Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

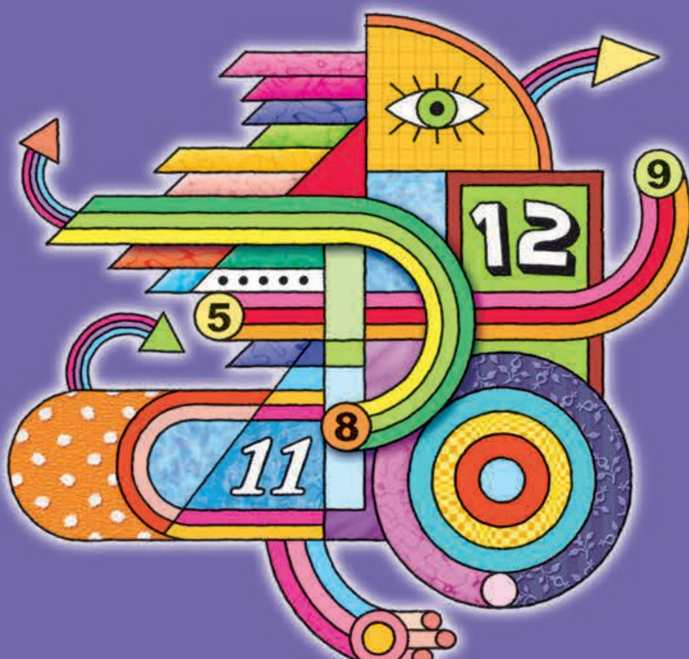
sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Megoldásokkal

12



ÉRETTSÉGI

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

12

Megoldásokkal

Hetedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2017

Tisztelt Olvasó!

Feladatgyűjtemény-sorozatunk egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A könyvek felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ezekből a tankönyvekből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

Ugyanakkor – mivel a feladatgyűjtemények felépítése természetesen megfelel a tantárgy belső logikájának és az iskolákban általánosan alkalmazott kerettanterveknek – minden nehézség nélkül használhatják azok is, akik más tankönyvekből tanulják, illetve tanítják a matematikát.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

4253 **Gyakorló feladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

4412 **Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*

4569 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

A feladatgyűjtemények feladatainak sorszámozása a tankönyvcsalád egyes köteteire utal.

A 9. évfolyam feladatai az 1001-es, a 10. évfolyam feladatai a 2001-es, a 11. évfolyamé a 3001-es, a 12. évfolyamé pedig a 4001-es sorszámtól kezdődnek.

A 12.-es kötetben a négy év anyagát áttekintő rendszerező összefoglalás feladatai az 5001-es sorszámtól indulnak, ezáltal segíti a feladatok közötti válogatást az érettségire történő felkészüléskor.

Megoldások

A feladatgyűjtemény minden feladat megoldását tartalmazza. A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők

TARTALOMJEGYZÉK

Készüljünk az érettségire!

12.5. *Rendszerező összefoglalás* (5001–5620)

Gondolkodási módszerek (5001–5113)

Algebra és számelmélet (5114–5277)

Függvények (5278–5402)

Geometria (5403–5620)

12.6. *Érettségi gyakorló feladatsorok*

A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset$, $\{\,\}$	üres halmaz
$\overline{A}$	az A halmaz komplementere
$\lvert A \rvert$	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f\colon x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}$, $\vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

Feladatok

12.2. SZÁMSOROZATOK

A sorozat fogalma, példák sorozatokra

4068 Számítsuk ki a következő sorozatok ötödik és huszadik elemét:

a) $a_n = 2n - 12$; *b)* $b_n = 100 - 5n$; *c)* $c_n = 2n^2 - 30n$;

d) $d_n = n^3 - 15n + 3$; *e)* $e_n = \sqrt{3n+4}$; *f)* $f_n = \sqrt{4n+1} - n$;

g) $g_n = \dfrac{3n-15}{2n+1}$; *h)* $h_n = \dfrac{n^2-3}{n-3}$.

4069 Folytassuk az alábbi sorozatokat, adjuk meg a sorozat általános tagját:

a) 5; 6; 7; 8; 9; … *b)* –3; –1; 1; 3; 5; … *c)* –1; –2; –4; –8; –16; …

d) 1; –1; 1; –1; 1; … *e)* $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots$ *f)* $\sqrt{7};\ \sqrt[3]{7};\ \sqrt[4]{7};\ \sqrt[5]{7};\ \sqrt[6]{7};\ \ldots$

g) $0;\ 1;\ \log_2 3;\ 2;\ \log_2 5;\ \ldots$ *h)* 1; 2; 3; 1; 2; …

4070 Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben és számegyenesen a következő sorozatok első hat tagját:

a) $a_n = \dfrac{3n}{5}$; *b)* $b_n = 2 - (-1)^n$; *c)* $c_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$;

d) $d_n = \dfrac{5-3n}{n+1}$; *e)* $e_n = 3 - \dfrac{2}{n}$; *f)* $f_n = 2 \cdot (-1)^{n+3}$.

4071 Határozzuk meg a következő sorozatok első hat tagját:

a) $a_n = \dfrac{64}{4^n}$; *b)* $b_n = 2010 - 4n$; *c)* $c_n = \sqrt{4n-1}$.

4072 Határozzuk meg az $a_n = 3 - 2 \cdot (-1)^n$ sorozat 2010. tagját és az első 2010 tag összegét.

4073 Döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb az alábbi esetekben:

a) az $a_n = 9 + 3 \cdot (-1)^n$ sorozat 50. tagja vagy a $b_n = \sqrt{n} + 7$ sorozat 25. tagja;

b) az $a_n = \dfrac{5 \cdot n}{n+3}$ sorozat 12. tagja vagy a $b_n = (-1)^{n+6} + 5$ sorozat 99. tagja;

c) az $a_n = 1$ sorozat 60. tagja vagy a $\dfrac{8}{7}$ tizedes tört alakjában a tizedes vessző utáni 67. jegy;

d) az $a_n = \cos\dfrac{7 \cdot n \cdot \pi}{3}$ sorozat 43. tagja vagy a $b_n = \dfrac{7n-7}{12n+88}$ sorozat 101. tagja;

e) Az $a_n = \lg(13n - 1)$ sorozat 77. tagja vagy a $b_n = \sqrt[n+3]{146n+2}$ sorozat 7. tagja?

4074 Hányadik tagja az alábbi sorozatoknak a 30?

a) $a_n = 8n - 18$; *b)* $b_n = \dfrac{10n+20}{3n-26}$; *c)* $c_n = |47 - 7n|$;

d) $d_n = n^2 - 11n + 18$; *e)* $e_n = \log_2 n$; *f)* $f_n = 60 \cdot \sin\dfrac{n \cdot \pi}{6}$.

Példák rekurzív sorozatokra

4075 Egy számsorozat első eleme 5. Számítsuk ki a sorozat első öt tagját, ha a második tagtól kezdve igaz, hogy

a) $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 6$; *b)* $a_n = -3 \cdot a_{n-1} + 21$; *c)* $a_n = \frac{2}{3} \cdot a_{n-1} - 1$; *d)* $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$.

4076 Hányféleképpen juthatunk fel egy 10 lépcsőből álló lépcsősoron, ha egyszerre egyet, kettőt vagy három lépcsőfokot lépünk?

4077 Egy sorozat tagjaira a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2010. eleme és az első 2010 elem összege, ha $a_1 = a_2 = 1$?

4078 Egy sorozat elemeire a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2009. eleme és az első 2009 tag összege, ha $a_1 = a_2 = 1$?

4079 Az a_n sorozatban $a_1 = p$, $a_2 = q$, adott pozitív számok, a sorozat tagjaira igaz, hogy:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}.$$

Adjuk meg a sorozat 2014. tagját p és q segítségével.

4080 Egy sorozat elemei pozitív egész számok, a harmadiktól kezdve mindegyik elem az összes őt megelőző elem összege. A sorozat első eleme 1.

a) Lehet-e eleme a sorozatnak a 2010?

b) Mekkora lehet a sorozat második eleme, ha a sorozat n-edik eleme 1000, és n a lehető legnagyobb?

Számtani sorozatok

4081 Egy számtani sorozat első tagja –7, differenciája 3. Adjuk meg a sorozat következő tagjait:

a) a_{11}; *b)* a_{56}; *c)* a_{237}; *d)* a_{2010}.

4082 Egy számtani sorozat huszadik tagja 41, differenciája 5. Mennyi a sorozat

a) 21-edik; *b)* 30-adik; *c)* 1956-odik tagja?

4083 Egy számtani sorozat első tagja 1, differenciája $\frac{2}{3}$. Hányadik tagja a sorozatnak az

a) 1849; *b)* 2011; *c)* 3000?

4084 Egy számtani sorozat negyvenedik tagja 25-tel kevesebb, mint a tizenötödik tag. Mennyi a sorozat differenciája?

4085 Kvarc Laci 12 éve gyűjti az értékes ásványokat. Az első évben 17 darabot gyűjtött, majd a következő évek során minden évben 9-cel többet, mint az előző évben.

a) Hány darab ásványt gyűjtött Laci a 12. évben?

b) Mennyi ásványt gyűjtött a 12 év alatt összesen?

