



KÖZÉPSZINT

Németh Sarolta

# 100 lépés az érettségihez

Rendszerező feladatsorok megoldásokkal

## MATEMATIKA

Németh Sarolta

# 100 lépés az érettségihez

Rendszerező feladatsorok megoldásokkal

## MATEMATIKA

KÖZÉPSZINT

2., javított kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019



# TARTALOMJEGYZÉK

Bevezető .....	5
A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések .....	12

## ***Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok***

MEGOLDÁS

1. Halmazok megadása .....	14	116
2. Halmazműveletek .....	15	116
3. Halmazok elemszáma .....	16	117
4. Logikai műveletek .....	17	118
5. Sorba rendezések .....	18	119
6. Kiválasztások sorba rendezés nélkül .....	19	120
7. Kiválasztás sorba rendezéssel .....	20	120
8. Vegyes kombinatorikai feladatok .....	21	121
9. Gráfok .....	22	122
10. Összefoglaló feladatsor <i>Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok</i> .....	23	123

## ***Számelmélet, algebra***

11. Alapműveletek .....	25	125
12. Oszthatósági alapfogalmak .....	26	125
13. Oszthatósági szabályok .....	26	126
14. Számrendszerek, számok normál alakja .....	27	126
15. Valós számok .....	28	127
16. Hatványozás .....	29	128
17. Gyökvonás .....	30	128
18. Logaritmus .....	31	130
19. Algebrai kifejezések .....	32	130
20. Arányosság .....	33	131
21. Százalékszámítás .....	34	132
22. Összefoglaló feladatsor <i>Számelmélet, hatvány, gyök, logaritmus, arányosság, százalékszámítás</i> .....	34	132
23. Elsőfokú egyenletek .....	36	134
24. Elsőfokú egyenlőtlenségek .....	37	135
25. Elsőfokú egyenletrendszerek .....	37	137



<b>26.</b> Másodfokú egyenletek .....	<b>38</b> .....	139
<b>27.</b> Másodfokú egyenlőtlenségek .....	<b>39</b> .....	140
<b>28.</b> Másodfokú egyenletrendszerek, magasabb fokú egyenletek .....	<b>40</b> .....	142
<b>29.</b> Gyökös egyenletek .....	<b>41</b> .....	144
<b>30.</b> Abszolút értékű egyenletek .....	<b>41</b> .....	146
<b>31.</b> Exponenciális egyenletek .....	<b>42</b> .....	147
<b>32.</b> Logaritmusos egyenletek .....	<b>43</b> .....	149
<b>33.</b> Szöveges feladatok I. ....	<b>43</b> .....	151
<b>34.</b> Szöveges feladatok II. ....	<b>44</b> .....	152
<b>35.</b> Összefoglaló feladatsor <i>Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek</i> .....	<b>45</b> .....	153
<b>36.</b> Ismétlő feladatsor I. <i>Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok, algebra és számelmélet</i> .....	<b>47</b> .....	155

## Valószínűség-számítás, statisztika

<b>37.</b> Klasszikus valószínűség .....	<b>49</b> .....	158
<b>38.</b> Oszthatósággal kapcsolatos feladatok .....	<b>50</b> .....	159
<b>39.</b> Érme- és kockadobással kapcsolatos feladatok .....	<b>51</b> .....	160
<b>40.</b> Visszatevés nélküli mintavétel .....	<b>52</b> .....	162
<b>41.</b> Visszatevéses mintavétel .....	<b>53</b> .....	164
<b>42.</b> Vegyes feladatok .....	<b>54</b> .....	165
<b>43.</b> Adathalmaz rendezése, feldolgozása .....	<b>55</b> .....	166
<b>44.</b> Diagramok .....	<b>56</b> .....	167
<b>45.</b> Középértékek .....	<b>58</b> .....	169
<b>46.</b> Szórás, ismert átlagú adathalmazok egyesítésének átlagai .....	<b>59</b> .....	170
<b>47.</b> Összetett statisztikai feladatok .....	<b>60</b> .....	172
<b>48.</b> Összefoglaló feladatsor <i>Valószínűség-számítás, statisztika</i> .....	<b>62</b> .....	174

## Függvények

<b>49.</b> Függvények jellemzése grafikonból, helyettesítési érték számolása, $f(x) = c$ -ből $x$ meghatározása .....	<b>64</b> .....	177
<b>50.</b> Lineáris függvény ábrázolása, jellemzése .....	<b>66</b> .....	177
<b>51.</b> Másodfokú függvény ábrázolása, transzformálása, jellemzése .....	<b>67</b> .....	178
<b>52.</b> Abszolútérték-függvény ábrázolása, transzformálása, jellemzése .....	<b>68</b> .....	179



<b>53.</b> Harmadfokú, négyzetgyök-, racionális törtfüggvény ábrázolása, transzformálása, jellemzése .....	<b>69</b> .....	<b>180</b>
<b>54.</b> Exponenciális, logaritmusfüggvény ábrázolása, transzformálása, jellemzése .....	<b>70</b> .....	<b>181</b>
<b>55.</b> Szöveges feladatok függvényekre .....	<b>71</b> .....	<b>182</b>
<b>56.</b> Számsorozat .....	<b>73</b> .....	<b>184</b>
<b>57.</b> Számítási sorozat .....	<b>74</b> .....	<b>184</b>
<b>58.</b> Mértani sorozat .....	<b>74</b> .....	<b>186</b>
<b>59.</b> Vegyes feladatok számítási és mértani sorozatokra .....	<b>75</b> .....	<b>187</b>
<b>60.</b> Mértani sorozatok szöveges feladatokban .....	<b>76</b> .....	<b>189</b>
<b>61.</b> Kamatos kamat .....	<b>77</b> .....	<b>190</b>
<b>62.</b> Összefoglaló feladatsor <i>Függvények, sorozatok</i> .....	<b>78</b> .....	<b>191</b>
<b>63.</b> Ismétlő feladatsor II. <i>Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok, algebra és számelmélet, függvények</i> .....	<b>80</b> .....	<b>193</b>

## **Geometria, koordináta-geometria, trigonometria**

<b>64.</b> Tételek, szögek, távolságok .....	<b>82</b> .....	<b>196</b>
<b>65.</b> Egybevágóság .....	<b>83</b> .....	<b>196</b>
<b>66.</b> Hasonlóság .....	<b>84</b> .....	<b>197</b>
<b>67.</b> Háromszögek .....	<b>85</b> .....	<b>197</b>
<b>68.</b> A háromszögek nevezetes vonalai, pontjai, körei .....	<b>86</b> .....	<b>198</b>
<b>69.</b> A derékszögű háromszög tételei .....	<b>87</b> .....	<b>199</b>
<b>70.</b> Négyszögek I. ....	<b>88</b> .....	<b>200</b>
<b>71.</b> Négyszögek II. ....	<b>89</b> .....	<b>201</b>
<b>72.</b> Sokszögek .....	<b>89</b> .....	<b>202</b>
<b>73.</b> A kör és részei .....	<b>90</b> .....	<b>203</b>
<b>74.</b> A középponti szög, a szög ívmértéke .....	<b>91</b> .....	<b>204</b>
<b>75.</b> A testek csoportosítása .....	<b>91</b> .....	<b>206</b>
<b>76.</b> Összefoglaló feladatsor <i>Elemi geometria, geometriai transzformációk, síkidomok és tulajdonságaik</i> .....	<b>92</b> .....	<b>206</b>
<b>77.</b> Vektorok .....	<b>93</b> .....	<b>208</b>
<b>78.</b> Vektorok a koordináta-rendszerben .....	<b>93</b> .....	<b>208</b>



<b>79.</b> Szögfüggvények a derékszögű háromszögben .....	<b>94</b> .....	<b>209</b>
<b>80.</b> A szögfüggvények általánosítása, a nevezetes szögek szögfüggvényei .....	<b>95</b> .....	<b>210</b>
<b>81.</b> Trigonometrikus függvények .....	<b>95</b> .....	<b>211</b>
<b>82.</b> Trigonometrikus egyenletek .....	<b>96</b> .....	<b>211</b>
<b>83.</b> Szinusztétel, koszinusztétel .....	<b>97</b> .....	<b>212</b>
<b>84.</b> Vegyes feladatok szögfüggvények alkalmazására .....	<b>97</b> .....	<b>215</b>
<b>85.</b> Pontok, vektorok .....	<b>98</b> .....	<b>217</b>
<b>86.</b> Egyenes .....	<b>99</b> .....	<b>218</b>
<b>87.</b> A háromszög nevezetes vonalainak egyenlete .....	<b>100</b> .....	<b>219</b>
<b>88.</b> A kör egyenlete .....	<b>100</b> .....	<b>221</b>
<b>89.</b> Összefoglaló feladatsor <i>Vektorok, trigonometria, koordináta-geometria</i> .....	<b>101</b> .....	<b>223</b>
<b>90.</b> Síkidomok kerülete, területe I. ....	<b>102</b> .....	<b>225</b>
<b>91.</b> Síkidomok kerülete, területe II. ....	<b>102</b> .....	<b>226</b>
<b>92.</b> Kocka, téglatest .....	<b>103</b> .....	<b>228</b>
<b>93.</b> Hasáb, forgáshenger .....	<b>104</b> .....	<b>229</b>
<b>94.</b> Gömb .....	<b>104</b> .....	<b>229</b>
<b>95.</b> Forgáskúp, csonka kúp .....	<b>105</b> .....	<b>231</b>
<b>96.</b> Gúla, csonka gúla .....	<b>106</b> .....	<b>233</b>
<b>97.</b> Vegyes feladatok testek felszínére, térfogatára .....	<b>107</b> .....	<b>235</b>
<b>98.</b> Összefoglaló feladatsor <i>Geometria, koordináta-geometria, trigonometria</i> .....	<b>108</b> .....	<b>237</b>
<b>99.</b> Ismétlő feladatsor III. <i>Síkgeometria, trigonometria, koordináta-geometria, térgeometria</i> .....	<b>109</b> .....	<b>239</b>
<b>100.</b> Próbaérettségi feladatsor .....	<b>111</b> .....	<b>243</b>

