Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Megoldásokkal **10**

ÉRETTSÉGI

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

MOZAIK

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

10

Megoldásokkal

Nyolcadik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019

Tisztelt Olvasó!

Feladatgyűjtemény-sorozatunk egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A könyvek felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ezekből a tankönyvekből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

Ugyanakkor – mivel a feladatgyűjtemények felépítése természetesen megfelel a tantárgy belső logikájának és az iskolákban általánosan alkalmazott kerettanterveknek – minden nehézség nélkül használhatják azok is, akik más tankönyvekből tanulják, illetve tanítják a matematikát.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

2184 **Gyakorló feladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

2430 **Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*

2796 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

A feladatgyűjtemények feladatainak sorszámozása a tankönyvcsalád egyes köteteire utal.

A 9. évfolyam feladatai az 1001-es, a 10. évfolyam feladatai a 2001-es, a 11. évfolyamé a 3001-es, a 12. évfolyamé pedig a 4001-es sorszámtól kezdődnek. A 12.-es kötetben a négy év anyagát áttekintő rendszerező összefoglalás feladatai az 5001-es sorszámtól indulnak, ezáltal segíti a feladatok közötti válogatást az érettségire történő felkészüléskor.

Megoldások

A feladatgyűjtemény minden feladat megoldását tartalmazza. A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezető 5
A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések 8

10.1. *Gondolkodási módszerek* (2001–2091)

MEGOLDÁS

Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel ..... **10** *100*
Skatulyaelv ..... **12** *102*
Sorba rendezés I. (különböző elemek) ..... **13** *104*
Sorba rendezés II. (több típusba tartozó azonos elemek) ..... **13** *105*
Kiválasztás és sorba rendezés I. (különböző elemek) ..... **16** *109*
Kiválasztás és sorba rendezés II. (lehetnek azonos elemek is) ..... **16** *109*
Vegyes feladatok ..... **18** *112*

10.2. *A gyökvonás* (2092–2148)

Racionális számok, irracionális számok ..... **20** *114*
A négyzetgyökvonás azonosságai, alkalmazásaik ..... **21** *115*
Számok *n*-edik gyöke, a gyökvonás azonosságai ..... **25** *122*
Vegyes feladatok ..... **27** *124*

10.3. *A másodfokú egyenlet* (2149–2248)

A másodfokú egyenlet és függvény ..... **29** *127*
A másodfokú egyenlet megoldóképlete ..... **30** *129*
A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés ..... **32** *132*
Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek, másodfokú egyenletrendszerek ..... **33** *134*
Másodfokú egyenlőtlenségek ..... **34** *136*
Paraméteres másodfokú egyenletek ..... **35** *142*
Négyzetgyökös egyenletek és egyenlőtlenségek ..... **36** *144*
A számtani és mértani közép, szélsőérték feladatok ..... **37** *150*
Másodfokú egyenletre vezető problémák ..... **38** *152*
Vegyes feladatok ..... **39** *155*

10.4. *Geometria* (2249–2632)

Körrel kapcsolatos ismeretek ..... **41** *158*
Párhuzamos szelők és szelőszakaszok tétele, szögfelezőtétel ..... **44** *169*
Hasonlósági transzformációk, alakzatok hasonlósága ..... **46** *174*
Arányossági tételek a derékszögű háromszögben és a körben ..... **50** *183*

A hasonlóság néhány alkalmazása a terület- és térfogatszámításban ... **52** ... *189*
Vegyes feladatok I. ... **54** ... *194*
Távolságok meghatározása hasonlóság segítségével, hegyesszögek szögfüggvényei ... **56** ... *200*
Összefüggések hegyesszögek szögfüggvényei között, nevezetes szögek szögfüggvényei ... **58** ... *204*
Háromszögek különböző adatainak meghatározása szögfüggvények segítségével ... **60** ... *207*
Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével ... **62** ... *211*
Vegyes feladatok II. ... **64** ... *219*
Vektorok (emlékeztető), vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre ... **66** ... *225*
Vektorok alkalmazása a síkban és a térben ... **69** ... *229*
Vektorok a koordináta-rendszerben, vektor koordinátái, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal ... **71** ... *236*
Vegyes feladatok III. ... **72** ... *239*

10.5. *Szögfüggvények* (2633–2730)

A szinusz- és koszinuszfüggvény definíciója, egyszerű tulajdonságai ... **75** ... *244*
A szinuszfüggvény grafikonja ... **75** ... *244*
A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek ... **77** ... *252*
A tangens- és kotangensfüggvény ... **80** ... *261*
Összetett feladatok és alkalmazások ... **81** ... *264*
Geometriai alkalmazások ... **82** ... *268*
Vegyes feladatok ... **83** ... *271*