4086 A Menő Manók Társasága hétnapos gyalogtúrát szervezett. A túra első napján 23 km-t gyalogoltak, minden további napon pedig 5 km-rel többet, mint az előző napon.

a) Hány kilométer tettek meg a hatodik napon?

b) Hány kilométer volt a túra teljes hossza?

4087 Frédi részt vett a kőemelő-bajnokságon. Az első edzésen egy 7 kg-os követ emelt fel. Az edzések során napról napra 5 kg-mal sikerül emelnie a felemelt legnagyobb kő tömegét. Az edzések 30 napig tartottak.

A kőemelő-bajnokságon minden versenyző ötször próbálkozhat, az nyer, aki a legnehezebb követ felemeli.

Frédi első kísérletére 10 kg-mal kevesebbet emelt, mint a versenyt megelőző utolsó edzésen, de minden további emeléskor 4 kg-mal tudott többet emelni, mint az előző emeléskor. A versenyt Frédi világcsúccsal nyerte. Mekkora tömegű kő felemelése jelentette a világcsúcsot?

4088 Egy számtani sorozat harmadik tagja 13, hetedik tagja pedig 25.

a) Mennyi a sorozat első eleme és különbsége?

b) Mennyi a sorozat első negyven elemének összege?

4089 Egy számtani sorozat hatodik tagja 30, tizenegyedik tagja 10.

a) Számítsuk ki a sorozat első tagját és differenciáját.

b) Mennyi a sorozat első 50 tagjának összege?

4090 Van-e olyan számtani sorozat, amelynek első három eleme:

$$3\cdot\sqrt{5}+1; \quad \frac{11\cdot\sqrt{5}-1}{2}; \quad 8\cdot\sqrt{5}-2?$$

4091 Az a_n számtani sorozat esetén ismert a következő tagok összege:

$$a_3+a_8=34 \quad \text{és} \quad a_2+a_{11}=46.$$

a) Mennyi a sorozat első eleme és differenciája?

b) Tagja-e a sorozatnak a 2012?

4092 Egy számtani sorozat első és negyedik tagjának összege 38, a hetedik és harmadik tag különbsége 16.

a) Mennyi a 40. és 17. tag különbsége?

b) Mennyi a sorozat 23. tagja?

c) Mennyi a sorozat első 60 tagjának összege?

4093 Egy számtani sorozat tagjaira teljesül, hogy $a_5\cdot a_{10}=-25$ és $a_2+a_8=10$. Adjuk meg a sorozat első tagját és differenciáját.

4094 Egy számtani sorozat első három tagjának összege -9, a harmadik, negyedik és ötödik tag összege pedig 39. Melyik ez a sorozat?

4095 Egy számtani sorozat első nyolc tagjának összege 14, a hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik tag összege pedig 1. Határozzuk meg a sorozatot.

4096 Egy számtani sorozat első négy tagjának összege harmada a következő négy tag összegének. Határozzuk meg az első tíz tag és a következő tíz tag arányát.

4097 Egy számtani sorozat ötödik tagja 10. Az első öt tag összege ötöde a következő öt tag összegének. Mennyi a sorozat differenciája?

12.4. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Geometriai valószínűség

4512 Egy számegyenesen kijelöltük a $J = [0; 10]$ intervallumot és annak $I = [2; 6]$ részhalmazát. Véletlenszerűen rádobunk egy pontot J-re.

a) Mekkora valószínűséggel esik a pont az I intervallumba?

b) Csökken-e a találat valószínűsége, ha I-t a nyitott $]2; 6[$ intervallumra cseréljük?

4513 Játsszuk párban a következő játékot. Mindkét játékos előtt van egy papírlap, amit a társa nem lát. A játékosok előre megegyeznek egy kiinduló intervallumban, amit jelöljön J. Az A játékos saját papírjára felír egy, a kiinduló intervallumba eső x valós számot, B pedig felírja az intervallum egy I részhalmazát. Ezután megmutatják a papírokat. Ha $x \in I$, akkor B nyert, ha $x \notin I$, akkor A. A következő fordulóban szerepet cserélnek. Az A játékos nyereménye annyi, ahány százaléka az I összhossza J-nek. B nyereménye a komplementer százaléka.

Például J alapintervallum legyen $[0; 5]$. Az A játékos megjelöli az $x = 4{,}5$ számot, B pedig az $I = [0; 3]$ intervallumot. Ekkor $x \notin I$, tehát A nyert. Mégpedig $\frac{|I|}{|J|} \cdot 100 = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$-nak megfelelő 60 pontot. Ha $x = 2$-t választotta volna, akkor B nyer $100 - 60 = 40$ pontot.

4514 Gizi és Géza a fenti játékot játsszák. Mekkora valószínűséggel nyer az intervallumot író, ha

a) $J = [1; 10]$ és $I = [1; 5]$;

b) $J =]0; 8[$ és $I = [2; 7]$;

c) $J = [-3; 3[$ és $I = [-2; -1] \cup]1; 2[$?

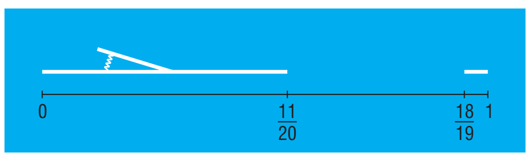
4515 Péter és Pál is a fenti játékot játssza. Mekkora valószínűséggel nyer a számot író, ha $J = [1; 10]$, és az intervallumot író

a) az összes páratlan számmal kezdődő zárt egységnyi intervallum unióját felírja;

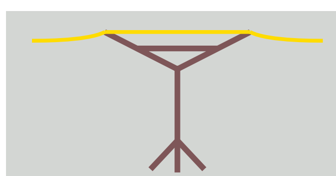
b) az összes prímszámmal kezdődő zárt egységnyi intervallum egyesítését felírja?

4516 A $J = [8; 15]$ intervallumon belül úgy szeretnénk kijelölni az I intervallumot, hogy ha véletlenül ráejtünk J-re egy pontot, akkor 0,7 valószínűséggel I-be essen. Adjunk meg ilyen I intervallumot.

4517 Menő Manó, a rajzfilmfigura a számegyenes $[0; 1]$ intervallumán barangol. Egyszer csak az ábrán látható dobbantó feldobja a levegőbe, miközben a másik oldalon eltűnik a vonal egy része. Most azon izgulunk, hogy a mi Manónk a lyukba esik-e. Mekkora ennek a valószínűsége, ha Menő Manó véletlenszerűen hullik vissza a $[0; 1]$ szakaszra?



4518 Táborozás alkalmával a ruhaszárító kötelet két, egymástól 12 méterre álló fához kötöttük. Mivel a kötél nagyon hosszú, egymástól azonos távolságra 5 darab Y alakú tartóoszlopot helyeztünk el. Az Y két felső szára 80 cm-re van egymástól, azokon rögzítve fut át a kötél. Arra lettünk figyelmesek, hogy egy kismadár reggelente véletlenszerűen rászáll valahol a kötélre, és csipkedni kezdi. Ha az Y két szára között csípi el a kötelet, az nem gond. Ám ha az oszlopok között, az már igen! Mekkora annak a valószínűsége, hogy ilyen részre száll a madár?

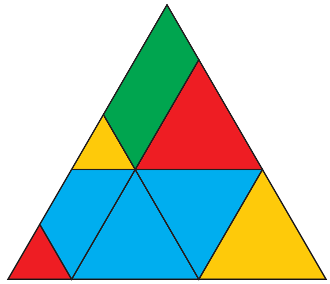


4519 Egy 5 cm × 15 cm-es fa téglalapból valahol kivágunk kettő, egymást nem fedő 3 cm oldalú négyzetet, és a „lyukas” téglalapot az ágyra tesszük. Magasról ráejtünk egy golyót a téglalapra. Mekkora valószínűséggel hallunk koppanást?

4520 A darts tábla 33,5 cm átmérőjű kör. A közepén levő nagyobb (általában zöld) kört *bullnak* nevezik, átmérője 3 cm. Az ebben levő kis piros kör a *bull’s eye,* átmérője 1,5 cm. Dávid dartsozni tanul. Már eljutott arra a szintre, hogy a táblába biztosan dobja a nyilat, de azon belül még véletlenszerűen talál. Mekkora valószínűséggel dob

a) legalább bullt; *b)* bull’s eye-t?

4521 Juliska egy ultramodern mézeskalács ház padlásterében lakik. A padlástérnek egyetlen szabályos háromszög formájú ablaka van, azon is csak a kékkel jelölt részt lehet kinyitni. Jancsi csúzlival próbál bejuttatni az ablakon egy Juliskának szánt üzenetet. Mekkora valószínűséggel fog kilőni színes üvegtáblát, ha az ablak épp nyitva van? (Jancsi az ablakot mindenképpen eltalálja. A kis háromszögek oldalai éppen feleakkorák, mint a nagyobbakéi.)



