Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

sokszínű
Matematika 9

DIGITÁLIS VÁLTOZATBAN IS ELÉRHETŐ
Aktiváló kóddal

MOZAIK

Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

Matematika

tankönyv

9

Hetedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019

Kombinatorika, halmazok 1

Algebra és számelmélet 2

Függvények 3

Háromszögek, négyszögek, sokszögek 4

Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek 5

Egybevágósági transzformációk 6

Statisztika 7

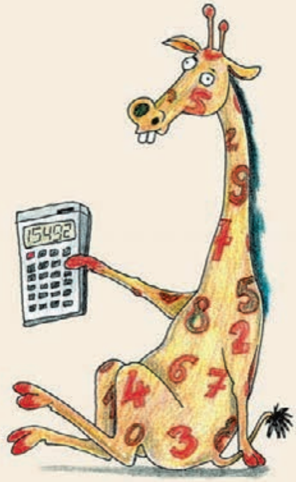
TARTALOMJEGYZÉK

Kombinatorika, halmazok

Algebra és számelmélet

Függvények

Háromszögek, négyszögek, sokszögek



15492

Útmutató a tankönyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában.

- A kidolgozott példák gondolatmenete mintát ad a módszerek, eljárások megértéséhez és a további feladatok megoldásához.
- A legfontosabb definíciókat és tételeket színes kiemelés jelzi.
- A tananyag apró betűvel szedett részei és a bordó színnel megjelölt kidolgozott mintapéldák a mélyebb megértést segítik. Ezek az ismeretek szükségesek az emelt szintű érettségihez.
- A margón ábrák, az adott lecke főbb vázlatpontjai, ismétlő, magyarázó részek, valamint matematikatörténeti érdekességek találhatók.

A mintapéldák és a kitűzött feladatok nehézségét három különböző színnel jelöltük:

Sárga: elemi szintű gyakorló feladatok, amelyek megoldása, begyakorlása nélkülözhetetlen a továbbhaladáshoz.
Kék: a középszintű érettséginek megfelelő színvonalú feladatok.
Bordó: az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, feladatok.

Ezek a színkódok megfelelnek a Mozaik Kiadó Sokszínű matematika feladatgyűjteményeiben alkalmazott jelöléseknek. A feladatgyűjtemény-sorozat több mint 3000, a gyakorláshoz, az órai munkához és az érettségi felkészüléshez is alkalmas feladatot tartalmaz.

A kitűzött feladatok végeredményei megtalálhatók a *www.mozaik.info.hu* honlapon.

A tankönyv feldolgozásához további segédanyagokat kínál a *www.mozaweb.hu* oldal.

◆ ◆ ◆

Néhány megszívlelendő jó tanács és megjegyzés azoktól, akik nagyon magas szinten művelték és ismerték a matematika tudományát. Adjanak ezek alapot és biztatást mindazoknak, akik szeretnék a könyvben szereplő módszereket, összefüggéseket elsajátítani.

A problémamegoldás csakúgy gyakorlat kérdése, mint az úszás, sízés vagy zongorázás. Megtanulni is csak utánzás és gyakorlás útján lehet. Nem adhatok kulcsot mely minden ajtót megnyit, és minden problémát megold, de adhatok utánozható, jó példákat és sok alkalmat a gyakorlásra. Aki úszni akar tanulni, annak vízbe kell ugrania, aki problémákat megoldani akar tanulni, annak problémák megoldását kell gyakorolnia. (Pólya György)

Nyomot hagy emlékezetünkben az, amit egyszer magunknak kellett kitalálnunk, követhetjük majd ismét ezt a nyomot, ha arra szükségünk támad. (G.C. Lichtenberg)

A matematikában – ellentétben a mindennapos tapasztalattal más területeken – általában annak van szerencséje, aki azt megérdemli. (Rényi Alfréd)

A matematika olyan játszma, ellentétben a sakkal, ahol visszaléphetünk egy lépést. Csak az utolsó lépés számít. (Erdős Pál)

Tapasztalati tény, hogy a világ a logikus gondolkodás törvényei szerint működik. … Azt viszont nem tudom, hogy a világ miért úgy van megalkotva, hogy benne logikusan gondolkodva lehessen eligazodni. (R. L. Dobrusin)

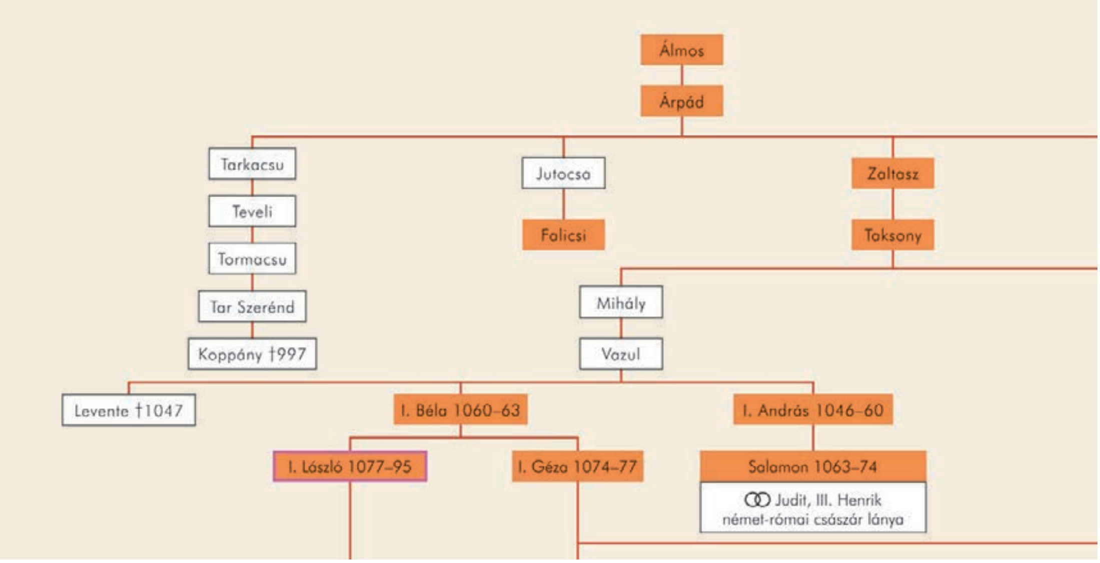
Eredményes munkát és tanulást kívánnak a Szerzők.

Kombinatorika, halmazok

A kombinatorika, a „kombinálás tudománya'' rendszerint dolgok megszámlálásával foglalkozik. Először Leibniz rendszerezte a kombinatorikai ismereteket, majd Jacob Bernoulli alkalmazta valószínűségszámítási problémák megoldásakor. A XX. század közepén a gyakorlati alkalmazhatóság miatt nagy fejlődésnek indult a matematikának ez az ága.

7. Gráfok

A 35. ábrán az Árpád-házi királyok családfájának részletét láthatjuk.



35. ábra

Rajzold meg a saját családfádat! Legalább 3 generációt ábrázolj!

