra)* **a sűrűséggel arányosan** ($\rho = m/V$ miatt).

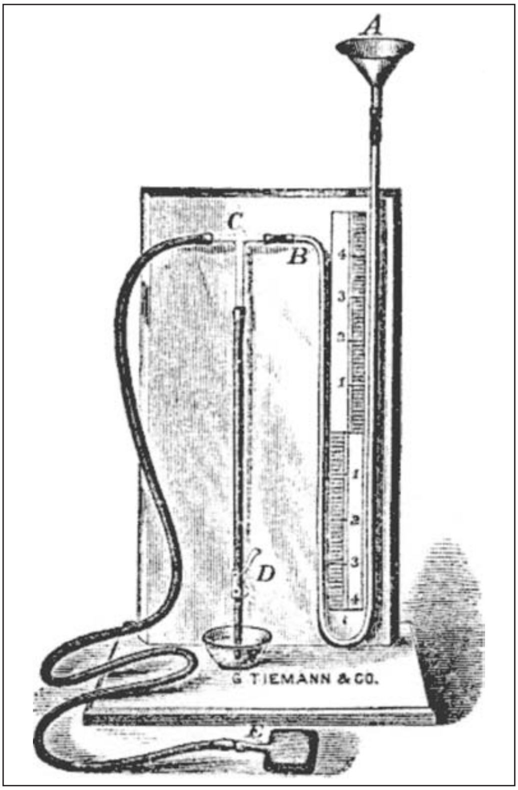
Tehát a légkör teljes tömegének fele 5,5 km alatt, 75%-a (azaz a fele és még a felének az 50%-a) 5,5 · 2=11 km alatt, kb. 99%-a pedig a hétszeres feleződésig bezárólag, 38,5 km magasság alatt (30. ábra) található (x · (100%-(50%)7)= x · (1 – 0,57)= 0,9922).

**Felső éles határa viszont nincs a folyamatosan ritkuló légkörnek.** Addig ritkul folyamatosan, míg Naprendszerünk bolygóközi részecskesűrűség-értékét eléri a részecskesűrűség. Számításokkal megkapható azonban **a közelítő érték,** mely szerint a légkör határa közelítőleg **300–400 km** magasan van.




*27. ábra*

*28. ábra*




*29. ábra*

Eredményünk helyességét támasztja alá az a tény, hogy a **műholdaknak** kb. ilyen magasságban kell repülniük ahhoz, hogy a Föld légköre már ne akadályozza azokat mozgásukban.

### Kémiában való megnyilvánulás: a reakciósebesség hőmérsékletfüggése

A reakciósebességi állandót megadó **Arrhenius-egyenlet a hőmérséklet függvényében exponenciális függést, Boltzmann-eloszlást ad.**

Ha szobahőmérsékletű vízfürőben ($T_1$ = 290 K) összeöntjük **fixírsó vizes oldatát** (nátrium-tioszulfát) **sósavoldattal** (hidrogén-klorid vizes oldata), **kénkiválást** tapasztalunk, oldatunk **megsárgul** *(31. ábra)*. Ha melegebb vízfürdőben végezzük el ugyanezt, sokkal hamarabb besárgul az oldat.

Az exponenciális hőmérsékletfüggés méréssel való alátámasztása az írás harmadik részében szerepel a problémamegoldásos feladatok közt. Javasolt közösen elvégeztetni a mérést, és kiértékelni, értelmezni az eredményeket.

**Még további életszerű példa** az exponenciális hőmérsékletfüggésre, hogy a **fahasáb** néhány óra alatt elég, de évekig korhad, pedig az égési hőmérséklet csak kb. kétszerese az erdő hőmérsékletének.

A kémiai reakciókhoz nem elég találkozniuk a molekuláknak, az is kell, hogy elég nagy energiával ütközzenek, hiszen csak **így lesz megbolygatva a molekulaszerkezet.** Ezt az energiát **aktiválási energiának** nevezzük.

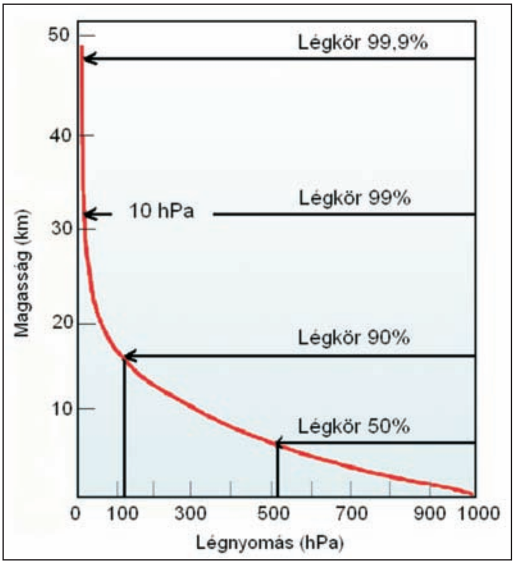
Az előbbi kísérlet és a gyakorlati példa azt mutatja, hogy **a hőmérséklet emelkedésével nagyon erőteljesen megnő a reakció sebessége.** A tapasztalatra magyarázatot a statisztikus fizika ad.

A statisztikus fizika módszere szerint sok molekula rendszertelen viselkedését egyenlő valószínűséggel bekövetkező mikroeloszlások segítségével írjuk le.

### A mindennapokban és a fizikában-kémiában való megnyilvánulás: a víz gőz nyomásának változása a hőmérséklet függvényében

Egy üvegben lévő szénsavas üdítő vagy víz az üvegen belül egyensúlyban van, ha nem változtatjuk meg a rendszer tulajdonságait. Ám ez az egyensúly bizonyos külső hatásokra megváltozik. Gondoljunk utána, mik lehetnek ezek a változások!

Ha a szénsavas üdítőt felrázzuk, az üvegben felborul az addigi egyensúly, nagyobb rendezetlenség jön létre a korábbi állapothoz képest. Ezt úgy „detektáljuk”, hogy látjuk, a kupak levételekor buborékok távoznak a flakonból. Mikor




*30. ábra*


*31. ábra*

visszatesszük a kupakot, egy idő után újra egyensúly fog beállni. A kupak levételekor tapasztaltak elméleti magyarázata az, hogy a flakon kinyitásakor normál nyomású levegő tud áramlani a külső levegőnél nagyobb nyomású $CO_2$-gáz helyére, mely a folyadék felett tartózkodik a felrázás után.

Az előbbinél még érdekesebb jelenség az egyensúlyi gőznyomás hőmérsékletfüggése.

Alkossunk hipotézist arról, mi történik, ha 2 azonos üveg ásványvizet kibontunk, melyek közül egyiket a hűtőbe, míg a másikat korábban a napra helyeztük! Melyikben indul meg nagyobb buborékképződés? A válasz egyértelmű!

A víz forralásakor ez utóbbihoz analóg jelenséget tapasztalunk. Ugyanis a folyadék a kuktában a normál légnyomáson mért 100°C-hoz képest magasabb hőmérsékleten forr. A forrásban már nem lévő víz (étel) hőmérséklete lehet 100°C-nál nagyobb érték a lezárt kukta esetében. Efféle körülmények közt az edény fedele csak nehezen vehető le, de nincs értelme a próbálkozásnak, mert a benne lévő víz (vagy leves) kifutna. Az elméleti magyarázat ugyanaz, mint az előbbi esetben, csak ezúttal nem $CO_2$-gáz törne fel, hanem a víz (vagy a folyékony étel) kezdene az edényből kitörve robbanásszerűen forrni.

Az a fentiekből látható, hogy a víz gőznyomása a hőmérséklettől függ. Alátámasztható, hogy a víz gőznyomásának változása a hőmérséklet függvényében szintén exponenciális változást mutat, Boltzmann-eloszlást követ. Tehát ez szintén jó példa a Boltzmann-eloszlás mindennapi megnyilvánulására. Az állítást alátámasztó mérés kiértékelése a cikksorozat harmadik részében szerepel a problémamegoldások közt.

