Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

11

Megoldásokkal

ÉRETTSÉGI

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

11

Megoldásokkal

Hetedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2017

Tisztelt Olvasó!

Feladatgyűjtemény-sorozatunk egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A könyvek felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ezekből a tankönyvekből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

Ugyanakkor – mivel a feladatgyűjtemények felépítése természetesen megfelel a tantárgy belső logikájának és az iskolákban általánosan alkalmazott kerettanterveknek – minden nehézség nélkül használhatják azok is, akik más tankönyvekből tanulják, illetve tanítják a matematikát.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

3142 **Gyakorló feladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

3476 **Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*

3852 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

A feladatgyűjtemények feladatainak sorszámozása a tankönyvcsalád egyes köteteire utal.

A 9. évfolyam feladatai az 1001-es, a 10. évfolyam feladatai a 2001-es, a 11. évfolyamé a 3001-es, a 12. évfolyamé pedig a 4001-es sorszámtól kezdődnek.

A 12.-es kötetben a négy év anyagát áttekintő rendszerező összefoglalás feladatai az 5001-es sorszámtól indulnak, ezáltal segíti a feladatok közötti válogatást az érettségire történő felkészüléskor.

Megoldások

A feladatgyűjtemény minden feladat megoldását tartalmazza. A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők

TARTALOMJEGYZÉK


2π=PIPI

A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset$, $\{\,\}$	üres halmaz
$\overline{A}$	az A halmaz komplementere
$\lvert A \rvert$	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}$, $\vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

Feladatok

11.1. KOMBINATORIKA, GRÁFOK

Fibonacci-számok

3001 Határozzuk meg a tizenötödik és a huszadik Fibonacci-számot.

3002 Változtassunk a Fibonacci-számok eredeti képzési szabályán. Írjuk fel az első tíz értéket, ha ugyanúgy két szomszédos érték összeadásával kapjuk meg a rájuk következőt, de

a) az első szám -1, a második 1;

b) az első szám 1, a második -1.

3003 Egy sorozat első három tagja $1, 1, 2$. Legyen minden további tag az előtte álló három tag összege.

a) Számítsuk ki a sorozat első tizenöt tagját.

b) Van-e a felírt számok között (az első három kivételével) Fibonacci-szám?

3004 Folytassuk visszafelé a Fibonacci-sorozatot: írjunk fel tíz tagot, amelyek megelőzik a két első egyest a számsorozatban! (A képzési szabályon nem változtatunk.)

3005 Lehet-e úgy kezdő értékeket adni egy Fibonacci-szerű sorozatnak (amelyben minden érték az előtte levő kettő összege), hogy az bizonyos számú elem után önmagát ismételje?

Permutációk, variációk

3006 Egy parkon át hétköznap reggelenként 7:40 és 7:50 között 86 ember szokott munkába sietni véletlenszerűen. Hányféle sorrendben kelhettek át egyik reggel a park bejáratán, ha egyszerre csak egy fő ment át a kapun?

3007 Egy világutazó az Európai Unió fővárosait szeretné körbejárni, mindegyiket pontosan egyszer felkeresve. Hányféle sorrendben veheti fel a listájára a fővárosokat?

3008 Jani a szelektív hulladékgyűjtő szigetre vitt 6 egyforma üres üveget, 5 egyforma összelapított műanyag palackot és 10 ugyanolyan fajta üres konzervdobozt. Útközben arra gondolt, hogy összevissza fogja bedobálni egymás után a megfelelő hulladékgyűjtőbe a szemétdarabokat. Hányféle sorrendben szabadulhat meg Jani a nála levő felesleges holmiktól?

3009 *a)* Hányféleképp lehet a polcon egymás mellé tenni 3 zöld és 2 piros, amúgy egyforma bögrét?

b) Hányféleképp lehet a polcon egymás mellé tenni 3 zöld, 2 piros és 0 kék, egyforma bögrét?

c) Az előző két kérdés alapján magyarázzuk meg, miért van értelme 0!-nak.

3010 Egy lóversenyen a 18 indulóból csak 6 ló ért célba. Ha ezt tudni lehetett volna a rajt előtt, akkor hány befutóra fogadhattak volna a bukmékerek? (Befutó = a célba érkező lovak sorrendje, holtverseny nincs.)

3011 Egy kis cégnél 10 fő dolgozik. A munkatársak reggel sorban egymás után érkeznek munkába. Hányféle sorrendben jöhetnek be véletlenszerűen a kapun, ha ma hat fő

a) jön be dolgozni; *b)* beteget jelentett?

3012 Rudi papagája rátalált a televízió távkapcsolójára. Most azzal játszik, hogy a nagy kék számgombokra egymás után 7-szer rálép. Minden alkalommal pontosan egy gombot nyom le (akár ugyanazt többször). Hányféle különböző „csatornasorrendet” jegyezhet meg a televízióban levő memória a papagáj játéka során?

3013 A fél éves Dorka magabiztosan fogja jobb kezében a macis, bal kezében a zsiráfos bélyegzőt. Ha elhúznak előtte egy papírlapot, kitörő örömmel bélyegez rá sorban egymás után véletlenszerűen állatokat hol jobb, hol bal kézzel. A papíron nyolc figura fér el. Hányféle állatsereglet keletkezhet Dorka munkája során a keskeny papírlapon?

3014 Hány induló volt azon a futóversenyen, melyen az összes lehetséges – holtverseny nélküli – végeredmények száma 39 916 800? (Minden induló célba ér.)

3015 Egy dobozban 0-tól 9-ig számozott cédulák találhatók, és van egy hagyományos dobókockánk. Hányféle hatjegyű szám képezhető úgy, hogy háromszor dobunk a dobókockával, majd három cédulát húzunk a dobozból visszatevés nélkül, és a kapott hat számjegyet a dobás, illetve a húzás sorrendjében egymás mellé írjuk?

3016 Mennyi különböző ülésrendben ültethetünk le 8 főt egy

a) egyenes asztal mellé;

b) kör alakú asztal köré, ha az adott körüljárás szerinti szomszédságot vesszük figyelembe;

c) kör alakú asztal köré, ha csak a szomszédokat vesszük figyelembe, de azt nem, hogy jobb vagy bal oldaliak?

3017 Klári a piacon a zöldség-gyümölcs pult előtt áll. Hány darabot tett összesen a kosarába, ha a paradicsom, paprika, barack, sárgadinnye, hagyma, káposzta közül választott, mindegyikből vehetett többet is, és azokat egyesével 1 679 616-féle sorrendben rakhatta a kosarába?

3018 Van két dobozunk. Az egyikben 0-tól 9-ig számozott cédulák vannak, a másikban pedig két 3-as, három 4-es és négy 5-ös számjegyet tartalmazó cédula. Először a második dobozból egymás után kihúzzuk az összes cédulát, majd az elsőből négyet húzunk úgy, hogy a cédulákat visszatesszük a dobozba, és az így kapott számokat sorban egymás mellé írjuk. Hányféle számot kaphatunk így?

3019 Hányas számrendszerben van pontosan 2 097 152 különböző, legfeljebb 7-jegyű szám?

3020 Egy bolha üldögél egy négyzet mellett. Egyszer csak ráugrik a négyzet egyik csúcsára, majd onnantól kezdve a csúcsokon ugrál még kilencszer. Hányféle sorrendben érintheti a csúcsokat, ha

a) bármikor bármelyikre ugorhat;

b) oda nem ugrik, ahol éppen áll;

c) nem ugrik sem oda, ahol éppen áll, sem pedig az eggyel korábbi állomáshelyére?

3021 Egy televíziós vetélkedőben a stúdióközönség soraiból választanak ki játékra két főt. Hányan ülnek a nézőtéren, ha 1980-féleképp választhatják ki először az első, majd a második játékost?

3022 Az Európai Unió 10 legnagyobb országának miniszterelnökei megbeszélést tartanak az Unió nem hivatalos fővárosában, Brüsszelben. Az angol és francia miniszterelnöknek a protokoll szerint közre kell fogni a németet. Hányféle ülésrend lehetséges, ha

a) egyenes asztal mellé ülnek;

b) kör alakú asztal mellé ülnek? (Két ülésrendet akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egy főnek legalább egy szomszédja más.)

3023 Laci barátom legfeljebb 21 db-os DVD-gyűjteményében 4 koncertfilm és 5 vígjáték van, de található nála legalább két színházi előadás is. A DVD-ket – csupán a besorolásukat figyelembe véve – 27 720-féle módon tudja a polcon sorba rendezni. Pontosan hány színpadi mű van meg DVD-n Lacinak?

3024 Emese és Karcsi öt gyermeket szeretne. Fel is írták az alábbi neveket, amelyek közül mindig véletlenszerűen adnak egyet az éppen születő csöppségnek (persze kétszer nem adják ugyanazt). Hányféle sorrendben adhatják a neveket a megszületendő öt gyermeknek? (Tételezzük fel, hogy ikreik nem születnek.)

Aladár Eszter Csilla Tamás Andrea Kamilla Gáspár Vivien János Csaba

3025 Melyek azok az n és k nemnegatív egész értékek, melyekre n elem k-tagú ismétlés nélküli variációinak száma megegyezik az ismétléses variációk számával?

Ismétlés nélküli kombinációk, Pascal-háromszög

3026 Határozzuk meg számológép nélkül, definíció alapján a következők pontos értékét:

a) $\binom{4}{2}$; *b)* $\binom{15}{2}$; *c)* $\binom{11}{6}$; *d)* $\binom{11}{8}$; *e)* $\binom{11}{9}$; *f)* $\binom{122}{120}$;

g) $\binom{145}{144}$; *h)* $\binom{1578}{1}$; *i)* $\binom{135}{0}$.

3027 Határozzuk meg papíron, a definíció alapján a következők pontos értékét:

a) $\binom{n}{0}$; *b)* $\binom{n}{1}$; *c)* $2\cdot\binom{n}{2}$; *d)* $\binom{n}{n-2}$; *e)* $\binom{n}{n-1}$; *f)* $\binom{n}{n}$.

3028 Az $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ azonosság segítségével adjuk meg az összegek eredményét:

a) $\binom{134}{43}+\binom{134}{44}$; *b)* $\binom{211}{101}+\binom{210}{100}+\binom{210}{99}$;

c) $\binom{111}{55}+\binom{110}{54}+\binom{109}{53}+\binom{109}{52}$.

3029 *a)* Van-e olyan természetes szám, amit nem találunk meg a Pascal-háromszögben?

b) Írjuk fel a Pascal-háromszöget a 10. sorig. Keressünk olyan számokat, amik pontosan egy, kettő, három, négy helyen fordulnak elő a Pascal-háromszögben.

3030 A dobókockával dobható számok halmazának mennyi

a) 2; *b)* 3; *c)* 4; *d)* 5; *e)* 7

elemű részhalmaza van?

3031 *a)* Hány elemből áll az a halmaz, amelyből 6-féleképpen lehet egyelemű részhalmazokat kiválasztani?

b) Az előző halmazból hány elemű részhalmazt lehet még 6-féleképp kiválasztani?

3032 Hányféle szorzatot képezhetünk a következő számok közül négyet kiválasztva:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

3033 *a)* Legfeljebb mennyi érvényes, de különböző hatoslottó-szelvényt adhatunk fel?

b) Számítsuk ki, hányszorosa a hatos lottón fogadható számhatosok darabszámának az ötös lottón megfogadható számötösök száma. Az eredményt adjuk meg tovább már nem egyszerűsíthető törtként és egy tizedesre kerekítve is.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45				

3034 A térben adott 9 különböző pont, melyek közül semelyik négy nem esik egy síkba. Hány különböző síkot határoznak meg?