1. példa

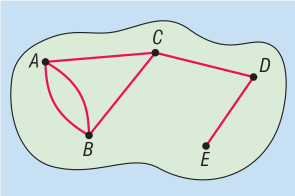
Egy sziget 5 faluját közvetlenül összekötő szárazföldi utakról az alábbiakat tudjuk: *A*-t és *B*-t két út köti össze, *A* és *C* között és *B* és *C* között egy-egy út épült. *D*-ből közvetlen út vezet *C*-be és *E*-be is. Ezek az utak nem keresztezik egymást. A szigeten a sűrű növényzet és a sziklák miatt csak az utakon lehet közlekedni.

a) El lehet-e jutni a szárazföldön *A*-ból *E*-be?

b) El lehet-e jutni a szárazföldön *A*-ból *E*-be, ha az *A* és *C* közötti úton hóakadály miatt nem lehet közlekedni?

c) El lehet-e jutni a szárazföldön *E*-ből *B*-be, ha *C* és *D* között útlezárás van?

Készítsünk rajzot! A városoknak pontok, a köztük levő utaknak vonalak feleljenek meg. A rajzról leolvashatók a válaszok a kérdésekre. ***(36. ábra)***



36. ábra

Megoldás (a)

A-ból *E*-be *C*-n és *D*-n keresztül el lehet jutni.

Megoldás (b)

Ha *A*-ból nem lehet *C*-be menni közvetlenül, akkor *B*-felé kerülve elérhetjük *C*-t, majd *D*-t és *E*-t is.

Megoldás (c)

Mivel az *E*-ből *B*-be összes lehetséges út áthalad a *C*-t *D*-vel összekötő úton, ha ez le van zárva, akkor nem lehet eljutni *E*-ből *B*-be.

A példa megoldását segítette, hogy olyan ábrát rajzoltunk, amelyben a városoknak pontok feleltek meg, és két pontot összekötöttünk, ha a nekik megfelelő városok között vezetett út. Az összekötő vonal lehetett egyenes, görbe, csak az volt a lényeges, hogy melyik két pontot kötötte össze. Az ilyen típusú „ábra" más feladatok megoldása során is hasznos lehet.

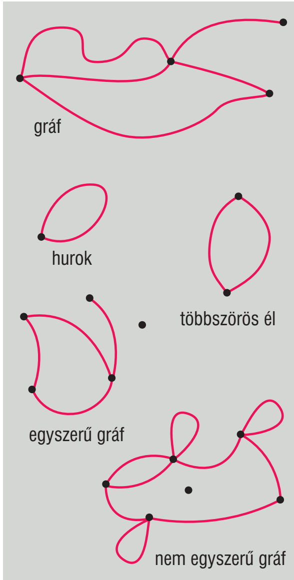
DEFINÍCIÓ: ***Gráfnak*** **nevezzük a pontokból és – az ezekből alkotható pontpárok közül néhányat (lehet, hogy mindet, lehet, hogy egyet sem) összekötő – vonalakból álló alakzatot. A pontok a gráf** ***pontjai*** **vagy** ***csúcsai,*** **a vonalak a gráf** ***élei.*** *(37. ábra)*

Jelölések:

A G gráf pontjainak halmazát $V(G)$-vel jelöljük.
(Az angol vertex = csúcs szóból.)

A G gráf éleinek halmazát $E(G)$-vel jelöljük.
(Az angol edge = él szóból.)

DEFINÍCIÓ: ***Huroknak*** **nevezzük az olyan élt, amelynek két végpontja ugyanaz a pont.** ***Többszörös élt*** **kapunk, ha két pont között egynél több élt húzunk. Egy gráfot** ***egyszerű gráfnak*** **nevezünk, ha pontjainak és éleinek halmaza véges, és a gráfban nincs se hurok, se többszörös él.** *(37. ábra)*



37. ábra

gráf, pont, él, hurok, többszörös él, egyszerű gráf

A továbbiakban általában egyszerű gráfokkal foglalkozunk.

Ha például egy egyszerű gráfnak öt pontja van, akkor legfeljebb annyi éle van, ahányféleképpen ötből kettőt ki tudunk választani, azaz $\frac{5 \cdot 4}{2}$.

2. példa

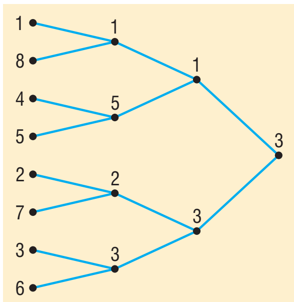
Egy városi öregfiúk teniszbajnokságot egyenes kieséses rendszerben játszanak, azaz a játékosokat párokra osztják, akik megmérkőznek egymással, a győztes továbbjut, a vesztes kiesik. A játékosokat 1–8-ig rangsorba állították, és úgy osztották be a táblán, hogy az első négy játékos közül minél jobb játékos valaki, annál gyengébb ellenfelei legyenek.

A bajnokság eredményét a 38. ábrán látható gráfon ábrázoltuk. Ha két játékos meccset játszik egymással, akkor a belőlük induló élek közös végpontjába írjuk a győztes játékos számát.

a) Kik játszották a döntőt?

b) Hány meccset játszottak a bajnokságban?

c) Kik közül kerülhet ki a második legjobb játékos, és még hány mérkőzés kellene ahhoz, hogy kiderüljön, ki a második legjobb?



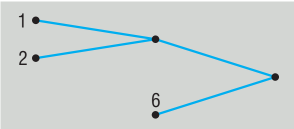
38. ábra

Megoldás (a)

A döntőt az 1. és a 3. játékos játszotta, és végül a 3. nyerte a bajnokságot.

Megoldás (b)

A 38. ábra alapján megszámolható, hogy a bajnokságban 7 meccset játszottak összesen. Ez magyarázható úgy is, hogy a bajnok kivételével mindenki veszített pontosan egy meccset. Mivel minden meccsen egy játékos veszít, a meccsek száma megegyezik a vesztesek számával, vagyis az összes játékos számánál 1-gyel kevesebb: 8 – 1 = 7.



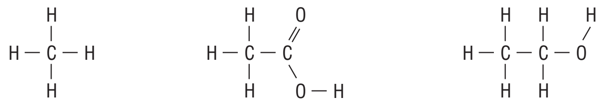
39. ábra

Megoldás (c)

A második legjobb játékos az lehet, akit a bajnok vert meg, hiszen a többiek olyantól kaptak ki, aki szintén kikapott valakitől. A bajnok 3. játékos az 1., a 2. és a 6. játékost verte meg. Három játékos közül két mérkőzéssel dönthetjük el, hogy ki a legjobb, például a 39. ábrán látható gráf szerinti beosztásban.

◆ ◆ ◆

Gráfokkal ábrázolhatjuk a szerves vegyületek molekuláinak szerkezeti képletét. Például:

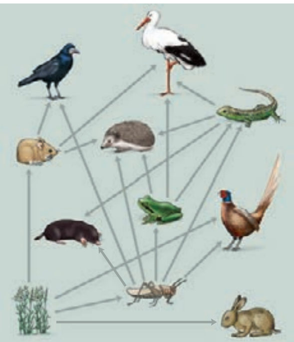


metán (CH_4) ecetsav (CH_3COOH) etil-alkohol (C_2H_5OH)

Figyeljük meg, hogy melyik atom hány kötést alakít ki! A szerves vegyületekben a szénatom mindig 4, az oxigén 2, a hidrogén 1 kötést alakít ki. Ha a szerkezeti képletet gráfnak tekintjük, egy atom annyi kötést alakít ki, amennyi a belőle kiinduló élek száma.

fokszám

DEFINÍCIÓ: Egy gráf egy pontjának *fokszáma* (foka) a pontban található élek száma.