Írásunk második részében az első részben ajánlott módszer szerinti feldolgozás harmadik, negyedik és ötödik szakaszát mutattuk be.

A jelenségek, jelenségértelmezés szakaszában az atomok eloszlását szemléltettük 2 (biliárd) golyó centrális, tökéletesen rugalmas ütközésének és a biliárdgolyók kezdő lökésének modelljével. A jelenségértelmezés szakaszában a következő 5 lépés szerint haladtunk:

1. lépés: Mindennapi közérthető nyelven megalkotjuk a magyarázatot.
2. lépés: Ugyanerre a jelenségre rámutató másik kísérletet/párhuzamot keresünk.
3. lépés: Analógiát keresünk. Mikor hallhattunk ilyesmiről középszintű fizikaórán? – Brown-mozgás
4. lépés: Elméleti magyarázatot adunk – jelen esetben a statisztikus fizika törvényei alapján. Fő összefüggésünk – a Boltzmann-eloszlás – felírása újra.
5. lépés: Levezetés.

A tananyag feldolgozásának ötödik szakaszában a történetiségnél Boltzmann, Maxwell, Clausius és Bernoulli munkásságáról ejtettünk néhány szót; ezt követően pedig áttértünk a mindennapi életben és a kémiában való megnyilvánulásokra: a barometrikus magasságformulára, az Arrhenius-egyenletre és a víz gőznyomásának hőmérsékletfüggésére. Írásunk harmadik részében az e jelenségekkel kapcsolatos mérési adatok felvételét és kiértékelését mutatjuk be.

Fakultációs órán történt tesztelés alapján elmondható, hogy a fent leírt módszerrel 2 szakaszra bontva eredményes, és a tanulók számára izgalmasabb a jelenségelemzés. Valamint az is kijelenthető, hogy érdeklődést vált ki az ötödik szakasz megvalósítása.

A témakör feldolgozását illető utolsó három szakasz leírása írásunk következő részében szerepel. Ezek a problémamegoldás; szintetizálás; értékelés.

## Irodalom:

[1] Gulyás János – Markovits Tibor – Szalóki Dezső – Varga Antal (1996): *Fizika. Modern fizika.* Calibra Kiadó

[2] Halász Tibor – Jurisits József – Szűcs József (2008): *Fizika 10. osztályosoknak.* MOZAIK Kiadó

[3] Halász Tibor – Jurisits József – Szűcs József (2008): *Fizika 11–12. osztályos közép- és emelt szintű érettségire készülőknek.* MOZAIK Kiadó

[4] Radnóti Katalin – Nahalka István – Wagner Éva – Poór István (2002): *A fizikatanítás pedagógiája.* Nemzeti Tankönyvkiadó

[5] Nagy Mária (2012): *A fizikatanítás pedagógiája: Matematikai eszközök alkalmazása a fizika tanításában. TDK-dolgozat.* Témavezető: Radnóti Katalin

[6] Tóth Eszter (1984): *Fizika IV.* Tankönyvkiadó

**Elektronikus források**

[1] Radnóti Katalin: Projektoktatás. *A konstruktivista pedagógia alapjai.* http://members.iif.hu/rad8012/pedagogia/Projektoktatas-konstruktivizmus.ppt

[2] Radnóti Katalin, Kiss Csilla: *A konstruktivista tanuláselmélet bemutatása a mechanika példáján keresztül* című írás. http://metal.elte.hu/~radkat/menu/kezdo.htm

[3] http://www.kfki.hu/chemonet/hun/teazo/miert/m00/24.html

[4] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/51/Boltzmann-Ludwig.jpg/250px-Boltzmann-Ludwig.jpg

[5] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/57/James_Clerk_Maxwell.png/225px-James_Clerk_Maxwell.png

[6] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/40/Clausius.jpg/220px-Clausius.jpg

[7] http://www.aip.org/history/newsletter/fall2005/images/noaa-hydrodynamica-lg.jpg

[8] http://www.hirextra.hu/data/leadpic/181862.jpg

[9] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/db/Manometer_for_testing_the_pressure1887.gif

[10] http://mkweb.uni-pannon.hu/tudastar/ff/04-levego/images/008.png

[11] (http://www.nyf.hu/others/html/kornyezettud/Kemia-I/Kornykemalapmenu/41abra.jpg)

# HANGSZÓRÓ

Dr. Varga Zsuzsa – Dr. Molnár Miklós

# Szakács Jenő Megyei Fizikaverseny

## 2012/2013. tanév, II. forduló

*Minden versenyzőnek a számára kijelölt **négy** feladatot kell megoldania. A **szakközépiskolásoknak** az **A** vagy a **B** feladatsort kell megoldani a következők szerint:*

**A:** Minden 9. és 10. évfolyamos szakközépiskolai tanuló, és azok a 11–12. (13.) évfolyamos szakközépiskolai tanulók, akik két évig tanulnak fizikát.

**B:** Azok a 11–12. (13.) évfolyamos szakközépiskolai tanulók, akik több, mint két évig tanulnak fizikát.

*A rendelkezésre álló idő **180 perc.** A feladatok megoldásait önállóan kell elkészítenie, függvénytáblázat és számológép használható. Egy feladat teljes és hibátlan megoldása 15 pontot ér. Minden feladatot külön lapon oldjon meg!*

**Jó munkát kívánnak a feladatkitűzők: Molnár Miklós és Varga Zsuzsa!**

<table>
<tr><td colspan="2">A gimnazisták feladatai:</td><td colspan="2">A szakközépiskolások feladatai:</td></tr>
<tr><td>9. osztály</td><td>1, 2, 3, 4.</td><td rowspan="2">A</td><td rowspan="2">1, 3, 5, 6.</td></tr>
<tr><td>10. osztály</td><td>4, 5, 6, 7.</td></tr>
<tr><td>11. osztály</td><td>7, 8, 9, 10.</td><td rowspan="2">B</td><td rowspan="2">4, 6, 8, 9.</td></tr>
<tr><td>12. osztály</td><td>11, 12, 13, 14.</td></tr>
</table>

**1.** Egy kerékpáros szakaszonként egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Megtett útjának első hatodát $36\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nagyságú sebességgel, útjának további kétötödét 6 m/s nagyságú sebességgel, az útjának további négytizenötödét 8 m/s nagyságú sebességgel teszi meg. A hátralevő út nagysága 10 km, amit a kerékpáros az előző utakra számolt átlagsebesség másfélszeresével tesz meg.

*a)* Mennyi idő alatt tette meg a kerékpáros a teljes utat?

*b)* Mennyi a kerékpárosnak a teljes útra vonatkozó átlagsebessége km/h egységekben?

**2.** Motorkerékpár tömege ugyanakkora, mint a rajta ülő emberé. A kerekek és a csúszós úttest között a tapadási súrlódási együttható 0,2, a motoros csizmatalpa és az úttest közötti csúszási súrlódási együttható 0,3. Ha a motoros fékezés közben mindkét lábát leteszi a földre, akkor a fékút 8/9-ed része annak, mintha nem tette volna le a lábát.

*a)* Saját súlyának hány százalékával nyomta lábával a motoros a talajt?

*b)* Hány százalékkal nagyobb a motoros sebessége, ha a lábát letéve az eredeti hosszúságú fékúton áll meg?

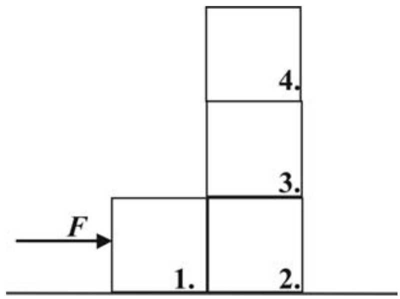
**3.** Vízszintes, súrlódásmentes talajon 0,4 kg tömegű test nyugszik egy függőleges faltól 3 m távolságra. A test másik oldalán a falra merőleges 3 m/s sebességgel 0,2 kg tömegű kis test közeledik a fal felé, és rugalmasan ütközik az első testtel. A nagy test a falnak ütközve, arról rugalmasan visszapattan.