# Feladatok

- *Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok* 14
- *Számelmélet, algebra* 25
- *Valószínűség-számítás, statisztika* 49
- *Függvények* 64
- *Geometria, koordináta-geometria, trigonometria* 82
- *Próbaérettségi feladatsor* 111



## Számtani sorozat

Megoldás → 184. o. 0 5 7

*differencia (különbség), a sorozat  $n$ -edik tagja:  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ , az első  $n$  elem összege:*

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n, \text{ a képletekből } a_n, a_1, d, n, S_n \text{ meghatározása}$$

- 449** Egy számtani sorozat első eleme 8, differenciája 3. Határozza meg a sorozat 10. elemét és az első 10 tag összegét!
- 450** Egy számtani sorozat első eleme  $-4$ , tizenegyedik eleme 11. Mekkora a sorozat differenciája? Számolja ki az első 8 tag összegét!
- 451** Egy számtani sorozat hetedik tagja 9, tizennegyedik tagja  $-19$ . Számolja ki a sorozat első elemét és differenciáját, valamint az első 10 tag összegét!
- 452** Egy számtani sorozat első eleme  $-13$ , differenciája 7, az első  $n$  elem összege 540. Határozza meg  $n$  értékét!
- 453** Egy számtani sorozat hetedik eleme 9, nyolcadik eleme 13. Eleme-e ennek a sorozatnak 1301? Ha igen, adja meg, hogy hányadik eleme! Válaszát számolással indokolja!
- 454** Ádám angol szavakat tanul. Ma megtanult 10 szót és azt tervezi, hogy mostantól mindennap 2 szóval többet tanul majd meg, mint az előző napon.  
a) Hány szót tanul meg a 15. napon?  
b) Hány szót tanul meg összesen ebben a hónapban (30 nap alatt)?
- 455** A könyvesboltban minden polcon ugyanannyival több *Felvételi tájékoztató* van, mint az alatta levőn. A második és a nyolcadik polcon összesen 38 könyv van, a kilencedik polcra 24-gyel több könyvet tettek, mint a harmadikra. Hány tájékoztató van az első polcon, illetve a hetedik polcon?
- 456** A vizes világbajnokság egyik úszódöntőjén az első sorban 150 néző ült, és minden további sorban 5-tel többen ültek, mint az előtte lévőben. Minden sor 18 cm-rel magasabban volt, mint a megelőző. Tudjuk még, hogy az utolsó sorban ülők 5,22 m-rel voltak magasabban, mint azok, akik az elsőben ültek. Hányan voltak ezen az úszódöntőn?

## Mértani sorozat

Megoldás → 186. o. 0 5 8

*kvóciens (hányados), a sorozat  $n$ -edik tagja:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , az első  $n$  elem összege:*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ ha } q \neq 1; S_n = a_1 \cdot n, \text{ ha } q = 1, \text{ a képletekből } a_n, a_1, q, n, S_n \text{ meghatározása}$$

- 457** Egy mértani sorozat első eleme 2, hányadosa 3. Határozza meg a sorozat 5. elemét és az első 7 tag összegét!
- 458** Egy mértani sorozat első eleme  $-4$ , hetedik eleme  $-256$ .  
a) Mekkora a sorozat hányadosa? b) Számolja ki az első 10 tag összegét!
- 459** Egy mértani sorozat hetedik tagja 9, tizennegyedik tagja szintén 9. Számolja ki a sorozat első elemét és hányadosát, valamint az első 100 tag összegét!





- 460** Egy mértani sorozat első eleme  $-1$ , hányadosa  $2$ , az első  $n$  elem összege  $-8\,388\,607$ . Határozza meg  $n$  értékét!
- 461** Egy mértani sorozat negyedik eleme  $40$ , ötödik eleme  $80$ . Eleme-e ennek a sorozatnak  $2560$ ? Ha igen, adja meg, hogy hányadik eleme! Válaszát számolással indokolja!
- 462** Iktasson be  $-10$  és  $320$  közé négy számot úgy, hogy egy mértani sorozat szomszédos elemeit kapja! Határozza meg a mértani sorozat hányadosát!
- 463** Dani sérülése után újból edzeni kezd. Ma  $3$  perccel kezdi az edzést és úgy tervezi, hogy egy héten keresztül mindennap kétszeresére növeli az edzéssel töltött időt.
- Hány percet edz a  $7$ . napon?
  - Hány órát edz összesen ezen a héten?
- 464** Egy hatalmas trópusi tavon a tavirózsák gyorsan szaporodnak, az általuk befedett terület minden héten az előző hetinek  $1,2$ -szeresére nő. Megfigyelésünk első hetében  $2\text{ m}^2$  volt a tavirózsák által befedett terület.
- Mekkora területet takarnak be a tavirózsák a  $8$ . héten?
  - Hányadik héten éri el a tavirózsával befedett terület a  $2300\text{ m}^2$ -t?

## Vegyes feladatok számtani és mértani sorozatokra

Megoldás  $\rightarrow$  187. o.

0 5 9

*a sorozatok modelljeinek felismerése, alkalmazása; számtani sorozatból mértani, illetve mértani sorozatból számtani sorozat*

- 465** Mekkora az  $1848$ -nál kisebb, hárommal osztva  $2$  maradékot adó pozitív egész számok összege?
- 466** Egy tanév alatt összesen  $2178$  matematikapéldát oldott meg Dotti, az első héten  $8$ , minden következő héten  $3$ -mal több feladatot, mint az előzőn. Hány példát oldott meg az utolsó héten Dotti? Hány hétig foglalkozott ebben a tanévben Dotti a matematikafeladatokkal?
- 467** Két testvér két hétig perselybe teszi a nyári munkával megkeresett pénzét. Kati mindennap  $100$  forinttal többet tesz a perselybe, mint az előző napon, Kitti naponta megduplázza a perselybe dobott pénz értékét. Kati a tizenegyedik napon  $2900$  Ft-ot, Kitti az első napon  $5$  forintot dob a perselybe.
- Mennyi pénzt gyűjtenek össze  $2$  hét ( $14$  nap) alatt külön-külön?
  - Hányadik napon lesz Kati perselybeli pénze legalább  $30\,000$  Ft?
  - Hányadik napon éri el Kitti perselybeli pénze a  $20\,000$  Ft-ot?
- 468** Határozza meg azt a háromjegyű számot, amelyről a következőket tudjuk:
- számjegyeinek összege  $15$
  - számjegyei egy növekvő számtani sorozat egymást követő elemei
  - ha a tízesek helyén álló számjegyet  $1$ -gyel csökkentjük, akkor a kapott háromjegyű szám számjegyei egy mértani sorozat egymást követő elemei.





- 469** Helgának egymás utáni három napon összesen 6 új ismerőse lett egy közösségi oldalon, az egymás utáni napokon szerzett ismerősök száma egy számtani sorozat első három tagjának felel meg. Ha az első napon 5-tel, a második napon 2-vel, a harmadik napon 1-gyel több ismerőse lett volna, akkor a naponta szerzett ismerősök száma egy mértani sorozat három szomszédos eleme lenne. Melyik ez a mértani sorozat?
- 470** Egy háromszög oldalai egy mértani sorozat egymást követő elemei. Ha a legrövidebb oldalt 3 cm-rel, a középső oldalt 4 cm-rel, a leghosszabb oldalt pedig 6 cm-rel csökkentjük, akkor egy olyan 24 cm területű háromszög oldalait kapjuk, amelyek egy számtani sorozat egymást követő elemei. Mekkora a háromszögek oldalai?
- 471** Három szám egy számtani sorozat első három eleme. Közülük a legnagyobb és a legkisebb összege 20. Ha az első számhoz 1-et, a másodikhoz 5-öt, a harmadikhoz pedig 13-at hozzáadunk, akkor egy mértani sorozat szomszédos elemeit kapjuk. Határozza meg a számtani sorozat differenciáját és a mértani sorozat kvóciensét!
- 472** Egy mértani sorozat három egymást követő tagjával a következőket tesszük: az első taghoz hozzáadunk 8-at, a másodikat 4-gyel, a harmadikat 48-cal csökkentjük. Így egy olyan számtani sorozat három egymást követő tagját kapjuk, melyek összege 180. Határozza meg ennek a sorozatnak a differenciáját!