40. ábra

3. példa

A 40. ábra a réten élő néhány állat táplálkozási kapcsolatait mutatja.

a) Mely állatok a csúcsragadozók?

b) Állítsunk össze táplálkozási láncot az ábrázolt életközösség tagjaiból!

Megoldás (a)

Mivel a nyíl kezdőpontjában levő állat tápláléka a nyíl végpontjában levő állatnak, azok a csúcsragadozók, akikből nem indul nyíl, azaz a vetési varjú és a fehér gólya.

Megoldás (b)

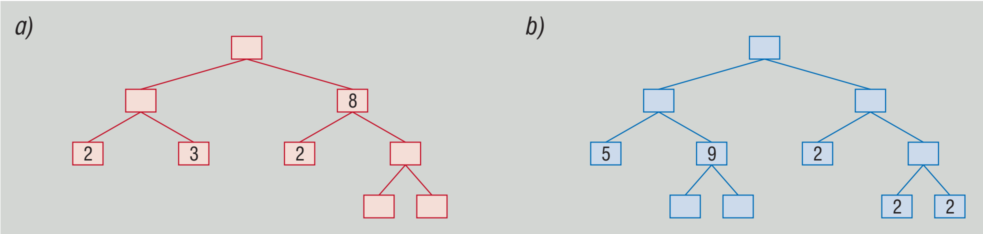
Táplálkozási lánc például a nyilak mentén haladva: pázsitfűfélék → → sáskák → zöld levelibéka → fehér gólya.

irányított gráf

DEFINÍCIÓ: *Irányított gráfnak* nevezzük a pontokból és pontpárokat összekötő irányított vonalakból álló alakzatokat. Ennek éleit *irányított éleknek* nevezzük.

Feladatok

1. Melyik természetes szám prímtényezős felbontását ábrázoltuk a gráffal? Írjuk fel a prímtényezős felbontást szorzatként!



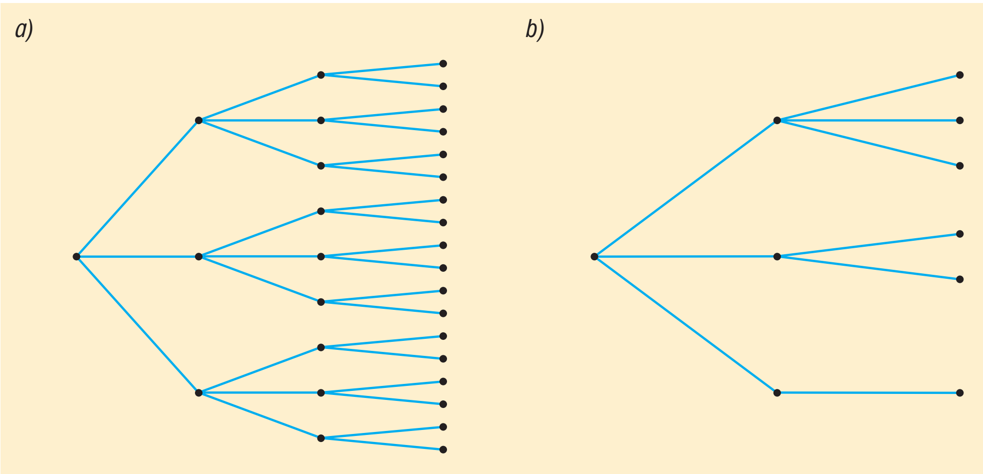
2. Rajzoljunk gráfot a következő számok prímtényezős felbontására:
   a) 54; *b)* 96; *c)* 144.

3. Hogyan tervezhetjük meg egy 32 fős tenisztorna beosztását úgy, hogy a 8 kiemelt játékos a lehető legkésőbb találkozzon egymással, és az első négy közül minél erősebb játékos valaki, annál gyengébb ellenfelei legyenek?

4. Van 16 db látszólag egyforma, de különböző tömegű zsák. Egy kétkarú mérleg segítségével legkevesebb hány méréssel választható ki
   a) a legnehezebb zsák; *b)* a második legnehezebb zsák?

5. Ábrázoljuk gráffal az állatok országának törzseit és osztályait!

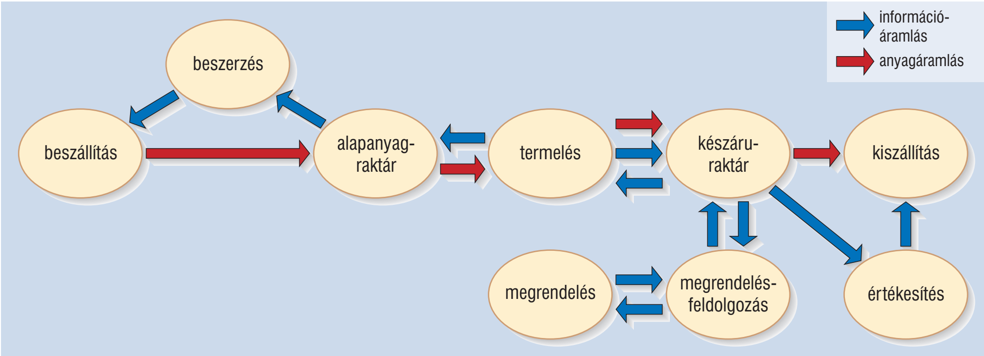
6. Alkossunk kombinatorikai feladatot, melynek megoldását a következő gráfok adják:



7. Adott négy város, nincs közöttük három vagy több egy egyenesre eső. a városokat négy egyenes szakaszból álló úthálózattal akarják összekötni közbeeső állomások nélkül. A keresztezés megengedett, de ott aluljárót – vagy felüljárót kell építeni. Hányféle ilyen hálózat lehetséges?

8. Az afrikai szavannák életközösségéből adjuk meg legalább nyolc élőlény nevét, és rajzoljunk meg egy olyan gráfot, amely a táplálkozási kapcsolataikat mutatja be!

9. Értelmezzük az ábrán látható logisztikai rendszert!



10. Rajzoljuk le azt a gráfot, amelynek pontjai a természetes számok 0–20-ig, és egy *a* számból nyíl mutat *b*-be, ha *a* osztója *b*-nek. Melyik az a szám, amelyből az összes számba mutat nyíl? Melyik az a szám, amelybe az összes számból mutat nyíl?

11. Kovács úrhoz és feleségéhez három házaspár érkezett vendégségbe. Üdvözléskor néhányan kezet fogtak egymással, de senki sem fogott kezet a házastársával. Amikor mindenki megérkezett, Kovács úr megkérdezte őket, hány emberrel fogtak kezet a jelenlevők közül. Hány vendéggel fogott kezet Kovács úr felesége, ha tudjuk, hogy a kérdésre Kovács úr hét különböző választ kapott?

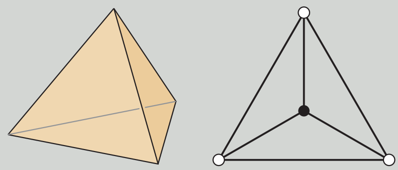
12. Rajzoljuk le a következő testek élvázának gráfját:

a) kocka;

b) dodekaéder (12 db szabályos ötszöglapból álló test).

Ez alapján menjünk végig az összes csúcsponton egyszer!

Például a tetraéder és gráfja:



Rejtvény

A titkosszolgálat 7 ügynöke egymást is figyeli.