4522 A céltáblán minden sáv 2 cm széles, a középkör átmérője 4 cm. A legbelső kör 10 pontot ér, utána sorban kifelé 9, 8, 7, 6, 4, 2, 1 pontot érnek a sávok. A céltáblát biztosan eltaláljuk, de azon belül véletlenszerűen érünk el pontszámot. Mekkora valószínűséggel érünk el egy lövésből

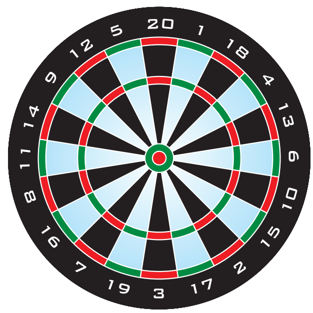
a) 10; *b)* 9; *c)* 7; *d)* 4;

e) legalább 8; *f)* legfeljebb 4 pontot;

g) 8 és 4 pont között, beleértve a 8-at és a 4-et is?

h) Mekkora valószínűséggel érünk el két lövésből 15 pontot?

4523 A dartstábla 33,5 cm átmérőjű kör, amely 20 egybevágó körcikkre van osztva. A külső, 1 cm széles színes sáv a duplázó. A belső triplázó sáv ugyanolyan széles, külső széle 5 cm-re van a duplázó belső szélétől. (A zöld bull átmérője 3 cm.) Dávid már sokat gyakorolt, biztosan megdobja a 20-at. Azon belül azonban még véletlenszerűen talál. Mekkora valószínűséggel dob



a) dupla 20-at;

b) tripla 20-at;

c) két nyíllal 80 pontot,

ha csak a 20-as mezőbe érkeznek a dobónyilai?

4524 Hány százaléka legyen a céltábla sugarának a középső kör sugara, ha azt akarjuk, hogy a céltáblát érő véletlen találatok esetén a maximális pontszám valószínűsége 0,01 legyen?

4525 Mennyi a valószínűsége, hogy az $x^2 - 4x + c = 0$ egyenlet mindkét megoldása 1-nél nagyobb, ha c-t a $[-2; 4]$ intervallumból választjuk véletlenszerűen?

4526 Tekintsük az $A(-4; -3)$, $B(4; -3)$, $C(4; 3)$, $D(-4; 3)$ csúcsokkal adott téglalapot. Válasszunk véletlenszerűen egy $P(x; y)$ pontot az $ABCD$ téglalapból. Mennyi a valószínűsége, hogy ekkor a pont koordinátáira $|x| + |y| \leq 2$?

Készüljünk az érettségire!

Rendszerező összefoglalás
74

Gondolkodási módszerek
Algebra és számelmélet
Függvények
Geometria

Érettségi gyakorló feladatsorok
150

12.5. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – ÖSSZEFOGLALÁS

Halmazok

5001 Döntsük el, halmazok-e vagy sem a következők. Ha igen, adjuk meg az elemszámukat, illetve soroljuk fel elemeiket is, ahol lehetséges.

a) $A = \{$7-nél nagyobb, hatoldalú szabályos dobókockával dobott számok$\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0{,}5 < x < 0{,}6\}$;

c) $C = \{\{1; 2; 3; 4\}$ halmaz valódi részhalmazai, melyeknek részhalmaza $\{2; 3\}\}$;

d) $D = \{x \mid x \notin D\}$.

5002 *a)* Soroljuk fel az $A = \{a; b; c\}$ halmaz összes részhalmazát. Hány diszjunkt párt találunk közöttük?

b) Hány részhalmaza van a $B = \{$16-nál kisebb pozitív prímszámok$\}$ halmazának?

5003 Adott az $A = \{$egyjegyű pozitív prímek$\}$ és a $B = \{$páratlan egyjegyű pozitív egészek$\}$ halmaz.

a) Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ halmazokat.

b) Mivel egyezik meg $\overline{A}$, illetve $\overline{B}$, ha az univerzum $U = A \cup B$?

c) Legyen az alaphalmaz $U = \{$egyjegyű pozitív egészek$\}$. Adjunk meg úgy egy $C \subseteq U$ halmazt, hogy a lehető legtöbb eleme legyen, és $B \cap C$ diszjunkt legyen A-val.

5004 Adott az $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 10\}$ alaphalmazban a következő két halmaz: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 4\}$ és $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3t$ valamely $t \in \mathbb{Z}$-re$\}$.

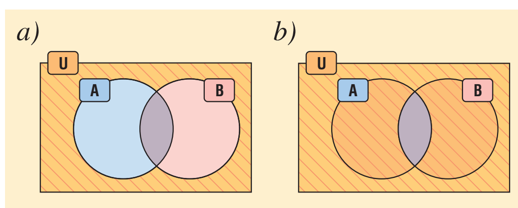
a) Ábrázoljuk U, A és B halmazt közös Venn-diagramon.

b) Adjuk meg $\overline{A}$ és $\overline{B}$ halmazokat.

c) Olvassuk le a diagramról, hogy milyen elemek alkotják az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ halmazokat.

5005 Ábrázoljuk Venn-diagrammal az $A \setminus \overline{B}$ halmazt (U, A, B nem üres halmazok). Adjuk meg másképp is a kapott eredményt.

5006 Írjuk le legalább kétféleképpen az alábbi Venn-diagramokon vonalkázással jelzett részeket. (➡)



5007 Szemléltessük Venn-diagrammal, hogy

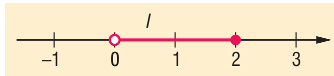
$$(B \cup C) \setminus (A \setminus (B \cap C)) =$$
$$= (B \setminus A) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

5008 A rock and roll klubban hat fő iszik bambit, nyolc pedig tvisztel. Hárman – ugyancsak elítélhető módon – bambival a kezükben tvisztelnek, tizenhárman pedig csak beszélgetnek. Hány vendég van éppen a rock and roll klubban? (A klubban csak bambi kapható.)

5009 Egy szobában 12 fő tartózkodik, közülük négy fő haja barna, öt fő szeme fekete. Van három fő, aki nem rendelkezik egyik tulajdonsággal sem. Hány barna hajú fekete szemű illető van itt?

5010 A 30 fős osztály röpdolgozatot írt matematikából. 15-en megoldották az első feladatot, öten mindkét feladatot, hét személy pedig csak a másodikat. A csoport létszámának hány százaléka nem tudott megbirkózni egyik kérdéssel sem?

5011 Adott az ábrán látható I intervallum. Határozzuk meg I komplementerét, ha



a) $U =]0, 5]$; *b)* $U =]-2, 2]$;

c) $U = [0, 7]$; *d)* $U = \mathbb{R}$.

5012 Ábrázoljuk számegyenesen az I, J, K halmazokat.

a) $I = [2, 4[$; *b)* $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 < 0\}$;

c) $K = \left\{ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-6}} \text{ függvény értelmezési tartománya} \right\}$.

Jelöljük számegyenesen és adjuk meg intervallummal is a következőket.

d) $J \setminus I$; *e)* $I \cap K$; *f)* $(K \setminus J) \cup I$.

5013 Ábrázoljuk egységkörben azokat az $x \in U = [0°, 360°]$ szögeket, melyekre teljesül:

a) $I = \{x \mid 0 \le \operatorname{tg} x \le 1\}$; *b)* $J = \{x \mid 0{,}5 \le \sin x\}$; *c)* $x \in J \cap I$;

d) $x \in \overline{I} \setminus J$.

5014 Adott az A halmaz. Tudjuk róla, hogy $|A| = 10$.

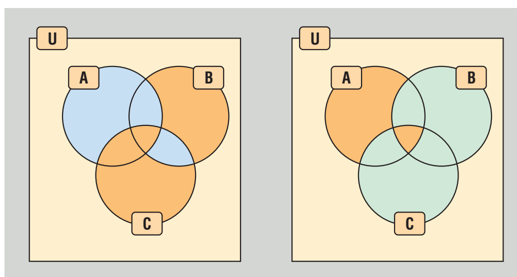
a) Hány darab nullaelemű részhalmaza van? Hány kilencelemű részhalmaza van?

b) Hány kettő-, négy-, öt-, nyolcelemű részhalmaza van?

c) Hány elemű az a részhalmaza, amelyből 120 darab különbözőt számolhatunk össze?

5015 Adjunk meg úgy négy halmazt, hogy közülük bármely háromnak legyen közös eleme, de a négy halmaz metszete üres legyen.

5016 Figyeljük meg az ábrákon jelölt halmazokat. (A kéket nevezzük P-nek, a zöldet Q-nak.)



a) Adjuk meg P-t és Q-t A, B, C és a halmazműveletek segítségével.

b) Milyen feltételt kell A, B, C-re adnunk, hogy P és Q diszjunkt halmazok legyenek?

c) Milyen feltételek mellett lesz $P \subset Q$?

5017 Legyen $U = \{a; b; c; d; e\}$. Ebben az univerzumban A, B, C halmazokról tudjuk, hogy elemszámaik megegyeznek, továbbá:

$$A \cap B \cap C = \{b\}, \quad B \setminus A = \{c\}, \quad A \setminus (B \cap C) = \{d\} \quad \text{és} \quad C \setminus B = \varnothing.$$

Adjuk meg $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ elemeit.