## Mértani sorozatok szöveges feladatokban

Megoldás → 189. o.

0 6 0

*mértani sorozat modelljének felismerése, alkalmazása*

- 473** Tatabánya lakossága 2000-ben 78 000 fő volt. A következő 10 évben évről évre 3%-kal nőtt a lakosok száma. Hányan éltek Tatabányán 2010-ben?
- 474** Tamás az egyik kozmetikai cég tanácsadója. 16 héttel ezelőtt elhatározta, hogy hétről hétre az előző heti forgalmának 8%-ával emelni fogja az eladások értékét. Terveit sikerült tartani, így ezen a héten 68 520 Ft-nyi forgalma volt. Hány forint értékű kozmetikumot adott el 16 héttel ezelőtt?
- 475** Az érettségihez közeledve Vivien egyre több időt töltött tanulással. Minden hétre ugyanannyi százalékkal növelte a tanulási időt, és ezt a növekedést 3 hónapig (12 hétig) folytatta. Az első héten összesen 60 percet tanult, a 12. héten pedig 189 percet. Hány százalékos növekedést tervezett hetente Vivien?
- 476** Peti testépítő edzésbe kezdett, és hogy nehegy feladja, elkezdett egy vlogot (videóblogot), amelyben minden héten beszámol az edzéséről az interneten. Az első videóját 262-en nézték meg, a másodikat 288-an, a harmadikat 317-en, a negyediket már 348-an.
- a) Igaz-e, hogy az eddigi nézők száma megközelítőleg mértani sorozatot alkot?
- b) Ha később is ugyanebben az ütemben nőne a nézettsége, akkor hányadik héten érhetné el a 10 ezer követőt?



- 477** Az érettségizők száma évről évre az előző évi létszámnak megközelítőleg 1,2%-ával csökken. 2005-ben 416 ezren érettségiztek. Hány érettségiző lehet 2020-ban, ha ez a tendencia nem változik?



**478** Egy cég autót vásárol, amely évenként 12%-ot veszít az értékéből. Mennyi volt egy most 8 éves autó ára újonnan, ha most 1 500 000 forintot ér az említett számítás szerint?

**479** A magyar egy főre jutó GDP 15 700 dollár, az osztrák 49 000 dollár körül van. Magyarország 4%-os GDP-növekedést tűzött ki célul, Ausztria növekedése az elmúlt években 2,8% volt. Egy újságíró kiszámolta, hogy ha a magyar növekedés teljesül, az osztrák pedig változatlan marad, az azt jelenti, hogy a magyar GDP a következő évre 628 dollárral, az osztrák 1372 dollárral nő. Így azonban a különbség nem csökken, hanem nő, vagyis Magyarország sosem érheti utol Ausztriát. Igazolja vagy cáfolja ezt az állítást!



**480** Egy gépsor értéke új korában 17 millió forint. Évenként 8%-os értékcsökkenéssel számolva hány év múlva kerül a gépsor értéke 8 millió forint alá?

## Kamatos kamat

Megoldás → 190. o.

0 6 1

*mértani sorozatból való következtetés*

**481** Vanessza leköti a bankban a megspórolt 100 000 forintját évi 4,5%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel 4 év múlva, ha közben nem változtatott a lekötésen?

**482** Mennyi pénzt tettünk be az egyik bank *Osztálykassza* nevű számlájára 4 évvel ezelőtt, ha a lekötött pénzünk évente 6,5%-ot kamatozott mindvégig és most 192 970 forint van az osztály számláján?

**483** Márk bankba tesz 250 000 forintot, évenként azonos kamatozásra. Két év múlva a betéte kamatokkal növelt értéke 294 849 Ft lett. Hány %-os volt az éves kamatláb?

**484** A szülők első gyermekük születésekor betettek a bankba 10 000 Ft-ot, amit határozatlan időre, de minimum 18 évre lekötöttek évi 8%-os kamatra. A hosszú évek során azonban teljesen elfelejtkeztek róla, így most, amikor eszüikbe jutott, meglepődve tapasztalták, hogy a betétük értéke 186 253 Ft-ra nőtt. Hány éves most az első gyermekük, akinek a pénzt szánták?

**485** Egy ikerpár televíziós vetélkedőn nyert 3 millió forintot. Ezt az összeget azután három részre osztották:

- 1 millió forintot lekötöttek 5 évre, végig évi 10%-os kamatra (ekkor 5 évig nem lehet kivenni kamatvesztés nélkül pénzt a számláról);
- 1 millió forintot lekötöttek 1 évre, évi 5%-os kamatra (ekkor 1 évig nem lehet kivenni kamatvesztés nélkül pénzt a számláról);
- 1 millió forintot olyan számlára tettek be, amelyről bármikor ki lehet venni pénzt, de ennek az összegnek az évi kamatlába csak 1,5%.

Időközben úgy alakult, hogy 5 évig nem volt szükségük a pénzre, így mindhárom betétet bent hagyták a bankban. A kamatlábak az 5 év alatt nem változtak. Mindhárom betétnél minden év végén tőkésítették a kamatot, azaz ettől kezdve a kapott kamat is kamatozott.

a) Mennyi pénzük lett kamatokkal együtt az 5. év végére?

b) Ugyanez az összeg hány %-os átlagos éves kamattal lett volna elérhető?



- 486** Ádám szülei anyagilag is megtervezték gyermekük továbbtanulását. Ezért fiuk 5. születésnapján számlát nyitottak, amin 400 ezer forintot helyeztek el évi 6%-os kamatra. Pontosan 4 év múlva megváltozott a kamatláb, évi 4%-ra csökkent. A fiú 14. születésnapján hozzátettek a számlán eddig összegyűlt pénzhez újabb 300 ezer forintot, ekkor a kamatláb évi 5% lett. Mennyi pénz gyűlt össze a számlán Ádám 18. születésnapjára?
- 487** Egy bank két akciót hirdetett a megtakarítási számlán lekötött betétekre 5 éves lekötés esetén:
- Az éves kamatláb 5%, ami az 5 év alatt végig változatlan marad.
  - Az éves kamatláb az első évben 9%, majd minden évben 2%-kal csökken.
- Melyik konstrukció esetén lenne több pénzünk az 5 év letelte után a megtakarítási számlán?
  - Ha a kedvezőbb konstrukciót választjuk, hány %-kal lenne több pénzünk 5 év múlva a megtakarítási számlán?
- 488** Egy család az 5 millió forint spórolt pénzét bankba szeretné tenni, ezért körülnéztek a bankok ajánlatai között. Végül úgy döntöttek, hogy az alábbi három ajánlat közül fognak választani:
- A bank évente 5% kamatos kamatot fizet, amit a lekötés minden évfordulóján jóváírnak a számlán, a számláról bármely lekötési évfordulón fel lehet venni pénzt.
  - A bank megkértszerezi az összeget, ha 15 évig lekötik a pénzt a számlán. Ha előbb szeretnék felvenni a pénzüket, akkor csak évi 3% kamatos kamatot fizet (minden lekötési évfordulón történő jóváírással) a bank.
  - A bank 5 éves kamatperiódussal számol: az első 5 évben az éves kamatláb 4,5%, a következő 5 évben 5,5%, az utolsó 5 évben 6%. A kamatot minden évben a lekötési évforduló végén jóváírják a számlán, és ettől kezdve a kamat is kamatozik.
- Melyik konstrukciót válasszák, ha 10 évre szeretnék lekötni a pénzüket?
  - Melyik konstrukcióval lenne a legtöbb pénzük a számlán, ha 15 év múlva szeretnék lakást vásárolni?

## Összefoglaló feladatsor

Megoldás → 191. o.

0 6 2

### Függvények, sorozatok

- 489** Az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  másodfokú függvény grafikonját úgy kapjuk, hogy a  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -x^2$  másodfokú függvényt a  $\vec{v}(2; 9)$  vektorral eltoljuk.
- Adja meg az  $f$  függvény hozzárendelési utasítását képlettel!
  - Határozza meg az  $f$  függvény szélsőértékét (a szélsőérték jellegét, helyét és értékét is adja meg!)
  - Állapítsa meg az  $f$  függvény zérushelyeit!
  - Ábrázolja a függvényt a  $[-2; 5]$  intervallumon!
- 490** Adott két függvény:

$$f: [-6; 6] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2} + 3$$

$$g: [-6; 6] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = -|x + 1| + 4.$$

- Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a két függvényt!
- Adja meg az  $f(x) \leq g(x)$  egyenlőtlenség megoldásait!