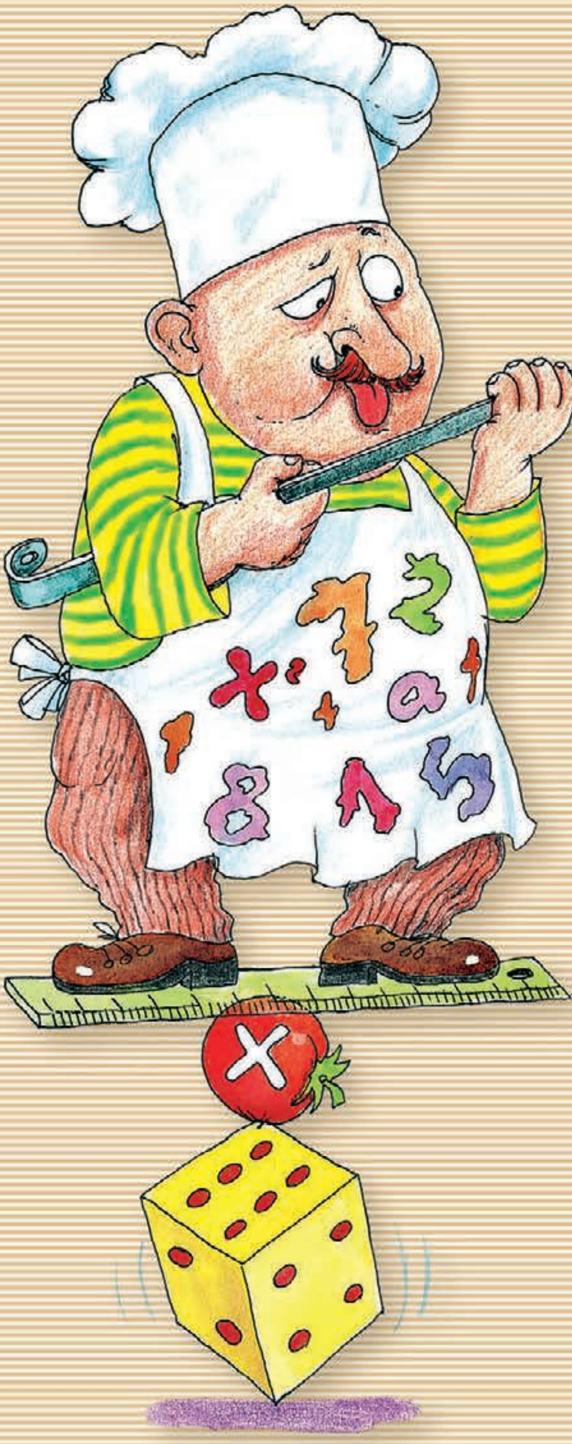
10.6. *Valószínűség-számítás* (2731–2814)

Események ... **86** ... *279*
Műveletek eseményekkel ... **87** ... *280*
Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség ... **90** ... *281*
A valószínűség klasszikus modellje ... **90** ... *281*
Vegyes feladatok ... **96** ... *291*

A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset$, $\{\,\}$	üres halmaz
$\overline{A}$	az A halmaz komplementere
$\lvert A \rvert$	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}$, $\vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

Feladatok



Gondolkodási módszerek 10

A gyökvonás 20

A másodfokú egyenlet 29

Geometria 41

Szögfüggvények 75

Valószínűség-számítás 86

10.2. A GYÖKVONÁS

Racionális számok, irracionális számok

2092 Írjuk fel tizedes tört alakban a következő számokat:

a) $\frac{21}{8}$; *b)* $\frac{37}{16}$; *c)* $\frac{29}{6}$; *d)* $\frac{7}{12}$; *e)* $\frac{5}{11}$; *f)* $\frac{10}{7}$;
g) $\frac{20}{13}$; *h)* $\frac{5}{17}$.

2093 Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő tizedes törteket:

a) $0{,}764$; *b)* $2{,}1973$; *c)* $2{,}\dot{5}$; *d)* $4{,}\dot{1}\dot{7}$; *e)* $0{,}\dot{7}6\dot{4}$; *f)* $0{,}76\dot{4}$;
g) $0{,}7\dot{6}\dot{4}$; *h)* $3{,}\dot{1}53\dot{4}$; *i)* $5{,}\dot{9}$.

2094 Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak:

a) $\sqrt{5}$; *b)* $\sqrt{3}+2$; *c)* $1+\sqrt{5}$; *d)* $3-\sqrt{3}$; *e)* $\sqrt{15}$.

2095 A számegyenesen szerkesszük meg a következő számok helyét:

a) $\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{5}$; *c)* $\sqrt{15}$; *d)* $\sqrt{24}$; *e)* $\sqrt{11}-2$; *f)* $3-\sqrt{3}$;
g) $2-\frac{\sqrt{7}}{2}$; *h)* $\sqrt{60}$; *i)* $\sqrt{2009}$.

2096 Adjunk meg négy olyan irracionális számot, amelyek csak az 1, 2 és 3 számjegyeket tartalmazzák és értékük:

a) 1 és 2 között van; *b)* 10 és 20 között van; *c)* nagyobb 30-nál.

2097 Számoljuk ki, hogy milyen számjegy áll a következő törtek tizedes tört alakjában a tizedes vessző után a 2009. helyen:

a) $\frac{41}{16}$; *b)* $\frac{11}{3}$; *c)* $\frac{13}{6}$; *d)* $\frac{5}{9}$; *e)* $\frac{25}{7}$; *f)* $\frac{12}{17}$.

2098 Adjunk meg három racionális és két irracionális számot, amelyek 5,99 és 6 között vannak.

2099 Döntsük el, hogy mely állítások igazak és melyek hamisak.

a) Két racionális szám összege mindig racionális.
b) Két irracionális szám összege mindig irracionális.
c) Két racionális szám szorzata mindig racionális.
d) Két racionális szám szorzata lehet egész szám.
e) Két irracionális szám szorzata mindig irracionális.
f) Van két olyan irracionális szám, melyek szorzata egész szám.
g) Egy racionális és egy irracionális szám összege mindig irracionális.
h) Van olyan racionális szám, melynek reciproka irracionális.
i) Van olyan irracionális szám, amelynek tizedes tört alakjában egy jegytől kezdve csak nullák állnak.

A négyzetgyökvonás azonosságai, alkalmazásaik

2100 Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

a) $\sqrt{2x-1}$; *b)* $\sqrt{2x}-1$; *c)* $\sqrt{-x}$; *d)* $\sqrt{6-4x}$;

e) $\sqrt{6}-4x$; *f)* $\sqrt{2x-3}+\sqrt{1-x}$; *g)* $\sqrt{\dfrac{5x-1}{x+3}}$; *h)* $\dfrac{\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+3}}$;

i) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}$; *j)* $\sqrt{(x-2)\cdot(x+3)}$; *k)* $\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x^2+5}$.