3035 Miután Hófehérke megette a mérgezett almát, a törpék küldöttséget indítottak a mostohához, hogy legyen szíves élessze újra Hófehérkét. Persze nem segített a gonosz, kénytelenek voltak megvárni a Királyfit. Hány különböző háromtagú küldöttséget indíthattak? (A törpék a küldöttség összeállítása során nem figyeltek kiválasztásuk sorrendjére.)

3036 Az autószerelő műhely egy dobozában 60 kerékanya van (minden kerékre négy kell). Mennyi anyacsavar-szettet választhat ki Sanyi a jobb első kerékre, ha az anyákat megkülönböztetjük?

3037 A Pascal-háromszög tulajdonságai alapján határozzuk meg, k mely értékére (értékeire) van maximuma a

a) $\binom{24}{k}$; *b)* $\binom{13}{k}$ értékének.

3038 Törpapa, Nótata, Törpilla, Okoska, Törperős, Ügyi, Ügyifogyi, Lusti, Hami, Törpojáca, Tréfi és Dulifuli közül egyszerre négyet elkap és zsákba dug Hókuszpók.

a) Hány összeállításban kerülhetnek a zsákba a törpök?

A többiek most azon tanakodnak, hogyan szabadítsák ki őket. Úgy határoznak, hogy egy kétfős brigád eltereli Sziamiaú figyelmét, másik két törp elvonja Hókuszpók figyelmét, a többiek pedig kiszabadítják a fogva tartottakat.

b) Hány különböző szabadcsapat-összeállítás közül választhatnak a törpök?

3039 Karcsi randevúra készül, és bemegy a virágboltba, ahol egy vázában kilenc vörös és négy fehér rózsa van. Hány különböző, három vörös és kettő fehér rózsát tartalmazó csokrot köttethet ezekből a virágokból? (Az azonos színű virágok egyformák, csokorbeli helyük nem érdekes.)

3040 Sanyi autószerelő műhelyében egy dobozban 60 kerékanya van. Egy négykerekű személyautó fékjeinek beállítása után éppen ezeket teszi a helyükre. (Az anyákat megkülönböztetjük, és az autó minden kerekére négy anyacsavart kell tenni.) A megoldás során ne használjunk számológépet!

a) Hányféleképp veheti ki a dobozból egyszerre az összes kerékre való csavart Sanyi?

b) Sanyi egyszerre mindig csak egy kerékre való csavart vesz ki a dobozból. Ezt hányféleképp teheti meg?

c) Melyik érték a több, és miért: ha egyszerre veszi ki az összes csavart, vagy ha kerekenként? Mit vegyünk még figyelembe (vagy mitől tekintsünk el), hogy a két érték egyenlő legyen?

3041 A 32 lapos magyar kártyából 4 lapot osztunk le. Hány olyan leosztás van, ahol a lapok között van

a) a piros király?

b) pontosan egy piros lap vagy pontosan egy király?

c) legalább egy piros vagy legalább egy király?

3042 Az 52 lapos franciakártya-csomagból négy játékosnak leosztunk 3-3 lapot. Számítsuk ki nagyságrendileg ($x \cdot 10^y$ alakban, $y \in \mathbb{N}$, x-et egy tizedesre kerekítsük), hányféle leosztás lehetséges.

3043 A 32 lapos magyar kártyából leosztottunk négy lapot. Hány darab, legalább egy ászt tartalmazó különböző leosztás lehetséges?

3044 Mennyi, legfeljebb egy tököt tartalmazó leosztás van, ha 32 lapos magyar kártyából osztunk le 4 lapot?

3045 Legfeljebb hány különböző ötöslottó-szelvényünk lehet akkor, ha ezek mindegyikén a találataink száma

a) 0; *b)* 1; *c)* 2; *d)* 3; *e)* 4; *f)* 5?

3046 Hány fő vett részt azon a tanácskozáson, amely előtt mindenki mindenkivel kezet fogott, és összesen 45 kézfogás történt?

3047 Bizonyítsuk be az $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ definíció alapján, hogy $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

3048 *a)* Adjunk meg két konkrét számpéldát a Pascal-háromszögből, amelyre igaz a következő összefüggés:

$$\binom{n}{k-1} + 2\cdot\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy az összefüggés bármely n és k, $n \ge k+1 \ge 2$ természetes számra teljesül.

3049 *a)* Keressünk több konkrét számpéldát a Pascal-háromszögből a következő összegre:

$$\binom{n}{k-2} + 3\cdot\binom{n}{k-1} + 3\cdot\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

b) A Pascal-háromszöget megfigyelve keressünk zárt formulát a fenti összegre.

c) Igazoljuk, hogy az összefüggés bármely n és k, $n \ge k+1 \ge 3$ természetes számra teljesül.

3050 *a)* Adjunk meg a Pascal-háromszögben a következő összegnek megfelelő számokat $(n > k)$:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}.$$

b) A Pascal-háromszög számait megfigyelve keressünk zárt formulát a fenti összegre.

c) Bizonyítsuk is be a megfigyelésünket.

d) Mit kapunk az összefüggésből, ha k helyére 1-et írunk?

3051 Hány főt kell 13 emberből kiválasztani, hogy a kiválasztást 715-féleképpen tudjuk megtenni? (A kiválasztásnál a sorrendet nem vesszük figyelembe.)

3052 Hány főből kell kiválasztani 7 embert, hogy a kiválasztást 77 520-féleképp tudjuk megtenni? (A kiválasztásnál a sorrendet nem vesszük figyelembe.)

3053 A Pascal-háromszög hányadik sorának hányadik eleme a 8568?

Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció

3054 Fejtsük ki a következő kéttagú összegek hatványait:

a) $(3-b)^2$; *b)* $(e+2f)^3$; *c)* $(x-2)^4$; *d)* $(2x+1)^5$;
e) $(1-0{,}5a)^7$.

3055 Fejtsük ki a következő binomokat, majd vonjunk össze, amit csak lehet:

a) $(x^2+2x)^6$; *b)* $(2a-0{,}5b)^8$; *c)* $\left(\sqrt[3]{x}+x\right)^9$; *d)* $\left(x+3\cdot\sqrt{x}\right)^7$;
e) $\left(2x-3x^3\right)^6$.

3056 Felhasználva a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggést, hozzuk a legegyszerűbb alakra a kifejtett kéttagú összegeket:

a) $(\sin x - \cos x)^2$; *b)* $(\sin x + \cos x)^4$.

3057 Írjuk fel két tag összegének adott hatványaként a következő összegeket!

a) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$; *b)* $0{,}125x^6 - 1{,}5x^4y + 6x^2y^2 - 8y^3$;

c) $x^8 - 4x^9 + 6x^{10} - 4x^{11} + x^{12}$; *d)* $x^2 + 4 \cdot \sqrt{x} \cdot x^2 + 6x^3 + 4 \cdot \sqrt{x} \cdot x^3 + x^4$.

3058 Hány részhalmaza van egy

a) egyelemű; *b)* kételemű; *c)* ötelemű; *d)* nulla elemű

halmaznak?

3059 Hány elemű az a halmaz, amelynek

a) 1; *b)* 2; *c)* 3; *d)* 16; *e)* 256; *f)* 0

részhalmaza van?

3060 A számítógépen több különböző adattípusban ábrázolják az egész számokat. Például a nyolc biten ábrázolt egészek neve *shortint,* a tizenhat biten ábrázolt egészeket *integernek* nevezik.

Melyik az a legnagyobb szám, amit a számítógépen

a) shortintként; *b)* integerként ábrázolhatunk?

Hány részhalmaza van

c) a shortint; *d)* az integer típusú számok halmazának?

3061 Egy osztályban a lányok közül 1024 különböző csoportot választhatunk ki (beleértve az üres csoportot is), a fiúk közül pedig 8192-félét. Hány különböző csoport választható ki az egész osztályból?

3062 A nagypályás lány focicsapatnak Enikő és Évike a csatárai. (A focicsapat kezdőjátékosainak száma 11.)

a) Hány olyan részhalmaza van a csapatnak, amelynek Enikő nem eleme?

b) Az előbbi részhalmazok közül hány olyan van, amelynek Évike eleme?

c) Számoljuk össze azon részhalmazokat, melyekről tudjuk, hogy azoknak a csapat öt adott tagja eleme. Hányad része ezen részhalmazok száma az összes részhalmaznak?

3063 A nagypályás fiú focicsapat legutóbbi mérkőzésének első félidejében leginkább védekezett. Mind a 16 szabadrúgást, amit a bíró nekik ítélt, saját térfelükről végezhették el – ezért a három csatár nem, de a kapus rúghatott szabadot. A szabadrúgások elvégzőit a másodedző jelölte ki. Hányféle lehetőség közül választhatott, ha

a) a szabadrúgások időbeli sorrendjét is figyelembe vesszük;

b) csak azt vesszük figyelembe, hogy kik végezték el a szabadrúgásokat?

A második félidőre az edző kicsit átszervezte a csapatot, így a játék végig az ellenfél térfelén folyt. Most 13 szabadrúgást végeztek el, de a kapus már nem rúgott labdába. Így hányféle lehetőség volt a szabadrúgások elvégzésére, ha

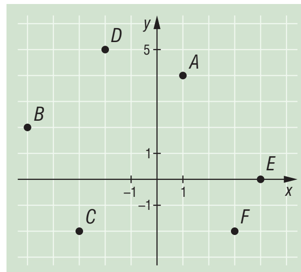
c) a szabadrúgások időbeli sorrendjét is figyelembe vesszük;

d) csak azt tekintjük, hogy kik végezték el a szabadrúgásokat?

11.5. KOORDINÁTA-GEOMETRIA

Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal (emlékeztető)

3555 Adjuk meg az ábrán látható pontok helyvektorát az **i** és **j** bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Adjuk meg a helyvektorok koordinátáit.



3556 Adottak az $\vec{a}(1; -3)$ és $\vec{b}(-2; 5)$ vektorok. Adjuk meg az alábbi vektorok koordinátáit:

a) $\vec{a}+\vec{b}$; *b)* $\vec{a}-\vec{b}$;

c) $2\vec{a}$; *d)* $3\vec{b}$;

e) $2\vec{a}-3\vec{b}$; *f)* $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$;

g) $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)+\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)$; *h)* $2\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+3\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right)$.

3557 Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(1; 1)$, $B(7; 1)$ és $C(3; 5)$. Írjuk fel az alábbi vektorokat az **i** és **j** bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

a) $\overrightarrow{AB}$; *b)* $\overrightarrow{AC}$; *c)* $\overrightarrow{BC}$; *d)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

3558 Számítsuk ki a következő vektorok hosszát (a és b pozitív valós számok):

a) $\mathbf{i}+\mathbf{j}$; *b)* $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; *c)* $-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$; *d)* $-\frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{5}{2}\mathbf{j}$;

e) $\frac{5}{13}\mathbf{i}-\frac{12}{13}\mathbf{j}$; *f)* $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$; *g)* $\vec{a}\left(\sqrt{2}; -\sqrt{3}\right)$; *h)* $\vec{a}\left(1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}\right)$;

i) $\vec{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}; \sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$.

3559 Adjuk meg a következő vektorok abszolút értékét. Milyen közös tulajdonsága van a felsorolt vektoroknak?

a) $\vec{a}(-13; 84)$; *b)* $\vec{b}(65; -72)$; *c)* $\vec{c}(-39; -80)$; *d)* $\vec{d}=20\mathbf{i}-21\mathbf{j}$;

e) $\vec{e}=2(15\mathbf{i}-8\mathbf{j})$.