**491** Egy ritka fát akkor ültetnek ki a „faiskolába”, amikor magassága eléri a 12 cm-t. Innentől a magassága az  $F(t) = 0,12 \cdot 1,5^t$  képlettel írható le, ahol  $t$  a kiültetéstől eltelt évek számát jelenti,  $F(t)$  pedig a fa magasságát méterben.

- Mekkora lesz a fa magassága a kiültetéstől számított 5 év múlva?
- Ha a fa magassága eléri az 1,5 métert, akkor átültetik az erdőbe. A faiskolába ültetés utáni hányadik évben történik ez?

**492** Dorina elhatározta, hogy a nyári szünetben sokat fog olvasni. A szünet első napján 25 oldalt olvasott egy regényből. Mindennap növelte az előző napi olvasási mennyiséget 10 oldallal.

- Hány oldalt olvasott a 7. napon?
- Hány nap alatt olvasta el a 913 oldalas regényt?
- Hány oldalt olvasott az utolsó napon?

**493** Egy család megfigyelte, hogy az elmúlt időszakban átlagosan minden évben 1,2-szer annyit költött benzinre, mint az előző évben.

- Eszerint ha 2014-ben 144 000 Ft-ot fizettek benzinért, akkor várhatóan mennyi lett 2018-ban a család benzinköltsége?
- A megfigyelés alapján és a 2014-es adatot figyelembe véve mennyi pénzt költhetett 2008-ban benzinre a család?

**494** Két 24 cm kerületű derékszögű háromszögről a következőket tudjuk:

- az egyik háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő elemei;
- a másik háromszög oldalai egy mértani sorozat egymást követő elemei.

Számolja ki a háromszögek oldalait! (3 tizedesjegy pontossággal adja meg az oldalhosszakat!)

**495** A vadon élő koalák kipusztulhatnak Ausztráliában. Felmérések szerint a koalák száma évente átlagosan 8,9%-kal csökken. 2009-ben mindössze 43 000 vadon élő koalát számoltak össze.

- Adjon képletet a koalák számára az eltelt idő függvényében, jelölje a 2009 óta eltelt évek számát  $t$ -vel!
- Számolja ki, hogy 2018-ban (ha ez a becslés teljesült) hány koala élt szabadon Ausztráliában!



**496** Bankba szeretnénk tenni a megspórolt pénzünket, ezért körülnéztünk a bankok ajánlatai között. Az egyik bank ajánlata szerint ha 10 évre lekötjük a pénzünket, akkor a dupláját kapjuk vissza tőlük.

- Hány %-os éves kamatlábnak számítana ez a fajta lekötés, ha kamatos kamatozású számlára tennénk a pénzünket?

Egy másik bank évente 4%-os kamatos kamatot fizet a betétek után.

- Hány év múlva kétszereződne meg ebben a bankban a pénzünk, ha a kamatot mindig a lekötési évforduló végén írják jóvá a számlán?






## Ismétlő feladatsor II.

Megoldás → 193. o. 

0	6	3
---	---	---

### Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok, algebra és számelmélet, függvények

- 497** Egy cégnél az alkalmazottak munkaideje a következőképpen oszlik meg:  
2%-uk 3 órát, 10%-uk 4 órát, 28%-uk 6 órát, 56%-uk 8 órát, 4%-uk 9,5 órát dolgozik.
- Számolja ki, hány órát dolgoznak átlagosan ennél a cégnél az alkalmazottak!
  - Mennyi a munkaórák szórása?
  - Ábrázolja kördiagramon a munkaórák megoszlását, feltüntetve az egyes középponti szögeket is!
- 498** Egy iskolából a diákok 2 tanár kíséretében vonattal utaztak osztálykirándulásra. A vonaton 6 személyes fülkéket foglaltak számukra, a lefoglalt fülkék mindegyikében 6-an ültek, csak az utolsó fülkébe jutott 4 ember. Este a szabadulószerzés játékhoz 5 fős csoportokat kellett alkotniuk, de az egyik csoportba csak 2 tanár és 2 diák jutott.
- Hány diák ment el erre a kirándulásra, ha tudjuk, hogy 50-nél kevesebben voltak?
  - Hazafelé a vonat egyik fülkéjében 6 lány ült, köztük volt Regina is. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Regina elsőként jött ki leszálláskor a fülkéből?
  - A diákok fele fiú. Hazaérkezéskor kézfogással búcsúztak egymástól. Ha mindenki mindenkivel kezét fogott, akkor hány kézfogás történt?
- 499** Az  $A$  halmaz elemei az  $x^2 - 14x - 32 < 0$  egyenlőtlenség egész megoldásai. A  $B$  halmaz elemei a 20-nál kisebb 3-mal osztható pozitív egész számok.
- Számolja ki mindkét halmaz elemeinek átlagát!
  - Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha az  $A \cup B$  halmaz elemeiből kiválasztunk egy elemet, akkor az elem az  $A \cap B$  halmaznak is?
- 500** Peti és Norbi 1-1 dobókockával játszanak, egy menet abból áll, hogy mindketten egyszer dobnak a kockájukkal. A játék elején Petinek 10 zsetonja, Norbinak 15 zsetonja van. A játékszabály a következő: ha a dobott számok összege prím, akkor Norbi nyer 2 zsetont Petitől; ha a dobott számok szorzata páros szám, akkor Peti nyer 3 zsetont Norbitól; ha egyik sem teljesül, akkor nem cserél zseton gazdát.
- 
- Ha 1 menetet játszanak, akkor milyen lehetséges kimenetele lehet a zsetonok eloszlásának?
  - Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy menetet játszva Petinek 11 zsetonja lesz?
  - Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy menetben nincs zsetoncseré?
  - Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha 2 menetet játszanak a fiúk, Norbinak 19 zsetonja lesz?
- 501** Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a következő valós számok halmazán értelmezett függvényeket:
- $$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} \quad \text{és} \quad g(x) = -x^2 + 4x + 2.$$
- Melyik függvénynek milyen jellegű szélsőértéke van? Adja meg a szélsőértékek helyét és értékét!
  - Adja meg a két függvény metszéspontját! Számolással igazolja a metszéspont(ok) helyességét!



- 502** Egy vállalkozás vásárolt egy munkagépet 500 000 Ft-ért és egy fénymásolót 780 000 Ft-ért. Mindkettő évente 12%-ot veszít az értékéből.
- Mennyit ér 10 év múlva a munkagép?
  - Hány év múlva lesz a fénymásoló értéke 390 000 Ft?
  - A vállalkozás harmadik gépe most 650 000 Ft. Ha a 12%-os évenkénti értékcsökkenés erre a gépre is igaz, akkor 8 évvel ezelőtt hány forintért vásárolta a cég a gépet?
- 503** Egy gyárban kabalatárgyakat gyártanak. A minőség-ellenőrzés során kiderült, hogy a gyártott mennyiségből átlagosan 3% lesz selejtes. A minőség-ellenőrzés során 10 elemet vizsgálnak meg.
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 elemet megvizsgálva azt tapasztaljuk, hogy minden kiválasztott elem megfelel a minőségi előírásoknak?
  - Számolja ki annak a valószínűségét, hogy az összes kiválasztott elem selejtes!
  - Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a 10 elemű mintában pontosan 2 selejtes van!
  - Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott 10 elem között legfeljebb 2 hibás elem van?
- 504** Egy mértani sorozat első eleméhez 9-et adunk, második elemét változatlanul hagyjuk, a harmadik eleméből 24-et kivonunk, így olyan növekvő számtani sorozat egymás utáni három elemét kapjuk, amelyeknek az összege 90. Számolja ki a számtani sorozat különbségét és a mértani sorozat hányadosát!



# Megoldások

- *Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok* 116
- *Számelmélet, algebra* 125
- *Valószínűség-számítás, statisztika* 158
- *Függvények* 177
- *Geometria, koordináta-geometria, trigonometria* 196
- *Próbaérettségi feladatsor* 243



## Számsorozat

- 441 Végrehajtjuk a feladat szövegében megadott képzési szabályban megadott utasításokat:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + 2 = 3, \quad a_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \\ a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \quad a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

- 442 Behelyettesítjük a képletbe a megadott értékeket  $n$  helyére:

$$a_3 = 3 \cdot 3 - 7 = 2, \quad a_8 = 3 \cdot 8 - 7 = 17, \quad a_{123} = 3 \cdot 123 - 7 = 362, \quad a_{2017} = 3 \cdot 2017 - 7 = 6044.$$

- 443 Az első 10 tag:  $-1; 1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; -1; 1$ , összegük 0.