2101 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; *c)* $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$;

e) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; *f)* $\sqrt{75}\cdot\sqrt{3}$; *g)* $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; *h)* $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$;

i) $\dfrac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}$; *j)* $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5^3}$; *k)* $\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{2^3}$; *l)* $\dfrac{\sqrt{7^3}}{\sqrt{7^5}}$;

m) $\sqrt{7^3}\cdot\sqrt{7^5}$; *n)* $\left(\sqrt{11}\right)^3\cdot\sqrt{11}$; *o)* $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^7}{\left(\sqrt{3}\right)^3}$; *p)* $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)$;

q) $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{27}+\sqrt{3}\right)$.

2102 A műveletek elvégzésével döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb:

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$ vagy $\sqrt{15}\cdot\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{11}\cdot\sqrt{7}$ vagy $\sqrt{6}\cdot\sqrt{13}$;

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}$ vagy $\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{140}}{\sqrt{7}}$ vagy $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$;

e) $\dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{5}}$ vagy $\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}$; *f)* $\dfrac{\sqrt{180}}{\sqrt{6}}$ vagy $\dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{5}}$;

g) $\dfrac{\sqrt{184}}{\sqrt{8}}$ vagy $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}}$; *h)* $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ vagy $\sqrt{\dfrac{18}{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{15}}$;

i) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{27}}\cdot\sqrt{\dfrac{6^3}{128}}\cdot\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{10}}$ vagy $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{15^3}{135}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{125}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}$.

2103 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{5-\sqrt{21}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{21}}$; *b)* $\sqrt{\sqrt{29}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{29}-2}$;

c) $\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}}$; *d)* $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{19}+\sqrt{3}}$;

e) $\sqrt{\sqrt{31}-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{31}+\sqrt{6}}$; *f)* $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$;

g) $\left(\sqrt{8-\sqrt{15}}+\sqrt{8+\sqrt{15}}\right)^2$; *h)* $\left(\sqrt{11+\sqrt{21}}-\sqrt{11-\sqrt{21}}\right)^2$;

i) $\left(\sqrt{15-\sqrt{56}}+\sqrt{\sqrt{56}+15}\right)^2$; *j)* $\left(\sqrt{\sqrt{89}-\sqrt{8}}-\sqrt{\sqrt{89}+\sqrt{8}}\right)^2$;

k) $\left(\sqrt{\sqrt{41}-\sqrt{5}}-\sqrt{\sqrt{41}+\sqrt{5}}\right)^2$.

2104 Végezzük el a következő műveleteket:

$a)$ $(\sqrt{6}+3)\cdot(2+3\cdot\sqrt{6})$;
$b)$ $(2\cdot\sqrt{2}-1)\cdot(3+\sqrt{2})$;
$c)$ $(\sqrt{10}+3)\cdot(\sqrt{10}-3)$;
$d)$ $(\sqrt{13}-1)\cdot(\sqrt{13}+1)$;
$e)$ $(\sqrt{17}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{17}+\sqrt{3})$;
$f)$ $(4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{7})\cdot(4\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{7})$;
$g)$ $(3\cdot\sqrt{2}-4)^2$;
$h)$ $(6+2\cdot\sqrt{3})^2$;
$i)$ $(5-2\cdot\sqrt{5})^2$;
$j)$ $(\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{3})^2$.

2105 A kifejezések átalakításával döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb:

$a)$ $5\cdot\sqrt{3}$ vagy $6\cdot\sqrt{2}$;
$b)$ $6\cdot\sqrt{3}$ vagy $7\cdot\sqrt{2}$;
$c)$ $10\cdot\sqrt{5}$ vagy $9\cdot\sqrt{6}$;
$d)$ $3\cdot\sqrt{11}$ vagy $2\cdot\sqrt{23}$;
$e)$ $3\cdot\sqrt{8}$ vagy $6\cdot\sqrt{2}$;
$f)$ $8\cdot\sqrt{7}$ vagy $15\cdot\sqrt{2}$;
$g)$ $\dfrac{\sqrt{72}}{6}$ vagy $\dfrac{\sqrt{200}}{10}$;
$h)$ $\dfrac{\sqrt{120}}{4}$ vagy $\dfrac{\sqrt{190}}{5}$;
$i)$ $\dfrac{\sqrt{70}}{10}$ vagy $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$;
$j)$ $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ vagy $\dfrac{2\cdot\sqrt{15}}{5}$.

2106 Végezzük el a következő műveleteket:

$a)$ $\sqrt{72}-\sqrt{32}-\sqrt{8}$;
$b)$ $\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{75}$;
$c)$ $\sqrt{125}-\sqrt{45}-\sqrt{20}$;
$d)$ $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$;
$e)$ $\sqrt{12}+\sqrt{108}-\sqrt{147}$;
$f)$ $(\sqrt{27}+\sqrt{2}-\sqrt{12})\cdot(\sqrt{8}+\sqrt{3}-\sqrt{18})$;
$g)$ $(\sqrt{80}-\sqrt{3}-\sqrt{45})\cdot(\sqrt{75}+\sqrt{5}-\sqrt{48})$;
$h)$ $(\sqrt{98}+\sqrt{108}-\sqrt{8}-\sqrt{147})\cdot(\sqrt{32}-\sqrt{48}+\sqrt{75}+\sqrt{2})$;
$i)$ $(\sqrt{180}+\sqrt{112}-\sqrt{45}-\sqrt{28})\cdot(\sqrt{63}-\sqrt{20}-\sqrt{175}+\sqrt{125})$;
$j)$ $(4\cdot\sqrt{a}-6\cdot\sqrt{9a}+7\cdot\sqrt{a}+5\cdot\sqrt{4a})$, $a\ge 0$;
$k)$ $(5\cdot\sqrt{12y}-2\cdot\sqrt{300y}+3\cdot\sqrt{75y}-5\cdot\sqrt{3y})$, $y\ge 0$;
$l)$ $(2\cdot\sqrt{50x}+\sqrt{18x}+3\cdot\sqrt{2x}-\sqrt{8x})$, $x\ge 0$.

