

Konfár László
Kozmáné Jakab Ágnes
Pintér Klára

s o k s z í n ű
Matematika

munkafüzet

8

Harmadik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2012

Szerzők:

KONFÁR LÁSZLÓ

általános iskolai szakvezető tanár

KOZMÁNÉ JAKAB ÁGNES

általános iskolai szakvezető tanár

PINTÉR KLÁRA

főiskolai adjunktus

Bíráló:

KOTHENCZ JÁNOSNÉ

általános iskolai tanár

Felelős szerkesztő:

TÓTH KATALIN

Kirendelt szakértők:

DR. AMBRUS ANDRÁS

KATONA ISTVÁN

TARINÉ SZENTES MÁRIA KATALIN

ZARUBAY ATTILA

KERETTANTERV:

MOZAIK Kerettantervrendszer 17/2004 (V. 20.)
OM Kerettanterv 17/2004 (V. 20.) 3. sz. melléklet



Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában nem sokszorosítható.

magyar
nyomdaipari termék
NYOMDA- ÉS PAPIIPARI SZÖVETSÉG

ISBN 978 963 697 617 0

Megoldáskötet: ISBN 978 963 697 635 4

ENGEDÉLYSZÁM: KHF/677-29/2010

© MOZAIK KIADÓ, 2009



Útmutató a munkafüzet használatához

A munkafüzet témakörei a tankönyvnek megfelelő sorrendben követik egymást. Az egymásra épülő feladatok jó gyakorlási lehetőséget biztosítanak, így segítik a tananyag megértését és elmélyítését. A gondolkodtatóbb feladatokat *-gal jelöltük, ezek megoldásához jó ötletekre van szükség.

ISMÉTLÉS

Hatványozás

1. Töltsük ki a totót! Tippeljük meg, hogy a megadott szám az 1, 2 vagy x oszlopban álló számmal egyenlő!

	Számok	1	2	X	Tipp
1.	2^3	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$2 + 2 + 2$	$2 \cdot 3$	1
2.	4^3	444	64	12	2
3.	a 10^2 és 10^3 hatványok összege	1100	100 000	1 000 000	1
4.	a 10^2 és 10^3 hatványok szorzata	1100	100 000	1 000 000	2
5.	a $2 \cdot 5^2$ szorzat	20	50	100	2
6.	a $(2 \cdot 5)^2$ hatvány	20	50	100	X
7.	a $(2^3)^4$ hatvány	2^7	2^{12}	6^4	2
8.	$(-1)^3$	$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$	$-1-1-1$	$3 \cdot (-1)$	1
9.	$(-1)^4$	-4	-1	1	X
10.	$(-1)^{2009}$	-2009	-1	1	2
11.	2009^1	0	1	2009	X
12.	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\frac{3^2}{4^2}$	$\frac{3^2}{4}$	$\frac{9}{4}$	1
13.	5^0	0	1	5	2
+1	$(-1)^0$	-1	0	1	X

2. Írjuk fel a szorzatokat prímtényezőik segítségével p^n alakban (p prím)!

a) $8 \cdot 4 = \underline{2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5}$ $2^5 \cdot 2^2 = \underline{2^7}$ $2^7 \cdot 2^4 = \underline{2^{11}}$
 b) $3^5 \cdot 3^3 = \underline{3^8}$ $3^7 \cdot 3^3 = \underline{3^{10}}$ $9^4 \cdot 3^6 = \underline{(3^2)^4 \cdot 3^6 = 3^8 \cdot 3^6 = 3^{14}}$
 c) $5^6 \cdot 25^2 = \underline{5^6 \cdot (5^2)^2 = 5^6 \cdot 5^4 = 5^{10}}$ $25^5 \cdot 5^7 = \underline{(5^2)^5 \cdot 5^7 = 5^{10} \cdot 5^7 = 5^{17}}$ $49^4 \cdot 343 = \underline{(7^2)^4 \cdot 7^3 = 7^8 \cdot 7^3 = 7^{11}}$

3. Írjuk fel a hányadosokat hatvány alakban! Soronként húzzuk alá az eltérő eredményeket!

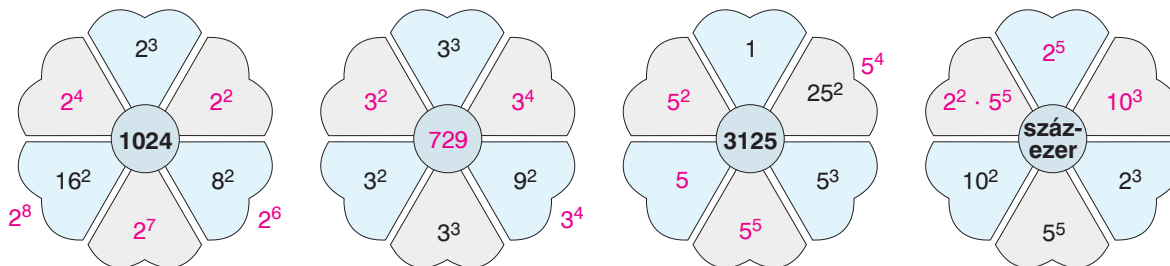
a) $8 : 4 = \underline{2^3 : 2^2 = 2}$ $2^5 : 2^2 = \underline{2^3}$ $2^7 : 2^4 = \underline{2^3}$
 b) $3^5 : 3^3 = \underline{3^2}$ $3^7 : 3^3 = \underline{3^4}$ $9^4 : 3^6 = \underline{(3^2)^4 : 3^6 = 3^8 : 3^6 = 3^2}$
 c) $5^7 : 25^2 = \underline{5^7 : (5^2)^2 = 5^7 : 5^4 = 5^3}$ $25^5 : 5^7 = \underline{(5^2)^5 : 5^7 = 5^{10} : 5^7 = 5^3}$ $10^4 : 2^4 = \underline{5^4 \cdot 2^4 : 2^4 = 5^4}$

4. Írjuk fel a hatványok hatványait a^n alakban (esetleg többféleképpen is)!

a) $(2^3)^4 = \underline{8^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}}$ $(4^2)^3 = \underline{4^6 = (2^2)^6 = 2^{12}}$ $(5^3)^2 = \underline{5^6 = (5^2)^3 = 25^3 = 125^2}$
 b) $(10^6)^2 = \underline{10^{6 \cdot 2} = 10^{12} = 100^6}$ $(10^3)^6 = \underline{10^{3 \cdot 6} = 1000^6 = 10^{18}}$ $5^3^2 = \underline{5^{3 \cdot 3} = 5^9 = (5^3)^3 = 125^3}$



5. Pótoljuk a hiányzó részeket, ha a virág közepében a szemközti szirmokban álló számok szorzata áll!



$1024 = 2^{10}$	$3^3 \cdot 3^3 = 3^6 = 729$	$3125 = 5^5$	$100\ 000 = 10^5 = 2^5 \cdot 5^5$
$8^2 = (2^3)^2 = 2^6$	$9^2 = (3^2)^2 = 3^4$	$25^2 = (5^2)^2 = 5^4$	$2^5 \cdot 5^5 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 5^5$
$16^2 = (2^4)^2 = 2^8$	$3^6 : 3^2 = 3^4$	$5^5 : 5^3 = 5^2$	$2^5 \cdot 5^5 : 5^5 = 2^5$

6. Pótoljuk a hiányzó alapot vagy kitevőt!

a) $2^3 \cdot 2^{\boxed{6}} = 2^9$ $10^2 \cdot 10^5 = 10^{\boxed{7}}$ $3^4 \cdot \boxed{3}^2 = 3^6$
 b) $5^{\boxed{7}} : 5^3 = 5^4$ $10^9 : 10^3 = 10^{\boxed{6}}$ $7^6 : 7^{\boxed{5}} = 7$
 *c) $4^4 \cdot 8^3 = \boxed{2}^{17}$ $10^3 \cdot 10^5 = 100^{\boxed{4}}$ $3^4 \cdot \boxed{9}^2 = 3^8$
 *d) $10^9 : 10^3 = 100^{\boxed{3}}$ $\boxed{3}^6 : 9^2 = 9$ $16^5 : 32^2 = \boxed{4}^5$

$(2^2)^4 \cdot (2^3)^3 = 2^8 \cdot 2^9 = 2^{17}$	$10^8 = (10^2)^4 = 100^4$	$3^8 : 3^4 = 3^4 = (3^2)^2 = 9^2$
$10^6 = (10^2)^3 = 100^3$	$9^2 \cdot 9 = 9^3 = (3^2)^3 = 3^6$	$(2^4)^5 : (2^5)^2 = 2^{20} : 2^{10} = 2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$

7. Töltsük ki a bűvös négyzetet úgy, hogy a számok szorzata minden sorban, oszlopban és átlóban azonos legyen!

a)	<table border="1"> <tr><td>3^8</td><td>3^3</td><td>3^4</td></tr> <tr><td>3^1</td><td>3^5</td><td>3^9</td></tr> <tr><td>3^6</td><td>3^7</td><td>3^2</td></tr> </table>	3^8	3^3	3^4	3^1	3^5	3^9	3^6	3^7	3^2	b)	<table border="1"> <tr><td>$256 = 2^8$</td><td>$2 = 2^1$</td><td>$64 = 2^6$</td></tr> <tr><td>$8 = 2^3$</td><td>$32 = 2^5$</td><td>$128 = 2^7$</td></tr> <tr><td>$16 = 2^4$</td><td>$512 = 2^9$</td><td>$4 = 2^2$</td></tr> </table>	$256 = 2^8$	$2 = 2^1$	$64 = 2^6$	$8 = 2^3$	$32 = 2^5$	$128 = 2^7$	$16 = 2^4$	$512 = 2^9$	$4 = 2^2$	*c)	<table border="1"> <tr><td>$1 = 10^0$</td><td>$\frac{1}{10} = 10^{-1}$</td><td>$10\ 000 = 10^4$</td></tr> <tr><td>$100\ 000 = 10^5$</td><td>$10 = 10^1$</td><td>$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$</td></tr> <tr><td>$\frac{1}{100} = 10^{-2}$</td><td>$1000 = 10^3$</td><td>$100 = 10^2$</td></tr> </table>	$1 = 10^0$	$\frac{1}{10} = 10^{-1}$	$10\ 000 = 10^4$	$100\ 000 = 10^5$	$10 = 10^1$	$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$	$\frac{1}{100} = 10^{-2}$	$1000 = 10^3$	$100 = 10^2$
3^8	3^3	3^4																														
3^1	3^5	3^9																														
3^6	3^7	3^2																														
$256 = 2^8$	$2 = 2^1$	$64 = 2^6$																														
$8 = 2^3$	$32 = 2^5$	$128 = 2^7$																														
$16 = 2^4$	$512 = 2^9$	$4 = 2^2$																														
$1 = 10^0$	$\frac{1}{10} = 10^{-1}$	$10\ 000 = 10^4$																														
$100\ 000 = 10^5$	$10 = 10^1$	$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$																														
$\frac{1}{100} = 10^{-2}$	$1000 = 10^3$	$100 = 10^2$																														

$3^1 \cdot 3^5 \cdot 3^9 = 3^{15}$	$2^1 \cdot 2^5 \cdot 2^9 = 2^{15}$	$10^{-2} \cdot 10^1 \cdot 10^4 = 10^3$
------------------------------------	------------------------------------	--

8. Írjuk fel a normálalakban megadott számok tízes számrendszerbeli alakját!

$6 \cdot 10^3 = \underline{6\ 000}$ $1,2 \cdot 10^4 = \underline{12\ 000}$ $2,34 \cdot 10^6 = \underline{2\ 340\ 000}$
 $4,567 \cdot 10^2 = \underline{456,7}$ $3,07 \cdot 10^6 = \underline{3\ 070\ 000}$ $4,007 \cdot 10^3 = \underline{4\ 007}$

9. Írjuk fel a számokat normálalakban!

a) $1\ 200\ 000 = \underline{1,2 \cdot 10^6}$ $234\ 000 = \underline{2,34 \cdot 10^5}$
 $45,67 = \underline{4,567 \cdot 10^1}$ $100 \cdot 456,7 = \underline{10^2 \cdot 4,567 \cdot 10^2 = 4,567 \cdot 10^4}$
 b) $10 \cdot 456,7 \cdot 10^3 = \underline{10 \cdot 4,567 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 4,567 \cdot 10^6}$ $2^5 \cdot 5^4 = \underline{2 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = 2 \cdot 10^4}$
 $2^5 \cdot 5^6 = \underline{2^5 \cdot 5^5 \cdot 5 = 5 \cdot 10^5}$ $4^3 \cdot 75 = \underline{(2^2)^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2^4 \cdot 3 \cdot 10^2 = 16 \cdot 3 \cdot 10^2 = 48 \cdot 10^2 = 4,8 \cdot 10^3}$



1. ALGEBRA

Algebrai kifejezések (Emlékeztető)

1. Írjuk a táblázatba az algebrai kifejezések együtthatóját!

Algebrai kifejezés	$3a$	$2ab$	b	$5x^2$	$1,3y$	$-0,4x^2y$	$\frac{3}{4}a^5$	$3a \cdot 2b$	$\frac{2c}{3}$	$\frac{4c}{0,5}$	$-x^3$
Együttható	3	2	1	5	1,3	-0,4	$\frac{3}{4}$	6	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{0,5} = 8$	-1

2. Kössük össze az első sorban álló számokat azokkal a második sorban álló algebrai kifejezésekkel, amelyek együtthatója egyenlő az adott számmal! Karikázzuk be a kakukktójást!

8 -0,75 6 -0,4 2 12 -10 1

 $2x^3$ $2a \cdot 3b$ $\frac{4c}{0,5}$ $a \cdot 2b \cdot 6c$ $-\frac{3}{4}a^5$ x^3y^2 $-0,4x^2y$ $-5x^2$

3. Karikázzuk be azonos módon az egynemű algebrai kifejezéseket!

a) $3a$ $2a^2$ $2b^2$ $-4a$ $2a^3$ $2a^3$ $-3a^3$ $2b^3$ $6a$ $-b$ $5a^2$ $-3b^2$
 b) $3x$ $-x^2$ $2x^2$ $-x$ $2x^2$ $-3x \cdot 2$ $3x^2$ $3x : 2$ $6x^2$ $-1,5x$ $10x^2$ $x \cdot x^2$

4. Az egytagú algebrai kifejezésekhez írjunk E , a többtagúakhoz T betűt a csészébe! A tányérra írjuk a helyettesítési értéket, ha $x = 4!$

5. a) Két természetes szám összege 36. Töltsük ki a táblázat hiányzó részeit!

Az egyik szám	1	24	5	36	7	n
A másik szám	35	12	31	0	29	$36 - n$

b) Két szám különbsége 36. Töltsük ki a táblázatot!

Kisebbitendő	48	5	a	54	39,6	$36 + b$
Kivonandó	12	-31	$a - 36$	18	3,6	b

c) Ha a két természetes szám szorzata 36 és az egyik tényezője n , akkor a másik tényezője: $36 : n = \frac{36}{n} \quad n \neq 0$

d) Két pozitív egész szám hányadosa 36.

Ha az osztandó a , akkor az osztó $a : 36 = \frac{a}{36}$

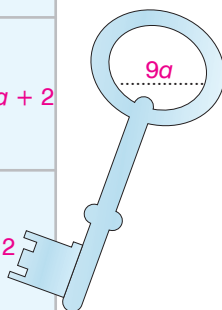
Ha az osztó b , akkor az osztandó $36 \cdot b$



6. Töltsük ki a bűvös négyzeteket! Először adjuk meg a bűvös négyzetek „kulcsát”, amely a minden sorban, oszlopban, átlóban a beírt algebrai kifejezések

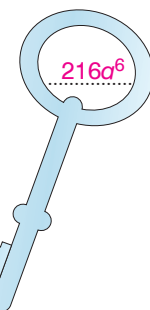
a) összege;

$3a + 2$	$-a^2 + 3a - 2$	$a^2 + 3a$
$a^2 + 3a - 2$	$3a$	$-a^2 + 3a + 2$
$3a - a^2$	$a^2 + 3a + 2$	$3a - 2$



b) szorzata!

$2 \cdot a^2$	$-9 \cdot a$	$-12a^3$
$-36a^3$	$6a^2$	$-a$
$-3 \cdot a$	$-4 \cdot a^3$	$18 \cdot a^2$



7. Töltsük ki a totót! Tippetünk arra, hogy a megadott algebrai kifejezés az 1, 2, vagy x oszlopban álló kifejezéssel egyenlő, vagy igazzá teszi az állítást!

	Algebrai kifejezés	1	2	X	Tipp
1.	$3y$	$y + y + y$	$3y$	y^3	1
2.	$3y^2$	y^6	$6y$	$y^2 + y^2 + y^2$	X
3.	$3y$ és az y különbsége	3	$2y$	y^2	2
4.	$3y$ és a 3 különbsége	y	0	$3y - 3$	X
5.	$3y$ és a $2y$ algebrai kifejezések összege	$5y$	$6y$	$6y^2$	1
6.	$3y$ és a $2y$ algebrai kifejezések szorzata	$5y$	$6y$	$6y^2$	X
7.	$3y$ és a $2y$ algebrai kifejezések különbsége	y	1	0	1
8.	$3y + y^2$ algebrai kifejezés helyettesítési értéke, ha $y = 2$	10	36	64	1
9.	$3y^2 + y$ algebrai kifejezés helyettesítési értéke, ha $y = 2$	14	18	38	1
10.	$2a^3$ kifejezéssel egynemű	$2a$	$2a^2$	$a^3 : 4$	X
11.	$3y^2$ és a $2y$ algebrai kifejezések szorzata	$5y^3$	$6y^3$	$6y^9$	2
12.	$3ab^2$ és a $2a$ algebrai kifejezések szorzata	$6ab^2$	$5a^2b^2$	$6a^2b^2$	X
13.	amivel meg kell szorozni $3ab^2$ -t, hogy $6a^2b^2$ -t kapjunk	2	$2a$	$2ab$	2
+1	$(3ab)^2$	$3ab^2$	$6a^2b^2$	$9a^2b^2$	X

8. Összevonással írjuk fel egyszerűbb alakban! Számoljuk ki az egyszerűbb alakból a helyettesítési értéket, ha $x = -2$!

a) $2x + 3 - 3x + 4 - x + 4x - 5 + 3x - 3 + 5x + 7 - 8x = 2x + 6$
 $2 \cdot (-2) + 6 = -4 + 6 = 2$

b) $2x^2 + 3 - 3x + 4 - x^2 + 4x - 5 + 3x^2 - 3 + 5x^2 + 7 - 8x^2 = x^2 + x + 6$
 $(-2)^2 + (-2) + 6 = 4 - 2 + 6 = 8$

c) $4x + 3x^2 - 5x^3 - 5 + 5x + 5x^3 - x^3 + x^2 - 8x + 2x^2 + 7 - 5x^2 = -x^3 + x^2 + x + 2$
 $-(-2)^3 + (-2)^2 + (-2) + 2 = 8 + 4 - 2 + 2 = 12$



Hogyan oldunk meg egyenleteket, egyenlőtlenségeket? (Emlékeztető)

1. Az alábbi összefüggésekből fejezzük ki az egyes mennyiségeket!

a) $T = a \cdot b$ ha $a \neq 0, b \neq 0$	$a = T : b = \frac{T}{b}$	$b = T : a = \frac{T}{a}$
b) $K = 2a + 2b$	$a = \frac{K - 2a}{2} = \frac{K}{2} - a$	$b = (K - 2a) : 2 = \frac{K}{2} - a$
c) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ ha $d \neq 0, n \neq 1$	$a_1 = a_n - (n - 1) \cdot d$	$d = \frac{(a_n - a_1) : (n - 1)}{n - 1}$ $n = \frac{(a_n - a_1) : d + 1}{d} = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$

2. Az adott összefüggésből fejezzük ki az egyes betűket!

a) $a = \frac{b+c}{2}$	$b = 2a - c$	$c = 2a - b$
b) $a = b + \frac{c}{2}$	$b = a - \frac{c}{2}$	$c = (a - b) \cdot 2$
c) $a = b + \frac{1}{c}$ (ha $c \neq 0$)	$b = a - \frac{1}{c}$	$c = \frac{1}{a - b}$ ha $a - b \neq 0, a \neq b$
*d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ (ha $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$)	$a = cb : (b - c)$ ha $b - c \neq 0$	$c = ab : (a + b)$ ha $a + b \neq 0$

c) $a - b = \frac{1}{c}$ $/ \cdot c$	d) $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$	d) $\frac{b+a}{a \cdot b} = \frac{1}{c}$
$c(a - b) = 1$	$\frac{1}{a} = \frac{b - c}{c \cdot b}$	$c \cdot \frac{b+a}{a \cdot b} = 1$
$c = \frac{1}{a - b}$	$1 = a \cdot \frac{b - c}{c \cdot b}$	$c \cdot \frac{1}{b+a} = 1 \cdot \frac{a \cdot b}{b+a}$
	$a = 1 : \frac{b - c}{c \cdot b} = 1 \cdot \frac{c \cdot b}{b - c}$	$c = \frac{a \cdot b}{a + b}$

3. Oldjuk meg az egyenletet az adott utasítások alapján!

$$\frac{x}{2} + \frac{3(x+7)}{15} = x + 2$$

Egyszerűsítsünk!

$$\frac{x}{2} + \frac{x+7}{5} = x + 2$$

Hozzunk közös nevezőre!

$$\frac{5x}{10} + \frac{2(x+7)}{10} = \frac{10(x+2)}{10}$$

Szorozzunk meg minden tagot a közös nevezővel!

$$5x + 2(x + 7) = 10(x + 2)$$

Bontsuk fel a zárójelet!

$$5x + 2x + 14 = 10x + 20$$

Végezzük el az összevonásokat!

$$7x + 14 = 10x + 20 \quad / - 7x$$

Alkalmazzuk a mérlegelv lépéseit!

$$14x = 3x + 20 \quad / - 20$$

$$-6 = 3x \quad / : 3$$

$$x = \frac{-2}{3}$$

Ellenőrizzünk! Helyettesítsük be a kapott számot az egyenlet mindkét oldalába!

bal oldal: $\frac{-2}{2} + \frac{3(-2+7)}{15} = -1 + 1 = 0$

jobb oldal: $-2 + 2 = 0$

Hasonlítsuk össze a kapott helyettesítési értékeket! bal oldal = jobb oldal

Adjuk meg az egyenlet gyökét, ha az alaphalmaz

a) a természetes számok halmaza: b) a negatív számok halmaza: c) a racionális számok halmaza:

..... nincs gyöke -2 -2



4. Oldjuk meg az egyenletet, ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza ($A = \mathbb{Q}$)!

$$7(3 - a) + 4a - 4(2a - 8) = -2 - 3(a + 3)$$

$$\begin{aligned} 21 - 7a + 4a - 8a + 32 &= -2 - 3a - 9 \\ 53 - 11a &= -11 - 3a & / - 11a \\ 53 &= -11 + 8a & / + 11 \\ 64 &= 8a & / : 8 \\ 8 &= a \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

bal oldal:

$$7(3 - 8) + 4 \cdot 8 - 4(2 \cdot 8 - 8) = 7(-5) + 32 - 32 = -35$$

jobb oldal:

$$-2 - 3(8 + 3) = -2 - 3 \cdot 11 = -2 - 33 = -35$$

bal oldal = jobb oldal

5. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget, ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza! Írjuk be a hiányzó utasításokat!

$$3x - 2 + \frac{x}{3} \geq 2(x - 2)$$

Bontuk fel a zárójelet!

$$3x - 2 + \frac{x}{3} \geq 2x - 4$$

Szorozzunk a (közös) nevezővel (3-mal)!

$$9x - 6 + x \geq 6x - 12$$

Vonjuk össze az egyenmű kifejezéseket!

$$10x - 6 \geq 6x - 12 \quad / - 6x$$

Az alábbiakban alkalmazzuk a mérlegelvet!

$$4x - 6 \geq -12 \quad / + 6$$

$$4x \geq -6 \quad / : 4$$

$$x \geq -\frac{6}{4}$$

Egyszerűsítsünk!

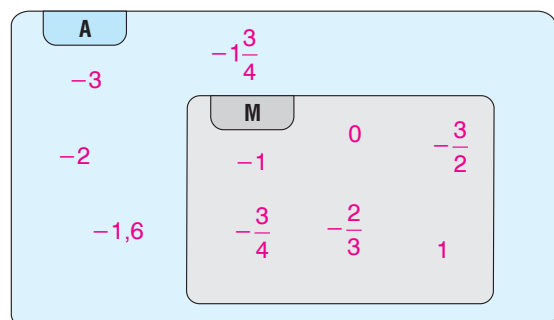
$$x \geq -\frac{3}{2}$$

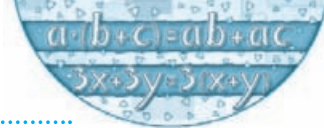
Ábrázoljuk számegyenesen az egyenlőtlenség gyökeit! Színezzük a számegyenesnek azt a részét, amelyen a megoldások találhatóak!



Írjuk be a számokat a halmazábra megfelelő részébe! (A = alaphalmaz; M = megoldáshalmaz)

- 3; -2; -1; 0; 1;
 $-\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{2}{3}$; $-1\frac{3}{4}$; -1,6





6. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget! A megoldáshalmazt ábrázoljuk számegyenesen!

$$\frac{x-2}{3} - \frac{3x+1}{4} - x < 2 - \frac{7-2x}{6}$$

$$4(x-2) - 3(3x+1) - 12x < 24 - 2(7-2x)$$

$$4x - 8 - 9x - 3 - 12x < 24 - 14 + 4x$$

$$-17x - 11 < 10 + 4x$$

$$-11 < 10 + 21x$$

$$-21 < 21x$$

$$-1 < x$$

/ · 12

A legnagyobb szám, amelyre nem teljesül az egyenlőtlenség: $x_{\max} = -1$

/ + 17x

/ - 10

/ : 21

A megoldáshalmaz ábrázolása számegyenesen:



Az egyenlőtlenség a **-1-nél nagyobb** számokra teljesül.

7. A matektanár ezzel kezdte az egyik órát:

Mindenki gondoljon egy természetes számra!

Adjunk hozzá 1-et!

Vegyük az összeg négyszeresét!

A szorzatot vonjuk ki 6-ból! Karikázzuk be az eredményt!

Írjuk le az előbb gondolt számnál 1-gyel nagyobb számot!

Vegyük a kétszeresét!

A szorzatból vonjuk ki a gondolt számnál 1-gyel nagyobb szám hatszorosát!

A különbséghez adjunk 6-ot! Karikázzuk be ezt az eredményt is!

Az utasítás szerinti művelet eredménye számpéldával: algebrai kifejezéssel:

10	x
11	x + 1
44	4(x + 1)
6 - 44 = -38	6 - 4(x + 1)
11	x + 1
22	2(x + 1)
22 - 66 = -44	2(x + 1) - 6(x + 1)
-44 + 6 = -38	2(x + 1) - 6(x + 1) + 6

Mit tapasztalunk?

A két bekarikázott szám (kifejezés) egyenlő.

A tapasztalatunk indoklásához írjunk egyenletet!

a) $6 - 4(x + 1) = 2(x + 1) - 6(x + 1) + 6$

$$6 - 4x - 4 = 2x + 2 - 6x - 6 + 6$$

$$-4x + 2 = -4x + 2$$

$$-4x = -4x$$

$$x = x$$

/ - 2

/ : (-4)

vagy b) $6 - 4(x + 1) = 2(x + 1) - 6(x + 1) + 6$

$$6 - 4(x + 1) = -4(x + 1) + 6$$

$$6 = 6$$

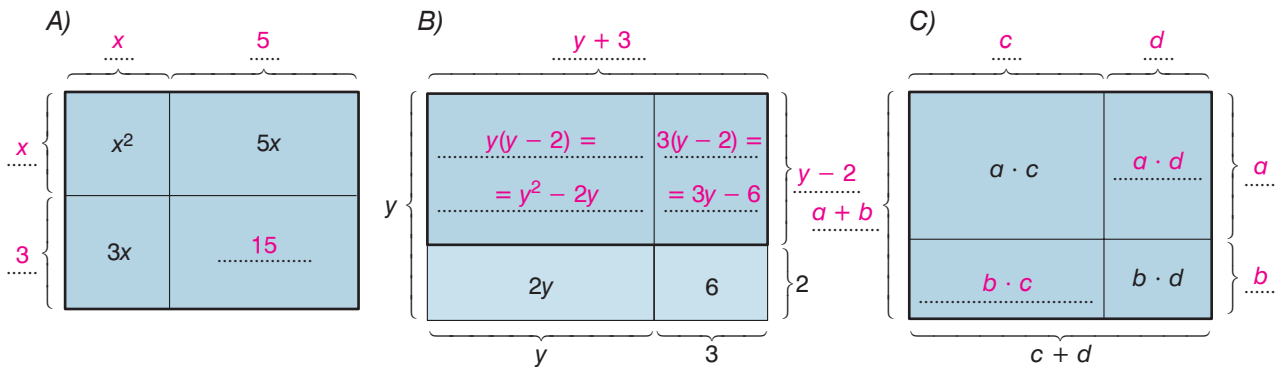
/ + 4(x + 1)

Bármely természetes számra fennáll az egyenlőség.

Az ilyen egyenletet **azonosságnak** nevezzük.

Töbntagú algebrai kifejezések szorzása

1. a) Írjuk rá a téglalapok oldalaira a hiányzó adatokat, a téglalapok belsejébe pedig a területeket!



b) Adjuk meg a vastagon kiemelt téglalapok területét szorzat és összeg alakban is!

Az ábráról leolvasott terület	A	B	C
szorzat alakban	$(x + 3) \cdot (x + 5)$	$(y + 3) \cdot (y - 2)$	$(a + b) \cdot (c + d)$
összeg alakban	$x^2 + 5x + 3x + 15$	$y^2 - 2y + 3y - 6$	$ac + ad + bc + bd$

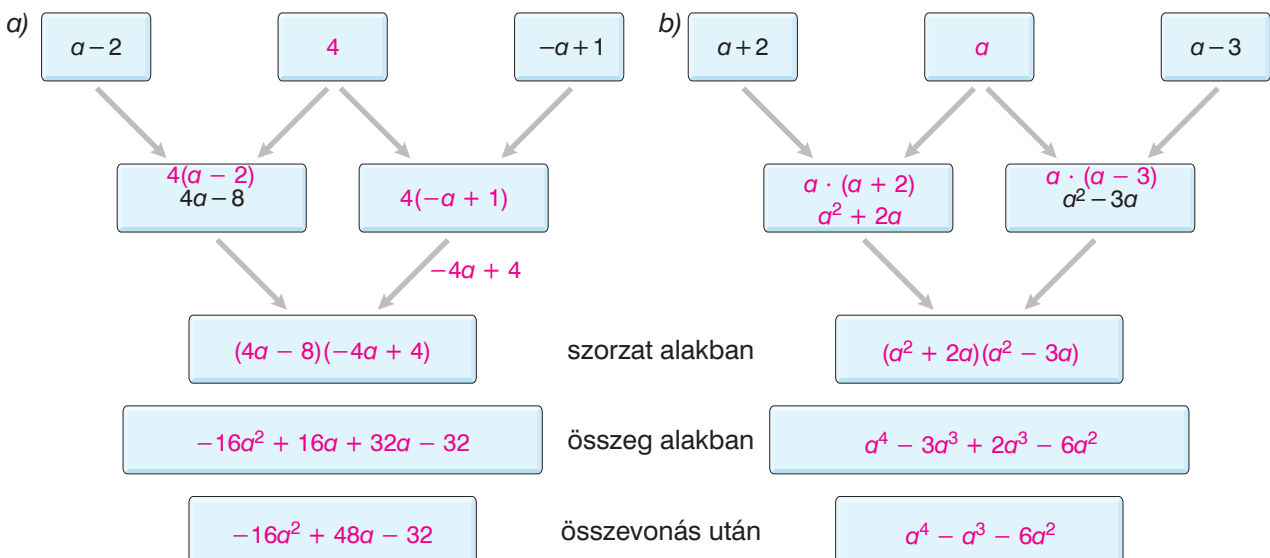
c) Az egyes ábrákról leolvasott területek szorzat alakjában végezzük el a tagonkénti szorzást, majd az összevonást!

A) $(x + 3) \cdot (x + 5) = x^2 + 3x + 5x + 15 = x^2 + 8x + 15$

B) $(y + 3) \cdot (y - 2) = y^2 + 3y - 2y - 6 = y^2 + y - 6$

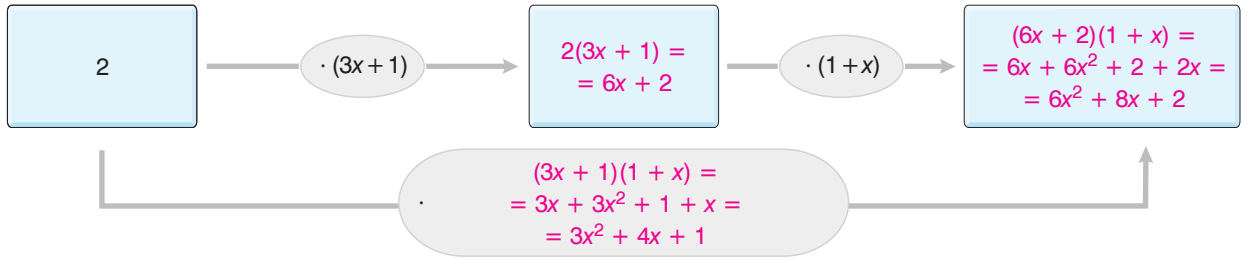
C) $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

2. Írjunk az üres téglalapokba algebrai kifejezéseket úgy, hogy az alsóbb téglalapokba a fölöttük levő két téglalapban levő algebrai kifejezés szorzata kerüljön!

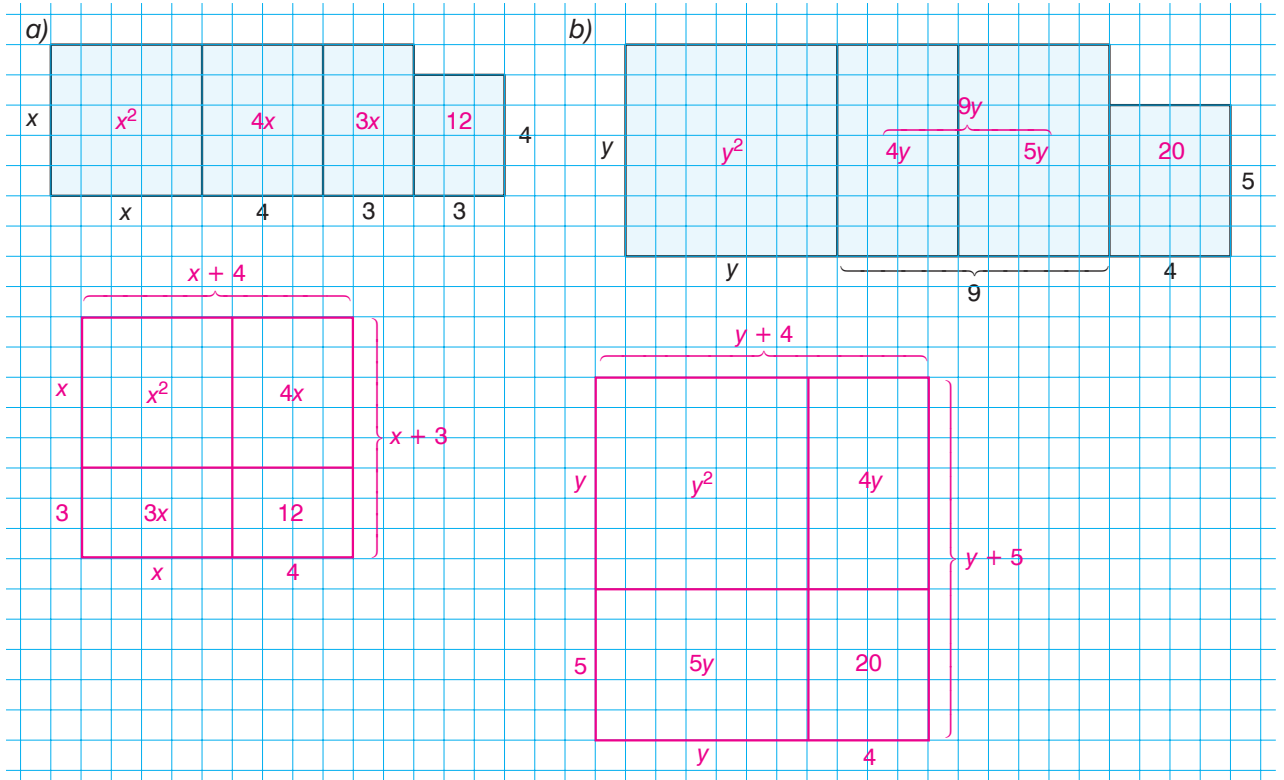




3. Írjuk be a hiányzó algebrai kifejezéseket szorzat és összeg alakban!

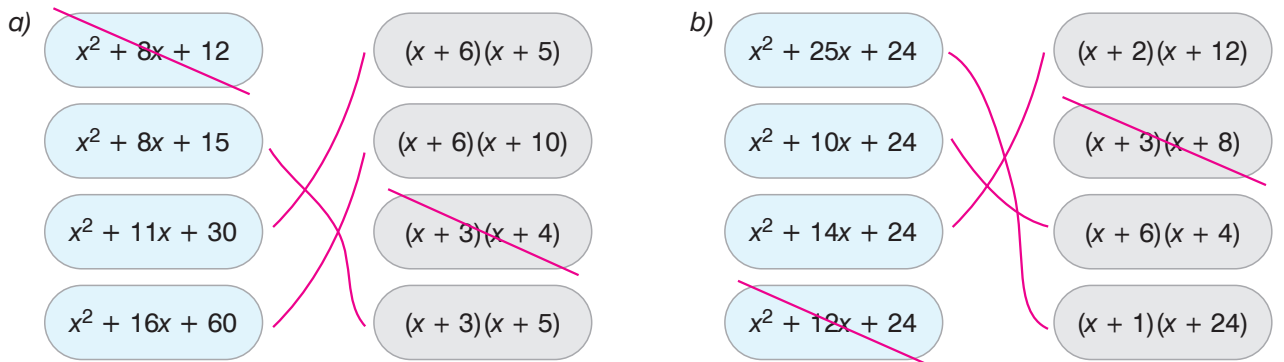


4. Téglalapokat négy kisebb téglalpra vágunk szét. Ezen részekből rakjuk össze, azaz rajzoljuk meg az eredeti téglalapot! Írjuk be a részekbe a területüket! Adjuk meg az eredeti téglalapok területét összeg és szorzat alakban is!



	a)	b)
T összeg alakban	$x^2 + 4x + 3x + 12 = x^2 + 7x + 12$	$y^2 + 4y + 5y + 20 = y^2 + 9y + 20$
T szorzat alakban	$(x+3) \cdot (x+4)$	$(y+4) \cdot (y+5)$

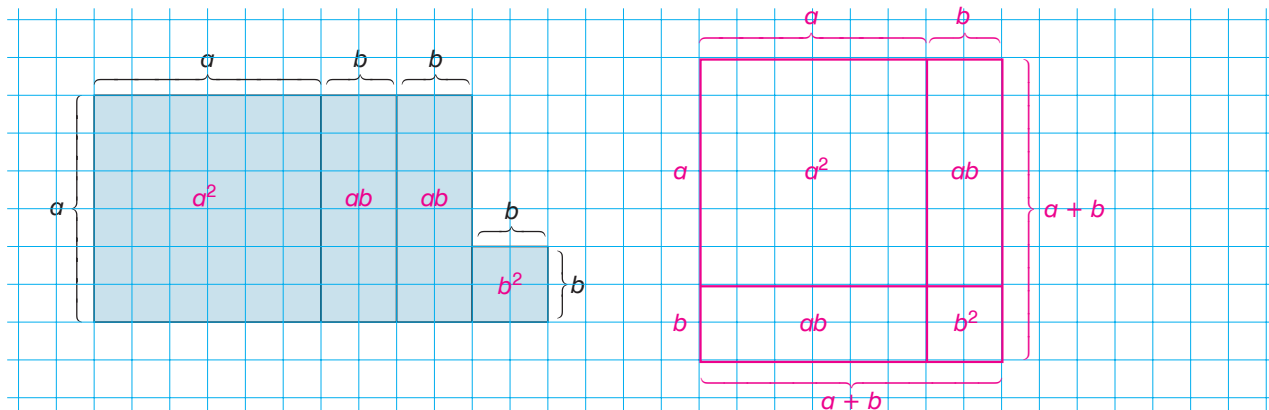
5. Kössük össze az egyenlő algebrai kifejezéseket! Húzzuk át azt, amelyiknek nincs párja!





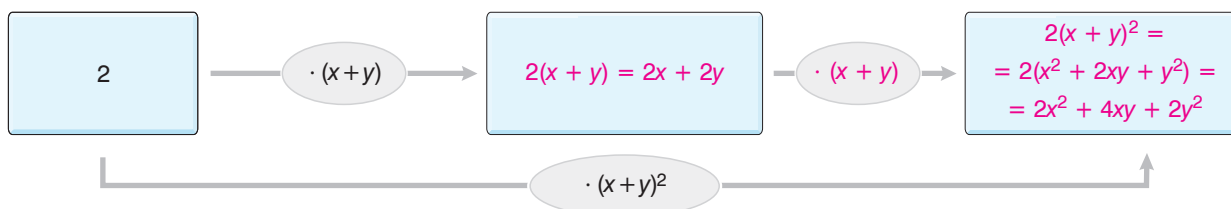
Összeg és különbség négyzete (Kiegészítő anyag)

1. Egy négyzetet négy kisebb részre vágunk szét. Rajzoljuk meg az eredeti négyzetet! Írjuk be a részekbe a területüket! Adjuk meg az eredeti négyzet területét összeg és szorzat alakban is!



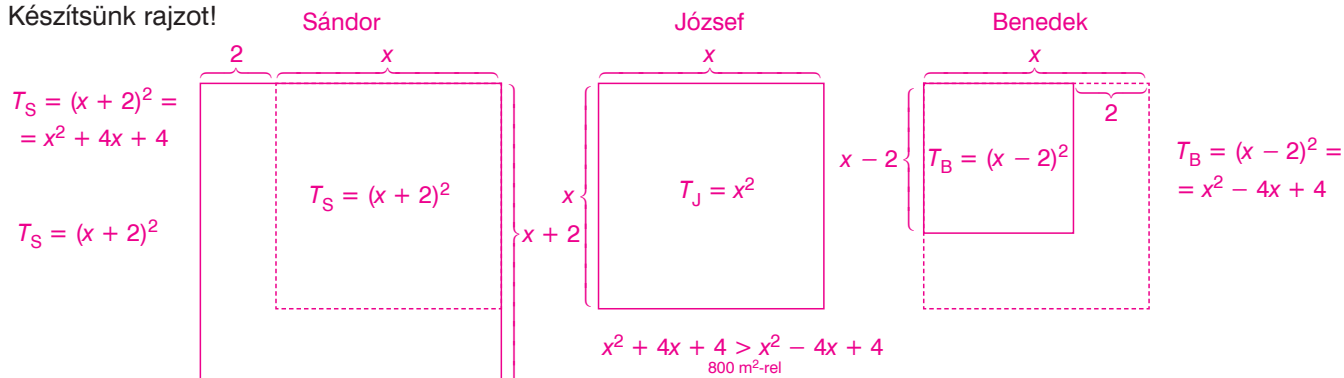
$$T = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$$

2. Írjuk be a hiányzó algebrai kifejezéseket szorzat és összeg alakban is!



3. Sándornak 2 méterrel hosszabb, Benedeknek 2 méterrel rövidebb oldalhosszúságú négyzet alakú kertje van, mint Józsefnek. Sándor kertjének területe 800 m²-rel nagyobb Benedek kertjénél. Hány méter hosszúságú József kertjének oldala? Hány hektár területű József kertje?

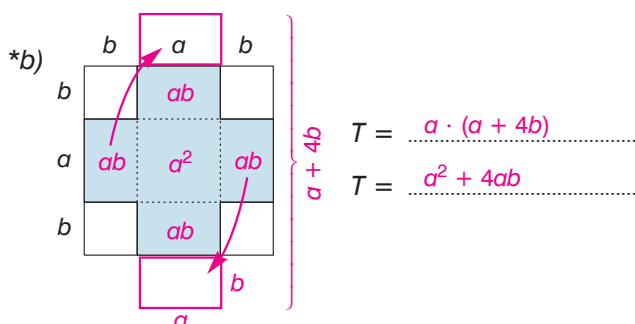
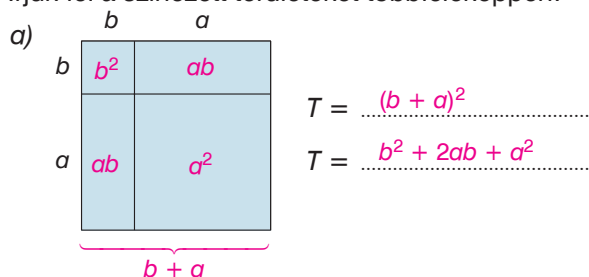
Készítsünk rajzot!



Ellenőrzés: $102^2 = 10404$
 $98^2 = 9604$
800

József kertjének oldala 100 méter, a kert területe 1 ha.

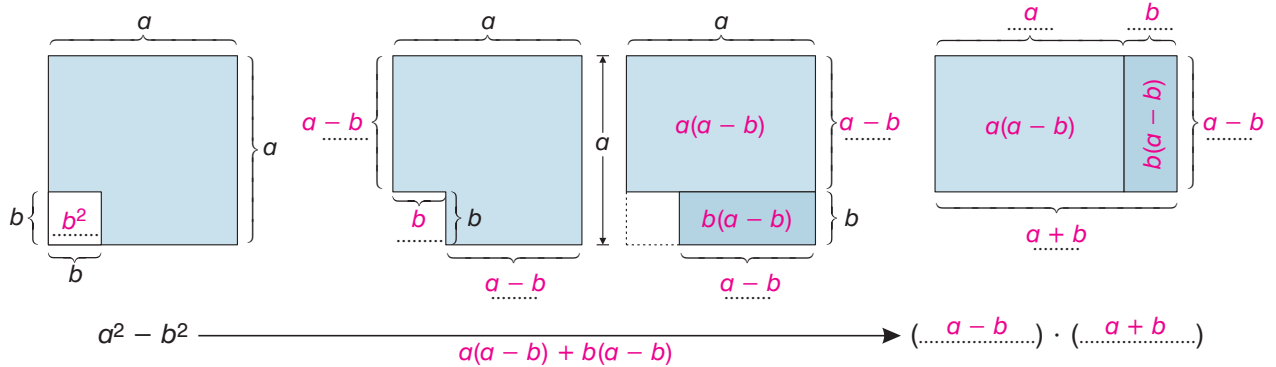
4. Írjuk fel a színezett területeket többféleképpen!



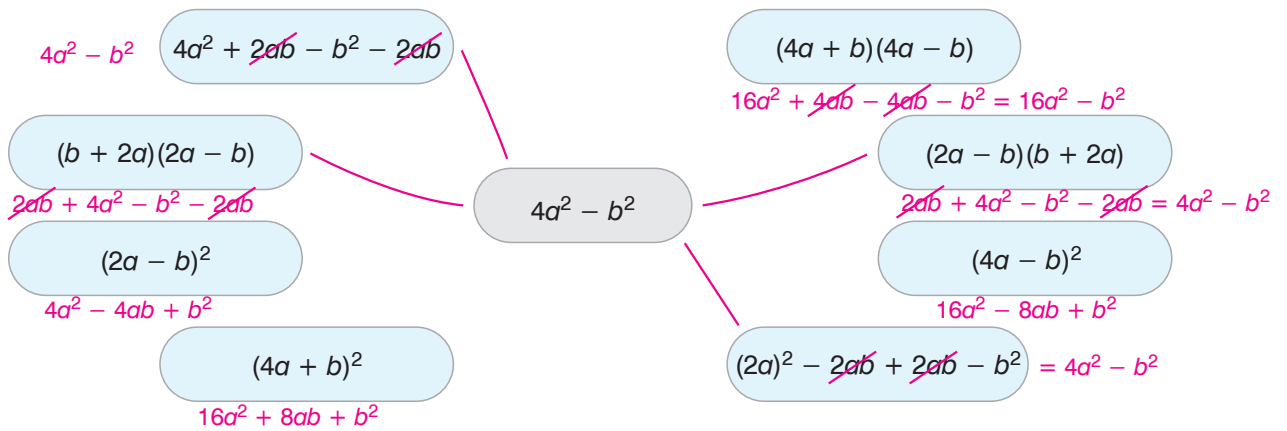


Összeg és különbség szorzata (Kiegészítő anyag)

1. Írjuk a négyzet átdaraboláshoz a kipontozott helyre a megfelelő kifejezéseket!



2. Kössük össze a szürke mezőben álló algebrai kifejezéssel a vele egyenlő algebrai kifejezéseket!



3. Töltsük ki a táblázatot szorzat és összeg alakban is!

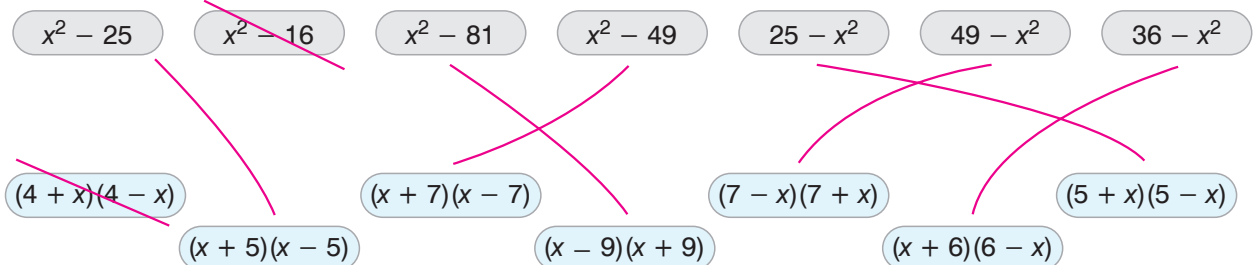
a)

·	$x + 1$	$x - 1$
$x + 1$	$(x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1$	$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$
$x - 1$	$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$	$(x - 1)(x - 1) = x^2 - 2x + 1$

b)

·	$+b - a$	$-b - a$
$-a + b$	$(-a + b)(b - a) = (-a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(-a + b)(-b - a) = (-a + b)(-a - b) = (-a + b)(-a - b) = a^2 - b^2$
$a - b$	$(a - b)(b - a) = -a^2 + 2ab - b^2$	$(a - b)(-b - a) = (a - b)(-b - a) = -a^2 + b^2$

4. Kössük össze az egyenlő algebrai kifejezéseket! Húzzuk át a kakukktojásokat!



5. Számoljunk a példa alapján: $17 \cdot 23 = (20 - 3)(20 + 3) = 20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391!$

$69 \cdot 71 = (70 - 1)(70 + 1) = 4900 - 1 = 4899$ $43 \cdot 37 = (40 + 3)(40 - 3) = 1600 - 9 = 1591$
 $55 \cdot 65 = (60 - 5)(60 + 5) = 3600 - 25 = 3575$ $57 \cdot 43 = (50 + 7)(50 - 7) = 2500 - 49 = 2451$
 $96 \cdot 104 = (100 - 4)(100 + 4) = 10000 - 16 = 9984$ $2002 \cdot 1998 = (2000 + 2)(2000 - 2) = 4\,000\,000 - 4 = 3\,999\,996$



Kiemelés, szorzattá alakítás

1. Húzzuk alá azonos színekkel azokat a betűket, amelyek több szóban is szerepelnek! A színekkel kiemelt betűket írjuk be ugyanazzal a színnel a táblázatba, és azt is, hogy hány szóban szerepelnek!

a) {Petőfi, Arany, Karinthy}

b) „Még nyílnak a völgyben a kerti virágok”

c) „Feketén bólingat az eperfa lombja”

d) „Nem mondhatom el senkinek,
Elmondom hát mindenkinek.”

	közös betűk						hány szóban szerepel					
a)	t	a	i	r	n	y	2	2	2	2	2	2
b)	g	y	n	a	v	l	3	2	2	3	2	2
	e	k	r	i			2	3	2	2		
c)	f	e	t	n	b	l	2	2	2	2	2	2
	a						3					
d)	m	n	e	o	d	h	4	5	5	2	3	2
	k	l	t	i			2	2	2	2		

2. Végezzünk összevonást, majd kiemelést!

a)

$K = a + a + b + b = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)$

b)

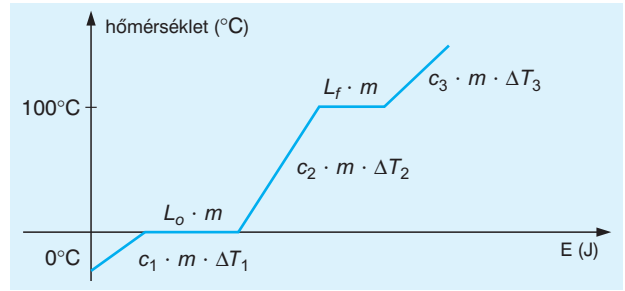
$A = a^2 + a^2 + ab + ab + ab + ab = 2a^2 + 4ab = 2a \cdot (a + 2b)$

c)

$A = 2T_{alap} + T_{palást} = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot a = 2r\pi \cdot (r + a)$



3. a) Az összefüggés annak a Q hőmennyiségnek a kiszámítását mutatja, amely adott m tömegű jég vízgőzzé alakításához szükséges (c_1 a jég, c_2 a víz, c_3 a vízgőz fajhője, L_o a jég olvadáshője, L_f a víz forráshője).



Mit tudunk kiemelni? Végezzük el a kiemelést!

$$Q = c_1 \cdot m \cdot \Delta T_1 + L_o \cdot m + c_2 \cdot m \cdot \Delta T_2 + L_f \cdot m + c_3 \cdot m \cdot \Delta T_3 = \dots$$

$$= m \cdot (c_1 \cdot \Delta T_1 + L_o + c_2 \cdot \Delta T_2 + L_f + c_3 \cdot \Delta T_3)$$

- b) Egy repülőgépmo­dell $v = 24 \text{ km/h}$ sebességgel repül. Először $t_1 = 10$ percig, majd $t_2 = 1/4$ órán át, végül $t_3 = 20$ percen keresztül gyakorlatozott vele a készítője. Hány kilométert tett meg ezalatt a mo­dell, ha mindig azonos volt a sebessége?

$$t_1 = 10 \text{ perc} = \frac{1}{6} \text{ h} \quad s_1 = v \cdot t_1 \quad s_1 = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{6} \text{ h} = 4 \text{ km} \quad s_3 = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{3} \text{ h} = 8 \text{ km}$$

$$t_2 = \frac{1}{4} \text{ h} \quad s_2 = v \cdot t_2 \quad s_2 = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{4} \text{ h} = 6 \text{ km}$$

$$t_3 = 20 \text{ perc} = \frac{1}{3} \text{ h} \quad s_3 = v \cdot t_3$$

A mo­dell útja képlettel: $s = s_1 + s_2 + s_3 = v \cdot t_1 + v \cdot t_2 + v \cdot t_3 = v \cdot (t_1 + t_2 + t_3)$

A mo­dell 18 kilométert repült. $s = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \text{ h} = 18 \text{ km}$

4. A lehetséges kiemelések elvégzésével írjuk fel az összegeket szorzat alakban!

a) $9a - 6 = 3 \cdot (3a - 2)$ b) $7 - 21a = 7 \cdot (1 - 3a)$

c) $2b + 5ab = b \cdot (2 + 5a)$ d) $3ab + b^2 = b \cdot (3a + b)$

e) $2ac - 3bc + c^2 = c \cdot (2a - 3b + c)$ f) $2ac - 4bc + 6c^2 = 2c \cdot (a - 2b + 3c)$

g) $5d^3 - 2d^2 = d^2 \cdot (5d - 2)$ h) $4d^2 - 3d^3 = d^2 \cdot (4 - 3d)$

i) $e^3 + e^2 + e = e \cdot (e^2 + e + 1)$ j) $3e + 12e^2 + 6e^3 = 3e \cdot (1 + 4e + 2e^2)$

- *5. A tagok megfelelő csoportosításával írjuk fel szorzat alakban az összegeket!

a) $x^2 + 3x + 4x + 12 = (x^2 + 3x) + (4x + 12) = x(x + 3) + 4(x + 3) = (x + 3)(x + 4)$

b) $x^2 + 3x + 5x + 15 = (x^2 + 3x) + (5x + 15) = x(x + 3) + 5(x + 3) = (x + 3)(x + 5)$

c) $x^2 + 7x - 5x - 35 = (x^2 + 7x) - (5x + 35) = x(x + 7) - 5(x + 7) = (x + 7)(x - 5)$

d) $x^2 + 9x + 18 = (x^2 + 3x) + (6x + 18) = x(x + 3) + 6(x + 3) = (x + 3)(x + 6)$

6. Szorzattá alakítás után egyszerűsítsük az algebrai kifejezéseket, ha $x \neq 0$; $x \neq -3$!

a) $\frac{3x + 9}{x + 3} = \frac{3(x + 3)}{x + 3} = 3$ b) $\frac{12 + 4x}{x + 3} = \frac{4x + 12}{x + 3} = \frac{4(x + 3)}{x + 3} = 4$

c) $\frac{x + 3}{x^2 + 3x} = \frac{x + 3}{x(x + 3)} = \frac{1}{x}$ d) $\frac{x}{x^2 + 3x} = \frac{x}{x(x + 3)} = \frac{1}{x + 3}$

7. Bandi nem tanulta meg a szorzattá alakítást, ezért egyest kapott. Miután felkészült és pótolta a hiányosságait, apukájának az alábbi módon bizonyította, hogy azt az egyest kettesnek is tekinthetik:

Tegyük fel, hogy $a = b$ / $\cdot a$

$a^2 = ab$ / $- b^2$

$a^2 - b^2 = ab - b^2$ / szorzattá alakítás

$(a - b)(a + b) = b(a - b)$ / : $(a - b)$ ha $a = b$, akkor $a - b = 0$.

$a + b = b$ / ha $a = b = 1$

$2 = 1$.

Hol követte el Bandi a hibát? A 4. sorban. Hiba: Bandi nullával osztott.



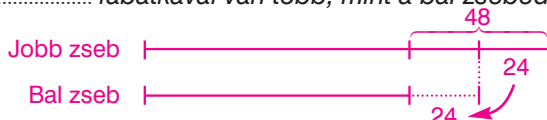
2. SZÖVEGES FELADATOK

Egyenletek alkalmazása feladatmegoldásban (Emlékeztető)

1. Pótoljuk a hiányzó számokat! Palcsi összes pénze a két zsebében van.

a) – Ha a jobb zsebemből 24 fabatkát áttennék a bal zsebembe, akkor mindkét zsebemben ugyanannyi pénzem lenne – szölt Palcsi Karcsihoz.

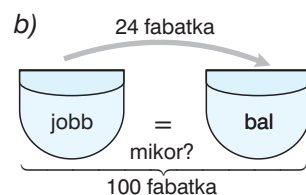
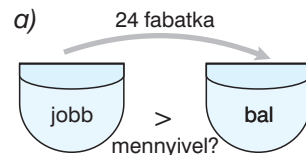
– Akkor a jobb zsebedben**48**..... fabatkával van több, mint a bal zsebedben – válaszolta Karcsi.



b) – Összesen 100 fabatkám van. Ha a jobb zsebemből 24 fabatkát áttennék a bal zsebembe, akkor mindkét zsebemben ugyanannyi pénzem lenne – szölt Palcsi Karcsihoz.

A pénz áttétele után**50**..... fabatka lenne Palcsi mindkét zsebében.

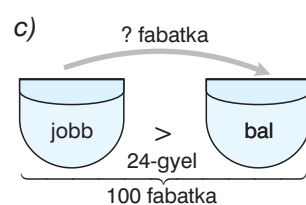
– Akkor a jobb zsebedben**74**....., a balban**26**..... fabatka van – válaszolta Karcsi.



c) – Összesen 100 fabatkám van, a jobb zsebemben 24-gyel több, mint a bal zsebemben – szölt Palcsi Karcsihoz.