A 001-es ügynök figyeli azt az ügynököt, aki figyeli a 002-est.

A 002-es ügynök figyeli azt az ügynököt, aki figyeli a 003-ast.

…

És így tovább, a 007-es figyeli azt az ügynököt, aki figyeli a 001-est.

Ki figyel kit?

Algebra és számelmélet

A számelmélet a matematika egyik legrégibb ága. Régészeti leletek bizonyítják, hogy az ember már az őskorban is használt számokat. A különböző számok jelképes jelentést nyertek, így alakult ki a számmisztika.

A Bibliában, különösen az Ószövetségben a 7-es szám játszott speciális szerepet, a hindu mitológiában a 10-nek volt jelentősége. Az ókori matematikusok, akik elsősorban pozitív egész számokkal számoltak, észrevették e számok érdekes tulajdonságait. Kialakult a négyzetszámok, háromszögszámok, prímszámok és összetett számok fogalma.

A számokkal való játékból mára az egyik legérdekesebb, és a gyakorlatban is jól használható tudományág fejlődött ki.

10. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

1. példa

Egyszerűsítsük a $\dfrac{1020}{1224}$ törtet!

Megoldás

Eljárhatnánk úgy, hogy egy-egy számmal egyszerűsítünk, és megnézzük, hogy az új számlálót és nevezőt mivel lehet még egyszerűsíteni. Keressük meg a legnagyobb számot, amellyel egyszerűsíteni tudunk!

Készítsük el a számok prímtényezős felbontását!

1020	2
510	2
255	5
51	3
17	17
1	

1224	2
612	2
306	2
153	3
51	3
17	17
1	

$$1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17; \quad 1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17.$$

Láthatjuk, hogy a közös prímtényezők miatt a két számnak vannak közös osztói. A legnagyobb közös osztót a közös prímtényezőkből képezhetjük: $2^2 \cdot 3 \cdot 17 = 204$.

Ezzel egyszerűsítve: $\dfrac{1020}{1224} = \dfrac{5}{6}$.

legnagyobb közös osztó

DEFINÍCIÓ: Két pozitív egész szám esetén a közös osztók közül a legnagyobbat a két szám *legnagyobb közös osztójának* nevezzük.

Az *a* és *b* legnagyobb közös osztójának jele: $(a; b)$.

Például az előbbi esetben $(1020; 1224) = 204$.

Bebizonyítható az, hogy a közös osztók mindegyike osztója a legnagyobb közös osztónak.

A legnagyobb közös osztó a prímtényezős felbontásból előállítható úgy, hogy a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk.

2. példa

Keressük meg a következő számpárok legnagyobb közös osztóját:

a) (73 125; 7425); *b)* (4617; 6800)!

Megoldás (a)

A számok prímtényezős felbontása:

$$73125 = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 13; \; 7425 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11.$$

A legnagyobb közös osztó tehát $(73125; 7425) = 3^2 \cdot 5^2 = 225$.

Euklideszi algoritmus a legnagyobb közös osztó keresésére:

$73\,125 = 9 \cdot 7425 + 6300$
$7425 = 1 \cdot 6300 + 1125$
$6300 = 5 \cdot 1125 + 900$
$1125 = 1 \cdot 900 + \mathbf{225}$
$900 = 4 \cdot 225 + 0$

Az utolsó nem 0 maradék a legnagyobb közös osztó.

Megoldás (b)

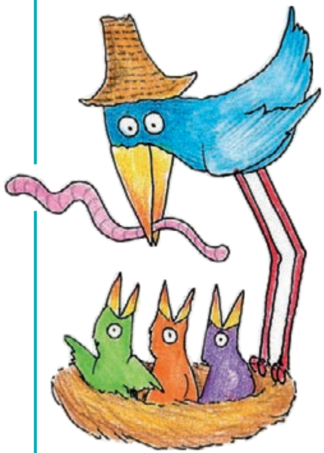
A számok prímtényezős felbontása:

$$4617 = 3^5 \cdot 19;\;\; 6800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 17.$$

A két prímtényezős felbontásban nincs közös tényező. Ez azt jelenti, hogy egyetlen közös osztójuk van, az 1. Tehát (4617; 6800) = 1.

relatív prímek

DEFINÍCIÓ: Azokat a pozitív egész számokat, melyeknek a legnagyobb közös osztója 1, *relatív prímeknek* nevezzük.



Fontos látnunk, hogy ha két különböző szám relatív prím, akkor nem feltétlenül kell prímnek lenniük, de ha prímszámok, akkor biztosan relatív prímek is. Például (15; 8) = 1, (11; 43) = 1, de (11; 275) = 11.

Nemcsak két szám esetén beszélhetünk legnagyobb közös osztóról, hanem három vagy több szám esetén is.

Például (7425; 6800; 73 125) = 5^2 = 25 az előző prímtényezős felbontások alapján.

3. példa

Végezzük el az $\frac{1}{1176} + \frac{1}{720}$ összeadást!

Megoldás

Közös nevezőnek választhatnánk a két nevező szorzatát, de nagy számok esetén nehéz lenne megtalálnunk az egyszerűsítés lehetőségeit, ezért próbáljuk a lehető legkisebb közös nevezőt előállítani.

A nevezők prímtényezős felbontása: $1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$; $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

1176	2
588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Ha az összes itt előforduló prímtényezőt (a közöseket a nagyobb hatványon) összeszorozzuk, akkor mindkét szám többszöröse áll elő, mégpedig a legkisebb: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 35\,280$.

Az összeadás: $\frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 7^2} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 + 7^2}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2} = \frac{79}{35\,280}$.

legkisebb közös többszörös

DEFINÍCIÓ: Két pozitív egész szám esetén a közös többszörösök közül a legkisebb pozitív számot a két szám *legkisebb közös többszörösének* nevezzük.

Az *a* és *b* legkisebb közös többszörösének jele: [*a*; *b*].

Például az előző esetben: [1176; 720] = 35 280.

A számok prímtényezős felbontásából a legkisebb közös többszörös előállítható úgy, hogy minden előforduló prímet összeszorzunk az előforduló legnagyobb hatványon.

4. példa

Keressük meg a 972, 8775 számok legkisebb közös többszörösét!

Megoldás

A számok prímtényezős felbontása:

$$972 = 2^2 \cdot 3^5,\ 8775 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13.$$

A legkisebb közös többszörös: $[972; 8775] = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 13 = 315\,900$.

◆ ◆ ◆

Ha két szám relatív prím, akkor a legkisebb közös többszörös a két szám szorzata.

Észrevehetjük, hogy ha két szám relatív prím, akkor a legkisebb közös többszörös a két szám szorzata lesz.

Feladatok

1. Egyszerűsítsük a következő törteket!

   a) $\dfrac{1425}{1725}$; *b)* $\dfrac{3168}{52\,272}$; *c)* $\dfrac{39\,375}{18\,375}$.

2. Az út mentén az egyik oldalon 24 méterenként fák állnak, a másik oldalon 51 méterenként villanyoszlopok. Egy helyen egymással szemben van egy fa és egy oszlop. Legközelebb milyen távolságra fordul ez újra elő?

3. Egy autóbuszállomásról két autóbuszjárat indul, az egyik 30 percenként, a másik 25 percenként. Reggel 6.00-kor egyszerre indul a két járat. Déli 12 óráig hányszor fordul elő az, hogy egyszerre indulnak az autóbuszok?