3560 Írjuk fel a megadott vektorral egyirányú, egységnyi hosszúságú vektor koordinátáit:

a) $\mathbf{i}+\mathbf{j}$; *b)* $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; *c)* $-2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$; *d)* $\sqrt{2}\mathbf{i}+\sqrt{3}\mathbf{j}$.

3561 Ábrázoljuk a következő helyvektorokat. Forgassuk el $+90°$-kal, illetve $-90°$-kal az origó körül az ábrázolt vektorokat, majd írjuk fel a kapott vektorok koordinátáit.

a) $-3\mathbf{i}+\mathbf{j}$; *b)* $2\mathbf{i}+5\mathbf{j}$; *c)* $-\mathbf{i}-2\mathbf{j}$.

3562 Adottak az $\vec{a}(2; -1)$ és $\vec{b}(1; 7)$ vektorok. Számítsuk ki az alábbi vektorok skaláris szorzatát:

a) $\vec{a}$ és $\vec{b}$; *b)* $-\vec{a}$ és $\vec{b}$; *c)* $-\vec{a}$ és $-\vec{b}$; *d)* $2\vec{a}$ és $\vec{b}$;

e) $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}-\vec{b}$; *f)* $2\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}+2\vec{b}$.

3563 Az alábbi vektorokról döntsük el, hogy derékszöget, hegyesszöget vagy tompaszöget zárnak-e be egymással. Válaszunkat számításokkal igazoljuk.

a) $\vec{a}(1; 5)$ és $\vec{b}(10; -2)$; *b)* $\vec{a}(3; 4)$ és $\vec{b}\left(-4; \frac{7}{2}\right)$;

c) $\vec{a}(2; -5)$ és $\vec{b}\left(15; \frac{13}{2}\right)$; *d)* $\vec{a}\left(2; \frac{3}{2}\right)$ és $\vec{b}\left(\frac{15}{2}; -10\right)$.

3564 Bizonyítsuk be, hogy a megadott pontok egy-egy derékszögű háromszög csúcspontjai. Melyik pontnál található a derékszög az egyes esetekben?

a) $A(2; 5)$, $B(-6; -3)$, $C(4; 3)$;

b) $A(4; 3)$, $B(-5; -4)$, $C(-2; 5)$;

c) $A(2008; 2009)$, $B(2011; 2025)$, $C(2015; 2011)$.

3565 Az A pont helyvektora $\vec{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, a B ponté $\vec{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. A C pont helyvektorára teljesül a következő:

$$\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a}.$$

a) Számítsuk ki az A, B és C pontok koordinátáit.

b) Igaz-e, hogy a három pont egy egyenesre illeszkedik? Válaszunkat számításokkal igazoljuk.

3566 A derékszögű koordináta-rendszerben egy pont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A megfigyelés kezdetén helyvektorának koordinátái $(-3; 5)$, a következő másodpercben a test a $(-1; 6)$ koordinátájú pontban tartózkodik.

a) Adjuk meg a test sebességvektorának koordinátáit.

b) Melyik pontban lesz a test a megfigyelés kezdetét követő harmadik másodpercben?

c) Mozgása során áthalad-e a test a $(11; 12)$ koordinátájú ponton?

3567 Határozzuk meg α értékét úgy, hogy az $\vec{a}\left(\sqrt{2}+2; \sqrt{2}\right)$ és a $\vec{b}(-1; \alpha)$ koordinátájú vektorok merőlegesek legyenek egymásra.

3568 Az A, B, C és D pontok helyvektorai rendre $-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $3\mathbf{i}+8\mathbf{j}$, $7\mathbf{i}+6\mathbf{j}$ és $7\mathbf{i}-4\mathbf{j}$. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra.

3569 A koordináta-rendszerben kijelöljük a következő négy pontot: $A(1; 1)$, $B(9; 2)$, $C(11; 7)$ és $D(3; 6)$. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

3570 Hány olyan pont van a koordináta-rendszerben, amely az alábbi pontokkal együtt paralelogrammát alkot: $(-1; -1)$, $(5; 1)$, $(2; 4)$? Adjuk meg az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáit.

3571 Tekintsük a következő 2009 vektort:

$$\vec{v}_1\left(\sqrt{1}; \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\right), \vec{v}_2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}; \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right), \ldots, \vec{v}_{2009}\left(\sqrt{2009}-\sqrt{2008}; \frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2009}}\right).$$

a) Számítsuk ki a $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\ldots+\vec{v}_{2009}$ vektor koordinátáit.

b) Melyik koordinátatengelyhez van közelebb a fenti összegvektorral megegyező helyvektor végpontja?

Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge. Területszámítási alkalmazások

3572 Számítsuk ki a következő pontok origótól való távolságát:

a) $A(3; 0)$; *b)* $B(0; -5)$; *c)* $C(-3; -4)$; *d)* $D(5; -12)$;

e) $E\left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right)$; *f)* $F\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$.

3573 Adjuk meg az A és B pontok távolságának pontos értékét, ha:

a) $A(-3; 2)$ és $B(-3; 5)$; *b)* $A(-1; -6)$ és $B(2; -2)$;

c) $A(2008; 2010)$ és $B(2013; 2022)$; *d)* $A(3; -5)$ és $B(-3; 5)$;

e) $A(1;1)$ és $B\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$; *f)* $A\left(\sqrt{3}; \sqrt{6}\right)$ és $B\left(\sqrt{2}; -1\right)$;

g) $A\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ és $B\left(3; -\frac{5}{2}\right)$; *h)* $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ és $B\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

3574 Igazoljuk, hogy az alábbi pontok egy egyenlő szárú háromszög csúcsai:

a) $A(-2; -4)$, $B(5; -3)$, $C(-1; 3)$; *b)* $A(-4; -2)$, $B(1; 1)$, $C(-1; 3)$;

c) $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; -3)$.

Van-e a háromszögek között olyan, amelyik derékszögű? Ha igen, akkor melyek?

3575 Az alábbi pontokról számításokkal döntsük el, hogy melyek illeszkednek az $O(-5; -1)$ középpontú, 13 sugarú körre:

a) $(0; 11)$; *b)* $(-17; 4)$; *c)* $(6; -5)$; *d)* $(7; -6)$.

3576 Számítsuk ki az ABC háromszög oldalainak hosszát és kerületét egy tizedes pontossággal, ha

a) $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(0; 3)$; *b)* $A(12; 13)$, $B(1; -8)$, $C(-2; 5)$.

3577 Milyen alakzaton találhatók azok a pontok, amelyek az

a) x tengelytől; *b)* y tengelytől 3 egység távolságra helyezkednek el?

Mit tudunk mondani az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáiról?

3578 Milyen alakzaton találhatók azok a pontok, amelyek a két koordinátatengelytől ugyanakkora távolságra helyezkednek el? Mit tudunk mondani az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáiról?

3579 Számítsuk ki a következő vektorok által bezárt szög nagyságát egy tizedes pontossággal:

a) $\vec{a}(0; 5)$ és $\vec{b}(-3; 0)$; *b)* $\vec{a}(1; 3)$ és $\vec{b}(-6; 2)$;

c) $\vec{a}(-2; 3)$ és $\vec{b}\left(1; -\frac{3}{2}\right)$; *d)* $\vec{a}(7; -2)$ és $\vec{b}(-3; 8)$;

e) $\vec{a}(-1; -5)$ és $\vec{b}(-3; -2)$; *f)* $\vec{a}(-3; 7)$ és $\vec{b}(-2; -1)$.

3580 Számítsuk ki a következő pontok által meghatározott háromszög szögeit és területét:

a) $A(1; 1)$, $B(5; 3)$, $C(2; 7)$; *b)* $A(-4; -5)$, $B(-1; 5)$, $C(3; 1)$;

c) $A(-3; -2)$, $B(4; -3)$, $C(-4; 9)$.

3581 A koordináta-rendszerben egy pontszerű test egyenes pályán mozog. Mozgása során áthaladt a $(-7; 1)$ és a $(3; 2)$ pontokon. Milyen távolságra volt a koordináta-rendszer kezdőpontjától, amikor ahhoz a legközelebb volt?

3582 Számítsuk ki a következő pontok által meghatározott négyszögek területét:

a) (2; 2), (10; 2), (7; 6), (3; 6); *b)* (–4; –3), (4; –2), (5; 3), (0; 4);

c) (–3; 1), (2; –2), (3; 2), (–2; 5); *d)* (1; –1), (5; –2), (4; –6), (0; –5).

Vizsgáljuk meg, hogy van-e a négyszögek között trapéz, paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet vagy deltoid.

3583 A $P(x; y)$ pont ugyanolyan távolságra van az $A(3; 1)$ ponttól, mint a $B(-2; 5)$ ponttól. Milyen algebrai összefüggés van a P pont x és y koordinátái között?

3584 Bizonyítsuk be, hogy ha a $P(x; y)$ pont az $O(2; -1)$ ponttól 5 egység távolságra található, akkor a P pont koordinátáira teljesül, hogy

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0.$$

3585 Peti háromszög alakú kitűzőt szeretne készíteni kartonból. Tervei megvalósítása érdekében négyzetrácsos kartonból kivágott egy háromszöget. A háromszög csúcsainak koordinátái a négyzetrácsra rajzolt koordináta-rendszerben (melyben az egység 1 cm):

$$A(-3; 5),\quad B(5; 1) \quad \text{és} \quad C(-6; -5).$$

a) Számítsuk ki a kivágott háromszög területét.

b) A kivágott ABC háromszög melyik oldalára állítva lesz a legmagasabb?

c) Mekkora a *b)* feladatban megadott oldalhoz tartozó legnagyobb magasság?

d) Peti az ABC háromszög legnagyobb magasságát három egyenlő részre osztotta, majd az osztópontokon át párhuzamosokat húzott a háromszög megfelelő oldalával; így az ABC háromszöget egy kisebb háromszögre, valamint két trapézra osztotta. A középső részt fehéren hagyta, a kis háromszöget pirosra, a nagyobb trapézt zöldre satírozta. Mekkora területű részt satírozott pirosra, illetve zöldre?

3586 Magyarország 1 : 1 100 000 méretarányú térképén elhelyezünk egy koordináta-rendszert, amelynek tengelyei észak–dél, illetve kelet–nyugat irányúak, a tengelyeken az egységek pedig 1 cm hosszúak. Az így kapott koordináta-rendszerben néhány város koordinátái a következőképpen alakulnak:

Veszprém(–7; 1), Győr(–8; 7), Szeged(8; –7), Debrecen(18; 5).

a) Számítsuk ki, hogy a felsorolt városok páronként hány kilométer távolságra vannak egymástól.

b) Melyik magyarországi városban lehet a koordináta-rendszer kezdőpontja?

3587 Adottak a koordinátasík A és B pontjai, amelyeknek koordinátáira: $A(-3; 2)$ és $B(5; 3)$.

a) Melyek a koordinátái annak az x tengelyre illeszkedő P pontnak, amelyre a $PA^2 + PB^2$ összeg a lehető legkisebb?

b) Mennyi az *a)* feladatban szereplő összeg minimuma?

3588 Egy bútoráruház olyan háromszöglappal rendelkező asztalokat árusít, amelynek oldalait egy-egy körszelet alakú toldalékkal kiegészítve pontosan kör alakú asztalhoz juthatunk. A tervező a gyártónak elküldte a háromszöglap kicsinyített képének koordinátáit: (0; 0), (3; 0), (2; 2) (egy egység hossza a valóságban 50 cm). A számításokat egy tizedes pontossággal elvégezve válaszoljunk a következő kérdésekre.

a) Mekkorák a háromszöglap oldalai a valóságban?

b) Hány centiméter a kerek asztal sugara?

c) Mekkora a magassága az asztal leghosszabb oldalához illeszthető körszelet alakú toldaléknak?

d) Legfeljebb mekkora sugarú kör alakú abrosz helyezhető el a háromszöglapú asztalon, ha az asztalról sehol nem lóghat le?