*a)* Mekkora utat tesz meg a kisebb test, amíg újra összeütközik a nagyobb testtel?

*b)* Mennyi idő telik el a testek két ütközése között?

A testeket tekintsük pontszerűnek.

**4.** Négy, egyenként 0,6 kg tömegű testet az ábrának megfelelően rendezünk el, és a rendszert az első testre ható F erővel toljuk a vízszintes talajon. A testek együtt mozognak, a 3. test nem mozdul el a 2. testhez képest, illetve a 4. test nem mozdul el a 3. testhez képest. A legfelső, 4. testre 1,2 N nagyságú tapadási súrlódási erő hat. A talaj és a vele érintkező testek közötti csúszási súrlódási együttható értéke 0,2. $(g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2})$




*a)* Milyen irányú a 4. testre ható tapadási súrlódási erő?

*b)* Mekkora a 2. test gyorsulása?

*c)* Mekkora az F tolóerő nagysága?

*d)* Mekkora és milyen irányú erőt fejt ki a 2. test az 1. testre?

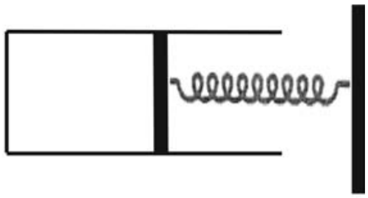
*e)* Mekkora úton mozdult el a rendszer 8 másodperc alatt, ha induláskor a sebesség $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú volt?

**5.** A sűrűségmérésre használt piknométer egy üvegedény, amelynek térfogata 18°C-on igen pontosan definiált. A piknométert most folyadék (térfogati) hőtágulási együtthatójának meghatározására használjuk. Az adott folyadékból a piknométerbe 60°C-on 98,93 g-ot, 90°C-on pedig 97,59 g-ot tölthettünk. Az üveg lineáris hőtágulási együtthatója $10^{-5}\frac{1}{°\text{C}}$.

*a)* Mekkora az adott folyadék térfogati hőtágulási együtthatója?

*b)* Mekkora eltérést okoz a hőtágulási együttható értékében, ha a piknométer hőtágulásától eltekintünk?

**6.** Vízszintes helyzetű, hőszigetelt (rögzített) henger 60 $cm^2$ alapterületű. A hengerben súrlódás nélkül mozogni képes, ugyancsak jó hőszigetelő dugattyú 300 K hőmérsékletű, 112 g tömegű oxigéngázt zár el. A dugattyúhoz egyik végével egy nyújtatlan, $800\frac{N}{m}$ rugóállandójú rugó csatlakozik. A rugó másik vége egy szintén rögzített helyzetű falnak támaszkodik. A hengerbe épített melegítőt egy ideig üzemeltetjük. A rugó ekkor 7,5 cm-t nyomódik össze.



*a)* Hány oxigénmolekula van a hengerben?
*b)* Mekkora erőt fejt ki a rugó a dugattyúra a melegítés befejezésekor?
*c)* Mekkora ekkor a gáz nyomása?
*d)* Mekkora a gáz hőmérséklete a melegítő kikapcsolásakor?
A külső légnyomás értéke $10^5$ Pa.

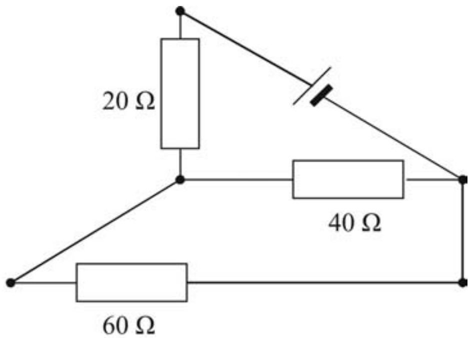
**7.** Homogén elektromos mező térerősség vektora felfelé mutat, nagysága $1000\frac{N}{C}$.

*a)* Mekkora kezdősebességgel indítsuk el függőlegesen felfelé azt a kis golyót, amelynek tömege 10 g, töltése $2 \cdot 10^{-5}$ C, ha azt akarjuk, hogy 10 cm magasságig emelkedjen, aztán essen vissza?
*b)* Milyen magasra emelkedne a golyó, ha nincs töltése, és az a) pontbeli kezdősebességgel indítjuk fölfelé?
*c)* Legföljebb mekkora lehet a golyó tömege, ha azt akarjuk, hogy földobva ne essen vissza? ($g = 10\frac{m}{s^2}$)

**8.** 25 cm hosszúságú, 50 $cm^2$ keresztmetszetű, 1000 menetes egyenes tekercsben az áram 0,1 s alatt egyenletesen 0-ról 10 A erősségűre nő. A tekercs ohmos ellenállása elhanyagolható.

*a)* Mekkora a feszültség a tekercsen?
*b)* Írjuk fel és ábrázoljuk a tekercs teljesítményét az idő függvényében az adott intervallumban!
*c)* Mennyi a tekercs mágneses mezeje által ezen idő alatt felvett energia?

**9.** Egyforma elemekből telepet állítunk össze. A telepet a kapcsolási rajzon feltüntetett hálózatra kötjük.

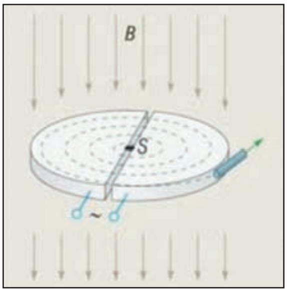



*a)* Mekkora egy elem elektromotoros ereje és belső ellenállása, ha a telepet 5 db sorosan kapcsolt elemből állítottuk össze, és tudjuk, hogy a 20 Ω-os ellenállás teljesítménye 5 W, a telep belső ellenállása pedig a külső ellenállás $\frac{3}{22}$-szerese.
*b)* Mekkora a kapocsfeszültség nagysága?
*c)* Mekkora munkát végez az áram a 20 Ω-os ellenálláson 50 másodperc alatt, ha a telepet az előzőekben felhasznált elemekből párhuzamos kapcsolással készítjük el?

**10.** Az ábra egy részecskegyorsító, a ciklotron sematikus felépítését mutatja. A két fém félhenger (a duánsok) vákuumban és mágneses mezőben vannak, őket egy keskeny légrés választja el. A mágneses mező *B* vektora merőleges a duánsok fedőlapjára, és függőlegesen lefelé mutat. A indukcióvektor nagysága 0,5 T. Az *S* forrásból $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg tömegű, $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C töltésű protonok lépnek ki (jobbról balra). A kilépő protonok sebessége $10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

*a)* Mekkora sugarú körpályán indulnak el a protonok?

*b)* Mekkora a protonok keringési ideje?




*c)* Mikor egy proton a légrés széléhez ér, 6 kV effektív értékű, 7,579 MHz frekvenciájú, nagyfrekvenciás váltakozó feszültséget kapcsolunk a duánsokra úgy, hogy a jobb oldali duáns legyen a negatív. Mekkora a proton sebessége, amikor az a jobb oldali duáns bal oldali széléhez ér?

*d)* Amikor a proton a jobboldali duánsnál a légréshez ér, a feszültség előjelet vált. Mekkora a proton sebessége akkor, amikor a proton ismét a jobb oldali duáns bal oldali széléhez ér?

*e)* Mekkora ekkor a proton mozgási energiája és mekkora a körpálya sugara?

**11.** Egy 4 dioptriás egyszerű nagyítóval egy 1,2 cm átmérőjű kis pénzérmét nézünk. A pénzérmét háromszoros nagyításban látjuk.

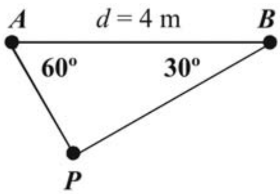
*a)* Mekkora a keletkező kép nagysága?