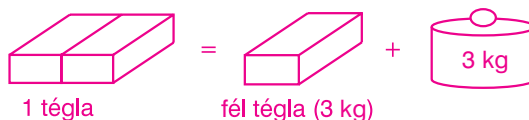
– Akkor a jobb zsebedből**12**..... fabatkát kell áttenni a balba, hogy mindkét zsebedben ugyanannyi pénzed legyen – válaszolta Karcsi.

Eredetileg Palcsi jobb zsebében**62**....., a balban**38**..... fabatka van.



2. a) Hány kilogramm egy téglá, ha a tömege 3 kg és még egy fél téglá? Rajzoljunk!

Egy téglá**6**..... kg.

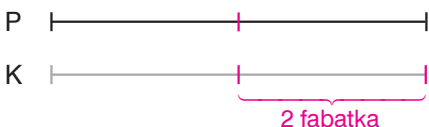


b) Hány kilogramm egy téglá, ha fél kilogramm és még egy fél téglá tömege 2,5 kg? Rajzoljunk!

Egy téglá**4**..... kg.



3. Ha Palcsinak kétszer annyi fabatkája van, mint Karcsinak, és Karcsinak kettővel kevesebb fabatkája van, mint Palcsinak, akkor hány fabatkájuk van külön-külön? Egészítsük ki a rajzot!



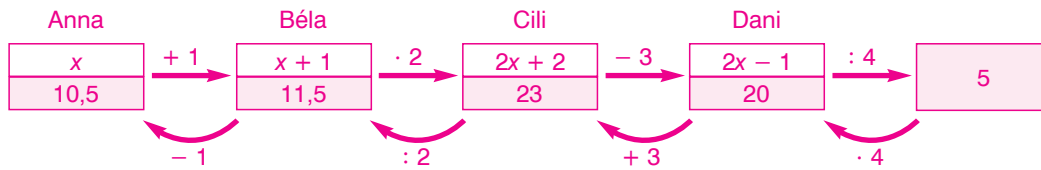
Palcsinak**4**..... fabatkája, Karcsinak**2**..... fabatkája van.

4. Julcsi 13 éves, 12 évvel idősebb, mint Panni. Hány évesek lesznek, amikor Julcsi hétszer, ötször, négyszer, háromszor, kétszer annyi idős lesz, mint Panni? Foglaljuk táblázatba az életkorukat!

Julcsi életkora	13	14	15	16	18	24		
Panni életkora	1	2	3	4	6	12		
Hányszorosa Julcsi életkora Panniénak?	13-szoros	7-szeres	5-szörös	4-szeres	3-szoros	2-szeres		

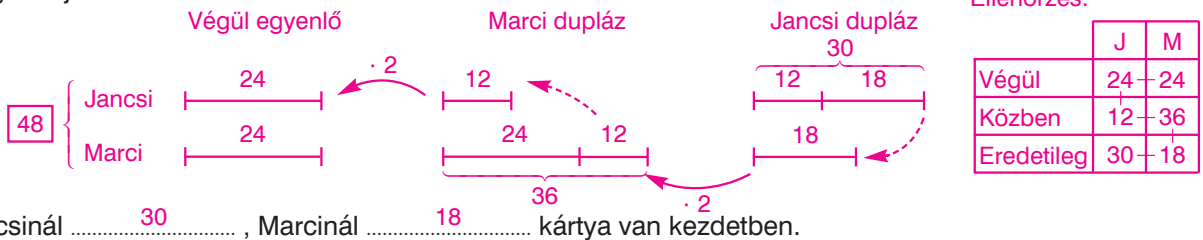


5. Anna gondolt egy számot, majd hozzáadott 1-et, az eredményt megsúgta Bélának. Béla ezt a számot megszorozta 2-vel, a szorzatot leírta egy papírra, és odaadta Cilinek. Cili a papíron levő számból kivont 3-at, és a különbséget megmondta Daninak. Dani a Cilitől hallott számot elosztotta 4-gyel, így 5-öt kapott. Egészítsük ki a mondatot!



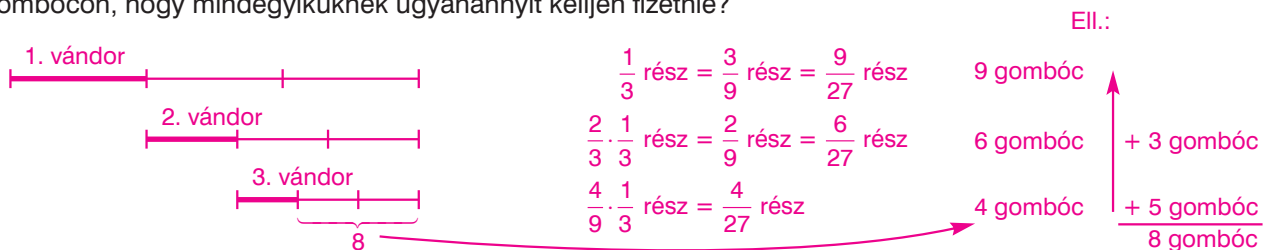
Cili Daninak a 20 számot mondta. Béla a papírra 23-t írt. Anna a 10,5-re gondolt.

6. Jancsi és Marci versenyautó-kártyákkal játszanak. Ha Jancsi a nála levő kártyákból megduplázná a Marcinál levő kártyák számát, majd ezután Marci a nála levőkből megduplázná a Jancsinál levőket, akkor mindegyiküknél ugyanannyi kártya lenne. Hány kártya van kezdetben Jancsinál és Marcinál, ha összesen 48 kártyával játszanak? **Gondolkozzunk visszafelé!**



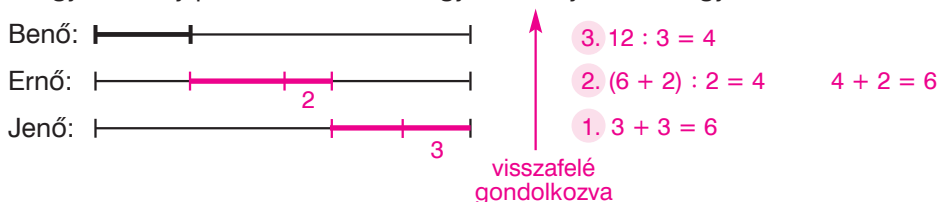
Jancsinál 30, Marcinál 18 kártya van kezdetben.

7. Három vándor betért egy fogadóba, ahol vacsorát és szállást kértek. A fogadós közölte, hogy csak egy szobát tud adni, vacsorára pedig csak gombócot tud nekik készíteni. A három vándor felment a szobába, de a fáradtságtól rögtön elaludtak. A fogadós felvitt nekik egy tál gombócot, és csendben letette az asztalra. Felébredt az egyik vándor, megette a tálban lévő gombócok harmadát, majd elaludt. Felébredt a másik vándor, ő is megette a tálban lévő gombócok harmadát, majd elaludt. Felébredt a harmadik vándor, ő is megette a tálban lévő gombócok harmadát, majd elaludt. Reggel hogyan osztozzanak a megmaradt nyolc gombócon, hogy mindegyiküknek ugyanannyit kelljen fizetnie?



Az elsőként felébredő vándornak nem jár, a másodiknak 3 gombóc, a harmadiknak 5 gombóc jár még reggel.

8. Nagyi almás palacsintával várta három unokáját. Elsőnek Benő érkezett meg, és megette a palacsinták negyedét. Másodikként Ernő jött, aki megette a megmaradt palacsinták harmadát és még két palacsintát. Utoljára Jenő érkezett, ő megette a megmaradt palacsinták felét és még hármat; így az összes palacsinta elfogyott. Hány palacsintát sütött Nagyi, és hányat ettek a gyerekek külön-külön? Egészítsük ki a rajzot!



Jenő 6 palacsintát evett.

Ha Ernő nem evett volna meg még két palacsintát, akkor 8 palacsintát hagyott volna Jenőnek, ami az Ernő által talált palacsinták 2/3 része.

Ernő 6 palacsintát, Benő 4 palacsintát evett meg, Nagyi összesen 16 palacsintát sütött.



Hány éves a kapitány?

1. Peti és édesapja között a korkülönbség 36 év. Hány éves korában lesz Peti feleannyi idős, mint az édesapja?

Legyen akkor Peti x éves.

Peti: x

Apa: $x + 36$

$$x = \frac{x + 36}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2x = x + 36 \quad / - x$$

$$x = 36$$

Peti: 36 éves

Apa: 72 éves.

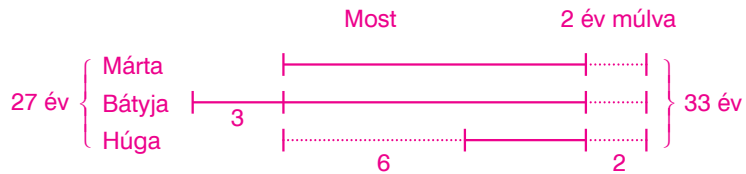
Válasz: Peti 36 éves korában feleannyi idős, mint a 72 éves édesapja.

2. a) Márta 3 évvel fiatalabb a bátyjánál, és 6 évvel idősebb a húgánál. Hárman együtt 27 évesek. Mennyi most a három gyerek átlagéletkora? Mennyi lesz a három gyerek átlagéletkora két év múlva?

Átlagéletkoruk:

$$\text{most } \frac{27}{3} = 9$$

$$2 \text{ év múlva } \frac{33}{3} = 11.$$



A három gyerek átlagéletkora most 9 év, két év múlva 11 év lesz.

- b) Vera 2 évvel fiatalabb a nővérénél, és 5 évvel idősebb az öccsénél. Együtt 39 évesek. Hány évesek a gyerekek?

	Vera	Nővére	Öccse	Összesen	
Életkor:	x	$x + 2$	$x - 5$	39	Ell.: $14 + 16 + 9 = 39$

$$x + x + 2 + x - 5 = 39$$

$$3x - 3 = 39 \quad / + 3$$

$$3x = 42$$

$$x = 14$$

Vera 14, a nővére 16, az öccse 9 éves.

3. Tamás kiszámolta, hogy a két testvérének az átlagéletkora 6 év. Tamás apukája kiszámolta, hogy gyermekeinek átlagéletkora 8 év. Hány éves Tamás? Hány évesek lehetnek a testvérei, ha mindkettőjük életkora prímszám?

Tamás testvéreinek átlagéletkora: 6 év
életkoruk összege: 12 év

A három testvér átlagéletkora: 8 év
életkoruk összege: 24 év

Tamás életkora: $24 \text{ év} - 12 \text{ év} = 12 \text{ év}$.

A testvérek életkora:	1	2	3	4	5	6
	11	10	9	8	7	6

Válasz: Tamás 12 éves, testvérei 5 és 7 évesek.

4. Edit most háromszor annyi idős, mint a testvére. Öt év múlva már csak kétszer annyi idős lesz, mint a testvére. Hány évesek most?

	Most	5 év múlva
Edit életkora	$3x$	$3x + 5$
Edit testvérének életkora	x	$x + 5$

$$x + 5 < 3x + 5$$

2-szer

$$2(x + 5) = 3x + 5$$

$$2x + 10 = 3x + 5 \quad / - 2x$$

$$10 = x + 5 \quad / - 5$$

$$5 = x$$

Ell.: Edit 15 20
testvére 5 10 $\cdot 2$

Válasz: Edit most 15 éves, testvére pedig 5 éves.



5. Feri 36 éves. Háromszor annyi idős, mint Teri volt akkor, amikor Feri annyi idős volt, mint Teri most. Hány éves most Teri?

	most	x éve
Feri	36	36 - x
Teri	36 - x	36 - 2x

$$\begin{aligned}
 36 &> 36 - 2x \\
 &\cdot 3 \\
 12 &= 36 - 2x \quad / - 36 \\
 -24 &= -2x \quad / : (-2) \\
 12 &= x
 \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

	most	akkor
Feri	36	24
Teri	24	12

Teri életkora most²⁴..... év.

6. Kata két éve háromszor annyi idős volt, mint a testvére volt akkor. Három év múlva már csak kétszer annyi idős lesz, mint a testvére lesz akkor. Hány évvel idősebb Kata a testvérénél? Töltsük ki a táblázatot!

	2 éve	most	3 év múlva
Kata testvérének életkora	x	x + 2	x + 5
Kata életkora	3x	3x + 2	3x + 5

$$\begin{aligned}
 3x + 5 &> x + 5 \\
 &\cdot 2 \\
 3x + 5 &= 2(x + 5) \\
 3x + 5 &= 2x + 10 \quad / - 2x \\
 x + 5 &= 10 \quad / - 5 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

	2 éve	most	3 év múlva
Testvér	5	7	10
Kata	15	17	20

Kata most¹⁷..... éves, a testvére⁷..... éves, Kata¹⁰..... évvel idősebb a testvérénél.

- *7. Csaba így gondolkodott:

Amikor bölcsődébe kezdtem járni, apa tizenháromszor annyi idős volt, mint én. Amikor óvodás lettem, apa már csak kilencszer annyi idős volt, mint én. Amikor iskolába kezdtem járni, apa már csak ötször annyi, 7 éve – amikor gimis lettem – már csak háromszor annyi idős volt, mint én. Amikor 5 év múlva diplomát kapok, apa pontosan kétszer annyi idős lesz, mint én. Lehet, hogy egyszer egyidősek leszünk?

Hány éves most Csaba?

Ellenőrzés:

	7 éve	most	5 év múlva
Csaba	x	x + 7	x + 12
Apa	3x	3x + 7	3x + 12

$$\begin{aligned}
 x + 12 &> 3x + 12 \\
 &\cdot 2 \\
 2x + 24 &= 3x + 12 \quad / - 2x \\
 24 &= x + 12 \quad / - 12 \\
 12 &= x
 \end{aligned}$$

	Bölcsőde	Óvoda	Iskola	Gimn.	Most	Diploma
Csaba	2	3	6	12	19	24
Apa	26	27	30	36	43	48
A - Cs	24	24	24	24	24	24
$\frac{A}{Cs}$	13	9	5	3	$\frac{43}{19}$	2

Csaba és apukája életkorának a^{különbsége}..... nem változhat, a(z)^{hányadosa}..... változik.

Az állandó korkülönbség miatt soha nem lehetnek egyidősek.

Válasz: Csaba most 19 éves.



Gondoltam egy számra...

1. Soroljuk fel azokat a kétjegyű számokat, amelyekre igaz, hogy az egyik jegye

a) négyvel nagyobb, mint a másik: 15; 51; 26; 62; 37; 73; 40; 48; 84; 59; 95

b) négyszer akkora, mint a másik: 14; 41; 28; 82

2. Egy kétjegyű szám jegyeinek különbsége 4. Ha a tízesek számát 5-tel növeljük, az egyesek számát 5-tel csökkentjük, majd az eredeti és a változtatott kétjegyű számokat összeadjuk, a legnagyobb kétjegyű prímszámot kapjuk. Mi volt az eredeti kétjegyű szám? Van-e felesleges adat?

	tízesek	egyesek	szám	
eredeti	x	$x + 4$	$10x + (x + 4)$	$= 11x + 4$
változtatott	$x + 5$	$(x + 4) - 5$	$10(x + 5) + (x - 1)$	$= 10x + 50 + x - 1 = 11x + 49$

$$(11x + 4) + (11x + 49) = 97$$

$$22x + 53 = 97 \quad / - 53$$

$$22x = 44 \quad / : 22$$

$$x = 2$$

eredeti: 26

változtatott: 71

Ellenőrzés más megoldással:

A kétjegyű szám: y

változtatott: $y + 50 - 5$

$$y + (y + 50 - 5) = 97$$

$$2y + 45 = 97 \quad / - 45$$

$$2y = 52 \quad / : 2$$

$$y = 26$$

A kisebb kétjegyű szám: 26, a nagyobb kétjegyű szám: 71.

Felesleges adat lehet: a két számjegy különbsége

3. Egy kétjegyű szám egyik jegye 3-mal nagyobb, mint a másik. Ha ehhez a kétjegyű számhoz hozzáadjuk a jegyeinek felcserélésével kapott számot, 121-et kapunk. Mely kétjegyű számokat adtuk össze?

a) Írjuk le az összes olyan kétjegyű számot, amelyben az egyik jegy 3-mal nagyobb, mint a másik!

14; 41; 25; 52; 30; 36; 63; 47; 74; 58; 85; 69; 96

b) Húzzuk alá azokat a kétjegyű számokat, amelyeknek az első jegye nagyobb 3-mal!

c) A felírt számok közül válasszuk ki azokat, amelyekre igaz a feladat állítása! 47 + 74 = 121

Második megoldás:

d) A táblázat kitöltése után írjunk fel egyenletet, majd oldjuk meg!

	tízesek	egyesek	szám	
eredeti	x	$x + 3$	$10x + x + 3$	$= 11x + 3$
felcserélt	$x + 3$	x	$10(x + 3) + x$	$= 10x + 30 + x = 11x + 30$

$$(11x + 3) + (11x + 30) = 121$$

$$22x + 33 = 121 \quad / - 33$$

$$22x = 88 \quad / : 22$$

$$x = 4$$

A szám: 47

Felcserélés után: 74

Összegük: 121

Válasz: A 47-et és a 74-et adtuk össze.



4. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 11. Ha a két számjegyet felcseréljük, az eredeti szám kétszeresénél 7-tel nagyobb számot kapunk. Mi az eredeti kétjegyű szám?

	tízesek	egyesek	szám	
eredeti	x	$11 - x$	$10x + 11 - x$	$= 9x + 11$
felcserélt	$11 - x$	x	$10(11 - x) + x$	$= 110 - 10x + x = 110 - 9x$

$$2 \cdot (9x + 11) < 110 - 9x$$

7-tel

$$\begin{array}{r} 18x + 22 + 7 = 110 - 9x \\ 27x + 29 = 110 \\ 27x = 81 \\ x = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} / + 9x \\ / - 29 \\ / : 27 \end{array}$$

Ellenőrzés: Az eredeti szám: 38.

A felcserélt: 83.

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 38 < 83 \\ 76 < 83 \end{array}$$

7-tel

Válasz: Az eredeti kétjegyű szám a 38.

5. Géza a következő házi feladatot kapta: Egy kétjegyű szám jegyeinek aránya 2:3. Ha a számjegyeket felcseréljük, az eredeti szám felénél 21-gyel nagyobb számot kapunk. Mi az eredeti kétjegyű szám?

Így oldotta meg:

	tízesek	egyesek	szám
eredeti	$2x$	$3x$	$23x$
felcserélt	$3x$	$2x$	$32x$

$$\begin{array}{l} \frac{23x}{2} < 32x \quad \text{A } 32x \text{ 21-gyel nagyobb, mint a } \frac{23x}{2}. \\ \frac{23x}{2} + 21 = 32x \quad / - 11,5x \\ 21 = 20,5x \quad / : 20,5 \\ 1,024 \approx x \end{array}$$

Mivel a $2x$ számjegyet jelent, a feladat nem megoldható.

A házi feladat ellenőrzésénél meglepődve hallotta, hogy a feladatnak van megoldása.

A feladat folytatása:

	tízesek	egyesek	szám
eredeti	$3x$	$2x$	$30x + 2x = 32x$
felcserélt	$2x$	$3x$	$20x + 3x = 23x$

$$\begin{array}{l} \frac{32x}{2} < 23x \quad \text{A } 23x \text{ nagyobb 21-gyel, mint a } \frac{32x}{2}. \\ 16x + 21 = 23x \quad / - 16x \\ 21 = 7x \quad / : 7 \\ 3 = x \end{array}$$

Ellenőrzés: Az eredeti szám: 96. } $\frac{96}{2} < 69$
 A felcserélt: 69. } $48 < 69$
21-gyel

Válasz: Az eredeti kétjegyű szám a 96.



Fogócska matematikus szemmel

1. Pali, Vali és Lali testvérek, az óvodától 1,5 km-re, az iskolától 2400 méterre laknak. Pali az óvodába reggel háromnegyed 7-kor indul, és 7 óra 10-kor érkezik. Vali az iskolába negyed 8-kor indul, és háromnegyed 8 előtt 6 perccel érkezik. Lali biciklivel 7 óra 25-kor indul, és hűgánál 2 perccel előbb érkezik az iskolába. Hány órán át tart a gyerekeknek az út? Mekkora az egyes gyerekek átlagsebessége? Töltsük ki a táblázatot!

	indul	érkezik	idő (h)	út (km)	átlagsebesség (km/h)
Pali	6 ^h 45'	7 ^h 10'	$\frac{25}{60} = \frac{5}{12}$	$1,5 = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} : \frac{5}{12} = \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$
Vali	7 ^h 15'	7 ^h 39'	$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$	$2,4 = \frac{12}{5}$	$\frac{24}{10} : \frac{2}{5} = \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{2} = 6$
Lali	7 ^h 25'	7 ^h 37'	$\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$	$2,4 = \frac{12}{5}$	$\frac{24}{10} : \frac{1}{5} = \frac{12}{5} \cdot 5 = 12$

2. Berciék utcájában a fák egyenlő távolságra vannak egymástól. Az első fától indulva Berci és Marci versenyt futnak: Berci 6 másodperc alatt ér el a hatodik fáig, Marci 7 másodperc alatt a hetedik fáig. Ki nyeri a versenyt, ha a nyolcadik fánál van a cél? Rajzoljunk! egy köz hossza: x



$$\left\{ \begin{array}{l} 5x \quad 6 \text{ sec alatt} \\ x \quad 6 \text{ sec alatt} \end{array} \right\}$$

$$\frac{6}{5} > \frac{7}{6}$$

Egy köz megtételéhez Marcinak kell a kevesebb idő, így ő ér előbb a célba.



$$\left\{ \begin{array}{l} 6x \quad 7 \text{ sec alatt} \\ x \quad 7 \text{ sec alatt} \end{array} \right\}$$

A versenytMarci..... nyeri.

3. a) Egy szalámival megrakott kamiont indítanak Szegedről Budapestre $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel. Később észreveszik, hogy a szállítólevél Szegeden maradt, ezért a kamion indulása után 20 perccel egy $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ egyenletes sebességgel haladó személygépkocsival a szállítmány után küldik. Mennyi idő múlva és Szegedtől milyen távolságra éri utol a személygépkocsi a kamiont?

	sebesség (km/h)	idő (h)	út (km)
kamion	60	$x + \frac{1}{3}$	$60 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$
személygépkocsi	90	x	$90x$

$$60 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) = 90x$$

$$\text{Ell.: } s_k = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \text{h}$$

$$60x + 20 = 90x \quad / - 60x$$

$$s_k = 60 \text{ km}$$

$$20 = 30x \quad / : 30$$

$$s_{sz} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{2}{3} \text{h}$$

$$\frac{2}{3} = x$$

$$s_{sz} = 60 \text{ km}$$

A személygépkocsi a kamiont Szegedtől60 km..... távolságra,

a személygépkocsi indulása után40 perc..... múlva éri utol.

$$90 \cdot \frac{2}{3} = 60$$

- b) Budapestről $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ egyenletes sebességgel elindul egy teherautó Nagykanizsára, ugyanakkor Nagykanizsáról $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ egyenletes sebességgel elindul egy személyautó Budapestre. Mennyi idő múlva és Budapesttől milyen távolságra találkoznak, ha Nagykanizsa Budapesttől 216 km távolságra van?

$$48 \cdot 1,8 = 86,4 \text{ (km)} \quad 72 \cdot 1,8 = 129,6 \text{ (km)}$$



$$48x + 72x = 216$$

$$120x = 216$$

$$x = \frac{216}{120}$$

$$x = 1,8$$

$$1,8 \text{ h} = 1 \text{ h } 48 \text{ perc.}$$

$$\text{Eil.: } 86,4 + 129,6 = 216.$$

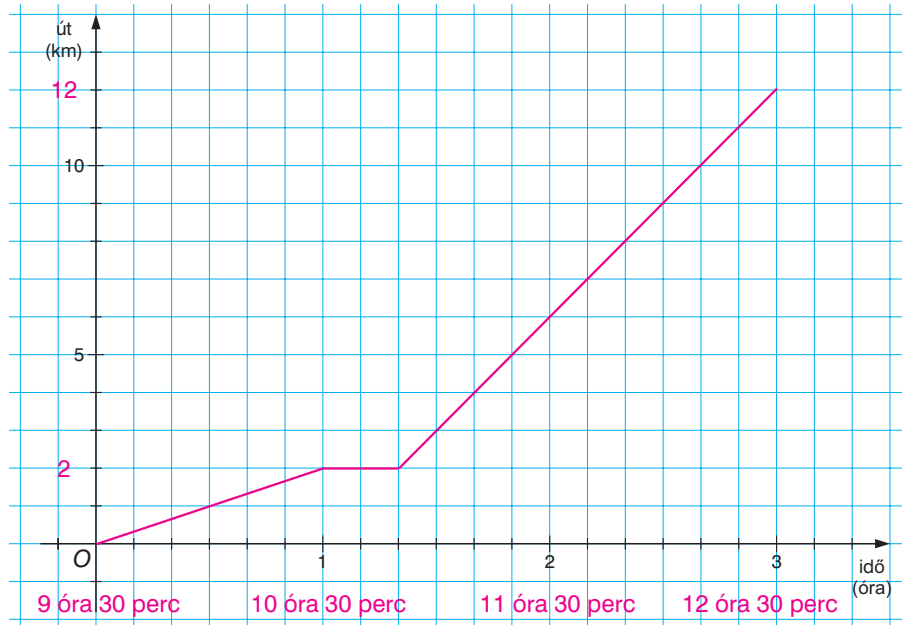
Válasz:108 perc múlva és Budapesttől 86,4 km-re találkoznak......



4. Délelőtt 9 óra 30-kor 12 km hosszúságú gyalogtúrára indultunk. Az ebédet fél 1-re rendeltük meg. Az út első 2 kilométere meredek emelkedő volt, amelyen csak az egész útra tervezett átlagsebesség felével tudtunk haladni, és az emelkedő végére felérve a fáradtság miatt még egy 20 perces pihenőt is tartottunk.

Milyen átlagsebességgel kell a hátralévő úton haladnunk, hogy az ebédre pontosan megérkezzünk?

Rajzoljuk meg a mozgás grafikonját!



A tervezett átlagsebesség:

$$v_{\text{átlag}} = \frac{12 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

2 km-t 1 óra alatt $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tettünk meg,

10 km-t $1 \frac{2}{3}$ óra alatt $10 : \frac{5}{3} \text{ h} = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel kell megtennünk.

Válasz: A hátralévő úton $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel kell haladnunk.

5. Atlétikaedzésen a 400 m hosszú kör alakú pályán Mari $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, Feri $22 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ egyenletes sebességgel futott.
- a) Ha a pálya ugyanazon pontjáról azonos irányba indultak, hány perc alatt körözte le először Feri Marit? Hány kört tettek meg ezalatt?

	v (km/h)	t (h)	s (km)
Mari	18	x	$18x$
Feri	22	x	$22x$

$$400 \text{ m} = 0,4 \text{ km}$$

$$22x = 18x + 0,4 \quad / - 18x$$

$$4x = 0,4$$

$$x = 0,1$$

$$0,1 \text{ h} = 6 \text{ perc}$$

$$\text{Mari útja: } 18 \cdot 0,1 = 1,8 \text{ (km)}$$

$$\text{Feri útja: } 22 \cdot 0,1 = 2,2 \text{ (km)}$$

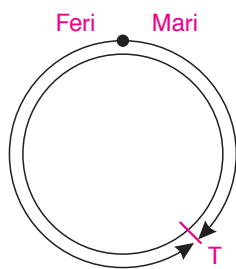
$$\text{Mari: } \frac{1800}{400} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ kör}$$

$$\text{Feri: } \frac{2200}{400} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ kör}$$

Feri Marit 6 perc perc alatt körözte le először.

Ezalatt Feri 5 és fél kört, Mari 4 és fél kört futott.

- b) Ha a pálya ugyanazon pontjáról ellentétes irányba indultak, hány perc múlva találkoznak?



Találkoznak

$$18x + 22x = 0,4$$

$$40x = 0,4$$

$$x = 0,01$$

$$0,01 \text{ h} = 0,6 \text{ perc}$$

$$s_M = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,01 \text{ h} = 0,18 \text{ km} = 180 \text{ m}$$

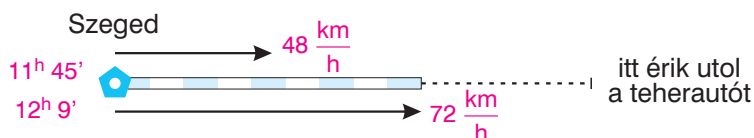
$$s_F = 22 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,01 \text{ h} = 0,22 \text{ km} = 220 \text{ m} \quad \left. \vphantom{s_M} \right\} 400 \text{ m}$$

Válasz: 0,6 perc, azaz 36 másodperc múlva találkoznak.



SZÖVEGES FELADATOK

*6. Dél előtt háromnegyed 12-kor $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel elindul egy teherautó Szegedről Budapestre. Egy személygépkocsi $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel 12 óra 9 perckor indul utána. Hány órakor és Szegedtől milyen távolságra éri utol a teherautót a személygépkocsi?



$$12 \text{ óra } 9 \text{ perc} - 11 \text{ óra } 45 \text{ perc} = 24 \text{ perc} = \frac{24}{60} \text{ óra} = 0,4 \text{ óra}$$

	$v \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$	$t \left(\text{h} \right)$	$s \left(\text{km} \right)$
teherautó	48	$x + 0,4$	$48(x + 0,4)$
személygépkocsi	72	x	$72x$

$$48(x + 0,4) = 72x$$

$$48x + 19,2 = 72x \quad / - 48x$$

$$19,2 = 24x \quad / : 24 \quad 0,8 \text{ óra} = 48 \text{ perc}$$

$$0,8 = x \quad 0,8 \text{ óra} + 0,4 \text{ óra} = 1,2 \text{ óra} = 72 \text{ perc}$$

$$11 \text{ óra } 45 \text{ perc} + 72 \text{ perc} = 11 \text{ óra } 117 \text{ perc} = 12 \text{ óra } 57 \text{ perc}$$

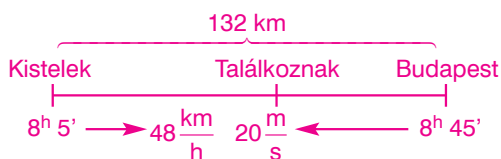
$$12 \text{ óra } 9 \text{ perc} + 48 \text{ perc} = 12 \text{ óra } 57 \text{ perc}$$

Ellenőrzés:

$$\left. \begin{aligned} s_t &= 48 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,2 \text{ h} = 57,6 \text{ km} \\ s_{sz} &= 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,8 \text{ h} = 57,6 \text{ km} \end{aligned} \right\} s_t = s_{sz}$$

Válasz: A személygépkocsi 12 óra 57 perckor, Szegedtől 57,6 km-re éri utol a teherautót.

*7. Reggel 8 óra 5 perckor $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel elindul egy teherautó Kistelekről Budapestre. Háromnegyed kilenckor egy személygépkocsi Budapestről Kistelekre indul $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ átlagsebességgel. Hány órakor és Kistelektől milyen távolságra találkoznak, ha Budapest és Kistelek között 132 km a távolság?



$$20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$8 \text{ óra } 45 \text{ perc} - 8 \text{ óra } 5 \text{ perc} = 40 \text{ perc} = \frac{2}{3} \text{ h}$$

	$v \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$	$t \left(\text{h} \right)$	$s \left(\text{km} \right)$
teherautó	48	$x + \frac{2}{3}$	$48 \left(x + \frac{2}{3} \right)$
szgk.	72	x	$72x$

$$48 \left(x + \frac{2}{3} \right) + 72x = 132$$

$$48x + 32 + 72x = 132$$

$$120x + 32 = 132 \quad / - 32$$

$$120x = 100 \quad / : 120$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{6} \text{ h} = 50 \text{ min} \quad \frac{5}{6} \text{ h} + \frac{2}{3} \text{ h} = \frac{9}{6} \text{ h} = \frac{3}{2} \text{ h} = 1 \frac{1}{2} \text{ h}$$

Ell.: $s_t = 48 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{3}{2} \text{ h} = 72 \text{ km}$

$$\left. \begin{aligned} s_{sz} &= 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{5}{6} \text{ h} = 60 \text{ km} \end{aligned} \right\} 132 \text{ km}$$

$$8 \text{ óra } 5 \text{ perc} + 1 \text{ óra } 30 \text{ perc} = 9 \text{ óra } 35 \text{ perc}$$

$$8 \text{ óra } 45 \text{ perc} + 50 \text{ perc} = 9 \text{ óra } 35 \text{ perc}$$

Válasz: 9 óra 35 perckor, Kistelektől 72 km-re találkoznak.



Méregkeverés – egyenletekkel

1. Egy kereskedő a két legkedveltebb gumicukorból keveréket állított össze, és azt kimérve árulja. Mennyiért adjon 100 gramm cukrot, ha a keverékben 8 kg macis és 12 kg törpés cukor van, és a macis cukorból 1 kg 1500 Ft-ba, a törpésből 1 kg 1800 Ft-ba került? (A kereskedő se drágábban, se olcsóbban nem szeretné adni a keveréket, mint az eredeti ára.)

	tömeg (kg)	egységár (Ft/kg)	vételár (Ft)		Ell.:
macis	8	1500	12 000		$12\ 000 + 21\ 600 = 33\ 600$
törpés	12	1800	21 600	$33\ 600 = 20x$	$20 \cdot 1680 = 33\ 600$
keverék	20	x	20x	$1680 = x$	

A keverék kilogrammját1680..... forintért árulja, 100 g keverék ára168..... forint.

2. A tengerek sótartalma között nagy különbségek lehetnek. Néhányuk az átlagos sótartalmát táblázatba foglaltuk. Töltsük ki a táblázat hiányzó részeit! (Használhatunk zsebszámológépet!)

	Átlagos sótartalom	20 tonna vízből hány kilogramm só lehet lepárolni?	Hány kilogramm vízből lehet 1 kg só kinyerni?
Balti-tenger	1%	$20\ t \cdot 0,01 = 0,2\ t = 200\ kg$	$1\ kg : 0,01 = 100\ kg$
Kaspi-tenger	1,2%	$20\ t \cdot 0,012 = 0,24\ t = 240\ kg$	$1\ kg : 0,012 = 83\frac{1}{3}\ kg$
Adriai-tenger	3,5%	$20\ t \cdot 0,035 = 0,7\ t = 700\ kg$	$1\ kg : 0,035 \approx 28,57\ kg$
Vörös-tenger	4,1%	$20\ t \cdot 0,041 = 0,82\ t = 820\ kg$	$1\ kg : 0,041 \approx 24,39\ kg$
Holt-tenger	32%	$20\ t \cdot 0,32 = 6,4\ t = 6400\ kg$	$1\ kg : 0,32 = 3,125\ kg$

- *3. A frissen szedett vargányagomba víztartalma 90%, a szárított vargánya víztartalma azonban csak 10%.

a) Hány dekagramm szárított vargányát készíthetünk 5 kg frissen szedett gombából?

friss: víztartalom: $5\ kg \cdot 0,9 = 4,5\ kg$
rosttartalom: $5\ kg \cdot 0,1 = 0,5\ kg$ —————> Ez 90%-a a szárított vargányának.

szárított: $0,5\ kg : 0,9 = 0,5\ kg$ $0,5\ kg = 55,5\ dkg$

Válasz: $\approx 55,5\ dkg$ szárított vargányát készíthetünk 5 kg frissből.

b) Hány kilogramm frissen szedett gombából készíthetünk 1 kg szárított vargányát?

szárított: víztartalom: $1\ kg \cdot 0,1 = 0,1\ kg$
rosttartalom: $1\ kg \cdot 0,9 = 0,9\ kg$ —————> Ez 10%-a a frissnek.

friss gomba: $0,9\ kg \cdot 10 = 9\ kg$

Válasz:9 kg frissen szedett gombából lesz 1 kg szárított vargánya.

4. Fejes salátához savanyító öntetet készítünk. Hány deciliter 10%-os ecetet higítsunk fel fél liter vízzel, hogy 2%-os salátaöntetet kapjunk?

víz		ecet		öntet
.....5..... dl 0%-os	+	x dl 10%-os	=5 + x..... dl 2%-os

Ell.:
1,25 dl 10%-os ecet
0,125 dl tömény ecet.

Az oldott anyag:

$$\begin{array}{r}
 \dots\dots\dots 5 \cdot 0 \dots\dots\dots + \dots\dots\dots x \cdot 0,1 \dots\dots\dots = \dots\dots\dots (5 + x) \cdot 0,02 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots 0,1x = 0,1 + 0,02x \dots\dots\dots / - 0,02x \\
 \dots\dots\dots 0,08x = 0,1 \dots\dots\dots / : 0,08 \\
 \dots\dots\dots x = 1,25
 \end{array}$$

6,25 dl 2%-os ecet
0,125 dl tömény ecet

Válasz:1,25 dl 10%-os ecetet kell felhasználni a salátaöntethez.



5. Mennyi 36%-os sóoldatot kell a 100 gramm 30%-os sóoldathoz önteni, hogy 34%-os sóoldatot kapjunk?

$$\boxed{x \text{ g } 36\text{-os}} + \boxed{100 \text{ g } 30\text{-os}} = \boxed{(100 + x) \text{ g } 34\text{-os}}$$

Az oldott anyag:

$$0,36x \text{ g}$$

$$100 \cdot 0,3 \text{ g}$$

$$(100 + x) \cdot 0,34 \text{ g}$$

Az összefüggés egyenlettel felírva:

$$0,36x + 100 \cdot 0,3 = (100 + x) \cdot 0,34$$

$$0,36x + 30 = 34 + 0,34x \quad / - 30$$

$$0,36x = 4 + 0,34x \quad / - 0,34x$$

$$0,02x = 4 \quad / : 0,02$$

$$x = 200$$

Ellenőrzés:

oldott anyag

$$1. 200 \text{ g } 36\text{-os}$$

$$200 \cdot 0,36 \text{ g} = 72 \text{ g}$$

$$2. 100 \text{ g } 30\text{-os}$$

$$100 \cdot 0,3 \text{ g} = 30 \text{ g}$$

Keverék 300 g 34%-os

$$300 \cdot 0,34 \text{ g} = 102 \text{ g}$$

} 102 g

Válasz: 200 g 36%-os sóoldatot kell hozzáönteni.

6. Milyen töménységű cukoroldatot kapunk, ha 20 dkg 20%-os és 30 dkg 30%-os cukoroldatot összekeverünk?

$$\boxed{20 \text{ dkg } 20\text{-os}} + \boxed{30 \text{ dkg } 30\text{-os}} = \boxed{50 \text{ dkg } x\%}$$

Az oldott anyag:

$$20 \text{ dkg} \cdot 0,2 = 4 \text{ dkg}$$

$$30 \text{ dkg} \cdot 0,3 = 9 \text{ dkg}$$

$$50 \text{ dkg} \cdot \frac{x}{100} = \frac{x}{2} \text{ dkg}$$

$$4 + 9 = \frac{x}{2}$$

$$13 = \frac{1}{2}x \quad / \cdot 2$$

$$26 = x$$

Ellenőrzés:

$$\boxed{20 \text{ dkg} \cdot 0,2}$$

$$4 \text{ dkg}$$

+

$$\boxed{30 \text{ dkg} \cdot 0,3}$$

$$9 \text{ dkg}$$

=

$$\boxed{50 \text{ dkg} \cdot 0,26}$$

$$13 \text{ dkg}$$

Válasz: 26%-os cukoroldatot kapunk az összekeveréssel.

7. Egy laboratóriumban egy kísérlet elvégzéséhez 22%-os sósavra van szükség. Hány gramm 10%-os és hány gramm 30%-os sósavat kell összekeverni, hogy 120 gramm oldatot kapjunk?

$$\boxed{x \text{ g } 10\text{-os}} + \boxed{(120 - x) \text{ g } 30\%} = \boxed{120 \text{ g } 22\text{-os}}$$

$$x \cdot 0,1 + (120 - x) \cdot 0,3 = 120 \cdot 0,22$$

$$0,1x + 36 - 0,3x = 26,4$$

$$36 - 0,2x = 26,4 \quad / - 36$$

$$-0,2x = -9,6 \quad / : (-0,2)$$

$$x = 48$$

Az oldott anyag:

$$\boxed{48 \text{ g } 10\text{-os}}$$

$$4,8 \text{ g}$$

+

$$\boxed{72 \text{ g } 30\text{-os}}$$

$$21,6 \text{ g}$$

=

$$\boxed{120 \text{ g } 22\%}$$

$$26,4 \text{ g}$$

Válasz: 48 g 10%-os és 72 g 30%-os sósav kell a kísérlethez.



Együttes munkavégzés

1. Egy üres kerti medencét az első csapon keresztül 40 perc, a második csapon keresztül 60 perc alatt lehet teleengedni vízzel, míg a teli medence a lefolyón két óra alatt ürül ki.

	Az egészet egyedül ennyi idő alatt tölti fel vagy üríti ki	Egy időegység alatt ennyied részt tölt fel vagy ürít ki	A kérdéses idő alatt ennyied részt tölt fel vagy ürít ki
első csap	40 perc	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{x}{40}$ rész
második csap	60 perc	$\frac{1}{60}$ rész	$\frac{x}{60}$ rész
lefolyó	120 perc	$\frac{1}{120}$ rész	$\frac{x}{120}$ rész

- d) Ha mindkét csapot egyidőben nyitjuk meg, és a lefolyó zárva van, akkor a két csap együtt hány perc alatt tölti meg az üres medencét?

$$\frac{x}{40} + \frac{x}{60} = 1 \quad / \cdot 120 \quad \text{Ell.:} \quad \left. \begin{array}{l} 1. \text{ csap } \frac{24}{40} \text{ rész} = 0,6 \text{ rész} \\ 2. \text{ csap } \frac{24}{60} \text{ rész} = 0,4 \text{ rész} \end{array} \right\} 0,6 + 0,4 = 1$$

$$3x + 2x = 120$$

$$5x = 120$$

$$x = 24$$

Az üres medencét együtt 24 perc alatt töltik meg.

- b) Ha a lefolyó zárva van, és a második csapot 10 perccel később nyitjuk meg, mint az első, akkor hány perc alatt telik meg az üres medence?

$$\frac{x}{40} + \frac{x-10}{60} = 1 \quad / \cdot 120 \quad \text{Ell.:} \quad \left. \begin{array}{l} 1. \text{ csap } \frac{28}{40} \text{ rész} = 0,7 \text{ rész} \\ 2. \text{ csap } \frac{18}{60} \text{ rész} = 0,3 \text{ rész} \end{array} \right\} 0,7 + 0,3 = 1$$

$$3x + 2x - 20 = 120$$

$$5x = 140$$

$$x = 28$$

Az üres medence 28 perc alatt telik meg.

- c) Hány perc alatt tudjuk leengedni a harmadig teli medence vizét, ha a csapok zárva vannak?

Az egész 120 perc alatt folyik le.

Az $\frac{1}{3}$ rész 120 perc : 3 = 40 perc alatt folyik le.

- d) Megtelhet-e az üres medence, ha a lefolyót elfelejtjük elzárni, és mindkét csapot egyidőben nyitjuk meg? Ha igen, akkor mennyi idő alatt?

$$\frac{x}{40} + \frac{x}{60} - \frac{x}{120} = 1 \quad / \cdot 120 \quad \text{Ell.:} \quad \left. \begin{array}{l} 1. \text{ csap } \frac{30}{40} \text{ rész} = 0,75 \text{ rész} \\ 2. \text{ csap } \frac{30}{60} \text{ rész} = 0,5 \text{ rész} \\ \text{lefolyó } \frac{30}{120} \text{ rész} = 0,25 \text{ rész} \end{array} \right\} 0,75 + 0,5 - 0,25 = 1$$

$$3x + 2x - x = 120$$

$$4x = 120$$

$$x = 30$$

Az üres medence 30 perc alatt telhet meg.

- e) Az üres medence feltöltéséhez megnyitjuk az első csapot, majd 20 perccel később vesszük észre, hogy a lefolyót nem zártuk el, ekkor elzárjuk a lefolyót, és megnyitjuk a második csapot is. Innentől számítva hány perc alatt lesz tele a medence?

$$\frac{x+20}{40} - \frac{20}{120} + \frac{x}{60} = 1 \quad / \cdot 120 \quad \text{Ell.:} \quad \left. \begin{array}{l} 1. \text{ csap } \frac{36}{40} \text{ rész} = \frac{9}{10} \text{ rész} \\ 2. \text{ csap } \frac{20}{120} \text{ rész} = \frac{1}{6} \text{ rész} \\ \text{lefolyó } \frac{16}{60} \text{ rész} = \frac{8}{30} \text{ rész} \end{array} \right\} \frac{9}{10} - \frac{1}{6} + \frac{8}{30} = \frac{27}{30} - \frac{5}{30} + \frac{8}{30} = \frac{30}{30} = 1$$

$$3x + 60 - 20 + 2x = 120$$

$$5x + 40 = 120$$

$$5x = 80$$

$$x = 16$$

6 perc kell a feltöltéshez a 2. csap megnyitása után.

2. Mókus papa a télire gyűjtött mogyorókészletet egyedül 75 nap, Mókus mama egyedül 100 nap, míg a kis Mókus Balázs egyedül 150 nap alatt enné meg. Kitar-e 30 napig a mókuscsalád készlete, ha csak ezt ehetik?

	egyedül	1 nap alatt	bizonyos idő alatt
Mókus papa	75 nap	$\frac{1}{75}$ rész	$\frac{x}{75}$ rész
Mókus mama	100 nap	$\frac{1}{100}$ rész	$\frac{x}{100}$ rész
Mókus Balázs	150 nap	$\frac{1}{150}$ rész	$\frac{x}{150}$ rész

$$\frac{x}{75} + \frac{x}{100} + \frac{x}{150} = 1 \quad / \cdot 300 \quad \text{Ell.:} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{100}{3} \text{ nap alatt: Mókus papa } \frac{100}{3} : 75 = \frac{4}{9} \text{ rész} \\ \text{Mókus mama } \frac{100}{3} : 100 = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \text{ rész} \\ \text{Mókus Balázs } \frac{100}{3} : 150 = \frac{2}{9} \text{ rész} \end{array} \right\} \frac{4}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9} = 1$$

$$4x + 3x + 2x = 300$$

$$9x = 300$$

$$x = 33 \frac{1}{3}$$

A mókuscsaládnak a készlet 33 $\frac{1}{3}$ napig elég, így kitar 30 napig.

Válasz:



Szögek, oldalak, átlók: geometriai számítások

1. Egy szöget jelöljünk α -val, a mellékszögét pedig α' -vel! Számítsuk ki a szöget, a mellékszögét, vagy írjuk fel az arányukat! Töltsük ki a táblázatot!

$\alpha : \alpha'$	1 : 2	1 : 5	1 : 11	3 : 2	2 : 7	5 : 3	3 : 7	4 : 5	4 : 11	8 : 7
α	60°	30°	15°	108°	40°	112,5°	54°	80°	48°	96°
α'	120°	150°	165°	72°	140°	67,5°	126°	100°	132°	84°

$\alpha + \alpha' = 180^\circ$



Pl.: $\frac{40}{140} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} = 2:7$

$\frac{54}{126} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

$\frac{96}{84} = \frac{8}{7}$

$180^{22,5} \cdot \frac{5}{8_1} = 112,5$

$180^{12} \cdot \frac{4}{15_1} = 48$

2. Szögei szerint milyen fajta lehet az a háromszög, amelyben a belső szögek aránya a következő? Számítsuk ki a külső szögek arányát!

a) $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 5$

$\alpha = 180^\circ \cdot \frac{2}{10} = 36^\circ$ $\alpha' = 144^\circ$

$\beta = 180^\circ \cdot \frac{3}{10} = 54^\circ$ $\beta' = 126^\circ$

$\gamma = 180^\circ \cdot \frac{5}{10} = 90^\circ$ $\gamma' = 90^\circ$

$\alpha' + \beta' + \gamma' = 144 : 126 : 90$

..... derék szögű háromszög

$\alpha' : \beta' : \gamma' = 8 : 7 : 5$

b) $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$

1 arányos rész: x

$3x + 4x + 5x = 180$

$12x = 180$

$x = 15$

$\alpha = 3x = 45^\circ$ $\alpha' = 135^\circ$

$\beta = 4x = 60^\circ$ $\beta' = 120^\circ$

$\gamma = 5x = 75^\circ$ $\gamma' = 105^\circ$

..... hegyes szögű háromszög

$\alpha' : \beta' : \gamma' = 9 : 8 : 7$

c) $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 7$

1 arányos rész: x

$2x + 3x + 7x = 180$

$12x = 180$

$x = 15$

$\alpha = 2x = 30^\circ$ $\alpha' = 150^\circ$

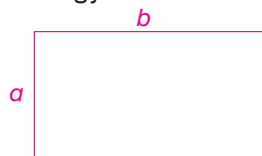
$\beta = 3x = 45^\circ$ $\beta' = 135^\circ$

$\gamma = 7x = 105^\circ$ $\gamma' = 75^\circ$

..... tompa szögű háromszög

$\alpha' : \beta' : \gamma' = 10 : 9 : 5$

3. Mekkora annak a téglalapnak a területe, amelynek a kerülete 1 méter, és a szomszédos oldalai közül az egyik 15 cm-rel nagyobb, mint a másik? Készítsünk vázlatrajzot!



$K = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$

$a = x$

$b = x + 15$

$T = ?$

$K = 2(a + b)$

$100 = 2[x + (x + 15)]$

$100 = 2(2x + 15)$

$100 = 4x + 30$

$\frac{100 - 30}{4} = x$

$17,5 = x$

vagy

$100 = 2x + 2(x + 15)$

$100 = 2x + 2x + 30$

$100 = 4x + 30$

$70 = 4x$

$17,5 = x$

$a = 17,5 \text{ cm}$

$b = 32,5 \text{ cm}$

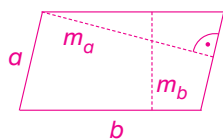
$T = 17,5 \cdot 32,5$

$T = 568,75 \text{ (cm}^2\text{)}$

Ell: $2 \cdot 17,5 \text{ cm} + 2 \cdot 32,5 \text{ cm} = 35 \text{ cm} + 65 \text{ cm} = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$

Válasz: A téglalap területe 568,75 cm².

4. Egy településen két-két párhuzamos utca egy paralelogramma alaprajzú háztömböt zár közre. A háztömb kerülete 530 méter, és a szomszédos oldalai közül az egyik 135 méterrel nagyobb, mint a másik. A hosszabb utcarészek távolsága 65 méter. Hány hektár területet foglal el a háztömb? Milyen távolságra vannak egymástól a rövidebb utcarészek?



$K = 530 \text{ m}$

$a = x$

$b = x + 135$

$m_b = 65 \text{ m}$

$T = ?$

$m_a = ?$

$K = 2a + 2b$

$530 = 2x + 2(x + 135)$

$530 = 4x + 270$

$260 = 4x$

$65 = x$

$a = 65 \text{ m}$

$b = 200 \text{ m}$

$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$

$T = b \cdot m_b$

$T = 200 \cdot 65$

$T = 13\,000 \text{ (m}^2\text{)} = 1,3 \text{ (ha)}$

$13\,000 = 65 \cdot m_a$

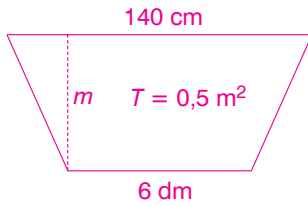
$200 = m_a$

Válasz: A háztömb 1,3 ha területet foglal el, a rövidebb utcarészek 200 m-re vannak egymástól.



5. Az egyik utcában húrtrapéz keresztmetszetű árkot ásnak. Milyen mély lesz az árok, ha a keresztmetszete fél négyzetméter, az alja 6 dm, a teteje pedig 140 cm széles? Hány teherautó földet kell elszállítani, ha az utca 160 méter hosszú, és egy teherautóra 8 köbméter föld fér?

Az árok keresztmetszetének vázlata:



utcahossz: 160 m
1 autóra: 8 m³
Hány forduló?

$$\begin{aligned} a &= 6 \text{ dm} = 0,6 \text{ m} \\ c &= 140 \text{ cm} = 1,4 \text{ m} \\ m &= ? \\ T &= 0,5 \text{ m}^2 \\ M &= 160 \text{ m} \\ V &= ? \end{aligned}$$

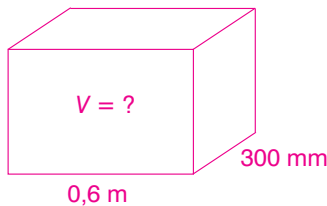
$$\begin{aligned} T &= \frac{a+c}{2} \cdot m \\ 0,5 &= \frac{0,6+1,4}{2} \cdot m \\ 0,5 &= m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= T \cdot M \\ V &= 0,5 \cdot 160 \\ V &= 80 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \text{ m}^3 & \quad 1 \text{ teherautó} \\ 80 \text{ m}^3 & \quad 10 \text{ teherautó} \end{aligned}$$

Válasz: Az árok fél méter mély lesz. 10 teherautó földet kell elszállítani.

6. Mekkora annak a téglatest alakú tömör építőelemnek a térfogata, amelynek a felszíne 108 dm², hosszúsága 0,6 méter, szélessége 300 mm? Készítsünk rajzot!



$$\begin{aligned} a &= 0,6 \text{ m} = 6 \text{ dm} \\ b &= 300 \text{ mm} = 3 \text{ dm} \\ c &= ? \\ A &= 108 \text{ dm}^2 \\ V &= ? \\ \hline c &= 4 \text{ dm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 2(ab + bc + ca) \\ A &= 2ab + 2bc + 2ca \\ A &= 2ab + c(2b + 2a) \\ 108 &= 2 \cdot 6 \cdot 3 + c(2 \cdot 3 + 2 \cdot 6) \\ 108 &= 36 + c \cdot 18 & / -36 \\ 72 &= c \cdot 18 & / :18 \\ 4 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= a \cdot b \cdot c \\ V &= 6 \cdot 3 \cdot 4 \\ V &= (72 \text{ dm}^3) \end{aligned}$$

Válasz: Az építőelem térfogata 72 dm³.

7. Egy szabályos sokszögnek hétszer annyi átlója van, mint ahány oldala. Mekkora a sokszög belső szögeinek összege?

oldalak száma: $n > 3$
összes átló száma: $7 \cdot n$
a belső szögek összege: ?

belső szögek összege:
 $(n - 2) \cdot 180^\circ = (17 - 2) \cdot 180^\circ = 15 \cdot 180^\circ = 2700^\circ$

$$\begin{aligned} \text{összes átló: } \frac{n \cdot (n-3)}{2} &= 7 \cdot n & / \cdot 2 \\ n \cdot (n-3) &= 14n & / : n \\ n-3 &= 14 & / + 3 \\ n &= 17 \end{aligned}$$

A sokszög tizenhét oldalú.

Válasz: A szabályos tizenhét oldalú sokszög belső szögeinek összege 2700°.



3. HALMAZOK

Halmazok

1. A számológép kijelzőjén a számokat 7 csíkkal (szegmensen) jelzik. Tekintsük a megfelelő számjegyek jelzésekor világító csíkokat egy-egy halmaznak, és ábrázoljuk őket az alábbi ábrákkal!



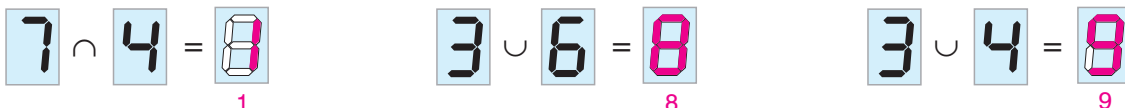
a) Színezéssel ábrázoljuk azokat a halmazokat, amelyeknek az **5** részhalmaza!



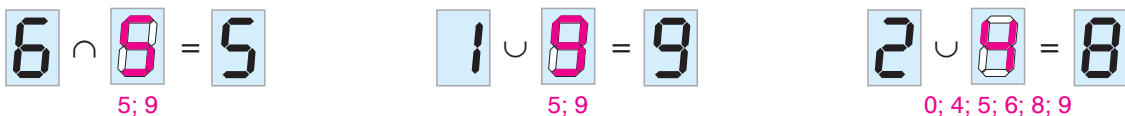
b) Ábrázoljunk néhány olyan halmazpárt, melyek közül az egyik halmaz a másiknak részhalmaza!



c) Ábrázoljuk a következő műveletek eredményét!



d) Ábrázoljuk a hiányzó halmazokat úgy, hogy az egyenlőség helyes legyen!



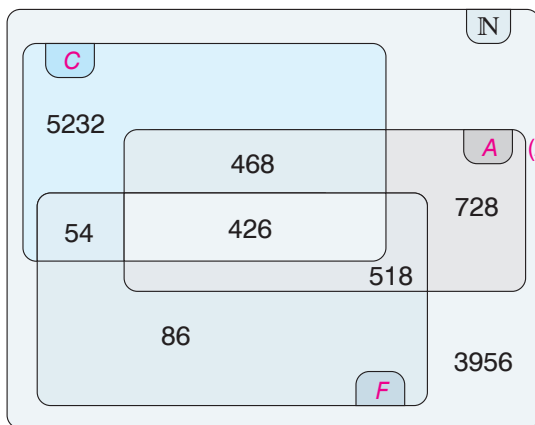
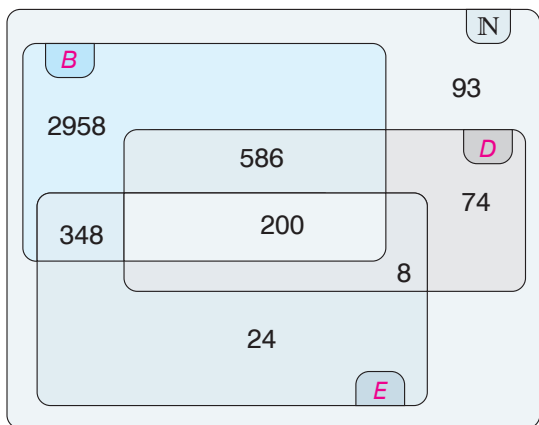
e) Pótoljuk a hiányzó műveleti jelet (a \cap és az \cup közül) úgy, hogy az egyenlőség helyes legyen!



2. Az ábrákon a természetes számok három részhalmazát ábrázoltuk, és minden halmazrészbe beírtunk egy-egy elemet. Írjuk be a megfelelő helyre az alábbi címkék betűjelét:

- A Háromjegyű számok
- B 100-nál nem kisebb számok
- C 3-mal osztható számok
- D 3-mal nem osztható számok
- E 4-gyel osztható számok
- F 4-gyel nem osztható számok

Mindegyik halmazrészbe írjunk további elemeket!



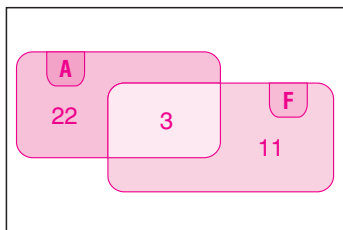
(B is lehet)



3. A 8. b osztályban mindenki tanul angolul vagy franciául. Angolul 25-en, franciául 14-en tanulnak.

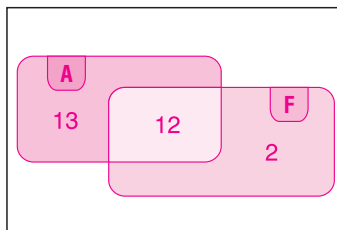
a) Ábrázoljuk az angolul tanulók halmazát és a franciául tanulók halmazát, írjuk be minden halmazrészbe az elemek számát, és adjuk meg az osztálylétszámot, ha

• mindkét nyelvet 3-an tanulják



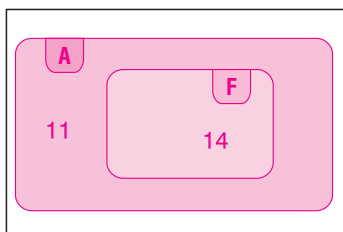
$$\begin{aligned}
 25 - 3 &= 22 \\
 14 - 3 &= 11 \\
 22 + 3 + 11 &= 36 \\
 25 + 14 - 3 &= 36 \\
 \text{osztálylétszám:} & \\
 & \underline{\quad 36 \quad}
 \end{aligned}$$

• mindkét nyelvet 12-en tanulják



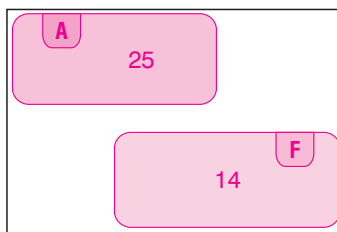
$$\begin{aligned}
 13 + 12 + 2 &= 27 \\
 25 + 14 - 12 &= 27 \\
 \text{osztálylétszám:} & \\
 & \underline{\quad 27 \quad}
 \end{aligned}$$

• az osztály létszáma a lehető legkisebb



$$\begin{aligned}
 25 - 14 &= 11 \\
 11 + 14 &= 25 \\
 25 + 14 - 14 &= 25 \\
 \text{osztálylétszám:} & \\
 & \underline{\quad 25 \quad}
 \end{aligned}$$

• az osztály létszáma a lehető legnagyobb



$$\begin{aligned}
 25 + 14 &= 39 \\
 \text{osztálylétszám:} & \\
 & \underline{\quad 39 \quad}
 \end{aligned}$$

b) Hányan tanulják mindkét nyelvet, ha az osztálylétszám 30? $39 - 30 = 9$. 9 tanuló tanulja mindkét nyelvet.