5018 Az $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaz A, B, C részhalmazairól ismerjük a következőket:

$$A \cap B = \{2\}, \quad (A \cup B) \cap C = \{5; 6\}, \quad A \setminus C = \{2; 3; 4\} \quad \text{és} \quad C \setminus B = \{1; 5\}.$$

Határozzuk meg az A, B, C halmazokat.

5019 Az $U = \{1; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ halmaz A, B, C részhalmazairól tudjuk, hogy:

$$A \setminus B = \{7; 8; 9\}, \quad C \setminus B = \{5; 6; 7\}, \quad A \cap B = \{10\}, \quad (A \cup B) \setminus C = \{1; 8; 9; 10\}.$$

a) Határozzuk meg az A, B és C halmazokat. *b)* Ábrázoljuk Venn-diagrammal.

c) Hány elemű az $A \cap B \cap C$ halmaz? *d)* Hány elemű $(A \cup B) \cap C$ halmaz?

5020 Az A, B, C halmazok az $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ részhalmazai. Tudjuk róluk, hogy:

$$A \setminus (B \cup C) = \{2; 5\}, \quad \{3; 6; 7\} \subseteq A \cap B, \quad B \setminus C = \{3; 4; 6; 7\}, \quad C \setminus B = \varnothing.$$

Megmondhatjuk-e A, B, C elemeit, ha

a) $|C| = 0$; *b)* $|C| = 1$?

5021 Legyen $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Az A, B, $C \subset U$ halmazokról a következőket tudjuk:

$A \cap B = \{1; 5\}$, B-nek csak páratlan számok az elemei, $(A \cup B) \cap C = \{1; 3; 5; 8\}$,

$\overline{A \cup B \cup C}$-be eső elemek összege 8, $(B \cup C) \setminus A = \{3; 4; 7\}$, B elemeinek összege páros.

a) Készítsünk Venn-diagramot.

b) Mennyi külön-külön az A, B, C halmazokba eső elemek összege?

5022 A Kiskunsági Nemzeti Park dolgozóinak dönteniük kell, hogy ősszel vagy tavasszal szeretnének-e ellátogatni a Hortobágyi Nemzeti Parkba. A dolgozók 60%-a ősszel, 80%-a tavasszal menne, így akadt olyan is, aki mindkét évszakban szívesen látogatna a Hortobágyra, ők 8-an voltak.

a) Hányan dolgoznak a Kiskunsági Nemzeti Parkban, ha mindenki válaszolt a feltett kérdésre?

b) Hányan szeretnének inkább csak ősszel utazni?

5023 Egy osztályban 20 tanuló gyűjt a Forma–1 versenyzőitől dedikált emléket. Lewis Hamilton 12, Jenson Button 16, Fernando Alonso 15 főnek dedikált már. A 20 tanuló mindegyike szeretne mindhárom pilótától autogramot, így természetesen akad 8 olyan is, akinek Hamiltontól és Buttontól, 12 akinek Buttontól és Alonsótól és 7 fő, akinek Hamiltontól és Alonsótól is van már emléke.

a) Hány tanuló szerzett mindhárom említett versenyzőtől emléket?

b) Hányan gyűjtöttek csak Jenson Buttontól emléket?

5024 Amikor Hófehérkét az ételmérgezés után kiengedték a kórházból, a törpék nagy vigasságot csaptak. A hét törpe (akik között nincsenek testvérek) mindegyike meghívta 5-5 testvérét, akik szintén bányászok. A jelen levő törpék között volt 21 vájár, 21 telepvezető és 20 fő, aki narancssárga sapkát viselt. Telepvezető vájár annyi volt, mint narancssárga sapkás telepvezető (7-7 fő), ellenben narancssárga sapkában csak 6 vájár díszelgett. Hány telepvezető vájár jött az ünnepségre narancssárga sapkában? (A partira a törpéken kívül csak a királyfi és maga Hófehérke volt hivatalos, a sajtót – Réti Kurír – sem engedték be.)

5025 A 101 kiskutyát Szörnyella De Frász pribékjei három nagy csoportra osztották: fekete farkú, tarka fülű és fehér lábú csoportokba. Megszámolták, hogy az egyes csoportokban a fenti sorrendben 64, 60, 56 kutyus van. Fekete farkú és tarka fülű kölyök van 41, tarka fülű és fehér lábú van 22, fehér lábú és fekete farkú pedig 35.

a) Hány kutya bírja a fogva tartottak közül mindhárom tulajdonságot, ha egy megszökött a számolás előtt a pribékektől?

b) Hány olyan kutyus van Szörnyellánál, amelyiknek fehér a lába, de nem tarka a füle és nem fekete a farka?

5026 Egy panzióban ebédnél nyolcan rendeltek levest, tízen főételt.

a) Milyen határok között mozoghat azoknak a száma, akik mindkét ételtípusból kértek?

b) Összesen mennyien ülhettek asztalhoz délben a panzióban?

5027 Az A, B, C halmazokról a következőket tudjuk: $|C| = 13$. Ehhez képest A-nak 1-gyel több, B-nek 4-gyel kevesebb eleme van. $A \cap C$ elemszáma fele $|A|$-nak, $|A \cap B|$ kétharmada B elemszámának, $|B \cap C|$ pedig 5-tel kevesebb, mint $|B|$. A hármas metszet elemszáma az egyetlen páros prímszám. Hány elemű az alaphalmaz, ha $|\overline{A \cup B \cup C}| = 3$?

5028 Tekintsük az $\dfrac{5x-4}{2x+8} - \dfrac{x-3}{x+4} \geq 1$ egyenlőtlenséget a racionális számok halmazán.

a) Megoldás-e az 1?

b) Adjuk meg a legkisebb pozitív megoldását a feladatnak. Van-e legnagyobb negatív megoldás?

c) Soroljuk fel az összes olyan 2 nevezőjű valódi törtet, amely nem megoldása a feladatnak.

5029 Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi halmazokat.

a) $L = \{(x, y) \mid y \leq \log_2(x+3)\}$; *b)* $M = \{(x, y) \mid 2^{x-3} \leq y\}$;

c) $L \cap M$.

5030 Legyen az univerzum $U = \{1; 2; \ldots; n\}$. Adjunk meg úgy n darab $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazt az alaphalmazból, hogy bármely $(n-1)$ halmaznak pontosan egy közös eleme legyen, mégpedig mindig a hiányzó index. Pl.: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} = \{n\}$.

5031 Adjuk meg úgy $A, B \subseteq U$ nemüres halmazok lehető legkisebb elemszámait, hogy teljesüljenek a következők:

$$2|A| = |U|, \quad 3|A \cap B| = |B|, \quad 10|A \cup B| = 9|U|.$$

5032 Tekintsük az $I_n = \left]0; \dfrac{1}{n}\right[$ és $J_n = \left]-\dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n}\right[$ intervallum-sorozatokat.

a) Van-e közös pontja a J_n sorozat elemeinek?

b) Van-e közös pontja az I_n sorozat elemeinek?

c) Van-e közös pontja a $J_n \setminus I_n$ sorozat elemeinek?

Kijelentések, események

5033 Legyenek $A = \{\text{szép idő lesz}\}$ és $B = \{\text{kirándulni megyek}\}$ események.

a) Adjuk meg szövegesen az $A + B$ és az $A \cdot B$ eseményeket.

b) Írjuk le események közötti műveletekkel a „Nem lesz szép idő, de elmegyek kirándulni” kijelentést.

c) Tekintsük a „Ha szép idő lesz, akkor kirándulni megyek” kijelentést, és fogadjuk el, hogy mindig igazat mondok. Milyen idő lehet, ha most éppen kirándulok?

5034 Egy véletlenszám-generátor 1-nél nem kisebb és 20-nál nem nagyobb egész számot ad. Legyenek a következő események:

$$A = \{\text{páros szám}\}, \quad B = \{\text{hárommal osztható szám}\}, \quad C = \{\text{öttel osztható szám}\}.$$

a) Hány elemi eseményből állnak A, B, C események?

b) Adjuk meg szövegesen és elemi eseményeik felsorolásával a következő eseményeket:

$$A \cdot B, \quad B + C, \quad \overline{A} \cdot C.$$

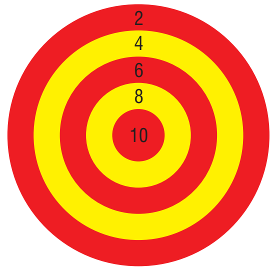
c) Adjuk meg az A, B, C események és műveletek segítségével a $D = \{\text{második páratlan prím}\}$ eseményt.

5035 Egy körökre osztott céltábla belülről kifelé a 10, 8, 6, 4, 2 pontokat érő sávokra van osztva. Tekintsük az alábbi eseményeket:

$A = \{5\text{-nél kisebb lövés}\}$,
$B = \{3\text{-mal osztható lövés}\}$,
$C = \{2 \text{ hatvány értékű lövés}\}$.

a) Határozzuk meg elemi eseményeikkel az alábbi eseményeket:
$A + B + C,\quad A \cdot B \cdot C,\quad A \cdot B \cdot \overline{C},\quad \overline{A} \cdot B \cdot C,\quad A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C},\quad B \cdot \overline{A} \cdot \overline{C}.$

b) Adjuk meg az A, B, C események és a műveletek segítségével a telitalálat eseményt.