2107 Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

$a)$ $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$;
$b)$ $\dfrac{9}{\sqrt{2}}$;
$c)$ $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$;
$d)$ $\dfrac{21}{\sqrt{7}}$;
$e)$ $\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{6}}$;
$f)$ $\dfrac{6}{5\cdot\sqrt{3}}$;
$g)$ $\dfrac{14}{3\cdot\sqrt{7}}$;
$h)$ $\dfrac{13}{3\cdot\sqrt{10}}$;
$i)$ $\dfrac{y}{\sqrt{x}}$;
$j)$ $\dfrac{5x}{2\cdot\sqrt{x}}$;
$k)$ $\dfrac{a}{3\cdot\sqrt{y}}$;
$l)$ $\dfrac{y}{5\cdot\sqrt{y}}$.

2108 Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

$a)$ $\dfrac{8}{\sqrt{5}+2}$;
$b)$ $\dfrac{12}{\sqrt{3}-1}$;
$c)$ $\dfrac{15}{2-\sqrt{7}}$;
$d)$ $\dfrac{10}{\sqrt{6}+1}$;
$e)$ $\dfrac{22}{2\cdot\sqrt{3}-1}$;
$f)$ $\dfrac{11}{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{17}}$;
$g)$ $\dfrac{10}{4\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{3}}$;
$h)$ $\dfrac{67}{5\cdot\sqrt{7}-6\cdot\sqrt{3}}$;
$i)$ $\dfrac{2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}}$;
$j)$ $\dfrac{5}{\sqrt{x}+1}$;
$k)$ $\dfrac{a}{\sqrt{a}-1}$;
$l)$ $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

2109 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\dfrac{3\cdot\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}-\dfrac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{5+4\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\dfrac{2-2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{4-2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+\dfrac{3\cdot\sqrt{5}-1}{2\cdot\sqrt{5}}$; d) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$;

e) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; f) $\dfrac{3\cdot\sqrt{2}+4}{3\cdot\sqrt{2}-4}+\dfrac{3\cdot\sqrt{2}-4}{3\cdot\sqrt{2}+4}$;

g) $\dfrac{4+\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}+3}+\dfrac{\sqrt{5}-4}{2\cdot\sqrt{5}-3}$; h) $\dfrac{2}{\sqrt{a}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$;

i) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{5}{\sqrt{x}+1}$; j) $\dfrac{3\cdot\sqrt{y}-2}{\sqrt{y}+1}-\dfrac{y+1}{y-1}-\dfrac{2\cdot\sqrt{y}-4}{\sqrt{y}-1}$.

2110 A négyzetgyök alá vitellel írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket. (A változók pozitívak.)

a) $3\cdot\sqrt{\dfrac{5}{9}}$; b) $5\cdot\sqrt{\dfrac{3}{5}}$; c) $0{,}1\cdot\sqrt{10}$; d) $(\sqrt{7}-1)\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}}$;

e) $x\cdot\sqrt{x}$; f) $y^2\cdot\sqrt{y}$; g) $2a^2\cdot\sqrt{3ab}$; h) $b\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}}$;

i) $\dfrac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}$.

2111 Melyik szám a nagyobb?

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ vagy $2\cdot\sqrt{6}$; b) $3\cdot\sqrt{3}$ vagy $\dfrac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}$.

2112 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})\cdot(20-2\cdot\sqrt{84})}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; b) $\left(\dfrac{6}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{20}-4}\right)\cdot(10+7\cdot\sqrt{5})$.

2113 Számítsuk ki a következő kifejezések értékét, ha $x=\dfrac{1}{5}$:

a) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$; b) $\dfrac{3\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}-5}+\dfrac{3\cdot\sqrt{x}-1}{5+2\cdot\sqrt{x}}$.

2114 Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:

$$\frac{125+51\cdot\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}=\left(\frac{1}{5-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2.$$

2115 Mely valós x értékek esetén igaz, hogy:

a) $\sqrt{4x^2-12x+9}=2x-3$; b) $\sqrt{4x^2-12x+9}=3-2x$.

2116 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza $\sqrt{2x+1}$ és $\sqrt{2x\cdot(2x+1)}$, ahol $x\in\mathbb{N}^+$.

a) Mekkorák a háromszög oldalai, ha $x=4$?

b) Mekkora a háromszög átfogója, ha $x=7$?

c) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög átfogójának hossza mindig pozitív egész szám lesz.

2117 Közelítő értékek alkalmazása nélkül állapítsuk meg, hogy az A, illetve B szám közül melyik a nagyobb, ha:

a) $A=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ és $B=\dfrac{\sqrt{20}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; *b)* $A=\sqrt{50}-\sqrt{12}$ és $B=\dfrac{20-\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$;

c) $A=\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ és $B=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

2118 Átalakításokkal mutassuk meg, hogy:

$$\sqrt{35+2\cdot\sqrt{34}}-\sqrt{35-2\cdot\sqrt{34}}=2.$$

2119 Számítsuk ki a kifejezések helyettesítési értékét a változók adott értéke esetén:

a) $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}$, ha $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ és $b=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$;

b) $\dfrac{1+a}{1+\sqrt{1+a}}+\dfrac{1-a}{1-\sqrt{1-a}}$, ha $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2120 A változók mely értékei esetén értelmezettek a következő kifejezések? Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket.

a) $\dfrac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a^2\cdot b^5}}{a\cdot(b-a)^2\cdot\sqrt{b^3}}$; *b)* $\dfrac{a-\sqrt{a}-2}{a-5\cdot\sqrt{a}+6}$;

c) $\dfrac{\dfrac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}}{a-b}+\dfrac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$.