*4. Az A és B halmazokról azt tudjuk, hogy az A elemszáma 6 ($|A| = 6$); a B elemszáma 4 ($|B| = 4$). Írjunk „I” betűt a megfelelő oszlopba, ha az állítás minden ilyen A, B halmazra igaz, és „H”-t, ha hamis! Indokoljunk!

	Igaz/Hamis	Indoklás
$ A \cup B \leq 10$	I	Ha van közös elem, akkor a két halmaz egyesítésének elemszáma kisebb 10-nél, ha nincs közös elem, akkor 10.
$ A \cap B = 0$	H	A két halmaznak lehet közös eleme.
$B \subseteq A$	H	A B halmaznak lehet olyan eleme, amely nem eleme A -nak.
A-nak legalább 2 olyan eleme van, amely B -nek nem eleme	I	Mivel A elemszáma $ A = 6$; B elemszáma $ B = 4$, ezért A -nak legfeljebb 4 olyan eleme lehet, amely eleme B -nek is.

5. Írjunk a táblázat megfelelő mezőjébe \checkmark -t, ha az oszlopba tartozó minden négyszög rendelkezik az adott tulajdonsággal.

	Négyzet	Rombusz	Téglalap	Paralelogramma	Deltoid	Húrtrapéz
a) Van párhuzamos oldalpárja.	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark		\checkmark
b) Két párhuzamos oldalpárja van.	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark		
c) Minden oldala egyenlő.	\checkmark	\checkmark				
d) Van két egyenlő oldala.	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
e) Minden szöge egyenlő.	\checkmark		\checkmark			
f) Van két egyenlő szöge.	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
g) Átlói egyenlők.	\checkmark		\checkmark			\checkmark
h) Átlói felezik egymást.	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark		
i) Átlói merőlegesek egymásra.	\checkmark	\checkmark			\checkmark	
j) Tengelyesen szimmetrikus.	\checkmark	\checkmark	\checkmark		\checkmark	\checkmark
k) Középpontosan szimmetrikus.	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark		

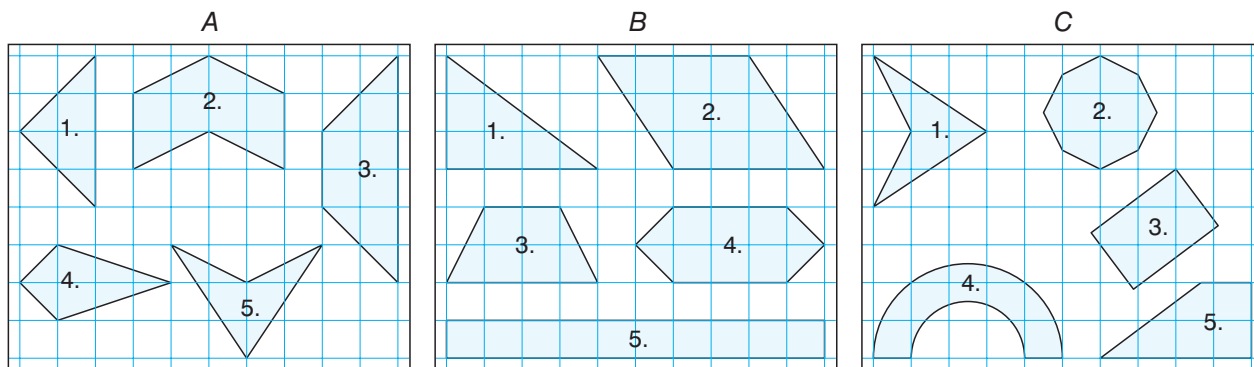


6. Az alábbi igaz állításokból kirepültek a felsorolt szavak. Írjuk őket a helyükre! (Nem kell minden pontozott helyre írni valamit.)

rombusz, minden, minden, van olyan, amelyik, van olyan, amelyik, négyzet

- a) **Van olyan** paralelogramma, **amelyik** tengelyesen szimmetrikus.
- b) **Van olyan** rombusz, **amelyik** nem négyzet.
- c) **Minden** téglalap - trapéz.
- d) **Minden** négyzet - deltoid.
- e) Minden **rombusz** deltoid.
- f) Minden **négyzet** téglalap.

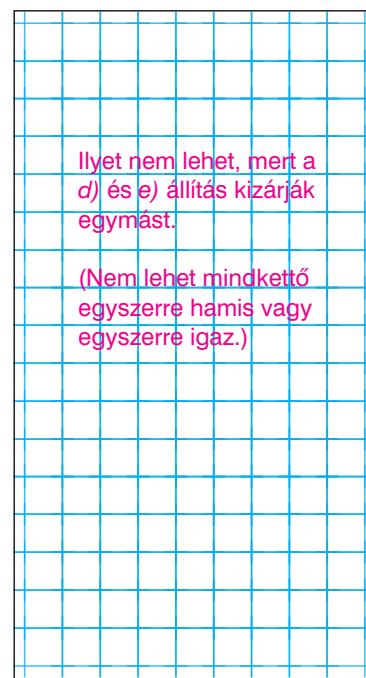
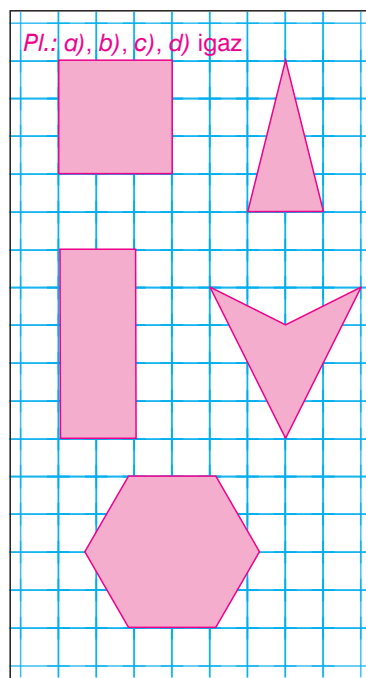
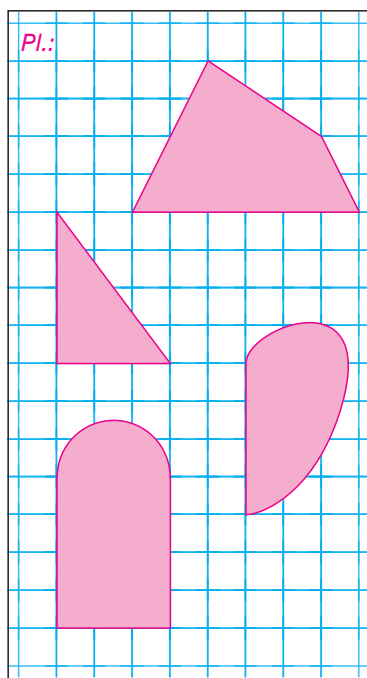
7. Írjuk az állítások mellé azoknak a kereteknek a betűjelét, amelyekben lévő síkidomokra igaz az állítás!



- a) Minden síkidom tengelyesen szimmetrikus. **A**
- b) Van olyan síkidom, amelyik nem konvex. **A; C**
- c) Van olyan síkidom, amelyik középpontosan szimmetrikus. **B; C**
- d) Nincs olyan síkidom, amelyik nem sokszög. **A; B**
- e) Nem minden síkidom sokszög. **C**

8. Rajzoljunk síkidomokat a keretbe úgy, hogy a 7. feladat állításai közül

- A) csak az e) legyen igaz; B) legalább 4 igaz legyen; C) mind hamis legyen.

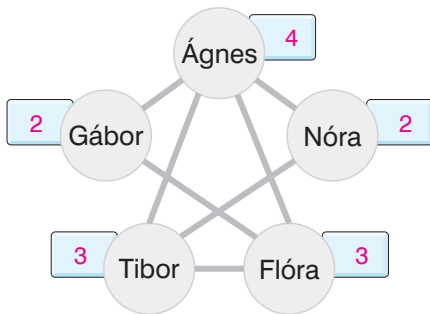




Beszéljünk helyesen a matematika nyelvén!

1. Az ábrán a pontok egy társaság tagjait jelentik. Két pont akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő emberek ismerik egymást (az ismeretség kölcsönös).

a)

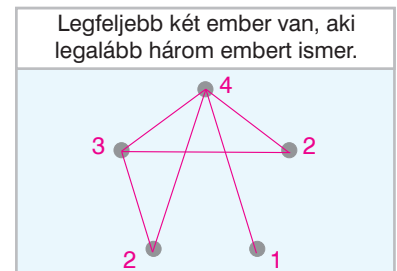
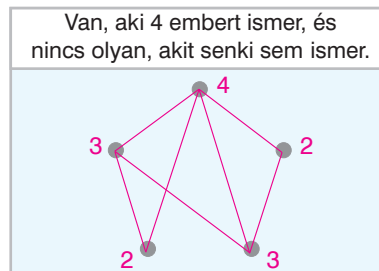
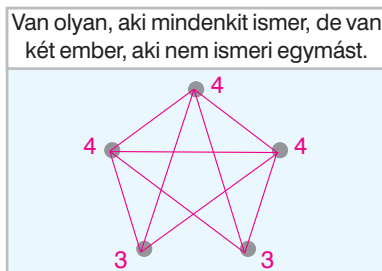
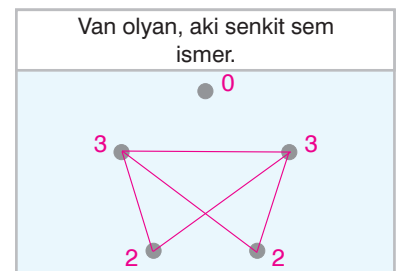
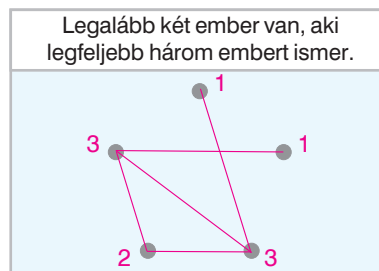
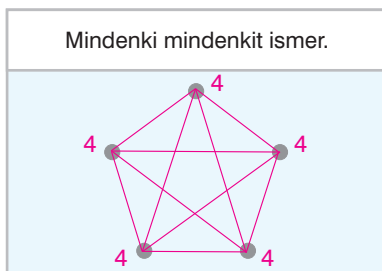


Írjuk a nevek mellé, ki hány embert ismer a társaságból!

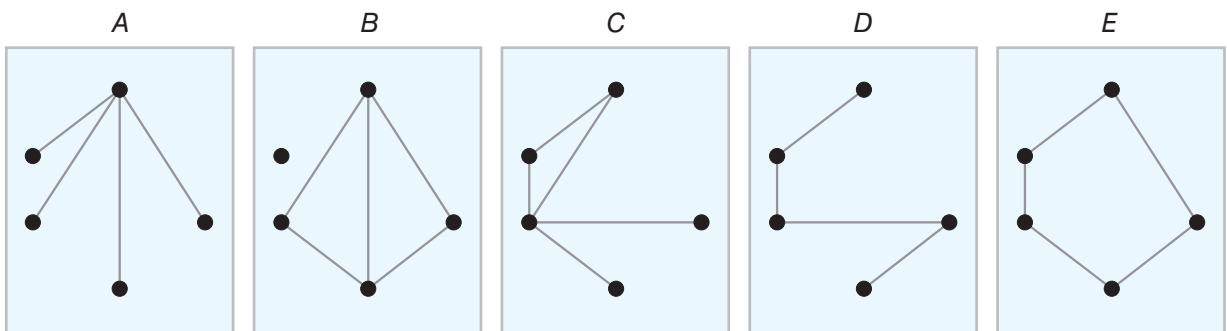
Írjuk az alábbi állítások mellé, hogy igaz („I”) vagy hamis („H”) az ábrán látható társaságra!

- Mindenki mindenkit ismer. H
- Mindenki legalább két embert ismer. I
- Van olyan, aki mindenkit ismer. I
- Van olyan, aki senkit sem ismer. H

b) Készítsünk ábrát egy öttagú társaságról úgy, hogy a keretbe írt állítás igaz legyen! (Ha ez nem lehetséges, azt indokoljuk meg!) A keretekbe egy-egy példát rajzoltunk.



c) Írjuk az állítások mellé azoknak a kereteknek a betűjelét, amelyekben ábrázolt társaságra az állítás igaz!



Nincs olyan ember, aki mindenkit ismer. B; D; E

Nincs olyan ember, akit senki sem ismer. A; C; D; E

Nem igaz, hogy senki sem ismer mindenkit. A; C

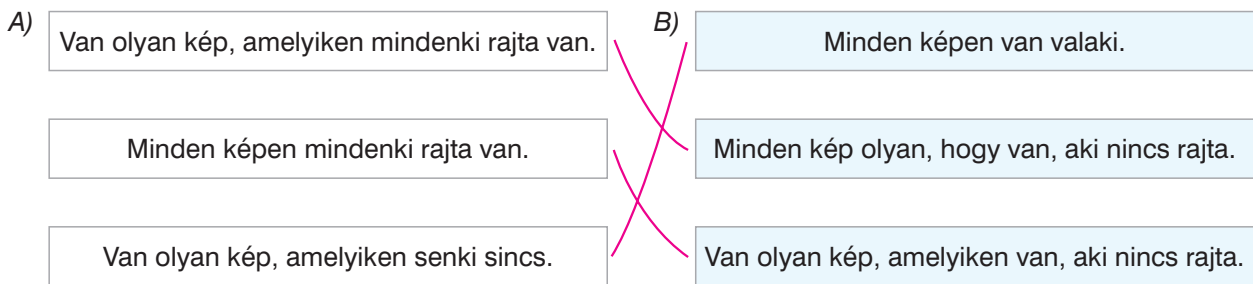
Nem igaz, hogy van olyan, aki mindenkit ismer. B; D; E

Nem igaz, hogy mindenki mindenkit ismer. A; B; C; D; E



HALMAZOK

2. Zsófi az osztálykiránduláson több fényképet készített az osztály tanulóiról. Ezekre a képekre vonatkoznak az alábbi állítások. Kössünk össze minden A) oszlopbeli állítást a B) oszlopbeli tagadásával!



3. Írjuk be a hiányzó mondatokat úgy, hogy mindegyik állítás alatt ott legyen a tagadása! Mindegyikhez írjunk „I”-t, ha igaz, és „H”-t, ha hamis!

- a) Állítás: Minden 12-vel osztható szám osztható 24-gyel. H
 Tagadása: Nem minden 12-vel osztható szám osztható 24-gyel. VAGY Van olyan 12-vel osztható szám, amely nem osztható 24-gyel. I
- b) Állítás: Van olyan téglatest, amelyik nem kocka. I
 Tagadása: Nincs olyan téglatest, amelyik nem kocka. VAGY Minden téglatest kocka. H
- c) Állítás: Nem minden természetes szám nemnegatív. VAGY Van olyan természetes szám, amelyik negatív. H
 Tagadása: Minden természetes szám nemnegatív. I
- d) Állítás: Nincs olyan egyenlet, amelyiknek nincs megoldása. VAGY Minden egyenletnek van megoldása. H
 Tagadása: Van olyan egyenlet, amelyiknek nincs megoldása. I

4. Egy teniszszakértő a következőket állítja:

„Ha egy férfi teniszező 20 éves kora előtt legalább négy tornát nyer egy évben, akkor világszínvonalú lesz.”

Négy teniszezőről a következőket tudjuk:

- ROGER:** Nem nyert 20 éves kora előtt legalább négy tornát egy évben, mégis világszínvonalú lett.
RAFAEL: 20 éves kora előtt legalább négy tornát nyert egy évben, és világszínvonalú lett.
ANDY: 20 éves kora előtt legalább négy tornát nyert egy évben, de nem lett világszínvonalú.
GEORGE: Nem nyert 20 éves kora előtt legalább négy tornát egy évben, és nem lett világszínvonalú.

Írjuk fel azoknak a nevének, akikre igaz a szakértő állítása!

Roger, Rafael, George

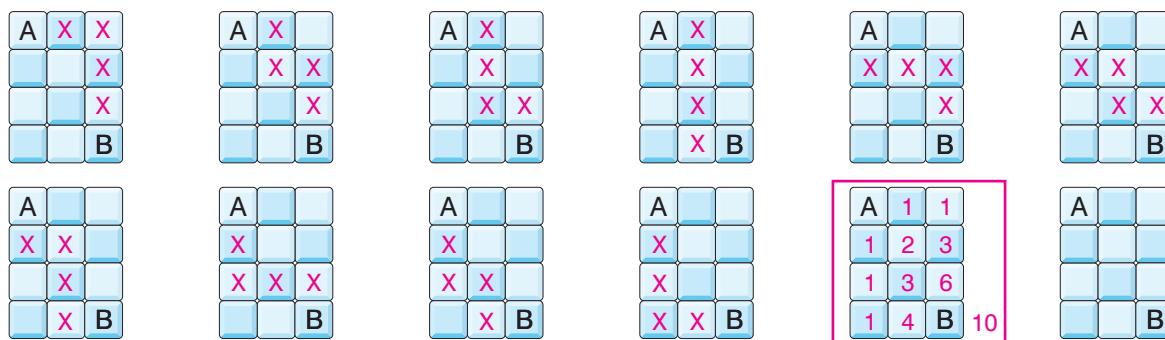
5. Az alábbi „Ha ..., akkor ...” típusú állításokban húzzuk alá kékkel a feltételt, pirossal a következményt, majd írjuk le az állítás megfordítását! Mindegyikhez írjunk „I”-t, ha igaz, és „H”-t, ha hamis!

- a) Állítás: Ha egy szám osztható 6-tal és 4-gyel, akkor a szám osztható 24-gyel. H
 Megfordítása: Ha egy szám osztható 24-gyel, akkor osztható 6-tal és 4-gyel. I
- b) Állítás: Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög középpontosan szimmetrikus. I
 Megfordítása: Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor átlói felezik egymást. I
- c) Állítás: Ha két páros számot adunk össze, akkor az összeg páros. I
 Megfordítása: Ha egy kéttagú összeg páros, akkor két páros számot adunk össze. H
- d) Állítás: Ha két szám összege pozitív, akkor a szorzatuk is pozitív. H
 Megfordítása: Ha két szám szorzata pozitív, akkor az összegük is pozitív. H



Hányféle útvonal lehet? Az összegzési módszer

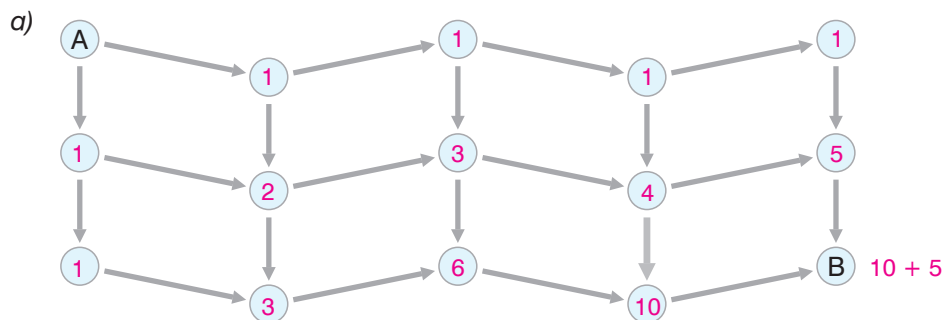
1. Rajzoljuk le a sakktablán az összes különböző, **5 lépésből álló** útvonalat, amely az A mezőről a B mezőre vezet! Egy lépés egy mezőről egy vele oldalszomszédos mezőre való lépést jelent. Két útvonal különböző, ha van eltérő lépés bennük. Minden ábrába egy útvonalat rajzoljunk!



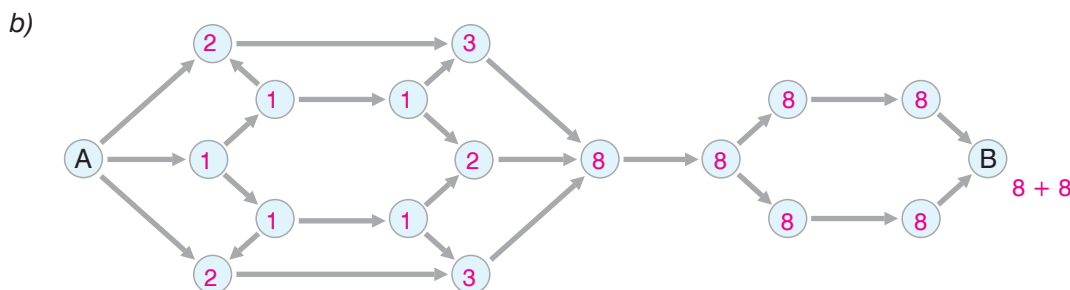
A különböző útvonalak száma: 10

Ennek alapján meghatározható az útvonalak száma

2. Hányféleképpen juthatunk A-ból B-be, ha csak a nyilaknak megfelelően haladhatunk? Minden kereszteződésbe írjuk be, hogy hányféleképpen juthatunk oda az A-ból!

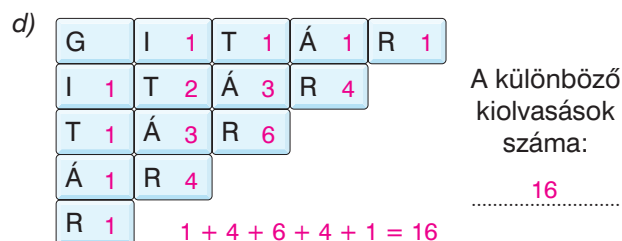
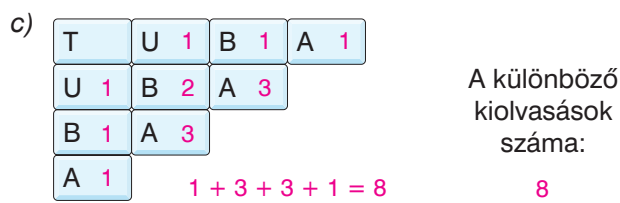
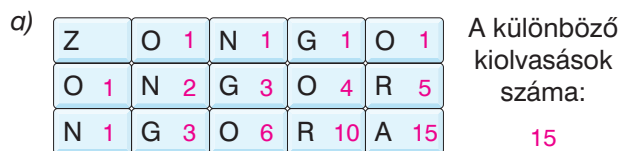


A különböző útvonalak száma: 15



A különböző útvonalak száma: 16

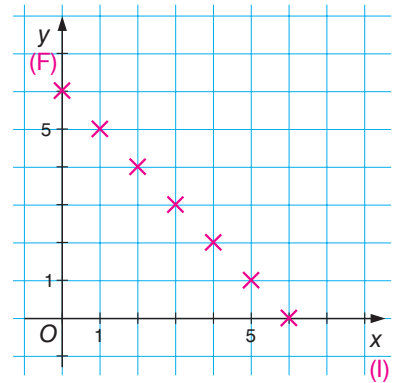
3. Hányféleképpen lehet kiolvasni a ZONGORA, GORDONKA, TUBA, GITÁR szavakat az ábráról, ha mindig valamilyen irányba szomszédos betűre léphetünk, de egy betűre legfeljebb egyszer? Rajzoljuk be a nyilakat, és mindegyik betűhöz írjuk oda, hogy hányféleképpen lehet hozzá eljutni az előző betűtől!





4. Játsszunk! A koordináta-rendszer O pontjából indulunk, és ha egy érmevel fejet dobunk, akkor az y tengellyel, ha írást, akkor az x tengellyel párhuzamosan lépünk egyet pozitív irányban.

a) Végezzünk 6 dobásból álló dobássorozatokat! A táblázatba jegyezzük fel a dobásokat, majd annak a pontnak a koordinátáit, ahová a 6 lépéssel jutottunk!



A táblázat az összes lehetséges kimenetelre mutat egy-egy példát.

	Sorozat									
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1. dobás	I	I	F	I	I	F	F	F	I	I
2. dobás	I	I	I	I	I	F	I	F	F	I
3. dobás	I	F	F	I	F	I	I	F	F	I
4. dobás	F	F	I	I	F	I	F	F	F	I
5. dobás	I	I	F	F	F	F	F	F	F	I
6. dobás	I	I	F	F	I	I	F	F	F	I
A végpont koordinátái	(5; 1)	(4; 2)	(2; 4)	(4; 2)	(3; 3)	(3; 3)	(2; 4)	(0; 6)	(1; 5)	(6; 0)

b) Jelöljük meg a koordináta-rendszerben az összes olyan pontot, ahová 6 dobás után juthatunk!

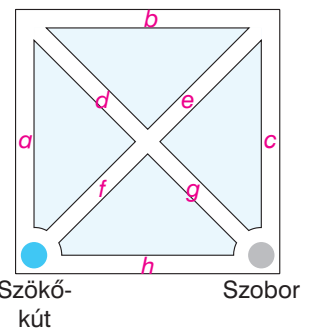
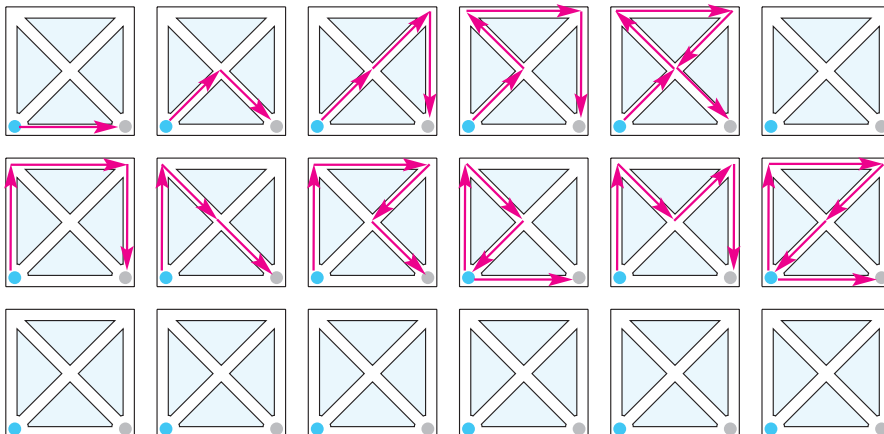
c) Írjuk a táblázatba a pontokat koordinátaikkal, és azt, hogy melyik pontba hányféle dobássorozattal lehet eljutni! Két dobássorozat különböző, ha van olyan sorszám, amelynek megfelelő dobás a két sorozatban különböző.

Végpontok	(0; 6)	(1; 5)	(2; 4)	(3; 3)	(4; 2)	(5; 1)	(6; 0)
Dobássorozatok száma	1	6	15	20	15	6	1

d) Melyik pontba juthatunk a legnagyobb valószínűséggel? **(3; 3)**

e) Melyik pontba juthatunk a legkisebb valószínűséggel? **(0; 6) és (6; 0)**

5. Az ábra egy kis park sétaútvonalait mutatja. Hányféleképpen sétálhatunk a szökőkúttól a szoborig, ha minden útszakaszon legfeljebb egyszer mehetünk végig, de lehet olyan kereszteződés, amelyen többször is áthaladunk? Rajzoljuk meg az összes lehetőséget! (Két séta útvonala különböző, ha van eltérő szakaszuk.)



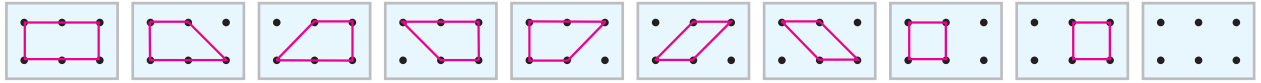
- h
- fg
- fec
- $fdbc$
- $fdbeg$
- abc
- adg
- $abeg$
- $adfh$
- $adec$
- $abefh$

A különböző sétaútvonalak száma: **11**



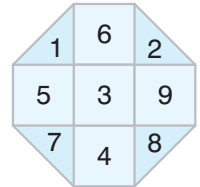
Hányféleképpen választhatunk?

1. Rajzoljuk le az összes olyan trapézot, melynek mind a négy csúcsa az ábrán levő pontok közül való! Két trapéz különböző, ha az egyiknek van olyan csúcsa, amelyik a másiknak nem csúcsa. (A pontok négyzet-rácsot alkotnak.)

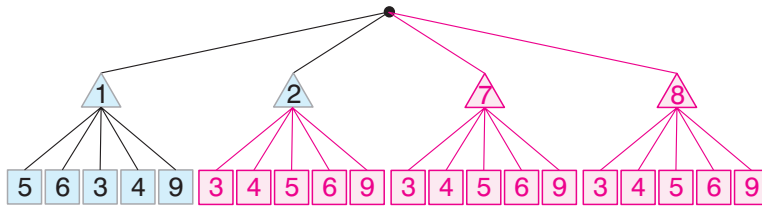


A lehetséges különböző trapézok száma összesen: 9

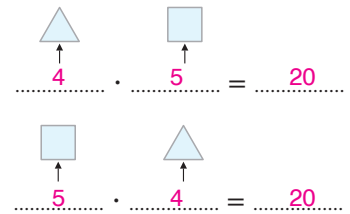
2. Az ábrán négyzetekbe és háromszögekbe számjegyeket írtunk. Hány olyan különböző kétjegyű szám írható fel, amelynek



- első számjegye háromszögben, második számjegye négyzetben áll? Folytassuk a gráfot, majd írjuk be a megfelelő számokat a pontsorokra!



A megfelelő kétjegyű számok száma:



- az első számjegye négyzetben, a második számjegye háromszögben áll? Írjuk be a pontsorokra a megfelelő számokat!

- az egyik számjegye négyzetben, a másik háromszögben áll? 20 + 20 = 40

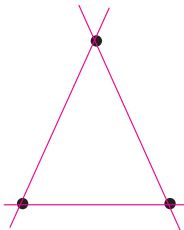
3. Anni és Panni a cukrászdában ünneplik a matekból kapott ötösüket. Egy-egy szelet süteményt választanak a csokitorta, dobostorta, túrótorta, japántorta és a gyümölcstorta közül. Mindegyik tortából több szelet is van, így egyforma mellett is dönthetnek. Hányféleképpen választhatnak két süteményt, ha két választás akkor különböző, ha legalább egyikük másfajta tortát választ? Egészítsük ki a mondatokat!

Anni 5-féle torta közül választhat. Panni 5-féle torta közül választhat.

A két sütemény választási lehetőségeinek száma: $\begin{matrix} \triangle & \square \\ \uparrow & \uparrow \\ 5 & \cdot & 5 \\ \hline & & 25 \end{matrix}$

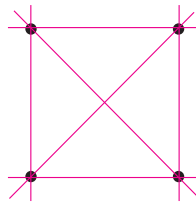
4. Rajzoljuk meg az összes olyan egyenest, amelyet az ábrán látható pontok meghatároznak! Hány egyenest rajzoltunk?

a)



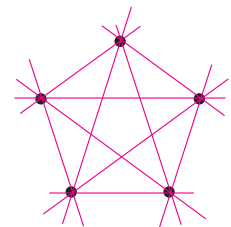
Egyenesek száma: 3

b)



Egyenesek száma: 6

c)



Egyenesek száma: 10

5. Dezső születésnapjában buliján mindenki pontosan egyszer koccintott mindenkivel. Töltsük ki a táblázat hiányzó mezőit!

Résztevők száma Dezsővel együtt	3	4	5	6	9	10	20
Koccintások száma	3	6	10	15	36	45	190

$$n + \frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{2n + n^2 - 3n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$\frac{81-9}{2} = \frac{72}{2}$$

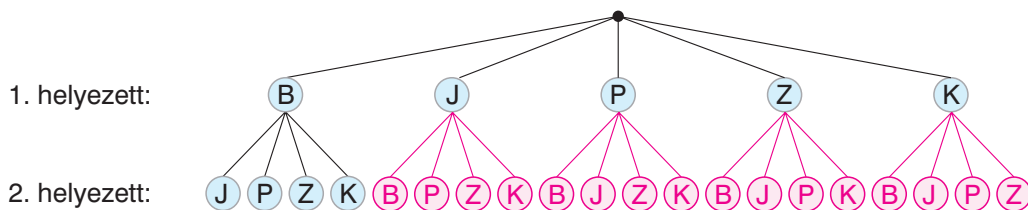
$$\frac{100-10}{2} = \frac{90}{2}$$

$$\frac{400-20}{2} = \frac{380}{2}$$



6. A 8. osztályos fizikaszakkörre öten járnak rendszeresen: Botond, Judit, Péter, Zoltán és Kata.

a) Hányféleképpen végezhetnek a háziverseny első két helyén? (Holtverseny nem volt.) Folytassuk a gráfot, majd pótoljuk a megfelelő számokat és műveleti jelet!



1. helyezett 5-féle lehetett, ezután 2. helyezett 4-féle lehetett.

$$\begin{matrix} \boxed{1.} & \boxed{2.} \\ \uparrow & \uparrow \\ \dots & \dots \end{matrix} = 20 \text{-féle képpen végezhetek az első két helyen.}$$

b) Hányféleképpen végezhetnek a háziverseny első három helyén? (Holtverseny nem volt.) Pótoljuk a megfelelő számokat és műveleti jeleket!

1. helyezett 5-féle lehetett, ezután 2. helyezett 4-féle lehetett, ezután
3. helyezett 3-féle lehetett.

$$\begin{matrix} \boxed{1.} & \boxed{2.} & \boxed{3.} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} = 60 \text{-féle képpen végezhetek az első három helyen.}$$

c) Hányféleképpen választhatnak kétfős csapatot a fizikaszakkörösök közül a városi fizikaversenyre? Soroljuk fel az összes lehetőséget!

	Csapattagok	Kimaradók
4	Botond, Judit	Péter, Zoltán, Kata
	Botond, Péter	Judit, Zoltán, Kata
	Botond, Zoltán	Judit, Péter, Kata
	Botond, Kata	Judit, Péter, Zoltán
3	Judit, Péter	Botond, Zoltán, Kata
	Judit, Zoltán	Botond, Péter, Kata
	Judit, Kata	Botond, Péter, Zoltán
2	Péter, Zoltán	Botond, Judit, Kata
	Péter, Kata	Botond, Judit, Zoltán
1	Zoltán, Kata	Botond, Judit, Péter
	<u>10</u>	

A lehetséges 2 fős csapatok száma: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$

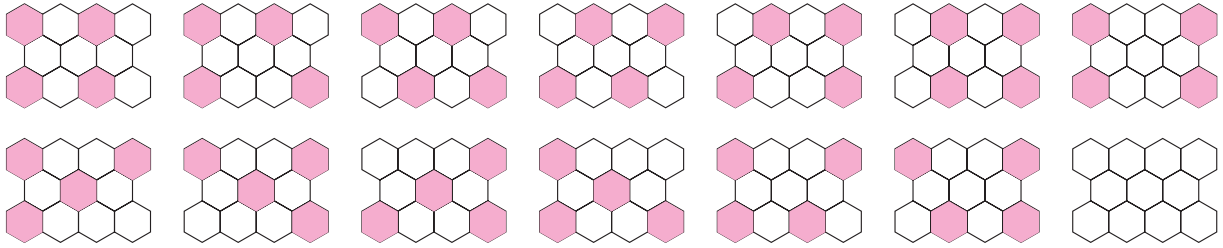
d) Melyik nagyobb, a lehetséges 2 fős csapatok száma, vagy a lehetséges 3 fős csapatok száma? Miért?

Egyenlő, mert ha két főt kiválasztunk egy csapatba, akkor a kimaradók 3 fős csapatnak tekinthetők, azaz a két csapatszám egyenlő.



Válasszuk szét az eseteket!

1. Az ábrán látható méhsejtekből színezzünk be 4-et úgy, hogy ne legyen két szomszédos színezett méhsejt! Keressük meg az összes lehetőséget!



A lehetőségek száma összesen: **13**

2. Hány olyan kétjegyű szám van, amelyre az alábbi A, B, C tulajdonságok közül kettő teljesül, egy pedig nem teljesül?

A osztható 4-gyel

B van páros számjegye

C első számjegye nagyobb a másodikonál

Egészítsük ki az alábbi mondatokat!

1. eset: A és B teljesül, C nem teljesül

A számok tulajdonságai: kétjegyű, osztható 4-gyel, **az első számjegye nem nagyobb a másodikonál**

A számok felsorolása: **12; 16; 24; 28; 36; 44; 48; 56; 68; 88**

Az 1. esetnek megfelelő számok száma: **10**

2. eset: **A és C teljesül, B nem teljesül**

A számok tulajdonságai: **kétjegyű, osztható 4-gyel, az 1. számjegye nagyobb a 2.-nél, nincs páros számjegye**

A számok felsorolása: **nincs ilyen szám, mert a 4-gyel osztható számok párosak (van páros**

A 2. esetnek megfelelő számok száma: **0**

3. eset: **B és C teljesül, A nem teljesül**

A számok tulajdonságai: **kétjegyű, van páros számjegye, az 1. számjegye nagyobb a 2.-nél, nem osztható 4-gyel**

A számok felsorolása: **10; 21; 30; 41; 42; 43; 50; 54; 61; 62; 63; 70; 74; 81; 82; 83; 85; 86; 87; 90; 94; 98**

A 3. esetnek megfelelő számok száma: **22**

Összesen: **32** megfelelő szám van.

3. A 32 lapos magyar kártyából húzunk egy lapot. (A magyar kártyában 4-féle szín és színenként négy figurás lap van.) Peti arra tippel, hogy zöld lapot húzunk, Bori pedig arra, hogy figurát. Hányféle lapot húzhatunk úgy, hogy legalább egyikük tippje téves legyen?

1. **megoldás:** A feladatot esetekre bontjuk aszerint, hogy kinek a tippje téves.

Az esetek száma: **3**

1. eset: Peti tippje helyes, Borié nem.

A kihúzott lap tulajdonságai: **zöld, nem figurás**

A lehetséges lapok száma: **4**

2. eset: **Bori tippje helyes, Peti tippje nem**

A kihúzott lap tulajdonságai: **figurás, nem zöld**

A lehetséges lapok száma: **$4 \cdot 3 = 12$**



HALMAZOK

3. eset: **Mindkettő hamis.**

A kihúzott lap tulajdonságai: **nem zöld, nem figurás**

A lehetséges lapok száma: $4 \cdot 3 = 12$

A lehetséges lapok száma összesen: $4 + 12 + 12 = 28$

2. megoldás: A jó lapok száma = összes lap száma – a rossz lapok száma.

Összes lap száma: **32**

Rossz lapok esetén:

Nem igaz, hogy legalább egyikük tippje téves. = **mindkettőjük tippje helyes**

A rossz lapok tulajdonságai: **zöld és figurás**

A rossz lapok száma: **4**

A jó lapok száma: $32 - 4 = 28$

4. A hex nyelvben 6 betűt használnak, 2 magánhangzót és 4 mássalhangzót. Egyetlen szóban sincs két azonos betű, és se két magánhangzó, se két mássalhangzó nem állhat egymás mellett. (A hex nyelvben az összes lehetséges betűsor értelmes szó.)

a) Hány kétbetűs szó van a hex nyelvben?

1. eset: **magánhangzóval (g) kezdődik**

$$\begin{array}{cc} \boxed{g} & \boxed{s} \\ \uparrow & \uparrow \\ 2 & \cdot 4 = 8 \end{array}$$

2. eset: **mássalhangzóval (s) kezdődik**

$$\begin{array}{cc} \boxed{s} & \boxed{g} \\ \uparrow & \uparrow \\ 4 & \cdot 2 = 8 \end{array}$$

A kétbetűs szavak száma: **16**

b) Hány hárombetűs szó van a hex nyelvben?

1. eset: **magánhangzóval kezdődik**

$$\begin{array}{ccc} \boxed{g} & \boxed{s} & \boxed{g} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & \cdot 4 & \cdot 1 = 8 \end{array}$$

2. eset: **mássalhangzóval kezdődik**

$$\begin{array}{ccc} \boxed{s} & \boxed{g} & \boxed{s} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & \cdot 2 & \cdot 3 = 24 \end{array}$$

A hárombetűs szavak száma: **32**

c) Hány négybetűs szó van a hex nyelvben?

1. eset: **magánhangzóval kezdődik**

$$\begin{array}{cccc} \boxed{g} & \boxed{s} & \boxed{g} & \boxed{s} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & \cdot 4 & \cdot 1 & \cdot 3 = 24 \end{array}$$

2. eset: **mássalhangzóval kezdődik**

$$\begin{array}{cccc} \boxed{s} & \boxed{g} & \boxed{s} & \boxed{g} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & \cdot 4 & \cdot 3 & \cdot 1 = 24 \end{array}$$

A négybetűs szavak száma: **48**

d) Hány betűs a leghosszabb szó a hex nyelvben? **ötbetűs (3 mássalhangzó + 2 magánhangzó váltva)**

e) Hány különböző szó van a hex nyelvben? **Az egybetűs szavakat is megengedve 150 különböző szó van a hex nyelvben.**

ötbetűs szavak:

$$6 + 16 + 32 + 48 + 48 = 150$$

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{s} & \boxed{g} & \boxed{s} & \boxed{g} & \boxed{s} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & \cdot 2 & \cdot 3 & \cdot 1 & \cdot 2 = 48 \end{array}$$



Hány lehetőség van?

1. Oldjuk meg a következő feladatokat! Az ábrán kössük össze azoknak a feladatoknak a betűjelét, amelyek matematikailag egyformák!

a) Egy bizottságban 6 ember dolgozik együtt. Amikor megérkeznek, mindenki mindenkivel kezét fog egyszer. Hány kézfogás volt?

A kézfogások száma:**15**..... $\frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$

b) Hányféleképpen ülhet le 4 gyerek egy kerek asztal köré, ha két eset akkor különböző, ha elforgatással nem vihetők át egymásba?

Az ülésrendek száma:**6**..... $3 \cdot 2$

c) Hányféle betűsorozatot írhatunk fel a DÓRI név betűiből (ha mindegyik betűt egyszer használhatjuk)?

4 · 3 · 2 · 1

A különböző betűsorozatok száma:**24**.....

d) Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk egymás után. A dobások eredményét a dobás sorrendjében leírva egy kétjegyű számot kapunk. Hányféle számot kaphatunk?

A lehetséges számok száma:**36**..... $6 \cdot 6$

e) Egy sakkversenynek 6 résztvevője van. Az 1. helyezett egy kupát, a 2. helyezett egy tálat kap. Hányféle lehet a két nyertes, ha nem lehet holtverseny?

A lehetőségek száma:**30**..... $6 \cdot 5$

f) Négy hölgy a cukrászdában négyféle süteményt rendelt. A pincér megjegyezte, hogy milyen süteményeket kell hoznia, de elfelejtette, hogy melyiket kinek kell adnia. Hányféleképpen oszthatja ki a süteményeket a pincér?

A lehetőségek száma:**24**..... $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

g) Hányféle kétjegyű számot lehet kirakni az **1 2 3 4 5 6** számkártyákból?

A kirakható kétjegyű számok száma:**30**..... $6 \cdot 5$

h) Egy zacskóban 6 különböző színű golyó van. Hányféleképpen vehetünk ki egyszerre 2 golyót?

A lehetőségek száma:**15**..... $\frac{6 \cdot 5}{2}$

i) Hányféleképpen ülhet le a moziban 4 gyerek 4 egymás melletti helyre?

A lehetőségek száma:**24**..... $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

j) Egy kalapba betettük az **1 2 3 4 5 6** számkártyákat. Kihúzzunk egy kártyát, felírjuk a számot, majd visszatesszük a kártyát. Újra húzzunk egy kártyát, és ezt a számot is felírjuk a másik mellé. Hányféle kétjegyű számot kaphatunk így?

A lehetséges kétjegyű számok száma:**36**..... $6 \cdot 6$

2. Hányféleképpen tölthetünk 1 liter mézet üvegekbe, ha elég sok 1 dl-es, 2 dl-es és 5 dl-es üvegünk van, és minden üveget teletöltünk mézzel? Soroljuk fel az összes lehetőséget! Az azonos méretű üvegek egyformák, és az üvegek sorrendje sem számít.

üvegek irtartalma	üvegek száma										
1 dl-es	10	8	6	5	4	3	2	1	0	0	} 10 dl
2 dl-es	0	1	2	0	3	1	4	2	5	0	
5 dl-es	0	0	0	1	0	1	0	1	0	2	

A lehetőségek száma:**10**.....



3. Egy 25 kérdésből álló tesztet úgy pontoznak, hogy ha valaki egy kérdésre helyes választ ad, akkor 3 pontot, ha rossz választ ad, akkor 0 pontot, ha pedig nem válaszol, akkor arra a kérdésre 1 pontot kap. Írjuk fel a táblázatban feltüntetett pontszámok esetén, hogy hány jó, rossz vagy hiányzó választ adhatott az, aki ennyi pontot szerzett!

Pontszám	73		72		69			63				57			
Jó válasz	24		24		23	22		21	20	19		19	18	17	16
Rossz válasz	-		1		2	-		4	2	-		6	4	2	-
Hiányzó válasz	1		-		-	3		-	3	6		-	3	6	9
Lehetőségek száma	1		1		2			3				4			

$$24 \cdot 3 + 1 = 73$$

$$24 \cdot 3 = 72$$

$$23 \cdot 3 = 69$$

$$22 \cdot 3 + 3 = 69$$

$$21 \cdot 3 = 63$$

$$20 \cdot 3 + 3 = 63$$

$$19 \cdot 3 + 6 = 63$$

$$19 \cdot 3 = 57$$

$$18 \cdot 3 + 3 = 57$$

$$17 \cdot 3 + 6 = 57$$

$$16 \cdot 3 + 9 = 57$$

4. Írjuk a KATA, LILI, ETELE nevek betűit egy-egy színes kártyára! Egy név minden betűje más-más színű kártyára kerül. Számoljuk össze, hogy hányféleképpen lehet sorba rakni

- a) a színes kártyákat úgy, hogy a betűket nem vesszük figyelembe;
 b) a színes kártyákat úgy, hogy az adott nevet mutassák, de a színek sorrendje különböző legyen;
 c) a név betűit.

K A T A

a) kártyák különböző sorrendjeinek száma: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) kártyák különböző sorrendjeinek száma: $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$

c) K A T A betűi különböző sorrendjeinek felsorolása: 12 KATA, KAAT, KTA, TKAA, TAKA, TAAK, AATK, AAKT, AKAT, ATAK, ATKA, AKTA

L I L I

a) kártyák különböző sorrendjeinek száma: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) kártyák különböző sorrendjeinek száma: $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

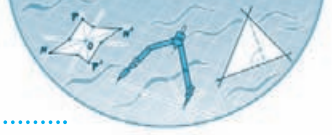
c) L I L I betűi különböző sorrendjeinek felsorolása: 6 LILI, LIIL, LLII, ILIL, ILLI, IILL

E T E L E

a) kártyák különböző sorrendjeinek száma: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) kártyák különböző sorrendjeinek száma: $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$

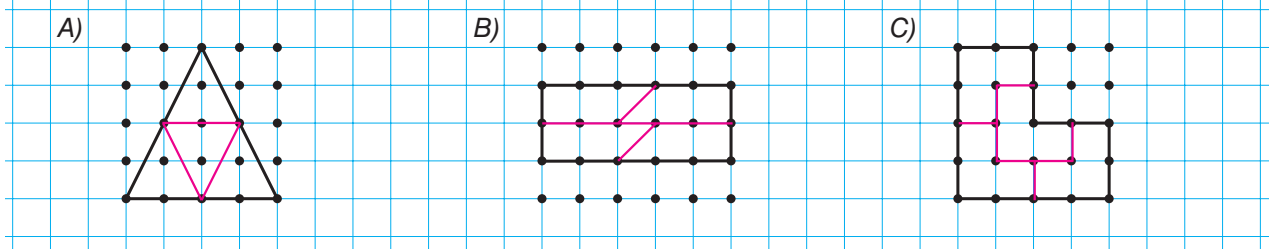
c) E T E L E betűi különböző sorrendjeinek felsorolása: 20 EEETL, EEELT, EELET, EELTE, EETEL, EETLE, ELETE, ELTEE, ELEET, ETELE, ETLEE, ETEEL, TEELE, TELEE, TEEEL, LEETE, LETEE, LEEET, LTEEE, TLEEE



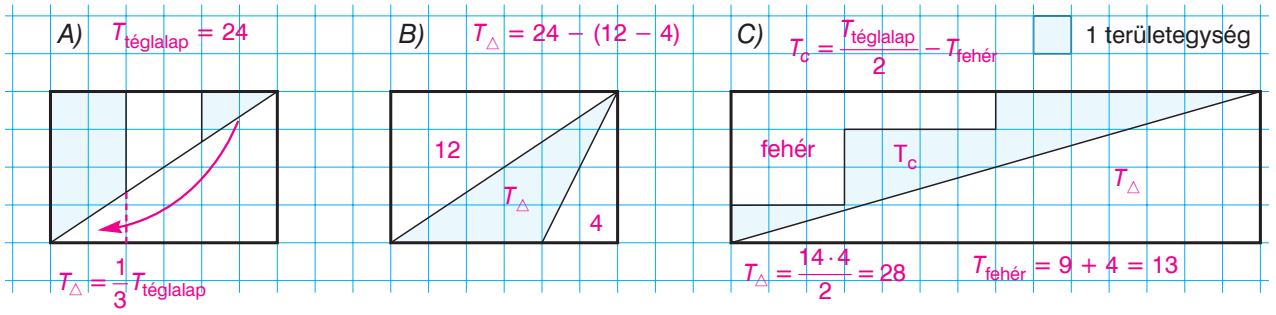
4. GEOMETRIA I.

A terület

1. Csak a pontok összekötésével osszuk fel a síkidomokat négy egybevágó részre!

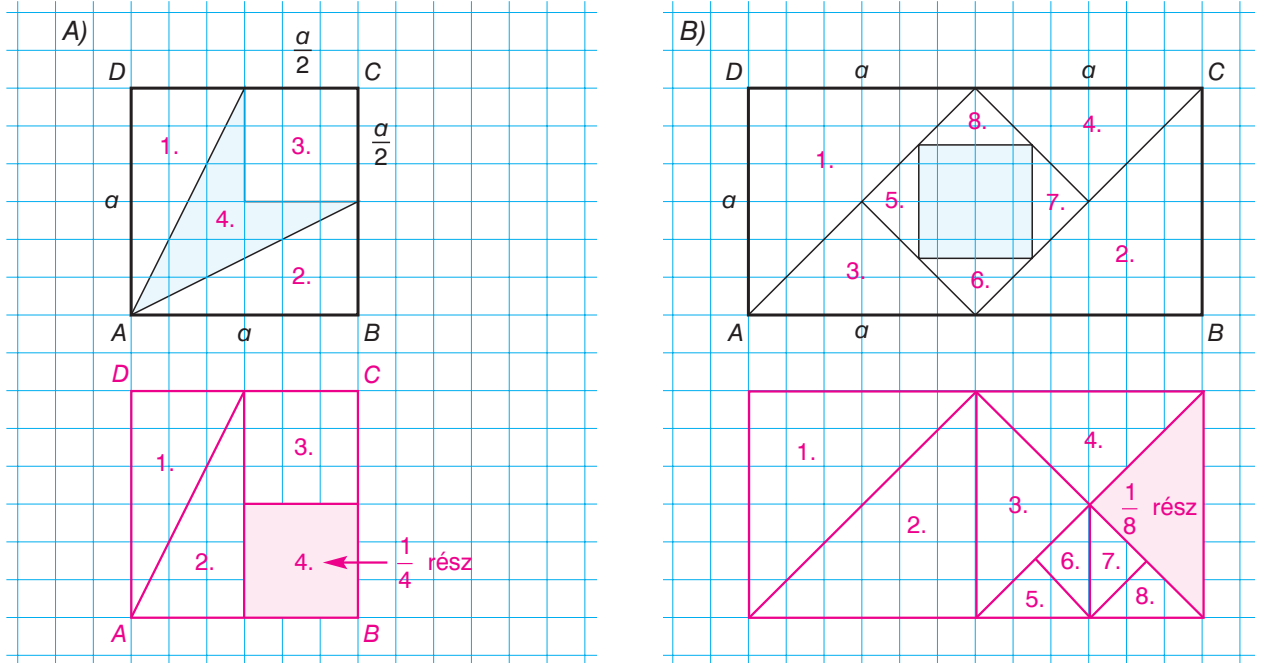


2. Mekkora a színezett rész területe?



$T_A = 8$ területegység $T_B = 8$ területegység $T_C = 15$ területegység

3. Célszerű átdarabolással határozzuk meg, hogy hányad részét színeztük ki az ABCD négyszögnek!



Az ABCD négyzet $\frac{1}{4}$ részét.
 Válasz:

Az ABCD téglalap $\frac{1}{8}$ részét.
 Válasz:

Számítsuk ki a színezett terület nagyságát, ha $a = 10$ cm!

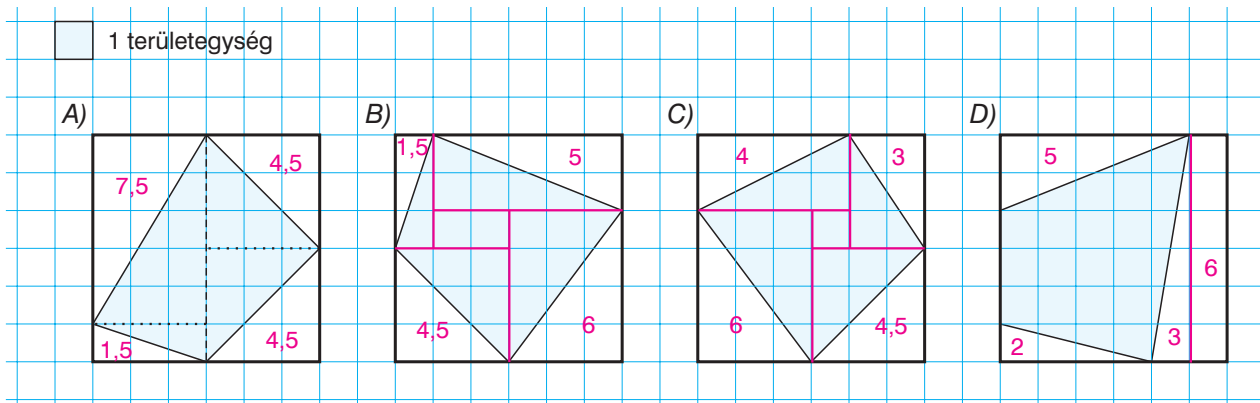
$$T_A = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 10 = \frac{100}{4} = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$T_B = \frac{1}{8} \cdot 20 \cdot 10 = \frac{200}{8} = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$



4. Írjuk fel területük nagysága szerint csökkenő sorrendben a négyzetekben lévő színezett négyszögek betűjelét! Segíthet a kimaradó részek területének megadása.

Becslés alapján a sorrend: $T_D > T_C > T_B > T_A$



$T_A = 18$ területegység $T_B = 19$ területegység $T_C = 18,5$ területegység $T_D = 20$ területegység

$$\begin{aligned} T_{\square} &= 36 \\ T_{\text{fehér}} &= 18 \\ T_A &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\square} &= 36 \\ T_{\text{fehér}} &= 17 \\ T_B &= 19 \end{aligned}$$

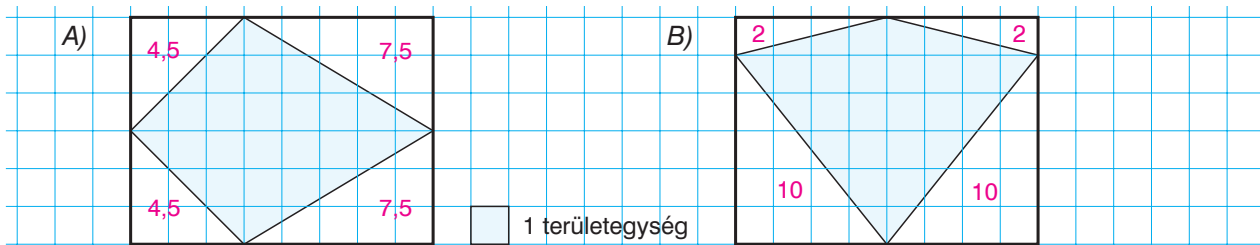
$$\begin{aligned} T_{\square} &= 36 \\ T_{\text{fehér}} &= 17,5 \\ T_C &= 18,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\square} &= 36 \\ T_{\text{fehér}} &= 16 \\ T_D &= 20 \end{aligned}$$

Számolás alapján a sorrend: $T_D > T_B > T_C > T_A$

5. Gábor a kistestvére születésnapjára sárkányt szeretne készíteni, amelynek a terveit a matekfüzetében már le is rajzolta. Melyik sárkány elkészítéséhez kell több papírt felhasználnia?

Becslés: **B) esetben lesz nagyobb a sárkány területe.**



$$\begin{aligned} T_A &= 24 \text{ területegység} \\ T_{\text{téglalap}} - T_f &= T_{\text{sárkány}} \\ T_{\text{téglalap}} &= 48 \\ T_{\text{fehér}} &= 9 + 15 = 24 \\ T_s &= 24 \end{aligned}$$

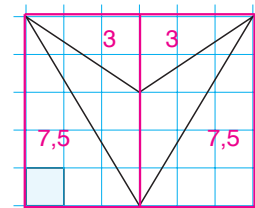
$$\begin{aligned} T_B &= 24 \text{ területegység} \\ T_{\text{téglalap}} - T_f &= T_{\text{sárkány}} \\ T_{\text{téglalap}} &= 48 \\ T_{\text{fehér}} &= 20 + 4 = 24 \\ T_s &= 24 \end{aligned}$$

Gábor mindkét sárkányhoz ugyanannyi papírt használt fel.

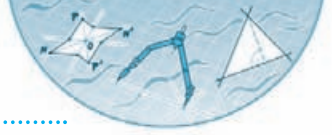
Melyik sárkány elkészítésénél nagyobb a hulladék területe? **Azonos a hulladék területe.**

6. Gábort a sárkányrepülés is érdekli, és a terve között szerepel egy motoros sárkányrepülő építése, amellyel kapcsolatos szakkönyvet is olvasott már. Ebből tudja, hogy a sárkányrepülő kifeszített szárnyfelületének 6-8 m²-nek kell lennie. Megfelel-e ennek a feltételnek az ábrán látható szárny, ha a négyzetrács színezett része 1m²?