4. Igaz-e, hogy két szomszédos pozitív egész szám mindig relatív prím?

5. Két pozitív egész szám összege 175, a legnagyobb közös osztójuk 35. Melyek ezek a számok?

6. Adjunk meg három olyan számot, melyek relatív prímek, de bármely két szám legnagyobb közös osztója nagyobb 1-nél!

7. Tudjuk, hogy $a \mid b$. Mivel egyenlő $[a; b]$ illetve $(a + b; b)$?

8. Milyen a számok esetén igaz, hogy $[a; 24] = 72$?

9. Melyik az a legkisebb, 7-tel osztható természetes szám, amely 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztva mindig 1 maradékot ad?

10. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b természetes számok, akkor $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$!

Rejtvény

Határozzuk meg azokat az a és b pozitív egész számokat és a p prímszámot, amelyekre teljesül, hogy

$$[a; b] + (a; b) = a + b + p.$$

Függvények

„...a természet alapvető törvényei nem fejezhetők ki másképpen, mint matematikai alakban, számokkal jellemezhető fizikai mennyiségek közötti összefüggések alakjában. Más szóval: a természet nagy könyvében csak az tud olvasni, aki ismeri azt a nyelvet, amelyen e könyv írva van, és ez a nyelv: a matematika.”

A fenti szavakat Galilei véleményeként idézi Rényi Alfréd az Ars mathematica című gyűjteményében, „A természet könyvének nyelve” című dialógusban.

Galileo Galilei (1564–1642) olasz fizikus, matematikus elsők között ismerte fel, hogy a fizikai jelenségeket kísérletekkel tanulmányozhatjuk, s a törvényszerűségek leírására a matematika eszközei, a függvények használhatók.

8. További példák függvényekre (emelt szintű tananyag)

Megismerkedtünk néhány alapfüggvénnyel, és ezekből néhány egyszerű átalakítással, transzformációval előállítható függvénnyel. Most további példákat nézünk néhány összetettebb függvényre.

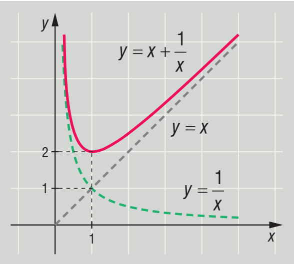
1. példa

Vizsgáljuk meg és ábrázoljuk az $f\colon (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{R},\ f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvényt!

Megoldás

Az f függvény páratlan, mert ha $x \neq 0$, akkor

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x).$$



79. ábra

A grafikonja szimmetrikus az origóra, így elég megrajzolni pozitív x-ekre, majd a kapott görbedarabot tükrözni az origóra. Pozitív x-ekre össze kell adni az x és $\frac{1}{x}$ értékeket. Mindkét függvény képét jól ismerjük, akár megtehetjük, hogy szemléletesen „összeadjuk” pontonként a grafikonokat. ***(79. ábra)***

A grafikon kis pozitív x-ekre hozzásimul az $x \mapsto \frac{1}{x}$ képéhez, nagy pozitív x-ekre pedig az $y = x$ egyeneshez. Szemléletesen látható, hogy az 1 helyen minimuma van a függvénynek, a minimum értéke 2. Ezt most igazoljuk is.

Ha $a > 0$, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$, és az egyenlőség csak $a = 1$ esetén igaz.

Mutassuk meg, hogy a bal oldal és a jobb oldal különbsége nemnegatív, és csak $a = 1$ esetén 0!

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0,$$

mivel $a > 0$ és $(a-1)^2 \geq 0$, csak $a = 1$ esetén teljesül az egyenlőség.

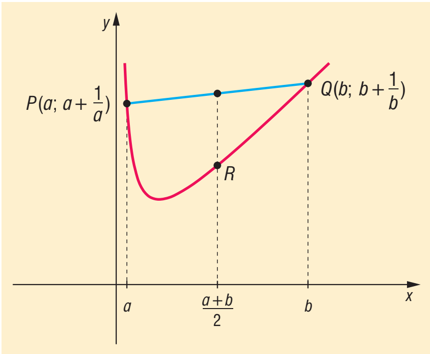
◆ ◆ ◆

Érdemes szóban is megfogalmazni a most igazolt és igen sokszor használható egyenlőtlenséget.

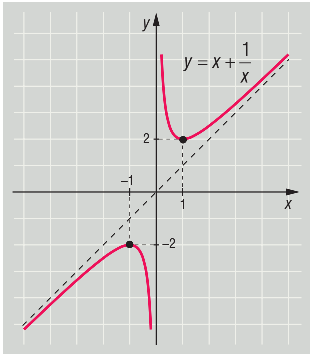
Ha $x > 0$, akkor $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Egy pozitív számnak és a reciprokának az összege nem kisebb 2-nél, és csak az 1 számra egyenlő 2-vel.

Még azt is könnyű igazolni, hogy a görbét valóban jól rajzoltuk, pozitív x-ekre az $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ függvény konvex.



80. ábra



81. ábra

Válasszunk tetszőlegesen két pozitív számot, például $0 < a < b$! ***(80. ábra)***
A P és Q görbepontokat összekötő húr felezőpontjának y koordinátája

$$\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}.$$

Az $[a; b]$ intervallum felezőpontjához tartozó R görbepont y koordinátája: $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{1}{\frac{a+b}{2}}$.

Az utóbbi nyilván kisebb, mint az előbbi. Ehhez elég azt igazolni, hogy $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}>\dfrac{1}{\frac{a+b}{2}}$, de ezt éppen az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ görbéjének konvexitását vizsgálva igazoltuk. A teljes f függvény képe a 81. ábrán látható.
Érdemes megfigyelni, hogy negatív x-ekre a függvénynek maximuma van a –1 helyen, és a maximum értéke –2.

2. példa

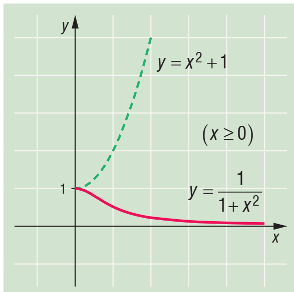
Ábrázoljuk és jellemezzük a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ függvényt!

Megoldás

Ehhez ismét jó észrevenni, hogy g páros függvény, mert $g(-x) = g(x)$, tehát a görbéje szimmetrikus az y tengelyre. Elég tehát $x \geq 0$ esetén vizsgálni, majd a kapott görbét tükrözni az y tengelyre.

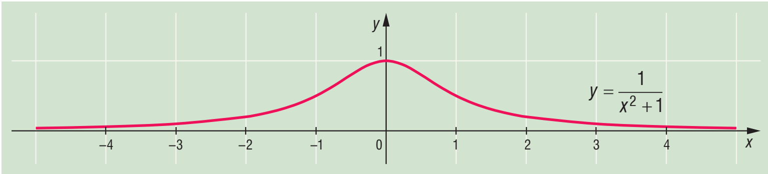
A g függvény grafikonjának pontosabb megrajzolásához „finomabb”, magasabb matematikai eszközökre is szükség van.