2121 Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő gyökvonást:

$$\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot\sqrt{1+2008\cdot\sqrt{1+2009\cdot 2011}}}}.$$

2122 Fejezzük ki a-val és b-vel az:

a) $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}$ kifejezést, ha $x=\dfrac{a^4+20a^2+16}{4a^2}$ és $0<a\le 2$;

b) $g(x)=\dfrac{b}{x}-\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$ kifejezést, ha $x=\dfrac{a^2+b^2}{2b}$ és $a>0$, $b>0$;

c) $h(x)=\dfrac{2\cdot\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ kifejezést, ha $x=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ és $a>0$.

2123 Mely pozitív egész n értékekre teljesül:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=9.$$

2124 Hány olyan x valós szám van, amelyre a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvény értéke egész szám?

$$f(x)=\sqrt{x^2+100}-\sqrt{x^2+1}.$$

Megoldások

Gondolkodási módszerek 100

A gyökvonás 114

A másodfokú egyenlet 127

Geometria 158

Szögfüggvények 244

Valószínűség-számítás 279

10.2. A GYÖKVONÁS

Racionális számok, irracionális számok – megoldások

2092 *a)* $2{,}625$; *b)* $2{,}3125$; *c)* $4{,}8\dot{3}$;
d) $0{,}58\dot{3}$; *e)* $0{,}\dot{4}\dot{5}$; *f)* $1{,}\dot{4}2857\dot{1}$;
g) $1{,}\dot{5}3846\dot{1}$; *h)* $0{,}\dot{2}94117647058823\dot{5}$.

2093 *a)* $\frac{191}{250}$; *b)* $\frac{21\,973}{10\,000}$; *c)* $\frac{23}{9}$;
d) $\frac{413}{99}$; *e)* $\frac{764}{999}$; *f)* $\frac{172}{225}$;
g) $\frac{757}{990}$; *h)* $\frac{31\,531}{9\,999}$; *i)* $6=\frac{6}{1}$.

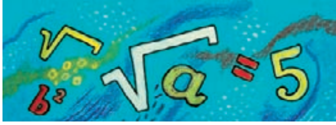
2094 Mindegyik bizonyítás indirekt úton történhet.

2095 *a)* A derékszögű háromszög átfogója 2, befogói 1 és $\sqrt{3}$.
b) A derékszögű háromszög befogói 1 és 2, átfogója $\sqrt{5}$.
c) A derékszögű háromszög átfogója 4, az egyik befogója 1, a másik $\sqrt{15}$.
d) A derékszögű háromszög átfogója 5, az egyik befogója 1, a másik $\sqrt{24}$.
e) A derékszögű háromszög befogói 3 és $\sqrt{2}$, átfogója $\sqrt{11}$, ebből 2-t elvesszük.
f) 3-ból elvesszük az *a)* részben szerkesztett $\sqrt{3}$-t.
g) A derékszögű háromszög befogói 2 és $\sqrt{3}$, átfogója $\sqrt{7}$, ezt megfelezzük és elvesszük a 2-ből.
h) A derékszögű háromszög átfogója 8, az egyik befogója 2, a másik $\sqrt{60}$.
i) A derékszögű háromszög befogói 44 és $\sqrt{73}$ (egy másik derékszögű háromszögből szerkeszthető, melynek befogói 8 és 3), az átfogó $\sqrt{2009}$.

2096 *a)* Például: 1,23112311123111123…; 1,23223222322223…; 1,21213213321333…
b) Például: 11,123112311123…; 12,212112111211112…; 13,1331333133331…
c) Például: 31,21221222122221…; 32,213211321113…; 33,3133133313331…

2097 *a)* $\frac{41}{16}=2{,}5625$; a 2009-dik jegy 0. *b)* $\frac{11}{3}=3{,}\dot{6}$; a 2009-dik jegy 6.
c) $\frac{13}{6}=2{,}1\dot{6}$; a 2009-dik jegy 6. *d)* $\frac{5}{9}=0{,}\dot{5}$; a 2009-dik jegy 5.
e) $\frac{25}{7}=3{,}\dot{5}7142\dot{8}$; 6 jegy ismétlődik, mivel $2009 = 334\cdot 6 + 5$, a keresett jegy 2.
f) $\frac{12}{17}=0{,}\dot{7}05882352941176\dot{4}$; 16 jegy ismétlődik, mivel $2009 = 125\cdot 16 + 9$, a keresett jegy 2.

2098 Racionális például: 5,991; 5,992; 5,993.
Irracionális például: 5,9912112111211112…; 5,99232232223…; 5,99565565556…



2099 *a)* Igaz.

b) Hamis, például $(1+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=4$.

c) Igaz.

d) Igaz, például $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}=2$.

e) Hamis, például $(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)=1$.

f) Igaz, lásd az előző példát.

g) Igaz.

h) Hamis, minden racionális szám reciproka racionális.

i) Hamis.

A négyzetgyökvonás azonosságai, alkalmazásaik – megoldások

2100 *a)* $x\geq\frac{1}{2}$; *b)* $x\geq 0$; *c)* $x\leq 0$;
d) $x\leq\frac{3}{2}$; *e)* $x\in\mathbb{R}$; *f)* $\{\}$;
g) $x<-3$ vagy $x\geq\frac{1}{5}$; *h)* $x\geq\frac{1}{5}$; *i)* $x\geq 2$;
j) $x\leq -3$ vagy $2\leq x$; *k)* $x\leq -1$ vagy $x\geq 1$.