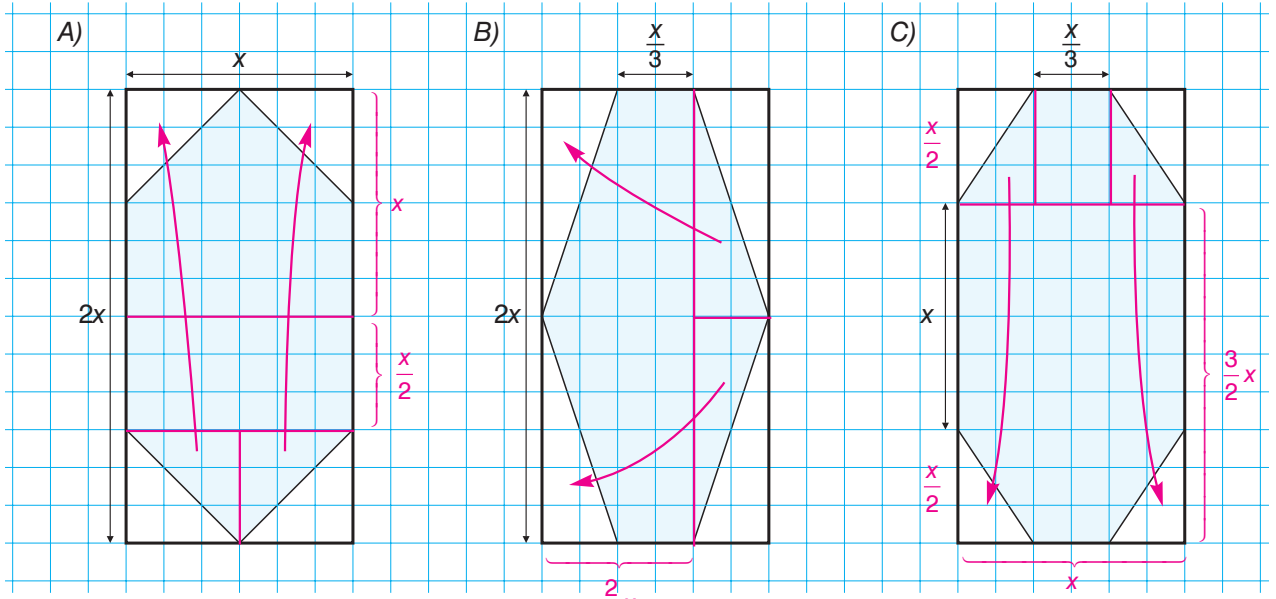
$$\begin{aligned} T_{\text{sárkány}} &= T_{\text{téglalap}} - T_{\text{háromszögek}} \\ T_{\text{sárkány}} &= 30 - (15 + 6) \\ T_{\text{sárkány}} &= 30 - 21 \\ T_{\text{sárkány}} &= 9 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$



Válasz: **Ez a szárnyfelület nagyobb a szükségesnél.**



7. Az ábra egy nyílászáró szaküzlet katalógusában látható ólomüveg ablakdíszek választékát mutatja. Mekkora a színezett üveg területe a téglalapokon belül?



$$T_A = \frac{3}{2}x^2$$

$$T_A = \left(x + \frac{x}{2}\right) \cdot x$$

$$T_A = \frac{3}{2}x \cdot x$$

$$T_A = \frac{3}{2}x^2$$

$$T_B = \frac{4}{3}x^2$$

$$T_B = \frac{2}{3}x \cdot 2x$$

$$T_B = \frac{4}{3}x^2$$

$$T_C = \frac{5}{3}x^2$$

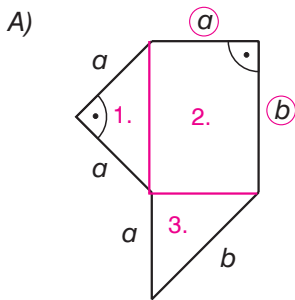
$$T_C = \frac{3}{2}x \cdot x + \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

$$T_C = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^2$$

$$T_C = \frac{9}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^2$$

$$T_C = \frac{10}{6}x^2 = \frac{5}{3}x^2$$

8. Daraboljuk fel különbözőképpen ugyanazt a lerajzolt sokszöget! Rajzoljuk meg esetenként színessel, és nevezzük el azokat a szakaszokat, amelyek megmérése szükséges a terület kiszámításához! Tervezzük meg a számítás módját!



A terv:

$$T = a^2 + ab$$

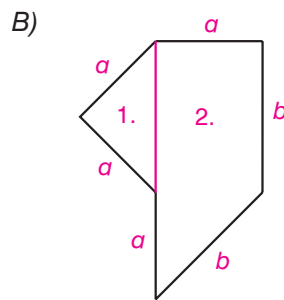
$$T_1 = T_3 = \frac{a^2}{2} \text{ derékszögű háromszög}$$

$$T_2 = a \cdot b \text{ téglalap}$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T = 2 \cdot \frac{a^2}{2} + ab$$

$$T = a^2 + ab$$



B terv:

$$T = a^2 + ab$$

$$T_1 = \frac{a^2}{2} \text{ derékszögű háromszög}$$

$$T_2 = \frac{(b+a) \cdot a}{2} \text{ trapéz}$$

$$T_2 = \frac{(2b+a) \cdot a}{2}$$

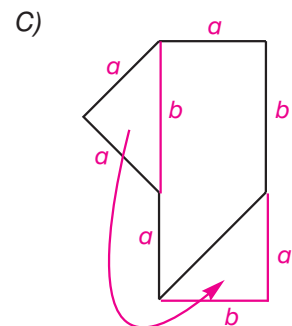
$$T_2 = \frac{2ab + a^2}{2}$$

$$T_2 = \frac{2ab}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$T = T_2 + T_1$$

$$T = ab + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$T = ab + a^2$$

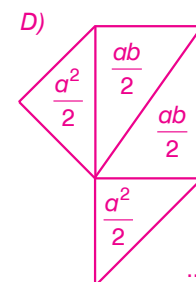


C terv:

$$T = a^2 + ab$$

$$T_{\text{téglalap}} = (a + b) \cdot a \text{ téglalap}$$

$$T = a^2 + ab$$





A négyzetgyökvonás Táblázathasználat (Kiegészítő anyag)

Számok négyzete 5,50 –				
Szám	0	1	2	3
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07

A számok négyzetének, négyzetgyökének közelítő értékét zsebszámológéppel vagy az 116–117. oldalon található négyjegyű táblázatból határozhatjuk meg.

Az 5,9 sorában a következő számok négyzete van:

$$5,90^2 = 34,81; 5,91^2 \approx 34,93; 5,92^2 \approx 35,05; 5,93^2 \approx 35,16; \dots$$

Az 5,74 négyzetét az 5,7 sorának a 4-es oszlopában találjuk meg két tizedesjegy pontossággal: $5,74^2 \approx 32,95$.

A 2,71 négyzetét a 2,7 sorának, az 1-es oszlopában találjuk meg három tizedesjegy pontossággal: $2,71^2 \approx 7,344$.

A 8,57 négyzetét a 8,5 sorának és a 7-es oszlopában találjuk meg két tizedesjegy pontossággal: $8,57^2 \approx 73,44$.

A táblázathasználat után az 1–6. feladatok megoldását ellenőrizzük számológéppel!

1. A táblázat segítségével határozzuk meg közelítőleg a következő számok négyzetét!

- a) $2,37^2 \approx \dots 5,617 \dots$ $3,57^2 \approx \dots 12,74 \dots$ $4,76^2 \approx \dots 22,66 \dots$ $5,48^2 \approx \dots 30,03 \dots$
- b) $5,32^2 \approx \dots 28,30 \dots$ $6,84^2 \approx \dots 46,79 \dots$ $8,96^2 \approx \dots 80,28 \dots$ $9,55^2 \approx \dots 91,20 \dots$
- c) $7,51^2 \approx \dots 56,40 \dots$ $2,93^2 \approx \dots 8,525 \dots$ $9,02^2 \approx \dots 81,36 \dots$ $1,57^2 \approx \dots 2,465 \dots$
- d) $5,67^2 \approx \dots 32,15 \dots$ $3,55^2 \approx \dots 12,60 \dots$ $6,28^2 \approx \dots 39,44 \dots$ $8,06^2 \approx \dots 64,96 \dots$

A táblázat használatával a 10-nél nagyobb, illetve 1-nél kisebb számok négyzetét is meghatározhatjuk:

$$27,1^2 = (2,71 \cdot 10)^2 = 2,71^2 \cdot 10^2 \approx 7,344 \cdot 100 = 734,4$$

$$271^2 = (2,71 \cdot 100)^2 = 2,71^2 \cdot 100^2 \approx 7,344 \cdot 10\,000 = 73\,440$$

$$0,271^2 = (2,71 : 10)^2 = 2,71^2 : 10^2 \approx 7,344 : 100 = 0,073\,44$$

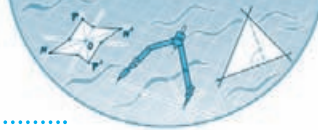
$$0,027\,149^2 = (2,7149 : 100)^2 \approx 2,71^2 : 100^2 \approx 7,344 : 10\,000 = 0,000\,734\,4$$

2. A táblázat segítségével a fenti példák alapján határozzuk meg a következő számok négyzetét!

- $23,7^2 = \dots (2,37 \cdot 10)^2 = 2,37^2 \cdot 10^2 \approx 5,617 \cdot 100 = 561,7 \dots$
- $357^2 = \dots (3,57 \cdot 100)^2 = 3,57^2 \cdot 100^2 \approx 12,74 \cdot 10\,000 = 127\,400 \dots$
- $4760^2 = \dots (4,760 \cdot 1000)^2 = 4,76^2 \cdot 1000^2 \approx 22,66 \cdot 1\,000\,000 = 22\,660\,000 \dots$
- $0,548^2 = \dots (5,48 : 10)^2 = 5,48^2 : 10^2 \approx 30,03 : 100 = 0,3003 \dots$
- $0,049^2 = \dots (4,9 : 100)^2 = 4,9^2 : 100^2 \approx 24,01 : 10\,000 = 0,002401 \dots$

3. A táblázat segítségével határozzuk meg közelítőleg a következő számok négyzetét!

- $56,78^2 = \dots (5,678 \cdot 10)^2 \approx 5,68^2 \cdot 10^2 \approx 32,26 \cdot 100 = 3226 \dots$
- $765,4^2 = \dots (7,654 \cdot 100)^2 \approx 7,65^2 \cdot 100^2 \approx 58,52 \cdot 10\,000 = 585\,200 \dots$
- $13,57^2 = \dots (1,357 \cdot 10)^2 \approx 1,36^2 \cdot 10^2 \approx 1,850 \cdot 100 = 185 \dots$
- $0,8642^2 = \dots (8,642 : 10)^2 \approx 8,64^2 : 10^2 \approx 74,65 : 100 = 0,7465 \dots$
- $0,0645^2 = \dots (6,45 : 100)^2 \approx 6,45^2 : 100^2 \approx 41,60 : 10\,000 = 0,00416 \dots$



A táblázat segítségével négyzetgyököt is vonhatunk: mivel $5,93^2 \approx 35,16$, ezért $\sqrt{35,16} \approx 5,93$.

Szám	0	1	2	3
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16

4. A táblázat segítségével vonjunk négyzetgyököt!

- a) $\sqrt{33,76} \approx 5,81$ $\sqrt{37,45} \approx 6,12$ $\sqrt{39,69} \approx 6,3$ $\sqrt{32,95} \approx 5,74$
 b) $\sqrt{1,877} \approx 1,37$ $\sqrt{4,928} \approx 2,22$ $\sqrt{6,760} \approx 2,6$ $\sqrt{16,48} \approx 4,06$
 c) $\sqrt{67,73} \approx 8,23$ $\sqrt{32,72} \approx 5,72$ $\sqrt{85,38} \approx 9,24$ $\sqrt{37,09} \approx 6,09$
 d) $\sqrt{2,56} = 1,6$ $\sqrt{67,4} \approx 8,21$ $\sqrt{6,708} \approx 2,59$ $\sqrt{67,08} \approx 8,19$

A legtöbb esetben a keresett számot nem találjuk meg a táblázatban, ilyen esetben a hozzá legközelebbi szám négyzetgyökét keressük meg. Ha például a 8-ból kell gyököt vonnunk, akkor a hozzá legközelebbi – a táblázatban található – számok a 7,952 és a 8,009. $8 - 7,952 = 0,048$. $8,009 - 8 = 0,009$. Az utóbbit választva $\sqrt{8} \approx 2,83$.

Mennyi a $\sqrt{39}$? A táblázatban található, a 39-hez legközelebbi számok a 38,94 és a 39,06 – eltérésük 39-től mindkét esetben 0,06 –, így bármelyik négyzetgyökét tekinthetjük $\sqrt{39}$ -nek, azaz $\sqrt{39} \approx 6,24$ -nek, vagy $\sqrt{39} \approx 6,25$ -nek is elfogadható a táblázat alapján.

Mennyi a $\sqrt{10}$? A táblázatban található, a 10-hez legközelebbi számok a 9,986 és a 10,05 – a különbség az egyik esetben 0,014, a másik esetben 0,05 –, és $0,014 < 0,05$ miatt $\sqrt{10} \approx 3,16$.

5. A táblázat segítségével vonjunk négyzetgyököt!

- a) $\sqrt{20} \approx 4,47$ $\sqrt{5} \approx 2,24$ $\sqrt{68} \approx 8,25$ $\sqrt{40} \approx 6,32$
 b) $\sqrt{12,78} \approx 3,57$ vagy $3,58$ $\sqrt{57,1} \approx 7,56$ $\sqrt{2,946} \approx 1,72$ $\sqrt{95,55} \approx 9,77$ vagy $9,78$

A táblázatból eddig csak 1-nél nagyobb és 99,8-nál kisebb számok négyzetgyökét kerestük ki, de bármely szám négyzetgyökét – közelítőleg – meghatározhatjuk. Ha például a 734,4-ből kell gyököt vonnunk, a táblázatban megtaláljuk a 73,44 és a 7,344 számokat.

Az első esetben $\sqrt{734,4} = \sqrt{73,44 \cdot 10} = \sqrt{73,44} \cdot \sqrt{10} \approx 8,57 \cdot 3,16$ miatt még egy hosszadalmas szorzást is el kell végeznünk.

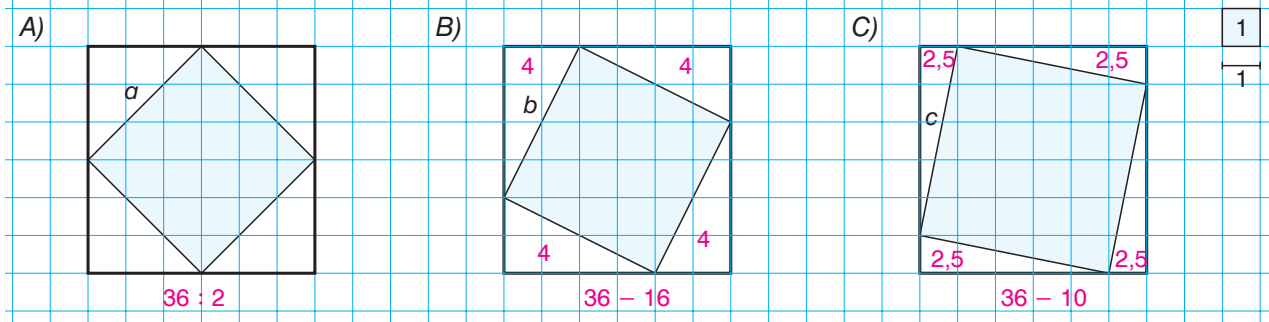
A második esetben $\sqrt{734,4} = \sqrt{7,344 \cdot 100} = \sqrt{7,344} \cdot \sqrt{100} \approx 2,71 \cdot 10 = 27,1$ – a 10-zel való szorzás fejben elvégezhető. A példák alapján a négyzetgyök megkeresése könnyebb, ha a tizedesvessző helyét úgy választjuk meg, hogy a tíz hatványa páros kitevővel szerepeljen:

$\sqrt{7,344} \approx 2,71$ $\sqrt{73,44} \approx 8,57$
 $\sqrt{734,4} = \sqrt{7,344 \cdot 100} \approx 2,71 \cdot 10 = 27,1$ $\sqrt{7344} = \sqrt{73,44 \cdot 100} \approx 8,57 \cdot 10 = 85,7$
 $\sqrt{0,07344} = \sqrt{7,344 : 100} \approx 2,71 : 10 = 0,271$ $\sqrt{0,7344} = \sqrt{73,44 : 100} \approx 8,57 : 10 = 0,857$

6. A fenti példák alapján vonjunk négyzetgyököt a táblázat segítségével!

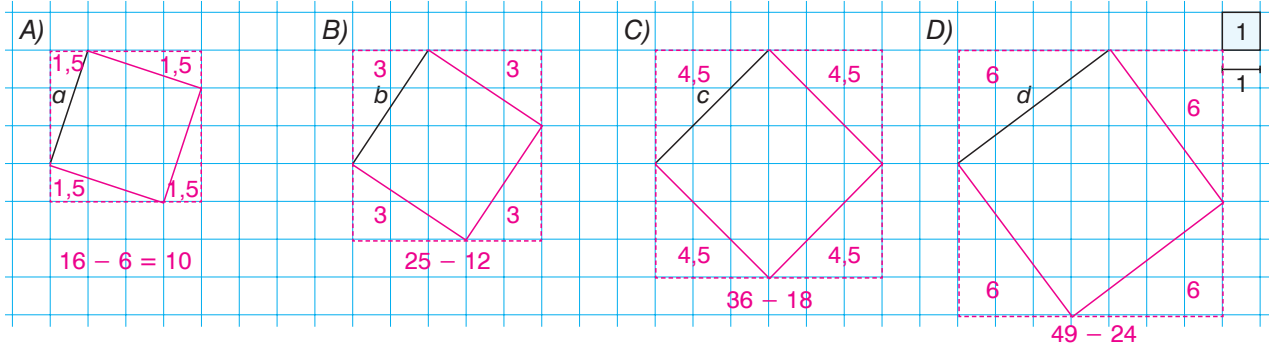
- a) $\sqrt{4,928} \approx 2,22$ b) $\sqrt{49,28} \approx 7,02$
 $\sqrt{492,8} = \sqrt{4,928 \cdot 100} \approx 2,22 \cdot 10 = 22,2$ $\sqrt{4928} = \sqrt{49,28 \cdot 100} \approx 7,02 \cdot 10 = 70,2$
 $\sqrt{49280} = \sqrt{4,928 \cdot 10\,000} \approx 2,22 \cdot 100 = 222$ $\sqrt{0,4928} = \sqrt{49,28 : 100} \approx 7,02 : 10 = 0,702$
 $\sqrt{0,04928} = \sqrt{4,928 : 100} \approx 2,22 : 10 = 0,222$ $\sqrt{0,004928} = \sqrt{49,28 : 10\,000} \approx 7,02 : 100 = 0,0702$

7. Legyen a négyzetrács egyik négyzete az egységnégyzet (oldalhossza a hosszúságegység, területe a terület-egység)! Számítsuk ki a színes négyzetek területét, majd határozzuk meg az oldalhosszúságát!



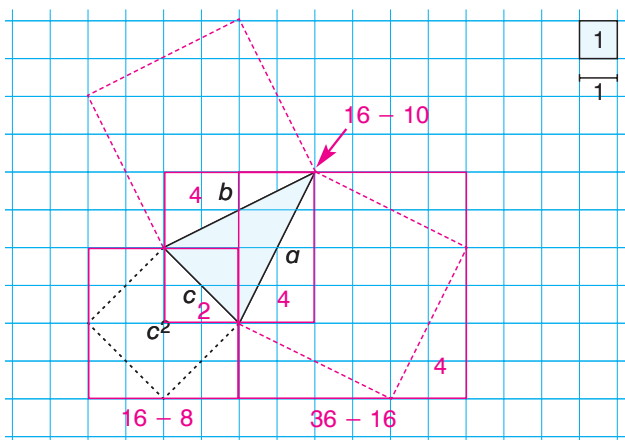
$T_A = 18$ $T_B = 20$ $T_C = 26$
 $a = \sqrt{18} \approx 4,24$ $b = \sqrt{20} \approx 4,47$ $c = \sqrt{26} \approx 5,1$

8. Legyen a négyzetrács egyik négyzete az egységnégyzet (oldalhossza a hosszúság-, területe a terület-egység)! Rajzoljunk az adott szakaszokra – mint oldalakra – négyzetet! Határozzuk meg a kapott négyzetek területét! Írjuk fel, majd határozzuk meg a kapott négyzetek oldalhosszúságát!

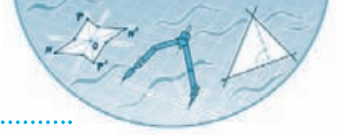


$T_A = 10$ $T_B = 13$ $T_C = 18$ $T_D = 25$
 $a = \sqrt{10} \approx 3,16$ $b = \sqrt{13} \approx 3,61$ $c = \sqrt{18} \approx 4,24$ $d = \sqrt{25} \approx 5$

- *9. Legyen a négyzetrács egyik négyzete az egységnégyzet! Rajzoljunk a színes háromszög oldalaira kifelé (az adott oldallal egyenlő oldalhosszúságú) négyzeteket! Határozzuk meg a kapott négyzetek területét! Számítsuk ki a kapott négyzetek oldalhosszúságát! Mekkora az adott háromszög kerülete és területe?



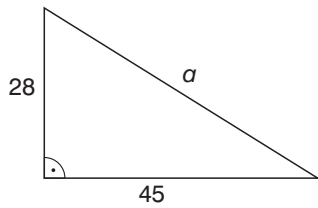
$a^2 = 20$ $a = \sqrt{20}$
 $b^2 = 20$ $b = \sqrt{20}$
 $c^2 = 8$ $c = \sqrt{8}$
 $T_{\Delta} = 16 - (4 + 4 + 2)$ $K_{\Delta} = 2 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{8}$
 $T_{\Delta} = 16 - 10$ $K_{\Delta} \approx 2 \cdot 4,47 + 2,83$
 $T_{\Delta} = 6$ $K_{\Delta} \approx 11,77$



Pitagorasz tétele

1. A derékszögű háromszögek két-két oldala mérőszámának ismeretében számítsuk ki a harmadik oldal hosszúságát!

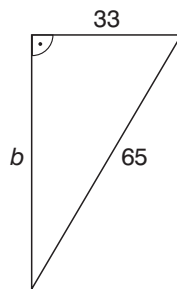
a)



Keressük az átfogót!

$$\begin{aligned} 28^2 + 45^2 &= a^2 \\ (2,8 \cdot 10)^2 + (4,5 \cdot 10)^2 &= a^2 \\ 784 + 2025 &= a^2 \\ 2809 &= a^2 \\ \sqrt{2809} &= a \\ 53 &= a \end{aligned}$$

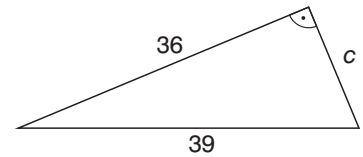
b)



Keressük a befogót!

$$\begin{aligned} b^2 + 33^2 &= 65^2 \\ b^2 &= 65^2 - 33^2 \\ b^2 &= 4225 - 1089 \\ b^2 &= 3136 \\ b &= \sqrt{3136} \\ b &= 56 \end{aligned}$$

c)



$$\begin{aligned} 36^2 + c^2 &= 39^2 \\ c^2 &= 39^2 - 36^2 \\ c^2 &= 1521 - 1296 \\ c^2 &= 225 \\ c &= \sqrt{225} \\ c &= 15 \end{aligned}$$

2. Egy derékszögű háromszög befogóit a -val és b -vel jelöltük, az átfogóját c -vel. Töltsük ki a táblázat hiányzó mezőit!

a	3	5	8	7	11	9	20	20
b	4	12	15	24	60	40	21	99
c	5	13	17	25	61	41	29	101

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= c^2 \\ 9 + 16 &= c^2 \\ 25 &= c^2 \\ \sqrt{25} &= c \\ 5 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17^2 - 15^2 &= a^2 \\ 289 - 225 &= a^2 \\ 64 &= a^2 \\ \sqrt{64} &= a \\ 8 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11^2 + 60^2 &= c^2 \\ 121 + 3600 &= c^2 \\ 3721 &= c^2 \\ \sqrt{3721} &= c \\ 61 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20^2 + 21^2 &= c^2 \\ 400 + 441 &= c^2 \\ 841 &= c^2 \\ \sqrt{841} &= c \\ 29 &= c \end{aligned}$$

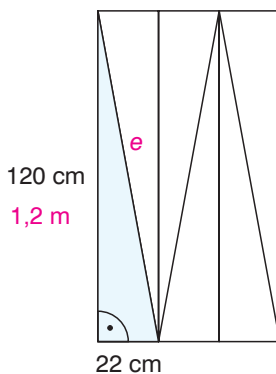
$$\begin{aligned} 13^2 - 5^2 &= b^2 \\ 169 - 25 &= b^2 \\ 144 &= b^2 \\ \sqrt{144} &= b \\ 12 &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25^2 - 7^2 &= b^2 \\ 625 - 49 &= b^2 \\ 576 &= b^2 \\ \sqrt{576} &= b \\ 24 &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 41^2 - 40^2 &= a^2 \\ 1681 - 1600 &= a^2 \\ 81 &= a^2 \\ \sqrt{81} &= a \\ 9 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 101^2 - 99^2 &= a^2 \\ 10201 - 9801 &= a^2 \\ 400 &= a^2 \\ \sqrt{400} &= a \\ 20 &= a \end{aligned}$$

3. Egy kerítés elkészítéséhez vaspálcákat vesznek, ezek összehegesztésével készül el a 22 méter hosszú kerítés. A kerítés magasságát, valamint a függőleges pálcák egymástól mért távolságát a tervrajz mutatja. Hány méter vaspálcát használunk fel, ha a vastagságtól és a hulladéktól most eltekintünk?



A kerítés aljához: 22 m
 A kerítés tetejéhez: 22 m
 A függőleges pálcákhoz: $1,2 \cdot 101 = 121,2$ m
 Az átlós pálcákhoz: $1,22 \cdot 100 = 122$ m
 összesen: $44 + 121,2 + 122 = 287,2$ m

$$\begin{aligned} 120^2 + 22^2 &= e^2 \\ 14\,400 + 484 &= e^2 \\ 14\,884 &= e^2 \\ 122 &= e \end{aligned}$$

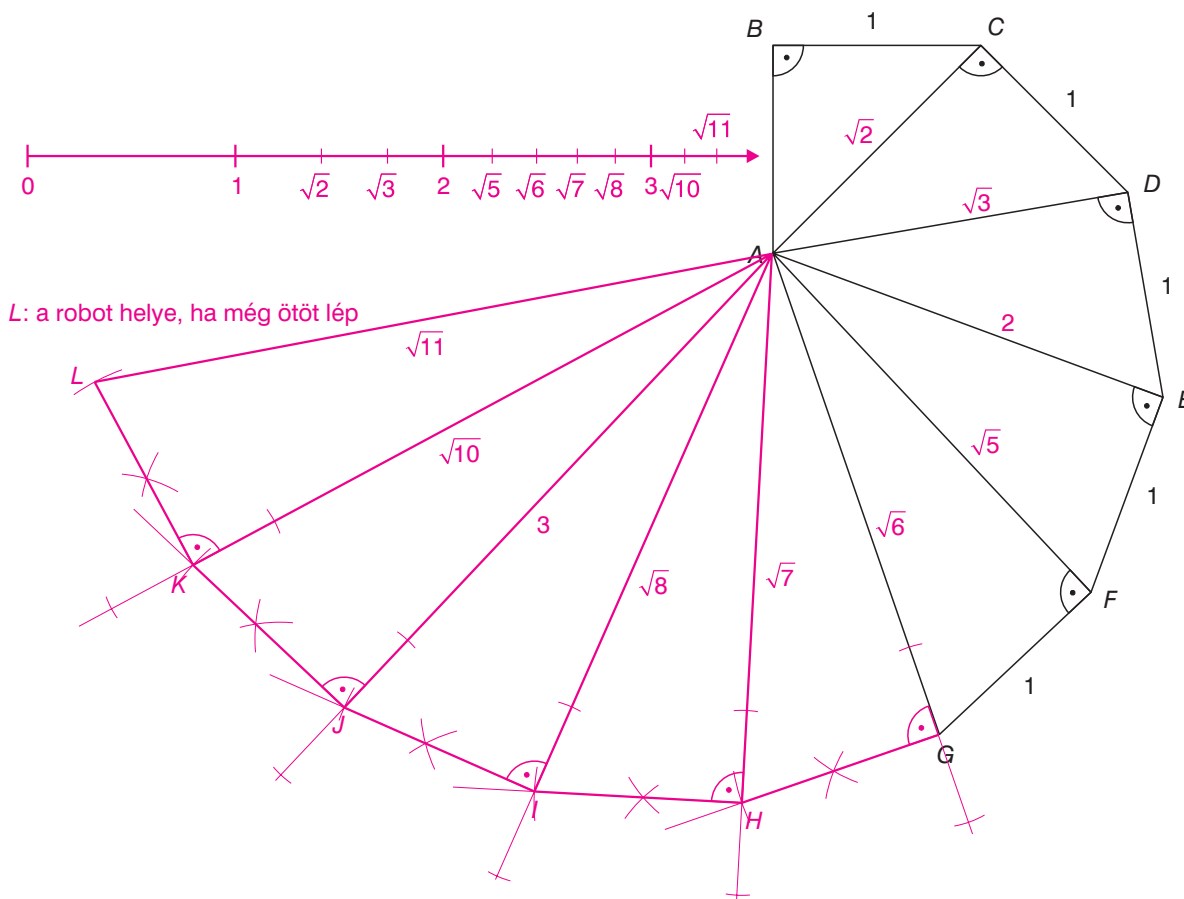
Válasz:**287,2**..... méter vaspálcát használunk fel a kerítéshez.



4. Egy robot az A pontból indul, és mindig egységnyi hosszúkat lép. Útját az ABCDEFG... törött vonal mutatja. Folytassuk a szerkesztést! Hol áll a robot, ha még ötöt lép? Töltsük ki a táblázatot!

Szakasz	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
A robot távolsága A-tól	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$

Mi lesz ezen szakaszok hosszából képzett sorozat 20. tagja? $\sqrt{20}$



A szerkesztés segítségével a(z) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5} \dots$ ábrázolható számegyenesen.

5. Mekkora a félkörök területének összege, ha a derékszögű háromszög átfogója 10 cm, egyik befogója 6 cm?

$b = 8$ cm

$T_1 = 4,5 \cdot \pi$ cm²; $T_2 = 8 \cdot \pi$ cm²; $T_3 = 12,5 \cdot \pi$ cm²

$T = T_1 + T_2 + T_3 = 25 \cdot \pi$ cm²

$a = 6$ cm
 $b = ?$ cm
 $c = 10$ cm

$a^2 + b^2 = c^2$
 $36 + b^2 = 100$
 $b^2 = 64$
 $b = 8$

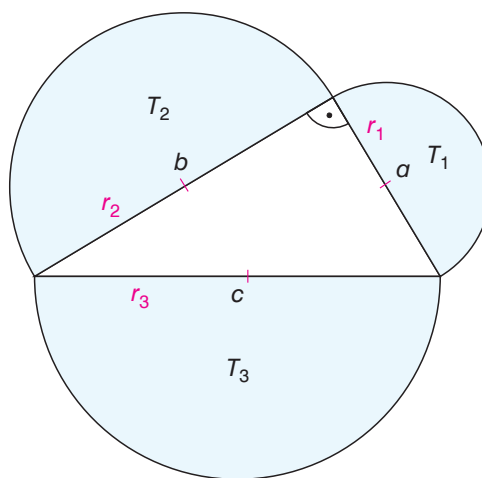
$T_{\text{félkör}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

$T_1 = \frac{3^2 \cdot \pi}{2} = \frac{9}{2} \pi = 4,5 \pi$ (cm²)

$T_2 = \frac{4^2 \cdot \pi}{2} = \frac{16}{2} \pi = 8 \pi$ (cm²)

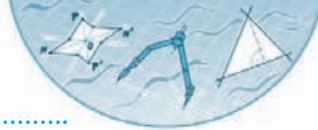
$T_3 = \frac{5^2 \cdot \pi}{2} = \frac{25}{2} \pi = 12,5 \pi$ (cm²)

$T = 25 \pi$ cm²



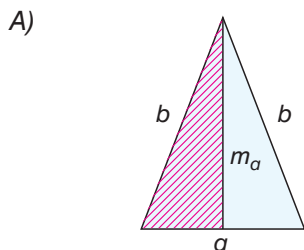
$4,5 \pi + 8 \pi = 12,5 \pi$
 $T_1 + T_2 = T_3$

Válasz: $T = 25 \pi$ cm² Ez éppen az átfogó köré rajzolt kör területe.



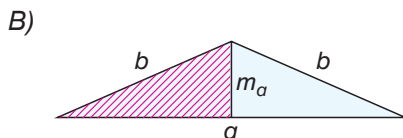
A Pitagorasz-tétel alkalmazásai

1. Határozzuk meg a tengelyesen szimmetrikus háromszögek ismeretlen oldalait, majd számítsuk ki a kerületeket!



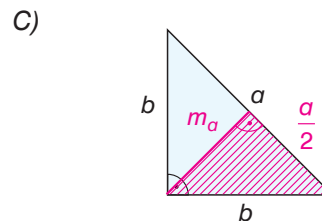
$$a = 24 \text{ cm}$$

$$m_a = 35 \text{ cm}$$



$$b = 65 \text{ cm}$$

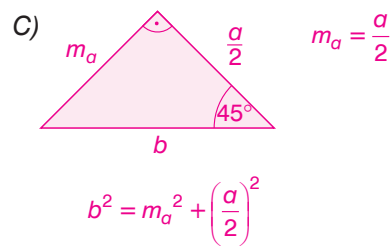
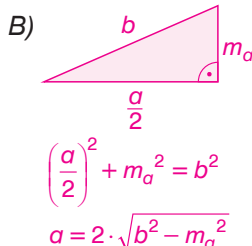
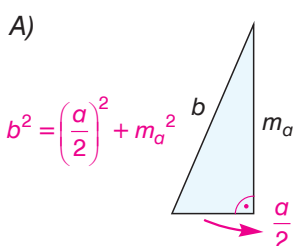
$$m_a = 16 \text{ cm}$$



$$a = 18 \text{ cm}$$

$$m_a = 9 \text{ cm}$$

- (1) Csíkozzuk be, majd rajzoljuk is le azt a derékszögű háromszöget, melyre felírható a tétel!



- (2) A meglévő adatok segítségével határozzuk meg a szükséges adatokat!

$$b^2 = 12^2 + 35^2$$

$$b^2 = 144 + 1225$$

$$b = \sqrt{1369}$$

$$b = 37 \text{ cm}$$

$$a = 2 \cdot \sqrt{4225 - 256}$$

$$a = 2 \cdot \sqrt{3969}$$

$$a = 2 \cdot 63$$

$$a = 126 \text{ cm}$$

$$b^2 = 81 + 81$$

$$b = \sqrt{162}$$

$$b \approx 12,7 \text{ cm}$$

- (3) Számítsuk ki a háromszög kerületét!

$$K_A = a + 2b$$

$$K_A = 24 + 2 \cdot 37$$

$$K_A = 98 \text{ cm.}$$

$$K_B = a + 2b$$

$$K_B = 126 + 2 \cdot 65$$

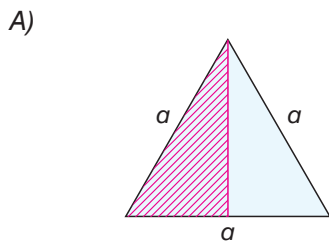
$$K_B = 256 \text{ cm.}$$

$$K_C = a + 2b$$

$$K_C \approx 18 + 2 \cdot 12,7$$

$$K_C \approx 43,4 \text{ cm.}$$

- *2. Számítsuk ki a szabályos háromszögek, illetve a szabályos hatszög területét a hiányzó adat meghatározása után!



$$a = 18 \text{ cm}$$

$$\text{Szükséges adat: } m_a \approx 15,6 \text{ cm}$$

$$18^2 - 9^2 = m_a^2$$

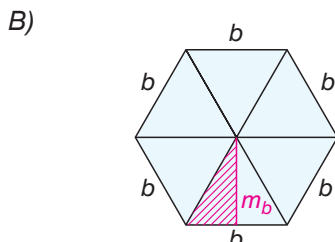
$$324 - 81 = m_a^2$$

$$\sqrt{243} = m_a$$

$$15,6 \approx m_a$$

$$T_A = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{18 \cdot 15,6}{2} = 140,4 (\text{cm}^2)$$

$$T_A \approx 140,4 \text{ cm}^2.$$



$$b = 9 \text{ cm}$$

$$\text{Szükséges adat: } m_b \approx 7,8 \text{ cm}$$

$$9^2 - 4,5^2 = m_b^2$$

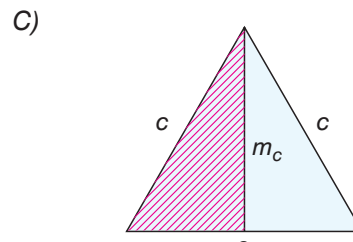
$$81 - 20,25 = m_b^2$$

$$\sqrt{60,75} = m_b$$

$$7,79 \approx m_b$$

$$T_B = 6 \cdot \frac{b \cdot m_b}{2} = 3 \cdot 9 \cdot 7,8 (\text{cm}^2)$$

$$T_B \approx 210,6 \text{ cm}^2.$$



$$m_c = 18 \text{ cm}$$

$$\text{Szükséges adat: } c = 20,8 \text{ cm}$$

$$c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = m_c^2$$

$$\frac{3}{4} \cdot c^2 = 18^2$$

$$c^2 = 324 : \frac{3}{4}$$

$$c = \sqrt{432}$$

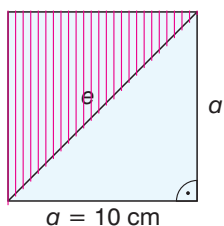
$$c \approx 20,78$$

$$T_C = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{20,8 \cdot 18}{2} = 187,2 (\text{cm}^2)$$

$$T_C \approx 187,2 \text{ cm}^2.$$



3. a) Egy négyzet alakú csempe oldalából ($a = 10$ cm) számítsuk ki egy átlójának hosszát! Csikozzuk be azt a derékszögű háromszöget, amely a megoldáshoz vezethet!



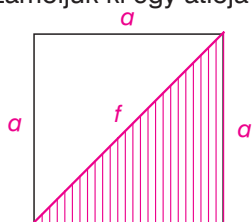
$$\begin{aligned}
 a^2 + a^2 &= e^2 & \text{vagy} & & 2a^2 &= e^2 \\
 2a^2 &= e^2 & & & 100 \cdot 2 &= e^2 \\
 200 &= e^2 & & & \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} &= e \\
 \sqrt{200} &= e & & & 10 \cdot \sqrt{2} &= e \\
 \sqrt{2 \cdot 100} &= e & & & 10 \cdot 1,41 &\approx e \\
 14,1 &\approx e & & & 14,1 &\approx e
 \end{aligned}$$

$e \approx \dots 14,1 \dots$ cm

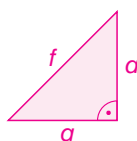
b) Egy négyzet alakú padlóburkoló lap területe 4 dm^2 .

Igaz-e, hogy az átlója 30 centiméternél rövidebb? $28,3 \text{ cm} < 30 \text{ cm}$, igaz.

Számoljuk ki egy átlója hosszát!



$$\begin{aligned}
 T_{\text{négyzet}} &= a^2 \\
 400 &= a^2 \\
 \sqrt{400} &= a \\
 20 &= a
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2a^2 &= f^2 \\
 2 \cdot 400 &= f^2 \\
 800 &= f^2 \\
 10 \cdot \sqrt{8} &= f \\
 10 \cdot 2,83 &\approx f \\
 28,3 &\approx f
 \end{aligned}$$

$T = 4 \text{ dm}^2$.

$f \approx \dots 28,3 \dots$ cm

4. A háromszögben feltüntetett adatok segítségével adjuk meg az AB szakasz hosszát, ha $m_c = 12$ cm!

(1)

(2)

(3)

$AB = AT + TB$

$AB = \dots 32,8 \dots$ cm

$AT \approx \dots 20,8 \dots$ cm

$AT^2 = b^2 - m_c^2$

$AT^2 = 24^2 - 12^2$

$AT^2 = 576 - 144$

$AT^2 = \sqrt{432}$

$AT \approx 20,8$

$AT \approx \dots 20,8 \dots$ cm

$AT^2 = 24^2 - 12^2$

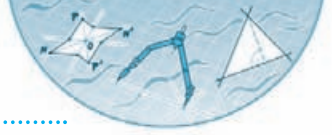
$AT^2 = 576 - 144$

$AT^2 = \sqrt{432}$

$AT \approx 20,8$

$AT \approx \dots 20,8 \dots$ cm

$AB \approx \dots 32,8 \dots$ cm



5. a) Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat!

A (3; 4)

B (-5; 2)

C (-2; -6)

D (6; 0)

b) Milyen távolságra vannak ezek a pontok az origótól?

$$3^2 + 4^2 = AO^2$$

$$\sqrt{25} = AO$$

AO = 5 hosszúságegység

$$5^2 + 2^2 = BO^2$$

$$\sqrt{29} = BO$$

BO = $\sqrt{29} \approx 5,4$ hosszúságegység

$$2^2 + 6^2 = CO^2$$

$$\sqrt{40} = CO$$

CO = $\sqrt{40} \approx 6,3$ hosszúságegység

DO = 6 hosszúságegység

c) Határozzuk meg a pontok egymástól mért távolságait a koordináta-rendszerben!

AB \approx 8,25 he

AC \approx 11,2 he

AD = 5 he

$$8^2 + 2^2 = AB^2$$

$$64 + 4 = AB^2$$

$$\sqrt{68} = AB$$

$$8,25 \approx AB$$

$$5^2 + 10^2 = AC^2$$

$$25 + 100 = AC^2$$

$$\sqrt{125} = AC$$

$$11,18 \approx AC$$

$$3^2 + 4^2 = AD^2$$

$$9 + 16 = AD^2$$

$$\sqrt{25} = AD$$

$$5 = AD$$

BC \approx 8,54 he

BD \approx 11,2 he

CD = 10 he

$$3^2 + 8^2 = BC^2$$

$$9 + 64 = BC^2$$

$$\sqrt{73} = BC$$

$$8,54 \approx BC$$

$$11^2 + 2^2 = BD^2$$

$$121 + 4 = BD^2$$

$$\sqrt{125} = BD$$

$$11,18 \approx BD$$

$$8^2 + 6^2 = CD^2$$

$$64 + 36 = CD^2$$

$$\sqrt{100} = CD$$

$$10 = CD$$

d) Színezzük az ABCD négyszög oldalait, és számítsuk ki a kerületét!

$$AB + BC + CD + DA = 8,25 + 8,54 + 10 + 5 = 31,79$$

K \approx 31,79 hosszúságegység.

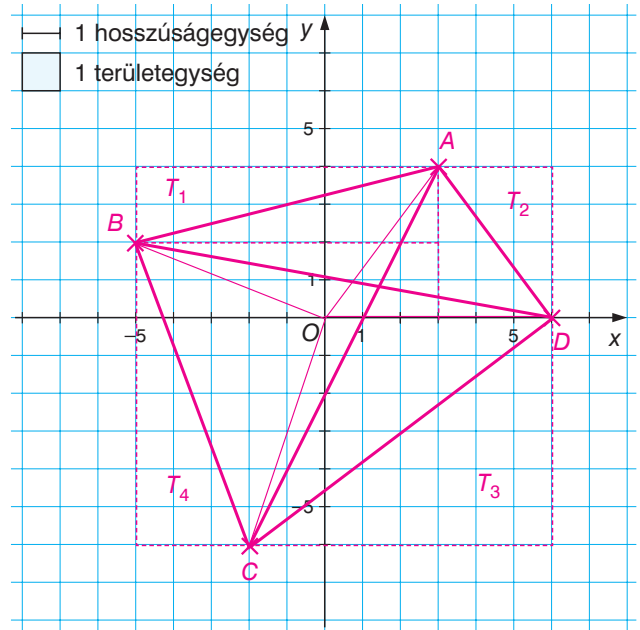
e) Határozzuk meg az ABCD négyszög területét!

$$T_{\text{téglalap}} - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = T_{ABCD}$$

$$11 \cdot 10 - \left(\frac{2 \cdot 8}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{6 \cdot 8}{2} + \frac{3 \cdot 8}{2} \right) =$$

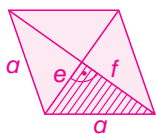
$$= 110 - (8 + 6 + 24 + 12) = 110 - 50 = 60$$

T = 60 területegység.



6. Egy nyári napon felhőszakadás volt, és egy óra alatt 10 mm eső esett egy rombusz alakú városrészre, melynek oldala 283,5 m, átlója pedig 351 m. Hány hektoliter esővizet jelentett ez ezen a területen?

a) Hány méter a rombusz másik átlója? Rajzoljunk vázlatrajzot! Színezzük ki azt a derékszögű háromszöget, melyre felírható a Pitagorasz-tétel!



$$\begin{aligned} a &= 283,5 \text{ m} \\ e &= 351 \text{ m} \\ \frac{e}{2} &= 175,5 \text{ m} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 &= \left(\frac{f}{2}\right)^2 \\ 283,5^2 - 175,5^2 &= \left(\frac{f}{2}\right)^2 \\ \sqrt{49572} &= \frac{f}{2} \\ 222,65 &= \frac{f}{2} \\ 445,3 &= f \end{aligned}$$

$$f \approx 445,3 \text{ m.}$$



b) Mekkora területen helyezkedik el ez a városrész?

$$\begin{aligned} T &= \frac{e \cdot f}{2} \\ T &= \frac{351 \cdot 445,3}{2} \\ T &\approx 78\,150 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

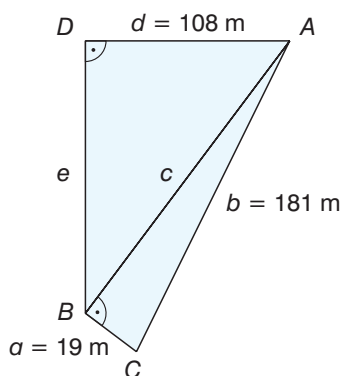
$$T \approx 78\,150 \text{ m}^2.$$

c) Hány hektoliter a lehullott csapadék?

$$\begin{aligned} m &= 0,01 \text{ m} \\ V_{\text{csapadék}} &= T \cdot m \\ V_{\text{csapadék}} &\approx 78\,150 \cdot 0,01 \\ V_{\text{csapadék}} &\approx 781,5 \text{ (m}^3\text{)} \\ 1 \text{ m}^3 &= 10 \text{ hl} \\ 781,5 \text{ m}^3 &= 7\,815 \text{ hl} \end{aligned}$$

$$\text{Csapadék} = 7\,815 \text{ hl.}$$

7. Az ábra egy horgásztóról készült. Mekkora a víztükör területe?



Az ABC_{Δ} -ben

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - a^2 \\ c^2 &= 181^2 - 19^2 \\ c^2 &= 32\,400 \\ c &= \sqrt{32\,400} \\ c &= 180 \end{aligned}$$

$$c = 180 \text{ m}$$

$$T_{ABC\Delta} = \frac{c \cdot a}{2}$$

$$T_{ABC\Delta} = \frac{180 \cdot 19}{2} = 1710 \text{ (m}^2\text{)}$$

Az ADB_{Δ} -ben

$$\begin{aligned} e^2 &= c^2 - d^2 \\ e^2 &= 180^2 - 108^2 \\ e^2 &= 32\,400 - 11\,664 \\ e &= \sqrt{20\,736} \\ e &= 144 \end{aligned}$$

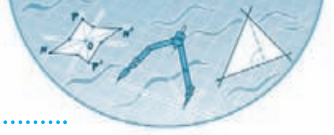
$$e = 144 \text{ m}$$

$$T_{ABD\Delta} = \frac{d \cdot e}{2}$$

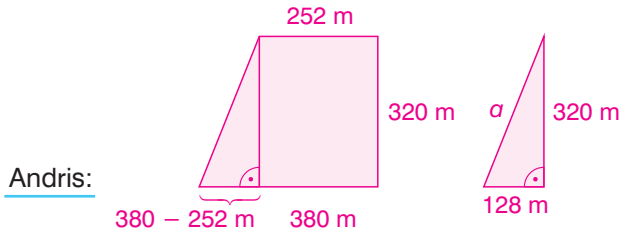
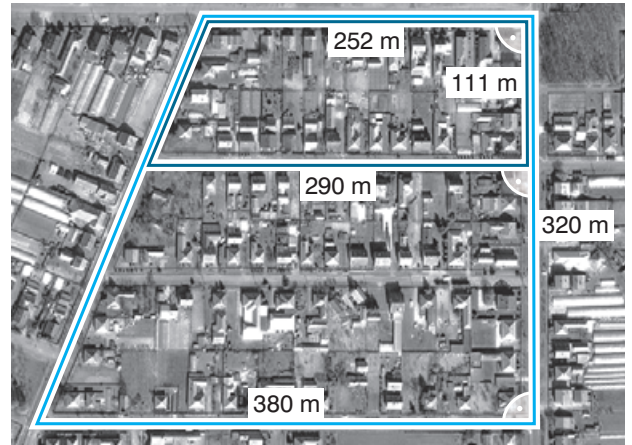
$$T_{ABD\Delta} = \frac{108 \cdot 144}{2} = 7\,776 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{Válasz: } T = 9486 \text{ m}^2.$$

$$\begin{aligned} T &= T_{ABC\Delta} + T_{ABD\Delta} \\ T &= 1710 + 7776 \\ T &= 9486 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$



8. Andris és öccse kerékpároznak. Útjukat a rajzon különböző színnel jelöltük. Mennyivel biciklizett többet Andris (világoskék) az öccsénél (sötétkék), ha háromszor kerültek meg a kiválasztott háztömböket? Készítsünk külön-külön vázlatrajzot Andris és az öccse útjáról! Emeljük ki színessel a vázlaton azt a derékszögű háromszöget, amely segítségével kiszámítható a szükséges adat!



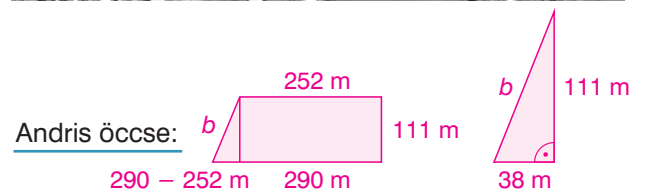
$$a^2 = 320^2 + 128^2$$

$$a = \sqrt{118784}$$

$$a = 344,7 \text{ (m)}$$

$$A_{\text{út}} = (380 + 320 + 252 + 344,7) \cdot 3$$

$$A_{\text{út}} = 1296,7 \cdot 3 = 3890,1 \text{ (m)}$$



$$b^2 = 111^2 + 38^2$$

$$b = \sqrt{13765}$$

$$b = 117,3 \text{ (m)}$$

$$B_{\text{út}} = (290 + 111 + 252 + 117,3) \cdot 3$$

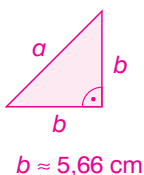
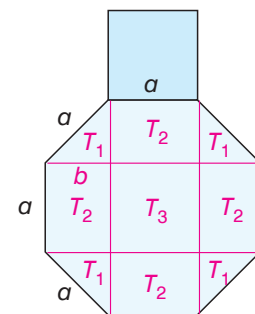
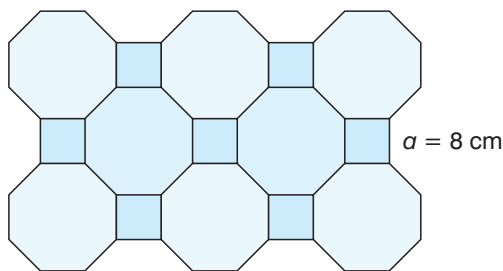
$$B_{\text{út}} = 770,3 \cdot 3 = 2310,9 \text{ (m)}$$

Andris útja: ≈ 3890 m.

Öccsének útja: ≈ 2311 m.

Andris 1579 méterrel többet biciklizett a három „kör” megtételekor.

9. A díszburkolatot szabályos nyolcszöglapokból és az oldalaihoz illeszkedő négyzetlapokból rakták ki. A négyzet oldala 8 cm. Mekkora egy nyolcszöglap területe? Rajzoljuk be azt a derékszögű háromszöget, amely segítségével a szükséges adat kiszámítható!



$$a^2 = b^2 + b^2$$

$$a^2 = 2 \cdot b^2$$

$$64 = 2 \cdot b^2$$

$$32 = b^2$$

$$\sqrt{32} = b$$

$$5,66 \approx b$$

$$T_{\text{nyolcszög}} = 4 \cdot T_1 + 4 \cdot T_2 + T_3$$

$$T_{\text{nyolcszög}} = 4 \cdot \frac{b^2}{2} + 4 \cdot a \cdot b + a^2$$

$$T_{\text{nyolcszög}} = 2 \cdot 32 + 4 \cdot 8 \cdot 5,66 + 64$$

$$T_{\text{nyolcszög}} = 128 + 181,12$$

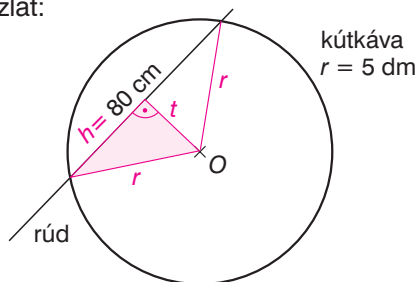
$$T_{\text{nyolcszög}} = 309,12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Egy nyolcszöglap területe: ≈ 309 cm².

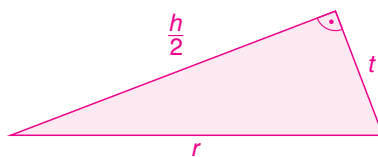


10. Egy 5 dm sugarú, kör alakú kútkáva átfektetnek egy rudat. A rúd két alátámasztási pontja között a távolság 80 cm. Milyen messze van a rúd a kútkáva középpontjától? Fejezzük be a vázlatrajzot!

Vázlat:



$h = 80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}$



$$t^2 = r^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$t^2 = 25 - 16$$

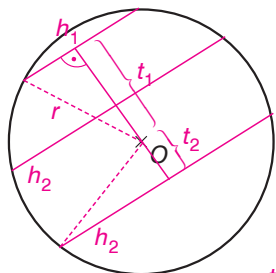
$$t = 3$$

Válasz: 3 dm-re van a rúd a kútkáva középpontjától.

11. Ildi egy 13 cm sugarú körből egy $h_1 = 10$ cm-es húrral kijelölt egy körszeletet. Klári az előbbi húrral párhuzamos $h_2 = 24$ centiméteres hűrt rajzolt ugyanabba a körbe.

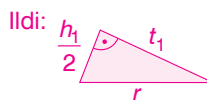
Milyen távolságra lehet a Klári által rajzolt húr az Ildi által kijelölt hűrtől? Rajzoljunk is!

Vázlat:

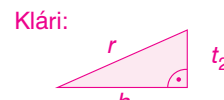


$r = 13 \text{ cm}$
 $h_1 = 10 \text{ cm}$
 $h_2 = 24 \text{ cm}$
 $t_1 = ?$
 $t_2 = ?$

$t_1 - t_2 = 12 - 5 = 7 \text{ (cm)}$
 $t_1 + t_2 = 12 + 5 = 17 \text{ (cm)}$



$t_1^2 = r^2 - \left(\frac{h_1}{2}\right)^2$
 $t_1^2 = 169 - 25$
 $t_1 = \sqrt{144}$
 $t_1 = 12 \text{ (cm)}$

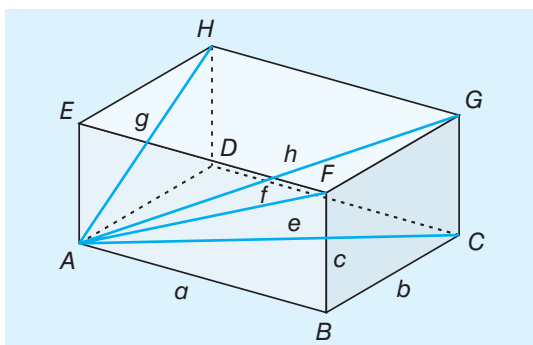


$t_2^2 = r^2 - \left(\frac{h_2}{2}\right)^2$
 $t_2^2 = 169 - 144$
 $t_2 = \sqrt{25}$
 $t_2 = 5 \text{ (cm)}$

A húrok egymástól 7 cm, illetve 17 cm távolságra lehetnek.

12. Adott egy téglatest egy csúcsából kiinduló három éle: $a = 12 \text{ cm}$; $b = 9 \text{ cm}$; $c = 8 \text{ cm}$.

Mekkorák a téglatest lapátlói és testátlója?

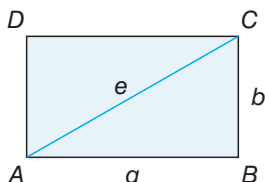
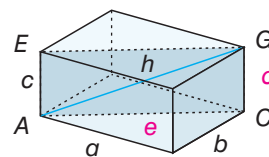


e, f, g lapátlók
 h testátló

5.

testátló

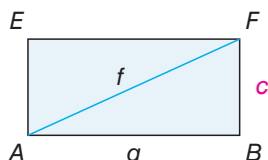
$h^2 = (a^2 + b^2) + c^2$
 $h^2 = 144 + 81 + 64$
 $h^2 = 289$
 $h = 17$



1.

$a^2 + b^2 = e^2$
 $12^2 + 9^2 = e^2$
 $225 = e^2$
 $\sqrt{225} = e$

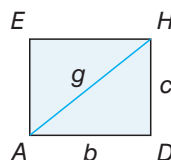
$e = 15 \text{ cm}$;



2.

$a^2 + c^2 = f^2$
 $12^2 + 8^2 = f^2$
 $208 = f^2$
 $\sqrt{208} = f$

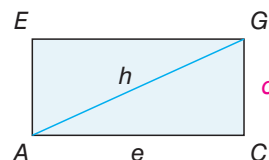
$f \approx 14,4 \text{ cm}$;



3.

$b^2 + c^2 = g^2$
 $9^2 + 8^2 = g^2$
 $145 = g^2$
 $\sqrt{145} = g$

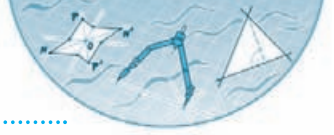
$g \approx 12 \text{ cm}$;



4.

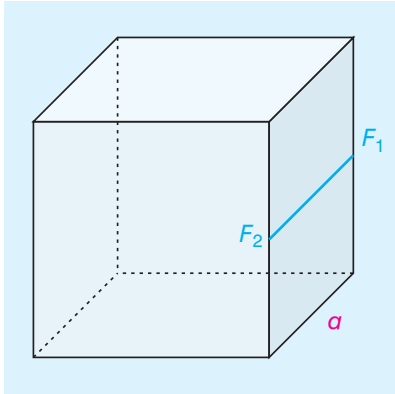
$e^2 + c^2 = h^2$
 $225 + 64 = h^2$
 $289 = h^2$
 $\sqrt{289} = h$

$h = 17 \text{ cm}$.



13. Az ábrán látható kockákba olyan szakaszokat rajzoltunk be, amelyek egy-egy élpár felezőpontját kötik össze. Milyen hosszúak ezek a szakaszok, ha a kocka élhossza 12 hosszúságegység? Ha szükséges, emeljük ki színessel azt a derékszögű háromszöget, amelyről meghatározhatjuk a hosszát! Ezeket a háromszögeket a kockák mellé is rajzoljuk ki!