5036 Döntsük el, hogy a kijelentés vagy megfordítása igaz vagy hamis. Töltsük ki a táblázatot.

A = Ha egy háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, akkor a háromszög derékszögű.

B = Ha egy négyszög négyzet, akkor minden szöge derékszög.

C = Ha egy tétel igaz, akkor a tagadása hamis.

D = Ha egy szám 3-mal osztható, akkor páros.

	A	B	C	D
Kijelentés				
Megfordítása				

5037 Döntsük el, hogy igazak vagy sem a következtetések.

a) Minden ember fenség. Ember vagyok. Ebből következik, hogy fenség vagyok.

b) Bármely tanya nádfedeles. Ez az épület nádfedeles. Tehát ez az épület tanya.

5038 Tagadjuk az alábbi kijelentéseket, és döntsük el, hogy az állítás, illetve a tagadása igaz vagy hamis.

a) Minden deltoid átlói merőlegesek egymásra.

b) Van olyan háromszög, melynek a legkisebb szöge is nagyobb $60°$-nál.

c) Minden hattal osztható szám osztható kilenccel is.

d) Van olyan pozitív egész, melynek a prímtényezős felbontásában nem szerepel a 17.

e) A hét törpe közül egyik sem volt magasabb Hófehérkénél.

f) Sohasem írom le azt, hogy soha.

g) Ha egy szám 7-nek valamely hatványa, akkor osztható 3-mal.

h) Bármely kicsiny α $(\alpha > 0)$ szöghöz létezik olyan pozitív egész n, hogy az n-nél több csúcsú szabályos sokszögek külső szöge kisebb, mint α.

Kombinatorika

5039 Egy kis ország kis demokráciájában öt párt állíthat országos listát. A választási bizottság sorsolással dönti el, melyik párt hányadik helyen szerepel a szavazólapon. Hányféle sorrendben kerülhetnek egymás alá a pártok nevei?

5040 Álmos összeírta hat ismerősét, akiket meghív a születésnapjára. Elsőnek Előd, utolsónak Töhötöm jutott eszébe. Hányféle sorrend alakulhatott ki a papíron, ha a többiek véletlenszerűen jutottak Álmos eszébe?

5041 Peti öccsének van egy-egy kör, háromszög, négyszög, ember és madár formájú bélyegzője. Úgy nyomta a papírra sorban őket, hogy a két élőlény egymás mellé került. Hány különböző ilyen bélyegzést készíthet még az előző alá?

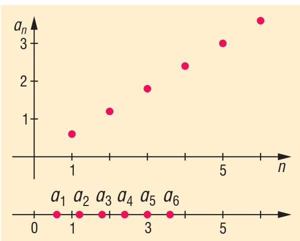
Megoldások

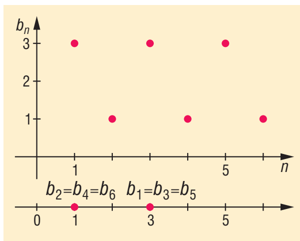
12.2. SZÁMSOROZATOK

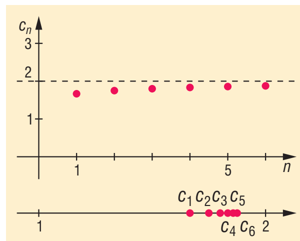
A sorozat fogalma, példák sorozatokra – megoldások

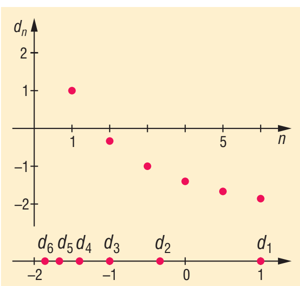
4068 *a)* $a_5 = -2, \quad a_{20} = 28;$ *b)* $b_5 = 75, \quad b_{20} = 0;$ *c)* $c_5 = -100, \quad c_{20} = 200;$
d) $d_5 = 53, \quad d_{20} = 7703;$ *e)* $e_5 = \sqrt{19}, \quad e_{20} = 8;$ *f)* $f_5 = \sqrt{21} - 5, \quad f_{20} = -11;$
g) $g_5 = 0, \quad g_{20} = \dfrac{45}{41};$ *h)* $h_5 = 11, \quad h_{20} = \dfrac{397}{17}$

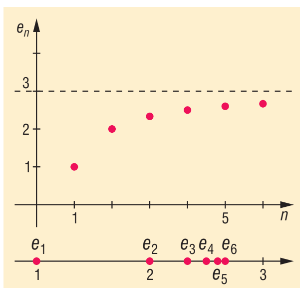
4069 *a)* $a_n = 4 + n;$ *b)* $b_n = 2n - 5;$ *c)* $c_n = -2^{n-1};$
d) $d_n = (-1)^{n+1};$ *e)* $e_n = \dfrac{1}{n};$ *f)* $f_n = \sqrt[n+1]{7};$
g) $g_n = \log_2 n;$ *h)* $h_n = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad n = 3k+1, \\ 2, & \text{ha} \quad n = 3k+2, \\ 3, & \text{ha} \quad n = 3k. \end{cases}$

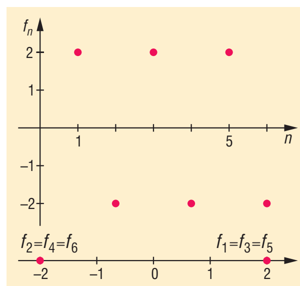
4070 *a)*


b)


c)


d)


e)


f)


4071 *a)* $16; \quad 4; \quad 1; \quad \dfrac{1}{4}; \quad \dfrac{1}{16}; \quad \dfrac{1}{64};$ *b)* $2006; \quad 2002; \quad 1998; \quad 1994; \quad 1990; \quad 1986;$
c) $\sqrt{3}; \quad \sqrt{7}; \quad \sqrt{11}; \quad \sqrt{15}; \quad \sqrt{19}; \quad \sqrt{23}.$

4072 $a_{2010} = 1, \quad S_{2010} = 6030.$

4073 *a)* $a_{50} = 12 = b_{25};$ *b)* $a_{12} = 4 = b_{99};$ *c)* $a_{60} = 1 = b_{67};$
d) $a_{43} = \dfrac{1}{2} < b_{101} = \dfrac{7}{13};$ *e)* $a_{77} = 3 > b_7 = 2.$

4074 *a)* $n = 6;$ *b)* $n = 10;$ *c)* $n = 11;$
d) $n = 12;$ *e)* $n = 2^{30};$ *f)* $n = 1;\ 5;\ 13;\ 17;\ \ldots$

Példák rekurzív sorozatokra – megoldások

4075 *a)* 5; 4; 2; –2; –10; *b)* 5; 6; 3; 12; –15;

c) $5;\ \frac{7}{3};\ \frac{5}{9};\ -\frac{17}{27};\ -\frac{115}{81};$ *d)* $5;\ \frac{5}{2};\ \frac{5}{6};\ \frac{5}{24};\ \frac{1}{24}.$

4076 Építsük fel a sorozatot: $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4$ és a negyedik tagtól kezdve:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},$$

tehát a további tagok:

$$a_4 = 7;\quad a_5 = 13;\quad a_6 = 24;\quad a_7 = 44;\quad a_8 = 81;\quad a_9 = 149;\quad a_{10} = 274.$$

Tehát 274-féleképpen érhetünk fel.

4077 A sorozat tagjai: 1; 1; 1; 1; 1, …, tehát $a_{2010} = 1$ és $S_{2010} = 2010$.

4078 A sorozat tagjai: 1; 1; 0; –1; –1; 0; 1; 1; …, látható, hogy egy hatos periódus után újra ugyanazok a számok lesznek a sorozat elemei.

Mivel $2009 = 6 \cdot 334 + 5$, a 2009-edik tag –1 lesz.

Egy periódusban a számok összege 0, mivel a hatodik elem is 0, az első 2009 tag összege is 0.

4079 Vizsgáljuk meg a sorozat tagjait:

$$a_3 = \frac{q+1}{p};\qquad a_4 = \frac{\frac{q+1}{p}+1}{q} = \frac{p+q+1}{p\cdot q};\qquad a_5 = \frac{\frac{p+q+1}{p\cdot q}+1}{\frac{q+1}{p}} = \frac{(p+1)\cdot(q+1)}{p\cdot q}\cdot\frac{p}{q+1} = \frac{p+1}{q};$$

$$a_6 = \frac{\frac{p+1}{q}+1}{\frac{p+q+1}{p\cdot q}} = p;\qquad a_7 = \frac{p+1}{\frac{p+1}{q}} = q.$$

A tagok ismétlődnek, a periódus öt. Tehát:

$$a_{2014} = a_4 = \frac{p+q+1}{p\cdot q}.$$

4080 *a)* Lehet, például: 1; 2009; 2010; …

b) Ha a második tag x, a sorozat tagjai:

$$1;\quad x;\quad 1+x;\quad 2\cdot(1+x);\quad 4\cdot(1+x);\quad 8\cdot(1+x);\quad \ldots;\quad a_n = 2^{n-3}\cdot(1+x).$$

A $2^{n-3}\cdot(1+x) = 1000$ egyenlet legnagyobb megoldása $n = 6$, ekkor $x = 124$.