2101 *a)* 6; *b)* 3; *c)* 14;
d) 2; *e)* 5; *f)* 15;
g) 3; *h)* 15; *i)* 3;
j) 25; *k)* 16; *l)* $\frac{1}{7}$;
m) 2401; *n)* 121; *o)* 9;
p) 2; *q)* 12.

2102 *a)* $\sqrt{50}>\sqrt{45}$; *b)* $\sqrt{77}<\sqrt{78}$; *c)* $\sqrt{20}=\sqrt{20}$;
d) $\sqrt{20}<\sqrt{21}$; *e)* $\sqrt{13}<\sqrt{14}$; *f)* $\sqrt{30}=\sqrt{30}$;
g) $\sqrt{23}<\sqrt{24}$; *h)* $\sqrt{27}<\sqrt{30}$; *i)* $\sqrt{\frac{1}{10}}>\frac{1}{5}$.

2103 *a)* 2; *b)* 5; *c)* 5;
d) 4; *e)* 5; *f)* 6;
g) 30; *h)* 2; *i)* 56;
j) $2\cdot\sqrt{89}-18$; *k)* $2\cdot\sqrt{41}-12$.

2104 *a)* $24+11\cdot\sqrt{6}$; *b)* $5\cdot\sqrt{2}+1$; *c)* 1;
d) 12; *e)* 14; *f)* 4;
g) $34-24\cdot\sqrt{2}$; *h)* $48+24\cdot\sqrt{3}$; *i)* $45-20\cdot\sqrt{5}$;
j) $19+4\cdot\sqrt{21}$.

2105 a) $\sqrt{75} > \sqrt{72}$; b) $\sqrt{108} > \sqrt{98}$; c) $\sqrt{500} > \sqrt{486}$;
d) $\sqrt{99} > \sqrt{92}$; e) $\sqrt{72} = \sqrt{72}$; f) $\sqrt{448} < \sqrt{450}$;
g) $\sqrt{2} = \sqrt{2}$; h) $\sqrt{\frac{15}{2}} < \sqrt{\frac{38}{5}}$; i) $\sqrt{\frac{7}{10}} > \sqrt{\frac{2}{3}}$;
j) $\sqrt{\frac{7}{3}} < \sqrt{\frac{12}{5}}$.

2106 a) 0; b) $6\cdot\sqrt{3}$; c) 0; d) $\sqrt{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) 1;
g) 2; h) 47; i) 17; j) $3\cdot\sqrt{a}$; k) 0; l) $14\cdot\sqrt{2x}$.

2107 a) $\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{9\cdot\sqrt{2}}{2}$; c) $4\cdot\sqrt{3}$;
d) $3\cdot\sqrt{7}$; e) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; f) $\frac{2\cdot\sqrt{3}}{5}$;
g) $\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}$; h) $\frac{13\cdot\sqrt{10}}{30}$; i) $\frac{y\cdot\sqrt{x}}{x}$, $x > 0$;
j) $\frac{5\cdot\sqrt{x}}{2}$, $x > 0$; k) $\frac{a\cdot\sqrt{y}}{3y}$, $y > 0$; l) $\frac{\sqrt{y}}{5}$, $y > 0$.

2108 a) $8\cdot(\sqrt{5}-2)$; b) $6\cdot(\sqrt{3}+1)$; c) $-5\cdot(2+\sqrt{7})$;
d) $2\cdot(\sqrt{6}-1)$; e) $2\cdot(2\cdot\sqrt{3}+1)$; f) $11\cdot(3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{17})$;
g) $2\cdot(4\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{3})$; h) $5\cdot\sqrt{7}+6\cdot\sqrt{3}$; i) $19+6\cdot\sqrt{10}$;
j) $\frac{5\cdot(\sqrt{x}-1)}{x-1}$, $x \ge 0$; k) $\frac{a\cdot(\sqrt{a}+1)}{a-1}$, $a \ge 0, a \ne 1$; l) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$, $x, y > 0, x \ne y$.

2109 a) $2-3\cdot\sqrt{2}$; b) $6+\sqrt{3}$; c) $\frac{7-\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}} = \frac{7\cdot\sqrt{5}-5}{10}$;
d) 1; e) $5+\sqrt{21}$; f) 34;
g) $-\frac{4}{11}$; h) $\frac{3\cdot\sqrt{a}+1}{a-1}$, $a \ge 0, a \ne 1$; i) $\frac{2\cdot\sqrt{x}-6}{x-1}$, $x \ge 0, x \ne 1$;
j) $\frac{5-3\cdot\sqrt{y}}{y-1}$, $y \ge 0, y \ne 1$.

2110 a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{15}$; c) $\sqrt{\frac{1}{10}}$; d) $\sqrt{6}$; e) $\sqrt{x^3}$; f) $\sqrt{y^5}$;
g) $\sqrt{12a^5b}$; h) $\sqrt{ab}$; i) $\sqrt{b^3}$.

2111 A nevezőt gyöktelenítve:
a) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \sqrt{6}+\sqrt{5}$, ezért $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} < 2\cdot\sqrt{6}$;
b) $\frac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}} = 2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}$, ezért $3\cdot\sqrt{3} < \frac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}$.