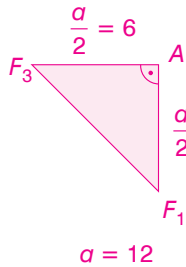
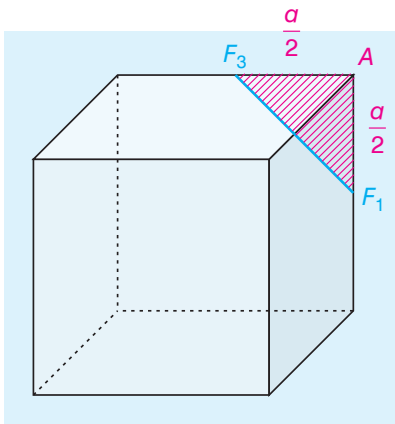
a)



$$\begin{aligned} a &= 12 \\ a &= F_1F_2 \end{aligned}$$

$$F_1F_2 = 12 \text{ hosszúságegység}$$

b)

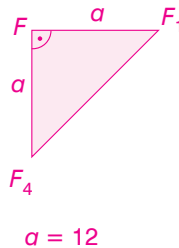
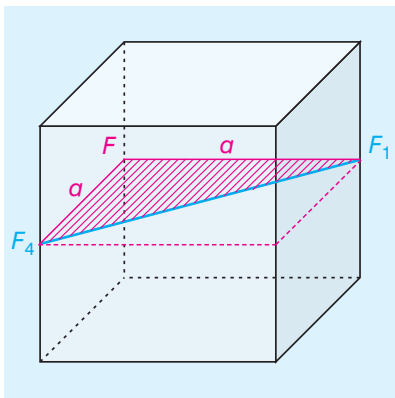


$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= F_1F_3^2 \\ 2 \cdot 36 &= F_1F_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{72} &= F_1F_3 \\ 8,49 &\approx F_1F_3 \end{aligned}$$

$$F_1F_3 \approx 8,5 \text{ hosszúságegység}$$

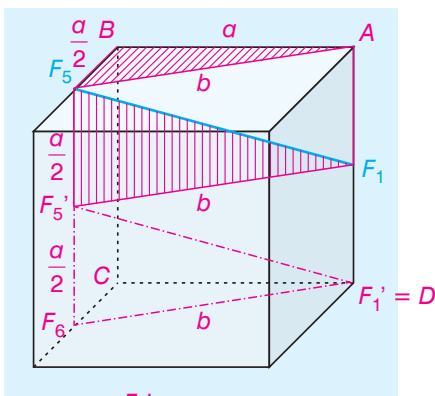
c)



$$\begin{aligned} 2 \cdot a^2 &= F_1F_4^2 \\ 2 \cdot 144 &= F_1F_4^2 \\ \sqrt{288} &= F_1F_4 \\ 16,97 &\approx F_1F_4 \end{aligned}$$

$$F_1F_4 \approx 17 \text{ hosszúságegység}$$

*d)



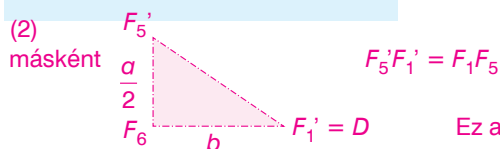
(1) $a = 12$

$$\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \\ b^2 &= 36 + 144 \\ b &= \sqrt{180} \\ b &\approx 13,4 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 &= F_1F_5^2 \\ 36 + 180 &= F_1F_5^2 \\ \sqrt{216} &= F_1F_5 \\ 14,69 &\approx F_1F_5 \end{aligned}$$

$$F_1F_5 \approx 14,7 \text{ hosszúságegység}$$

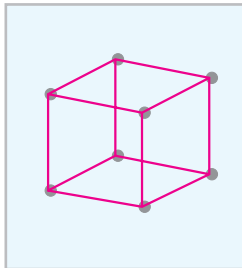


Ez a háromszög egybevágó az $F_1F_5F_5'$ háromszöggel.

5. TÉRGEOMETRIA

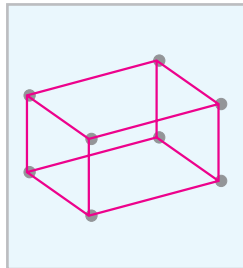
A testek csoportosítása: gúla, kúp

1. Az adott pontok segítségével rajzoljunk testeket, és írjuk alájuk a nevüket!

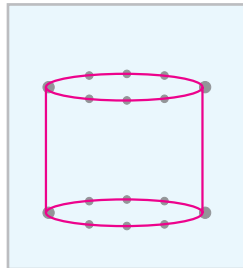


Egy-egy lehetséges megoldás:

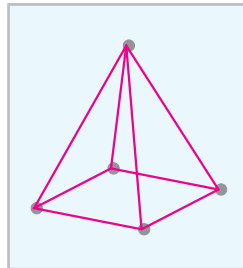
kocka



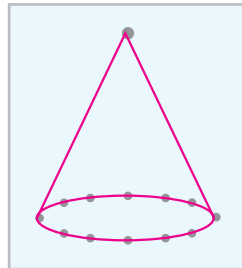
téglatest



henger



négyzet alapú
szabályos gúla



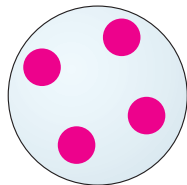
kúp

2. Egészítsük ki az alábbi testek rajzát úgy, hogy mindegyik valamilyen környezetünkben levő tárgy legyen!

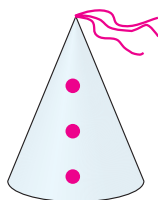


Pl.:

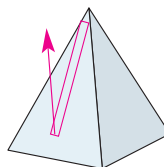
papírkosár



pöttyös labda



süveg (jelmez)



metronóm



doboz

3. Döntsük el, hogy melyik állítás igaz (I), melyik hamis (H)!

H Ha egy testnek van körlapja, akkor az kúp.

Indoklás: Pl. a hengernek és a félgömbnek is van körlapja, mégsem kúp.

H Van olyan hasáb, amelyik gúla.

Indoklás: A hasábok alkotói párhuzamosak, a gúlák alkotói egy ponton mennek át.

I Minden gúlának van olyan lapja, amelyik háromszög.

Indoklás: Minden gúla oldallapjai háromszögek.

I Van olyan gúla, amelynek minden lapja háromszög.

Indoklás: A tetraéder (háromszög alapú gúla) minden lapja háromszög.

H Ha egy testnek van háromszög alakú lapja, akkor az gúla.

Indoklás: Van olyan test, pl. a háromszög alapú hasáb, amelynek van háromszöglapja, mégsem gúla.

I A szabályos gúla oldallapjai egybevágó háromszögek.

Indoklás: A szabályos gúla oldalélei egyenlő hosszúak, alapélei is egyenlő hosszúak.

I A szabályos gúla testmagassága rövidebb, mint az oldaléle.

Indoklás: Vegyünk egy olyan síkmetszetet, amely átmegy a gúla magasságán és egyik oldalélén. Ebben található egy olyan derékszögű háromszög, melyben a gúla magassága befogó, a gúla oldaléle átfogó.

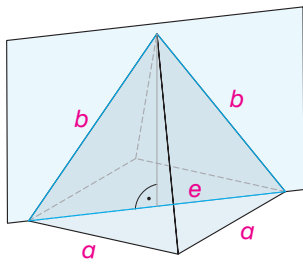
H Van olyan egyenes körkúp, amelynek testmagassága hosszabb az alkotójánál.

Indoklás: Minden egyenes körkúpra igaz, hogy a csúcson átmenő, az alaplapra merőleges síkmetszetben az alapkör sugara, a testmagasság és az alkotó derékszögű háromszöget határoz meg, amelyben az alkotó átfogó.



4. Egy négyzet alapú gúla alapélei 6 cm-esek, oldalélei 5 cm-esek. A gúlát az ábrán látható módon a gúla csúcsán áthaladó, két szemközti oldalra illeszkedő síkkal elmetstettük. Szerkesszük meg a síkmetszetet!

a)

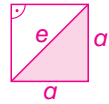


Milyen síkidom a kapott síkmetszet? *egyenlő szárú háromszög*

A síkmetszet adatai: *alap: a négyzet átlója: $6 \cdot \sqrt{2}$ cm*

szárak: az oldalélek: 5 cm

$a = 6 \text{ cm}; e \approx 8,5 \text{ cm}; b = 5 \text{ cm}$

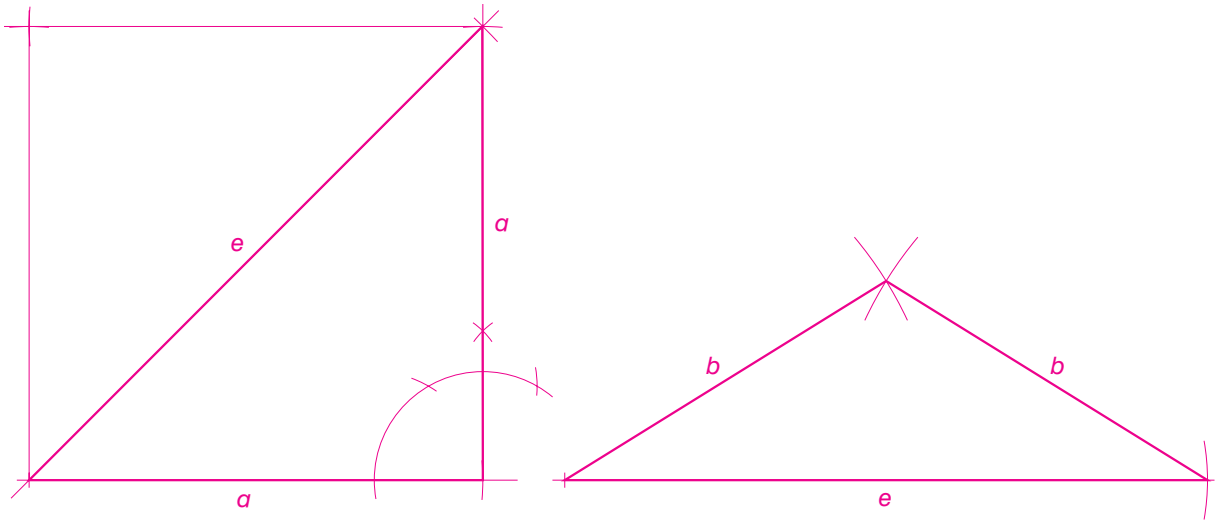


$$e = \sqrt{a^2 + a^2} \quad e = a \cdot \sqrt{2}$$

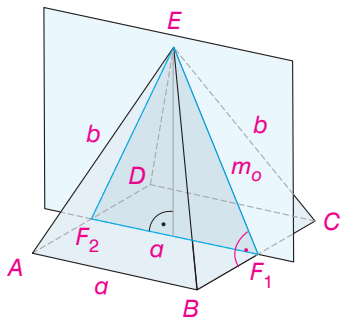
$$e = \sqrt{2 \cdot a^2} \quad e = 6 \cdot \sqrt{2} \quad e \approx 8,5 \text{ cm}$$

A síkmetszet ismeretlen oldalának szerkesztése:

A síkmetszet szerkesztése:



b) A metsző sík a gúla csúcsán (E) áthaladó, az alaplapp síkjára merőleges sík.

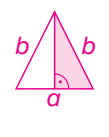


Milyen síkidom a kapott síkmetszet? *egyenlő szárú háromszög*

A síkmetszet adatai: *alap: a négyzet középvonala: 6 cm*

szárak: az oldallap magassága: 4 cm

$a = 6 \text{ cm}; b = 5 \text{ cm}; m_0 = 4 \text{ cm}$

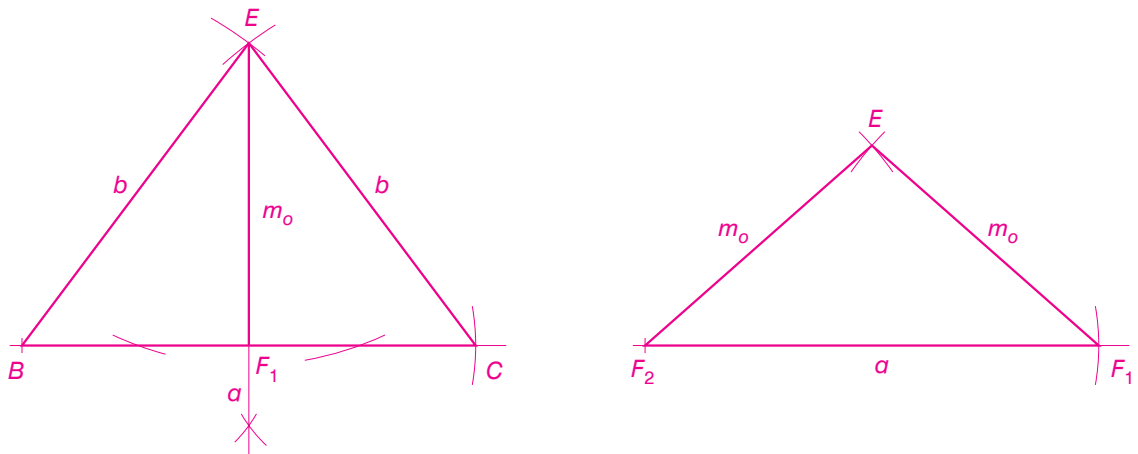


$$m_0 = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad m_0 = \sqrt{16}$$

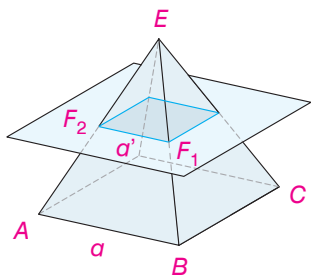
$$m_0 = \sqrt{25 - 9} \quad m_0 = 4 \text{ cm}$$

A síkmetszet ismeretlen oldalának szerkesztése:

A síkmetszet szerkesztése:



c) A metszősík az alaplappal párhuzamos és a testmagasság felezőpontján áthaladó sík.



Milyen síkidom a kapott síkmetszet? **négyzet**

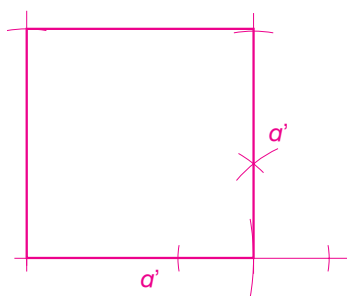
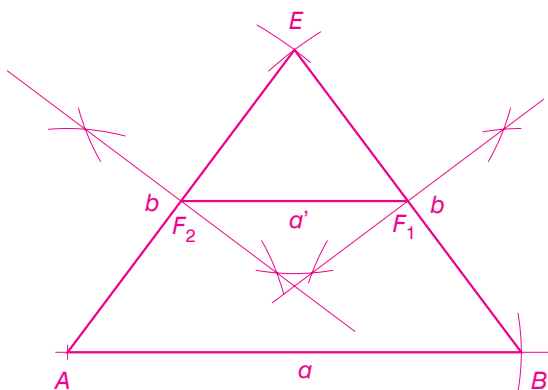
A síkmetszet adatai: $a = 6 \text{ cm}$

oldalai az oldallapok középvonalai: $\frac{a}{2} = 3 \text{ cm}$

$a' = 3 \text{ cm}$

A síkmetszet ismeretlen oldalának szerkesztése:

A síkmetszet szerkesztése:

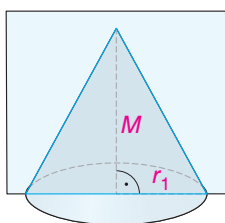


5. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 4 cm, testmagassága 5 cm. Szerkesszük meg a síkmetszetet, ha a metsző sík

a) merőleges az alaplappra, és átmegy a kúp csúcsán;

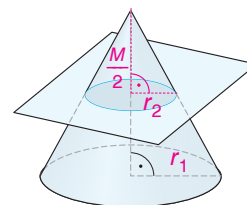
$r_1 = 4 \text{ cm}$

$M = 5 \text{ cm}$

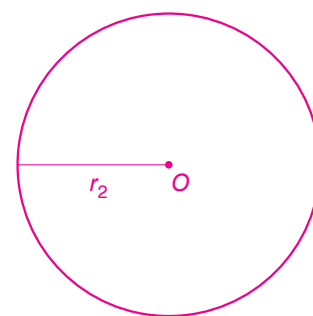
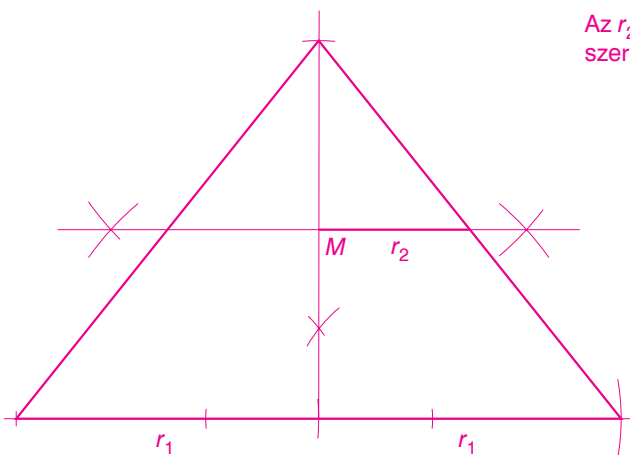


b) párhuzamos az alaplappal, és átmegy a kúp magasságának felezőpontján!

$r_2 = 2 \text{ cm}$

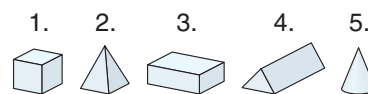


Az r_2 -t az a) részben kapott síkmetszetben szerkeszthetjük meg.

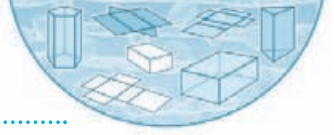


6. Írjuk be a megfelelő helyekre az ábrán látható testek nevét! Minden négyzetbe egy betű kerüljön!

A vastagon bekeretezett részben lévő szó: **KALAP**

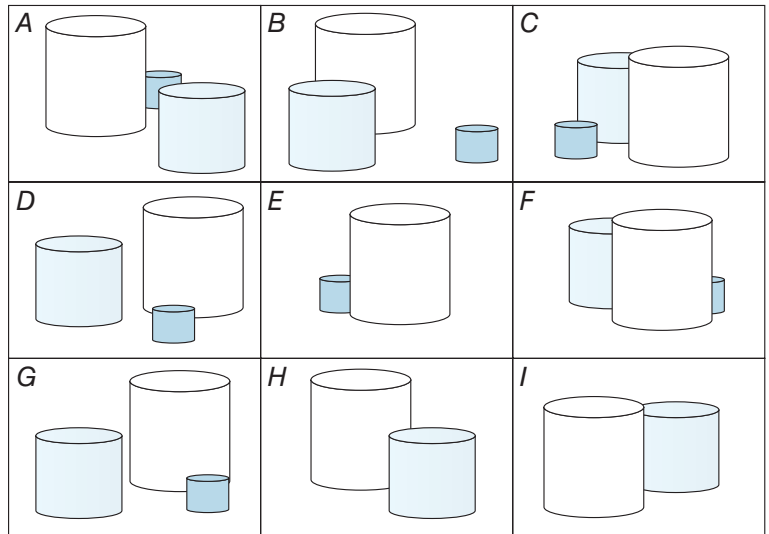
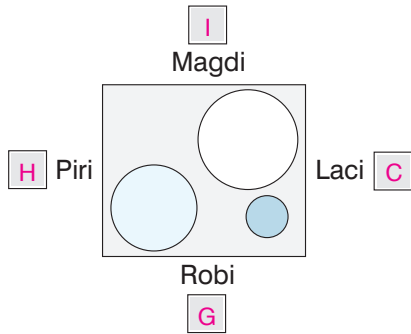


1.	K	O	C	K	A				
2.	G	Ú	L	A					
3.	T	É	G	L	A	T	E	S	T
4.	H	A	S	Á	B				
5.	K	Ú	P						



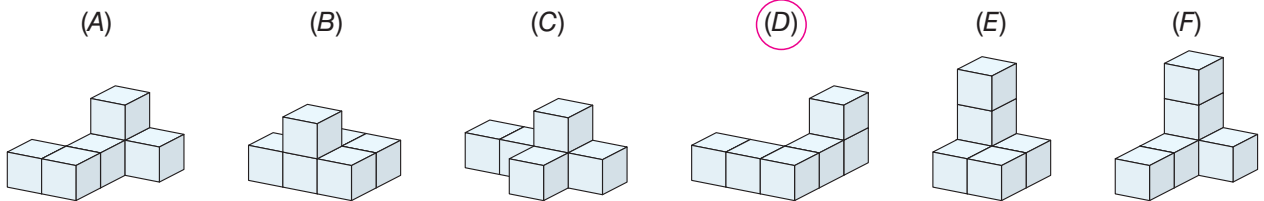
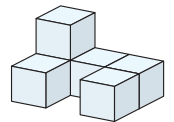
Nézzük több oldalról!

1. Magdi, Piri, Laci és Robi egy asztal körül ülnek, amelyen három különböző színű henger áll. Írjuk mindegyik gyerek neve mellé annak a képnek a betűjelét, amelyiket ő a helyéről látja!

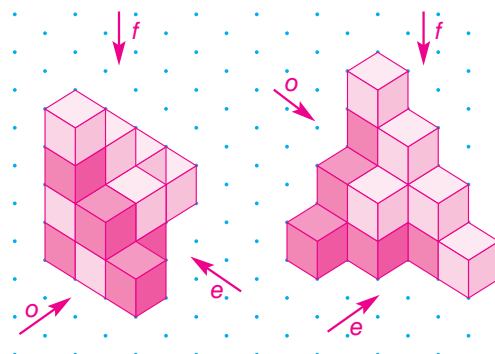
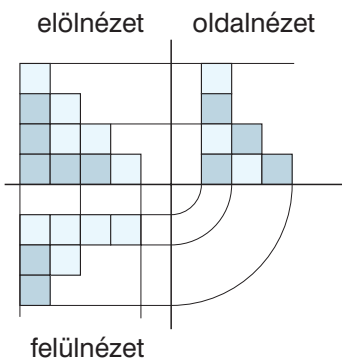


2. Tegyük le az asztalra egy grafitceruzát úgy, hogy a hegye felénk nézzen! Rajzoljuk le az elől-, oldal- és felülnézetét!

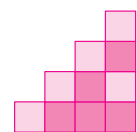
3. A jobb oldali ábrán látható test egybevágó kis kockákból áll. Ezek közül egy kis kockát valahova áthelyeztünk, majd egy másik nézőpontból lerajzoltuk a kapott testet. Melyik lehet a kapott test a betűvel jelzett testek közül? Karikázzuk be a megfelelő betűt!



- *4. Rakjuk ki és rajzoljuk le azt a sötét és világos egybevágó kockákból álló testet, amelynek nézetei az alábbiak!



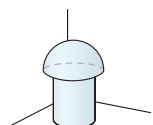
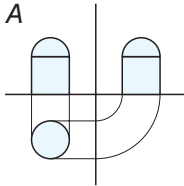
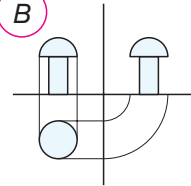
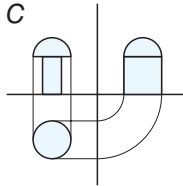
Hátulról, ha a lehető legtöbb kocka sötét:

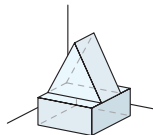
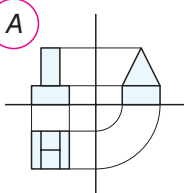
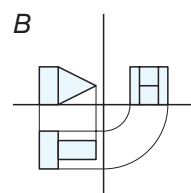
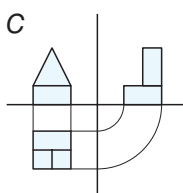


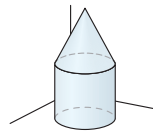
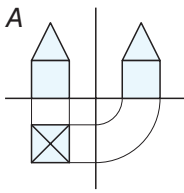
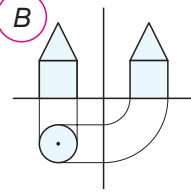
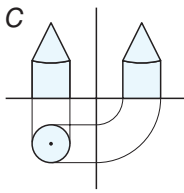
Legfeljebb hány sötét kis kocka lehet az építményben?

8

5. Karikázzuk be az A, B, C ábrák közül annak a betűjelét, amelyik helyesen mutatja a bal oldalon látható test nézeteit!

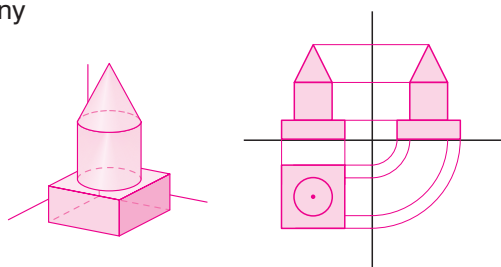
a)  A  B  C 

b)  A  B  C 

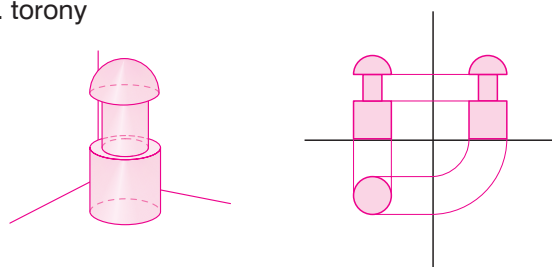
c)  A  B  C 

d) Az előbbi feladatokban látható építőkocka-elemekből rajzoljunk két tornyot, majd rajzoljuk le a nézeteiket is!

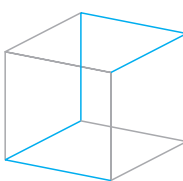
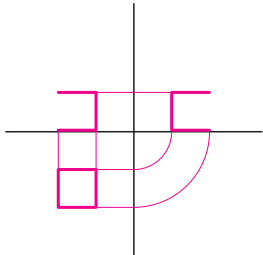
1. torony

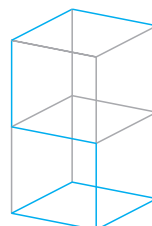
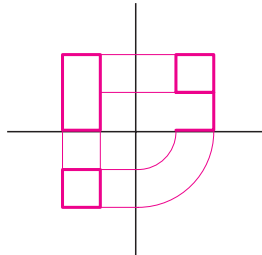


2. torony

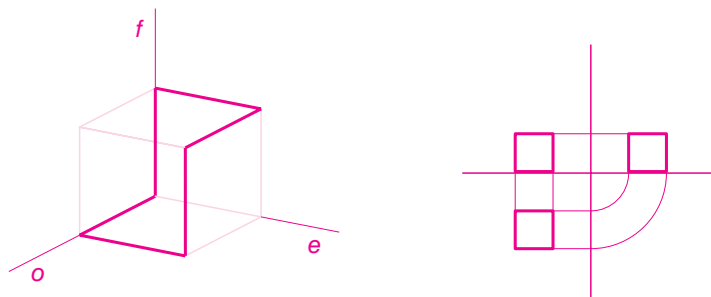


6. Szívószálakból kockarácsot készítünk. Néhány szívószál kék, a többi átlátszó. Rajzoljuk le, hogy mit látunk előlről, oldalról, felülről, ha csak a kék szívószálakat látjuk!

a)  

b)  

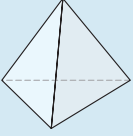
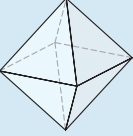
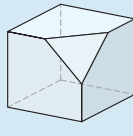
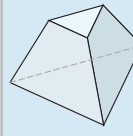
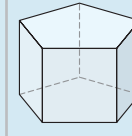
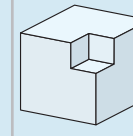
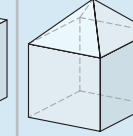
Rajzoljunk olyan alakzatokat, melyek a fenti módon készültek szívószálakból, és mindhárom nézetük négyzet!





Csúcsok, élek, lapok

1. Számoljuk össze az ábrán látható testek lapjainak, élleinek és csúcsainak számát, és írjuk be a táblázatba!

Test							
Lapok száma l	4	8	7	5	7	9	9
Élek száma e	6	12	15	9	15	21	16
Csúcsok száma c	4	6	10	6	10	14	9

Keressünk összefüggést a lapok, élek és csúcsok száma között!

$$e + 2 = l + c$$

*2. Adjuk meg, majd ábrázoljuk koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket!

a) a gúla lapjainak száma az alaplap oldalszámának függvényében; $l(x) = x + 1$

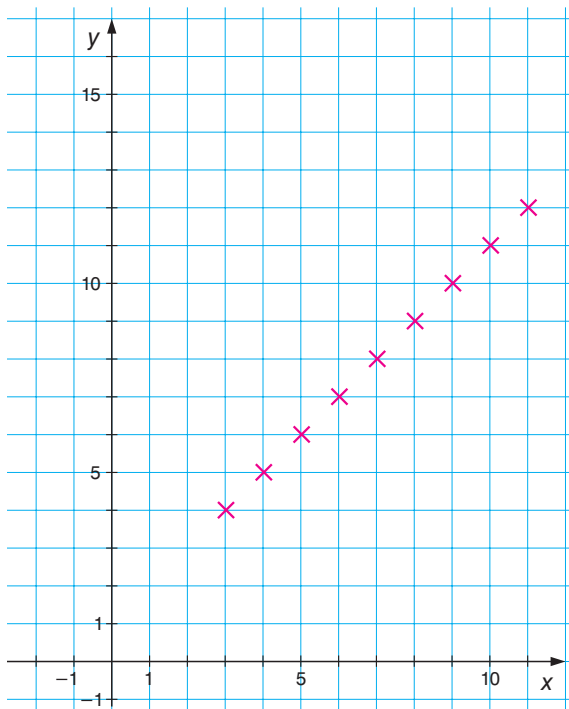
b) a gúla élleinek száma az alaplap oldalszámának függvényében. $e(x) = 2x$

a) Értelmezési tartomány: 3-nál nem kisebb természetes számok

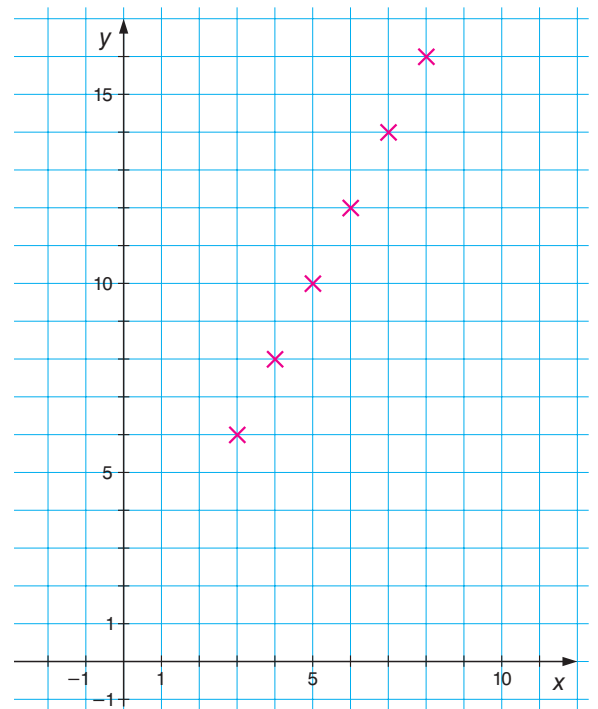
b) Értelmezési tartomány: $3 \leq x$ $x \in \mathbb{N}$

Hozzárendelési szabály: $x \mapsto x + 1$

Hozzárendelési szabály: $x \mapsto 2x$



A kapott pontok egy egyenesre illeszkednek.

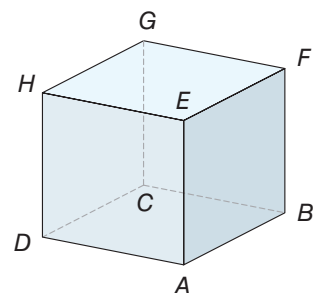


A kapott pontok egy egyenesre illeszkednek.

3. Egy hangya a tömör kocka éllein sétál, éppen az A csúsból tart az E felé. Amikor egy csúcsba érkezik, mindig eldönti, hogy jobbra (J) vagy balra (B) halad tovább (az ábra szerint). Melyik csúcsba érkezik, ha az alábbi irányokat választja?

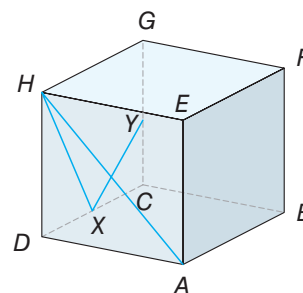
a) Irányok: **J B B J B** Érkezés a(z) A csúcsba.

b) Irányok: **J J B J J B** Érkezés a(z) E csúcsba.



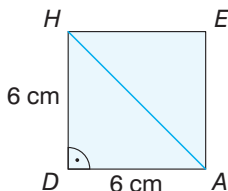
4. Milyen hosszú a 6 cm élhosszúságú kocka lapjain húzódó kékkel jelölt töröttvonal, ha az X és Y pontok a kocka éleinek felezőpontjai?

Bontsuk a töröttvonalat szakaszokra! Minden szakasznál rajzoljuk le a kockának azt a lapját, amelyre illeszkedik! Ezen jelöljük az ismert adatokat! Számítsuk ki a megfelelő szakaszok hosszát!



1. szakasz: AH.

A kocka lapja:



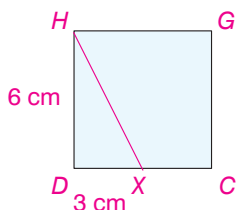
Az ADH derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$AH^2 = 6^2 + 6^2$$

$$AH = 6 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 8,5 \text{ cm}$$

2. szakasz: HX.

A kocka lapja:



A DHX derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$HX^2 = 6^2 + 3^2$$

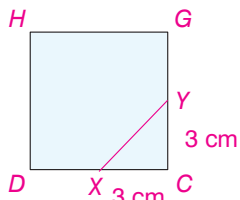
$$HX^2 = 36 + 9$$

$$HX = \sqrt{45}$$

$$HX \approx 6,7 \text{ cm}$$

3. szakasz: XY.

A kocka lapja:



Az XYZ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$XY^2 = 3^2 + 3^2$$

$$XY = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$XY \approx 4,2 \text{ cm}$$

A töröttvonal: $AH + HX + XY \approx 8,5 + 6,7 + 4,2 = 19,4 \text{ cm}$

Válasz: A töröttvonal hossza: $\approx 19,4$ cm.

5. Belefér-e egy 10 cm hosszúságú ceruza abba a téglalatest alakú dobozba, amelynek élei 2 cm, 4 cm, 8 cm hosszúságúak?

A téglalatest csúcsait összekötő leghosszabb szakasz a testátló.

Rajzoljuk le a téglalatestet! (Kékkel az ismert adatokat, pirossal a testátlót.)

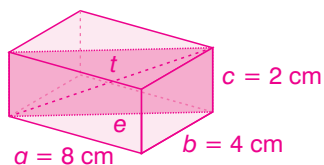
Rajzoljuk be azt a síkmetszetet, amelyik tartalmazza a testátlót!

A síkmetszet egy **téglalap**, melynek egyik oldala **2** cm, másik oldala a téglalatest egy lapjának **átló**ja.

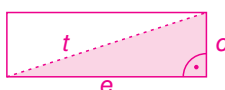
Rajzoljuk le a téglalatestnek ezt a lapját!

Egyik oldala: $a = 8 \text{ cm}$, másik oldala: $b = 4 \text{ cm}$, átlója: $e \approx 8,9 \text{ cm}$. Így a testátlót tartalmazó síkmetszet oldalai: $c = 2 \text{ cm}$, $e \approx 8,9 \text{ cm}$ és t . A testátló: $t \approx 9,16 \text{ cm}$.

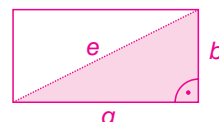
A téglalatest:



A síkmetszet:



A téglalatest lapja:



A Pitagorasz-tétel alapján:

$$t^2 = c^2 + e^2$$

$$t^2 = 2^2 + 8,9^2$$

$$t^2 = 4 + 80$$

$$t = \sqrt{84}$$

$$t \approx 9,16 \text{ cm}$$

$$e^2 = a^2 + b^2$$

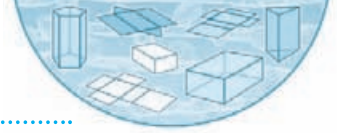
$$e^2 = 8^2 + 4^2$$

$$e^2 = 64 + 16$$

$$e = \sqrt{80}$$

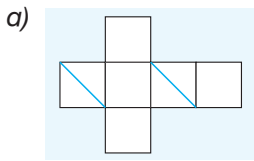
$$e \approx 8,9 \text{ cm}$$

Válasz: A testátló rövidebb, mint 10 cm, ezért a ceruza nem fér bele a dobozba.

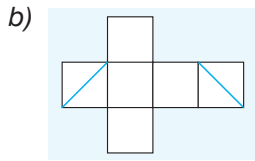


Testek hálója

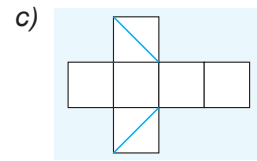
1. Döntsük el, és írjuk a hálók alá, hogy a kockahálók késsel jelölt szakaszainak egyenese az összehajtott kockán párhuzamos, merőleges, kitérő vagy egyik sem!



.....
kitérő

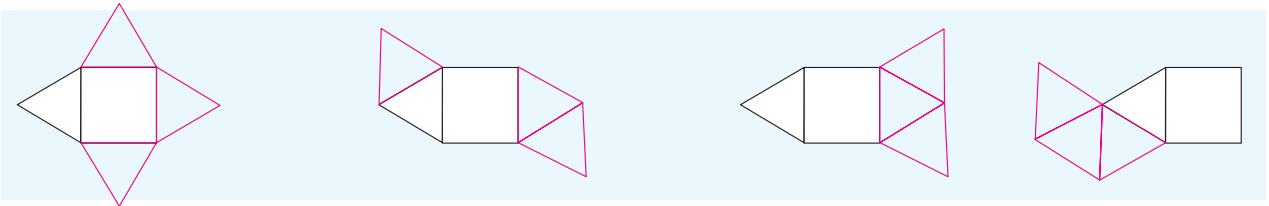


.....
egyik sem

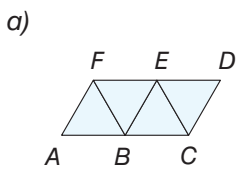


.....
párhuzamos

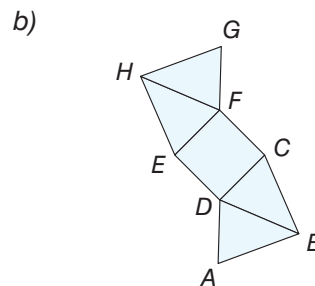
2. Egészítsük ki a rajzokat különféleképpen úgy, hogy egy négyzet alapú szabályos gúla hálóját kapjuk!



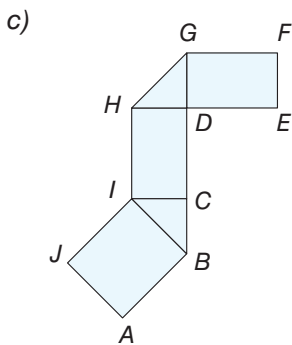
3. Az alábbi testhálókából testeket hajtunk össze. Állítsuk párba az egymáshoz illeszkedő oldalakat!



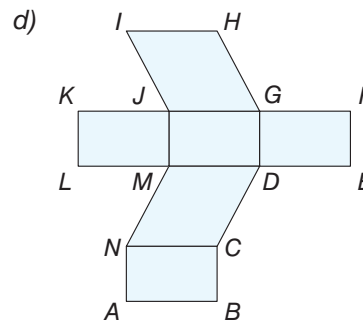
FE párja: ED
AF párja: CD
AB párja: CB



AB párja: EH
BC párja: HG
CF párja: FG
HE párja: AB
ED párja: DA

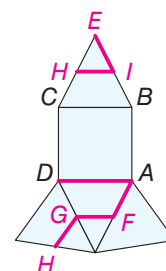
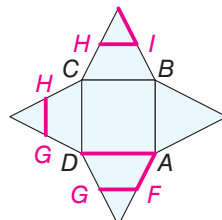
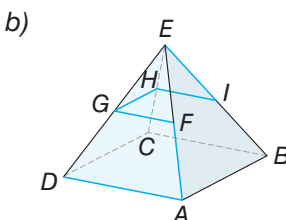
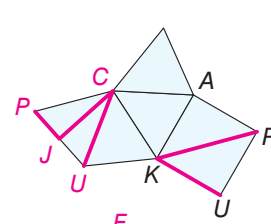
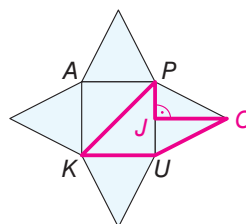
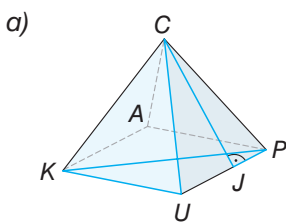


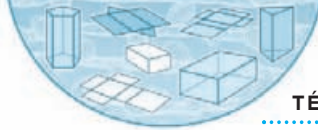
AB párja: GF
BC párja: FE
CD párja: DE
FG párja: AB
GH párja: JA
HI párja: IJ



AB párja: IH
BC párja: EF
CD párja: DE
EF párja: BC
FG párja: GH
IJ párja: JK
LM párja: NM

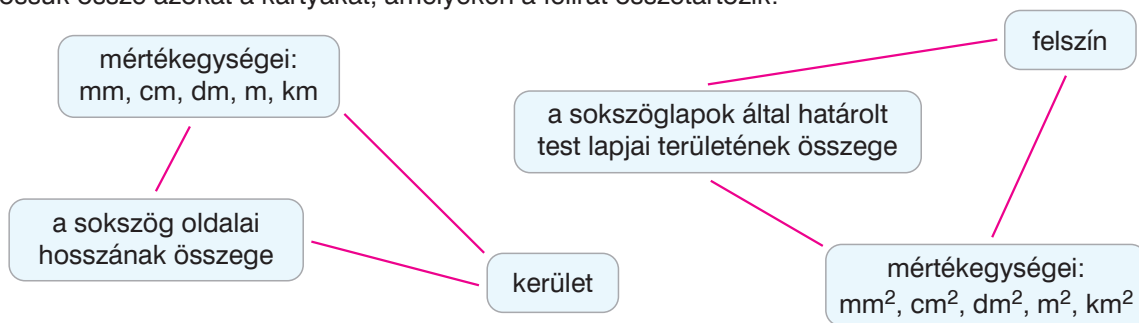
4. Rajzoljuk be az átlátszó fóliából készült gúla kicsinyített testhálójába a gúlák lapjain levő kék vonalat!





Testek felszíne

1. Kössük össze azokat a kártyákat, amelyekben a felirat összetartozik!

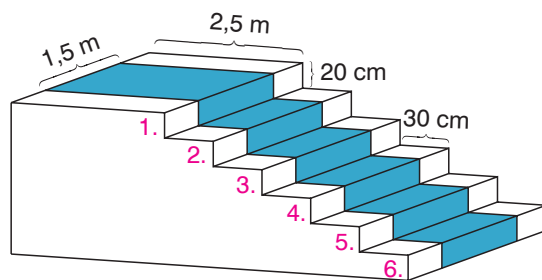


2. Az ábrán látható lépcső egy színpadi díszlet. A lépcsőre egy 1,5 m széles szőnyeget terítettek. Mekkora a szőnyeg területe?

A szőnyeg alakja: téglalap

Oldalai: $a = 1,5$ m; $b = 5,2$ m

Területe: $7,8$ m²



$$b = 2,5 + 6 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,3$$

$$b = 2,5 + 1,2 + 1,5$$

$$b = 5,2 \text{ (m)}$$

$$T = a \cdot b$$

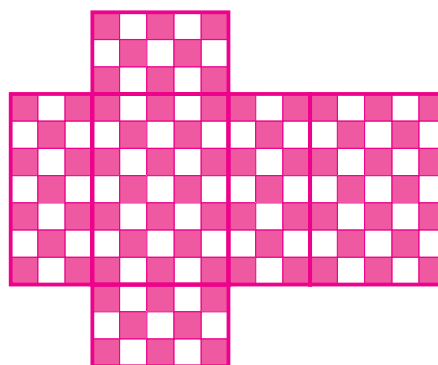
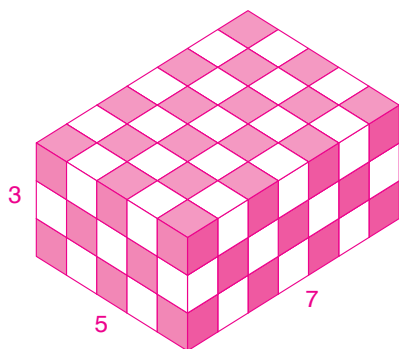
$$T = 1,5 \cdot 5,2$$

$$T = 7,8 \text{ (m}^2\text{)}$$

3. 1 cm élhosszúságú fekete és fehér kis kockákból téglatestet raktunk össze. A téglatest egy csúcsból induló élei mentén 3, 5 és 7 kis kocka van. A téglatest minden csúcsába fekete kis kocka kerül, és a lapjukkal illeszkedő kis kockák különböző színűek.

Rajzoljuk le a téglatestet!

Rajzoljuk le a téglatest egy hálóját!



A téglatest felszíne: 142 cm²

A téglatest felületén a sötét rész területe: 74 cm²

A téglatest felületén a világos rész területe: 68 cm²

$$A = 2 \cdot (5 \cdot 7 + 7 \cdot 3 + 3 \cdot 5)$$

$$A = 2 \cdot (35 + 21 + 15)$$

$$A = 142 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$T_s = 2 \cdot (18 + 11 + 8)$$

$$T_s = 2 \cdot 37$$

$$T_s = 74 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$T_v = 2 \cdot (17 + 10 + 7)$$

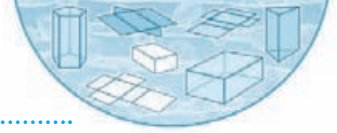
$$T_v = 2 \cdot 34$$

$$T_v = 68 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Ell.: } A = T_s + T_v$$

$$A = 74 + 68$$

$$A = 142 \text{ (cm}^2\text{)}$$



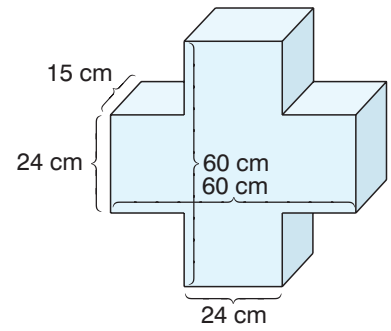
4. Egy gyógyszertár cégére üvegből készült kereszt, amely zölden világít. A kereszt szimmetrikus, méretei az ábrán láthatóak.

a) Hány lapja, éle, csúcsa van a testnek?

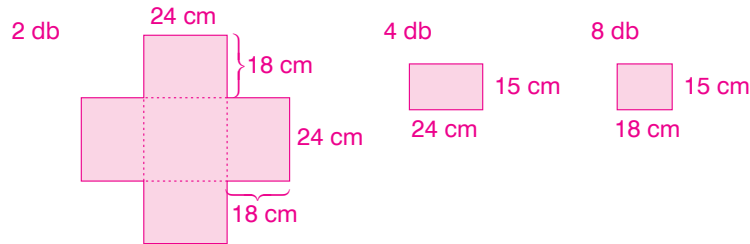
Lapok száma: 14

Élek száma: $12 \cdot 3 = 36$

Csúcsok száma: $12 \cdot 2 = 24$



b) Rajzoljuk le a test egymástól különböző lapjait! Írjuk rá a lapok oldalainak hosszát és azt, hogy melyik lapból hány darab van!



c) Hány négyzetméter üveg szükséges a kereszt elkészítéséhez? (Az üveg vastagságától eltekintünk.)

$$A = 2 \cdot (24 \cdot 18 \cdot 4 + 24 \cdot 24) + 4 \cdot 24 \cdot 15 + 8 \cdot 18 \cdot 15$$

$$A = 2 \cdot (1728 + 576) + 4 \cdot 360 + 8 \cdot 270$$

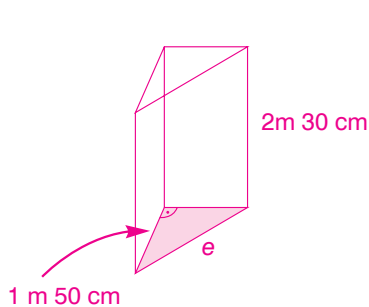
$$A = 4608 + 1440 + 2160$$

$$A = 8208 \text{ cm}^2 = 82,08 \text{ dm}^2 = 0,8208 \text{ m}^2$$

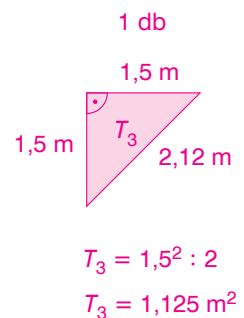
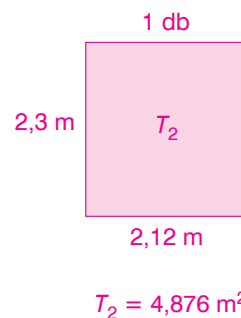
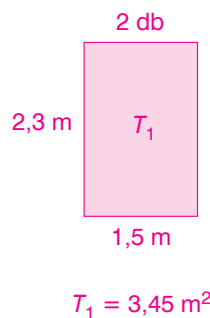
Válasz: A kereszt elkészítéséhez $0,8208$ m² üveg szükséges.

5. Egy fürdőszoba sarkába helyezett zuhanykabin tálcája háromszög alakú. Zita feladata a zuhanykabin belső felületének, a tálcának és az oldalfalnak a takarítása. Hány négyzetméter felületet kell Zitának takarítania, ha a zuhanykabint egy tető nélküli, háromszög alapú hasábnak tekintjük, amelynek magassága 2 m 30 cm, egyenlő szárú derékszögű háromszög alapjának befogója 1 m 50 cm?

A zuhanykabin rajza:

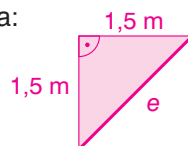


A takarítandó felületek rajza laponként:



Jelöljük a rajzokon pirossal az ismert adatokat, kékkel pedig az(oka)t, amelye(ke)t a felszín kiszámításához meg kell határoznunk!

Az adatok kiszámítása:



$$e^2 = 1,5^2 + 1,5^2$$

$$e = \sqrt{2 \cdot 1,5^2}$$

$$e = 1,5 \cdot \sqrt{2}$$

$$e \approx 2,12 \text{ m}$$

A felszín kiszámítása:

$$A = 2 \cdot T_1 + T_2 + T_3$$

$$A = 6,9 + 4,876 + 1,125$$

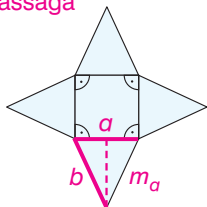
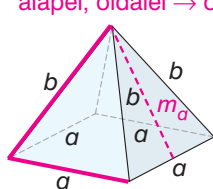
$$A = 12,901 \text{ (m}^2\text{)}$$

A takarítandó felület nagysága: $\approx 13 \text{ m}^2$

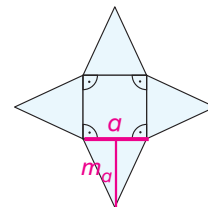
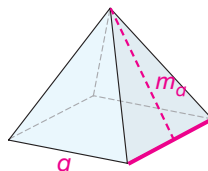
A gúla, kúp és gömb felszíne (Kiegészítő anyag)

1. Az alábbiakban két gúlát, egy kúpot és azok hálóját rajzoltuk le. Jelöljük pirossal a testen és a hálóján is azokat a szakaszokat, amelyek hosszának ismeretében a felszín kiszámítható! Törekedjünk arra, hogy a legkevesebb szakaszt jelöljük! Rajzoljuk be kékkel azokat a szakaszokat, amelyeket a felszín számítása közben ki kell számolnunk! Keressünk két megoldást!

a) **alapel, oldalél** → **oldallap magassága**

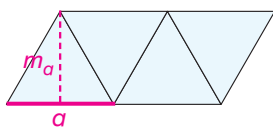
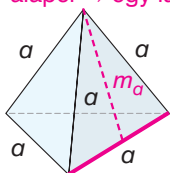


alapel, oldallap magassága

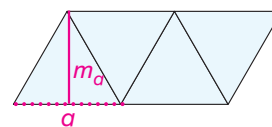
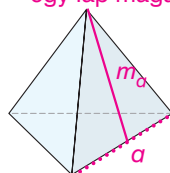


A szükséges adatok száma: **2**

b) **alapel** → **egy lap magassága**

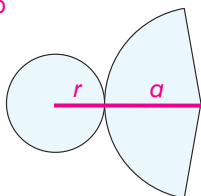
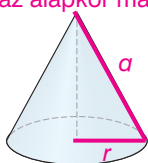


egy lap magassága → **egy él**

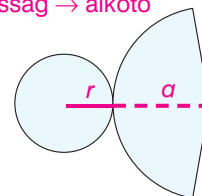
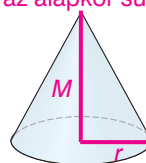


A szükséges adatok száma: **1**

c) **az alapkör magassága, alkotó**



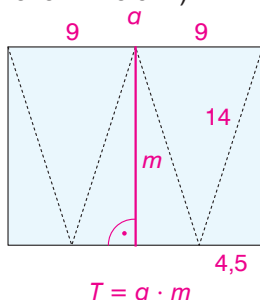
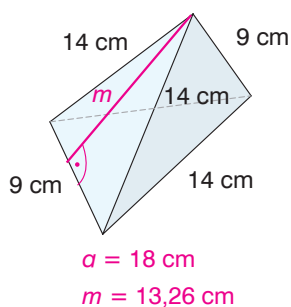
az alapkör sugara, testmagasság → **alkotó**



A szükséges adatok száma: **2**

2. Egy 200 ml-es nem szabályos tetraéder alakú tejesdobozt az ábrán látható téglalappból hajtogatunk a szaggatott vonalak mentén.

a) Hány négyzetcentiméter papírból készül a doboz, ha a méreteit az ábráról leolvashatjuk (az összeragasztáskor fedésbe kerülő résztől eltekinthetünk)?



$$m = \sqrt{14^2 - 4,5^2}$$

$$m = \sqrt{196 - 20,25}$$

$$m = \sqrt{175,75}$$

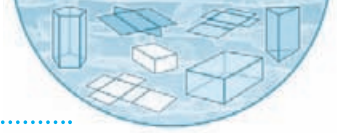
$$m \approx 13,26 \text{ (cm)}$$

$$T = 18 \cdot 13,26$$

$$T = 238,68 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$T \approx 239 \text{ cm}^2$$

b) Keressünk 200 ml-es téglatest alakú üdítősdobozokat, mérjük meg a szükséges adatokat, és számítsuk ki, mekkora az üdítősdoboz felszíne! Állapítsuk meg, hogy melyik doboznak a legkisebb a felszíne!



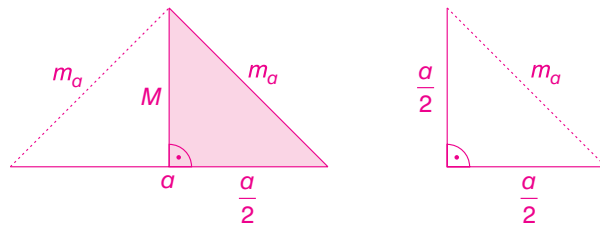
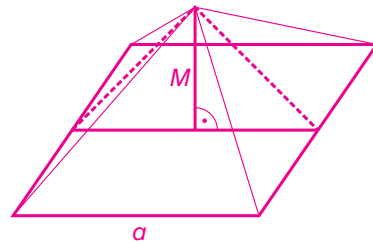
3. Számítsuk ki annak a gömbnek a felszínét, amelynek sugara

- a) 2 cm; b) 4 cm. $A = 4r^2\pi$
 $A = 4 \cdot 2^2\pi$ $A = 4 \cdot 4^2\pi$
 $A = 16\pi$ $A = 64\pi$

A 4 cm sugarú gömb felszíne**négy**.....-szerese a 2 cm sugarú gömb felszínének.

4. Egy múzeumi kiállításon a kiállított tárgyakat négyzet alapú szabályos gúla alakú tárolóban helyezték el, melynek oldallapjai üvegből készültek el. A gúla magassága fele az alapél hosszának. Körülbelül hány négyzetméter egy ilyen tároló üvegfelülete, ha a gúla alapéle 60 cm?

- a) Rajzoljuk le a gúlát!
 b) Jelöljük pirossal az ismert hosszúságú szakaszokat!
 c) Jelöljük kézzel azokat a szakaszokat, amelyeknek a hosszára szükségünk van az oldallapok területének kiszámításához!
 d) Rajzoljunk be a gúla baba egy olyan síkmetszetet, amely tartalmazza a piros és kék szakaszokat!
 e) Rajzoljuk le ezt a síkmetszetet, és rajzoljuk bele a piros és kék szakaszokat!
 f) Számítsuk ki a kék szakaszok hosszát!



$M = 30 \text{ cm}$
 $a = 60 \text{ cm}$

$$m_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M^2$$

$$m_a^2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$m_a^2 = \sqrt{2 \cdot 30^2}$$

$$m_a = \sqrt{1800}$$

$$m_a \approx 42,43 \text{ (cm)}$$

g) Számítsuk ki egy oldallap területét!

$$T_o = \frac{a \cdot m_a}{2} \qquad T_o = \frac{60 \cdot 42,43}{2} = 1272,9 \text{ (cm}^2\text{)}$$

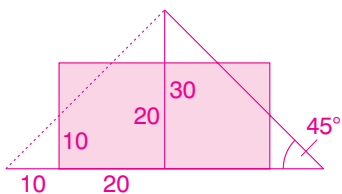
$$T_T = 2 \cdot \frac{a \cdot m_a}{2} \qquad T_T = 2 \cdot 60 \cdot 42,43 = 5091,6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Egy tároló üvegfelülete: $5091,6 \text{ cm}^2 \approx 0,5 \text{ m}^2$

h) Befér-e ebbe a tárolóba egy olyan henger alakú tárgy, amelynek testmagassága és alapkörének sugara is 20 cm?

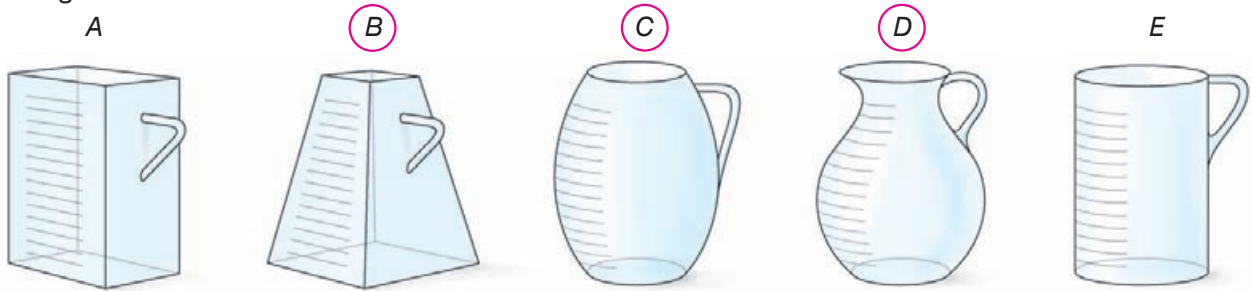
Válasz: **Nem.**

Indoklás:



Testek térfogata

1. Jóska azt mondja, hogy az ábrán látható formatervezett edények oldalára olyan deciliterenkénti beosztásokat készített, amelyek távolsága egyenlő. Karikázzuk be azoknak az edényeknek a betűjelét, amelyekre ez nem igaz!



Indoklás: **A B, C, D** esetben az azonos magasságú részek alaplappjai különbözőek, így a térfogatuk is különböző.

Ezért ezzel a beosztással az edény nem alkalmas térfogatmérésre.

2. Melyik a kakukktojás az egy téglalapba írt mennyiségek közül? Karikázzuk be!

a)

5 ml	0,5 cm ³	1 dl
4 mm²	7 dm ³	3 m ³

b)

6 l	2,5 dm ³	3,25 dl
4³ m	2 km ³	0,8 cm ³

3. a) Írjuk növekvő sorrendbe az alábbi mennyiségeket!

202 mm³ 1,9 dm³ 21 dl 0,0002 km³ 0,22 l 2,01 m³

202 mm³ < 0,22 l < 1,9 dm³ < 21 dl < 2,01 m³ < 0,0002 km³

- b) Írjuk csökkenő sorrendbe az alábbi mennyiségeket!

48 m³ 4800 dm³ 0,47 km³ 481 l 48 110 cl 481 111 mm³

0,47 km³ > 48 m³ > 4800 dm³ > 48 110 cl > 481 l > 481 111 mm³

4. 1 cm³ térfogatú kis kockákat raktunk egymásra, így kaptuk az ábrán látható testet.

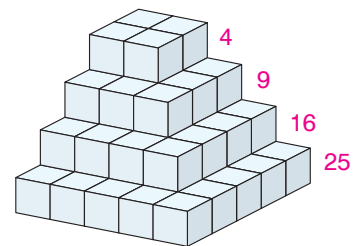
- a) Hány köbcéntiméter az ábrán látható test térfogata?