Számtani sorozatok – megoldások

4081 *a)* $a_{11} = 23$; *b)* $a_{56} = 158$; *c)* $a_{237} = 701$; *d)* $a_{2010} = 6020$.

4082 *a)* 46; *b)* 91; *c)* 9721.

4083 *a)* 2773-adik; *b)* 3016-odik; *c)* nem tagja a sorozatnak.

4084 $d = -1$.

4085 *a)* 116; *b)* 798.

4086 *a)* $a_6 = 23 + 5 \cdot 5 = 48$ km. *b)* $S_7 = 266$ km.

4087 A világcsúcs 158 kg.

4088 *a)* $a_1 = 7$ és $d = 3$. *b)* $S_{40} = 2620$.

4089 *a)* $a_1 = 50$ és $d = -4$. *b)* $S_{50} = -2400$.

4090 Igen, mivel

$$\frac{11\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3\sqrt{5}+1+8\sqrt{5}-2}{2}.$$

A sorozat különbsége:

$$d = \frac{5\sqrt{5}-3}{2}.$$

4091 *a)* A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + 2d + a_1 + 7d &= 34 \\ a_1 + d + a_1 + 10d &= 46 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $a_1 = -10$ és $d = 6$.

b) $2012 = a_{338}$.

4092 Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + (a_1 + 3d) &= 38 \\ (a_1 + 6d) - (a_1 + 2d) &= 16 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = 4$ és $a_1 = 13$.

a) 92; *b)* 101; *c)* 7860.

4093 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 + 4d)\cdot(a_1 + 9d) &= -25 \\ 2a_1 + 8d &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $a_1 = 13$ és $d = -2$.

4094 Az egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{aligned} 3a_1 + 3d &= -9 \\ 3a_1 + 9d &= 39 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = 8$ és $a_1 = -11$.

4095 Az egyenletrendszerünk a következő:

$$\left.\begin{aligned} 8a_1 + 28d &= 14 \\ 4a_1 + 26d &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = -\frac{1}{2}$ és $a_1 = \frac{7}{2}$.

4096 A feltétel szerint:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} = \frac{4a_1 + 6d}{4a_1 + 22d} = \frac{1}{3}, \quad \text{amiből} \quad d = 2a_1.$$

A keresett arány:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}}{a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{20}} = \frac{10a_1 + 45d}{10a_1 + 145d} = \frac{1}{3}.$$

12.5. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – ÖSSZEFOGLALÁS

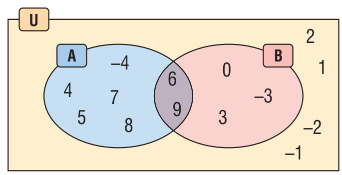
Halmazok – megoldások

5001 *a)* Igen, $|A| = 0$, $A = \varnothing$; *b)* Igen, $|B| = \infty$;
c) Igen, $|C| = 3$, $C = \{\{2; 3\}, \{1; 2; 3\}, \{2; 3; 4\}\}$; *d)* Nem.

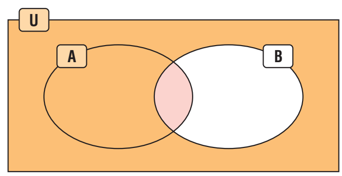
5002 *a)* $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$, $\{a; b; c\}$.
$\varnothing$ diszjunkt minden más részhalmazzal, rajta kívül $\{a\}$ és $\{b; c\}$, $\{b\}$ és $\{a; c\}$, $\{c\}$ és $\{a; b\}$ diszjunktak.
b) $|B| = 6$, $|\{B \text{ összes részhalmaza}\}| = 2^6 = 64$.

5003 $A = \{2; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 9\}$; $A \cap B = \{3; 5; 7\}$; $A \setminus B = \{2\}$; $B \setminus A = \{1; 9\}$;
b) $\overline{A} = \{1; 9\}$, $\overline{B} = \{2\}$;
c) $C = \{1; 2; 4; 6; 8; 9\}$.

5004 $U = \{-4; -3; \ldots; 8; 9\}$, $A = \{-4; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
$B = \{-3; 0; 3; 6; 9\}$.
a) A Venn-diagram az ábrán látható.
b) $\overline{A} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $\overline{B} = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 8\}$.
c) $A \cup B = \{-4; -3; 0; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $A \cap B = \{6; 9\}$,
$A \setminus B = \{-4; 4; 5; 7; 8\}$, $B \setminus A = \{-3; 0; 3\}$.

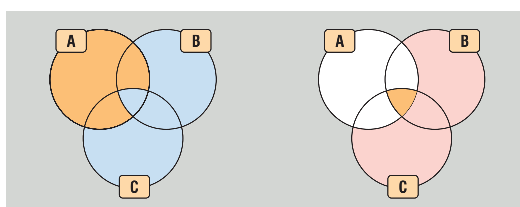


5005 $A \setminus \overline{B} = A \cap B$.



5006 *a)* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; *b)* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5007 A Venn-diagram az ábrán látható.



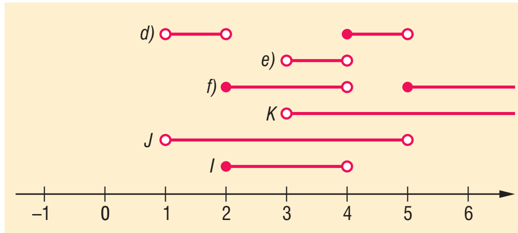
5008 $|U| = |A \cup B| + |\overline{A \cup B}| = |A| + |B| - |A \cap B| + |\overline{A \cup B}| = 6 + 8 - 3 + 13 = 24.$

5009 $|U| = |A| + |B| - |A \cap B| + |\overline{A \cup B}|$; $12 = 4 + 5 - x + 3$; $x = 0$.

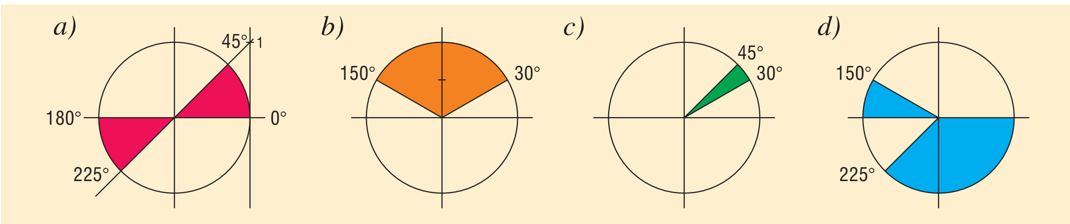
5010 $|U| = |A| + |B \setminus A| + |\overline{A \cup B}|$; $30 = 15 + 7 + x$; $x = 8$.

5011 *a)* $\overline{I} =]2; 5]$; *b)* $\overline{I} =]-2; 0]$;
c) $\overline{I} = \{0\} \cup]2; 7]$; *d)* $\overline{I} =]-\infty; 0] \cup]2; \infty[$.

5012 *a)* $I = [2; 4[$;
b) $J =]1; 5[$;
c) $K =]3; \infty[$;
d) $J \setminus I =]1; 2[\cup [4; 5[$;
e) $I \cap K =]3; 4[$;
f) $(K \setminus J) \cup I = [2; 4[\cup [5; \infty[$.



5013 *a)* $I = [0°; 45°] \cup [180°; 225°]$; *b)* $J = [30°; 150°]$;
c) $J \cap I = [30°; 45°]$; *d)* $\overline{I} \setminus J =]150°; 180°[\cup]225°; 360°]$.



5014 *a)* Nullaelemű részhalmaz csak az üres halmaz lehet, tehát a válasz 1. Kilenceleműek azok a részhalmazok, melyeket úgy kapunk, hogy egy elemet elhagyunk *A*-ból. Mivel 10-féleképpen tehetjük ezt meg, a válasz 10.

b) Annyi *k*-elemű részhalmaza van, ahányféleképpen a 10 elemből ki tudunk választani ismétlés nélkül *k* darabot. Tehát $\binom{10}{2} = 45$, $\binom{10}{4} = 210$, $\binom{10}{5} = 252$, $\binom{10}{8} = 45$.

c) $\binom{10}{k} = 120$. Próbálkozással, vagy az előző kérdésre adott válaszok figyelembevételével $k = 3$, illetve $k = 7$.

5015 Például ilyen a következő 4 halmaz: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 4\}$, $C = \{1; 3; 4\}$, $D = \{2; 3; 4\}$.