- 444 Behelyettesítjük a képletbe a megadott értékeket  $n$  helyére:

$$a_n = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0, \quad a_2 = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 1, \quad a_{123} = 2 \cdot 123^2 - 5 \cdot 123 + 3 = 29\,646, \\ a_{2017} = 2 \cdot 2017^2 - 5 \cdot 2017 + 3 = 8\,126\,496.$$

- 445 Mindkét esetben behelyettesítjük  $a_n$  helyére a megadott értéket, majd megoldjuk az egyenleteket:

$$25 = -2n + 33 \Rightarrow n = 4, \text{ ebből következik, hogy a 4. tagja a sorozatnak,} \\ -36 = -2n + 33 \Rightarrow n = 34,5, \text{ ami nem pozitív egész, tehát nem tagja a sorozatnak.}$$

- 446 Mindkét esetben behelyettesítjük  $a_n$  helyére a megadott értéket, majd megoldjuk a kapott másodfokú egyenleteket:

$$121 = n^2 - 3 \Rightarrow n = \sqrt{124} \approx 11,14, \text{ ami nem pozitív egész, tehát nem tagja a sorozatnak,} \\ 141 = n^2 - 3 \Rightarrow n = 12, \text{ ebből következik, hogy a 12. tagja a sorozatnak a 141.}$$

- 447 A megadott képzési szabályba behelyettesítünk:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2a_1 - 4 = 2 \cdot 1 - 4 = -2, \quad a_3 = 2a_2 - 4 = 2 \cdot (-2) - 4 = -8, \\ a_4 = 2a_3 - 4 = 2 \cdot (-8) - 4 = -20, \quad a_5 = 2a_4 - 4 = 2 \cdot (-20) - 4 = -44.$$

- 448 A megadott képzési szabályba behelyettesítünk:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2, \quad a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3, \quad a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5, \\ a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8, \quad a_7 = a_5 + a_6 = 5 + 8 = 13, \quad a_8 = a_6 + a_7 = 8 + 13 = 21.$$

## Számítási sorozat

- 449 Behelyettesítünk a képletekbe:

$$a_{10} = a_1 + 9 \cdot d = 8 + 9 \cdot 3 = 35, \\ S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{8 + 35}{2} \cdot 10 = 215.$$

- 450 Behelyettesítünk a 11. elemet leíró képletbe, majd kiszámoljuk  $d$ -t:

$$a_1 = -4, \quad a_{11} = 11 = a_1 + 10 \cdot d \Rightarrow 11 = -4 + 10 \cdot d \Rightarrow d = 1,5,$$

Behelyettesítünk a 8. elemet leíró képletbe:

$$a_8 = a_1 + 7 \cdot d = -4 + 7 \cdot 1,5 = 6,5.$$

Alkalmazzuk az első 8 elem összegét leíró képletet:

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{-4 + 6,5}{2} \cdot 8 = 10.$$



- 451 A 7. és 14. elemre egyenletrendszert írunk fel, behelyettesítjük az ismert adatokat:

$$a_7 = a_1 + 6 \cdot d = 9 \quad \text{és} \quad a_{14} = a_1 + 13 \cdot d = -19.$$

A két egyenletet kivonjuk egymásból, így kiesik  $a_1$ :

$$7 \cdot d = -28 \Rightarrow d = -4.$$

Ezt behelyettesítjük az egyik  $a_1$ -et tartalmazó egyenletbe:

$$a_1 + 6 \cdot (-4) = 9 \Rightarrow a_1 = 33.$$

Kiszámoljuk a 10. elemet, a kapott értéket behelyettesítjük az összegképletbe:

$$a_{10} = a_1 + 9 \cdot d = 33 + 9 \cdot (-4) = -3,$$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{33 - 3}{2} \cdot 10 = 150.$$

- 452 Felírjuk az összegképletet, behelyettesítünk, rendezzük:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n,$$

$$540 = \frac{2 \cdot (-13) + (n-1) \cdot 7}{2} \cdot n \Rightarrow 1080 = (-33 + 7n) \cdot n \Rightarrow 7n^2 - 33n - 1080 = 0$$

másodfokú egyenletet kapunk, amelynek gyökei:

$$n_1 = -\frac{72}{7}, \text{ ez nem megoldás, } n_2 = 15.$$

- 453 Kiszámoljuk  $d$ -t, majd a 7. elem képletéből a sorozat 1. elemét:

$$d = 13 - 9 = 4 \Rightarrow a_1 + 6 \cdot 4 = 9 \Rightarrow a_1 = -15.$$

Tegyük fel, hogy az 1301 az  $n$ -edik eleme a sorozatnak:

$$1301 = -15 + (n-1) \cdot 4,$$

ebből kiszámoljuk  $n$ -et:

$$n = 330, \text{ így a 330. eleme a sorozatnak.}$$

- 454 a)  $a_{15} = 10 + 14 \cdot 2 = 38$  szót tanul meg a 15. napon.

b)  $a_{30} = 10 + 29 \cdot 2 = 68$ , így  $S_{30} = \frac{10 + 68}{2} \cdot 30 = 1170$  szót tanul meg összesen.

- 455 Megalkotjuk a modellt, majd erre egyenletrendszert írunk fel, behelyettesítjük az első elemet és a differenciát. Így kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk, amit a behelyettesítő módszerrel megoldunk:

$$\left. \begin{array}{l} a_2 + a_8 = 38 \\ a_9 - 24 = a_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + d + a_1 + 7d = 38 \\ a_1 + 8d - 24 = a_1 + 2d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a_1 + 8 \cdot 4 = 38 \\ d = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 = 3, a_7 = 3 + 6 \cdot 4 = 27.$$

Az első polcon 3, a hetedik polcon 27 könyv van.

- 456 A sorok száma:

$$522 = 0 + (n-1) \cdot 18, \text{ ebből } n = 30.$$

A nézők száma:

$$a_{30} = 150 + 29 \cdot 5 = 295 \Rightarrow S_{30} = \frac{150 + 295}{2} \cdot 30 = 6675 \text{ néző volt.}$$



## Mértani sorozat

457 Behelyettesítünk a képletekbe:

$$a_5 = 2 \cdot 3^4 = 162, \quad S_7 = 2 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 2186.$$

458 a) Behelyettesítünk a 7. elemet leíró képletbe, majd kiszámoljuk  $q$ -t:

$$-256 = -4 \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow q_1 = 2, q_2 = -2, \text{ tehát 2 ilyen sorozat van.}$$

b) Behelyettesítünk az összegképletbe:

$$1. \text{ sorozat: } S_{10} = -4 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = -4092,$$

$$2. \text{ sorozat: } S_{10} = -4 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = 1364.$$

459 Egyenletrendszert írunk fel:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 \cdot q^6 = 9 \\ a_1 \cdot q^{13} = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{az egyenletek bal és jobb oldalait egymással osztjuk: } q^7 = 1, \text{ amiből } q = 1.$$

Visszahelyettesítjük  $q$ -t az egyik egyenletbe, megkapjuk, hogy

$$a_1 = 9 \Rightarrow S_{100} = 100 \cdot 9 = 900.$$

460 Behelyettesítünk az összegképletbe, és kifejezzük belőle  $2^n$ -t:

$$-8\,388\,607 = -1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow 8\,388\,608 = 2^n.$$

Mindkét oldal logaritmusát vesszük:

$$n = \log_2 8\,388\,608 = \frac{\lg 8\,388\,608}{\lg 2} = 23.$$

461 Meghatározzuk  $q$ -t, majd a 4. elem képletéből a sorozat első elemét:

$$q = \frac{80}{40} = 2 \Rightarrow 40 = a_1 \cdot 2^3 \Rightarrow a_1 = 5.$$

Tegyük fel, hogy 2560  $n$ -edik eleme a sorozatnak:

$$2560 = 5 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 512 = 2^{n-1}, \\ 512 = 2^9, \text{ ebből } n - 1 = 9, \text{ vagyis } n = 10 \Rightarrow 10. \text{ eleme.}$$

462 Összesen hat szám szerepel a feladatban, egy mértani sorozat első hat eleme, így a 6. elemre vonatkozó képletből kiszámoljuk  $q$ -t:

$$320 = -10 \cdot q^5 \Rightarrow -32 = q^5 \Rightarrow q = -2.$$

A beiktatott számok: 20, -40, 80, -160.

463 a)  $3 \cdot 2^6 = 192$  percet edz a 7. napon.

$$b) S_7 = 3 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 381 \text{ perc} = 6 \text{ óra } 21 \text{ perc} = 6,35 \text{ órát edz összesen az első héten.}$$



464 a)  $2 \cdot 1,2^7 \approx 7,17 \text{ m}^2$

b)  $2 \cdot 1,2^{n-1} = 2300 \Rightarrow 1,2^{n-1} = 1150$

Mindkét oldal logaritmusát vesszük:

$$n - 1 = \log_{1,2} 1150 = \frac{\lg 1150}{\lg 1,2} \approx 38,65.$$

Ebből  $n = 39,65 \Rightarrow 40$ . héten.