$V_{\text{test}} = 4 + 9 + 16 + 25 = 54 \text{ (cm}^3\text{)}$

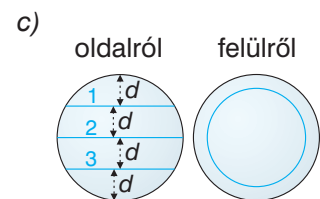
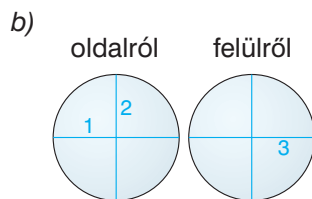
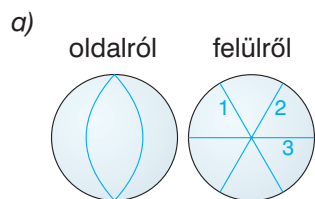
- b) Legkevesebb hány ugyanilyen kis kockát kell hozzárakni a testhez, hogy egy nagy kocka legyen belőle? (Az ábrán látható kockákat nem mozgítjuk el.)

Legkevesebb 71 db kocka kell még.

$V_{\text{kocka}} = a^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$ $V_{\text{test}} = 54 \text{ cm}^3$ $V_{\text{szükséges}} = 125 - 54 = 71 \text{ cm}^3$



5. Egy gömböt három egyenes vágással szétdaraboltunk az ábra szerint. (A gömb két nézetén ábrázoltuk a vágásokat.) Hány darabot kaptunk? Állapítsuk meg hányféle térfogatú darabot kaptunk!



Darabok száma: **6**

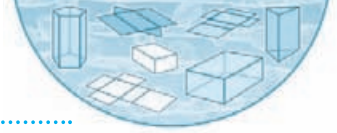
Ennyiféle térfogatú darabot kaptunk: **egyféle**

..... **8**

..... **egyféle**

..... **4**

..... **kétféle**



6. Hány milliliter tinta van abban a 6,5 cm hosszú tintapatronban, amelynek külső átmérője 5,5 mm és falvastagsága 0,5 mm (a két végén is), ha tele van tintával? Készítsünk rajzot!

A térfogat kiszámításához szükséges adatok:

$$M = 65 - 2 \cdot 0,5 = 64 \text{ (mm)}$$

$$d = 5,5 - 2 \cdot 0,5 = 4,5 \text{ (mm)}$$

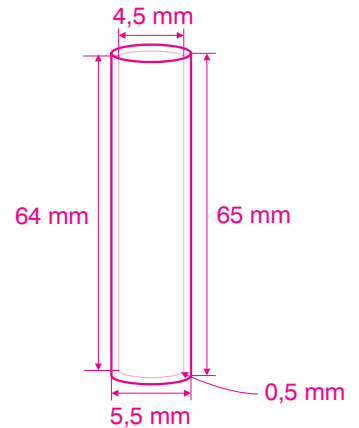
$$r = 2,25 \text{ mm}$$

$$V = r^2 \pi \cdot M$$

$$V = 2,25^2 \cdot 64 \cdot \pi$$

$$V = 3,24 \cdot \pi$$

$$V \approx 1017,36 \text{ mm}^3 = 1,017 \text{ cm}^3 \approx 1 \text{ ml}$$



A tinta térfogata: $\approx 1 \text{ ml}$

7. A tollaslabdákat olyan henger alakú műanyag tárolóban tartják, amelynek külső átmérője 8 cm, magassága pedig 30 cm. Egy kartondobozba 12 db ilyen hengert csomagolnak. A doboz felülnézetét az ábra mutatja.

a) Mekkora a doboz térfogata, ha a falvastagságtól eltekintünk?

$$a = 32 \text{ cm}$$

$$b = 24 \text{ cm}$$

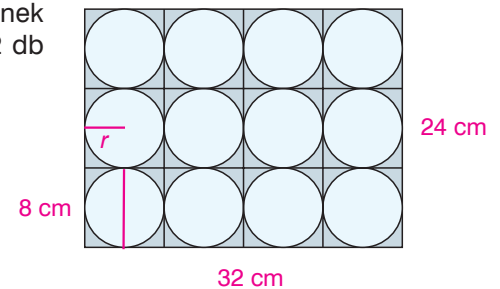
$$c = 30 \text{ cm}$$

$$V_d = ?$$

$$V_d = a \cdot b \cdot c$$

$$V_d = 32 \cdot 24 \cdot 30$$

$$V_d = 23\,040 \text{ cm}^3 (= 23,04 \text{ dm}^3)$$



b) A doboz térfogatának hány százaléka üres (a hengerek között)?

$$r = 4 \text{ cm}$$

$$M = 30 \text{ cm}$$

$$V_{\text{üres}} = ?$$

$$V_h = r^2 \pi \cdot M$$

$$V_h = 16 \cdot 30 \cdot \pi$$

$$V_h = 1507,2$$

$$V_{\text{hő}} = 12 \cdot V_h = 18\,086,4 \text{ (cm}^3\text{)}$$

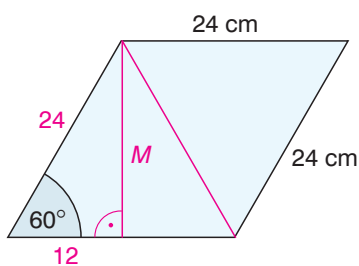
$$\frac{V_{\text{hő}}}{V_d} = \frac{18\,086,4}{23\,040} = 0,785 \text{ része}$$

$$V_{\text{üres}} = 0,215 \text{ része} \quad 21,5\% \text{-a}$$

A doboz térfogatának $21,5$ százaléka üres.

- *8. Mekkora a térfogata annak a hengernek, amelynek palástját az ábrán látható paralelogrammából hajtjuk átfedés nélkül?

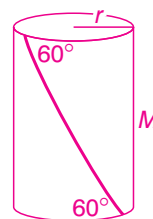
Rajzoljuk le a hengert, és jelöljük a palást vágásvonalát!



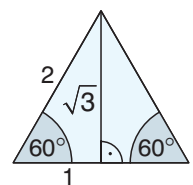
A henger magassága:

$$M = 12 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$M \approx 20,78 \text{ cm}$$



Súgó:



A térfogat kiszámításához szükséges adatok: A henger magassága (M) és az alapkör sugara (r).

A henger alapkörének kerülete: $K = 24 \text{ cm}$.

Ebből az alapkör sugara:

$$K = 2r\pi$$

$$r = \frac{K}{2\pi}$$

$$r = \frac{24}{2\pi}$$

$$r = \frac{12}{\pi}$$

$$r \approx 3,82 \text{ cm}$$

A henger térfogata:

$$V = T_a \cdot M$$

$$V = r^2 \pi \cdot M$$

$$V = 3,82^2 \cdot 3,14 \cdot 20,78$$

$$V \approx 952 \text{ cm}^3$$

A henger térfogata: $V \approx 952 \text{ cm}^3$

A gúla, kúp és gömb térfogata (Kiegészítő anyag)

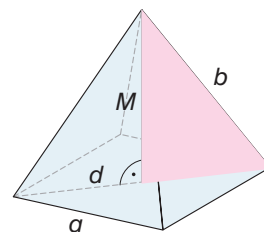
1. A négyzet alapú szabályos gúla alapéle a , oldaléle b , testmagassága M , alaplapjának átlója d , térfogata V .

a) Mekkora a térfogata, ha $a = 8$ cm, $M = 10$ cm?

$$V = \frac{a^2 \cdot M}{3}$$

$$V = \frac{64 \cdot 10}{3}$$

$$V \approx 213 \frac{1}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$



- b) Mekkora a térfogata, ha $d = 4 \cdot \sqrt{2}$ cm, $M = 7$ cm?

$$V = \frac{d^2 \cdot M}{2 \cdot 3} = \frac{(4\sqrt{2})^2 \cdot 7}{2 \cdot 3} = \frac{16 \cdot 7}{3} = \frac{112}{3} = 37 \frac{1}{3}$$

$$V = 37 \frac{1}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

- c) Mekkora a testmagassága, ha $a = 5$ cm és $V = 75$ cm³?

$$V = \frac{a^2 \cdot M}{3} \qquad M = \frac{3 \cdot 75}{25}$$

$$M = \frac{3V}{a^2} \qquad M = 9 \text{ (cm)}$$

- *d) Mekkora a térfogata, ha $M = 4$ cm és $b = 5$ cm?

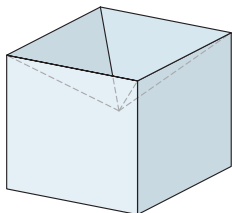
$$\frac{d}{2} = \sqrt{b^2 - M^2} \qquad T_a = \frac{d^2}{2} \qquad V = \frac{T_a \cdot M}{3}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{25 - 16} \qquad T_a = \frac{36}{2} \qquad V = \frac{18 \cdot 4}{3}$$

$$d = 6 \text{ (cm)} \qquad T_a = 18 \text{ (cm}^2\text{)} \qquad V = 24 \text{ (cm}^3\text{)}$$

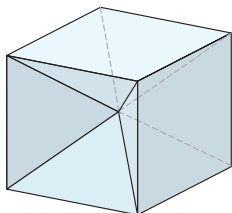
2. Orsi egy kockából bizonyos lapoknál szabályos gúlákat vágott ki. Hányadrésze a test térfogata az eredeti kocka térfogatának az egyes esetekben?

- a) A kocka egy lapjánál olyan gúlát vágott ki, amelynek magassága a kocka egy élének a fele.



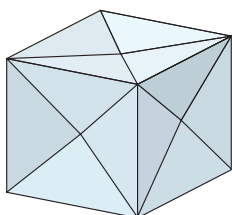
A kivágott gúla térfogata a kocka térfogatának **egyhatod** része.
A megmaradt test térfogata a kocka térfogatának **ötthatod** része.

- b) A kocka két szemközi lapjánál kivágott egy-egy olyan szabályos gúlát, melyek csúcsai a kocka középpontjában találkoznak.

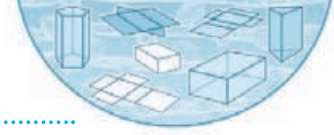


Egy kivágott gúla térfogata a kocka térfogatának **egyhatod** része.
Két kivágott gúla térfogata a kocka térfogatának **$2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$** része.
A megmaradt test térfogata a kocka térfogatának **kétharmad** része.

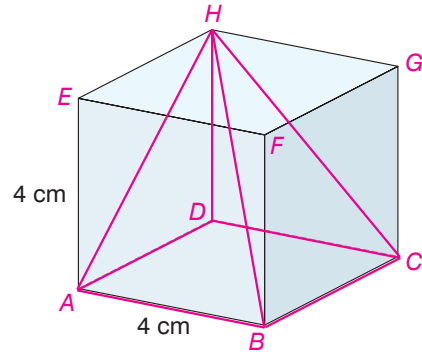
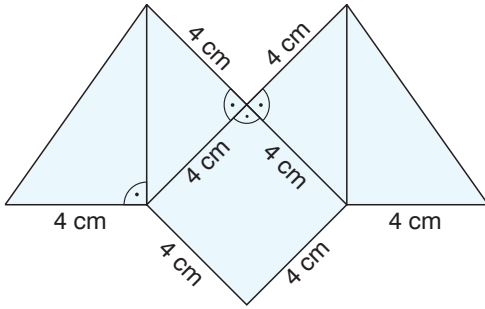
- c) A kocka minden lapjánál kivágott egy-egy olyan szabályos gúlát, melyek magassága a kocka élének a negyedével egyenlő.



Egy kivágott gúla térfogata a kocka térfogatának **egytizenedketted** része.
Hat kivágott gúla térfogata a kocka térfogatának **$6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$** része.
A megmaradt test térfogata a kocka térfogatának **fele** része.



3. Az ábrán látható hálóból egy gúlát hajtunk össze. Mekkora a gúla térfogata?



Készítsük el a hálót, és hajtsuk össze gúlavá!

Rajzoljuk be a kockába a kapott gúlát!

A gúla testmagassága: 4 cm

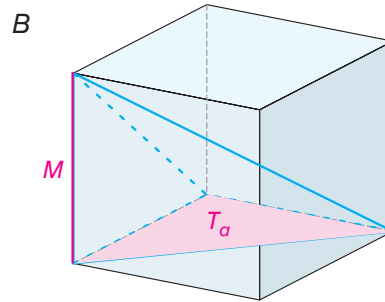
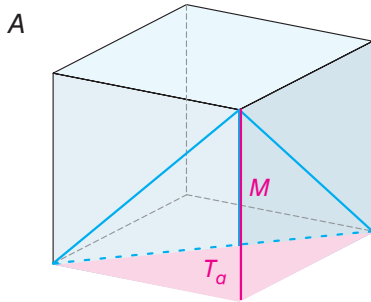
A gúla térfogata: $V = \frac{a^2 \cdot M}{3} = \frac{a^3}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

Összállítható-e néhány ilyen gúlából a kocka? Igen, 3 darabból. (A 2. gúla alaplapja BCGF, csúcsa H, a 3. gúla alaplapja ABFE, csúcsa H.)

Hányadrésze a gúla térfogata a kocka térfogatának? harmada

4. Két egybevágó kockából egy-egy gúlát vágunk ki az ábrán látható módon.

Melyik gúla térfogata nagyobb?



A gúla alaplapjának területe a kocka egy lapjának a

A: fele

B: fele

A gúla magassága:

A: azonos a kocka egy élével

B: azonos a kocka egy élével

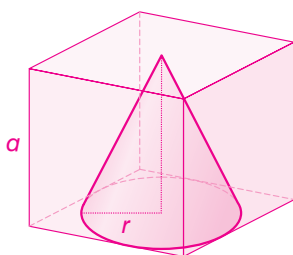
A gúla térfogata a kocka térfogatának a

A: hatod része

B: hatod része

Válasz: a két gúla térfogata egyenlő

5. Két darab 5 cm élhosszúságú fakockánk volt. Az egyikből a lehető legnagyobb térfogatú kúpot, a másikkól pedig a lehető legnagyobb térfogatú gömböt esztergálták. Melyik esetben több a hulladék?

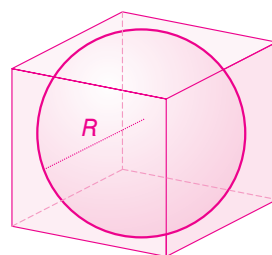


$$r = \frac{a}{2} = 2,5 \text{ cm} \quad M = a$$

$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$$

$$V_{\text{kúp}} = \frac{2,5^2 \cdot \pi \cdot 5}{3} = \frac{31,25\pi}{3} \approx 32,7$$

$$V_{\text{kúp}} \approx 32,7 \text{ cm}^3$$



$$R = \frac{a}{2} = 2,5 \text{ cm}$$

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3} \cdot 15,625\pi \approx 65,4$$

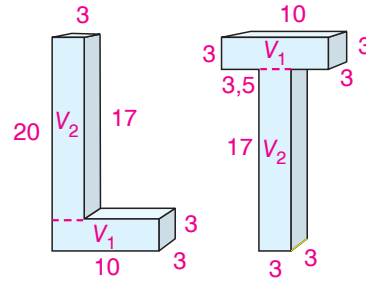
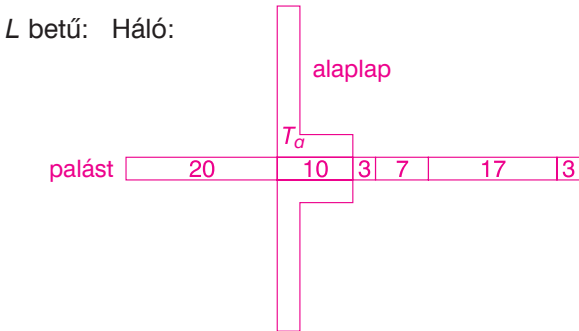
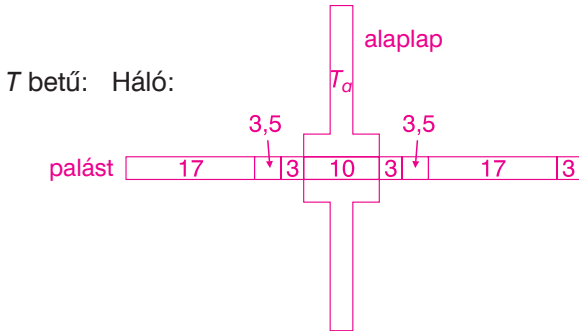
$$V_{\text{gömb}} \approx 65,4 \text{ cm}^3$$

Válasz: A kúp kisztergálása esetén több a hulladék.

Testek felszíne és térfogata

1. Leleményes Tomi elkészítette a monogramját papírból az ábrán látható módon. A betűk magassága 20 cm, szélessége 10 cm, a vastagsága 3 cm és a „szárak” vastagsága is 3 cm.

Rajzoljuk le a betűk hálóját, majd számítsuk ki a felszínüket és a térfogatukat!



Felszín: $A = 2 \cdot T_\alpha + T_p$
 $A = 2 \cdot (30 + 51) + 60 \cdot 3 = 162 + 180 = 342$
 $A = 342 \text{ cm}^2$

Térfogat: $V = V_1 + V_2$
 $V = 3 \cdot 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3 \cdot 17 = 9 \cdot (10 + 17) = 243$
 $V = 243 \text{ cm}^3$

Felszín: $A = 2 \cdot T_\alpha + T_p$
 $A = 2 \cdot (30 + 51) + 60 \cdot 3 = 162 + 180 = 342$
 $A = 342 \text{ cm}^2$

Térfogat: $V = V_1 + V_2$
 $V = 3 \cdot 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3 \cdot 17 = 9 \cdot 27 = 243$
 $V = 243 \text{ cm}^3$

2. Az ábrán 1 cm^3 térfogatú kis kockákból épített testek alaprajzát látjuk, a négyzetbe írt számok az ott álló kis kockák számát mutatják.

Rajzoljuk le a testeket a nyíl irányából nézve, majd számítsuk ki a felszínüket és a térfogatukat!

a)

1	2	1
2	2	2
1	2	1

 kis kockák száma $10 + 4 = 14$

b)

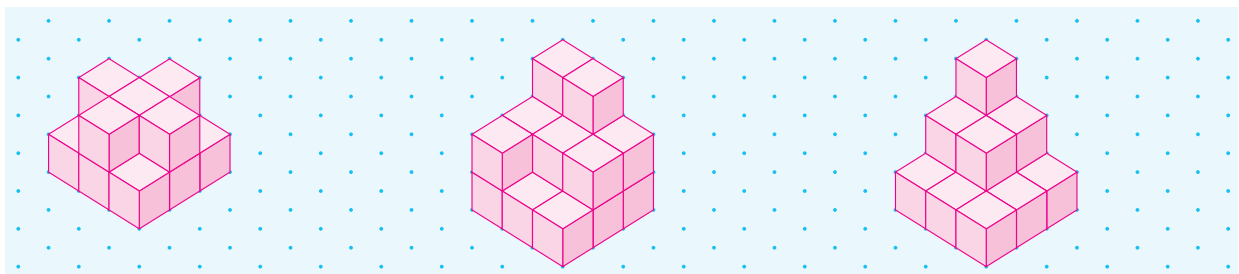
3	3	2
2	2	2
2	1	1

 kis kockák száma $6 + 10 + 2 = 18$

c)

3	2	1
2	2	1
1	1	1

 kis kockák száma $3 + 6 + 5 = 14$



Felszín: 42 cm^2

$$A_a = 2 \cdot 9 + 4 \cdot 6$$

$$A_a = 18 + 24$$

$$A_a = 42 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Térfogat: 14 cm^3
 $V_a = 9 + 5 = 14 \text{ (cm}^3\text{)}$

Felszín: 48 cm^2

$$A_b = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9$$

$$A_b = 14 + 16 + 18$$

$$A_b = 48 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Térfogat: 18 cm^3
 $V_b = 9 + 7 + 2 = 18 \text{ (cm}^3\text{)}$

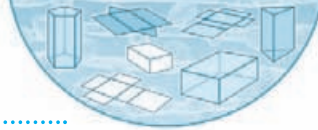
Felszín: 42 cm^2

$$A_c = 2 \cdot 9 + 4 \cdot 6$$

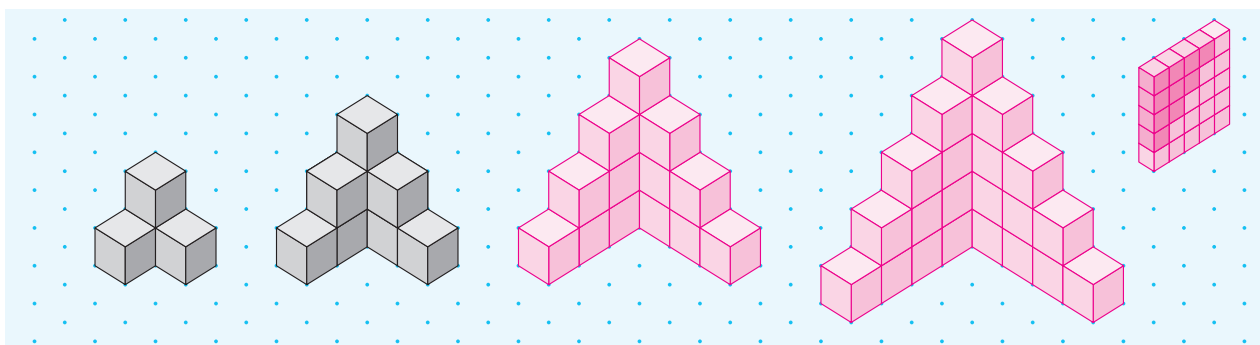
$$A_c = 18 + 24$$

$$A_c = 42 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Térfogat: 14 cm^3
 $V_c = 9 + 4 + 1 = 14 \text{ (cm}^3\text{)}$



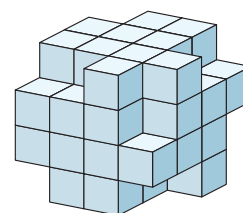
3. Folytassuk két építménnyel az 1 cm³ kis kockákból épített testek alábbi sorozatát! Mindegyik test felülnézete L alakú.



Írjuk fel a térfogatok sorozatának 1., 2., 3., 6., 10. tagját! $V_n = (n + 1)^2$, a lépcsők négyzet alapú hasábká rendezhetők.

$V_1 = 4 = 2^2$; $V_2 = 9 = 3^2$; $V_3 = 16 = 4^2$; $V_6 = 49 = 7^2$; $V_{10} = 121 = 11^2$

4. Egy kockából a csúcsainál téglatesteket vágunk ki. A kivágott téglatestek térfogatának összege 24 cm³. A megmaradt test felszíne 294 cm². Meg lehet-e ebből határozni a megmaradt test térfogatát? Húzzuk alá a megfelelő választ, és indokoljunk! IGEN / NEM.



Indoklás:

$$A_{\text{megmaradt}} = A_{\text{kocka}} \quad A_{\text{megmaradt}} = 294 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{kocka}} = 6a^2 \quad a^2 = 294 : 6 \quad a^2 = 49 \quad a = 7 \text{ (cm)}$$

$$V_{\text{kocka}} = a^3 = 343 \text{ cm}^3 \quad V_{\text{kivágott}} = 24 \text{ cm}^3 \quad V_{\text{megmaradt}} = V_{\text{kocka}} - V_{\text{kivágott}} = 319 \text{ cm}^3$$

5. Egy téglatest egy csúcsba összefutó élei hosszának összege 63 cm. Ebből a téglatestből kockát készítünk úgy, hogy az egy csúcsba futó három él közül az egyiknek a felét vesszük, a másikat a harmadát, a harmadikat pedig 3 cm-rel csökkentjük.

Hány centiméter a kapott kocka egy éle? 10 cm

Hány centiméteresek az eredeti téglatest élei? 20 cm; 30 cm; 13 cm

Hány négyzetcentiméter az eredeti téglatest felszíne? 2500 cm²

Hány köbcéntiméter az eredeti téglatest térfogata? 7800 cm³

$$a + b + c = 63 \quad a = 2x \quad 2x + 3x + x + 3 = 63 \quad a = 20 \text{ cm} \quad A_t = (20 \cdot 30 + 30 \cdot 13 + 13 \cdot 20) \cdot 2$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = c - 3 = x \quad b = 3x \quad 6x = 60 \quad b = 30 \text{ cm} \quad A_t = 2500 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$c = x + 3 \quad x = 10 \quad c = 13 \text{ cm} \quad V = 20 \cdot 30 \cdot 13$$

Össz.: 63 cm $V = 7800 \text{ (cm}^3\text{)}$

6. Az ábrán két 8 cm magas hasáb felülnézete látható. Számítsuk ki a felszínüket és a térfogatukat! Jelöljük pirossal az ismert hosszúságú szakaszokat, kékkel pedig azokat, amelyek hosszának kiszámítására szükségünk lesz!

a)

$M = 8 \text{ cm}$
 $e = 8 \text{ cm}$ a
 $f = 6 \text{ cm}$

$$a^2 = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$T_a = \frac{e \cdot f}{2}$$

$$T_a = \frac{6 \cdot 8}{2}$$

$$T_a = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$A = 48 + 20 \cdot 8$$

$$A = 208 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$V = T_a \cdot M$$

$$V = 24 \cdot 8$$

$$V = 192 \text{ (cm}^3\text{)}$$

b)

6 cm
 6 cm 6 cm
 $e + \frac{e}{2}$
 $e = 6 \cdot \sqrt{2}$
 $e \approx 8,49 \text{ cm}$

$$T_a = \frac{3}{4} \cdot a^2$$

$$T_a = \frac{3}{4} \cdot 36$$

$$T_a = 27 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$A \approx 2 \cdot 27 + (18 + 8,5) \cdot 8$$

$$A \approx 54 + 212$$

$$A \approx 266 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$V = 27 \cdot 8$$

$$V = 216 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$A = 208 \text{ cm}^2$

$V = 192 \text{ cm}^3$

$A = 266 \text{ cm}^2$

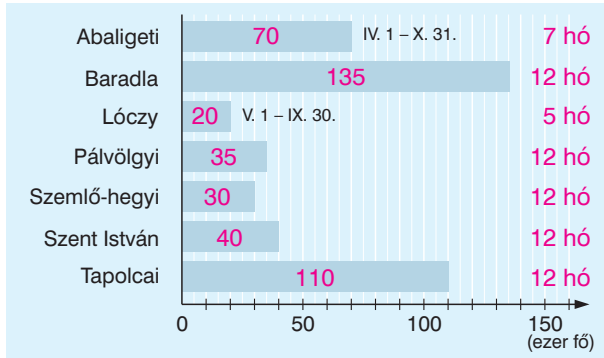
$V = 216 \text{ cm}^3$



6. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉG

Adatok elemzése

1. A diagram a látogatók számát mutatja (5000 főre kerekítve) a magyarországi barlangokban, 2009-ben.



Melyik barlangot látogatták a legtöbben?

Baradla

Átlagosan hány ember látogatott egy barlangot?

440 ezer : 7 ≈ 63 ezer

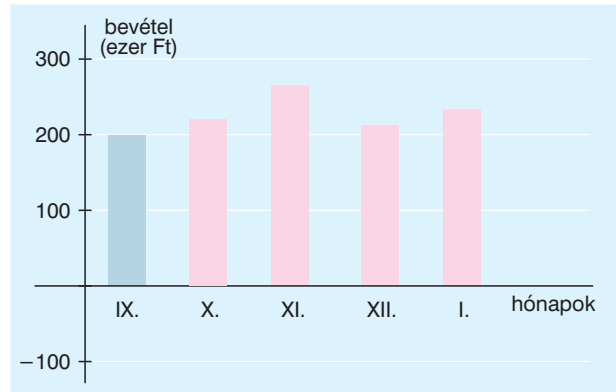
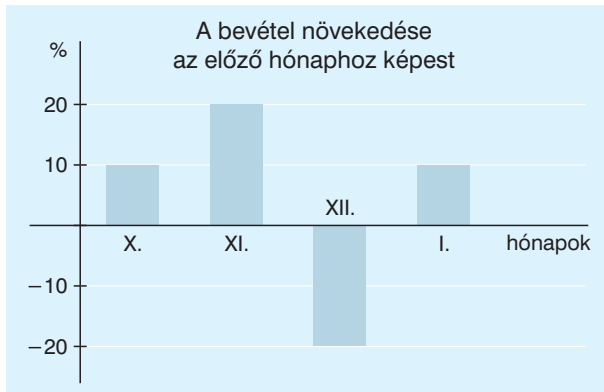
Melyik barlangban és mennyi volt a legnagyobb, illetve a legkisebb az egy napra eső átlagos látogatószám? (Az Abaliget és a Lóczy-barlang kivételével a többi egész évben nyitva tart, és a hónapokat tekintjük 30 naposnak!)

Legkisebb a Szemlő-hegyi barlangban, legnagyobb a Baradla-barlangban.

(30 000 : 360 ≈ 83 fő/nap)

(135 000 : 360 ≈ 375 fő/nap)

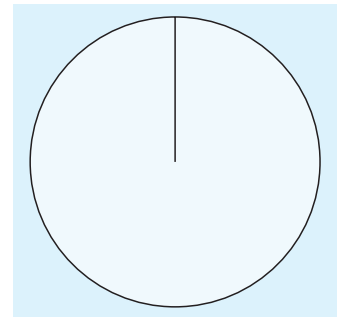
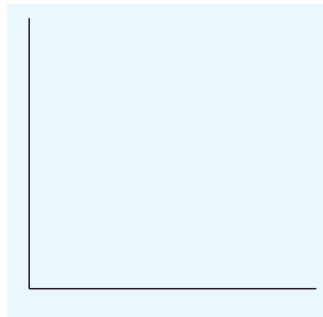
2. Az iskolai büfé vezetője értékelte az első öt hónap forgalmát. A bevétel változását az előző havi értékhez viszonyítva az alábbi grafikont kapta. A szeptemberi bevétel 200 ezer forint volt. Töltsük ki a táblázatot, és ábrázoljuk a bevétel alakulását oszlopdiagramon!



Hónap	szeptember	október	november	december	január
Bevétel (ezer Ft)	200	220	264	211,2	232,32

3. Készítsünk statisztikát az osztály tanulóinak továbbtanulási szándékáról iskolatípusok szerint! Ábrázoljuk az adatokat oszlopdiagramon és kördiagramon!

Iskolatípusok	Tanulók száma	Az osztály hány százaléka





4. Az Európai Unióban összehasonlították néhány áruházlánc azonos minőségű termékeinek árát különböző országokban, 2009-ben. A táblázat két áruházlánc 6 országbeli adatait mutatja euróban.

Ország	1. áruházlánc				2. áruházlánc			
	Férfi		Női		Férfi		Női	
	Póló	Farmer	Póló	Farmer	Póló	Farmer	Póló	Farmer
Ausztria	7,90	39,90	4,90	39,90	7,90	49,90	16,90	25,90
Magyarország	9,64	39,38	6,66	39,38	13,38	52,43	22,12	29,11
Olaszország	7,90	39,90	4,90	39,90	7,90	49,90	25,90	49,90
Portugália	7,90	39,90	4,90	39,90	5,90	39,90	12,90	19,90
Svédország	7,51	37,58	4,67	37,58	7,46	51,84	14,07	23,51
Szlovákia	7,90	39,90	4,90	39,90	7,90	49,90	16,90	25,90

- a) Hol a legolcsóbb a férfi póló? A 2. áruházláncban Portugáliában (5,90 euró).
- b) Hol a legolcsóbb a női farmer? A 2. áruházláncban Portugáliában (19,90 euró).
- c) Melyik két ország között van a legnagyobb eltérés két azonos termék árát tekintve a 2. áruházláncban?
A 2. áruházlánc, női farmer: Olaszország – Portugália (30 euró).
- d) Igaz-e minden áruháza, hogy ha a női póló olcsóbb, mint egy másik helyen, akkor a farmer is olcsóbb?
Nem (pl. 1. áruházlánc Ausztria – Magyarország).
- e) Melyik országban a legolcsóbb az 1. áruházlánc? Svédország
- f) Melyik országban a legolcsóbb a 2. áruházlánc? Portugália

Tegyünk fel további kérdéseket, és válaszoljunk rájuk a táblázat alapján!

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Válasszunk ki 5 alapvető élelmiszer-ipari terméket (pl. „Csemege” ivójoghurt 500 ml), és jegyezzük fel azok fogyasztói árát 3 különböző boltban!

	1. termék	2. termék	3. termék	4. termék	5. termék

1. bolt					
2. bolt					
3. bolt					

Tegyünk fel kérdéseket, és válaszoljunk rájuk a táblázat alapján!

.....

.....

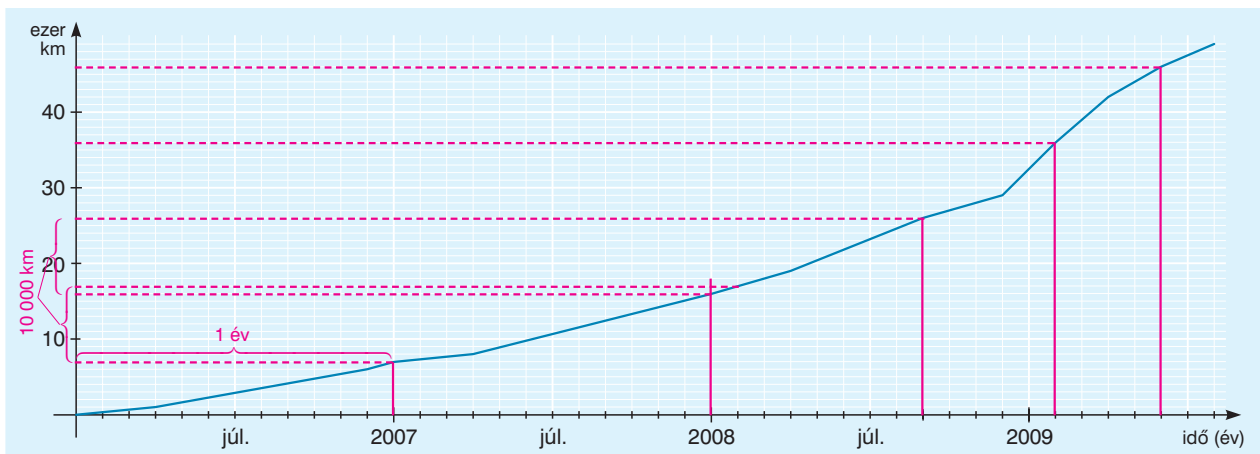
.....

.....

.....



6. A grafikon egy 2006. január elején vásárolt autó kilométerórájának állását mutatja 2009 augusztusáig.



Az autóban évente vagy 10 000 kilométerenként kell olajat cserélni (amelyik a két feltétel közül előbb teljesül). Jelöljük a grafikonon az olajcseréket, és olvassuk le az időpontjukat!

	1. olajcsere	2. olajcsere	3. olajcsere	4. olajcsere	5. olajcsere
Időpont	2007. jan.	2008. jan.	2008. szept.	2009. febr.	2009. jún.

Tegyünk fel további kérdéseket, és válaszoljunk rájuk a grafikon alapján!

.....

.....

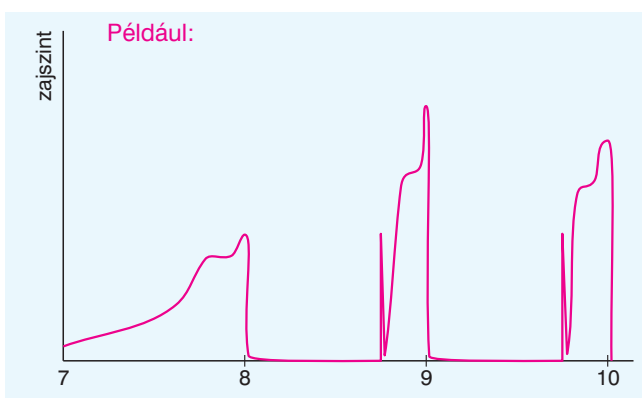
.....

.....

.....

.....

7. Rajzoljuk meg egyéni tapasztalataink alapján egy iskolai folyosó zajszintjének alakulását 7 órától 10 óráig! (A zajszint mértékegységét szabadon megválaszthatjuk.) Magyarizzuk meg a magasabb, alacsonyabb és kiugró értékeket!



Például:
 8 óra előtt a tanulók gyülekeznek, így becsengetésig emelkedik a zajszint.
 Az órák alatt csönd van, ezt a kicsöngetés szakítja meg.
 A szünetben (egészen a becsöngetésig) ugrásszerűen növekszik a zaj.

8. Dobjunk fel 5 szabályos dobókockát! A dobás előtt tippeljük meg, a dobás után pedig számítsuk ki a dobott számok átlagát! Minden dobás után az nyer, akinek a tippje legjobban megközelítette az átlagot.

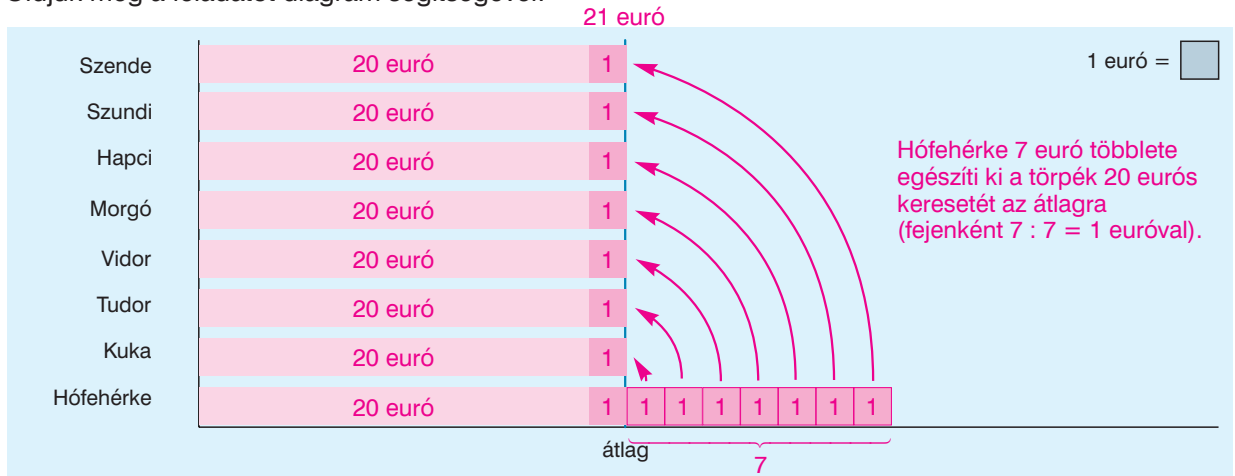
A dobás sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.
Tipp az átlagra	3,5	3,2	3,6	3,0	2,8
A dobott számok	1 2 3 3 4	1 2 3 6 6	1 2 3 4 4	1 1 2 2 5	2 3 4 6 6
Átlag	2,6	3,6	2,8	2,2	4,2
A tipp és az átlag eltérése	0,9	0,4	0,8	0,8	1,4

A táblázat egy lehetséges (valós) dobássorozatot tartalmaz.



9. Hófehérke és a hét törpe elszegődött egy asztaloshoz dolgozni. Mindegyik törpe 20 eurót keresett naponta. Hófehérke viszont 7 euróval kapott többet naponta, mint nyolcuk átlaga. Mennyit keresett Hófehérke naponta?

a) Oldjuk meg a feladatot diagram segítségével!



Jelöljük Hófehérke keresetét az átlaghoz képest! Legyen az egység 1 euró.

Az átlag az a pénz, amelyet fejenként kapnának, ha a keresett összeget egyformán osztanák szét.

Jelöljük az ábrán, hogy ez alapján egy törpe keresete mennyivel kevesebb az átlagnál!

Ennek alapján a keresetek átlaga: 21 euró Hófehérke napi keresete: 28 euró

Ellenőrzés:

A törpék napi keresete: 20 euró, Hófehérkéé 28 euró, az átlag $\frac{7 \cdot 20 + 28}{8} = \frac{168}{8} = 21$.

b) Oldjuk meg a feladatot egyenlettel!

Adjuk meg, mit jelölünk x -szel: az átlagot

Írjuk fel Hófehérke és a hét törpe összkeresetét kétféleképpen:

nyolcuk keresetének összege

az átlag alapján

$$7 \cdot 20 + (x + 7) = 8 \cdot x$$

$$140 + x + 7 = 8x$$

$$147 + x = 8x$$

$$147 = 7x$$

$$21 = x$$

Ellenőrzés: Hófehérke $27 + 1 = 28$ eurót keres, az átlag $\frac{7 \cdot 20 + 28}{8} = \frac{168}{8} = 21$.

Válasz: Hófehérke napi keresete 28 euró

10. Írjunk a négyzetekbe számokat növekvő sorrendben úgy, hogy megfeleljenek a feltételnek! – medián

- a) Az öt szám átlaga 7, mediánja 8, módusza 9. $35 - 26 = 9$ pl.:

4	5	8	9	9
---	---	---	---	---
- b) Az öt szám mediánja 5, módusza 4 és 6.

4	4	5	6	6
---	---	---	---	---
- c) Az öt szám mediánja 9, átlaga 10, módusza 1. $50 - 11 = 39$ pl.:

1	1	9	19	20
---	---	---	----	----
- d) A hét szám közül kettő 3-as. A számuk átlaga és mediánja 3, módusza 4.

1	2	3	3	4	4	4
---	---	---	---	---	---	---



11. Projektfeladat

Készítsünk statisztikát az osztály tagjainak a bevonásával különböző, tetszőlegesen választott témakörben! Tervezzük meg az adatfelvételt, a megfelelő táblázatokat, és készítsünk diagramokat! Állítsunk össze számítógépes bemutatót az adatok értékeléséről!

Témajavaslatok:

- Mely országokból származnak az asztalunkra kerülő élelmiszerek?
- Mennyi időt töltünk tévénézéssel, és milyen sorozatokat nézünk?
- Milyen sportágakat űznek az osztály tanulói, milyen eredményeket értek el, mennyi időt töltenek sportolással hetente?
- Mennyi időt töltünk az egyes tantárgyak tanulásával? Melyek a legkedveltebb tantárgyaink? stb.

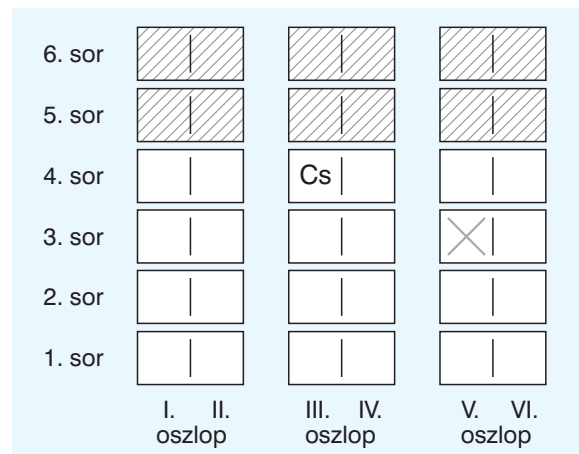


Mennyi a valószínűsége?

1. Egy zacskóban 4 alma és 2 narancs van. Véletlenszerűen adtak belőle 3 gyümölcsöt. Döntsük el, hogy a következő események közül melyik biztos (B), melyik lehetséges, de nem biztos (L), és melyik lehetetlen (N)! Írjunk X-et a megfelelő oszlopba, és indokoljunk!

Események	B	L	N	Indoklás
Csak almát kaptunk.		X		Mivel legalább 3 alma van, kaphatunk 3 almát, de mivel narancs is van, kaphatunk azt is.
Nem kaptunk almát.			X	Mivel csak 2 narancs van, biztosan kapunk almát.
Kétféle gyümölcsöt kaptunk.		X		Lehetséges, de nem biztos, mert 3 almát is kaphatunk.
Valamelyik gyümölcsből legalább kettőt kaptunk.	X			Mivel csak 2-féle gyümölcs van, és mi 3-at kapunk, ezért az egyikből legalább 2-t kell kapnunk.
Kaptunk narancsot.		X		Lehetséges, de nem biztos, mert 3 almát is kaphatunk.

2. A fordított napon a történelemtanár helyett Robi tartja az órát. Azt találta ki, hogy a felelőt véletlenszerűen választja ki kockadobással. Az osztályba 24-en járnak, akik 4 sorban és 6 oszlopban ülnek. Robi helyére a tanár ül be. Az ülésrendet az ábra mutatja, Robi helyét X jelöli. Képzeltben egészítsük ki a termet még két sor székekkel! Robi két kockával dob. A pirossal dobott szám megadja azt, hogy a felelő hányas számú oszlopban ül. Ha a sárga kockával dobott szám 1, 2, 3 vagy 4, akkor megadja a kiválasztott sor sorszámát, ha 5 vagy 6, akkor a tanár felel.



- a) Mekkora a valószínűsége, hogy a III. oszlop 4. sorában ülő Csilla felel?

A piros kockával⁶.....-féleképpen választhatjuk ki az oszlopot. Minden dobás^{egyformán}..... valószínű.

A sárga kockával⁶.....-féleképpen választhatjuk ki a sort. Minden dobás^{egyformán}..... valószínű.

A két kockával kiválasztható összes különböző hely száma:⁶..... ·⁶..... =³⁶.....

Ebből azt, hogy Csilla felel,¹.....-féleképpen kapjuk. Vagyis a „kedvező” esetek száma:¹.....

Annak a valószínűsége, hogy Csilla felel: $\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{1}{36}$

- b) Mekkora valószínűséggel felel a tanár, ha csak egy felelő van?

Számoljuk meg, hány olyan helyet választhatunk ki, amelyhez tartozó dobás esetén a tanár felel!

A kedvező esetek száma:¹³..... Annak a valószínűsége, hogy a tanár felel:¹³/₃₆.....

- c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy első sorban ülő tanuló felel?

A kedvező esetek száma⁶..... Annak a valószínűsége, hogy egy első sorban ülő tanuló felel:⁶/₃₆ = ¹/₆.....

- d) Írjunk fel olyan módszert a saját osztályunkra, amelyikkel egy felelőt úgy választunk ki, hogy mindenki ugyanakkora eséllyel felel!

.....

.....

.....



3. Egy rádiós nyereményjátékban egy zsákba valamennyi pénzt raknak. A zsákban levő pénz 1 eurótól 10 000 euróig akármennyi egész euró lehet ugyanakkora eséllyel. A hallgatók reggel 8-tól éjfélig óránként egyszer betelefonálhatnak, és mondhatnak egy tippet a pénzösszege. A műsorvezetők megmondják, hogy a zsákban levő pénz a tippnél több, kevesebb, vagy éppen annyi. Aki eltalálja az összeget, az megnyeri. Ha senki sem találja el, akkor nem osztják ki a nyereményt.

Tegyük fel, hogy mindegyik telefonáló hallotta a korábbiak tippjét, és az azokra adott válaszokat.

a) Mekkora eséllyel találja el a zsákban levő pénzösszeget

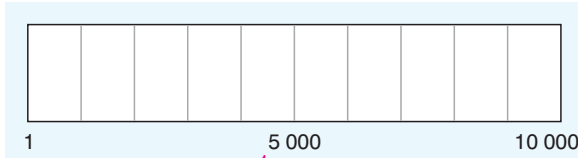
– az 1. telefonáló: $\frac{1}{10000}$

– a 2. telefonáló, ha az 1. telefonáló 4866-ot tippelt,

és erre azt a választ kapta, hogy a zsákban ennél kevesebb pénz van: $\frac{1}{4865}$

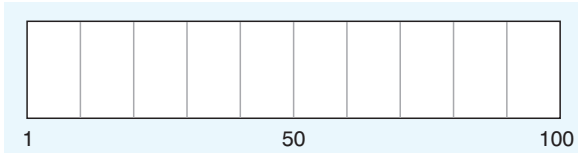
– a 3. telefonáló, ha a 2. telefonáló 4000-et tippelt, és erre azt a választ kapta, hogy több: $\frac{1}{865}$

– a 4. telefonáló, ha a 3. telefonáló 4860-at tippelt, és erre azt a választ kapta, hogy több: $\frac{1}{5}$



b) Játsszuk el a játékot!

Legyen egy rádiós, aki 1 és 100 között gondol egy számot, a többiek tippeljenek! Minden tipp előtt mondják meg, mekkora eséllyel találják el a számot!



4. Két piros és két fekete kártya közül húzzunk egyszerre kettőt, majd tegyük vissza a kártyákat!

a) Végezzünk 20 húzást, és jegyezzük fel a táblázatba a kihúzott kártyák színét!

Kísérletek	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Kártyák színe	F	P	F	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	F	F	P	F	P	
	F	P	P	P	F	F	F	F	P	F	F	P	P	P	F	F	F	P	F	F

A táblázat egy lehetséges (valós) húzássorozatot tartalmaz.

Legyen A az az esemény, hogy két piros kártyát húztunk; B az, hogy két különböző színű kártyát húztunk! Töltsük ki az előző dobássorozat alapján a táblázatot!

Esemény	A: két piros kártyát húztunk	B: két különböző színű kártyát húztunk
Gyakoriság	7	8
Relatív gyakoriság	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

A kísérletek alapján azt kaptuk, hogy a B esemény fordult elő többször.

b) Hasonlítsuk össze az A és B események valószínűségét! Soroljuk fel az összes lehetőséget, ahányféleképpen két kártyát húzhatunk, és karikázzuk pirossal az A , kékkel pedig a B eseménynek megfelelő eseteket!

Az összes lehetséges eset: B



Összes eset száma: 4 , ezek egyformán valószínűek

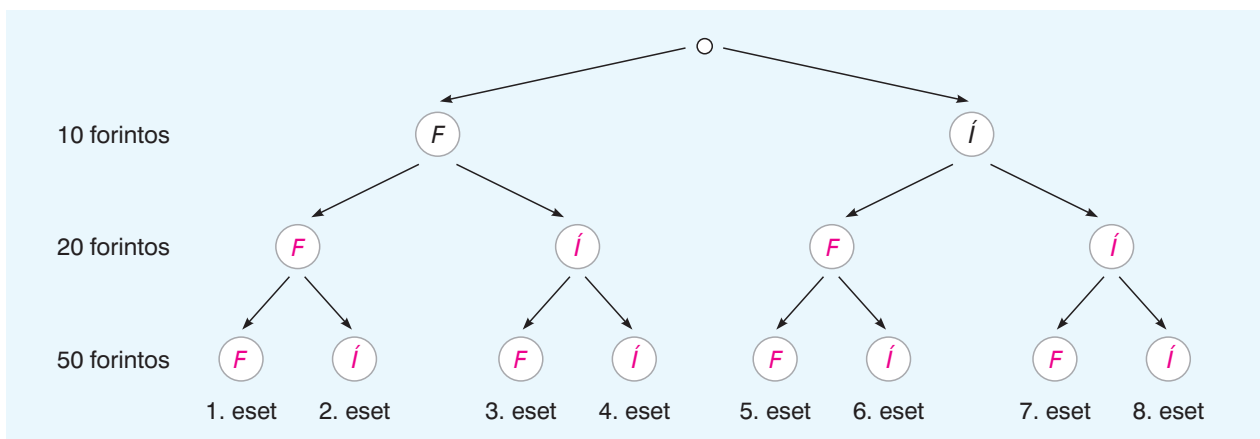
Az A esemény esetén a kedvező esetek száma: 1 , az A valószínűsége: $\frac{1}{4}$

A B esemény esetén a kedvező esetek száma: 2 , a B valószínűsége: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Tehát a B : két különböző színű kártyát húzunk esemény valószínűsége nagyobb.



5. Három érmevel, egy 10, egy 20 és egy 50 forintossal fej vagy írás játékot játszunk. A három érmet egyszerre feldobjuk, és felírjuk, hogy melyikkel mit dobtunk. Hányféle dobás lehetséges? Soroljuk fel az összes lehetőséget a nyíldiagram segítségével, majd töltsük ki a táblázatot!



A különböző dobások (összes eset) száma: **8**

Ezek a lehetőségek **egyforma** valószínűséggel következnek be.

Az esemény	A kedvező esetek száma	Az esemény valószínűsége
A: Mindhárom érme írás.	1	$\frac{1}{8}$
B: A 10 és 20 forintos érme írásra esik.	2	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
C: Pontosan két írás van.	3	$\frac{3}{8}$
D: Legalább két írás van.	4	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

6. Egy számítógépes játékban egy akadálynál választanunk kell, hogy vagy egy tölténnyel lövünk egy brontosauruszra, vagy három tölténnyel három sztegosauruszra. (Egy sztegosauruszra csak egyszer lőhetünk.)

Korábbi tapasztalatainkból tudjuk, hogy a brontosauruszt $\frac{1}{7}$ eséllyel lőjük le, egy sztegosauruszt pedig $\frac{1}{2}$ eséllyel találunk el.

Melyiket érdemes választani: a brontosaurusz vagy a három sztegosaurusz lelövését?

Először vizsgáljuk meg a sztegosauruszok találati lehetőségeit! Jelölje 1., 2., 3. a sztegosauruszokat, és írjunk a táblázatba X-et, ha a lövés talál, –-t, ha nem talál!

1.	X	X	X	X	–	–	–	–				
2.	X	X	–	–	X	X	–	–				
3.	X	–	X	–	X	–	X	–				

Az összes lehetséges eset száma: **8**, ezek egyformán valószínűek, mert $\frac{1}{2}$ eséllyel találunk, $\frac{1}{2}$ eséllyel nem.

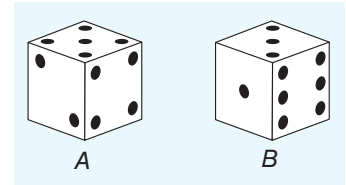
Mindhárom sztegosauruszt **1** esetben találjuk el, vagyis a kedvező esetek száma: **1**

így annak a valószínűsége, hogy mindhárom sztegosauruszt eltaláljuk: $\frac{1}{8}$

A **brontosaurusz** lelövését érdemes választani, mert $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$



7. Két rab a börtönben azzal tölti az idejét, hogy kockáznak. Mindkettőjüknek olyan öreg kockája van, amelynek 3 lapja már teljesen lekopott. Az ábrán a látható lapok látszanak.



Egyszerre mindketten feldobják a kockájukat. Az nyer, aki nagyobb számot dob. Az üres lap 0-nak számít. Ha mindketten 0-t dobnak, döntetlen. Melyik kockának nagyobb a nyerési esélye?

Írjuk táblázatba a lehetőségeket a minta szerint!

Például:

A 3. sor 3. oszlopában A dobása 0, B dobása 0, döntetlen (D).

A 4. sor 4. oszlopában A dobása 2, B dobása 1, A nyer.

Az 5. sor 4. oszlopában A dobása 2, B dobása 3, B nyer.

Folytassuk a táblázat kitöltését!

A \ B	0	0	0	2	4	5
0	D	D	D	A	A	A
0	D	D	D	A	A	A
0	D	D	D	A	A	A
1	B	B	B	A	A	A
3	B	B	B	B	A	A
6	B	B	B	B	B	B

Az összes eset száma: 36

Az A kocka 14 esetben nyer.

Az A kocka nyerési esélye: $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

A B kocka 13 esetben nyer.

A B kocka nyerési esélye: $\frac{13}{36}$

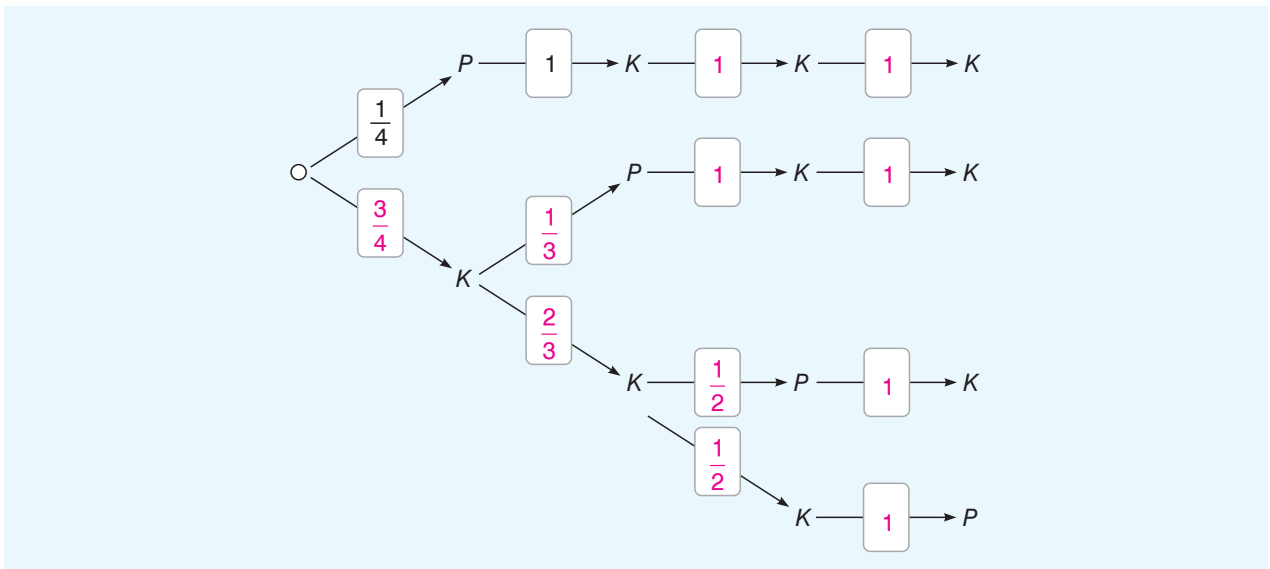
Tehát a(z) A kocka nyer nagyobb eséllyel.

*8. Egy zacskóban 1 piros és 3 kék golyó van. Ezeket sorban egymás után kihúzzuk úgy, hogy a kihúzott golyókat nem tesszük vissza.

A lehetséges húzási sorrendeket nyíldiagrammal ábrázoltuk.

Írjuk rá mindegyik nyílra annak az esélyét, hogy a nyíl kezdőpontjából a nyíl irányába haladunk tovább!

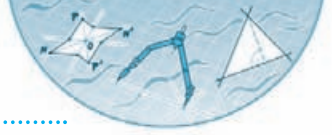
Pl. a kezdőpontból $\frac{1}{4}$ eséllyel húzunk pirosat, aztán mindháromszor 1 valószínűséggel kéket.



Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre kéket húzunk? $\frac{3}{4}$

Ha elsőre kéket húztunk, akkor mennyi a valószínűsége, hogy másodszorra pirosat húzunk? $\frac{1}{3}$

Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre kéket és másodszorra pirosat húzunk? $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$



7. GEOMETRIA II.

Az eltolás

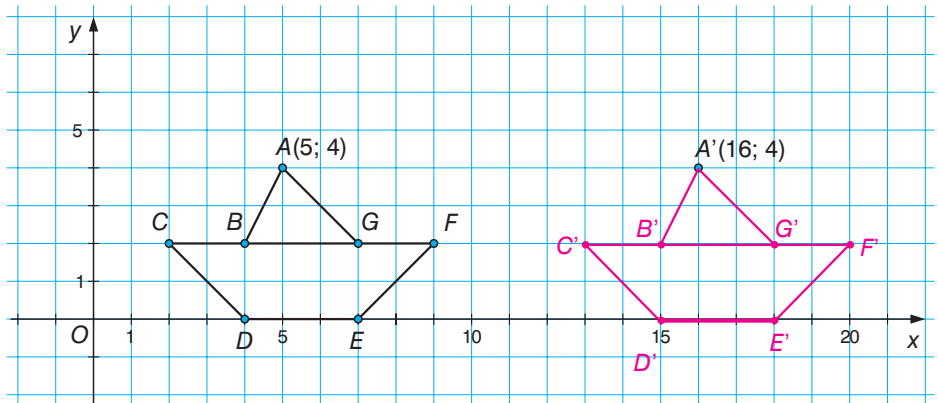
1. Egy hajó úszik a koordináta-rendszer x tengelye mentén. Egy idő után a vitorla A csúcsa az A' pontba kerül.

a) Adjuk meg a megjelölt pontok koordinátáit a kiindulási helyzetben!