5016 *a)* Mindkét halmazt többféleképpen is felírhatjuk, például

$$P = (A \setminus C) \cup (B \cap C) \setminus A \quad \text{és} \quad Q = (B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C).$$

b) Azt kell biztosítanunk, hogy a két halmaz közös része üres halmaz legyen:

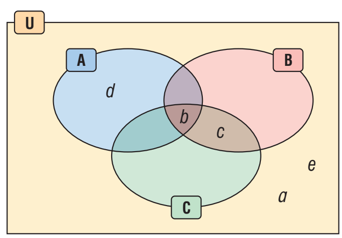
$$[B \cap (A \cup C)] \setminus (A \cap B \cap C) = \varnothing.$$

c) Azt kell biztosítanunk, hogy a *P* *Q*-n kívül eső része üres halmaz legyen:

$$A \setminus (B \cup C) = \varnothing.$$

5017 Írjuk *b*-t a hármas metszetbe. Ekkor *c*-t *B* és *C* kettős metszetbe kell helyeznünk, így *d* csak *A* metszeteken kívüli részébe kerülhet. (Közben figyelembe vettük, hogy az elemszámok egyenlők.) Ezek szerint:

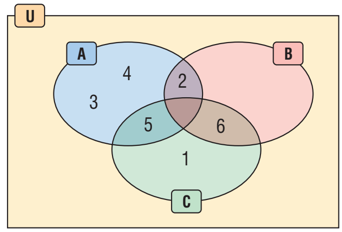
$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{a; e\}.$$



5018 A megoldáshoz töltsünk ki egy Venn-diagramot. A 2-t két helyre írhatjuk, de a második feltétel a hármas metszetet kizárja. A 3-at és a 4-et csak egy helyre írhatjuk ezek után. Az 5 két feltételben is szerepel, így csak egy helyre kerülhet. Végül a 6-ot sem írhatjuk középre.

A megoldás a diagramról leolvasható:

$$A = \{2; 3; 4; 5\},\quad B = \{2; 6\},\quad C = \{1; 5; 6\}.$$

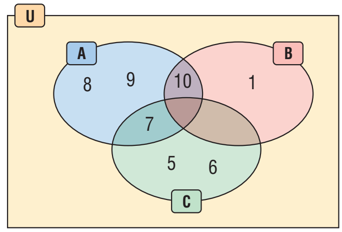


5019 *a)* $A = \{7; 8; 9; 10\}$, $B = \{1; 10\}$, $C = \{5; 6; 7\}$.

b) A Venn-diagram az ábrán látható.

c) Üres halmaz.

d) $|(A \cup B) \cap C| = 1$, egyelemű $\{7\}$.



5020 *a)* Ha C üres halmaz, akkor:

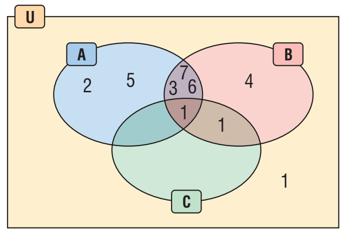
$$A = \{2; 3; 5; 6; 7\},\quad B = \{3; 4; 6; 7\}.$$

b) C eleme csak az 1 lehet. Ezt rögtön két helyre is írhatjuk: vagy a hármas metszetbe, vagy B és C kettős metszetbe. Így:

$$C = \{1\},\quad B = \{1; 3; 4; 6; 7\}$$

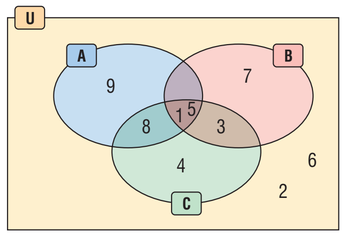
és

$$A = \{1; 2; 3; 5; 6; 7\} \quad \text{vagy} \quad A' = \{2; 3; 5; 6; 7\}.$$



5021 *a)* A Venn-diagram az ábrán látható.

b) A-ba eső elemek összege 23, B-be 16, C-be 21.

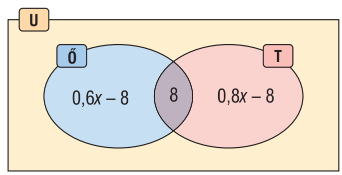


5022 *a)*

$$0{,}6x - 8 + 8 + 0{,}8x - 8 = x,$$
$$1{,}4x - 8 = x,$$
$$0{,}4x = 8,$$
$$x = 20.$$

20 fő dolgozik a Kiskunsági Nemzeti Parkban.

b) $|Ő \setminus T| = 4$ fő.

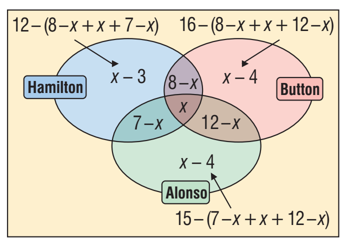


5023 *a)*

$$x - 3 + 8 - x + x + 7 - x + 12 - x + x - 4 + x - 4 = 20,$$
$$4 = x.$$

4 tanuló gyűjtött eddig mindhárom versenyzőtől dedikált emléket.

b) 0 fő. Nekik már vagy mindhárom versenyzőtől, vagy a másik két említett egyikétől van autogramja.



5024 A szöveg szerint a törpéken kívül még $5 \cdot 7 = 35$ fő jött el a mulatságra, azaz bányászok összesen 42-en voltak. A szita-formula így alakul, ha x-szel a narancssárga sapkás telepvezető vájárok számát jelöljük:

$$42 = 21 + 21 + 20 - (7 + 7 + 6) + x.$$

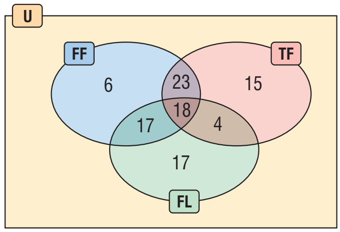
Innen $x = 0$. Tehát ilyen bányász nem vett részt a bulin.

5025 *a)* Alkalmazzuk a szita-formulát. A számba vett kutyák száma 100, hiszen egy megszökött:

$$100 = 64 + 60 + 56 - (41 + 22 + 35) + x,$$

ahol x jelöli a hármas metszet elemszámát. Innen $x = 18$.

b) Belülről kifelé haladva töltsük ki az elemszámokkal a Venn-diagramot, amelyből leolvasható a kérdezett érték: 17 ilyen kutya van. (Az elmenekült jószágról nincs információnk.)



5026 *a)* Lehetséges, hogy senki sem kért egyszerre mindkét ételfajtából (0). Maximum pedig a kisebb elemszámú halmaz elemszámával egyenlő lehet a számuk (8). Tehát 0 és 8 közötti a számuk.

b) Ha senki sem kérte együtt a levest és a főételt, akkor $8 + 10 = 18$ fő ült asztalhoz. Ha minden levest evő rendelt főételt is, akkor $8 + 10 - 8 = 10$ fő ült le ebédelni a panzióban.

5027 $|C| = 13$. A szöveg alapján ismertek a következők:

$$|A| = 14, \quad |B| = 9, \quad |A \cap C| = 7, \quad |A \cap B| = 6, \quad |B \cap C| = 4,$$
$$|A \cap B \cap C| = 2, \quad |\overline{A \cup B \cup C}| = 3.$$

Írjuk fel a logikai szita-formulát az alaphalmazra kiegészítve:

$$|U| = |A \cup B \cup C| + |\overline{A \cup B \cup C}| = |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| - |B \cap C| +$$
$$+ |A \cap B \cap C| + |\overline{A \cup B \cup C}| = 13 + 14 + 9 - 7 - 6 - 4 + 2 + 3 = 24.$$

5028 *a)* Helyettesítsünk be $x = 1$-et: $\frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} < 1$. Nem megoldás az $x = 1$.

b) Találgatás helyett oldjuk meg a feladatot. A közös nevező $2x + 8$, átrendezve a $\frac{x-6}{2x+8} \geq 0$ törtet kapjuk. Egy tört akkor nemnegatív, ha számlálójának és nevezőjének azonos az előjele (a számlálója lehet nulla is). Ez két esetben lehetséges:

$$x - 6 \geq 0 \ (x \geq 6) \text{ és } 2x + 8 > 0 \ (x > -4), \text{ ekkor a megoldás } x \geq 6;$$
$$x - 6 \leq 0 \ (x \leq 6) \text{ és } 2x + 8 < 0 \ (x < -4), \text{ ekkor a megoldás } x < -4.$$

Ebből látható, hogy a legkisebb pozitív megoldás az $x = 6$. Legnagyobb negatív megoldás nincs.

c) A páros számlálójú törtek egyszerűsíthetők, így nem valódiak. A törtek a $[4, 6[$-ból valók:

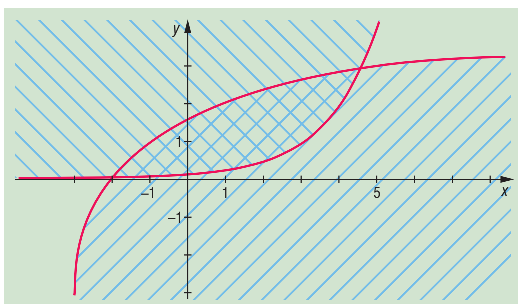
$$\pm\frac{7}{2}, \ \pm\frac{5}{2}, \ \pm\frac{3}{2}, \ \pm\frac{1}{2}, \ \frac{9}{2}, \ \frac{11}{2}.$$

5029 Rajzoljuk meg a transzformált függvényeket közös koordináta-rendszerben.

a) L = ///;

b) M = \\\;

c) $L \cap M$ = XXX.