Itt azt az utat választjuk, hogy először elkészítjük az $x \mapsto x^2 + 1$, $x \geq 0$ függvény képét. Ez egy normál parabola egyik fele 1-gyel feljebb tolva. Ezután ennek kell a reciprokát venni. ***(82. ábra)***



82. ábra

Mivel $1 \le x^2 + 1$, $0 < \dfrac{1}{1+x^2} \le 1$, így a görbe az $y = 1$ egyenes és az x tengely között lesz, méghozzá csökken, hiszen $x \mapsto x^2 + 1$ növekedett. A teljes függvény képe a 83. ábrán látható. A görbének külön neve is van, az ún. **Agnesi-féle görbe.**



83. ábra

3. példa

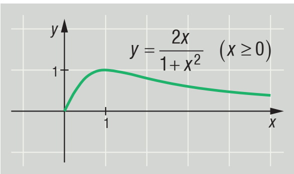
Ábrázoljuk és jellemezzük a h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ függvényt!

Megoldás

A h függvény páratlan, mert $h(-x) = \dfrac{-2x}{1+(-x)^2} = -\dfrac{2x}{1+x^2} = -h(x)$.

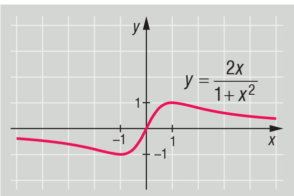
Elég tehát $x \ge 0$-ra vizsgálni. $h(0) = 0$, ezután már feltehetjük, hogy $x > 0$. Osszuk el a h-t definiáló tört számlálóját és nevezőjét is x-szel:

$h(x) = \dfrac{2}{x + \dfrac{1}{x}}$. Erről könnyű észrevenni, hogy éppen az $\dfrac{x + \dfrac{1}{x}}{2}$ reciproka. Ennek 2-szeresét pozitív x-ekre ismerjük, így ezt a görbét is fel tudjuk rajzolni. ***(84. ábra)***



84. ábra

A teljes függvény képe egy szép grafikon, külön neve is van: **Newton-féle szerpentin** ***(85. ábra)***. A pontosabb grafikon elkészítéséhez itt is szükség van magasabb szintű matematikai eszközökre.



85. ábra

A függvény $]-\infty; -1]$-ben csökken, $[-1; 1]$-ben nő, majd $[1; +\infty[$-ben csökken. A -1 helyen minimuma van, értéke -1, az 1 helyen maximuma van, értéke 1. A függvény értékkészlete a $[-1; 1]$ zárt intervallum.

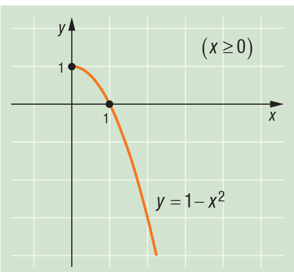
4. példa

Ábrázoljuk és jellemezzük a k: $(\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}) \to \mathbb{R}$, $k(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ függvényt!

Megoldás

A k páros függvény, ezért elég $x \ge 0$, $x \ne 1$-re ábrázolni, majd a kapott görbét tükrözni az y tengelyre.

Ábrázoljuk először az $x \mapsto 1 - x^2$, $x \ge 0$ függvényt, ennek a képe egy félparabola. ***(86. ábra)***

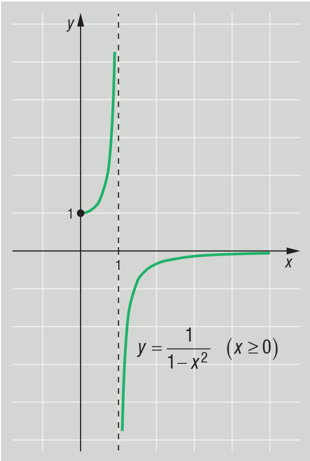


86. ábra

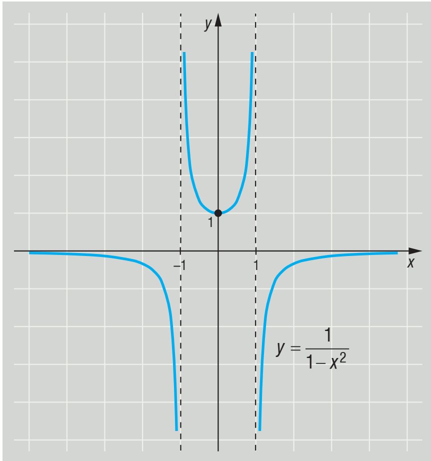
Ennek reciprokát az $x \neq 1$, $x > 0$ helyeken megrajzolhatjuk. ***(87. ábra)***

Ezután a kapott görbét tükrözzük az y tengelyre. ***(88. ábra)***

A k függvény $]-\infty; -1[$-ben és $]-1; 0]$-ban csökken, $[0; 1[$-ben és $]1; +\infty[$-ben nő. A 0 helyen helyi minimuma van, a minimum értéke 1.



87. ábra



88. ábra

A k értékkészlete a $]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$ számhalmaz, másképpen így is írhatjuk: az $\mathbb{R} \setminus [0; 1[$ számhalmaz.

Feladatok

1. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényeket!

a) $f: (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$;

b) $g: (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}$;

c) $h: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

d) $k: (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \to \mathbb{R},\ k(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+4}$.