**megoldások**

**0 5 9**

## Vegyes feladatok számtani és mértani sorozatokra

Elsősorban azt kell eldöntenünk, hogy az egymás után következő elemek különbsége vagy hányadosa állandó. Ha mindkét típusú sorozat szerepel a feladatban, akkor célszerű a számtani sorozat adatainak segítségével egyenletet felírni (ha lehetséges), mert akkor csak elsőfokú egyenletet kell megoldanunk.

465 Az első ilyen szám a 2, az utolsó pedig 1847, a számok számtani sorozatot alkotnak:

$$a_1 = 2, \quad d = 3, \quad a_n = 1847 = 2 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 616.$$

$$S_{616} = \frac{2 + 1847}{2} \cdot 616 = 569\,492.$$

466 Számtani sorozat:  $a_1 = 8, d = 3, S_n = 2178$ .

Behelyettesítünk az összegképletbe, rendezzük, másodfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{16 + (n - 1) \cdot 3}{2} \cdot n = 2178 \Rightarrow (13 + 3n)n = 4356 \Rightarrow 3n^2 + 13n - 4356 = 0.$$

Az egyenlet gyökei:

$$n_1 = -\frac{121}{3}, \text{ ez nem megoldás, } n_2 = 36,$$

tehát 36 hétig matekozott, az utolsó héten  $a_{36} = 8 + 35 \cdot 3 = 113$  példát oldott meg Dotti.

467 a) Kati (számtani sorozattal):

$$2900 = a_1 + 10 \cdot 100 \Rightarrow a_1 = 1900 \Rightarrow S_{14} = \frac{2 \cdot 1900 + 13 \cdot 100}{2} \cdot 14 = 35\,700 \text{ Ft.}$$

Kitti (mértani sorozattal):

$$S_{14} = 5 \cdot \frac{2^{14} - 1}{2 - 1} = 81\,915 \text{ Ft.}$$

b) A számtani sorozat összegképletéből meghatározzuk  $n$ -t:

$$\frac{2 \cdot 1900 + (n - 1) \cdot 100}{2} \cdot n \geq 30\,000 \Rightarrow 100n^2 + 3700n - 60\,000 \geq 0,$$

amiből  $n \geq 12,2$  vagy  $n \leq -49,2$  (ami a feladat szövege szerint nem ad megoldást)  $\Rightarrow$  a 13. napon.

c) A mértani sorozat összegképletéből meghatározzuk  $n$ -t:

$$5 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \geq 20\,000 \Rightarrow 2^n \geq 4001 \Rightarrow n \geq 11,97 \Rightarrow \text{a 12. napon.}$$



- 468** Számjegyek:  $a - d, a, a + d$ , összegük  $3a = 15 \Rightarrow a = 5$ , ekkor a számjegyek:  $5 - d, 5, 5 + d$ , de  $d > 0$  (növekvő számtani sorozat).

Csökkentés után:  $5 - d, 4, 5 + d \Rightarrow$  a mértani sorozat hányadosa kétféleképpen:

$$\frac{4}{5-d} = \frac{5+d}{4}.$$

Keresztbe szorzunk, felbontjuk a zárójeleket, majd rendezzük az egyenletet:

$$16 = (5+d)(5-d) \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow \text{a háromjegyű szám } 258.$$

- 469** Ismerősök:  $a - d, a, a + d$ , összegük  $3a = 6 \Rightarrow a = 2$ , így az ismerősök száma:  $2 - d, 2, 2 + d$ .

Mértani:  $7 - d, 4, 3 + d \Rightarrow$  a mértani sorozat hányadosa kétféleképpen:

$$\frac{4}{7-d} = \frac{3+d}{4}.$$

Keresztbe szorzunk, felbontjuk a zárójeleket, majd rendezzük az egyenletet:

$$16 = (7-d)(3+d) \Rightarrow d^2 - 4d - 5 = 0.$$

Az egyenlet gyökei:

$$d_1 = 5, \text{ ekkor az ismerősök száma: } -3, 2, 7, \text{ ez nem megoldás,}$$

$$d_2 = -1, \text{ ekkor az ismerősök száma: } 3, 2, 1 \Rightarrow \text{a mértani sorozat: } 8, 4, 2.$$

- 470** A megváltoztatott oldalak számtani sorozat elemei:  $a - d, a, a + d$ , összegük  $3a = 24 \Rightarrow a = 8$ . Ebből a háromszög oldalai:  $8 - d, 8, 8 + d$ .

Az eredeti oldalak egy mértani sorozat elemei:  $11 - d, 12, 14 + d \Rightarrow$  a mértani sorozat hányadosa kétféleképpen:

$$\frac{12}{11-d} = \frac{14+d}{12}.$$

Keresztbe szorzunk, felbontjuk a zárójeleket, majd rendezzük és megoldjuk az egyenletet:

$$144 = (11-d)(14+d) \Rightarrow d_1 = 2, d_2 = -5.$$

Ha  $d = 2$ , a mértani sorozat: 9, 12, 16; ha pedig  $d = -5$ , a mértani sorozat: 16, 12, 9, ami nem felel meg a növekvő feltételnek, így a háromszög oldalai: 9 cm, 12 cm, 16 cm.

- 471** A számok:  $a - d, a, a + d \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10$ , így a számok:  $10 - d, 10, 10 + d$ .

Az új számok:  $11 - d, 15, 23 + d$ , a mértani sorozat hányadosa kétféleképpen:

$$\frac{15}{11-d} = \frac{23+d}{15}.$$

Keresztbe szorzunk, felbontjuk a zárójeleket, majd rendezzük és megoldjuk az egyenletet:

$$225 = (23+d)(11-d) \Rightarrow d^2 + 12d - 28 = 0 \Rightarrow d_1 = 2, d_2 = -14.$$

Két megoldás van:  $d_1 = 2$ , ekkor  $q_1 = \frac{15}{11-2} = \frac{5}{3}$ , illetve  $d_2 = -14$ , ekkor  $q_2 = \frac{15}{11-(-14)} = \frac{3}{5}$ .

- 472** A számtani sorozat:  $a - d, a, a + d \Rightarrow 3a = 180 \Rightarrow a = 60$ , így az elemek:  $60 - d, 60, 60 + d$ .

A mértani sorozat:  $52 - d, 64, 108 + d$ , ekkor a sorozat hányadosa kétféleképpen:

$$\frac{64}{52-d} = \frac{108+d}{64}.$$

Keresztbe szorzunk, felbontjuk a zárójeleket, majd rendezzük és megoldjuk az egyenletet:

$$4096 = (108+d)(52-d) \Rightarrow d^2 + 56d - 1520 = 0 \Rightarrow d_1 = 20, d_2 = -76.$$



## Mértani sorozatok szöveges feladatokban

473 A 11. elem:  $78\,000 \cdot 1,03^{10} \approx 104\,825$ .

474 A 17. elemre felírt egyenletbe helyettesítünk:

$$x \cdot 1,08^{16} = 68\,520 \Rightarrow x \approx 20\,000 \text{ Ft.}$$

475 A 12. elemre felírt egyenletbe helyettesítünk és megoldjuk az egyenletet:

$$60 \cdot x^{11} = 189 \Rightarrow x = 1,1099 \Rightarrow 10,99\% \text{-os növekedés.}$$

476 a) Ha mértani sorozatot alkotna a követők száma, akkor az egymás utáni napok nézőinek hányadosa állandó lenne:

$$\frac{288}{262} \approx 1,0992 \approx 1,1; \quad \frac{317}{288} \approx 1,1007 \approx 1,1; \quad \frac{348}{317} \approx 1,0978 \approx 1,1.$$

Mivel mindhárom hányados 1,1-re kerekíthető, így olyan mértani sorozatnak tekinthető a követők száma, amelynek első eleme 262, hányadosa 1,1.

b) Az  $n$ -edik héten érné el, így  $a_n = 10\,000$ , ebből  $10\,000 = 26 \cdot 1,1^n$ .

Rendezzük az egyenletet:

$$1,1^n = \frac{10\,000}{26} \Rightarrow n = \log_{1,1} \frac{10\,000}{26} = \frac{\lg \frac{10\,000}{26}}{\lg 1,1} \approx 62,45.$$

Így a 63. héten érné el a követők száma a 10 000-et.

477 A 16. elemre felírt egyenletbe helyettesítünk:

$$416\,000 \cdot 0,988^{15} \approx 347\,094 \text{ érettségiző.}$$

478  $x \cdot 0,88^8 = 1\,500\,000 \Rightarrow x \approx 4\,170\,901 \text{ Ft}$

479 Magyarország GDP-növekedése mértani sorozatot alkot, amelynek első eleme 15 700, hányadosa 1,04, ugyanez Ausztria esetében olyan mértani sorozat, amelynek első eleme 49 000, hányadosa 1,028. Így  $n$  év múlva a magyar GDP  $15\,700 \cdot 1,04^n$ , az osztrák GDP  $49\,000 \cdot 1,028^n$ .