Megoldások

11.1. KOMBINATORIKA, GRÁFOK

Fibonacci-számok – megoldások

3001 $f_{15} = 610$, $f_{20} = 6765$.

3002 *a)* –1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13;

b) 1, –1, 0, –1, –1, –2, –3, –5, –8, –13.

3003 *a)* 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136.

b) Igen, a 13.

3004 A második tagot az első és az első előtt álló összegeként kapjuk: $x + 1 = 1$; innen $x = 0$. Az előtte levő tag: $y + 0 = 1$; innen $y = 1$. Majd $z + 1 = 0$; $z = –1$. Aztán $u + (–1) = 1$; $u = 2$. Hasonlóan kapjuk a többi számot:

34, –21, 13, –8, 5, –3, 2, –1, 1, 0, **1,** **1,** 2, 3, 5, …

Érdekes módon a Fibonacci-számokat látjuk, csak váltakozó előjellel.

3005 Érdemes először kísérletezni néhány értékkel. Hamar megtaláljuk a csupa 0 sorozatot, ami ismétlődést mutat. Azonban más sorozat nem, így megfogalmazhatjuk a sejtésünket: *általában* nem lehet a számok között ismétlődés. Sőt, egy idő után vagy szigorúan növekednek, vagy szigorúan csökkennek a számok – a már említett csupa 0 kivételével. Hogyan bizonyítsuk be?

Gyűjtsünk össze egyszerű megfigyeléseket.

A) Ha két pozitív szám van egymás után valahol a sorozatban, akkor az utánuk levők is pozitívak, sőt a számok szigorúan növekednek az összeadás miatt.

B) Ha van két szomszédos negatív szám a sorozatban, akkor az utánuk levők is negatívak, sőt a számok szigorúan csökkennek.

C) Ha találunk nullát, és előtte pozitív vagy negatív értéket, akkor az *A)* vagy *B)* esethez jutunk: a nulla megduplázza az előtte álló számot.

Jónak tűnik a gondolatmenet, folytassuk. Mi a helyzet, ha egy pozitív és egy negatív érték áll egymás mellett?

D) Ha a két szám abszolút értéke egyenlő, akkor megjelenik a nulla, *C)* esethez jutunk.

E) Ha a pozitív szám abszolút értéke nagyobb, akkor pozitív értéket kapunk. Ezen belül E_1), ha a pozitív érték volt később, az *A)* esethez jutottunk.

F) Ha a negatív érték abszolút értéke nagyobb, akkor negatív számot kapunk. Ezen belül F_1), ha a negatív érték volt később, a *B)* esethez jutottunk.

Az *E)* és *F)* esetben van egy-egy további eset is: E_2), ha a negatív érték van később; illetve F_2), ha a pozitív érték szerepel később. Mindkét helyzetben visszajutunk *D)*, *E)* vagy *F)* esethez.

Ráadásul a létrejövő szám abszolút értéke megegyezik az összeg abszolút értékével, ami szigorúan kisebb lesz, mint az előző kettő közül a nagyobb abszolút értékű. Ennek a csökkenésnek pedig előbb-utóbb vége szakad: *A)*, *B)* vagy *C)* esetekhez kanyarodunk vissza.

Néhány példa az E_2) és F_2) esetekre:

a) –10, 4, –6, –2, … *b)* –10, 8, –2, 6, 4, … *c)* 10, –5, 5, 0, …

Mivel minden esetet áttekintettünk, ezzel a bizonyítást befejeztük: a 0, 0, 0, … számok kivételével nincs más olyan Fibonacci-szerű sorozat, amiben lenne ismétlődés (sőt, előbb-utóbb mindig szigorúan növő vagy szigorúan csökkenő számokat kapunk).

Permutációk, variációk – megoldások

3006 86!

3007 27!

3008 $\dfrac{21!}{6!\cdot 5!\cdot 10!}=162954792.$

3009 *a)* $\dfrac{(3+2)!}{3!\cdot 2!}=10;$ *b)* $\dfrac{(3+2+0)!}{3!\cdot 2!\cdot 0!}=10;$ *c)* $0!=1.$

3010 $\dfrac{18!}{(18-6)!}=18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13=13366080.$

3011 *a)* $\dfrac{10!}{(10-6)!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=151200;$

b) $\dfrac{10!}{(10-4)!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040.$

3012 $10^7.$

3013 $2^8=256.$

3014 Ebben a feladatban és a továbbiakban is nemnegatív (sőt elsősorban pozitív) egész megoldásokat keresünk. A legegyszerűbb, ha próbálkozunk.

A másik lehetőség, hogy kicsit gondolkodunk a próbálkozás előtt: $n!=39\,916\,800.$ A szám végén álló két 0 arra utal, hogy két ötös prímtényezőnek lennie kell a szorzatban. Az egyik maga az 5. A másikat a 10-ben találjuk, tehát legalább 10!-ig el kell menni. Ez még kevés, a megoldás $n=11.$

3015 Az első három számjegyet 6^3, a második hármat $\dfrac{10!}{(10-3)!}$-féleképpen kaphatjuk meg. Az eredmény a kettő szorzata: $216\cdot 720=155\,520.$

3016 *a)* Egyszerű permutációja 8 különböző elemnek: $8!=40\,320.$

b) Válasszunk ki egy főt, tekintsük őt kiindulópontnak. A megadott körüljárás szerint ültessük sorba a maradék hét főt. Ez úgy történik, mintha egyszerűen permutálnánk őket: $7!=5\,040.$

c) Most nem érdekes a körüljárási irány, ezért ugyanazt kapjuk, ha az asztal egy átmérőjére tükrözzük a résztvevőket. Így az előző pontban másik ültetést kaptunk volna, most azonban ez a kettő ugyanaz. A megoldás: $\dfrac{7!}{2}=2520.$

3017 Számoljuk meg a növényeket, összesen 6-félét találunk a pulton. Mindegyikből minden helyen tehet egyet a kosarába, azaz a $6^n=1\,679\,616$ egyenletet kell megoldanunk. A megoldást megkaphatjuk próbálkozással vagy az $1\,679\,616$ prímtényezős felbontásával. A megoldás: $n=8.$

Megjegyzés: Pár lecke múlva mindkét oldal 6-os alapú logaritmusát véve is meg tudjuk oldani az egyenletet.

3018 A második dobozból az ismétlődés miatt a cédulákat $\dfrac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}$-féleképp húzhatjuk ki (permutáció, hiszen mindet kivesszük). Az első dobozból ugyancsak az ismétlődés miatt 10^4 lehetőségünk van kivenni a cédulákat (variáció, a kiválasztás miatt). Eredményünk a kettő szorzata: $12\,600\,000.$

3019 Egy n alapú számrendszerben 0-tól $(n-1)$-ig n különböző számjegy van, ezekből kell 7 helyre írni egyet-egyet. (A kevesebb jegyből álló számokat úgy kapjuk, hogy a szám elejére megfelelő számú 0-t írunk.) Vagyis az $n^7 = 2\,097\,152$ egyenletet kell megoldanunk, amit próbálkozással vagy hetedik gyökvonással teszünk meg. Az eredmény $n = 8$, a számrendszer tehát a nyolcas.

3020 *a)* Bármikor bármelyik csúcsra ugorhat, minden esetben négy lehetősége van: 4^{10}.

b) Elsőnek bárhova, utána viszont már csak 3-3 helyre ugorhat: $4 \cdot 3^9$.

c) Elsőnek bárhova ugorhat. A következő ugrása a mostani helyéről elviszi, az utána levőkben pedig mindig kizárunk kettő csúcsot: $4 \cdot 3 \cdot 2^8$.

3021 Legyen a műsor nézőszáma n. Ekkor az első játékost n, a másodikat $(n-1)$-féleképpen választhatják ki a nézők közül, vagyis

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1) = 1980.$$

Ezt az egyenletet négyféleképp: próbálkozással; a zárójelet felbontva másodfokú egyenletként; az 1980-at prímtényezőkre bontva vagy gyökvonásból kerekítve is megoldhatjuk. Az eredmény $n = 45$.

3022 *a)* A három említett miniszterelnököt vegyük egy „csomagnak”. Ekkor 8 főt kell leültetnünk, ezt 8!-féleképp tehetjük meg. Az angolnak és a franciának közre kell fognia a németet, őket ezért még kétféleképpen ültethetjük minden sorrenden belül. Az eredmény: $2 \cdot 8!$

b) Ismét csomagoljuk össze a hármast. 8 főt kör alakú asztal mellé 7!-féleképp ültethetünk le, ha figyelembe vesszük a körüljárási irányt is. Vegyük figyelembe a hármasban a szélsők sorrendjét is: $2 \cdot 7!$ Végül tekintsünk el a körüljárási iránytól: $\dfrac{2 \cdot 7!}{2} = 7!$

3023 Egyik lehetőségünk a próbálkozás. Másrészt viszont ha számolunk, ismétléses permutációt kell számolnunk. Jelöljük c-vel $(2 \le c < 12)$ a keresett színpadi művek számát:

$$\frac{(4+5+c)!}{4! \cdot 5! \cdot c!} = 27\,720.$$

Tüntessük el a törtet, a következő egyenletet kapjuk:

$$(9+c)! = 79\,833\,600 \cdot c!$$

Leosztva 11!-sal (figyelembe véve c lehetséges értékeit):

$$12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (9+c) = 2c!$$

$$6 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (9+c) = c!$$

A c értékétől függően több esetünk van. Ha $9 + c = 12$, akkor $c = 3$ és így $12 = 2 \cdot 3!$ Ez jó megoldás.

Ha $3 < c < 12$, akkor a bal oldalon szerepel 13, ezért a jobb oldalon is el kell menni legalább 13!-ig. Azonban ebben (jobb oldalon) szerepel 11 is, ami viszont a másik (bal) oldalon nem fog előfordulni, ellentmondásra jutottunk. Ezen esetekben nincs megoldás, Lacinak 3 színházi előadást tartalmazó lemeze van.

3024 Az öt gyermek megszülethet 5 lány; 4 lány és 1 fiú; 3 lány és 2 fiú; 2 lány és 3 fiú; 1 lány és 4 fiú; 5 fiú variációban.

Az első és az utolsó esetben egyszerű dolgunk van, mindkétszer 5! sorrendben adhatnak nevet a megszületendő gyerekeknek.

Vegyük bonyolultabb példának a harmadik esetet. Ekkor a gyerekek között a lányok-fiúk sorrendje ismétléses permutáció: $\dfrac{5!}{3! \cdot 2!}$, azon belül a lányoknak $\dfrac{5!}{(5-3)!}$, a fiúknak $\dfrac{5!}{(5-2)!}$-féleképpen adhatnak nevet (ismétlés nélküli variáció).

Ez alapján minden esetet számba tudunk venni (a szimmetria miatt elég az egyes eseteket kettővel szorozni), a végeredmény:

$$2\cdot 5!+2\cdot\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot\frac{5!}{(5-4)!}\cdot\frac{5!}{(5-1)!}+2\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{(5-3)!}\cdot\frac{5!}{(5-2)!}=30\,240.$$

3025 Először is gondoljuk át a feltételeket. Az ismétléses esetben k-ra és n-re semmiféle megszorítás nincs azon kívül, hogy nemnegatív egészek. Az ismétlés nélküli esetben azonban $0\le k\le n$. Ez szigorúbb feltétel az előzőnél, így tartsuk magunkat az utóbbihoz. A kérdés: mely, a fenti feltételeknek megfelelő n, k-ra igaz:

$$n^k=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Feltételezhetjük, hogy $n\ne 0$, így nem kell a 0^0 hatvánnyal foglalkoznunk. Vizsgáljuk meg k néhány értékét! Ha $k=0$, akkor

$$1=n^0=\frac{n!}{n!}=1,$$

vagyis ekkor bármely n-re teljesül az egyenlőség. Ha $k=1$, akkor ugyanez a helyzet:

$$n=n^1=\frac{n!}{(n-1)!}=n.$$

Ha $k=2$, akkor $n^2=n\cdot(n-1)$ egyenlethez jutunk. Ennek egyetlen megoldása $n=0$, ami nem felel meg a $k\le n$ feltételnek. Ha k értékét tovább növeljük, akkor egyre magasabb fokú egyenletekhez jutunk, melyeket nem tudunk megvizsgálni. A megoldás azonban sokkal egyszerűbb.