*b)* Mekkora a lencse fókusztávolsága?

*c)* A lencsétől hány cm-re keletkezik a kép?

*d)* Hová kellett elhelyezni a pénzérmét?

**12.** Két azonos hullámforrás (*A* és *B*) koherens hullámokat bocsát ki. A hullámforrások egymástól mért távolsága 4 m. A hullámok frekvenciája 1700 Hz és 2400 Hz között folyamatosan változtatható. A rajz szerint a *P* pontban egy érzékeny detektort helyezünk el, amely érzékeli a beérkező hullámokat.




*a)* Mekkora abban az esetben a hullámok hullámhossza, ha a *P* pontban erősítést jelez a detektor?

*b)* Mekkora a hullámok hullámhossza abban az esetben, amikor a P pontban gyengítés észlelhető?

A hullámok terjedési sebessége $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**13.** Fotocella segítségével a Planck-állandó értékét szeretnénk meghatározni. A fotocellával párhuzamosan kötünk egy 2 nF-os kondenzátort. Világítsuk meg a fotocellát először 400 nm-es, majd 520 nm-es hullámhosszúságú fénnyel! Első esetben a kondenzátor 1 V feszültségre, a második esetben pedig 0,276 V feszültségre töltődik fel.

*a)* Mekkorának adódik ebből a mérésből a Planck-állandó?

*b)* Mekkora töltésre töltődött fel a kondenzátor az egyik, illetve a második esetben?

*c)* Mekkora a fotókatódra vonatkozó kilépési munka elektrovoltokban kifejezett értéke?

A fény terjedési sebessége $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, az elektron töltése $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

### Megoldások és pontozási útmutató

**1. Adatok:**

$s_1 = \frac{s}{6}$,

$s_2 = \frac{2 \cdot s}{5}$,

$s_3 = \frac{4 \cdot s}{15}$,

$s_4 = 10$ km,

$v_1 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$v_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$v_3 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$v_4 = 1{,}5 \cdot (v_{\text{átl}})_1$

*a)* $t = ?$, *b)* $v_{\text{átl}} = ?$.

**Megoldás:**

*a)* A megtett útra nézve fennáll:

$$\frac{s}{6}+\frac{2\cdot s}{5}+\frac{4\cdot s}{15}+10\text{ km}=$$

$$=\text{s},\quad \frac{5+12+8}{30}\cdot s+10\text{ km}=\text{s},$$

ahonnan $\frac{5}{30}\,s=10$ km, így $s=60$ km.

*1 pont*

Az első útszakasz megtételéhez szükséges idő:

$$t_1=\frac{s_1}{v_1}=\frac{10\text{ km}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}=1000\text{ s}.$$

A második útszakasz megtételéhez szükséges idő:

$$t_2=\frac{s_2}{v_2}=\frac{24\text{ km}}{6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}=4000\text{ s}.$$

A harmadik útszakasz megtételéhez szükséges idő:

$$t_3=\frac{s_3}{v_3}=\frac{16\text{ km}}{8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}=2000\text{ s}.$$

*1+1+1 pont*

Az első három útszakaszra vonatkoztatott átlagsebesség:

$$(v_{\text{átl}})_1=\frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3}=\frac{s_1+s_2+s_3}{\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_2}{v_2}+\frac{s_3}{v_3}}=$$

$$=\frac{50\text{ km}}{\frac{10\text{ km}}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}+\frac{24\text{ km}}{6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}+\frac{16\text{ km}}{8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}=\frac{50}{7}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=7{,}14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

*2 pont*

A negyedik útszakasz megtételéhez szükséges idő:

$$t_4=\frac{s_4}{v_4}=\frac{s_4}{1{,}5\cdot(v_{\text{átl}})_1}=\frac{10\text{ km}}{1{,}5\cdot 7{,}14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}=933{,}7\text{ s}.$$

*3 pont*

A teljes út megtételéhez szükséges idő:

$$t_{\text{össz}}=t_1+t_2+t_3+t_4=7933{,}7\text{ s}.$$

*2 pont*

*b)* A teljes útra vonatkozó átlagsebesség:

$$v_{\acute{a}lt}=\frac{s}{t_{\text{össz}}}=\frac{60\text{ km}}{7933{,}7\text{ s}}=7{,}56\,\frac{\text{m}}{\text{s}}=27{,}22\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

*4 pont*

**2. Adatok:**

A motor és a motoros tömege külön-külön $m$, így összesen $M = 2\text{m}\cdot\mu_1 = 0{,}2$, $\mu_2 = 0{,}3$, fékút lábletevés nélkül $s_1$, lábletevéssel $s_2=\frac{8}{9}\cdot s_1$.

*a)* $\frac{N_2}{mg}=?$ *b)* $\frac{V}{v}=?$ (%)

**Megoldás:**

*a)* A mozgásra a munkatétel írható föl. A kerekeknél fellépő súrlódási erő maximuma $\mu_1 Mg$, a motoros lábánál fellépő csúszási súrlódás $\mu_2 N_2$, ahol $N_2$ a motoros lábától származó erőnek a talaj által a motorra kifejtett ellenereje. Ha a motoros a fékezés előtt $v$ sebességgel haladt, akkor, ha nem fékez a lábával

$$\frac{1}{2}Mv^2=\mu_1 Mgs_1,$$

*2 pont*

ha fékez a lábával is, akkor

$$\frac{1}{2}Mv^2=\mu_1 Mgs_2+\mu_2 N_2 s_2$$

*2 pont*

írható föl. A két egyenlet bal oldala egyenlő, így a jobb oldalak is:

$$\mu_1 Mgs_1=\mu_1 Mgs_2+\mu_2 N_2 s_2=$$

$$=(\mu_1 Mg+\mu_2 N_2\,\frac{8}{9}s_1.$$

*1 pont*

Az egyenletet $s_1$-gyel osztva és átrendezve:

$$\frac{9}{8}\mu_1=\mu_1+\mu_2\frac{N_2}{Mg},\text{ ahonnan }\frac{N_2}{Mg}=\frac{\mu_1}{8\mu_2}.$$

*1 pont*

A kérdés szerinti arány ennek a kétszerese:

$$\frac{N_2}{mg}=\frac{\mu_1}{4\mu_2}=\frac{0{,}2}{4\cdot 0{,}3}=\underline{\underline{16{,}6\%.}}$$

*1 pont*

*b)* A motoros $s_1$ úton áll meg, és a lábával $N_2$ nyomóerőt fejt ki. A munkatétel erre az esetre:

$$\frac{1}{2}MV^2=\mu_1 Mgs_1+\mu_2 N_2 s_1,$$

továbbá az eredeti fékezés szerint

$$\frac{1}{2}Mv^2=\mu_1 Mgs_1$$

*2+2 pont*

A két egyenletet osztva egymással $s_1$ kiesik, így

$$\frac{V^2}{v^2} = \frac{\mu_1 Mg + \mu_2 N_2}{\mu_1 Mg} = \frac{\mu_1 Mg + \mu_2 \dfrac{\mu_1}{8\mu_2} Mg}{\mu_1 Mg} =$$

$$= 1 + \frac{1}{8} = 1{,}125.$$

*2 pont*

A sebességek aránya $\frac{V}{v} = \sqrt{1{,}125} = 1{,}06.$

A motoros tehát, ha lábával is fékez, $\underline{\underline{6\%}}$-kal nagyobb sebességgel haladhat és az eredeti úton meg tud állni.

*2 pont*

**3. Adatok:**

$m$ = 0,2 kg,

$M$ = 0,4 kg = 2 m,

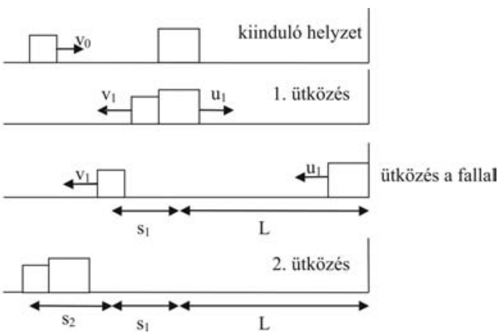
$v_0 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$L$ = 3 m.