2112 *a)* Gyöktelenítés után:

$$\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(20-2\cdot\sqrt{84}\right)}{4}=\frac{\left(10+2\cdot\sqrt{21}\right)\cdot 2\cdot\left(10-\sqrt{84}\right)}{4}=$$

$$=\frac{\left(10+\sqrt{84}\right)\cdot\left(10-\sqrt{84}\right)}{2}=\frac{100-84}{2}=\frac{16}{2}=8.$$

b) A nevező átalakításával:

$$\left(\frac{6}{\sqrt{5}+2}+\frac{2}{2\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}\right)\cdot\left(10+7\cdot\sqrt{5}\right)=\left(7\cdot\sqrt{5}-10\right)\cdot\left(7\cdot\sqrt{5}+10\right)=49\cdot 5-100=145.$$

2113 A behelyettesítés előtt végezzünk átalakításokat:

a) $$\frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\cdot\left(\sqrt{x}-3\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-9}=\frac{2x-12}{x-9}=\frac{29}{22};$$

b) $$\frac{3\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}-5}+\frac{3\cdot\sqrt{x}-1}{5+2\cdot\sqrt{x}}=\frac{\left(3\cdot\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{x}+5\right)+\left(3\cdot\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{x}-5\right)}{4x-25}=$$

$$=\frac{12x+10}{4x-25}=-\frac{62}{121}.$$

2114 A bal oldali tört nevezőjét gyöktelenítsük:

$$\frac{125+51\cdot\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}=\frac{\left(125+51\cdot\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{25-6}=49+20\cdot\sqrt{6}.$$

A jobb oldalon levő nevezőt gyöktelenítés után emeljük négyzetre:

$$\left(\frac{1}{5-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2=\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)^2=49+20\cdot\sqrt{6}.$$

2115 Mivel $\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{(2x-3)^2}=|2x-3|$, ezért:

a) $|2x-3|=2x-3$, ha $x\geq\frac{3}{2}$;

b) $|2x-3|=3-2x$ ha $x\leq\frac{3}{2}$.

2116 *a)* A háromszög oldalai: $a=3$; $b=\sqrt{72}=6\cdot\sqrt{2}$; $c=9$ egység.

b) A két befogó $\sqrt{15}$ és $\sqrt{210}$ egység, az átfogó 15 egység.

c) A Pitagorasz-tétel alapján:

$$c^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x\cdot(2x+1)}\right)^2,$$

ahonnan:

$$c^2=4x^2+4x+1,$$
$$c^2=(2x+1)^2,$$
$$c=2x+1.$$

Mivel $x\in\mathbb{N}^+$, az átfogó hossza pozitív egész szám.

2117 *a)* Gyöktelenítsük a törtek nevezőit:

$$A=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+2;$$

$$B=\frac{\sqrt{20}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{20}-\sqrt{8})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}=2\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{10}-2\cdot\sqrt{6}+4.$$

Nézzük a két kifejezés különbségét:

$$A-B=-\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{10}+3\cdot\sqrt{6}-2=(3\cdot\sqrt{10}-\sqrt{15})+(3\cdot\sqrt{6}-2)>0.$$

Mert mindkét zárójelben pozitív szám áll.

Tehát $A>B$.

b) Egyszerűsítsünk:

$$A=5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3};$$

$$B=\frac{20-4\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{10-2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{(10-2\cdot\sqrt{6})\cdot\sqrt{2}}{2}=5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}.$$

Tehát $A=B$.

c) Hozzunk létre a gyökök alatt teljes négyzeteket:

$$A=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(4-2\cdot\sqrt{3})}=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}};$$

$$B=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(4+2\cdot\sqrt{3})}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}+1)^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

Tehát $A=B$.

2118 Vegyük észre a gyökök alatt a teljes négyzeteket:

$$\sqrt{35+2\cdot\sqrt{34}}-\sqrt{35-2\cdot\sqrt{34}}=\sqrt{(\sqrt{34}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{34}-1)^2}=$$
$$=|\sqrt{34}+1|-|\sqrt{34}-1|=2.$$

2119 *a)* Gyöktelenítsük a nevezőket:

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3},\quad \text{és}\quad b=2+\sqrt{3}.$$

Behelyettesítés:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{9-3}+\frac{3-\sqrt{3}}{9-3}=1.$$

b) Előbb a nevezők gyöktelenítésével hozzuk egyszerűbb alakra az eredeti kifejezést:

$$\frac{(1+a)\cdot(1-\sqrt{1+a})}{1-(1+a)}+\frac{(1-a)\cdot(1+\sqrt{1-a})}{1-(1-a)}=$$

$$=\frac{1+a-\sqrt{1+a}-a\cdot\sqrt{1+a}-1+a-\sqrt{1-a}+a\cdot\sqrt{1-a}}{-a}=$$

$$=\frac{-2a+a\cdot(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}}{a}. \qquad (1)$$

Mielőtt helyettesítenénk, számítsuk ki a két kritikus kifejezést:

$$\sqrt{1-a}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2};$$

$$\sqrt{1+a}=\ldots=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Ezeket az eredményeket írjuk be (1)-be:

$$\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.$$

2120 *a)* A törtek és gyökök miatt $a\neq 0,\ a\neq b,\ b>0.$

$$\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a^2\cdot b^5}}{a\cdot(b-a)^2\cdot\sqrt{b^3}}=\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-|a|\cdot b^2\cdot\sqrt{b}}{a\cdot(b-a)^2\cdot b\cdot\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{a^2-|a|\cdot b}{a\cdot(b-a)^2}=\begin{cases}\dfrac{a\cdot(a-b)}{a\cdot(b-a)^2}=\dfrac{1}{a-b}, & \text{ha}\quad a>0,\\[2ex] \dfrac{a\cdot(a+b)}{a\cdot(b-a)^2}=\dfrac{a+b}{(b-a)^2}, & \text{ha}\quad a<0.\end{cases}$$

b) A gyök miatt $a\geq 0$, a tört miatt $a-5\cdot\sqrt{a}+6\neq 0$. Helyettesítsünk: $x=\sqrt{a}$.