Magyarország akkor éri utol Ausztriát GDP-ben, ha van olyan év, vagyis van olyan  $n$ , amelyre az előbbi két érték egyenlő:  $15\,700 \cdot 1,04^n = 49\,000 \cdot 1,028^n$ .

Megoldjuk ezt az egyenletet:

$$\frac{1,04^n}{1,028^n} = \frac{49\,000}{15\,700} \Rightarrow \left( \frac{1,04}{1,028} \right)^n = \frac{490}{157}.$$

Vesszük mindkét oldal logaritmusát:

$$n = \log_{\frac{1,04}{1,028}} \frac{490}{157} = \frac{\lg \frac{490}{157}}{\lg \frac{1,04}{1,028}} \approx 98,07.$$

Tehát ha maradnának a növekedési adatok, Magyarország kb. 98 év múlva utolérhetné Ausztriát.





- 480 Az általános tagra felírt egyenletbe helyettesítünk és megoldjuk:

$$17 \cdot 0,92^x = 8 \Rightarrow 0,92^x = \frac{8}{17}.$$

Ebből:

$$x = \log_{0,92} \frac{8}{17} = \frac{\lg \frac{8}{17}}{\lg 0,92} \approx 9,04,$$

tehát 9 év múlva, azaz a 10. évben.

**megoldások**

**0 6 1**

## Kamatos kamat

Figyelnünk kell arra, hogy a sorozat elemei hogyan vannak összhangban a feladat szövegével (az indexek elcsúszhatnak). A feladatokban elvileg a mértani sorozat általános tagjának képletét és az összegképletet is alkalmazhatjuk.

481  $100\,000 \cdot 1,045^4 \approx 119\,252$  Ft

482  $x \cdot 1,065^4 = 192\,970 \Rightarrow x \approx 150\,000$  Ft

483  $250\,000 \cdot x^2 = 294\,849 \Rightarrow x = 1,086 \Rightarrow 8,6\%$

484  $10\,000 \cdot 1,08^x = 186\,253 \Rightarrow 1,08^x = 18,6253$ , ebből

$$x = \log_{1,08} 18,6253 = \frac{\lg 18,6253}{\lg 1,08} \approx 38.$$

$x \approx 38$  éves.

485 a) 1.  $1\,000\,000 \cdot 1,1^5 = 1\,610\,510$  Ft

2.  $1\,000\,000 \cdot 1,05^5 \approx 1\,276\,282$  Ft

3.  $1\,000\,000 \cdot 1,015^5 \approx 1\,077\,284$  Ft

Összesen  $1\,610\,510 + 1\,276\,282 + 1\,077\,284 = 3\,964\,076$  Ft-juk lett kamatokkal együtt az 5. év végére.

b) Ez az összeg átlagosan évi

$$3\,000\,000 \cdot x^5 = 3\,964\,076 \Rightarrow x \approx 1,057 \Rightarrow 5,7\% \text{ kamatot jelent.}$$

486 A 9. születésnapra  $400\,000 \cdot 1,06^4 \approx 504\,991$  Ft lett a számlán. Ezután a kamat csökkent, így a 14. születésnapra  $504\,991 \cdot 1,045^5 \approx 614\,399$  Ft volt a bankban.

Ekkor a szülők hozzátettek 300 ezer forintot, ami 4 évig kamatozott, így a számlán összegyűlt összeg:  $(614\,399 + 300\,000) \cdot 1,05^4 \approx 1\,111\,458$  Ft.

487 Ha  $x$  összeget teszünk a számlára, akkor 5 év múlva az egyes esetekben a következő összeg lesz a számlán:

A)  $x \cdot 1,05^5 \approx x \cdot 1,2763$

B)  $x \cdot 1,09 \cdot 1,07 \cdot 1,05 \cdot 1,03 \cdot 1,01 \approx x \cdot 1,2740$ .

a) Az A) konstrukció esetén lenne több pénzünk.

b)  $\frac{x \cdot 1,2763}{x \cdot 1,2740} \approx 1,0018 = 100,18\%$ , vagyis 0,18%-kal lenne több pénzünk.



- 488 a) 10 év múlva:
- $5\,000\,000 \cdot 1,05^{10} \approx 8\,144\,473$  Ft lesz a számlán.
  - Mivel nem kötik le 15 évre, így csak 3% kamatot kapnak:  $5\,000\,000 \cdot 1,03^{10} \approx 6\,719\,582$  Ft lesz a számlán.
  - $5\,000\,000 \cdot 1,045^5 \cdot 1,055^5 \approx 8\,143\,550$  Ft lesz a számlán.
- Ekkor az első konstrukciót érdemes választaniuk.
- b) 15 év múlva:
- $5\,000\,000 \cdot 1,05^{15} \approx 10\,394\,641$  Ft lesz a számlán.
  - 15 évre kötik le a pénzüket, így megkétszerezik, azaz  $10\,000\,000$  Ft lesz a számlán.
  - $5\,000\,000 \cdot 1,045^5 \cdot 1,055^5 \cdot 1,06^5 \approx 10\,897\,907$  Ft lesz a számlán.
- Ekkor a harmadik konstrukciót érdemes választaniuk.

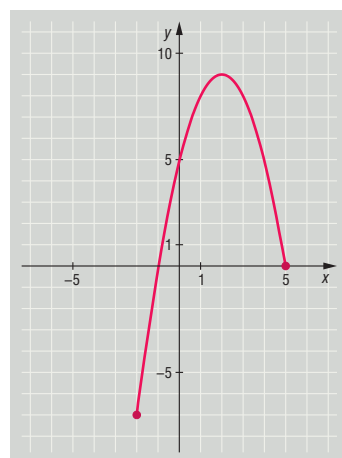
## Összefoglaló feladatsor

### Függvények, sorozatok

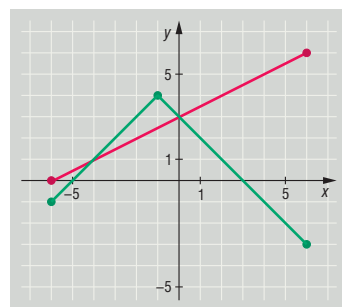
megoldások

0 6 2

- 489 a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -(x-2)^2 + 9$
- b) Maximuma van az  $x = 2$  helyen, a maximum értéke  $y = 9$ .
- c)  $0 = -(x-2)^2 + 9 \Rightarrow x-2 = \pm 3$ , amiből  $x_1 = 5, x_2 = -1$
- d) A függvény grafikonja az ábrán látható.



- 490 a) A függvények grafikonja az ábrán látható.
- b)  $x \in [-4; 0]$



- 491 a)  $F(5) = 0,12 \cdot 1,5^5 = 0,91125 \text{ m} = 91,125 \text{ cm}$  lesz a fa magassága.
- b)  $1,5 = 0,12 \cdot 1,5^t \Rightarrow 1,5^t = 12,5 \Rightarrow$  logaritmussal  $t \approx 6,22 \Rightarrow$  a fa magassága az 1,5 métert a 7. évben éri el.



492 a)  $a_7 = 25 + 6 \cdot 10 = 85$  oldalt olvasott.

b) Az összegképletet felhasználva:

$$913 = \frac{2 \cdot 25 + (n-1) \cdot 10}{2} \cdot n \Rightarrow 1826 = (40 + 10n)n \Rightarrow 10n^2 + 40n - 1826 = 0,$$

amiből  $n_1 = 11,66$ ;  $n_2 = -15,66$  (ez nem értelmezhető), vagyis a 12. napon olvasta el ezt a regényt.

c)  $S_{11} = \frac{2 \cdot 25 + 10 \cdot 10}{2} \cdot 11 = 825$ ;  $913 - 825 = 88$  oldalt olvasott az utolsó napon.

493 a)  $144\,000 \cdot 1,2^4 = 298\,598,4$  Ft lesz várhatóan a benzinköltség.

b)  $x \cdot 1,2^6 = 144\,000 \Rightarrow 48\,225,3$  Ft-ot költhettek benzinre.

494 Számítási sorozat: befogók:  $a - d$ ,  $a$ , átfogó:  $a + d$ , ahol  $d > 0 \Rightarrow 3a = 24 \Rightarrow a = 8$ .

Ebből a háromszög oldalai:  $8 - d$ ,  $8$ ,  $8 + d$ .

Mivel derékszögű a háromszög, felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$(8 - d)^2 + 8^2 = (8 + d)^2.$$

Felbontjuk a zárójeleket és megoldjuk az egyenletet:

$$64 = 32d \Rightarrow d = 2,$$

így az oldalak: 6 cm, 8 cm, 10 cm.

Mértani sorozat: befogók:  $a$ ,  $aq$ , átfogó:  $aq^2$ , ahol  $q > 1$ .