*a)* $s_1$ = ?, *b)* $t$ = ?

**Megoldás:**

*a)* Az első ütközéskor a kis test sebessége ütközés után $v_1$, a nagyobbiké $u_1$. A rugalmas ütközésre érvényes a lendület- és az energia-megmaradás törvénye.




$$mv_0 = mv_1 + Mu_1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mu_1^2 \quad (2)$$

*2+2 pont*

Az egyenletrendszert megoldva:

$$u_1 = \frac{2}{3}v_0 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}},\ v_1 = v_0 - 2\mu_1 = -1\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

*1+1 pont*

A nagyobbik test $t_1 = \frac{L}{u_1} = 1{,}5\ \text{s}$

*1 pont*

alatt éri el a falat, amivel pillanatszerűen ütközik, és ugyanakkora sebességgel visszafelé fog haladni.

*1 pont*

Ezalatt a kisebbik test $s_1 = v_1 t_1$ = 1,5 m utat tesz meg.

Mivel a nagyobbik test sebessége nagyobb, mint a kisebbik test sebessége, a nagyobbik test utoléri a kis testet, újra ütközik vele a faltól való ütközéstől számított $t_2$ idő múlva. Ezalatt a kis test $s_2 = v_1 t_2$ utat tesz meg. A második ütközésig megtett utakra fennáll (ld. ábra), hogy $u_1 t^2 = L + s_1 + s_2 = L + s_1 + v_1 t_2$.

*2 pont*

Ebből

$$t_2 = \frac{L + s_1}{u_1 - v_1} = 4{,}5\ \text{s és } s_2 = v_1 t_2 = 4{,}5\ \text{m}.$$

*1 pont*

A kisebbik test útja így összesen a két ütközés között $s_1 + s_2$ = 1,5 m + 4,5 m = $\underline{\underline{6\ \text{m}}}$.

*1 pont*

b) A két ütközés között $t = t_1 + t_2$ = 1,5 s + 4,5 s = $\underline{\underline{6\ \text{s}}}$ idő telt el.

*3 pont*

**4. Adatok:**

$m = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ = 0,6 kg,

$(F_{\text{tap.}})_4$ =1,2 N,

$\mu$ = 0,2,

$g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$v_0 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

*a)* $(F_{\text{tap.}})_4$ iránya?, *b)* $a_2$ =?, *c)* $F$ =?, *d)* $F_{2,1}$ =?, *e)* $s$ =?

**Megoldás:**

A testek egymáshoz képest nem mozognak, így az egész rendszer azonos gyorsulással jobbra mozog.

a) A 4. test is az $F$ erő irányában mozdul el, gyorsul. A 4. test gyorsulását az $(F_{tap.})_4$ tapadási súrlódási erő eredményezi. Tehát a tapadási súrlódási erő balról jobbra mutat.

*2 pont*

*b)* A 4. test gyorsulása

$$a_4 = \frac{(F_{tap.})_4}{m_4} = \frac{(F_{tap.})_4}{m} = \frac{1{,}2\ \text{N}}{0{,}6\ \text{kg}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A rendszer elemei azonos $a$ gyorsulással mozognak, így a második test gyorsulása:

$$a_2 = a_4 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = a.$$

*3 pont*

*c)* Az egyes testekre írjuk fel a dinamika alapegyenletét:

Az 1. testre ható erők esetén:

$$F - (F_s)_1 - F_{1,2} = m \cdot a$$

A 2. testre ható erők esetén:

$$F_{2,1} - (F_s)_2 - (F_{tap}.)_3 = m \cdot a$$

A 3. testre ható erők esetén:

$$(F_{tap}.)_3 - (F_{tap.})_4 = m \cdot a$$

A 4. testre ható erők esetén:

$$(F_{tap}.)_4 = m \cdot a$$

A négy egyenletet összeadva adódik, hogy

$$F - (F_s)_1 - (F_s)_2 = 4 \cdot m \cdot a.$$

A súrlódási erők pedig:

$$(F_s)_1 = \mu \cdot (F_{ny})_1 = \mu \cdot m \cdot g \quad \text{és}$$

$$(F_s)_2 = \mu \cdot (F_{ny})_2 = \mu \cdot 3 \cdot m \cdot g.$$

Így fennáll, hogy

$F - \mu \cdot m \cdot g - \mu \cdot 3 \cdot m \cdot g = 4 \cdot m \cdot a$, ahonnan

$$F = 4 \cdot m \cdot a + 4 \cdot \mu \cdot m \cdot g = 4 \cdot m \cdot (a + \mu \cdot g) =$$

$$= 4 \cdot 0{,}6\ \text{kg} \cdot (2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0{,}2 \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 9{,}6\ \text{N}.$$

*6 pont*

*d)* Az első egyenletből a 2. test által az 1. testre kifejtett erő nagysága:

$$F_{1,2} = F - (F_s)_1 - m \cdot a =$$

$$= 9{,}6\ \text{N} - 0{,}2 \cdot 0{,}6\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0{,}6\ \text{kg} \cdot 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} =$$

$$= 7{,}2\ \text{N}.$$

*2 pont*

Ez az erő jobbról bal felé mutat ($F$ irányával ellentétes).

*e)* Egyenletesen gyorsuló mozgás jön létre, és mivel a gyorsulás nagysága, a kezdősebesség nagysága, a mozgás időtartama ismert, így a megtett út nagysága:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t_2 =$$

$$= 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8\ \text{s} + \frac{2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (8\ \text{s})^2 = 80\,\text{m}.$$

*2 pont*

**5. Adatok:**

$t = 18\ °\text{C}$,

$t_1 = 60\ °\text{C}$,

$m_1 = 98{,}93$ g,

$t_2 = 90\ °\text{C}$,

$m_2 = 97{,}59$ g,

$$\alpha = 10^{-5}\ \frac{1}{°\text{C}}.$$

*a)* $\beta = ?$, *b)* $\Delta\beta = ?$

**Megoldás:**

*a)* Jelöljük a piknométer térfogatát 18°C-on $V$-vel. A piknométer térfogata 60°C-on $V_{60} = V \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta t_1)$, 90°C-on pedig $V_{90} = V \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta t_2)$.

*2 pont*

A piknométerbe öntött folyadék sűrűsége 60°C-on

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_{60}},\ \text{illetve}\ \rho_1 = \frac{\rho_{18}}{1 + \beta \cdot \Delta t_1},$$

*2 pont*

ahol $\rho_{18}$ a folyadék sűrűsége

18°C-on tehát $\dfrac{m_1}{V_{60}} = \dfrac{\rho_{18}}{1 + \beta \cdot \Delta t_1}$.

Így $\dfrac{m_1}{V \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta t_1)} = \dfrac{\rho_{18}}{1 + \beta \cdot \Delta t_1}$.