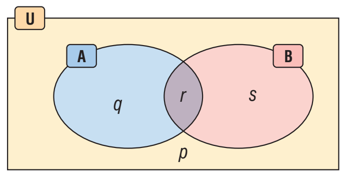
5030 Képzeljünk el egy táblázatot, melynek felső sorában felsoroljuk az U halmaz elemeit, első oszlopában pedig a feladat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazait. Az adott elem oszlopának és az adott halmaz sorának metszetében egy X-szel jelöljük, hogy az elem beletartozik a halmazba.

Úgy kell elhelyeznünk az X jeleket, hogy pl. az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ halmazok mindegyikében szerepeljen az n elem. Ugyanakkor $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}, A_n$ halmazok mindegyikének eleme legyen $(n-1)$, továbbá $A_1, A_2, \ldots, A_{n-3}, A_{n-1}, A_n$ halmazoknak eleme legyen $(n-2)$ stb. Így tulajdonképpen ismerjük az A_1 halmaz elemeit. Minden U-beli elem eleme, csak az 1 nem: $A_1 = \{2; 3; \ldots, n\}$.

Hasonlóan adódik ez így a többi halmazra is.

Halmaz\Elem	1	2	3	…	$n-2$	$n-1$	n
A_1		X	X		X	X	X
A_2	X		X		X	X	X
…							
A_{n-1}	X	X	X		X		X
A_n	X	X	X		X	X	

5031 Tekintsük a halmazábrát.



Írjuk fel a megadott feltételeket p, q, r, s segítségével.

$$\left.\begin{aligned} 2(q+r) &= p+q+r+s \\ 3r &= r+s \\ 10(q+r+s) &= 9(p+q+r+s) \end{aligned}\right\}$$

Ez négy ismeretlen, de csak három egyenlet. Nem tudjuk egyértelműen megoldani, de azért próbáljuk meg. Alakítsuk át az egyenleteket, a középsőből már ki van fejezve s.

$$\left.\begin{aligned} q+r &= p+s \\ 2r &= s \\ q+r+s &= 9p \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} q &= p+r \\ q+3r &= 9p \end{aligned}\right\}$$

A q ismeretlen is ki van már fejezve az első egyenletből:

$$p+4r = 9p,$$

ahonnan $r = 2p$. Ekkor viszont $q = 3p$, $s = 4p$. Mivel A, B, U egyike sem üres, a legkisebb pozitív szám, amit p helyére helyettesíthetünk, $p = 1$. Így $|A| = 5$, $|B| = 6$, $|U| = 10$.

5032 *a)* Gondoljuk meg, hogy bármely J_i halmaznak eleme a 0, de minden más elemről ki lehet mutatni, hogy előbb-utóbb már nem esnek az intervallumokba: $J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap \ldots = \{0\}$.

Ugyanis tételezzük fel, hogy valamely i-re $p\ (p > 0) \in J_i$. Bármely pozitív p-hez találunk olyan m pozitív egész értéket, amelyre $\frac{1}{m} \le p$. Ha $n > m$, akkor $p \notin J_n$. Hasonló a meggondolás, ha $p < 0$.

b) Az I_n sorozat összes eleméből alkotott metszetnek nincs közös eleme.

c) Először is $J_n \backslash I_n = \left]-\frac{1}{n}; 0\right]$. Ezen halmazoknak egyetlen közös eleme a 0, azonban más ilyen elem nincs. Ezért $J_1 \backslash I_1 \cap J_2 \backslash I_2 \cap J_3 \backslash I_3 \cap \ldots = \{0\}$.

Kijelentések, események – megoldások

5033 *a)* $A + B$ = Szép idő lesz vagy kirándulni megyek. $A \cdot B$ = Szép idő lesz és kirándulni megyek.

b) $\overline{A} \cdot B$.

c) Bármilyen, ugyanis szép idő esetén egyszerűen teljesült az implikáció. Rossz idő esetére pedig nem állítottam semmit, tehát bármit csinálhatok – kirándulhatok is – szószegés vétsége nélkül.

5034 *a)* $|A| = 10$, $|B| = 6$, $|C| = 4$.

b) $A \cdot B = \{6; 12; 18\}$ = hattal osztható számok;

$B + C = \{3; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20\}$ = hárommal vagy öttel osztható számok;

$\overline{A} \cdot C = \{5; 15\}$ = öttel osztható páratlan számok.

c) $D = \{5\}$ = (olyan páratlan szám, ami hárommal nem, de öttel osztható) $= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$.

5035 *a)* $A + B + C = \{2; 4; 6; 8\}$, $A \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot B \cdot C = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = \emptyset$, $B \cdot \overline{A} \cdot \overline{C} = \{6\}$.

b) $\{10\} = \overline{A + B + C}$.

5036 A helyesen kitöltött táblázat:

	A	B	C	D
Kijelentés	H	I	I	H
Megfordítása	I	H	I	H

5037 *a)* Igen. A „minden ember fenség” egy következtetés: Ha ember vagyok, akkor fenség vagyok. A második kijelentés szerint ember vagyok, így a feltétel teljesül. Amiből valóban következik, hogy fenség vagyok.

b) Nem. Példaként építsünk nádfedelet egy tízemeletes házra. Nyilván ez az épület nádfedeles, de nem tanya.

5038 *a)* Tagadás: Van olyan deltoid, amelynek átlói nem merőlegesek egymásra. Ilyen deltoid nincs, tehát az állítás igaz, a tagadás hamis.

b) Tagadás: Bármely háromszög legkisebb szöge legfeljebb 60º-os. Ez igaz, a háromszög legkisebb szöge nem lehet nagyobb, mint 60º. Ugyanis az állítás igazságát feltételezve:

$$60^\circ < \alpha < \beta < \gamma, \quad \text{így} \quad 180^\circ = 3 \cdot 60^\circ < \alpha + \beta + \gamma,$$

ami (legalábbis az euklideszi geometriai rendszerben) nem igaz, hiszen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Tehát az állítás hamis, a tagadás igaz.

c) Tagadás: Van olyan hattal osztható szám, amely nem osztható kilenccel. A tagadás igaz, például maga a 6 ilyen szám. Az állítás hamis.

d) Tagadás: Bármely pozitív egész prímtényezős felbontásában szerepel a 17. Az állítás igaz, a tagadás hamis.

e) Tagadás: Volt olyan törpe, aki magasabb volt Hófehérkénél. Bár nem tudjuk pontosan a történelmi igazságot, feltételezzük, hogy minden törpe jóval alacsonyabb volt az illető hölgynél. Tehát az állítás igaz, a tagadás hamis.

f) Tagadás: Van alkalom, hogy leírom azt: soha. Aki ezt a feladatot írásban megoldja, arra a tagadás biztosan teljesül. (Nagy valószínűséggel a többiekre is.)

g) Az állítás tagadását úgy tudjuk meggondolni, ha átfogalmazzuk: A 7-nek minden hatványa osztható 3-mal. Így már világos a tagadás: Van olyan szám, amely 7-nek hatványa és nem osztható 3-mal. Utóbbi kijelentés igaz (pl. 49) és az állítás hamis.

h) Először értelmezzük az eredeti mondatot.

Adjunk meg egy pozitív α szöget (pl. $\alpha = 1°$) és vizsgáljuk meg, mely szabályos sokszögek külső szögei kisebbek α-nál.

Bármely konvex n-szög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$. A szabályos n-szög egy belső szögének nagysága: $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. A külső szög mértéke $180° - \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \frac{360°}{n}$.

Ha most azt akarjuk, hogy ez a szám 1°-nál kisebb legyen, akkor legyen $n > 360$. Tehát pl. a 361 oldalú szabályos sokszög minden külső szöge kisebb, mint 1°. (Az $n = 360$ még éppen nem megfelelő, hiszen az állítás teljesüléséhez szigorúan kisebb kell.)

Hasonlóan általában: ha $\frac{360°}{n} < \alpha$, akkor $n > \frac{360°}{\alpha}$. Így biztosan tudunk bármely szöghöz olyan n egész számot mondani, amelynél több oldalú sokszögek külső szögei kisebbek, mint a megadott szög. Tehát az állítás igaz.

Tagadás: Létezik olyan α $(\alpha > 0)$ szög, amelyhez bárhogy is adunk meg pozitív egész n-t, van olyan n-nél több csúcsú szabályos sokszög, melynek külső szöge nagyobb vagy egyenlő, mint α.

Mivel az állítás igaz, a tagadás hamis.

Kombinatorika – megoldások

5039 $5! = 120$.

5040 $4! = 24$.

5041 $2\cdot 4! - 1 = 47$.

5042 $6\cdot 2\cdot 3! = 5! - 2\cdot 4! = 72$.

5043 $6! = 720$.

5044 $3\cdot 2 = 6$.

5045 $4\cdot 5^3 = 500$ közül $4\cdot 5^2 = 100$ osztható 5-tel.

5046 $6^3\cdot 9 = 1944$.

5047 $5\cdot 4\cdot 3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$.

5048 $\frac{30!}{(30-5)!} = 17100720$.

5049 $\binom{7}{3} = 35$.

5050 $\binom{11}{2} = 55$.

5051 $\frac{12!}{7!\cdot 4!\cdot 1!} = 3960$.