Azt kell észrevennünk, hogy a kiinduló egyenlőség jobb és bal oldalán is k tényezőből álló szorzatokat találunk, azonban a bal oldalon csupa n tényezővel, a jobbon viszont n-től csökkenő tényezőkkel. Vagyis ha a szorzatoknak több tényezője is van, akkor nem lehetnek egyenlők.

A megoldás: $k=0$ és $k=1$ értékre bármely n-re megegyezik n elem k-tagú ismétléses és ismétlés nélküli variációinak száma, más értékekre viszont soha.

Ismétlés nélküli kombinációk, Pascal-háromszög – megoldások

3026 *a)* 6; *b)* 105; *c)* 462; *d)* 165; *e)* 55; *f)* 7381; *g)* 145; *h)* 1578; *i)* 1.

3027 *a)* 1; *b)* n; *c)* n^2-n; *d)* $\frac{n^2-n}{2}$; *e)* n; *f)* 1.

3028 *a)* $\binom{135}{44}$; *b)* $\binom{212}{101}$; *c)* $\binom{112}{55}$.

3029 *a)* Nincs.

b) Egy helyen: 2; kettő helyen: 3 és 4; három helyen: 6; négy helyen: 10. (Több helyen nem lehetnek, mert utoljára a szélső egyes mellett fordulhatnak elő.)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

3030 *a)* $\binom{6}{2}=15$; *b)* $\binom{6}{3}=20$; *c)* $\binom{6}{4}=15$; *d)* $\binom{6}{5}=6$;

e) 6 elemből nem lehet 7-et kiválasztani.

3031 *a)* 6; *b)* 5.

3032 $\binom{7}{4}=35.$

3033 *a)* $\binom{45}{6}=8145060$; *b)* $\dfrac{\binom{90}{5}}{\binom{45}{6}}=\dfrac{18\cdot 89\cdot 11\cdot 29\cdot 86}{15\cdot 44\cdot 43\cdot 7\cdot 41}=\dfrac{3\cdot 89\cdot 29}{5\cdot 7\cdot 41}\approx 5{,}4.$

3034 $\binom{9}{3}=84.$

3035 $\binom{7}{3}=35.$

3036 $\binom{60}{4}=487635.$

3037 A Pascal-háromszög előállításából adódóan szimmetrikus, és az értékek a sorok elején növekednek a szimmetriatengelyig. Így ha páros számról van szó, a felét kell aláírnunk. Páratlanokra két megoldást is kapunk: egyik a szám felének egészrésze, másik az ennél eggyel nagyobb egész. A konkrét példában:

a) $k=12$, $\binom{24}{12}=2704156$; *b)* $k=6$ vagy $k=7$, $\binom{13}{6}=\binom{13}{7}=1716.$

3038 *a)* A törpök közül $\binom{12}{4}=495$-féleképp válogathat ebédre négyet Hókuszpók.

b) A maradék nyolc főből választanak először kettőt, majd a maradék hatból ismét kettőt. Mivel ezeket egymástól függetlenül meg tudják tenni, össze kell őket szoroznunk: $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}=420.$

3039 A lehetőségek száma: $\binom{9}{3}\cdot\binom{4}{2}=504.$

3040 *a)* A négykerekű autó mind a négy kerekére négy csavar kell, így a válasz: $\binom{60}{16}$.

b) Ha külön-külön vesz ki csavarokat a dobozból Sanyi, akkor a következő adagot mindig néggyel kevesebb közül választhatja, $\binom{60}{4}\cdot\binom{56}{4}\cdot\binom{52}{4}\cdot\binom{48}{4}$-féleképp.

c) Az *a)* eset kifejtve egyszerű: $\binom{60}{16}=\dfrac{60!}{16!\cdot 44!}$. Most *b)* esetet is fejtsük ki:

$$\binom{60}{4}\cdot\binom{56}{4}\cdot\binom{52}{4}\cdot\binom{48}{4}=\frac{60!}{4!\cdot 56!}\cdot\frac{56!}{4!\cdot 52!}\cdot\frac{52!}{4!\cdot 48!}\cdot\frac{48!}{4!\cdot 44!}=\frac{60!}{(4!)^4\cdot 44!}.$$

Az egyszerűsítések után maradt alakokból – mivel $16!>(4!)^4$ – már látható, hogy a *b)* esetben több lehetőségünk van a csavarok kiválasztására.

Végül osszuk el a *b)*-ben kapott eredményt az *a)*-ban kapottal. Így $\dfrac{16!}{4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!}$-hoz jutunk, ami megfelel 16 elem 4, 4, 4, 4-tagú ismétléses permutációinak. Azaz ha az *a)* esetben figyelembe vesszük ezt a sorrendet is (vagy a *b)* esetben eltekintünk tőle), akkor a két eset egyenlő lesz.

3041 *a)* Ha a piros király a leosztott lapok között van, akkor a maradék 31-ből kell még mellé tenni hármat: $\binom{31}{3}=4495$.

b) Ez az eset három egymást kizáró alesetből áll össze: piros, de nem király; piros király; nem piros, de király. A három esetben összesen 11 lap van (7 + 1 + 3), melyekből bele kell kerülnie egynek a leosztott négy lap közé. A többi három leosztott lap a maradék 21 lapból kerülhet ki. A megoldás: $\binom{11}{1}\cdot\binom{21}{3}=14\,630$.

c) A „legalább" szó gyanús lehet, inkább számoljuk ki a kérdezett eset ellentétét (komplementerét). Ekkor arra kell válaszolnunk: hányféleképp fordulhat elő, hogy a leosztott négy lap között nincs sem piros, sem király lap? Azokból a lapokból, melyek nem pirosak és király sincs rajtuk, 21 van. A megoldást úgy kapjuk, ha kivonjuk az összes esetből az ellentettet: $\binom{32}{4}-\binom{21}{4}=29\,975$.

3042 Az autószerelős feladathoz hasonló szorzatot kell felírnunk: $\binom{52}{3}\cdot\binom{49}{3}\cdot\binom{46}{3}\cdot\binom{43}{3}$. Az ottanihoz hasonlóan elvégezve az egyszerűsítéseket: $\frac{52!}{(3!)^4\cdot 40!}\approx 7{,}6\cdot 10^{16}$.

3043 **I. megoldás.** A „legalább egy ász" ellentéte, ha nincs ász a leosztásban. Mivel összesen négy ász van a pakliban, így az ellentétes eseteket az összes esetből kivonva a megoldás: $\binom{32}{4}-\binom{28}{4}=15\,485$.

II. megoldás. A „legalább egy" jelent egy, kettő, három vagy négy ászt. Ez négy eset, lássuk részletesebben az egyiket, mondjuk a három ászt. Ekkor a csomagban levő négyből három bekerül a leosztásba, a maradék egyet pedig a nem ászok közül töltjük fel, $\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{1}$-féleképpen. A többi esetet is kiszámíthatjuk, összegük adja a megoldást:

$$\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{3}+\binom{4}{2}\cdot\binom{28}{2}+\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{1}+\binom{4}{4}\cdot\binom{28}{0}=15\,485.$$

3044 A „legfeljebb egy" tök lehet egy vagy nulla darab. Ez csak két eset, nincs értelme áttérni az ellentett eseményre, hiszen ott hét alesetet kellene összeírni. Lássuk hát.
Ha nincs tök a leosztásban, akkor a pakliban levő nyolc lapból nulla darab kerül a négy lap közé, az összes többi piros, zöld vagy makk: $\binom{8}{0}\cdot\binom{24}{4}=10\,626$. Ha egy tök van, akkor piros, zöld, makk lehet három: $\binom{8}{1}\cdot\binom{24}{3}=16\,192$. A megoldás a kettő összege: $\binom{8}{0}\cdot\binom{24}{4}+\binom{8}{1}\cdot\binom{24}{3}=26\,818$.

3045 Gondoljunk át részletesen egy esetet, például a három találatot. Hármasunk úgy lehet, ha az öt nyerőszámból megjelöltünk (kiválasztottunk) hármat, a maradék két tippünknek viszont a nem nyerő 85 számból kell kikerülnie. Ez alapján minden esetet számba vehetünk. Ha nincs találatunk, akkor minden megjelölt számunk a „nem nyert"-ek közül kerül ki. Ha pedig telitalálatunk van, akkor ott minden megjelölt tipp a nyerőszámok közül kerül ki.

a) $\binom{5}{0}\cdot\binom{85}{5}=32\,801\,517$; *b)* $\binom{5}{1}\cdot\binom{85}{4}=10\,123\,925$; *c)* $\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}=987\,700$;

d) $\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}=35\,700$; *e)* $\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}=425$; *f)* $\binom{5}{5}\cdot\binom{85}{0}=1$.

Figyeljük meg, hogy az összes lehetséges számötösök darabszáma $\binom{90}{5}=43\,949\,268$, ami a fentiek összege. Ez azért lehet, mert az összes esetet egymást kizáró alesetekre bontottuk.

3046 Egy kézfogás létrejöttéhez két ember kell. A kérdést módosíthatjuk így is: hány főből választhatunk ki összesen 45-féleképp kettőt? Vagy: határozzuk meg n természetes számot, amire $\binom{n}{2} = 45$. Ez nem bonyolult, csak írjuk fel „n alatt k” definícióját, és egyszerűsítsünk le $(n-2)!$-sal:

$$\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 45.$$

Utóbbi egyenlőséget tekintsük önálló egyenletnek és tüntessük el a törteket, bontsuk fel a zárójelet, majd rendezzük egy oldalra. Így az $n^2 - n - 90 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, aminek megoldásai: $n_1 = 10$ és $n_2 = -9$. Nekünk a feladat szövege szerint csak a természetes számok jöhetnek szóba, így a tárgyaláson 10 fő volt jelen.

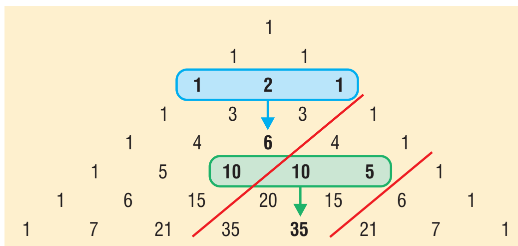
3047 Csak ki kell fejtenünk a bal oldalon álló kifejezéseket, majd közös nevezőre hozzuk őket:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

A végén kiemeltünk $(n-1)!$-t, és összevontunk a zárójelben. Így éppen $(n-1)! \cdot n = n!$ formát kapjuk, és készen is vagyunk.