Mivel derékszögű a háromszög, felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$a^2 + (aq)^2 = (aq^2)^2 \stackrel{:a^2}{\Rightarrow} 1 + q^2 = q^4,$$

$q^2$ -re nézve másodfokú egyenlet, amelynek gyökei  $q^2 = -0,618$ , ami nem ad megoldást és  $q^2 = 1,618$ , amiből  $q = 1,272$  lehet csak megoldás:

$$a + 1,272a + 1,618a = 24 \Rightarrow a = 6,170,$$

így az oldalak: 6,170 cm, 7,848 cm, 9,983 cm.

495 a)  $K(t) = 43\,000 \cdot 0,911^t$

b)  $K(t) = 43\,000 \cdot 0,911^9 \approx 18\,584$  koala

496 Ha  $x$  összeget helyeznénk el a bankban és

a)  $q$ -szorosára változik minden évben a számlán levő pénz, akkor

$$x \cdot q^{10} = 2 \cdot x.$$

Osztunk  $x$ -szel, majd gyököt vonunk:  $q = \sqrt[10]{2} \approx 1,0718$ , ebből évente 107,18%-ára, azaz évente 7,18% a kamatláb.

b)  $n$  évig tartjuk bankban a pénzünket, akkor

$$x \cdot 1,04^n = 2 \cdot x.$$

Osztunk  $x$ -szel, majd logaritmizálunk:

$$1,04^n = 2 \Rightarrow n = \log_{1,04} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1,04} \approx 17,67,$$

így 18 év múlva kétszereződne meg a pénzünk.



## Ismétlő feladatsor II.

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok, algebra és számelmélet, függvények

497 A cégnél dolgozók számát jelölje  $x$ .

a) Az alkalmazottak átlagos óraszámára:

$$\frac{0,02x \cdot 3 + 0,1x \cdot 4 + 0,28x \cdot 6 + 0,56x \cdot 8 + 0,04x \cdot 9,5}{x} = \frac{7x}{x} = 7.$$

b) A munkaórák szórására:

$$\sqrt{\frac{0,02x \cdot (3-7)^2 + 0,1x \cdot (4-7)^2 + 0,28x \cdot (6-7)^2 + 0,56x \cdot (8-7)^2 + 0,04x \cdot (9,5-7)^2}{x}} = \sqrt{\frac{2,31x}{x}} \approx 1,52.$$

c)

<b>Munkaóra</b>	3 óra	4 óra	6 óra	8 óra	9,5 óra	
<b>Megosztás</b>	2%	10%	28%	56%	4%	
<b>Középponti szög</b>	$7,2^\circ$	$36^\circ$	$100,8^\circ$	$201,6^\circ$	$14,4^\circ$	

498 A teljes (a tanárokkal együtt számított) csoportlétszámnál 4-gyel kisebb szám osztható 6-tal és 5-tel is, vagyis osztható a legkisebb közös többszörösükkel, 30-cal, de 50-nél kevesebb. Ez a szám csak a 30 lehet, így a csoportlétszám 34.

a) A 34 főből 2 tanár, így 32 diák ment el a kirándulásra.

b)  $P = \frac{1}{6}$

c) A kézfogások száma:  $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120.$

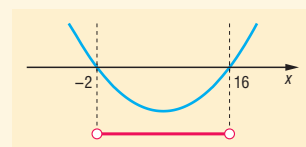
499 Először meghatározzuk a halmazok elemeit:

$$x^2 - 14x - 32 = 0,$$

amiből  $x_1 = 16, x_2 = -2.$

$$A = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$$

$$B = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$$



$$a) \bar{A} = \frac{-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15}{17} = \frac{119}{17} = 7$$

$$\bar{B} = \frac{3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18}{6} = 10,5$$

b)  $|A \cup B| = 18, |A \cap B| = 5,$  ekkor a valószínűség:  $P = \frac{5}{18}.$



500 a) A mellékelt táblázatban a dobott számok összege késsel, a dobott számok szorzata pedig pirossal található. Azok az esetek, amikor Norbi nyer 2 zsetont, késsel karikázottak, azok pedig, amikor Peti nyer 3 zsetont, pirossal karikázottak.

Norbi \ Peti	1	2	3	4	5	6
1	② 1	③ ②	4 3	⑤ ④	6 5	⑦ ⑥
2	③ ②	4 ④	⑤ ⑥	6 ⑧	⑦ ⑩	8 ⑫
3	4 3	⑤ ⑥	6 9	⑦ ⑫	8 15	9 ⑱
4	⑤ ④	6 ⑧	⑦ ⑫	8 ⑱	9 ⑳	10 ㉔
5	6 5	⑦ ⑩	8 15	9 ㉑	10 25	⑪ ㉓
6	⑦ ⑥	8 ⑫	9 ⑱	10 ㉔	⑪ ㉓	12 ㉖

b) Petinek akkor lesz 11 zsetonja, ha Peti nyer 3 és veszít 2 zsetont, azaz a dobott számok szorzata páros és a dobott számok összege prím, tehát a táblázatban pirossal és késsel is karikázott esetekről van szó, összesen 14 esetről. Így a keresett valószínűség:  $P = \frac{14}{36}$ .

c) Nincs zsetoncseré, ha a dobott számok szorzata páratlan és az összege nem prím, azaz a táblázatban a nem karikázott esetekről van szó, összesen 8 esetről. Így a valószínűség  $P = \frac{8}{36}$ .

d) Úgy lehet Norbinak 19 zsetonja 2 menet után, ha mindkét menetet megnyeri, azaz a dobott számok összege prím, de szorzata páratlan. A táblázatban csak késsel karikázott esetekről van szó, azaz 1 esetről az első és a második dobás során is. Így a valószínűség  $P = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{1296}$ .

501 Hozzuk a függvényeket egyszerűbb alakra:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|,$$

$$g(x) = -x^2 + 4x + 2 = -(x^2 - 4x - 2) = -[(x - 2)^2 - 4 - 2] = -(x - 2)^2 + 6.$$

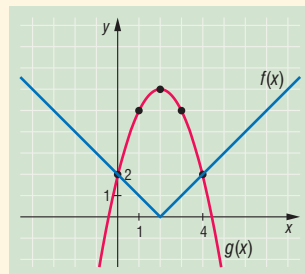
a) Az  $f(x)$  függvénynek minimuma van az  $x = 2$  helyen és a minimum értéke  $y = 0$ . A  $g(x)$  függvénynek maximuma van az  $x = 2$  helyen és a maximum értéke  $y = 6$ .

b) Metszéspontok leolvasással:  $x_1 = 0, x_2 = 4$ .

$$f(0) = |0 - 2| = 2, \quad g(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 + 2 = 2, \quad f(0) = g(0).$$

$$f(4) = |4 - 2| = 2, \quad g(4) = -4^2 + 4 \cdot 4 + 2 = 2, \quad f(4) = g(4).$$

Tehát valóban metszéspontok.



502 a)  $500\,000 \cdot 0,88^{10} \approx 139\,250$  Ft-ot ér.

b)  $390\,000 = 780\,000 \cdot 0,88^x \Rightarrow 0,5 = 0,88^x \Rightarrow x = \log_{0,88} 0,5 = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,8} \approx 5,4$ , vagyis a 6. évben.

c)  $650\,000 = x \cdot 0,88^8 \Rightarrow x \approx 1\,807\,390$  Ft-ért vásárolta a cég a gépet.

503 Binomiális eloszlás:  $p(\text{selejt}) = 0,03, \quad p(\text{jó}) = 0,97, \quad n = 10$ .

a)  $P(10 \text{ jó}) = 0,97^{10} \approx 0,7374$ .

b)  $P(10 \text{ selejt}) = 0,03^{10} \approx 5,9 \cdot 10^{-16}$ .

c)  $P(2 \text{ selejt}, 8 \text{ jó}) = \binom{10}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^8 \approx 0,0317$ .



$$d) P(0, 1 \text{ vagy } 2 \text{ selejt}) = 0,7374 + \binom{10}{1} \cdot 0,03^1 \cdot 0,97^9 + 0,0317 \approx 0,7374 + 0,2281 + 0,0317 = 0,9972.$$

**504** A számtani sorozat első három eleme  $a - d, a, a + d$ , összegük 90, így  $3a = 90$ , tehát  $a = 30$ . Ebből a számtani sorozat első három eleme  $30 - d, 30, 30 + d$ , így a mértani sorozat első 3 eleme  $21 - d, 30, 54 + d$ . Ekkor:

$$\frac{30}{21 - d} = \frac{54 + d}{30},$$

keresztbe szorzunk:

$$900 = (21 - d) \cdot (54 + d).$$

Felbontjuk a zárójeleket és rendezzük az egyenletet:

$$d^2 + 33d - 234 = 0.$$

Az egyenlet megoldása:  $d_1 = 6, d_2 = -39$  (ez utóbbi nem megoldás, mert növe a számtani sorozat).

A számtani sorozat különbsége 6, a mértani sorozat hányadosa  $q = \frac{30}{15} = 2$ .