Hasonlóan 90°C-on $\dfrac{m_2}{V_{60}} = \dfrac{\rho_{18}}{1 + \beta \cdot \Delta t_2}$, és

$$\frac{m_2}{V \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta t_2)} = \frac{\rho_{18}}{1 + \beta \cdot \Delta t_2}.$$

*2 pont*

A két összefüggés osztása után adódik, hogy

$$\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{1+3\cdot\alpha\cdot\Delta t_2}{1+3\cdot\alpha\cdot\Delta t_1}=\frac{1+\beta\cdot\Delta t_2}{1+\beta\cdot\Delta t_1}.$$

*1 pont*

Adatokkal

$$\frac{98{,}93\ \text{g}}{97{,}59\ \text{g}}\cdot\frac{1{,}00216}{1{,}00126}=\frac{1+\beta\cdot 72\ ^\circ\text{C}}{1+\beta\cdot 42\ ^\circ\text{C}}.$$

Innen

$$1{,}01464+42{,}61488\ ^\circ\text{C}\cdot\beta=1+\beta\cdot 72\ ^\circ\text{C},$$

ahonnan

$$\beta=4{,}98\cdot 10^{-4}\ \frac{1}{^\circ\text{C}}.$$

*1 pont*

*b)* Ha az edény térfogat-változásától eltekintünk, akkor a piknométerbe öntött folyadékmennyiségek aránya:

$$\frac{m_1}{m_2}\cdot=\frac{1+\beta\cdot\Delta t_2}{1+\beta\cdot\Delta t_1},\ \text{azaz}$$

$$\frac{98{,}93\ \text{g}}{97{,}59\ \text{g}}=\frac{1+\beta\cdot 72\ ^\circ\text{C}}{1+\beta\cdot 42\ ^\circ\text{C}}.$$

*4 pont*

Innen

$$1{,}01373+42{,}57666\ ^\circ\text{C}\cdot\beta=1+\beta\cdot 72\ ^\circ\text{C},$$

$$\beta=4{,}67\cdot 10^{-4}\ \frac{1}{^\circ\text{C}}.$$

Az eltérés $\Delta\beta=3{,}1\cdot 10^{-5}\ \frac{1}{^\circ\text{C}}$ (~ 6%-os eltérés)

*3 pont*

**6. Adatok:**

$A$ =60 cm$^2$,

$T_1$ = 300 K,

$D=800\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$,

$m$ = 112 g,

$P$ = 100 W,

$\Delta l$ = 7,5 cm,

$M_{O_2}=32\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$,

*a)* $N$ = ?, *b)* $F$ = ?, *c)* $p$ = ?, *d)* $T_2$ = ?

**Megoldás:**

a) Az oxigén moltömege $32\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, azaz a 112 g tömegű oxigén $n=\frac{112\ \text{g}}{32\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}}=3{,}5\ \text{mol}$,

tehát

$$N=3{,}5\ \text{mol}\cdot 6\cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{mol}}=2{,}1\cdot 10^{24}$$

oxigénmolekulát tartalmaz.

*3 pont*

*b)* A rugó által a dugattyúra kifejtett erő a végállapotban

$$F=D\cdot\Delta l=800\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot 0{,}075\ \text{m}=60\ \text{N}.$$

*2 pont*

*c)* A gáz nyomása megegyezik a külső légnyomás és a rugó által létrehozott nyomás összegével:

$$p=p_k+\frac{F}{A}=$$

$$=10^5\ \text{Pa}+\frac{60\ \text{N}}{60\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}=1{,}1\cdot 10^5\ \text{Pa}.$$

*2 pont*

*d)* A gáz kezdeti térfogata:

$$V=\frac{nRT_1}{p_k}=87{,}25\ \text{dm}^3.$$

Az új térfogat: $V_2=V+\Delta V=V+A\cdot\Delta l=$ $=87{,}25$ dm + 0,45 dm$^3$ = 87,7 dm$^3$, továbbá $p_2=1{,}1\cdot 10^5$ Pa.

Az állapotegyenlet a végállapotra: $p_2V_2=\text{nRT}_2$,

ebből $T_2=\frac{p_2V_2}{nR}=\underline{\underline{331{,}6\ \text{K}}}$

*8 pont*

**7. Adatok:**

$E=10^3\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$,

$m$ = 10 g,

$q=2\cdot 10^{-5}$ C,

$h$ = 10 cm = 0,1 m,

$g=10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

*a)* $v$ = ? *b)* $h'$ = ?, *c)* $m$ = ?

**Megoldás:**

*a)* A golyót a gravitációs mező lefelé, az elektromos mező felfelé gyorsítja. Felírva az energiamegmaradást (nulla szintnek a feldobás helyét választva):

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh - Eqh$, ahonnan

$$v = \sqrt{\frac{2h(mg - Eq)}{m}},$$

adatokkal $mg = 10^{-2}\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}1\,\text{N}$,

$$Eq = 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 2 \cdot 10^{-5}\,\text{C} = 0{,}02\,\text{N}.$$

$$v^2 = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}1 - 0{,}02)}{0{,}01}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} =$$

$$= 1{,}6\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}, \text{azaz } v = 126\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

*8 pont*

*b)* Ha a golyónak nincs töltése, egyedül a gravitáció hat rá:

$$h' = \frac{v^2}{2g} = \frac{1{,}6}{20}\,\text{m} = 0{,}08\,\text{m} = 8\,\text{cm}.$$

*3 pont*

*c)* A golyó nem esik vissza, ha az eredő gyorsulása 0 vagy fölfelé mutat, azaz ha $Eq \geq mg$. Ebből a golyó tömegére kapjuk, hogy

$$m \leq \frac{Eq}{g} = \frac{0{,}02}{10}\,\text{kg} = \underline{\underline{2\,\text{g}}}.$$

*4 pont*

**8. Adatok:**

$L$ = 0,25 m,
$A$ = 25 cm$^2$,
$N$ = 1000,
$\Delta t$ = 0,1 s,
$I(0)$ = 0,
$\Delta I$ = 10 A.

*a)* $U_i$ = ? *b)* P(t) = ?, *c)* $W$ = ?

**Megoldás:**

*a)* A tekercsben feszültség indukálódik, ha változik a mágneses fluxus:

$$U_i = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} A$$

*2 pont*

$I$ árammal átjárt tekercs belsejében a mágneses mező nagysága

$B = \mu \frac{IN}{L}$, ennek változása $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \mu_0 \frac{N}{L} \frac{\Delta I}{\Delta t}$.

*2 pont*

Így az indukált feszültség:

$$U_i = \mu_0 \frac{N}{L} \frac{\Delta I}{\Delta t} A =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 10^3 \cdot 10\,\text{A} \cdot 50 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2}{0{,}25\,\text{m} \cdot 0{,}1\,\text{s}} =$$

$$= \underline{\underline{2{,}513\,\text{mV}}}.$$

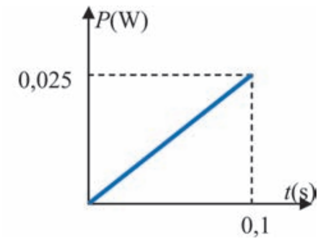
*1 pont*

b) A tekercs teljesítménye $(0 \leq t \leq \Delta t)$ az idő függvényében

P(t) = $U_i \cdot I(t) = U_i \cdot \Delta I \cdot t$ =
=2,513 · $10^{-3}$ · 10 · $t$ [s] W = 0,0251 · $t$ [s] W,

*3 pont*

az idővel lineárisan változik




*c)* Az áram munkája a mágneses mező felépítésére fordítódik, így a $P$(t) grafikon alatti terület megadja a mágneses mezőben tárolt energiát:

$$W = \frac{1}{2} U_i \Delta I \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N \Delta I}{L \Delta t} A \cdot \Delta I \cdot \Delta t =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N \cdot A \cdot (\Delta I)^2}{L},$$

ami megfelel a $W = \frac{1}{2} L_ö I^2$ formulának,

ahol $L_ö = \frac{\mu_0 NA}{L}$ az önindukciós együttható.