3048 *a)* Az összefüggéshez egy soron belül kell három egymást követő számot találni (vagyis legalább a második sorból – lásd az ábrán), például:

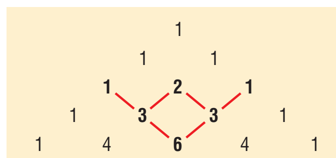
$$1 + 2 \cdot 2 + 1 = 6,$$
$$10 + 2 \cdot 10 + 5 = 35.$$



A kapott értékek két sorral lejjebb találhatók (innen az $n + 2$), és mivel a soron belül az azonos sorszámú tagok ferdén balra dőlve követik egymást (piros vonal), így az összeadandók közül az utolsó sorszámával egyezik meg az eredmény (innen a $k + 1$).

b) A bizonyítást elvégezhetnénk a definíció alapján is, azonban hosszadalmas és nem jelent újat az előző feladathoz képest. Ezért próbálkozzunk magával az ott tárgyalt összefüggéssel:

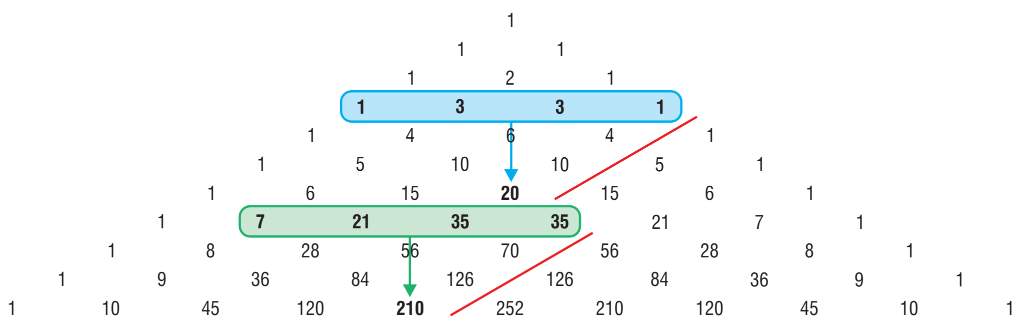
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}.$$



Érdemes az ábrán is követni a levezetést.

3049 *a)* A feladat az előző példához nagyon hasonlít, csak itt négy darab egy sorban, egymás után álló számot kell összeadnunk (ezért aztán leghamarabb a harmadik sorban tekinthetjük). Ott pedig

$$1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 1 = 20 \qquad \text{vagy később} \qquad 7 + 3 \cdot 21 + 3 \cdot 35 + 35 = 210.$$



b) A 20 és 210 értékeket három sorral lejjebb, az utolsó értékkel azonos sorszámú helyen találjuk. Azaz a sejtésünk:

$$\binom{n}{k-2}+3\cdot\binom{n}{k-1}+3\cdot\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+3}{k+1}.$$

c) Az igazoláshoz használjuk fel hétszer az $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ összefüggést. A 3-as szorzó szükséges, ugyanis ha csak kétszer vennénk a középső elemeket, akkor például: $7+21=28$; $21+35=56$; $35+35=70$. Ezen három számból csak az egyik oldalon folytathatnánk, hiszen 56 egyszer szerepel. A középső elemet ezért meg kell dupláznunk, amihez három darab 21 és három darab 35 kell.

Megjegyzés: Az előző két feladatot természetesen lehet általánosítani, bővítve a számok sorát. Érdemes észrevennünk, hogy az együtthatók is a Pascal-háromszögből valók. Azonban most részletesebben egy további általánosításra hívjuk fel a figyelmet. Írjuk le az első sorokat, ahol az összefüggések előfordulhatnak így:

$$1^2+2^2+1^2=\binom{2}{0}^2+\binom{2}{1}^2+\binom{2}{2}^2=\binom{4}{2}\quad\text{és}\quad 1^2+3^2+3^2+1^2=\binom{3}{0}^2+\binom{3}{1}^2+\binom{3}{2}^2+\binom{3}{3}^2=\binom{6}{3}.$$

Általánosítva megfigyelésünket, új sejtéshez juthatunk. Próbáljuk meg bebizonyítani, hogy

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

3050 *a)* Az összefüggés az egymás utáni sorokban ugyanazon sorszámú helyeken álló számok összege, mindig a sorvégi szélső értéktől kezdve. Például:

$$1+3+6+10=20\quad\text{vagy}\quad 1+5+15+35+70=126.$$

1
1 1
1 2 **1**
1 3 **3** 1
1 4 **6** 4 **1**
1 5 **10** 10 **5** 1
1 6 15 **20** **15** 6 1
1 7 21 35 **35** 21 7 1
1 8 28 56 **70** 56 28 8 1
1 9 36 84 126 **126** 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

b) Úgy tűnik, az összeg mindig az eggyel lejjebb levő sor eggyel hátrébb levő eleme. Sejtésünk:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

c) A bizonyítást elvégezhetjük rögzített k-ra n szerinti teljes indukcióval, de bevethetünk egy apró trükköt is. Igaz ugyanis, hogy

$$\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1},\qquad\text{ahonnan}\qquad\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+1}{k}=\binom{k+2}{k+1}.$$

Így az első kéttagú összeg egybeolvad, majd a következő kettő újra és így tovább. Nem teszünk mást, mint újra és újra felhasználjuk az $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ összefüggést. Tulajdonképpen egy „teleszkopikus” összeghez jutunk.

d) Az összeg $k = 1$-re a következő alakot ölti:

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\ldots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2},$$

vagy ugyanez másképp írva:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Ez pedig nem más, mint az első n természetes szám összegére vonatkozó összefüggés.

Megjegyzés: Játsszunk még az összefüggéssel. Használjuk ki a Pascal-háromszög szimmetriáját, és tükrözzük a szimmetriatengelyre a szereplő tagokat. Felhasználva az $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ összefüggést, a következő alakhoz jutunk:

$$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1-k}+\binom{n}{n-k}=\binom{n+1}{n-k}.$$

A *c)* részben leírt trükkel ezt is igazolhatjuk, ha felhasználjuk, hogy $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}$.

3051 A kérdés kicsit másként fogalmazva: oldjuk meg a $\binom{13}{k}=715$ egyenletet. Ezt próbával vagy a definíció alapján tudjuk megtenni. Lássuk a „tudományosabb" módszert. Eltüntetve a törtet:

$$\frac{13!}{k!\cdot(13-k)!}=715,$$

$$8\,709\,120=k!\cdot(13-k)!$$

A jobb oldalon egy egész számokból álló szorzat – sőt két szorzat szerepel. Ráadásul mindkettő 1-től kezdve halad az egymás utáni egészeken, így tartalmaz sorozatban egyforma tényezőket is. Tehát várhatóan bizonyos értékek duplán szerepelnek a 8 709 120 szorzattá bontásában. Lássuk a prímtényezős felbontást:

$$8\,709\,120=2^{10}\cdot3^{5}\cdot5\cdot7.$$

A 7 és 5 prímtényező biztosan egyszer szerepel, így azok csak a hosszabb szorzat előállításában vehetnek részt. A köztük levő 6 is egyszer szerepel, előállításához egy 2 és egy 3 prímtényező szükséges. Az 5 előtt kell lennie az $1\cdot2\cdot3\cdot4$ szorzatnak, ami elvisz három 2 és egy 3 prímtényezőt. Eddig elfogyasztottunk négy darab 2, kettő darab 3, egy 5 és egy 7 prímet. Maradt $2^6\cdot3^3$. A három 3 prímből nem tehetünk kettőt a rövidebb szorzatba, mert akkor el kellene jutnunk 6-ig. Így kettő marad a hosszabban, azaz ott lesz 9 is és így 8 is. Ezzel újabb prímeket használunk el, marad $2^3\cdot3$. Ez pedig pont elég az $1\cdot2\cdot3\cdot4$ szorzathoz. Vagyis $8\,709\,120=4!\cdot9!$ és így $k=4$ vagy $k=9$. Tehát 13 főből 4 vagy 9 főt tudunk 715-féleképpen kiválasztani.

3052 A kérdés átfogalmazva: oldjuk meg a természetes számokon az $\binom{n}{7}=77\,520$ egyenletet! Ennek is nekiláthatunk próbálgatással, ám abból nem sokat tanulunk. Az előző példához hasonlóan kezeljük a kérdést:

$$\frac{n!}{7!\cdot(n-7)!}=77\,520,$$

$$\frac{n!}{(n-7)!}=390\,700\,800.$$

Rutinosan prímtényezőkre bonthatjuk a jobb oldalt (rögtön válasszuk le a végéről a $100=2^2\cdot5^2$-t):

$$390\,700\,800=2^{8}\cdot3^{3}\cdot5^{2}\cdot7\cdot17\cdot19.$$

Figyeljük meg a másik oldalt is, itt n-től lefelé hét darab egymás után következő egyre kisebb szám szorzata szerepel. Mivel a 17 és 19 prímek, így valószínűleg szerepelnek a szorzatban. Köztük találjuk a $18 = 2 \cdot 3^2$-t is. Várhatóan 7-ig nem jut el 19-től a szorzat, ezért $14 = 2 \cdot 7$-et kell keresnünk vagy $21 = 3 \cdot 7$-et. Bármelyik is szerepel, a szorzat szélén kell állnia. Ugyanis van két 5-ös prímtényező is, egyik lehet a $15 = 3 \cdot 5$ építőköve, másik pedig a $20 = 2^2 \cdot 5$-é.

Gyűjtsük össze a felbontásból eddig elhasznált prímeket:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19.$$

Maradt még egy darab 2 és egy darab 7, tehát a megoldás:

$$390\,700\,800 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14.$$

Vagyis 20 főből választhatunk $77\,520$-féleképp 7-et. Másik megoldás nincs.

3053 A feladatra azonnal adhatunk két magától értetődő megoldást: a 8568. sor 1. eleme és a 8568. sor 8567. eleme is 8568. Igen ám, de található-e más lelőhelye a Pascal-háromszögben a jelzett számnak?

Most is fogalmazzuk meg másként a kérdést: mely n és k $(n \ge k \ge 0)$ természetes számra teljesül, hogy $\binom{n}{k} = 8568$?

Az előző pontban az $\binom{8568}{1} = \binom{8568}{8567} = 8568$ megoldást adtuk meg.

Próbálgatással most nem sokra megyünk, mert sok az ismeretlen. Vegyük hát a definíciót, bontsuk fel a 8568-at prímekre, és gondolkodjunk:

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17.$$

A bal oldalt tekintsük úgy, hogy a több tényezőből álló szorzattal leegyszerűsítettünk, legyen ez most az $(n-k)!$ (A szimmetria miatt nem fontos, melyiket tekintjük.)

A túloldalon van egy 17-es prímtényező, ami elég nagy ahhoz, hogy ne egyszerűsített alakból kapjuk. Feltehetjük, hogy a 17 szerepel a bal oldal számlálójában. Nézzük a 17 körüli számokat, például az előző feladathoz hasonlóan $18 = 2 \cdot 3^2$-t is ki tudjuk rakni a prímekből és $14 = 2 \cdot 7$-et is. 19 nem szerepel, így biztosan tudjuk, hogy legfeljebb $n = 18$. 13 sem szerepel, tehát vele már egyszerűsítettünk. A 18 és 14 között lennie kellett $15 = 3 \cdot 5$ és $16 = 2^4$-nek. Hat darab 2-es prímünk azonban nincs a felbontásban – ez azért lehet, mert a szorzatot egyszerűsítettük $k!$-sal. Most nézzük meg azt, mi hiányzik a teljes $14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18$ szorzatból, ennek árulkodnia kell az osztó $k!$-ról:

$$14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17) \cdot (2^3 \cdot 3 \cdot 5) =$$
$$= (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5) = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17) \cdot (5!).$$

Elkészültünk hát: $k = 5$ és $n = 18$ megoldást ad. Ugyanígy a szimmetria miatt megoldás $k = 13$ is.

Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció – megoldások

3054 *a)* $9 - 6b + b^2$;

b) $e^3 + 6e^2f + 12ef^2 + 8f^3$;

c) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$;

d) $32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$;

e) $1 - 3{,}5a + 5{,}25a^2 - 4{,}375a^3 + 2{,}1875a^4 - 0{,}65625a^5 + 0{,}109375a^6 - 0{,}0078125a^7$.

3055 *a)* $x^{12} + 12x^{11} + 60x^{10} + 160x^9 + 240x^8 + 192x^7 + 64x^6$;

b) $256a^8 - 512a^7b + 448a^6b^2 - 224a^5b^3 + 70a^4b^4 - 14a^3b^5 + \dfrac{7}{2^2}a^2b^6 - \dfrac{1}{2^3}ab^7 + \dfrac{1}{2^8}b^8$;

c) $x^3 + 9x^3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 36x^4 \cdot \sqrt[3]{x} + 84x^5 + 126x^5 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 126x^6 \cdot \sqrt[3]{x} + 84x^7 +$
$+ 36x^7 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 9x^8 \cdot \sqrt[3]{x} + x^9$;

d) $x^7 + 21x^6 \cdot \sqrt{x} + 189x^6 + 945x^5 \cdot \sqrt{x} + 2835x^5 + 5103x^4 \cdot \sqrt{x} + 5103x^4 + 2187x^3 \cdot \sqrt{x}$;

e) $64x^6 - 576x^8 + 2160x^{10} - 4320x^{12} + 4860x^{14} - 2916x^{16} + 729x^{18}$.

3056 *a)* $1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; *b)* $4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \sin x \cdot \cos x + 1$.

3057 *a)* $(2a + b)^3$; *b)* $(0{,}5x^2 - 2y)^3$; *c)* $\left(x^2 - x^3\right)^4$; *d)* $\left(\sqrt{x} + x\right)^4$.

3058 *a)* 2; *b)* 4; *c)* 32; *d)* 1.

3059 *a)* Üres halmaz. *b)* 1. *c)* Nincs ilyen halmaz. *d)* 4.
e) 8. *f)* Nincs ilyen halmaz.

3060 Minden bit értéke 0 vagy 1 lehet. Mivel a shortint és az integer egész számok, ezért lehetnek negatívok is: kell hagynunk az előjelnek egy bitet (az elsőt). A szám értékének rögzítéséhez így 7, illetve 15 bit marad. A legnagyobb érték ezért (a 0-t se feledjük el!):

a) shortint esetén: $2^7 - 1 = 127$; *b)* integer esetén: $2^{15} - 1 = 32\,767$.

A részhalmazok számát csak a halmazban levő elemek száma határozza meg, így shortint típusú számból $128 + 1 + 127 = 256$ darab lehet, integerből pedig $32\,768 + 1 + 32767 = 65\,536$. A válasz:

c) 2^{256}; *d)* 2^{65536}.

3061 A két megadott szám a lányok és a fiúk részhalmazainak száma. Vagyis kérdés, hogy 2-nek melyik hatványa az, aminek értéke 1024. Hamar kitaláljuk, $2^{10} = 1024$. A fiúknál ugyanez $2^{13} = 8192$. Ebből adódik, hogy a lányok tízen, a fiúk tizenhárman vannak az osztályban, tehát az osztálylétszám összesen huszonhárom. Tehát 2^{23}-féleképpen választható ki egy csoport az egész osztályból.

Megjegyzés: Hamarosan megtanuljuk általánosan is megoldani a $2^x = 1024$, ún. *exponenciális* egyenleteket.

3062 Képzeljük el a csapat összes tagját egymás mellett állva a bemutatáskor. A belőlük képezhető részhalmazokat jelölhetjük úgy is, hogy egy mínuszjelet képzelünk afölé, aki nem tagja; és egy plusz jelet afölé, aki tagja a részhalmaznak. Mind a tizenegy játékos felett vagy plusz, vagy mínusz jel állhat, így 2^{11} lehetőség van különböző részhalmazok képzésére.

a) Most ha az Enikő feletti jelet mínusznak rögzítjük, akkor csak a többiek jele változhat, tehát a megoldás 2^{10}.

b) Az előző részhalmazokat úgy kaptuk, hogy Enikő jelét mínusznak vettük. Hagyjuk hát ezt így, és most legyen Évike jele plusz. Ezt is rögzítettük, szabadon választható marad kilenc fő, a megoldás 2^9.

c) Ebben a kérdésben öt főt kell rögzítenünk (az mindegy, hogy plusz- vagy mínuszjelet rögzítünk a játékos felett képzeletben). Szabadon hat főt választhatunk, a képezhető részhalmazok száma 2^6, ami éppen $2^5 = 32$-ed része az összes lehetőségnek.

3063 *a)* A fociban semmi sem tiltja, hogy két vagy több szabadrúgást ne végezhessen el ugyanaz a játékos. Mivel ebben az esetben az időbeli sorrendet is figyelembe vesszük, így 8 fő közül kell kiválasztani az első, a második stb. szabadot rúgó játékost (ismétléses variáció):

$$8^{16} \approx 2{,}8 \cdot 10^{14}.$$

11.5. KOORDINÁTA-GEOMETRIA

Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal (emlékeztető) – megoldások

3555 $\vec{a} = 1 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{a}(1; 4)$; $\vec{b} = -5 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{b}(-5; 2)$; $\vec{c} = -3 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{c}(-3; -2)$;
$\vec{d} = -2 \cdot \mathbf{i} + 5 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{d}(-2; 5)$; $\vec{e} = 4 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{e}(4; 0)$; $\vec{f} = 3 \cdot \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j}$, $\vec{f}(3; -2)$.

3556 *a)* $(-1; 2)$; *b)* $(3; -8)$; *c)* $(2; -6)$; *d)* $(6; -15)$;
e) $(8; -21)$; *f)* $\left(-\frac{7}{2}; 9\right)$; *g)* $(15; -40)$; *h)* $\left(\frac{23}{2}; -31\right)$.

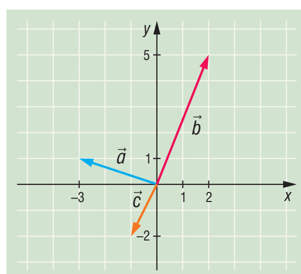
3557 *a)* $6 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$; *b)* $2 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$; *c)* $-4 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$; *d)* $0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$.

3558 *a)* $\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{13}$; *c)* 5; *d)* $\frac{\sqrt{26}}{2}$;
e) 1; *f)* $\sqrt{a^2 + b^2}$; *g)* $\sqrt{5}$; *h)* $\sqrt{6}$;
i) $\sqrt{2 \cdot (a + b)}$.

3559 *a)* $|\vec{a}| = 85$; *b)* $|\vec{b}| = 97$; *c)* $|\vec{c}| = 89$; *d)* $|\vec{d}| = 29$; *e)* $|\vec{e}| = 34$.
Mindegyik vektor koordinátáinak abszolút értéke egy-egy pitagoraszi számhármas két tagja, a harmadik tag éppen a vektor abszolút értéke.

3560 *a)* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; *b)* $\left(\frac{2 \cdot \sqrt{13}}{13}; \frac{3 \cdot \sqrt{13}}{13}\right)$;
c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}\right)$; *d)* $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

3561 A helyvektorok az ábrán láthatók.
A vektorok koordinátái a +90°-os, illetve a –90°-os forgatások után:
a) $(-1; -3)$, $(1; 3)$;
b) $(-5; 2)$, $(5; -2)$;
c) $(2; -1)$, $(-2; 1)$.



3562 *a)* –5; *b)* 5; *c)* –5;
d) –10; *e)* –45; *f)* 85.

3563 *a)* Mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, ezért a vektorok derékszöget zárnak be egymással.
b) A két vektor hegyesszöget zár be, mivel $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 > 0$.
c) A vektorok tompaszöget zárnak be egymással, mivel skaláris szorzatuk $-\frac{5}{2}$.
d) A két vektor derékszöget zár be, mivel skaláris szorzatuk 0.

3564 *a)* Mivel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ezért az AB és az AC szakaszok merőlegesek egymásra, így az ABC háromszög derékszögű. A derékszög az A csúcsnál található.

b) A derékszög a C csúcsnál van.

c) A derékszög a C csúcsnál van.

3565 *a)* A C pont helyvektorára:

$$\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a} = 3(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - 2(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = -5\mathbf{i} + 16\mathbf{j}.$$

Ezek alapján a pontok koordinátái:

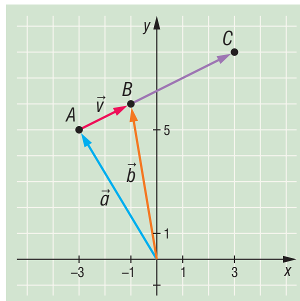
$$A(1; -2), \quad B(-1; 4), \quad C(-5; 16).$$

b) Mivel $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, valamint $\overrightarrow{AC} = -6\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$, ezért $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, ami igazolja, hogy a három pont egy egyenesre illeszkedik.

3566 *a)* Ha a mozgó pont helyvektora a megfigyelés kezdetekor $\vec{a}$, a következő másodpercben pedig $\vec{b}$, akkor a sebességvektor:

$$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j},$$

így a sebességvektor koordinátái $\vec{v}(2; 1)$.



b) A megfigyelés kezdetét követő harmadik másodpercben a test helyvektora:

$$\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{v}.$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy a test a $C(3; 8)$ pontban tartózkodik.

c) A $D(11; 12)$ pontra teljesül, hogy

$$\overrightarrow{AD} = 14\mathbf{i} + 7\mathbf{j} = 7\vec{v},$$

ami azt jelenti, hogy az adott ponton a test a megfigyelés kezdetét követő 7. másodpercben halad át.

3567 A két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. A két vektor skaláris szorzata a koordinátáik segítségével:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\left(\sqrt{2} + 2\right) + \sqrt{2} \cdot \alpha = 0,$$

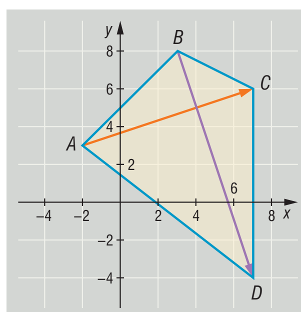
amiből α-t kifejezve:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

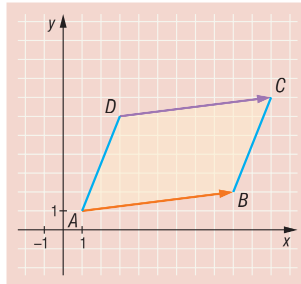
3568 Számítsuk ki a négyszög átlóvektorainak koordinátáit: $\overrightarrow{AC}(9; 3)$, illetve $\overrightarrow{BD}(4; -12)$. Mivel a két vektor skaláris szorzata:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 9 \cdot 4 + 3 \cdot (-12) = 0,$$

ezért a két átló valóban merőleges egymásra.

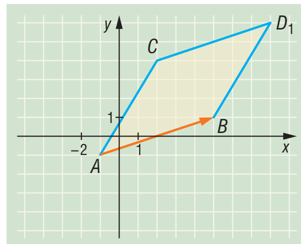


3569 A négyszög $\overrightarrow{AB}$, illetve $\overrightarrow{DC}$ oldalvektorainak koordinátáit kiszámolva láthatjuk, hogy mindkét vektor koordinátái $(8; 1)$. Eredményünk azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszögben két szemközti oldal ugyanolyan hosszú és párhuzamos, ezért a négyszög valóban paralelogramma.