B (4; 2); C (2; 2);

D (4; 0); E (7; 0);

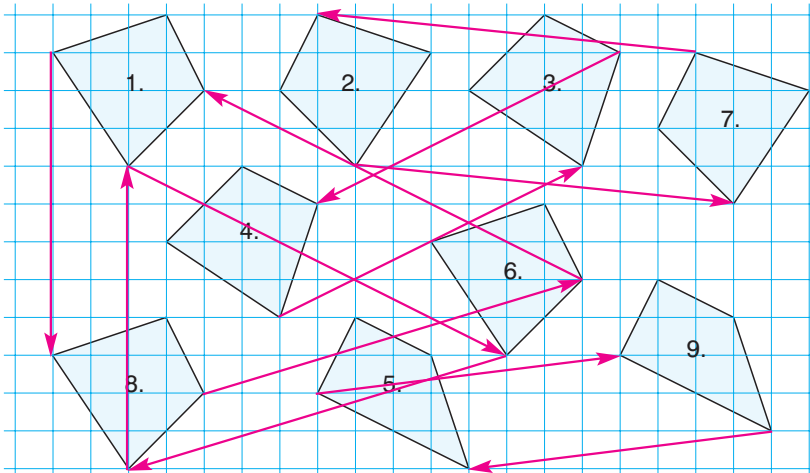
F (9; 2); G (7; 2).



b) Adjuk meg, hogy a megjelölt pontok mely pontokba kerülnek, amikor az A pont az A' pontba jut!

B' (15; 2); C' (13; 2); D' (15; 0); E' (18; 0); F' (20; 2); G' (18; 2).

2. Keressük meg, hogy a következő síkidomok közül melyek keletkezhetnek egymásból eltolással! Különböző színeket használva rajzoljunk be olyan irányított szakaszokat, amelyek egyik négyszöget a másikba viszik át!



1. → 6; 8.

2. → 7.

3. → 4.

4. → 3.

5. → 9.

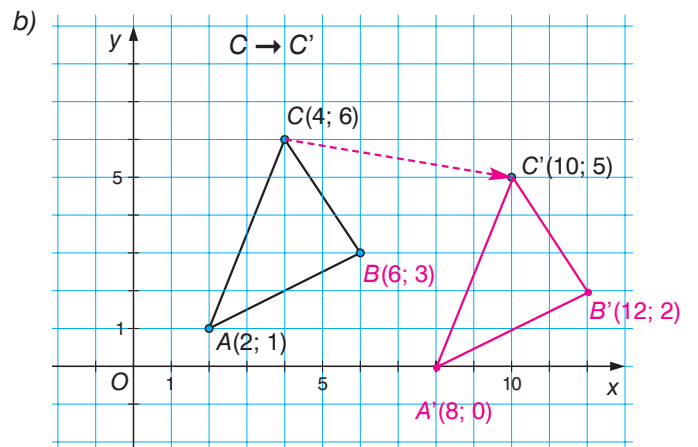
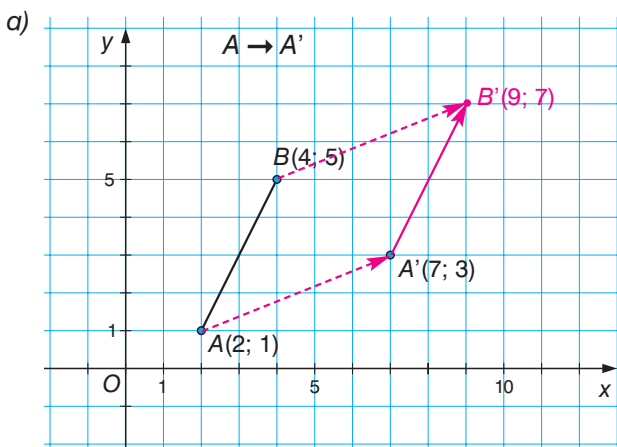
6. → 1; 8.

7. → 2.

8. → 1; 6.

9. → 5.

3. Szerkesszük meg az alábbi alakzatok eltolással létrehozható képét a koordináta-rendszerben, és adjuk meg a jelölt pontok képének koordinátáit, ha az alakzat megfelelő képpontja adott!



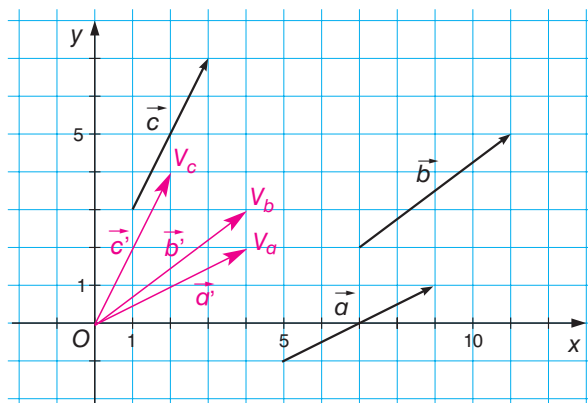
A vektorok

1. A koordináta-rendszerben adottak az \vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c} vektorok. Rajzoljuk meg azokat az adott vektorokkal egyenlő \vec{a}' ; \vec{b}' ; \vec{c}' vektorokat, amelyeknek a kezdőpontja az origó! Adjuk meg ezen vektorok V végpontjának koordinátáit!

$V_{a'}$ (4; 2)

$V_{b'}$ (4; 3)

$V_{c'}$ (2; 4)



2. Adott a koordináta-rendszerben a \vec{v} vektor. Rajzoljunk a koordináta-rendszerbe olyan vektort, amely az adott \vec{v} vektorral egyenlő, és

a) kezdőpontja a(z)

• A_k (2; 1) pont; A_v (3; 4)

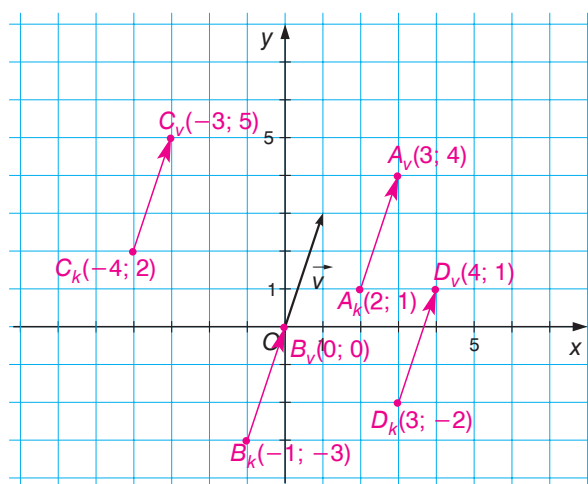
• B_k (-1; -3) pont; B_v (0; 0)

b) végpontja a

• C_v (-3; 5) pont; C_k (-4; 2)

• D_v (4; 1) pont! D_k (3; -2)

Írjuk a rajzra a kezdő- és végpontok koordinátáit is!



3. Az ábrán egy szabályos háromszög látható a középvonalaival. Soroljuk fel azokat a vektorokat, melyek az \vec{AB} vektorral

a) azonos irányúak:

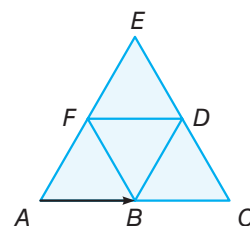
\vec{AB} ; \vec{BC} ; \vec{FD} ; \vec{AC}

b) azonos abszolút értékűek:

\vec{AB} ; \vec{BA} ; \vec{BC} ; \vec{CA} ; \vec{AF} ; \vec{FA} ; \vec{FB} ; \vec{BF} ; \vec{BD} ; \vec{DB} ; \vec{DC} ; \vec{CD} ; \vec{FD} ; \vec{DF} ; \vec{FE} ; \vec{EF} ; \vec{DE} ; \vec{ED}

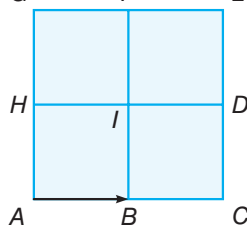
c) egyenlőek:

$\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{FD}$



4. Keressük meg az ábrákon az összes olyan vektort, amelyek az \vec{AB} vektorral, majd amelyek az \vec{IF} vektorral egyenlő!

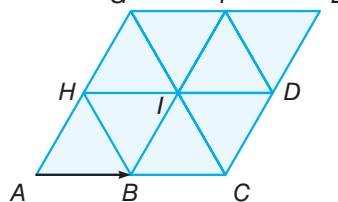
a) G F E



$\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{HI} = \vec{ID} = \vec{GF} = \vec{FE}$

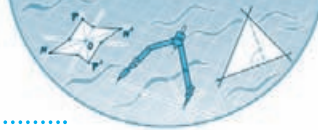
$\vec{IF} = \vec{HG} = \vec{DE} = \vec{AH} = \vec{BI} = \vec{CD}$

b) G F E

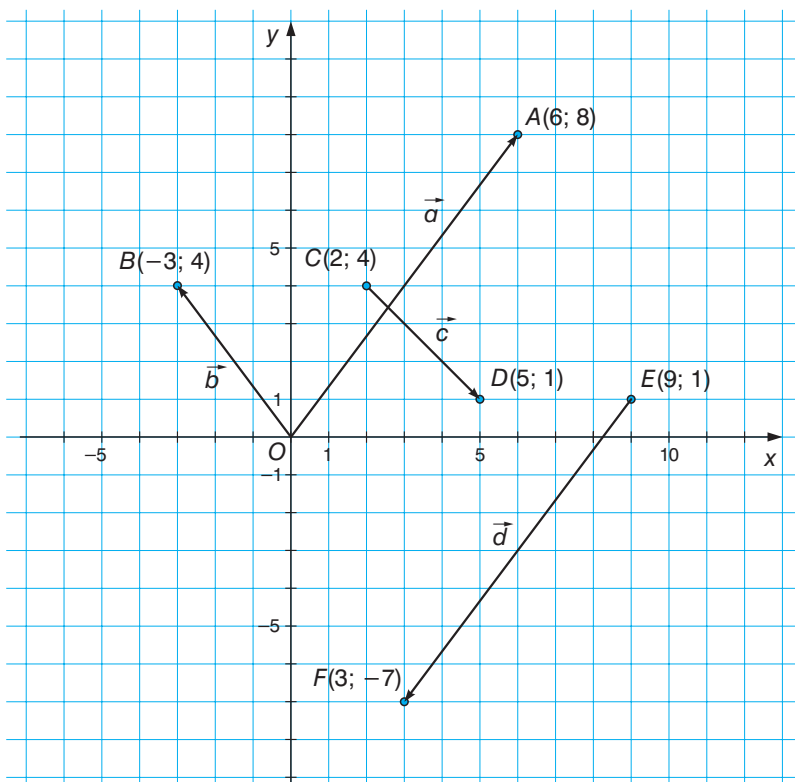


$\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{HI} = \vec{ID} = \vec{GF} = \vec{FE}$

$\vec{IF} = \vec{HG} = \vec{DE} = \vec{AH} = \vec{BI} = \vec{CD}$



5. Határozzuk meg az ábrán látható vektorok hosszát (abszolút értékét)! Vannak-e ezek között egyenlő vektorok? Ha igen, akkor melyek ezek?



$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Válasz: **Nincsenek, mert az \vec{a} és \vec{d} egyenlő hosszú, de nem egyenlő vektorok, $\vec{a} \neq -\vec{d}$.**

6. Toljuk el az ABCD paralelogrammát úgy, hogy az A pont képe B legyen!

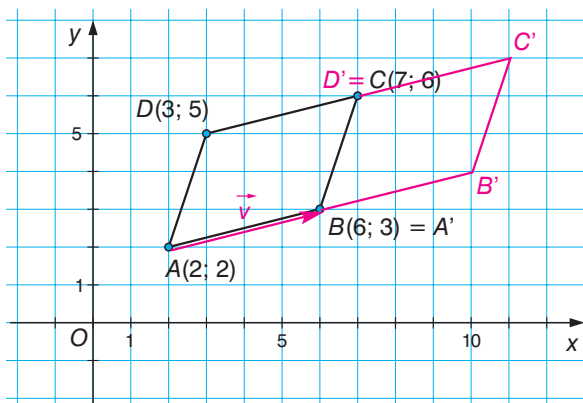
a) Adjuk meg a hiányzó pontok koordinátáit!

$$B' (10; 4); C' (11; 7); D' (7; 6)$$

b) Rajzoljuk be az eltolás vektorát!

c) Határozzuk meg a vektor hosszát (abszolút értékét)!

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} \approx 4,12$$



7. Adott a koordináta-rendszerben az ABCD téglalap, melynek oldalvektorai

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{a} \\ \vec{AD} &= \vec{b} \end{aligned}$$

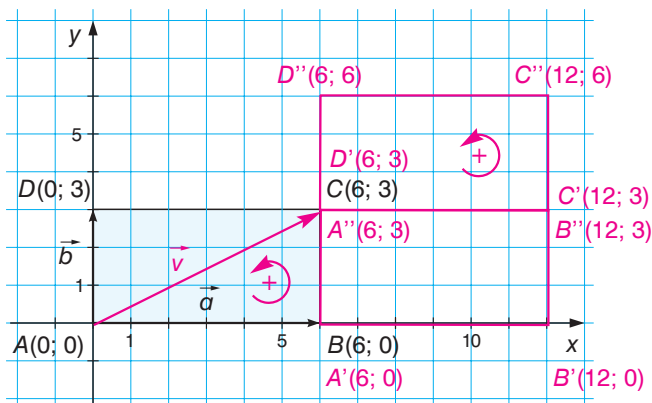
a) Toljuk el a téglalapot az \vec{a} vektorral ($A'B'C'D'$), majd ezt követően a \vec{b} vektorral ($A''B''C''D''$)!

b) Adjuk meg a keletkező téglalap csúcsainak koordinátáit!

$$A'' (6; 3); B'' (12; 3); C'' (12; 6); D'' (6; 6);$$

c) Helyettesítsük a két eltolást egy eltolással! Rajzoljuk be ezen eltolás vektorát! \vec{v}

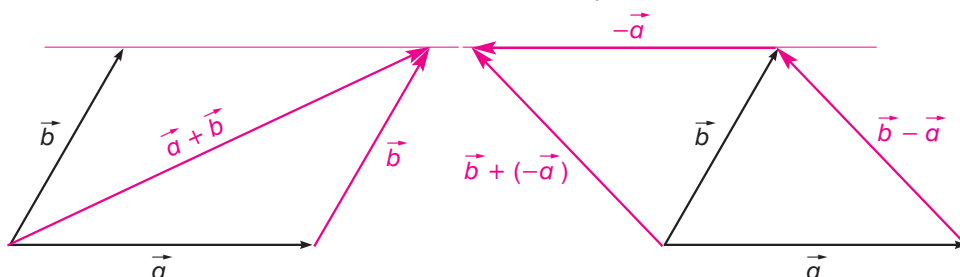
d) Rajzoljuk be a téglalapok körüljárási irányát!



8. Az alábbi ábrákon szerkesszük meg a következő vektorokat!

a) $\vec{a} + \vec{b}$

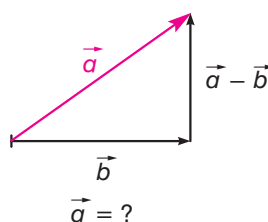
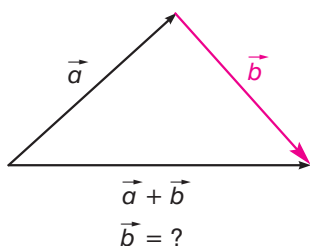
*b) $\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$



9. Adottak az ábrákon látható vektorok. Szerkesszük meg a kért vektorokat!

a)

*b)



10. Adottak a koordináta-rendszerben az \vec{a} és \vec{b} vektorok. Szerkesszük meg az $\vec{a} + \vec{b}$ és az $\vec{a} - \vec{b}$ vektorokat, majd az eredményvektort toljuk el az origóba!

a) Melyik pontba mutatnak az így kapott vektorok?

$P(8; 7)$

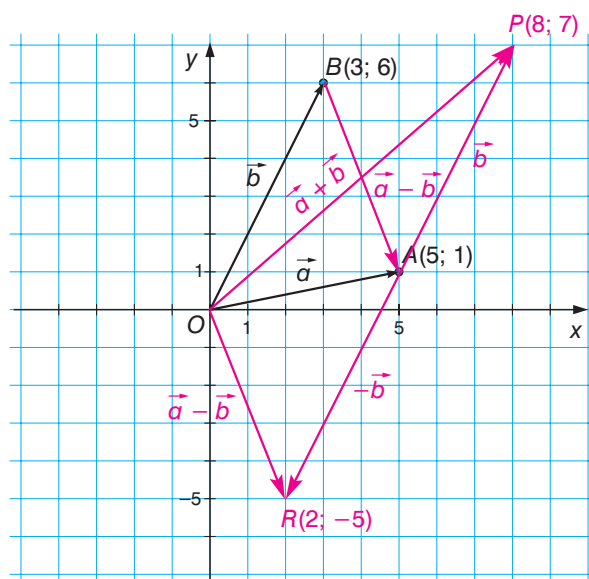
$R(2; -5)$

b) Mekkora az összegvektor hossza?

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113} \approx 10,6$

c) Mekkora a különbségvektor hossza?

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \approx 5,39$



11. Döntsük el a következő állításokról, hogy melyik igaz (I), melyik hamis (H)! Írjuk a négyzetbe a megfelelő betűt!

a) Ha az eltolás vektora adott, akkor a sík minden pontjának megadható a képe.

I

b) Minden párhuzamos eltolásnak van fixpontja.

H

c) Két párhuzamos eltolás egymásutánja független az eltolások sorrendjétől.

I

d) Tetszés szerinti számú eltolás egymásutánja is párhuzamos eltolás.

I

e) Van olyan eltolás, amely esetén a sík minden pontjának a képe önmaga.

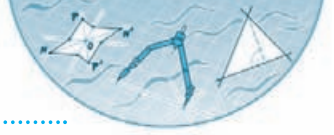
I

f) A párhuzamos eltolás minden egyenest önmagával párhuzamos egyenesbe visz át.

I

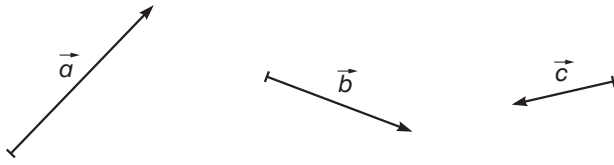
g) A párhuzamos eltolás az alakzatok körüljárását megfordítja.

H



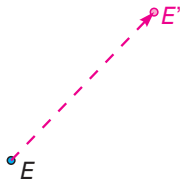
A párhuzamos eltolás alkalmazása, szerkesztések

1. Adottak az \vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c} vektorok.

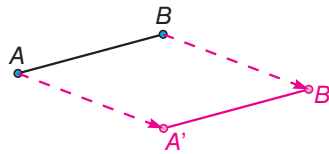


Toljuk el az

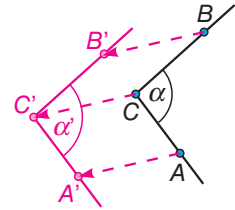
a) E pontot \vec{a} -ral;



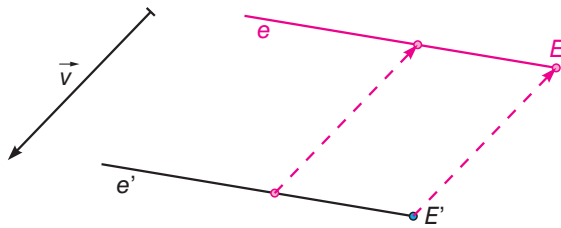
b) AB szakaszt \vec{b} -ral;



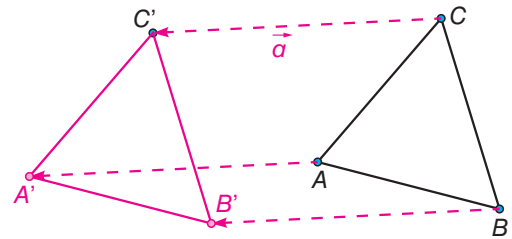
c) α szöget \vec{c} -ral!



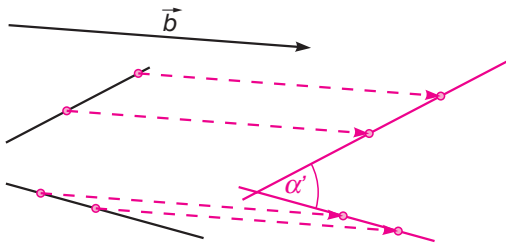
2. a) Az E kezdőpontú e félegyenest eltoltuk \vec{v} -ral, így kaptuk az e' félegyenest. Szerkesszük meg az e egyenest!



b) Az ABC háromszöget eltoltuk egy \vec{a} -ral, a C pont képe a C' pont lett. Rajzoljuk meg az eltolás vektorát, és szerkesszük meg az $A'B'C'$ háromszöget!



c) Az α szög csúcsa lemaradt a rajzról. Szerkesszük meg az α szög adott \vec{b} -ral eltoló képét, az α' szöget!



3. Az ábrán két egymást metsző egyenlő sugarú kört láthatunk. A berajzolt szakaszok párhuzamosak egymással.

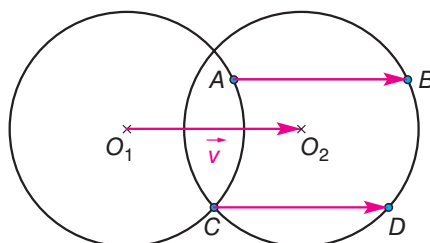
a) Mit állapíthatunk meg a szakaszok hosszáról?

$$|\vec{v}| = OO_1 = AB = CD \quad \text{egyenlők}$$

b) Milyen transzformáció viheti át a két kört egymásba?

Egy eltolás, amely vektorának abszolút értéke a két középpont távolsága.

$$O_1O_2 \parallel AB \parallel CD$$



$$A \rightarrow B = A'$$

$$O_1 \rightarrow O_2 = O_1'$$

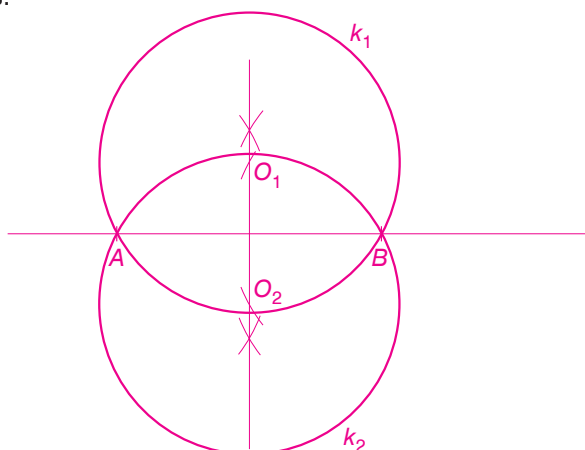
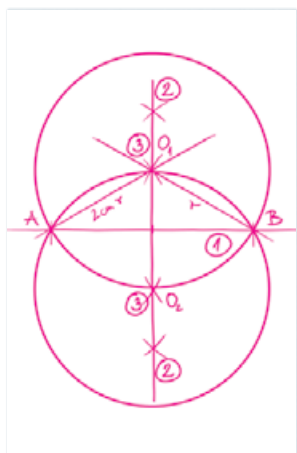
$$C \rightarrow D = C'$$



4. a) Vegyünk fel egy 3,5 cm hosszúságú AB szakaszt! Rajzoljunk olyan 2 cm sugarú kört, amelynek az AB szakasz a húrja! Hány megoldás van?

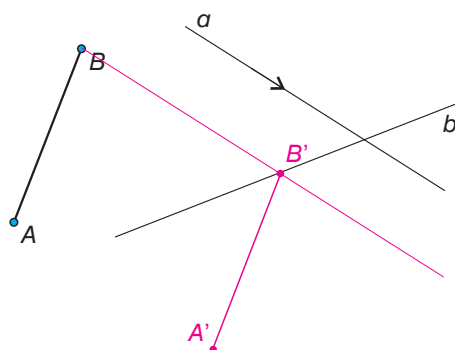
Vázlat, terv:

Szerkesztés:



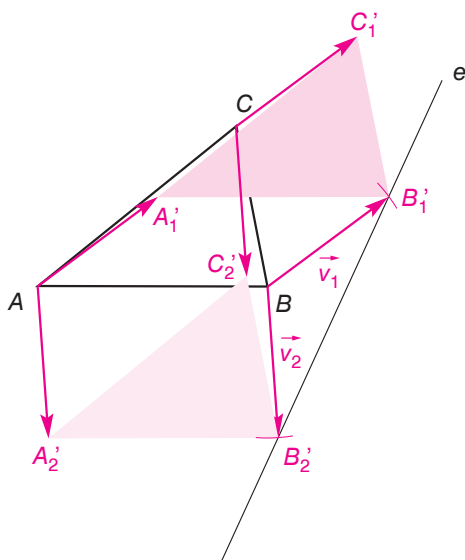
A megoldások száma:**2**.....

5. Toljuk el az adott AB szakaszt az a egyenessel párhuzamosan a berajzolt irányban úgy, hogy a B pont képe a b egyenesre illeszkedjen! Hány megoldást kapunk?

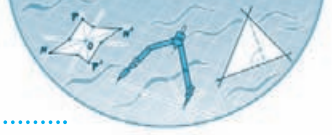


A megoldások száma:**1**.....

6. Toljuk el az adott ABC háromszöget úgy, hogy a háromszög B csúcsának képe (B') az adott e egyenesre kerüljön, és a B és B' pontok távolsága 2 cm legyen! Hány megoldást kapunk?



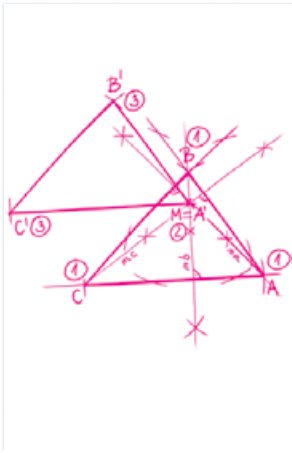
A megoldások száma:**2**.....



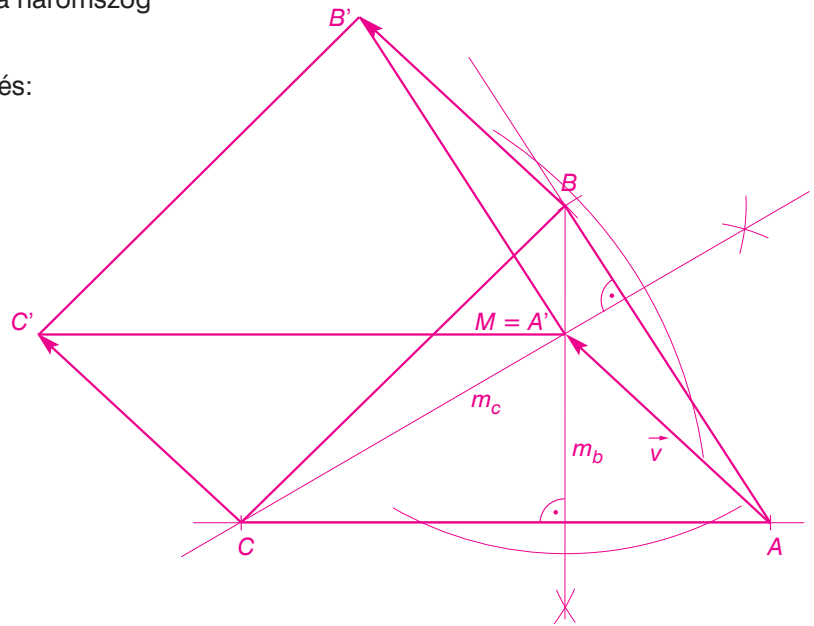
7. Szerkesszünk egy háromszöget a következő adatokkal: $AB = 5\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$, $CA = 7\text{ cm}$! Toljuk el ezt a háromszöget úgy, hogy az A csúcs a háromszög

a) magasságpontjába;

Vázlat, terv:

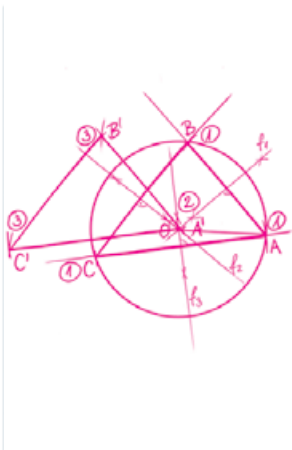


Szerkesztés:

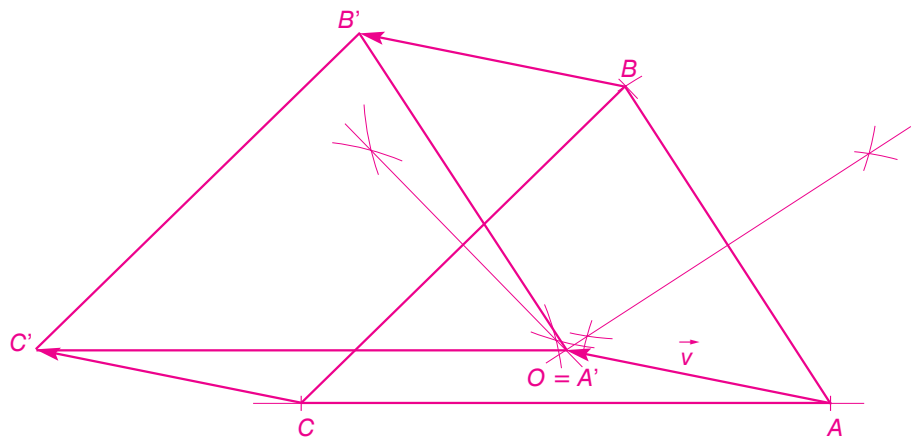


b) a háromszög köré írt kör O középpontjába;

Vázlat, terv:

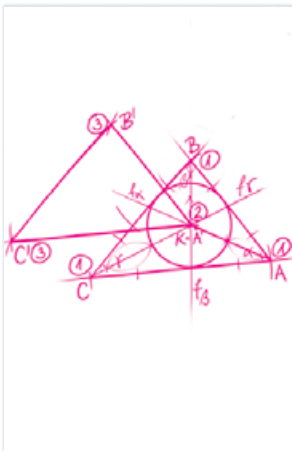


Szerkesztés:

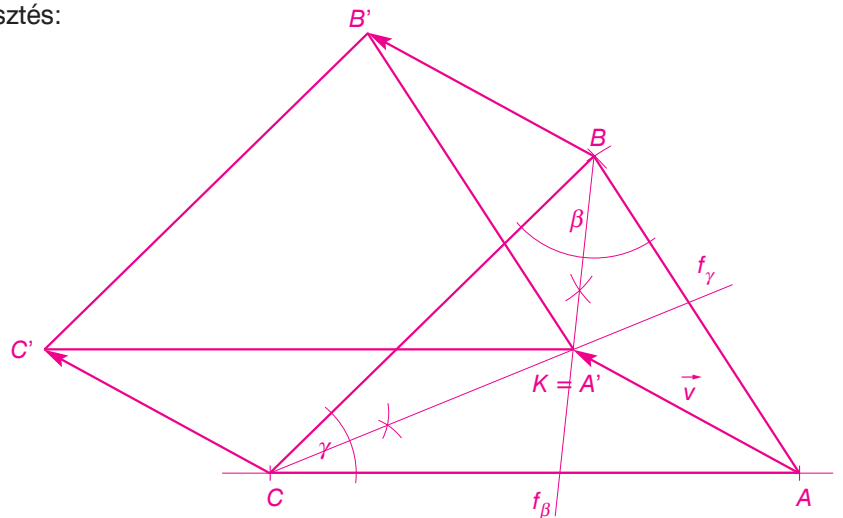


c) a háromszögbe írható kör K középpontjába kerüljön!

Vázlat, terv:



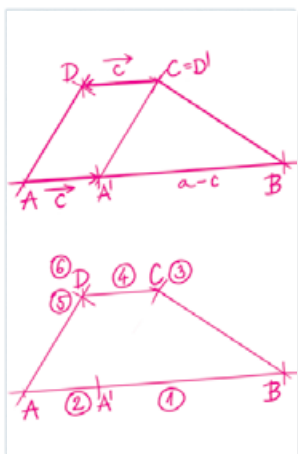
Szerkesztés:



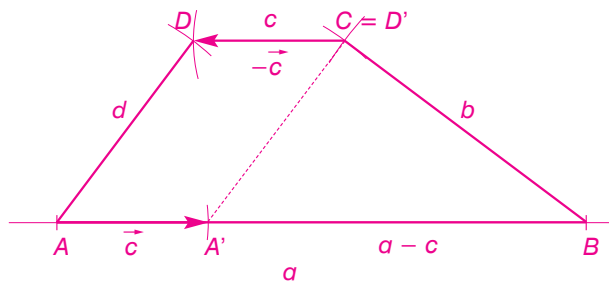


8. a) Szerkesszünk trapézt, ha négy oldala: $a = 7\text{ cm}$, $b = 4\text{ cm}$, $c = 2\text{ cm}$, $d = 3\text{ cm}$!

Vázlat, terv:

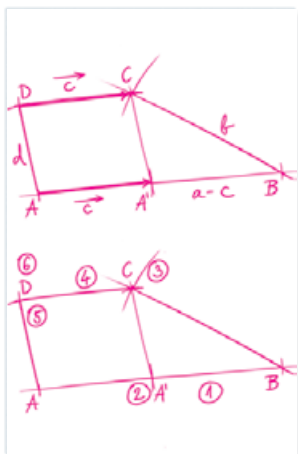


Szerkesztés:

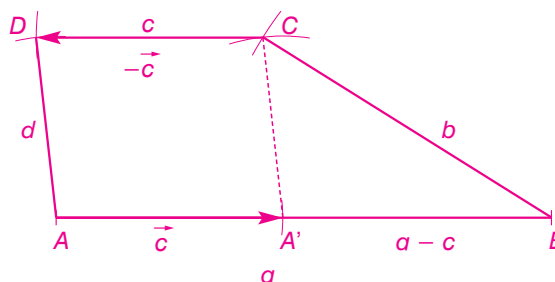
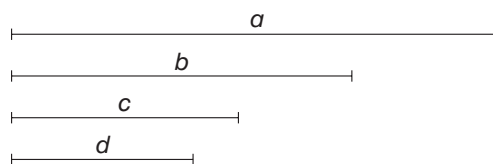


b) Szerkesszünk trapézt, ha az oldalai az adott szakaszok!

Vázlat, terv:

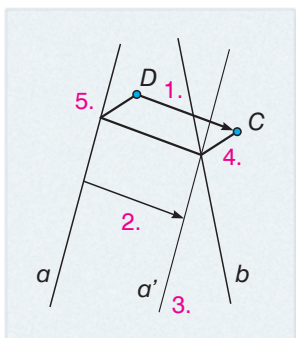


Szerkesztés:

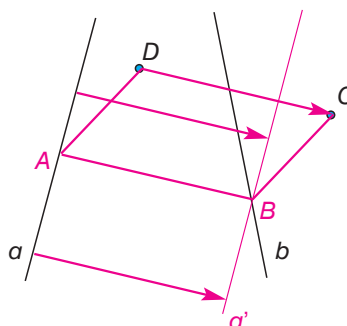


*9. Adott az a és b egyenes és az egyenesekre nem illeszkedő C és D pont. Szerkesszünk olyan paralelogrammát, melynek csúcspontjai C , D , és a másik két csúcsa az a , illetve a b egyenesekre illeszkedik. Segít a vázlatrajz. Írjuk rá a szerkesztés lépéseit!

Vázlat:



Szerkesztés:

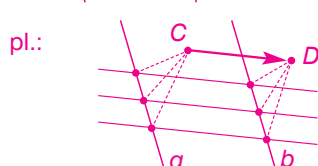


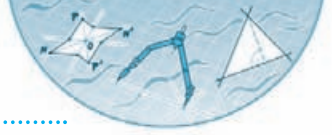
Adjuk meg annak a feltételét, hogy a feladatnak

a) ne legyen megoldása;

pl.: $\vec{CD} \parallel a \parallel b$

b) több megoldása legyen!





Egybevágósági transzformációk

1. Egészítsük ki a mondatokat úgy, hogy az egyes geometriai transzformációkra igaz állításokat kapjunk!

Tengelyes tükrözés esetén	Középpontos tükrözés esetén	Párhuzamos eltolás esetén
A transzformációt egyértelműen megadja a síkon a tükrözés tengelye	Mindhárom esetben egy pont és a képe (ha $P \notin t$). a tükrözés középpontja az eltolás vektora
A transzformációnak fixpontja (a fixpont az a pont, melynek képe önmaga) a tengely pontjai a középpont nincs fixpontja
Egy egyenes párhuzamos a képével ($e \parallel e'$) $e \perp t$ vagy bármely egyenes bármely egyenes
..... $e \parallel t$ (lehet t is) párhuzamos a képével és képe párhuzamos
Az egyenes képe önmaga, de nem minden pontja fixpont, ha $e \perp t$ vagy a középponton áthaladó a vektorral párhuzamos
..... $e \parallel t$ (de nem t) egyeneseknél egyenesek esetén
Bármely síkidom és képe egybevágó, és a körüljárási iránya ellentétes megegyező megegyező

2. A felsorolt tulajdonságok egybevágósági transzformációkhoz kapcsolódnak. Írjuk a kipontozott helyre annak a transzformációnak a betűjelét, melyre igaz az állítás!

T: Tengelyes tükrözés

K: Középpontos tükrözés

E: Párhuzamos eltolás

.....**K, E**..... Bármely egyenes és képe párhuzamos.

.....**T, K, E**..... Bármely szög és képe egyenlő nagyságú.

.....**E**..... Nincs fixpontja.

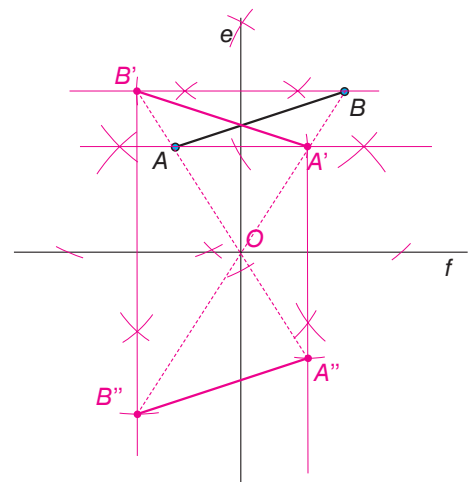
.....**K**..... Szög és képe fordított állású szögpárt alkot.

.....**T**..... Alakzat és képe ellentétes körüljárású.

.....**T, K, E**..... Alakzat és képe egybevágó.

*3. Tükrözzük az AB szakaszt az e egyenesre ($A'B'$), majd a tükörképet az e -re merőleges f egyenesre! Milyen egyetlen transzformációval lehet AB -ből megkapni az $A''B''$ szakaszt?

Az e és f egyenesek O metszéspontjára való középpontos tükrözéssel helyettesíthető a két egymásra merőleges egyenesre való tengelyes tükrözés egymásutánja.



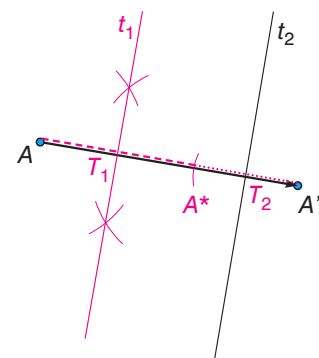
*4. Az A pont eltolással kapott képe A' . Ezt az eltolást két egymással párhuzamos t_1 és t_2 tengelyre vonatkozó tükrözés egymásutánjával helyettesítettük. Szerkesszük meg t_1 -et, ha t_2 -t megadtuk!

Jelöljük $\vec{AA'} = \vec{v}$, hasonlítsuk össze $|\vec{v}|$ a tengelyek távolságával!

A vektor hossza a tengelyek távolságának kétszerese.

$$|\vec{v}| = AT_1 + T_1A^* + A^*T_2 + T_2A'$$

$$|\vec{v}| = 2 \cdot T_1T_2$$





5. a) Rajzoljuk meg annak az eltolásnak a vektorát, amely az ABCD paralelogramma

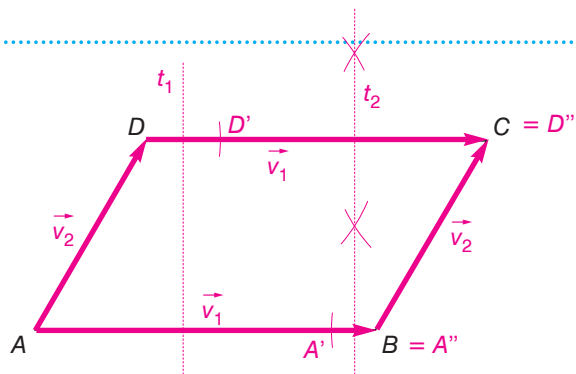
(1) AD oldalát a BC-be viszi át (\vec{v}_1);

(2) AB oldalát a DC-be viszi át (\vec{v}_2)!

Adjuk meg a \vec{v}_1 és a \vec{v}_2 vektorokat a kezdő- és végpontjával!

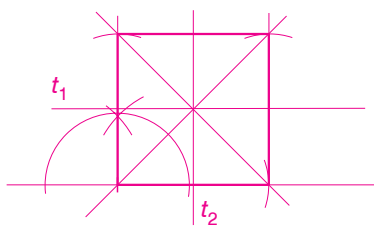
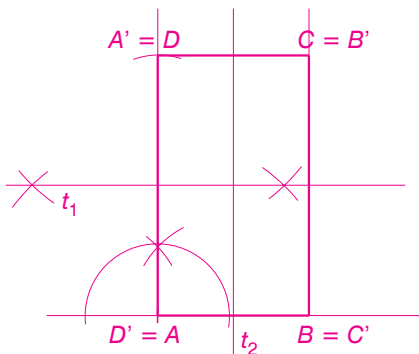
(1) $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

(2) $\vec{v}_2 = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$



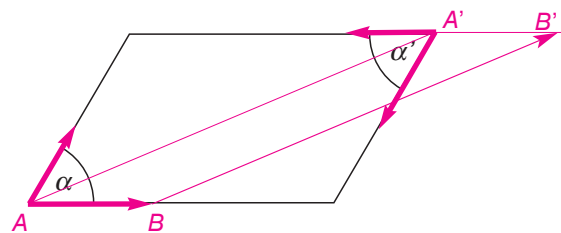
b) Csak tengelyes tükrözést alkalmazva vigyük át az AD szakaszt a BC szakaszba! Rajzoljunk meg egy lehetséges esetet a fenti ábrán! $t_1 \perp AD$ $t_2 \perp AD$ $t_1 \parallel t_2$

c) Melyik az a paralelogramma, amelynek szemközti oldalai egyetlen tengelyes tükrözéssel átvihetők egymásba? Készítsünk rajzot! **Bármely téglalap valamely oldalfelező merőlegesére való tengelyes tükrözéssel.**

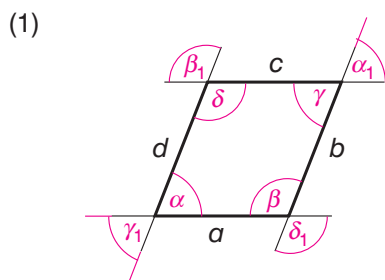


6. A paralelogramma szemközti szögei egyenlők és a megfelelő szög-szárak páronként párhuzamosak egymással. Átvihetők-e egymásba eltolással?

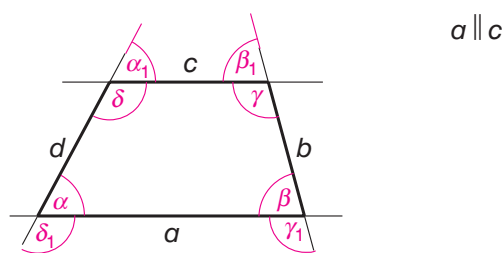
Nem, mert a megfelelő szög-szárak ellentétes irányításúak.



7. Az alábbi négyszögek belső és külső szögei közül jelöljük meg azonos színű körívvel két-két olyan szöget, melyek eltolással átvihetők egymásba! **Pl.:**



$a \parallel c$ (2)
 $b \parallel d$



8. a) Írjunk 1-est minden olyan szögtartományba, amely α -val egyállású szög!

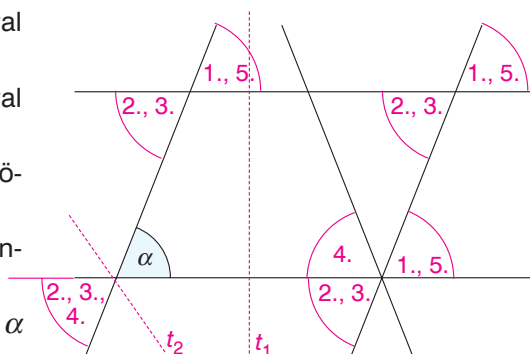
b) Írjunk 2-est minden olyan szögtartományba, amely α -val fordított állású szög!

c) Írjunk 3-ast minden olyan szögtartományba, amelyek α középpontos tükörképe!

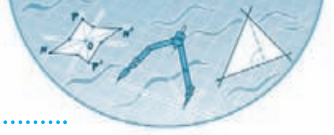
d) Írjunk 4-est minden olyan szögtartományba, amelyek α tengelyes tükrözésével kapható!

e) Írjunk 5-öst minden olyan szögtartományba, amelyek α párhuzamos eltolással kaptak képe!

f) Miért kerülhetett egy szögtartományba több szám?

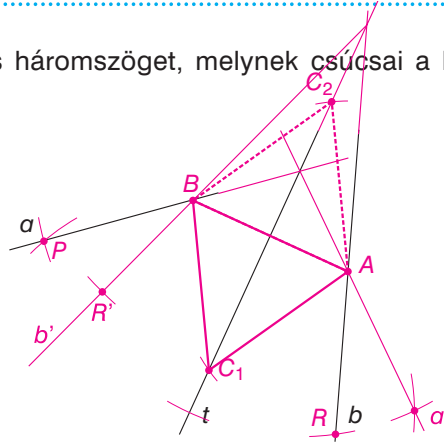


Az egyállású szögek eltolással hozhatók létre. A fordított állású szögek középpontos tükrözéssel keletkezhetnek.

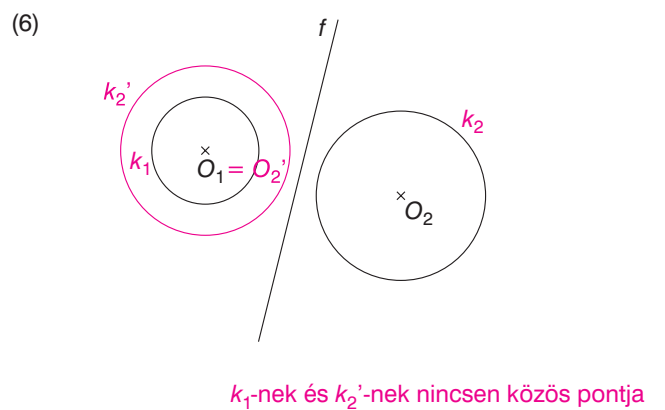
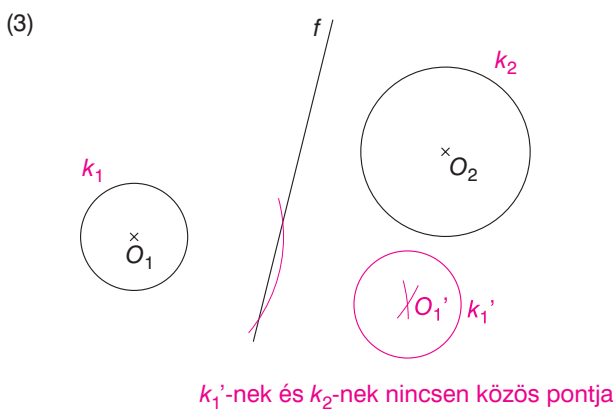
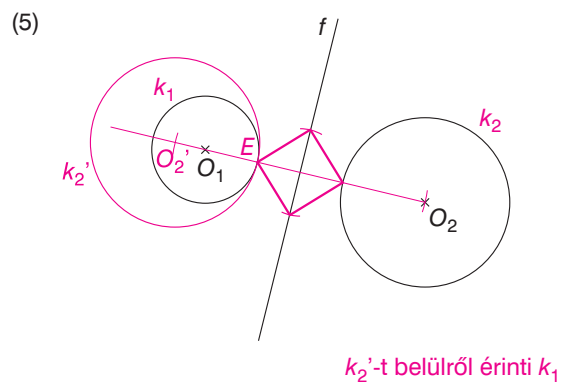
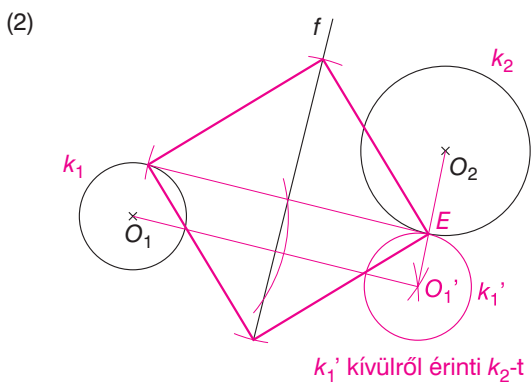
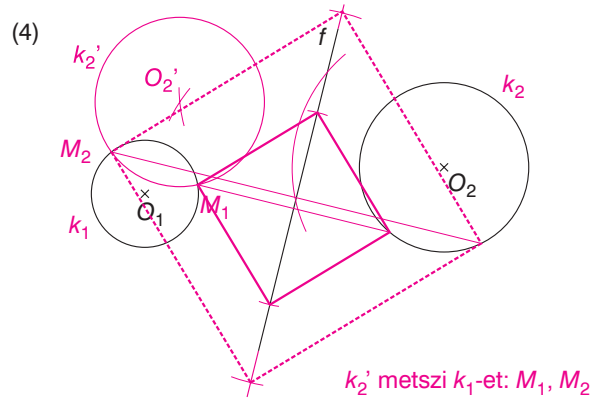
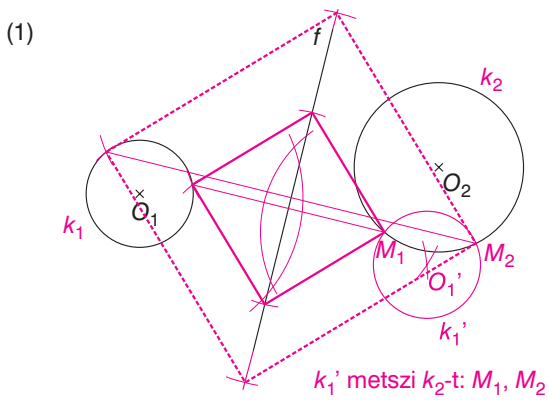


9. Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, melynek csúcsai a berajzolt egyenesekre illeszkednek! (t tükörtengely)

- (1) a tükrözése (a')
- (2) b tükrözése (b')
- b és a' metszéspontja A
- a és b' metszéspontja B
- $AB = AC_1 = AC_2$
- Az ABC_1 és ABC_2 háromszög szabályos



10. Az ábrán felvettük az O_1 és az O_2 középpontú (egymást nem metsző) köröket és az f egyenest. Szerkesszük meg a körök f egyenesre való tengelyes tükrözésének segítségével azt a négyzetet, melynek egyik átlója az f egyenesre esik, a másik két csúcsa pedig a két körön van!

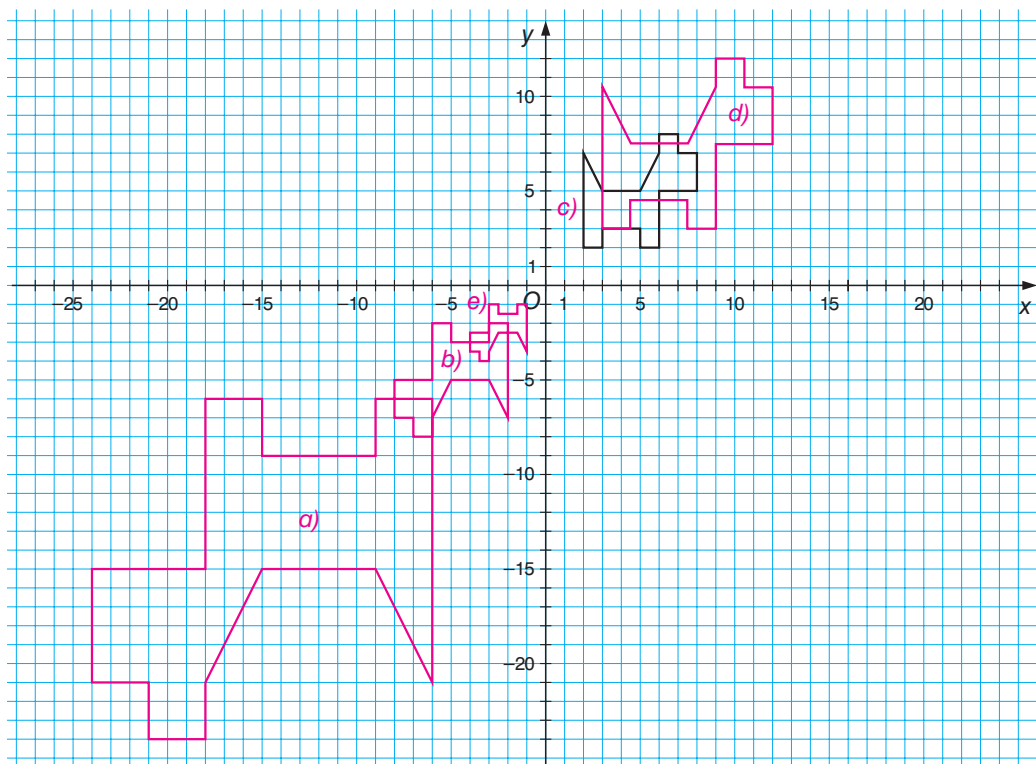


Esetek	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Megoldások száma	2	1	0	2	1	0

A középpontos hasonlóság

1. Rajzoljuk meg a „vonalkutya” helyét a koordináta-rendszerben, ha a hasonlóság középpontja az origó és

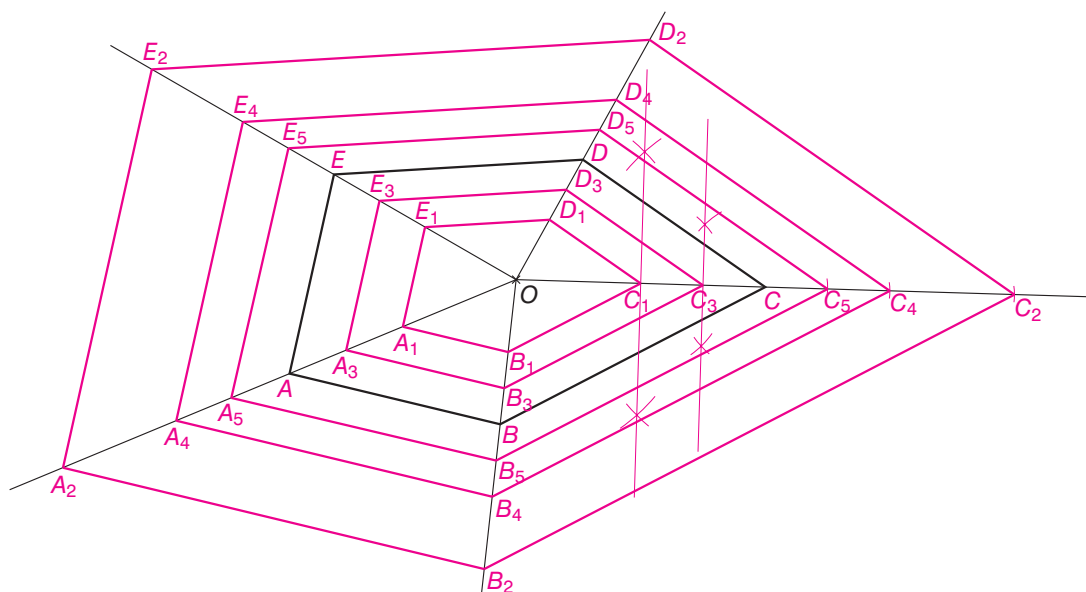
- a) $\lambda = -3$;
- b) $\lambda = -1$;
- c) $\lambda = 1$;
- d) $\lambda = 1 \frac{1}{2}$;
- e) $\lambda = -\frac{1}{2}$.



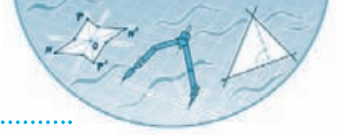
- Melyik esetben készült el a rajz a leggyorsabban? c
- Mely esetekben jutottunk egybevágó alakzatokhoz? b és c
- Mikor nagyítottunk? a, d
- Mely esetben történt kicsinyítés? e

2. Szerkesszünk (különböző színekkel) ötszög „pókhálót” adott O esetén, ha

- a) $\lambda = \frac{1}{2}$;
- b) $\lambda = 2$;**
- c) $\lambda = \frac{3}{4}$;
- d) $\lambda = \frac{3}{2}$;**
- e) $\lambda = 1 \frac{1}{4}$!**



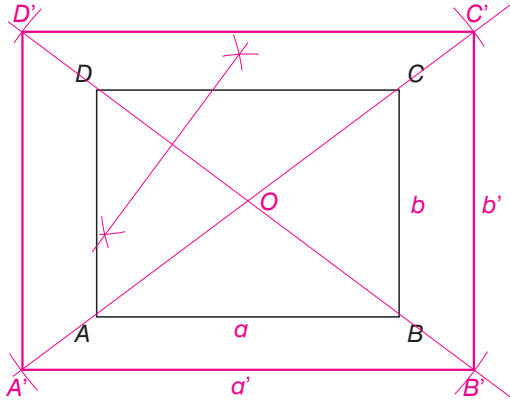
Karikázzuk be azokat a betűjeleket, amelyek esetén a középpontos hasonlóság nagyítás!