Számértékben $W = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0251 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{1{,}25\,\text{mJ}}}.$

*5 pont*

**9. Adatok:**

$n = 5$,

$P_3 = 6$ W,

$$(R_b)_{össz} = R_k \cdot \frac{3}{22},$$

$R_1 = 40\ \Omega$,

$R_2 = 60\ \Omega$,

$R_3 = 20\ \Omega$,

$t = 50$ s.

a) $U_0 = ?$, $R_b = ?$, *b)* $U_k = ?$, *c)* $W_3^* = ?$

**Megoldás:**

*a)* A kapcsolási rajz alapján látható, hogy az $R_1 = 40\ \Omega$ *és* az $R_2 = 60\ \Omega$ nagyságú ellenállások párhuzamosan vannak kötve egymással, míg ezek eredőjével sorosan kötött $R_3 = 20\ \Omega$ nagyságú ellenállás. Így a külső ellenállás nagysága:

$$R_k = R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} =$$

$$= 20\ \Omega + \frac{1}{\frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{60\ \Omega}} = 44\ \Omega.$$

Mivel $(R_b)_{össz} = R_k \cdot \frac{3}{22}$ *és* $n = 5$,

így egy elem belső ellenállása:

$$R_b = \frac{R_k \cdot \frac{3}{22}}{n} = \frac{\frac{3 \cdot 44\ \Omega}{22}}{5} = 1,2\ \Omega.$$

*4 pont*

Az elemek soros kapcsolásánál a telep feszültségének nagysága: $U = n \cdot U_0$, és

$n \cdot U_0 = I \cdot (R_k + n \cdot R_b)$, azaz

$5 \cdot U_0 = I \cdot (44\ \Omega + 6\ \Omega) = I \cdot 50\ \Omega$.

Az $R_3 = 20\ \Omega$-os ellenálláson a teljesítmény nagysága: $P_3 = 5\ \text{W} = I^2 \cdot R_3$, ahonnan

$$I = \sqrt{\frac{P_3}{R_3}} = \sqrt{\frac{5\ \text{W}}{20\Omega}} = 0,5\ \text{A}.$$

Ennek felhasználásával egy elem elektromotoros erejének nagysága:

$$U_0 = \frac{I \cdot 50\ \Omega}{5} = \frac{0,5\ \text{A} \cdot 50\ \Omega}{5} = 5\ \text{V}.$$

*4 pont*

*b)* A kapocsfeszültség értéke:

$U_k = I \cdot R_k = 0,5\text{A} \cdot 44\ \Omega = 22$ V.

*2 pont*

(A belső feszültségesés nagysága:

$$U_b = I \cdot (R_b)_{össz} = 0,5\ \text{A} \cdot \frac{44\ \Omega}{\frac{22}{3}} = 3\ \text{V},$$

a telep feszültsége: $U = n \cdot U_0 = 5 \cdot 5\ \text{V} = 25$ V).

*c)* Az elemek párhuzamos kapcsolásakor a telep feszültsége $U = U_0 = 5$ V, a telep belső ellenállása pedig

$$(R_b)_{össz} = \frac{R_b}{5} = \frac{1,2\ \Omega}{5} = 0,24\ \Omega.$$

*2 pont*

Az $R_3 = 20\ \Omega$-os ellenálláson átmenő áram erőssége:

$$I = \frac{U}{R_k + (R_b)_{össz}} = \frac{5\ \text{V}}{44\ \Omega + 0,24\ \Omega} =$$

$$= 0,113\ \text{A} \approx 0,11\ \text{A}.$$

*2 pont*

Az áram munkája:

$$W_3^* = I^2 \cdot R_3 \cdot t = (0,11\ \text{A})^2 \cdot 20\ \Omega \cdot 50\ \text{s} = 12,1\ \text{J}.$$

*1 pont*

**10. Adatok:**

$B = 0,5$ T,

$m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg,

$Q = 1,6 \cdot 10^{-19}$C,

$v_0 = 10^6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$U = 6$ kV,

$f = 7,579$ MHz

*a)* $R_0 = ?$, *b)* $T = ?$, *c)* $v_1 = ?$, *d)* $v_3 = ?$,

*e)* $E_{mozg.} = ?$ és $R_3 = ?$.

**Megoldás:**

*a)* A protonokra ható Lorentz-erő miatt a protonok körpályán mozognak, és a dinamika alapegyenlete alapján:

$$Q \cdot v_0 \cdot B = \frac{m \cdot v_0^2}{R},$$

mivel a mágneses mező indukcióvektora és a protonok sebességvektora egymásra merőlegesek. Innen

$$Q \cdot B = \frac{m \cdot v_0}{R} \qquad (1)$$

és a körpálya sugara

$$R_0 = \frac{m \cdot v_0}{Q \cdot B} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}5\,\mathrm{T}} = 0{,}021\,\mathrm{m}.$$

*3 pont*

*b)* A sebességre nézve fennáll, hogy

$v_0 = R_0 \cdot \omega = R_0 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}$, amiből a keringési idő:

$$T = \frac{2 \cdot R_0 \cdot \pi}{v_0} = \frac{0{,}021\,\mathrm{m} \cdot 2 \cdot \pi}{10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1{,}319 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$$

(a frekvencia: $f = \frac{1}{\mathrm{T}} = 7{,}579 \cdot 10^6\,\mathrm{Hz} =$

$= 7{,}579\,\mathrm{MHz}$).

*3 pont*

Másképpen (1) alapján

$$\omega = \frac{v_0}{R_0} = \frac{Q \cdot B}{m},$$

így *a frekvencia és a keringési idő független a körpálya sugarától!* Figyeljük meg, hogy a gyorsító feszültség frekvenciája is éppen 7,579 MHz, így a feszültség mindig pont megfelelő pillanatban vált előjelet.

*c)* A légrésben kialakuló elektromos mező munkája gyorsítja a protont, és fennáll, hogy

$$e \cdot U = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2,$$

ahonnan a keresett sebesség:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m} + v_0^2} =$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 6000\,\mathrm{V}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} + \left(10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} =$$

$$= 1{,}466 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

*3 pont*

*d)* Az előzőek alapján kaphatjuk a légréseken való újabb áthaladások után az újabb sebességeket:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m} + v_1^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 6000\,\mathrm{V}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} + \left(1{,}466 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} =$$

$$= 1{,}816 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \text{ és}$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m} + v_2^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 6000\,\mathrm{V}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} + \left(1{,}816 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} =$$

$$= 2{,}109 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

*2 pont*

*e)* A proton mozgási energiája:

$$E_{\mathrm{mozg}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_3^2 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(2{,}109 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 =$$

$= 3{,}714 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$, a körpálya sugara:

$$R_3 = \frac{m \cdot v_0}{Q \cdot B} =$$

$$= \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}109 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}5\,\mathrm{T}} = 0{,}044\,\mathrm{m}.$$

*4 pont*

**11. Adatok:**

$D = 4\,\frac{1}{\mathrm{m}} = 0{,}25\,\mathrm{m}$,

$T = 0{,}8\,\mathrm{cm}$,

$|N| = 3$.

*a)* $K = ?$, *b)* $f = ?$, c) $|k| = ?$ *d)* $t = ?$

**Megoldás:**

*a)* A nagyítás definíciója alapján:

$$3 = |N| = \frac{K}{T} = \frac{K}{1{,}2\,\mathrm{cm}},$$

ahonnan a kép nagysága: K = 3 × 1,2 cm = 3,6 cm.

*2 pont*

*b)* A lencse fókusztávolsága:

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{4\,\frac{1}{\text{m}}} = 0{,}25\,\text{m} = 25\ \text{cm}.$$

*2 pont*

*c)* A kép a lencse tárgy felőli oldalán keletkezik, így a kép látszólagos és így a nagyításra nézve fennáll:

$N = \frac{|k|}{t} = \frac{-k}{t} = 3$, azaz a $k$ képtávolság negatív.

A $t$ tárgytávolság: $t = \frac{-k}{3}$.

*3 pont*

A leképezési törvény alapján:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$, tehát $\frac{1}{25\ \text{cm}} = \frac{1}{\frac{-k}{3}} + \frac{1}{k}$, azaz

$\frac{1}{25\ \text{cm}} = \frac{3}{-k} + \frac{1}{k}$, ahonnan

$$k = 25\ \text{cm} \cdot (-3+1) = -50\ \text{cm}.$$

*4 pont*

*d)* A tárgytávolság nagysága:

$$t = \frac{-k}{3} = \frac{-(-50\ \text{cm})}{3} = 16{,}67\,\text{cm}.$$

*4 pont*

**12. Adatok:**

$d = 4$ m,

$\alpha = 60°$,

$\beta = 30°$,

$1700\ \text{Hz} \le f \le 2400\ \text{Hz}$,

$c = 340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

*a)* $\lambda_{\text{erősítés}} = ?$, *b)* $\lambda_{\text{gyengítés}} = ?$.