$$x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=$$
$$=x\cdot(x-2)-3\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x-3),$$

tehát $a\neq 4,\ a\neq 9.$

A számlálót is alakítsuk szorzattá:

$$x^2-x-2=x^2+x-2x+2=$$
$$=x\cdot(x+1)-2\cdot(x+1)=(x+1)\cdot(x-2).$$

Visszahelyettesítve az eredeti tört:

$$\frac{(\sqrt{a}+1)\cdot(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)\cdot(\sqrt{a}-3)}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-3}.$$

c) A gyökök és a törtek is értelmezhetők, ha $x>a^2$ és $a\neq 0$. A zárójelen belül hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}\right)^2}{x-(x-a^2)}-\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}\right)^2}{x-(x-a^2)}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\frac{x+x-a^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}-x-x+a^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}{a^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\frac{-4\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}{a^2}=-\frac{4x}{a^2}.$$

d) A gyökök és a törtek értelmezéséhez az kell, hogy $a \geq 0$, $b \geq 0$ és $a \neq b$ teljesüljön. Előbb a számlálóban hozzunk közös nevezőre, majd próbáljunk egyszerűsíteni.

$$\frac{\dfrac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{a\cdot b}}{a-b}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}-a\cdot\sqrt{b}-b\cdot\sqrt{a}}{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\cdot(a-b)-\sqrt{b}\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1.$$

2121 Az utolsó szorzatot írjuk át az $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ azonosság alapján:

$$2009\cdot 2011=2010^2-1.$$

Ezzel a kifejezés:

$$\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot\sqrt{1+2008\cdot 2010}}}.$$

Alkalmazzuk újra az előző módszert:

$$\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot\sqrt{1+2008\cdot 2010}}}=\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot 2009}}=$$

$$=\sqrt{1+2006\cdot 2008}=2007.$$

2122 *a)* Előbb a gyökök alatti kifejezéseket hozzuk egyszerűbb alakra:

$$x-3=\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}-3=\frac{a^4+8a^2+16}{4a^2}=\frac{(a^2+4)^2}{4a^2};$$

$$x-7=\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}-7=\frac{a^4-8a^2+16}{4a^2}=\frac{(a^2-4)^2}{4a^2}.$$

Ezek után helyettesítsünk:

$$f(a)=\sqrt{\frac{(a^2+4)^2}{4a^2}}+\sqrt{\frac{(a^2-4)^2}{4a^2}}=\frac{a^2+4}{2\cdot|a|}+\frac{|a^2-4|}{2\cdot|a|}.$$

A feltételek miatt $|a|=a$ és $|a^2-4|=4-a^2$,

$$f(a)=\frac{a^2+4}{2a}+\frac{4-a^2}{2a}=\frac{8}{2a}=\frac{4}{a}.$$

b) Kövessük az előbbi módszert:

$$1-\frac{a^2}{x^2}=1-\frac{a^2}{\dfrac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4b^2}}=1-\frac{4a^2\cdot b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{a^4+2a^2\cdot b^2+b^4-4a^2\cdot b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2},$$

ezt behelyettesítve:

$$g(x)=\frac{2b^2}{a^2+b^2}-\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}}=\frac{2b^2}{a^2+b^2}-\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}.$$

Ebből:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{3b^2-a^2}{a^2+b^2}, & \text{ha} \quad a\ge b,\\[2ex] \dfrac{2b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, & \text{ha} \quad b>a.\end{cases}$$

c) Előbb csak az (x^2-1)-et írjuk fel a-val:

$$x=\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}},$$

$$x^2-1=\frac{(a+1)^2}{4a}-1=\frac{a^2+2a+1-4a}{4a}=\frac{(a-1)^2}{4a}.$$

Gyöktelenítsük $h(x)$ nevezőjét:

$$h(x)=\frac{2\cdot\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{2\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-(x^2-1)}=2\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),$$

ebbe az alakba helyettesítsünk be:

$$h(x)=2\cdot\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4a}}\cdot\left(\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4a}}\right)=2\cdot\frac{|a-1|}{2\cdot\sqrt{a}}\cdot\left(\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\frac{|a-1|}{2\cdot\sqrt{a}}\right).$$

Ebből:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}\cdot\left(\dfrac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\dfrac{a-1}{2\cdot\sqrt{a}}\right)=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2a}{2\cdot\sqrt{a}}=a-1, & \text{ha} \quad a\ge 1,\\[2ex] \dfrac{1-a}{\sqrt{a}}\cdot\left(\dfrac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\dfrac{1-a}{2\cdot\sqrt{a}}\right)=\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2}{2\cdot\sqrt{a}}=\dfrac{1-a}{a}, & \text{ha} \quad 0<a<1.\end{cases}$$

2123 Vizsgáljuk meg a k-adik tagot:

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$

Az összeg tagjait átírva:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=9,$$

ugyanazok a tagok pozitív és negatív előjellel is megjelennek,

$$\sqrt{n}-1=9,$$
$$n=100.$$

2124 Alakítsuk át $f(x)$-et a számláló gyöktelenítésével:

$$f(x)=\sqrt{x^2+100}-\sqrt{x^2+1}=\frac{(x^2+100)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+100}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{99}{\sqrt{x^2+100}+\sqrt{x^2+1}}.$$

Az $f(x)$ függvény páros, mert $f(x)=f(-x)$.

Ha $x\ge 0$ a függvény szigorúan monoton csökken, maximuma van, ha $x=0$, ekkor $f(0)=9$.

Mivel $f(x)>0$, a lehetséges egész értékek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (ezeket két helyen veszi fel) és a 9.

Tehát összesen $8\cdot 2+1=17$ helyen vesz fel egész értéket.