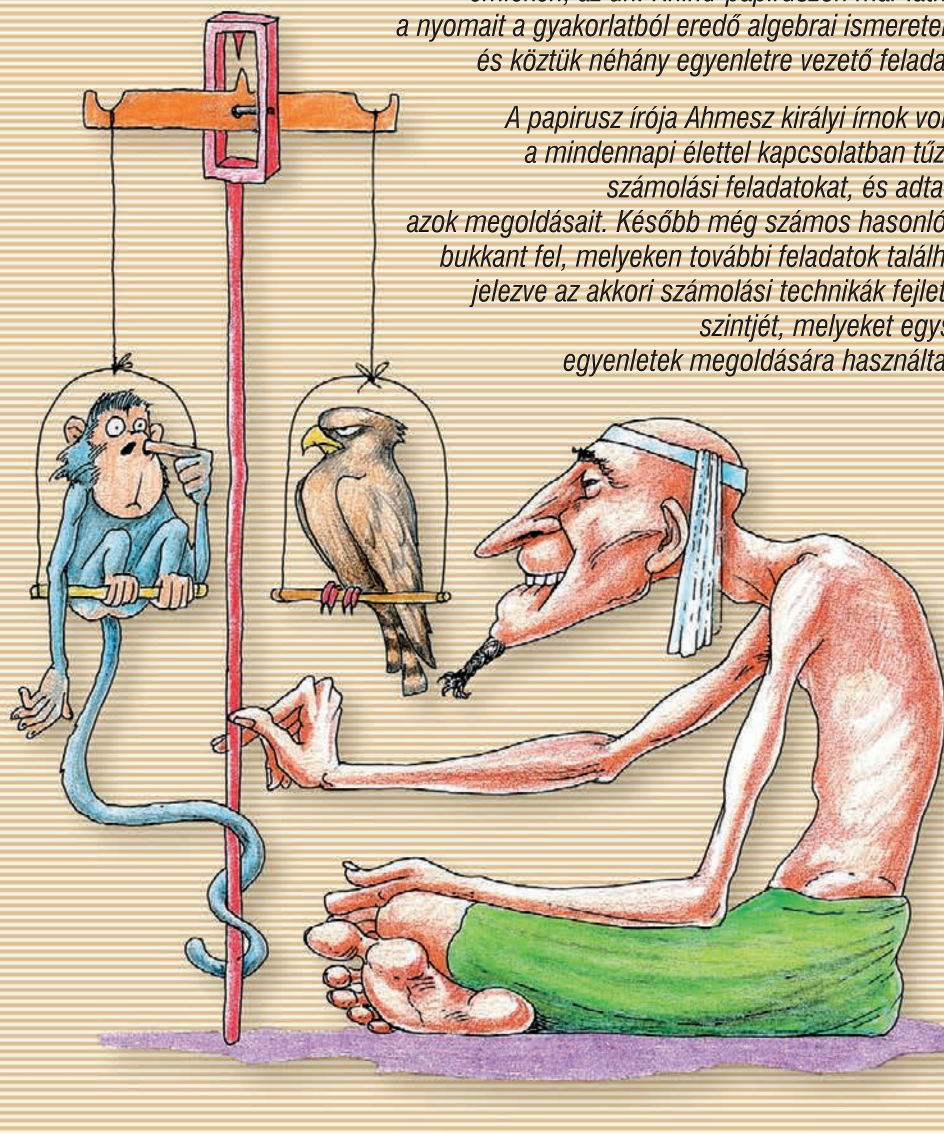
Rejtvény

Az ábrán látható vázák kezdetben üresek, egy-egy csapon keresztül töltjük őket vízzel.
A csapból egyenletesen folyik a víz (időegységenként ugyanakkora térfogatú).
Vázoljuk annak a függvénynek a grafikonját, amely leírja, hogy az idő függvényében hogyan változik a vízfelszín területe.

Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

Az ókori Mezopotámiából Kr. e. 2000-ből származó ékírásos táblák alapján tudjuk, hogy az akkori írástudók már meg tudtak oldani egyenleteket és egyenletrendszereket. A mai ismereteink szerint a legrégebbi egyiptomi írásos emléken, az ún. Rhind-papiruszon már láthatjuk a nyomait a gyakorlatból eredő algebrai ismereteknek, és köztük néhány egyenletre vezető feladatnak.

A papirusz írója Ahmesz királyi írnok volt, aki a mindennapi élettel kapcsolatban tűzött ki számolási feladatokat, és adta meg azok megoldásait. Később még számos hasonló lelet bukkant fel, melyeken további feladatok találhatók, jelezve az akkori számolási technikák fejlettségi szintjét, melyeket egyszerű egyenletek megoldására használtak fel.



„– Ha kilenc kályhában öt és fél nap alatt tizenkét köbméter bükkfa ég el, mennyi nap alatt ég el tizenkét kályhában kilenc köbméter bükkfa?

– Ha kilenc kályhában…

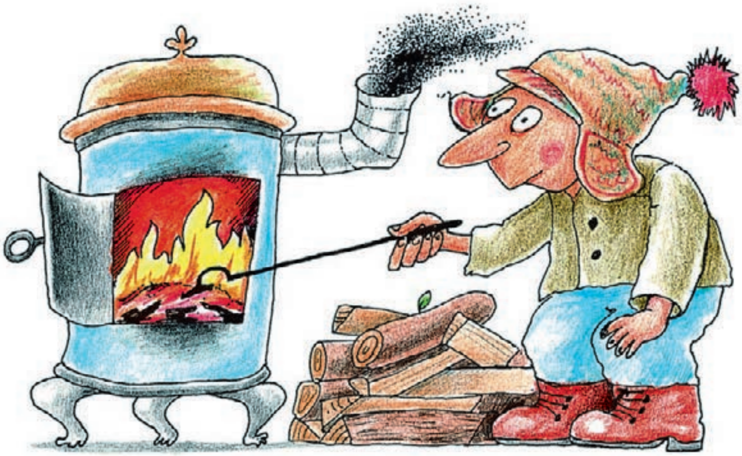
Az íróasztal előtt ülök, valami cikket olvasok. Nem tudok figyelni. A másik szobából már harmincötödször hallom a fenti mondatot. Mi a csoda van már azzal a bükkfával?"

Ezekkel a sorokkal kezdődik Karinthy Frigyes *Tanítom a kisfiamat* című novellája. A végén pedig azzal zárul, hogy az apa továbbadja azt a kobakra ütést, amit annak idején ő is kapott az apjától, aki hasonló módon el akarta magyarázni neki a feladat megoldását úgy, hogy valójában ő sem értette meg.

1. Az egyenlet, azonosság fogalma

A mindennapi életben vagy a természet törvényeinek vizsgálata során gyakran találjuk szembe magunkat olyan kérdésekkel, melyek megválaszolása nem egyszerű. Ennek elsősorban az az oka, hogy értelmünk csak korlátozott mértékben tud több lépésben előre kalkulálni dolgokat. A gondolkodó ember ezért olyan eszközöket keresett, amelyekkel ezt a képességét segíteni tudja.

Ezek egyike a matematika egyik igen eredményes eszköze, az ***egyenlet.***



1. példa

Melyik az a szám, amelynek a kétszereséből ha 1-et kivonunk, akkor az eredmény megegyezik azzal az értékkel, melyet úgy kapunk, hogy a szám háromszorosát 2-ből kivonjuk?

Megoldás

A keresett szám legyen x! A későbbiek során is igen hatékony lehet, ha az első lépésben a feladatban megfogalmazott kérdésre adunk választ (természetesen úgy, hogy az ismeretlen számot valamilyen betűvel jelöljük).

Ezután a feladatban megfogalmazott tulajdonságokat írjuk le a matematika nyelvét használva:

$$2x - 1 = 2 - 3x!$$

Így egy egyenlethez jutunk, melyet addig alakítunk át, míg abból az ismeretlen értékét meg nem kapjuk. Könnyen rájöhetünk, hogy feltételünknek ebben az esetben csak az $x = \frac{3}{5}$ felel meg.

megoldás; gyök

Ezt az értéket nevezzük az **egyenlet megoldásának** vagy az **egyenlet *gyökének.***

2. példa

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$2(x + 3) - 4 = 2x + 2.$$

Megoldás

$$2x + 6 - 4 = 2x + 2,$$
$$2x + 2 = 2x + 2.$$

Az egyenlet rendezése után végeredményül olyan egyenlőséghez jutunk, amely minden esetben igaz lesz, függetlenül attól, hogy milyen értéket adunk az x változónak. Tehát minden $x \in \mathbb{Z}$ megoldás. Az ilyen egyenleteket ***azonosságoknak*** hívjuk.

◆ ◆ ◆

Minden egyenlethez hozzátartozik egy **alaphalmaz**, melyen a megoldásokat keressük. Így például a 2. példában ez a halmaz az egész számok halmaza. Az egyenlet **értelmezési tartománya** az alaphalmaz azon legbővebb részhalmaza, amelyen az egyenletben szereplő kifejezések értelmezettek. Ha az alaphalmazt előre nem adjuk meg, akkor a valós számok halmaza az alaphalmaz.

Az eddigi ismereteink alapján az **egyenletek fogalmára** kétféle meghatározást is adhatunk:

A) Az egyenlettel valójában egy kijelentő mondatot fogalmazunk meg, melyben egy, vagy esetleg több ismeretlen, változó található.

A matematikai logika azokat a mondatokat, melyekről egyértelműen eldönthető, hogy igazak vagy hamisak, *kijelentéseknek* vagy *állításoknak* nevezi. Minden egyes állítás vagy igaz, vagy hamis logikai értékkel rendelkezik.