**Megoldás:**

*a)* A hullámok útkülönbsége:

$$\Delta s = \overline{BP} - \overline{AP} = d \cdot \cos 30° - d \cdot \cos 60° =$$
$$= 4\,\text{m} \cdot (0{,}866 - 0{,}5) = 1{,}464\,\text{m}.$$

A $P$ pontbeli erősítés feltétele:

$\Delta s = 2 \cdot k \cdot \frac{\lambda}{2}$, ahol $k$ egész szám.

Határozzuk meg $k$ értékét a határfrekvenciák esetén! Ekkor:

$\Delta s = 2 \cdot k_1 \cdot \frac{\lambda_1}{2} = k_1 \cdot \frac{c}{f_1}$, illetve

$$\Delta s = 2 \cdot k_2 \cdot \frac{\lambda_2}{2} = k_2 \cdot \frac{c}{f_2}.$$

Ezekből az összefüggésekből

$k_1 = \frac{\Delta s \cdot f_1}{c} = \frac{1{,}464\ \text{m} \cdot 1700\,\text{Hz}}{340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 7{,}32$ *és*

$$k_2 = \frac{\Delta s \cdot f_2}{c} = \frac{1{,}464\ \text{m} \cdot 2400\,\text{Hz}}{340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 10{,}33.$$

Mivel $k_1$ és $k_2$ is csak egész szám lehet, ezért a lehetséges értékek: $k_1 = 8$ és $k_2 = 10$.

A keresett hullámhosszak:

$$(\lambda_{\text{erősítés}})_1 = \frac{\Delta s}{k_1} = \frac{1{,}464\ \text{m}}{8} = 0{,}183\,\text{m}$$

(a frekvencia: $f_1 = 1857{,}9$ Hz), illetve

$$(\lambda_{\text{erősítés}})_2 = \frac{\Delta s}{k_2} = \frac{1{,}464\ \text{m}}{10} = 0{,}1464\,\text{m}$$

(a frekvencia: $f_2 = 2322{,}4$ Hz). *8 pont*

Ha csak egy hullámhosszat talál meg, 6 pont.

*b)* A $P$ pontbeli gyengítés feltétele:

$\Delta s = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$, ahol $k$ egész szám.

Határozzuk meg $k$ értékét a határfrekvenciák esetén! Ekkor:

$\Delta s = (2 \cdot k_1 + 1) \cdot \frac{\lambda_1}{2} = (2 \cdot k_1 + 1) \cdot \frac{c}{2 \cdot f_1}$, illetve

$$\Delta s = (2 \cdot k_2 + 1) \cdot \frac{\lambda_2}{2} = (2 \cdot k_2 + 1) \cdot \frac{c}{2 \cdot f_2}.$$

Ezekből az összefüggésekből

$$k_1 = \frac{\frac{2 \cdot \Delta s \cdot f_1}{c} - 1}{2} =$$

$= \frac{\frac{2 \cdot 1{,}464\ \text{m} \cdot 1700\,\text{Hz}}{340\ \text{m}} - 1}{2} = 6{,}82$ *és*

$$k_2 = \frac{\frac{2 \cdot \Delta s \cdot f_2}{c} - 1}{2} =$$

$$= \frac{\frac{2 \cdot 1{,}464\ \text{m} \cdot 2400\,\text{Hz}}{340\ \text{m}} - 1}{2} = 9{,}83.$$

Mivel $k_1$ és $k_2$ is csak egész szám lehet, ezért a lehetséges értékek: $k_1 = 7$ és $k_2 = 9$, de megfelel a $k_3 = 8$ is.

A keresett hullámhosszak:

$$(\lambda_{\text{gyengítés}})_1 = \frac{2 \cdot \Delta s}{2 \cdot k_1 + 1} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1{,}464\,\text{m}}{2 \cdot 7 + 1} = 0{,}1952\,\text{m},$$

$$(\lambda_{\text{gyengítés}})_2 = \frac{2 \cdot \Delta s}{2 \cdot k_{21} + 1} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1{,}464\,\text{m}}{2 \cdot 9 + 1} = 0{,}1541\,\text{m},$$

$$(\lambda_{\text{gyengítés}})_3 \frac{2 \cdot \Delta s}{2 \cdot k_3 + 1} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1{,}464\ \text{m}}{2 \cdot 8 + 1} = 0{,}1722\,\text{m}.$$

(Ezekhez a hullámhosszakhoz tartozó frekvencia-értékek:
$f_1 = 1741$ Hz, $f_2 = 2206$ Hz, $f_3 = 1974$ Hz.)

*7 pont*

Ha csak egy hullámhosszat talál meg: 5 pont.

**13. Adatok:**

$\lambda_1 = 400$ nm $= 4 \cdot 10^{-7}$ m,
$\lambda_2 = 520$ nm $= 5{,}2 \cdot 10^{-7}$ m,
$U_1 = 1$ V,
$U_2 = 0{,}276$ V,
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C,
$C = 2$ nF $= 2 \cdot 10^{-9}$ F.

*a)* $h$ =?, *b)* $Q_1$ = ?, $Q_2$ =?, *c)* $W_{\text{ki}}$ = ? (eV).

**Megoldás:**

*a)* A fényelektromos egyenlet szerint fennáll, hogy

$$h \cdot \frac{c}{\lambda_1} = W_{ki} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \text{ és}$$

$$h \cdot \frac{c}{\lambda_2} = W_{ki} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2.$$

A kondenzátor addig töltődik, amíg a kondenzátor elektromos mezőjének ellentere le nem fékezi az elektronokat.

Így $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = eU_1$ és $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = eU_2$.

Ezekből az összefüggésekből:

$$h \cdot \frac{c}{\lambda_1} = W_{ki} + e \cdot U_1 \text{ és } h \cdot \frac{c}{\lambda_2} = W_{ki} + e \cdot U_2.$$

A két összefüggést egymásból kivonva adódik:

$$h \cdot \frac{c}{\lambda_1} - h \cdot \frac{c}{\lambda_2} = e \cdot U_1 - eU_2,$$

amiből a Planck-állandó értéke:

$$h = \frac{e \cdot (U_1 - U_2)}{c(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})} =$$

$$= \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot (1\ \text{V} - 0{,}276\ \text{V})}{3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (\frac{1}{4 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} - \frac{1}{5{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}})} =$$

$$= 6{,}69 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}.$$

*6 pont*

*b)* A kondenzátor töltése az első esetben:
$Q_1 = C \cdot U_1 = 2 \cdot 10^{-9}$ F $\cdot$ 1 V $= 2 \cdot 10^{-9}$ C,
a második esetben pedig
$Q_2 = C \cdot U_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ F $\cdot$ 0,276 V $= 0{,}552 \cdot 10^{-9}$ C

*2 pont*

*c)* A kilépési munka értéke:

$$h \cdot \frac{c}{\lambda_1} = W_{ki} + e \cdot U_1,$$

felhasználva, hogy 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ J:

$$W_{ki} = h \cdot \frac{c}{\lambda_1} - e \cdot U_1 = 6{,}69 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot$$

$$\cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{400 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1\text{V} =$$

$$= 3{,}4175 \cdot 10^{-19}\text{J} = 2{,}136\ \text{eV}$$

vagy a másik érték-párból

$$W_{ki} = h \cdot \frac{c}{\lambda_2} - e \cdot U_2 = 6{,}69 \cdot 10^{-34}\text{J} \cdot$$

$$\cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{520 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 0{,}276\,\text{V} =$$

$$= 3{,}418 \cdot 10^{-19}\ \ \text{J} = 2{,}136\ \text{eV}$$

*7 pont*