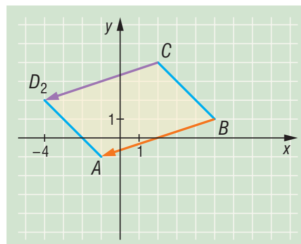


3570 A megadott pontokat jelölje rendre A, B és C. A feladatnak három megoldása van. Két olyan megoldást kapunk, amelyekben az AB szakasz a paralelogrammának egyik oldala. Ezekben a paralelogrammákban az egyik oldalvektor $\overrightarrow{AB}(6; 2)$.

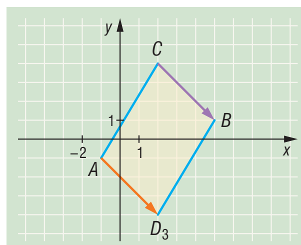
Az ábra azt az esetet mutatja, amelyben a BC szakasz átló. Ekkor $\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AB}$, amiből $D_1(8; 6)$.



A következő ábra azt a paralelogrammát mutatja, amelyben az AB, valamint a BC szakaszok is a paralelogramma egy-egy oldalát alkotják. Ekkor $\overrightarrow{CD_2} = \overrightarrow{BA}$, és ezért $D_2(-4; 2)$.



Végül még egy megoldás adódik, amelyben az AB szakasz a paralelogrammának átlója. Ekkor $\overrightarrow{AD_3} = \overrightarrow{CB}(3; -3)$, amiből egyszerű számolással kapjuk, hogy $D_3(2; -4)$.



3571 *a)* A keresett összegvektor első koordinátája:

$$\sqrt{1} + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \ldots + \left(\sqrt{2008} - \sqrt{2007}\right) + \left(\sqrt{2009} - \sqrt{2008}\right).$$

Ha alaposabban szemügyre vesszük az összeg tagjait, akkor láthatjuk, hogy az első helyen álló $\sqrt{1}$, valamint az első zárójelben szereplő második tag „kiejti egymást”, csakúgy mint az első, illetve a második zárójelekben szereplő $\sqrt{2}$, illetve $-\sqrt{2}$. Ha a többi tagot is párba állítjuk, akkor igazából csak a $\sqrt{2009}$-nek nem találunk párt, az összes többi tag „kiesik” az összegből. Ebből adódóan az összegvektor első koordinátája $\sqrt{2009}$.

A második koordinátát illetően hasonlóan járhatunk el. A megfelelő koordináta „hosszú alakja”:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2009} + \sqrt{2008}} + \frac{1}{\sqrt{2010} + \sqrt{2009}}.$$

Ha a fenti összegben minden egyes tag nevezőjét gyöktelenítjük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}=\sqrt{2}-\sqrt{1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2009}}=\frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2009}}\cdot\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}=\frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}{2010-2009}=\sqrt{2010}-\sqrt{2009}.$$

Eredményeink alapján a keresett vektor második koordinátája tehát a következő alakban írható fel:

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2009}-\sqrt{2008}\right)+\left(\sqrt{2010}-\sqrt{2009}\right).$$

Az összeg feltűnő hasonlóságot mutat a vektor első koordinátájánál szereplő összeggel, csak itt most az első zárójelben szereplő $-\sqrt{1}$-nek, valamint az utolsó zárójelben található $\sqrt{2010}$-nek nincs párja, így az összegvektor második koordinátája $\sqrt{2010}-1$.

A keresett összeg koordinátái tehát:

$$\left(\sqrt{2009};\ \sqrt{2010}-1\right).$$

b) Mivel $\sqrt{2009}>\sqrt{2010}-1$, ezért a megfelelő pont az x tengelyhez van közelebb.

Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge. Területszámítási alkalmazások – megoldások

3572 *a)* 3; *b)* 5; *c)* 5; *d)* 13; *e)* $\frac{\sqrt{29}}{3}$; *f)* 2.

3573 *a)* 3; *b)* 5; *c)* 13; *d)* $2\cdot\sqrt{34}$; *e)* $\sqrt{6}$; *f)* $2\cdot\sqrt{3}$; *g)* $\frac{7\cdot\sqrt{2}}{2}$; *h)* $\frac{\sqrt{26}}{6}$.

3574 *a)* $AB=AC=\sqrt{50}$; *b)* $AB=AC=\sqrt{34}$; *c)* $AB=AC=\sqrt{20}$.

A *c)* feladatban szereplő háromszög derékszögű, mert $\overrightarrow{AB}(4;\ 2)$ és $\overrightarrow{AC}(2;\ -4)$.

3575 *a)* A pont illeszkedik a körre. *b)* A pont illeszkedik a körre.
c) A pont nem illeszkedik a körre. *d)* A pont illeszkedik a körre.

3576 *a)* $AB=2$, $BC=3{,}6$, $AC=3$, a háromszög kerülete 8,6.
b) $AB=23{,}7$, $BC=13{,}3$, $AC=16{,}1$, a háromszög kerülete 53,1.

3577 *a)* Az ilyen tulajdonságú pontok két, az x tengellyel párhuzamos egyenesen helyezkednek el, attól 3 egység távolságra. A megfelelő $(x;\ y)$ pontokra $y=3$ vagy $y=-3$ teljesül.
b) Ezúttal az y tengellyel párhuzamos egyeneseken találhatók a feltételnek megfelelő pontok. A koordinátáikra $x=3$ vagy $x=-3$ teljesül.

3578 A megfelelő $(x;\ y)$ pontokra $x=y$ vagy $x=-y$ teljesül. A pontok a két tengely szögfelező egyeneseire illeszkednek.

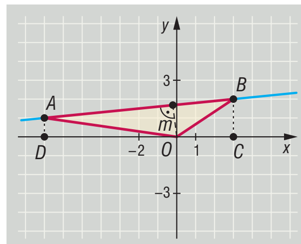
3579 *a)* $\alpha = 90,0°$; *b)* $\alpha = 90,0°$; *c)* $\alpha = 180,0°$;
d) $\alpha \approx 126,5°$; *e)* $\alpha = 45,0°$; *f)* $\alpha \approx 93,4°$.

3580 *a)* $\alpha \approx 53,97°$, $\beta \approx 79,70°$, $\gamma \approx 46,33°$;
a háromszög területe 11.

b) $\alpha \approx 32,70°$, $\beta \approx 61,70°$, $\gamma \approx 85,60°$;
a háromszög területe 26.

c) $\alpha \approx 103,32°$, $\beta \approx 48,18°$, $\gamma \approx 28,50°$;
a háromszög területe 38.

3581 Használjuk az ábra jelöléseit: legyen $A(-7; 1)$, $B(3; 2)$ a két pont, melyeken a test a mozgás során áthaladt, továbbá $C(3; 0)$, $D(-7; 0)$, illetve $O(0; 0)$. A feladat kérdése alapján az ABO háromszög AB oldalához tartozó m magasságát kell kiszámolnunk.



Ehhez kiszámoljuk az AB szakasz hosszát, valamint az ABO háromszög területét. A két számolt értékből már könnyen megkaphatjuk a keresett magasságot.

Az ABO háromszög területét pl. úgy kaphatjuk meg, hogy az $ABCD$ trapéz területéből kivonjuk az AOD, valamint a BOC háromszögek területét. A számolásokat elvégezve kapjuk, hogy

$$T_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CD = \frac{1+2}{2} \cdot 10 = 15;$$

$$T_{AOD} = \frac{AD \cdot OD}{2} = 3,5;$$

$$T_{BOC} = \frac{BC \cdot OC}{2} = 3;$$

$$T_{ABO} = T_{ABCD} - T_{AOD} - T_{BOC} = 15 - 3,5 - 3 = 8,5.$$

Az AB távolság:

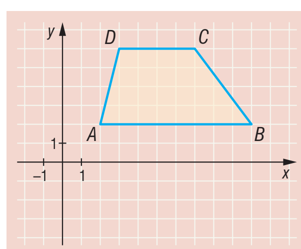
$$AB = \sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101}.$$

Ha most az ABO háromszög területét az AB oldal, valamint a hozzá tartozó m magasság segítségével írjuk fel, akkor

$$8,5 = \frac{\sqrt{101} \cdot m}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{17}{\sqrt{101}} \approx 1,69.$$

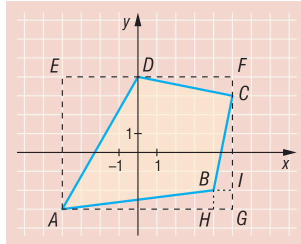
A mozgó test tehát 1,69 egység távolságra volt az origótól, amikor ahhoz legközelebb tartózkodott.

3582 *a)* A kapott négyszög trapéz, melynek alapjai párhuzamosak az x tengellyel. A négyszög területe:



$$T = \frac{8+4}{2} \cdot 4 = 24.$$

b) Az ábra jelöléseivel $AB = AD = \sqrt{65}$, illetve $CB = CD = \sqrt{26}$, ezért az $ABCD$ négyszögben két-két szomszédos oldal megegyezik, így a négyszög deltoid.



Az $ABCD$ deltoid területének kiszámolásához érdemes a négyszöget egy olyan téglalapba foglalni, amelynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. A szóban forgó téglalap csúcsait az ábrán A, E, F, illetve G jelöli. A területszámítást megkönnyíti, ha az $AEFG$ téglalap területéből kivonjuk a deltoid körül „kimaradó” AED, DFC, CIB és AHB derékszögű háromszögek, valamint az $IGHB$ négyzet területét. Az egyes síkidomok területe:

$$T_{AEFG} = 7 \cdot 9 = 63; \qquad T_{AED} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14;$$

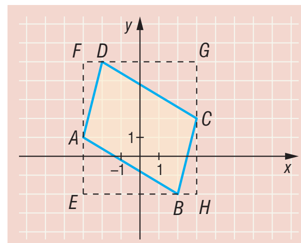
$$T_{DFC} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2{,}5; \qquad T_{CIB} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2{,}5;$$

$$T_{AHB} = \frac{8 \cdot 1}{2} = 4; \qquad T_{IGHB} = 1.$$

Az elmondottakból azonnal következik, hogy

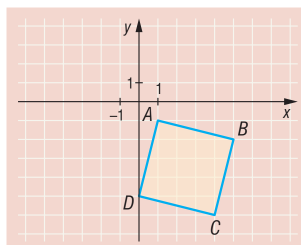
$$T_{ABCD} = 63 - 14 - 2{,}5 - 2{,}5 - 4 - 1 = 39.$$

c) A kapott négyszög paralelogramma, hiszen (az ábra jelöléseit használva) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}(1; 4)$, ami mutatja, hogy a négyszög BC és AD oldala párhuzamos egymással, valamint hosszuk is megegyezik.



Az $ABCD$ paralelogramma területe a *b)* feladatban látott móddszerrel számolható. A paralelogrammát ezúttal az $EFGH$ téglalapba „foglalhatjuk bele”, és a téglalap kimaradó részei háromszögek. A számításokat elvégezve az $ABCD$ paralelogramma területére 23 egység adódik.

d) A kapott négyszög ezúttal négyzet. Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}(4; -1)$, amiből látható, hogy a négyszög paralelogramma (van két párhuzamos és egyenlő hosszúságú oldala). Mivel $\overrightarrow{AD}(-1; -4)$, ezért



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-4) = 0,$$

ezért a négyszög A csúcsánál (és ebből kifolyólag a többi csúcsnál is) derékszög található, így az $ABCD$ négyszög valóban négyzet.

Mivel $AB = \sqrt{17}$, ezért az $ABCD$ négyzet területe 17 egység.

3583 Ha $PA = PB$, akkor

$$\sqrt{(3 - x)^2 + (1 - y)^2} = \sqrt{(-2 - x)^2 + (5 - y)^2}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a kijelölt műveleteket, végül a lehetséges összevonásokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$10x - 8y + 19 = 0.$$

Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a fenti összefüggést csak a feltételeknek megfelelő P pont elégítheti ki.