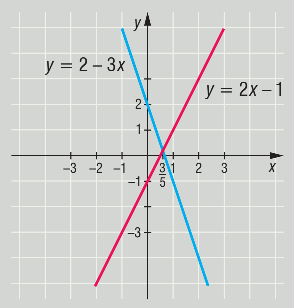
A fentiek alapján meghatározható, hogy mit érthetünk egyenleten, megadhatjuk annak fogalmát. **Az egyenleteket tekinthetjük *logikai függvényeknek*,** vagyis olyan hiányos állításoknak, melyek logikai értéke attól függ, hogy a változó(k) helyére mit helyettesítünk be. Például a $2x - 1 = 2 - 3x$ egyenlet állítása aszerint veszi fel az igaz vagy hamis értéket, hogy az x helyére az $x = \frac{3}{5}$ értéket, vagy valami mást helyettesítünk. **Az egyenlet megoldása során mindig arra törekszünk, hogy olyan x értékeket keressünk, melyre az állítás igaz logikai értéket vesz fel.**

A logika története az ókori Görögországba nyúlik vissza, ahol Arisztotelész (i.e. 384–322) *Organon* című műve volt az első ezzel foglalkozó mű. Későbbi kiépítésében jelentős szerephez jutott a magyar matematikusok számos képviselője is. Közülük Péter Rózsa (1905–1977) és Kalmár László (1905–1976) munkássága emelhető ki. E tudományterület eredményeinek felhasználásával készítette el Neumann János (1903–1957) a világ első elektronikus számítógépét, az *Eniac*-ot az 1940-es években.

Készítsünk kiselőadást az említett matematikusok életéről, munkásságáról!

Neumann János (1903–1957)

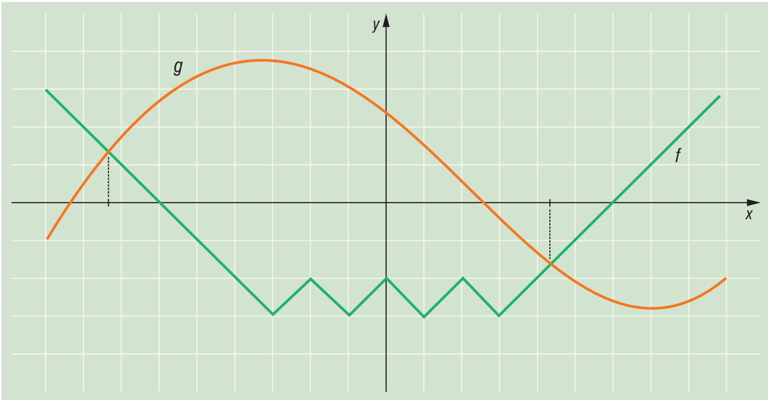
Egy egyenlet eszerint olyasféle, mint az a gyerekjáték, melyen egymástól függetlenül változtathatjuk egy ember, fejét, törzsét és lábait. Egészen addig, amíg nem kerül a megfelelő testrész a helyére, mulatságos, hamis ábrákat kapunk.



1. ábra

B) Az egyenlet fogalmára szemléletesebb meghatározás is adható, melyben a függvényeknél megismert fogalmak használhatók fel. Ezt akkor alkalmazhatjuk, ha **az egyenleteket úgy tekintjük, mintha az egyenlőség két oldalán álló kifejezés egy-egy függvény hozzárendelési szabálya lenne.** Így az 1. példa megoldását megkereshetjük úgy, hogy a két oldalon álló függvények grafikonjait közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk. ***(1. ábra)***

Az egyenlet megoldása során az alaphalmaznak olyan *x* elemeit keressük, melyre a két függvény helyettesítési értéke egyenlő, azaz $f(x) = g(x)$. ***(2. ábra)***



2. ábra

Feladatok

1. Döntsük el, hogy a következő mondatok közül melyek tekinthetők állításoknak, melyek igazak és melyek hamisak!

a) Ma péntek van.
b) A paralelogramma két átlója négy egyenlő területű részre osztja a paralelogrammát.
c) A 2 az egyetlen páros prímszám.
d) Hófehérke szebb, mint a gonosz mostohája.
e) Minden páros szám négyzete osztható 8-cal.
f) Ha *x*-hez hozzáadunk 15-öt, akkor 18-at kapunk eredményül.
g) Holnap esik az eső.

2. A következő logikai függvényekben mit tehetünk a változó helyére, hogy igaz, és mit, hogy hamis állításokat kapjunk?

a) Az *x* olyan négyszög, melynek minden szöge egyenlő.
b) A *c* a legkisebb természetes szám.
c) Ha egy szám osztható *x*-szel, akkor osztható 12-vel is.
d) Ha egy szám osztható 12-vel, akkor osztható *y*-nal is.
e) Ha az *x* kétszereséből 3-at elveszünk, akkor 15-öt kapunk.
f) Az *n* olyan egész szám, mely legalább –2 és legfeljebb 4.

3. Írjunk fel olyan egyenleteket, melyek megoldásával választ adhatunk az *a)–e)* feladatokban megfogalmazott kérdésekre!

a) Melyik az a szám, amelyik kettővel nagyobb a kétszeresénél?

b) Melyik az a szám, amelyik hárommal kisebb a háromszorosánál?

c) Egy számhoz hozzáadtunk tízet, majd megszoroztuk kettővel, így a kiindulási számnál háromszor nagyobb számot kaptunk. Melyik számból indultunk ki?

d) Melyik számra gondoltunk, ha a háromszorosánál 7-tel kisebb szám 5-tel nagyobb a kétszeresénél?

e) Egy számot megszoroztunk 6-tal, majd hozzáadtunk 6-ot, így a 258-nál 6-tal kisebb szám hatodrészét kaptuk. Melyik számból indultunk ki?

4. Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyekben a következő egyenletek megoldásait kereshetjük!

a) $\dfrac{1+x}{x-2}=7;$ *b)* $\dfrac{1+x}{2-x}+\dfrac{2-x}{1+x}=2;$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{x(x-2)}=1;$ *d)* $\dfrac{x^3}{x(x^2-1)}=1;$

e) $\dfrac{4x-3}{3x(12x-9)}=\dfrac{3x(12x-9)}{4x-3};$ *f)* $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{5}{x^2-1};$

g) $\dfrac{1}{x^2-2x+1}-\dfrac{1}{x^2+2x+1}=\dfrac{2}{x^2-1};$ *h)* $\dfrac{1}{25x^2-15x}-\dfrac{1}{20x-12}=\dfrac{1}{30x-18}.$

5. A következő egyenletekben *a* valós paramétert jelöl. Helyettesíthetjük-e az *a* értékét úgy, hogy a felírt egyenletek azonosságok legyenek? Írjunk olyan értékeket is a paraméter helyére, hogy a felírt egyenletnek ne legyen megoldása!

a) $3x-4=ax-4;$ *b)* $7(x-2)=7x+a;$

c) $-3-4x=a\left(x+\dfrac{3}{4}\right);$ *d)* $2(2x-3)+3(2-x)=ax.$

6. Tekintsük a következő egyenletek két oldalán álló függvényeket, és ezeket ábrázolva keressük meg, hogy mely pontokban metszik egymást!

a) $-x+4=3x;$ *b)* $2x-1=-x+2;$ *c)* $|x|=2x-3.$

Rejtvény

Egy papírlapon az alábbi öt állítás olvasható. Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?