3. Szerkesszük meg azt az $A'B'C'D'$ téglalapot, amely az $ABCD$ téglalappal középpontosan hasonló! A szerkesztés elvégzése után állapítsuk meg, hogy hányszorosára változott a téglalap kerülete, területe, ha $AB = 4$ cm és $BC = 3$ cm.

a) $\lambda = \frac{3}{2}$

O: az átlók metszéspontja



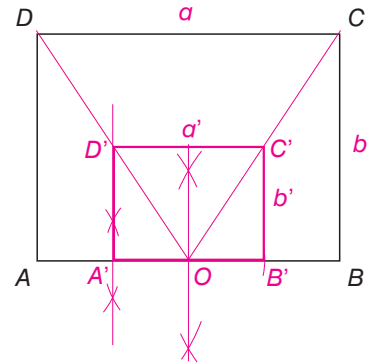
$K = 14$ cm; $K' = 21$ cm; $\frac{K'}{K} = \frac{3}{2}$

$T = 12$ cm²; $T' = 27$ cm²; $\frac{T'}{T} = \frac{9}{4}$

$a = 4$ cm $a' = 6$ cm
 $b = 3$ cm $b' = 4,5$ cm
 $K = 14$ cm $K' = 21$ cm
 $T = 12$ cm² $T' = 27$ cm²

b) $\lambda = \frac{1}{2}$

O: az AB felezőpontja



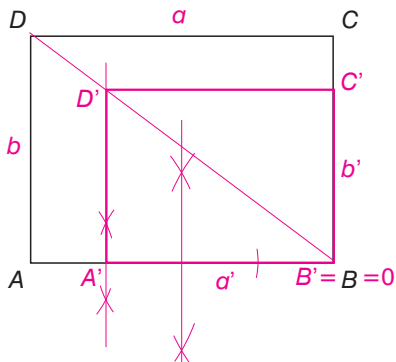
$K = 14$ cm; $K' = 7$ cm; $\frac{K'}{K} = \frac{1}{2}$

$T = 12$ cm²; $T' = 3$ cm²; $\frac{T'}{T} = \frac{1}{4}$

$a = 4$ cm $a' = 2$ cm
 $b = 3$ cm $b' = 1,5$ cm
 $K = 14$ cm $K' = 7$ cm
 $T = 12$ cm² $T' = 3$ cm²

c) $\lambda = \frac{3}{4}$

O: a B csúcs



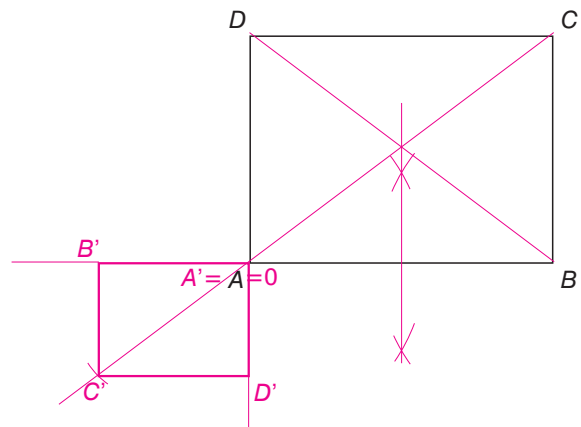
$K = 14$ cm; $K' = 10,5$ cm; $\frac{K'}{K} = \frac{3}{4} = 0,75$

$T = 12$ cm²; $T' = 6,75$ cm²; $\frac{T'}{T} = \frac{9}{16} = 0,5625$

$a = 4$ cm $a' = 3$ cm
 $b = 3$ cm $b' = 2,25$ cm
 $K = 14$ cm $K' = 10,5$ cm
 $T = 12$ cm² $T' = 6,75$ cm²

d) $\lambda = -\frac{1}{2}$

O: az A csúcs



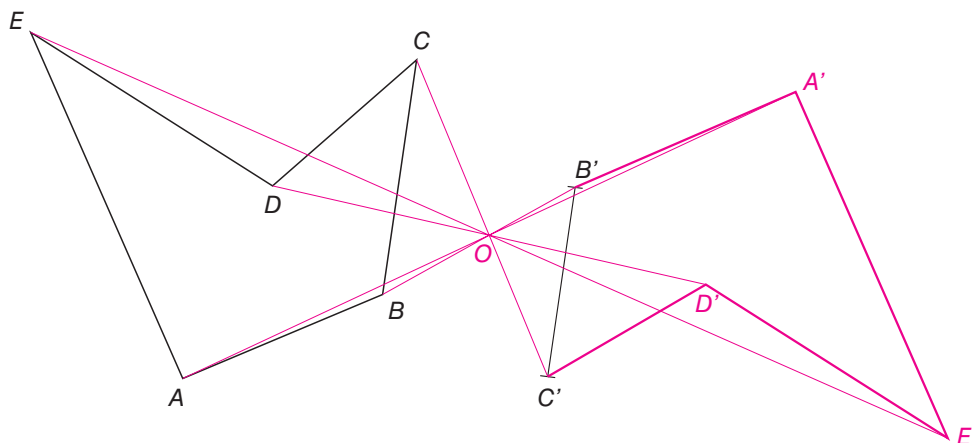
$K = 14$ cm; $K' = 7$ cm; $\frac{K'}{K} = \frac{1}{2}$

$T = 12$ cm²; $T' = 3$ cm²; $\frac{T'}{T} = \frac{1}{4}$

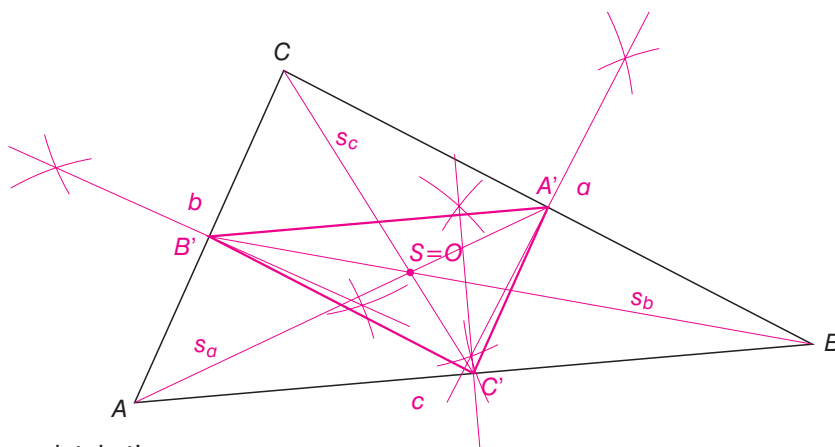
$a = 4$ cm $a' = 2$ cm
 $b = 3$ cm $b' = 1,5$ cm
 $K = 14$ cm $K' = 7$ cm
 $T = 12$ cm² $T' = 3$ cm²



4. Adott az $ABCDE$ sokszög és a $B'C'$ szakasz, amely a BC szakasz középpontosan hasonló képe ($BC \parallel B'C'$). Szerkesszük meg a középpontot, majd az $A'B'C'D'E'$ ötszöget!



5. Adott az ABC háromszög.
- Szerkesszük meg a súlypontját (S)!
 - Szerkesszük meg azt az ABC háromszöggel középpontosan hasonló $A'B'C'$ háromszöget, melynek középpontja a súlypont, és $\lambda = -\frac{1}{2}$!
 - Mit tapasztalunk? Az $A'B'C'$ háromszög középháromszöge az ABC háromszögnek.



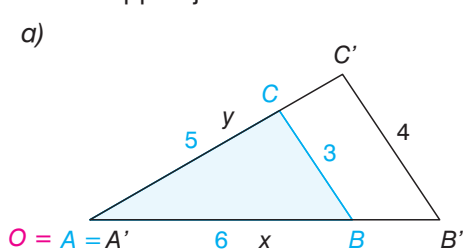
Egészítsük ki a mondatokat!

Az $A'B'C'$ háromszög kicsinyített képe az ABC háromszögnek.

Az $A'B'C'$ háromszög területe negyede az ABC háromszög területének.

Az $A'B'C'$ háromszög kerülete fele az ABC háromszög kerületének.

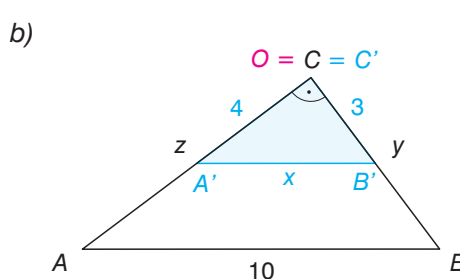
6. Az ábrán látható síkidomok középpontosan hasonlóak. Határozzuk meg a betűvel jelölt szakaszok hosszát! Adjuk meg a hasonlóság arányát, majd rajzoljuk be az egyes rajzokba, hogy hol van a hasonlóság középpontja!



$$\lambda = \frac{4}{3}$$

$$x = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = 8$$

$$y = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$



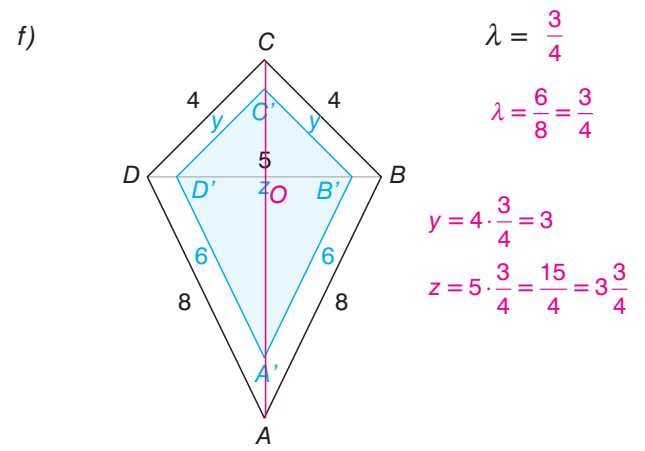
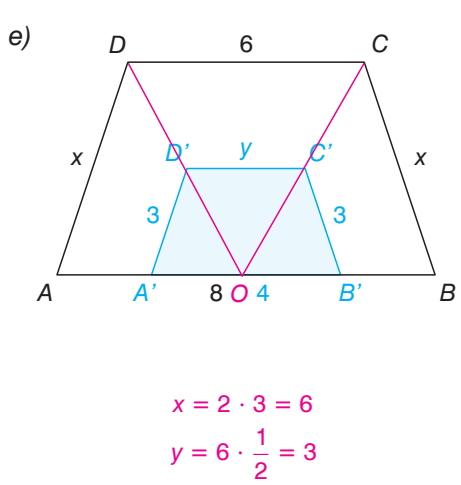
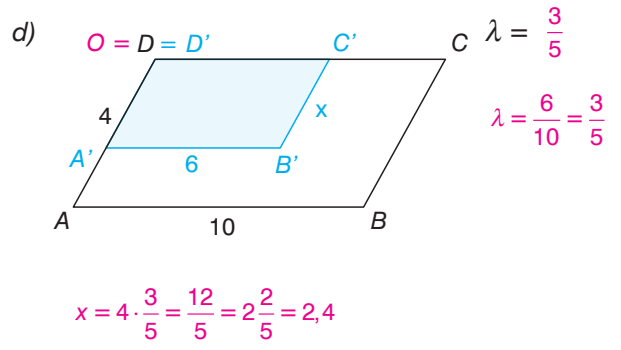
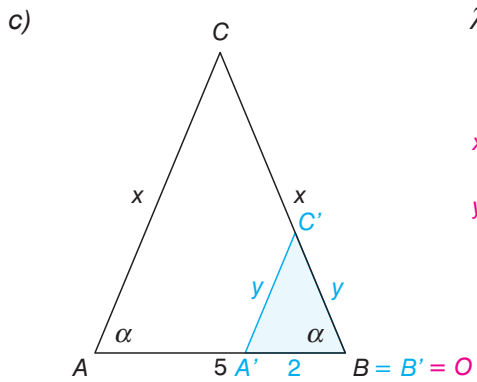
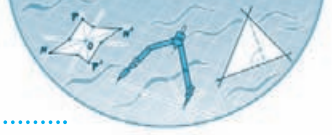
$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$x = 5$$

$$\lambda = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$y = 3 \cdot 2 = 6$$

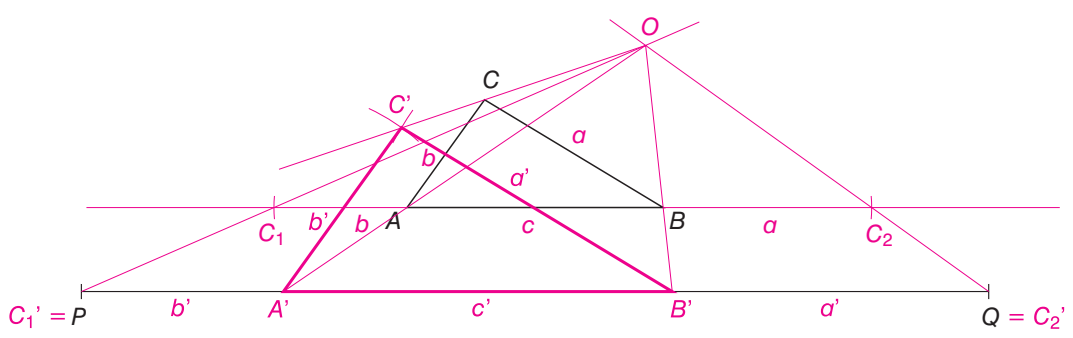
$$z = 4 \cdot 2 = 8$$



*7. Egy háromszög kerülete PQ. Egy hozzá hasonló ABC háromszög látható az ábrán. $AB \parallel PQ$.

- a) Hol lehet a hasonlóság középpontja?
- b) Szerkesszük meg az adott kerületű háromszöget!

$K_{ABC} = C_1 C_2$



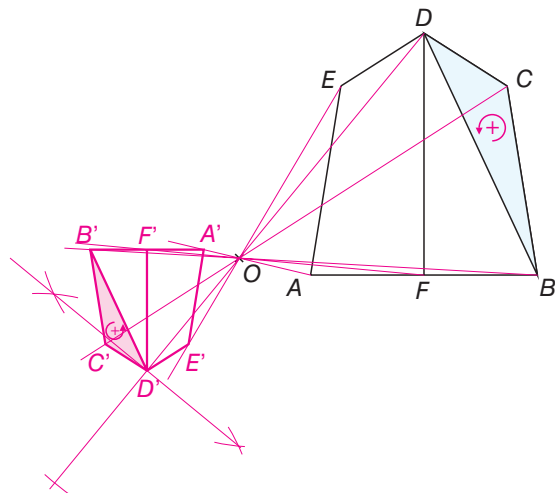
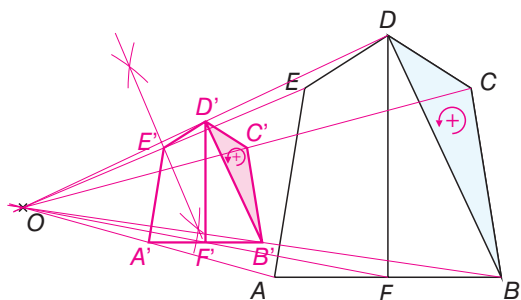
8. Egy sátor bejáratát látjuk az egyik oldalán felnyitva.

A) Szerkesszük meg a sátor középpontosan hasonló képét, ha a hasonlóság középpontja az O pont, az aránya pedig λ !

B) Rajzoljuk be a körüljárási irányt a színezett háromszögekbe és képükbe!

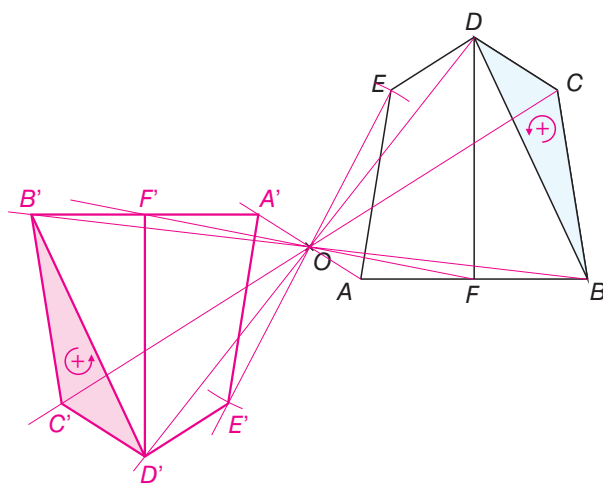
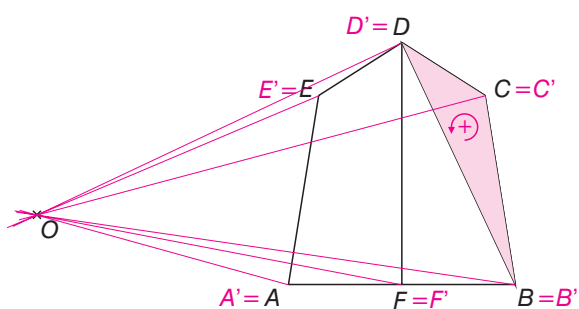
a) $\lambda = \frac{1}{2}$

b) $\lambda = -\frac{1}{2}$



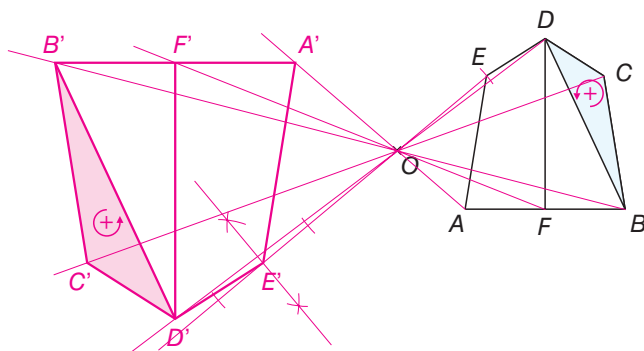
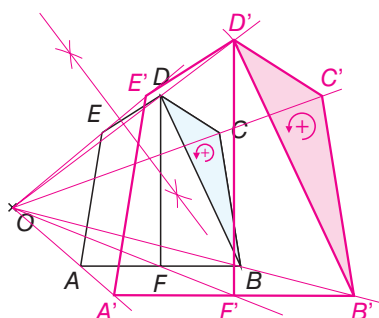
c) $\lambda = 1$

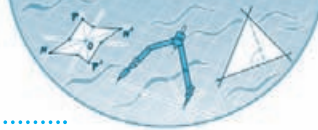
d) $\lambda = -1$



e) $\lambda = 1\frac{1}{2}$

f) $\lambda = -\frac{3}{2}$





*9. Szerkesszünk az ABC háromszögbe olyan téglalapot, melynek

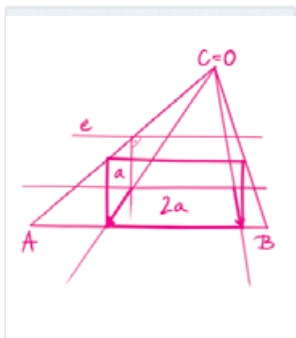
- hosszabbik oldala a háromszög AB oldalához illeszkedik, és
- harmadik csúcsa a háromszög AC , negyedik csúcsa a BC oldalára illeszkedik,
- a téglalap egyik oldala pedig kétszerese a másiknak!

d) Készítsünk vázlatrajzot!

b) Jelöljük ki esetenként a hasonlóság lehetséges középpontját!

c) Adjuk meg a megoldások számát minden esetben!

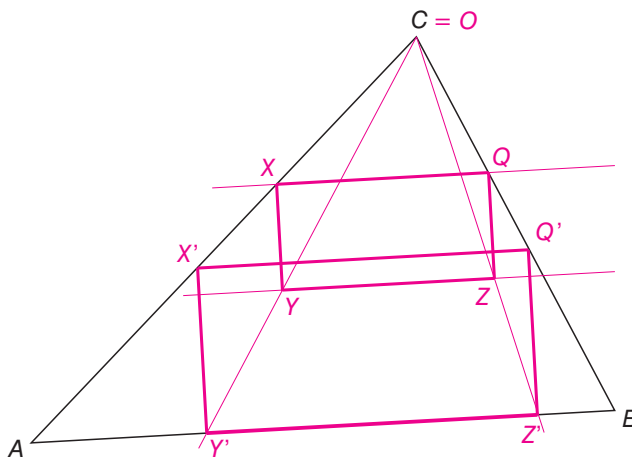
(1) Vázlat, terv:



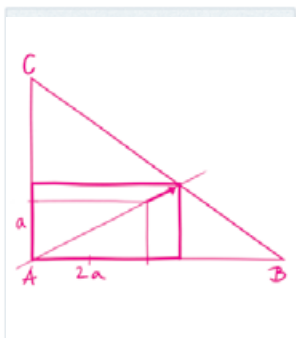
$$XYZQ \sim X'Y'Z'Q'$$

O helye: C

Megoldások száma:1.....



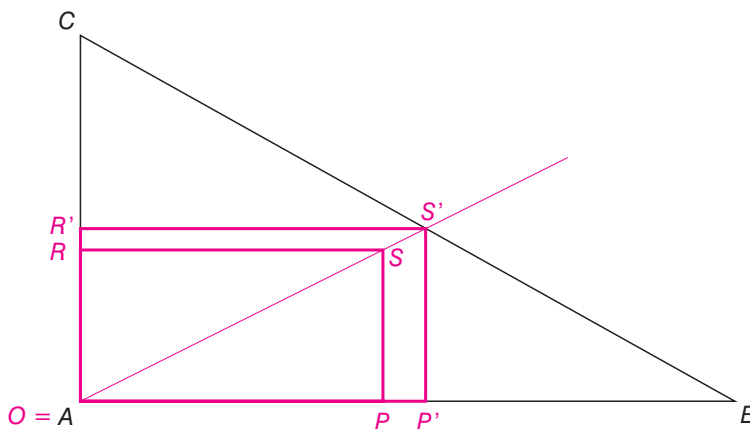
(2) Vázlat, terv:



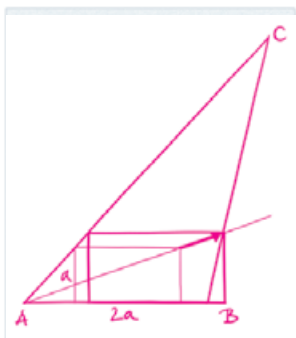
$$APSR \sim AP'S'R'$$

O helye: A

Megoldások száma:1.....

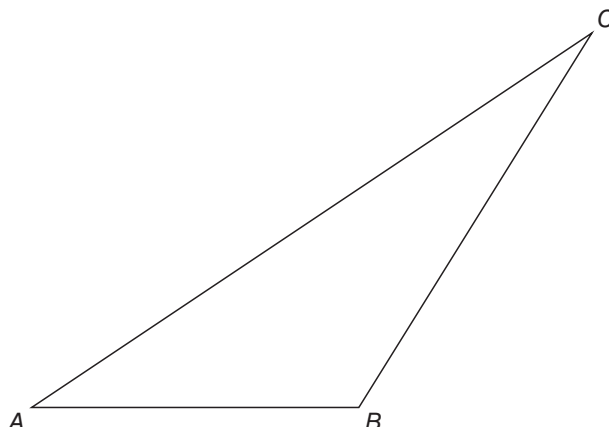


(3) Vázlat, terv:



O helye: C

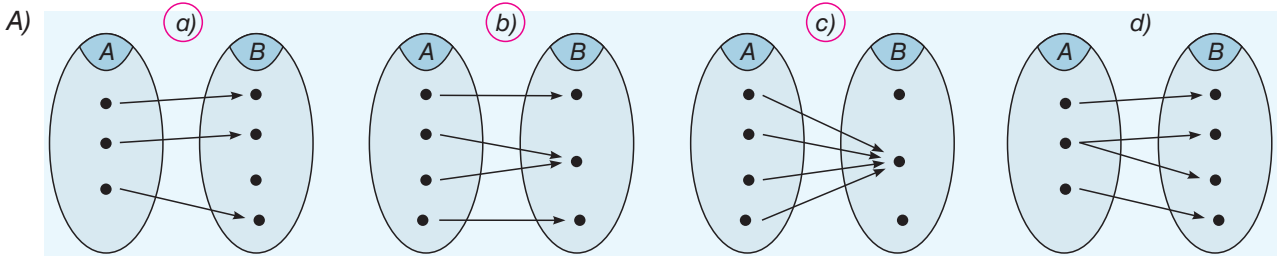
Megoldások száma:0.....



8. FÜGGVÉNYEK

Hozzárendelések, függvények, sorozatok

1. Karikázzuk be annak a hozzárendelésnek a betűjelét, amelyik függvény!



B) a) Az osztály minden tanulójaához hozzárendeljük a testvérét.

b) Az osztály minden tanulójaához hozzárendeljük a hetedik év végi matematika osztályzatát.

c) Az osztály minden tanulójaához hozzárendeljük a padtársát.

Megjegyzés: ha egy padban kettőnél több gyerek ül, akkor nem függvény.

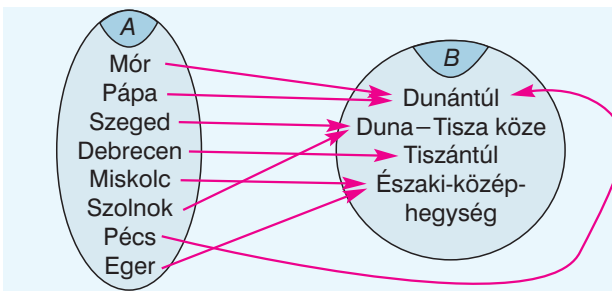
d) Az osztály minden tanulójaához hozzárendeljük a barátját.

e) Az osztályteremben levő székekhez hozzárendeljük a rajta ülő tanulóat.

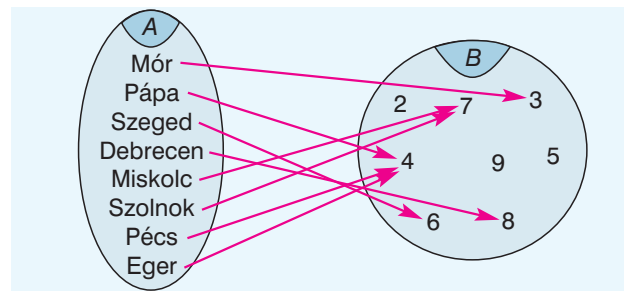
f) Az osztályteremben levő padokhoz hozzárendeljük a padban ülő tanulóat.

g) Az osztály minden tanulójaához hozzárendeljük az édesanyját.

2. Létesítsünk kapcsolatot nyilak berajzolásával az A alaphalmaz és a B képhalmaz elemei között!



A hozzárendelés szabálya: a városhoz hozzárendeljük azt a tájegységet, ahol található.



A hozzárendelés szabálya: a városhoz rendeljük azt a számot, ahány karakterből áll a neve.

Húzzuk alá azt, amelyik igaz!

A hozzárendelés függvény / nem függvény.

A hozzárendelés függvény / nem függvény.

3. Keressünk kapcsolatot az A alaphalmaz és a B képhalmaz elemei között! Írjuk le a hozzárendelés szabályát, majd döntsük el, hogy a hozzárendelés függvény vagy nem függvény!



Minden európai országhoz rendeljük hozzá az adott ország városait.

A hozzárendelés függvény / nem függvény.



Minden európai országhoz rendeljük hozzá a fővárosát.

A hozzárendelés függvény / nem függvény.



Minden európai országhoz rendeljük az ország pénznemét.

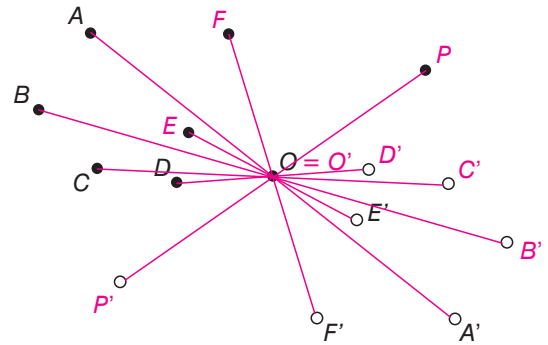
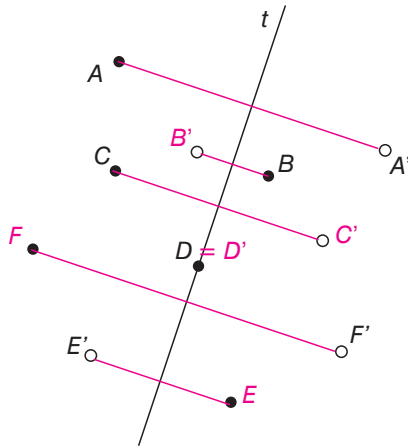
A hozzárendelés függvény / nem függvény.



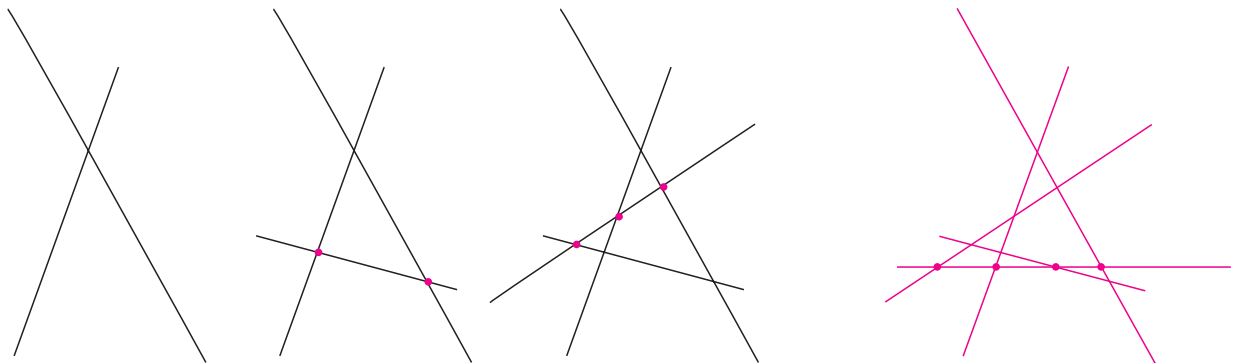
4. Keressük meg az ábrákon a B ; C ; D pontok tükörképét! Keressük meg és jelöljük, melyik pontnak a tükörképe az E' , illetve az F' pont!

a) Alaphalmaz = {a sík pontjai}
 Képhalmaz = {ugyanazon sík pontjai}
 A hozzárendelés szabálya: minden ponthoz rendeljük a **t tengelyre** vonatkozó tükörképét!

b) Alaphalmaz = {a sík pontjai}
 Képhalmaz = {ugyanazon sík pontjai}
 A hozzárendelés szabálya: minden ponthoz rendeljük az **O pontra** vonatkozó tükörképét!



5. Hány metszéspontja lehet 2; 3; 4; ... 10; ... n különböző egyenesnek, ha bármely kettőnek van metszéspontja? (Készíthetünk további rajzokat is.)



Töltsük ki a táblázatot úgy, hogy az egyenesek számához (e) rendeljük a metszéspontok számát (m)!

Az egyenesek száma	2	3	4	5	10	n
A metszéspontok száma	1	3	6	10	45	$\frac{n(n-1)}{2}$

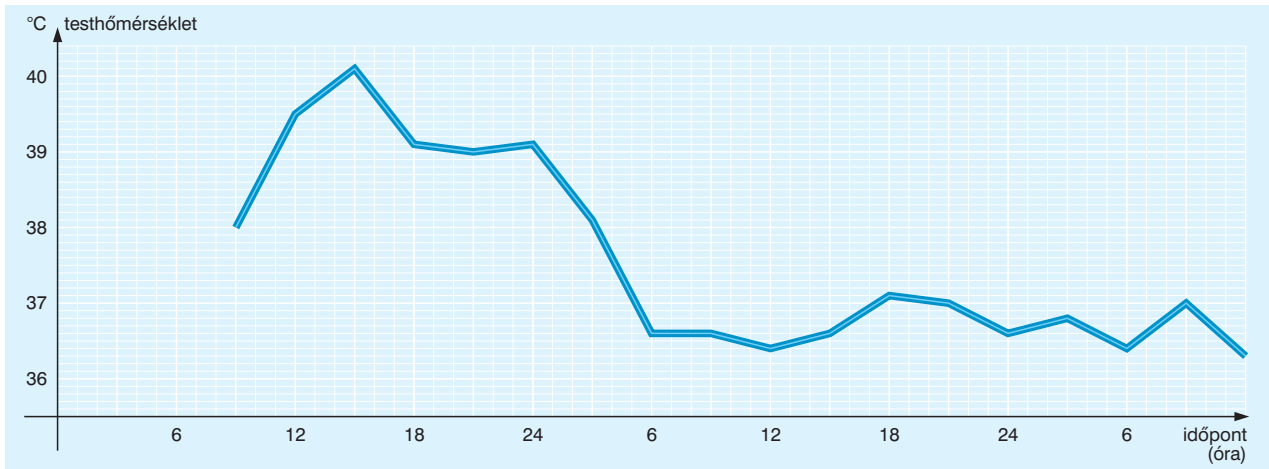
Írjuk fel a hozzárendelés szabályát! $m(e) = \frac{e(e-1)}{2}$

6. Keressünk összefüggést a hasábok alaplapjának oldalszáma és a hasáb lapjai, csúcsai, élei száma között!

A hasáb alapja						10 oldalú sokszög	n oldalú sokszög
A hasáb lapjainak száma (l)	5	6	7	8	9	12	$l(n) = n + 2$
A hasáb csúcsainak száma (c)	6	8	10	12	14	20	$c(n) = 2n$
A hasáb éleinek száma (e)	9	12	15	18	21	30	$e(n) = 3n$

Lineáris függvények. A függvények tulajdonságai

1. Jenő kedden reggel panaszkodott a szüleinek, hogy nem jól érzi magát. Orvoshoz vitték, aki azonnal kórházba küldte. Ott a kórlapjára az alább látható lágörbét rajzolták. Egészítsük ki a mondatokat a grafikon alapján!



- A kórházban a lázát először **9** órakor, majd ezt követően **3** óránként mérték meg.
 A láza **15** órakor volt a legmagasabb, **40,2** °C, és kb. **5** órakor süllyedt először 37 °C alá.
 A láza a leggyorsabban **9** és **12** óra között emelkedett.
 A láza leghosszabb ideig folyamatosan **24** és **6** óra között csökkent.
 A testhőmérséklete **a második** napon **6** és **9** óra között nem változott.

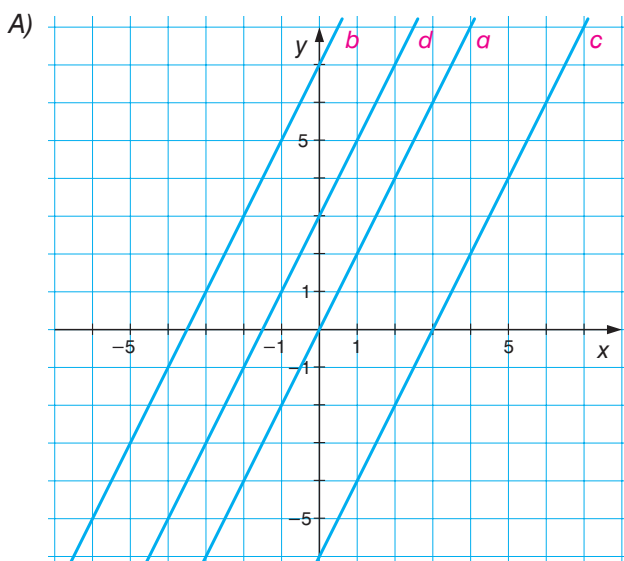
Tegyük fel további kérdéseket a grafikon alapján, majd válaszoljunk rájuk!

Pl.: A testhőmérséklete mikor volt a legalacsonyabb? (másnap 12 órakor)

Mikor volt 38°C a láza? (az első nap 9 órakor és másnap 3 órakor)

Mely intervallumokban volt a testhőmérséklete 37°C alatt?

2. Írjuk az adott grafikonokra a nekik megfelelő hozzárendelési szabály betűjelét!

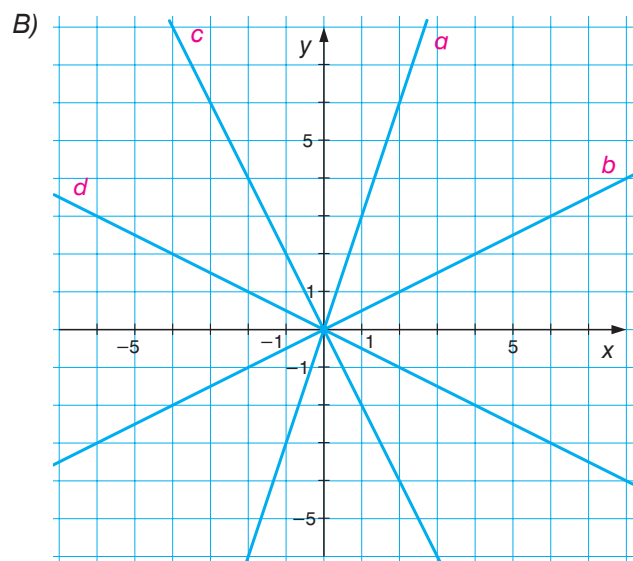


$$a(x) = 2x;$$

$$b(x) = 2x + 7;$$

$$c(x) = 2x - 6;$$

$$d(x) = 2x + 3.$$



$$a(x) = 3x;$$

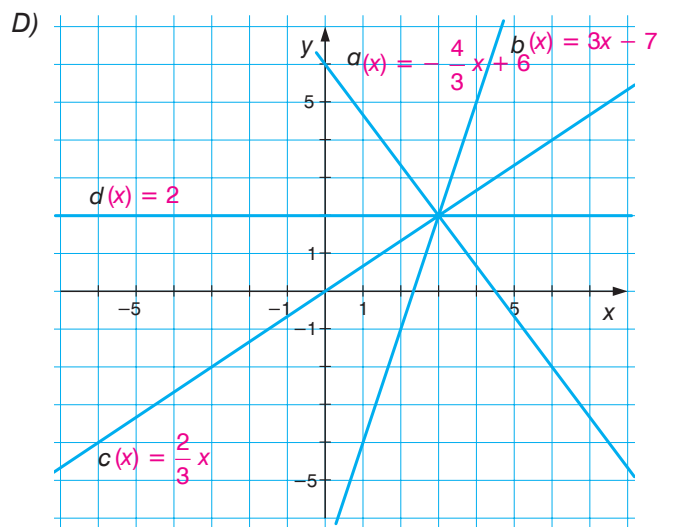
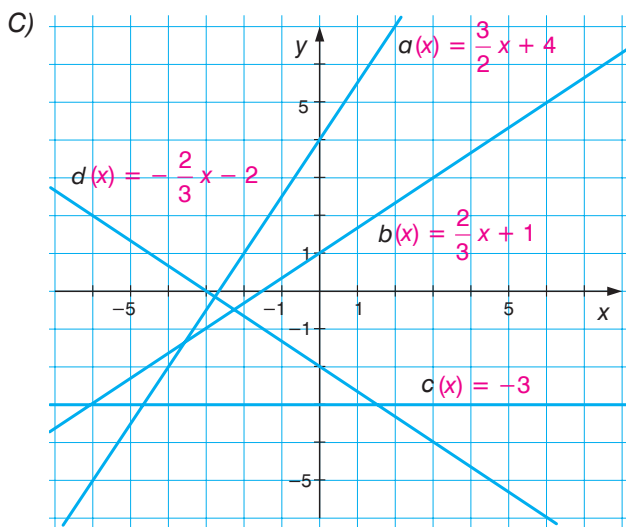
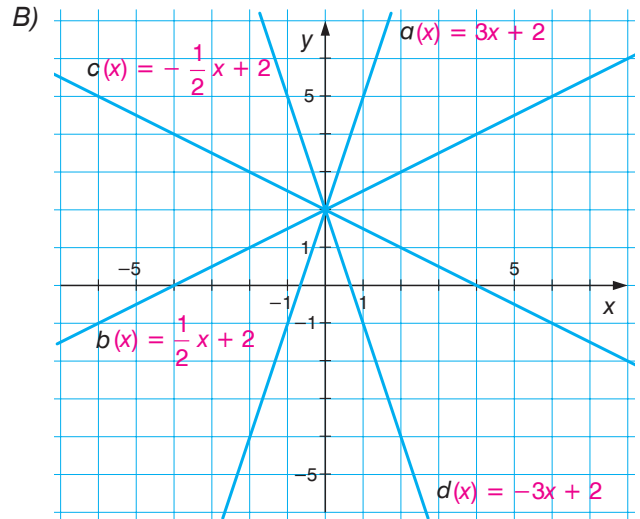
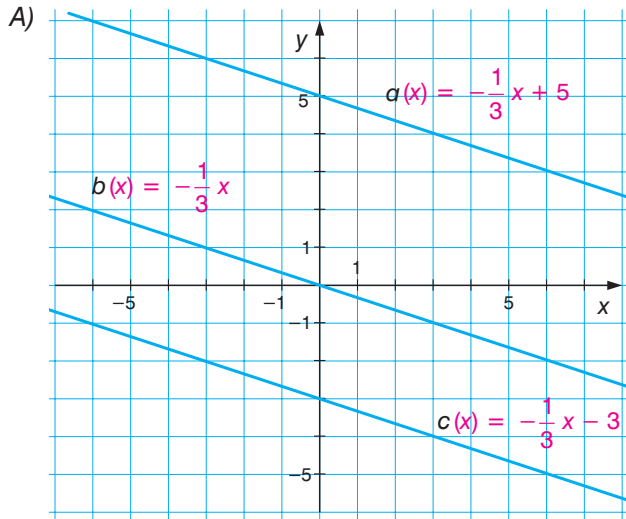
$$b(x) = \frac{1}{2}x;$$

$$c(x) = -2x;$$

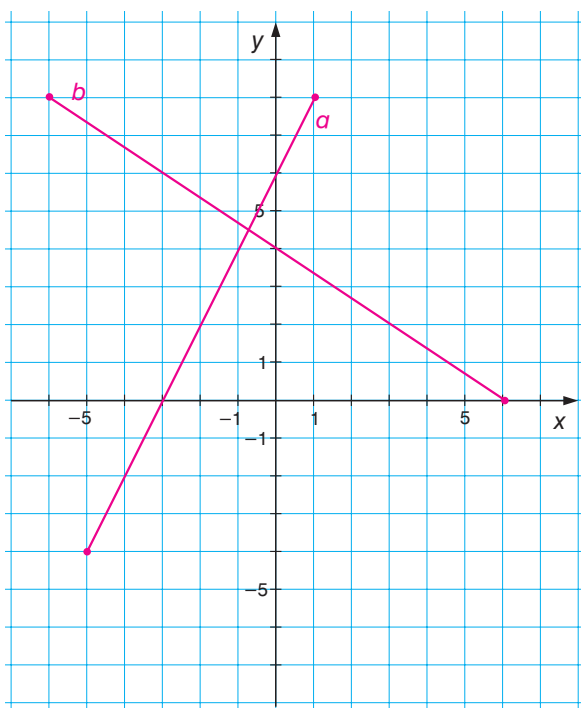
$$d(x) = -\frac{1}{2}x.$$



3. Írjuk az adott grafikonokra a nekik megfelelő hozzárendelési szabályt!



4. Rajzoljuk meg a függvények grafikonját az adott értelmezési tartományon, majd jellemezzük őket!



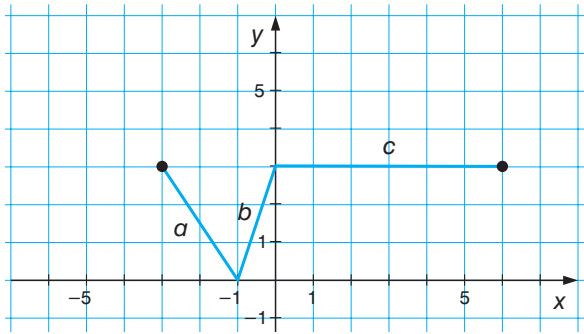
- a) szabály: $a(x) = 2x + 6$
 értelmezési tartománya: $-5 \leq x \leq 1$
 értékészlete: $-4 \leq y \leq 8$
 y tengelymetszete: 6-nál (0; 6)
 zérushelye: -3-nál (-3; 0)
 a függvény menete: növekvő

szélsőértéke: minimuma: (-5; -4) pontban
 maximuma: (1; 8) pontban

- b) szabály: $b(x) = -\frac{2}{3}x + 4$
 értelmezési tartománya: $-6 \leq x \leq 6$
 értékészlete: $0 \leq y \leq 8$
 y tengelymetszete: 4-nél (0; 4)
 zérushelye: 6-nál (6; 0)
 a függvény menete: csökkenő

szélsőértéke: minimuma: (6; 0) pontban
 maximuma: (-6; 8) pontban

5. A koordináta-rendszerbe berajzoltunk egy függvényt. Jellemezzük a töröttvonalat alkotó szakaszokat!

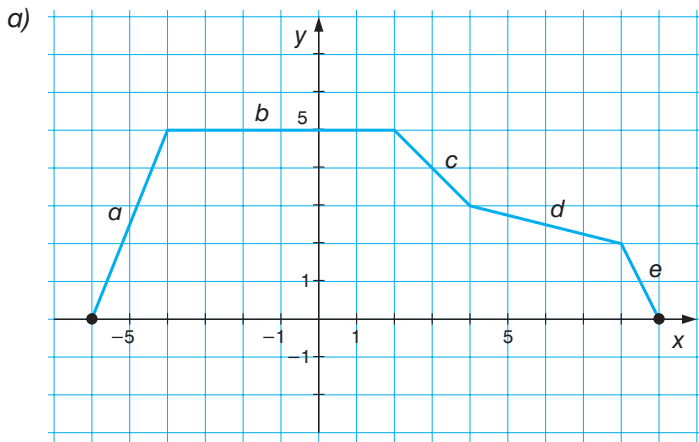


- a) szabály: $a(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$
 értelmezési tartománya: $-3 \leq x \leq -1$
 értékészlete: $0 \leq y \leq 3$
 y tengelymetszete: **nincs**
 zérushelye: $(-1; 0)$
 a függvény menete: **csökkenő**
- szélsőértéke: **minimuma: $(-1; 0)$ pontban**
maximuma: $(-3; 3)$ pontban

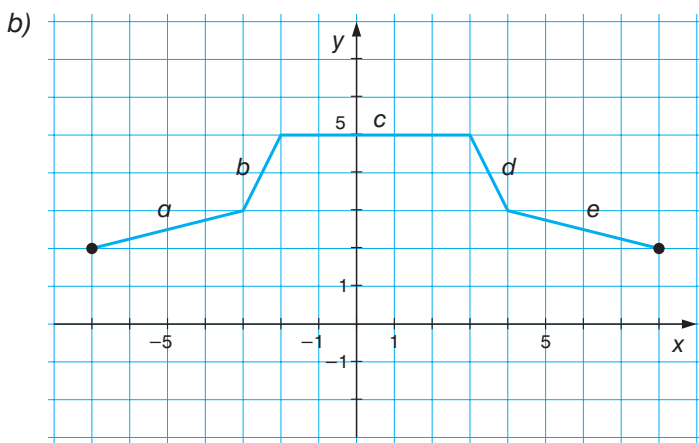
- b) szabály: $b(x) = 3x + 3$
 értelmezési tartománya: $-1 \leq x \leq 0$
 értékészlete: $0 \leq y \leq 3$
 y tengelymetszete: **3-nál $(0; 3)$**
 zérushelye: **-1-nél $(-1; 0)$**
 a függvény menete: **növekvő**
- szélsőértéke: **minimuma: $(-1; 0)$ pontban**
maximuma: $(0; 3)$ pontban

- c) szabály: $c(x) = 3$
 értelmezési tartománya: $0 \leq x \leq 6$
 értékészlete: $3 \leq y \leq 3$ **$y = 3$**
 y tengelymetszete: **3-nál $(0; 3)$**
 zérushelye: **nincs**
 a függvény menete: **állandó (konstans)**
- szélsőértéke: **nincs**

*6. Írjuk le a töröttvonalat alkotó lineáris függvények hozzárendelési szabályát és értelmezési tartományát!



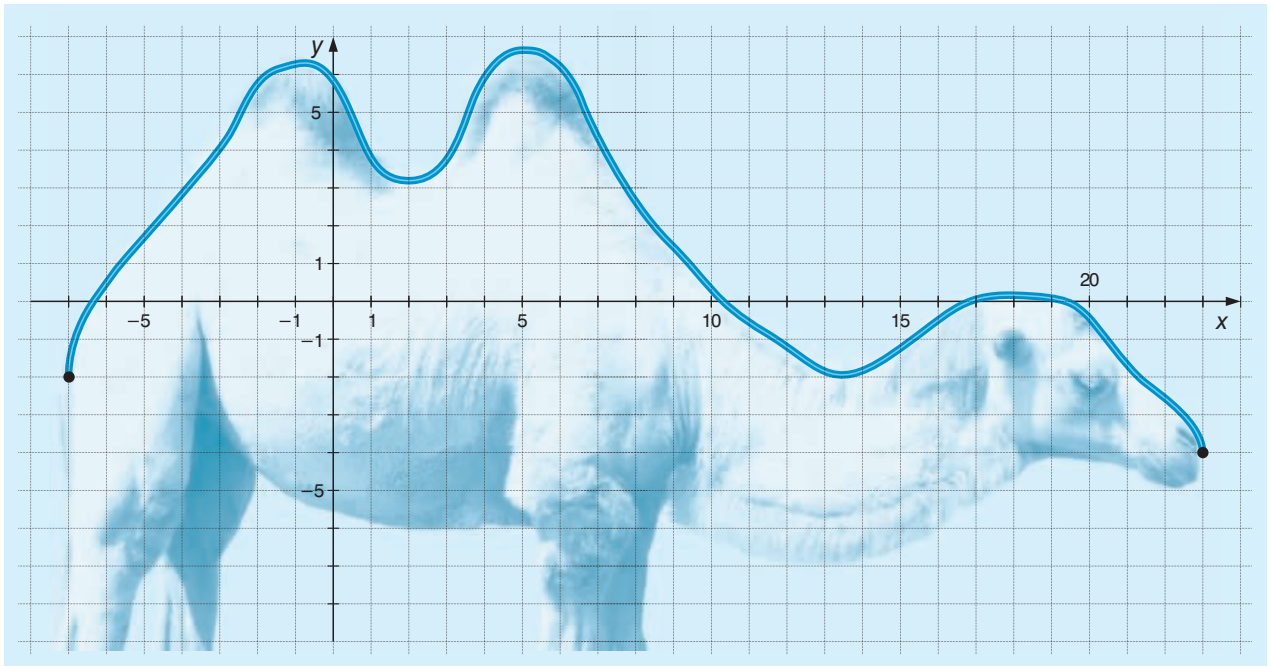
- szabály: $a(x) = \frac{5}{2}x + 15$
 értelmezési tartomány: $-6 \leq x \leq -4$
- szabály: $b(x) = 5$
 értelmezési tartomány: $-4 \leq x \leq 2$
- szabály: $c(x) = -x + 7$
 értelmezési tartomány: $2 \leq x \leq 4$
- szabály: $d(x) = -\frac{1}{4}x + 4$
 értelmezési tartomány: $4 \leq x \leq 8$
- szabály: $e(x) = -2x + 18$
 értelmezési tartomány: $8 \leq x \leq 9$



- szabály: $a(x) = \frac{1}{4}x + 3\frac{3}{4}$
 értelmezési tartomány: $-7 \leq x \leq -3$
- szabály: $b(x) = 2x + 9$
 értelmezési tartomány: $-3 \leq x \leq -2$
- szabály: $c(x) = 5$
 értelmezési tartomány: $-2 \leq x \leq 3$
- szabály: $d(x) = -2x + 11$
 értelmezési tartomány: $3 \leq x \leq 4$
- szabály: $e(x) = -\frac{1}{4}x + 4$
 értelmezési tartomány: $4 \leq x \leq 8$



7. Jellemezzük a görbe vonalhoz tartozó függvényt, majd vizsgáljuk meg a függvény tengelymetszeteit, menetét, szélsőértékeit!



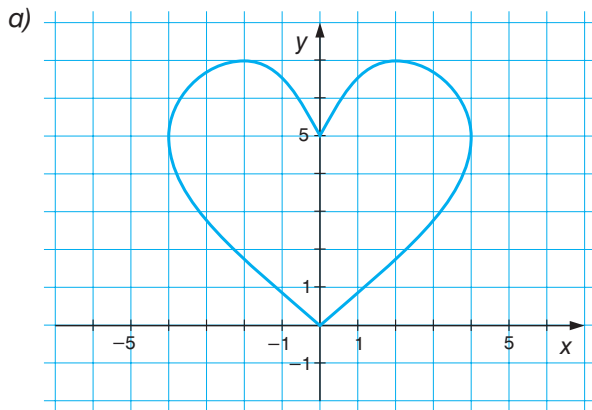
Zérushelyek: $(-6,4; 0); (10,25; 0); (17; 0); (19,5; 0)$ y tengelymetszete: $(0; 5,8)$

A függvény növekszik: $-7 \leq x \leq -0,5; 2 \leq x \leq 5; 13,5 \leq x \leq 18;$

A függvény csökken: $-0,5 \leq x \leq 2; 5 \leq x \leq 13,5; 18 \leq x \leq 23;$

Maximuma: $(5; 6 \frac{2}{3})$ Minimuma: $(23; -4)$

*8. Vizsgáljuk meg a „szívgörbével” adott hozzárendelést!



Húzzuk alá a megfelelőt!

A hozzárendelés függvény / nem függvény.

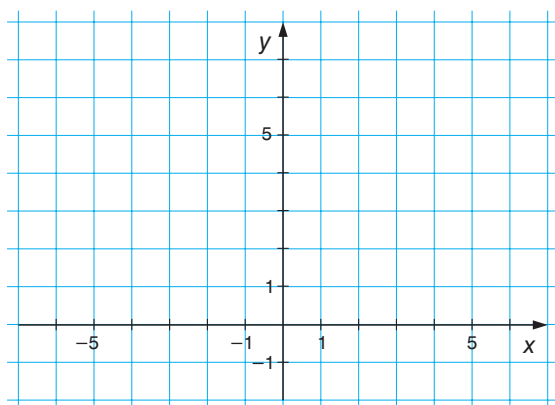
zérushelye:

y tengelymetszete:

maximuma:

minimuma:

b) Rajzoljunk tetszés szerinti grafikont, majd jellemezzük!



Húzzuk alá a megfelelőt!

A hozzárendelés függvény / nem függvény.

zérushelye:

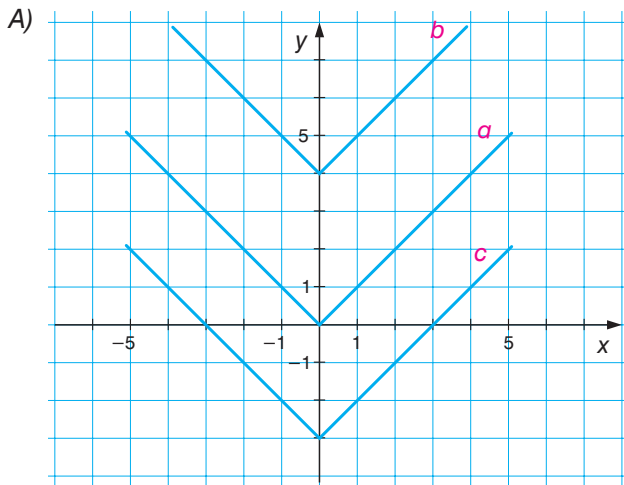
y tengelymetszete:

maximuma:

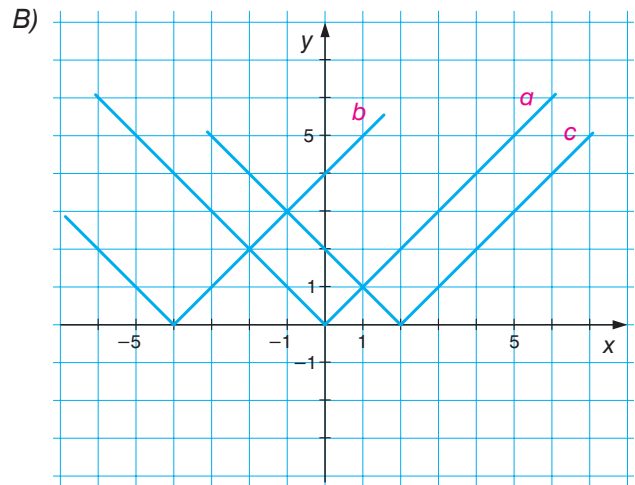
minimuma:

Az abszolútérték-függvény

1. Írjuk az adott grafikonokra a nekik megfelelő szabály betűjelét!

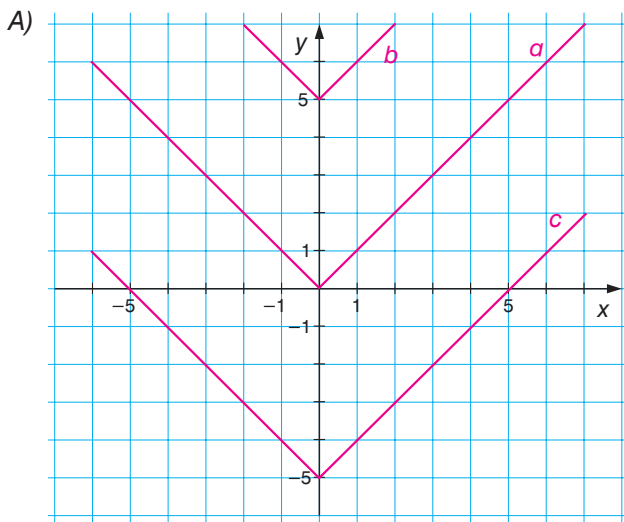


$a(x) = |x|$; $b(x) = |x| + 4$; $c(x) = |x| - 3$.

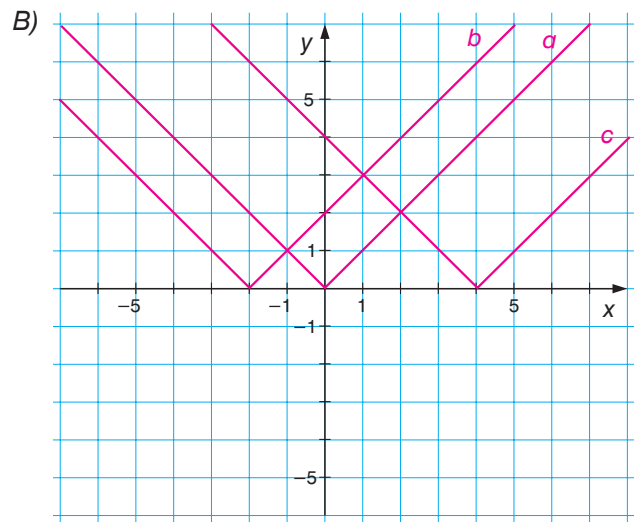


$a(x) = |x|$; $b(x) = |x + 4|$; $c(x) = |x - 2|$.

2. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját!

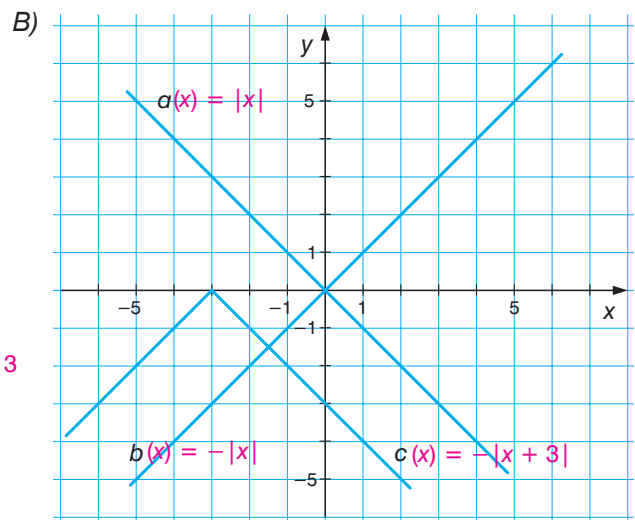
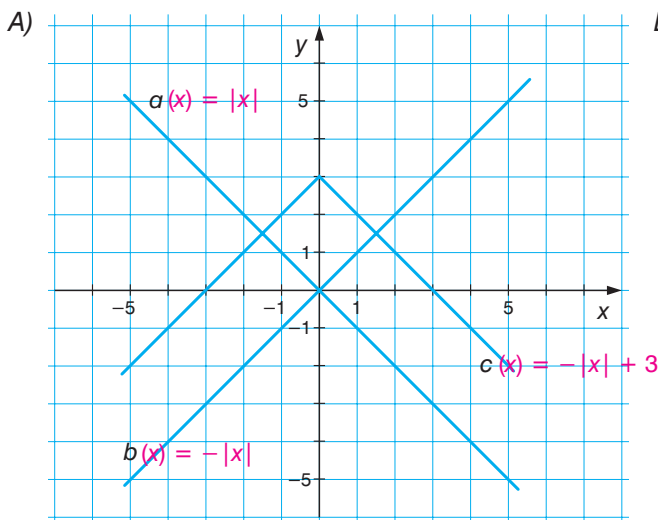


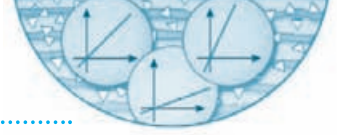
$a(x) = |x|$; $b(x) = |x| + 5$; $c(x) = |x| - 5$.



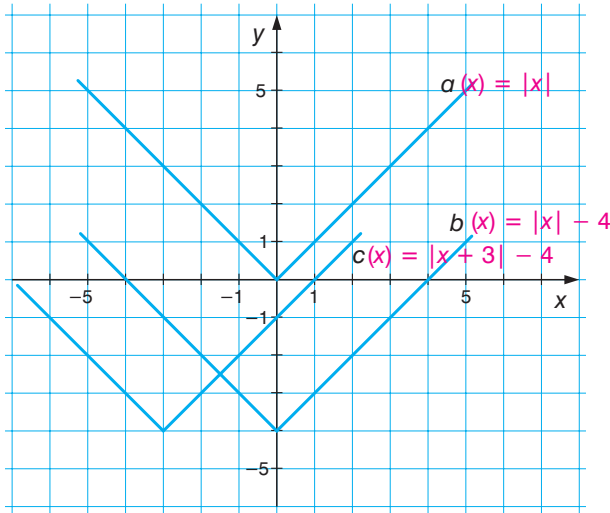
$a(x) = |x|$; $b(x) = |x + 2|$; $c(x) = |x - 4|$.

3. Írjuk az adott grafikonokra a nekik megfelelő szabályt!





4. Írjuk az adott grafikonokra a nekik megfelelő szabályt! Jellemezzük a c grafikonhoz tartozó függvényt!



szabály: $c(x) = |x + 3| - 4$

értelmezési tartománya: \mathbb{R}

értékkészlete: $-4 \leq y$

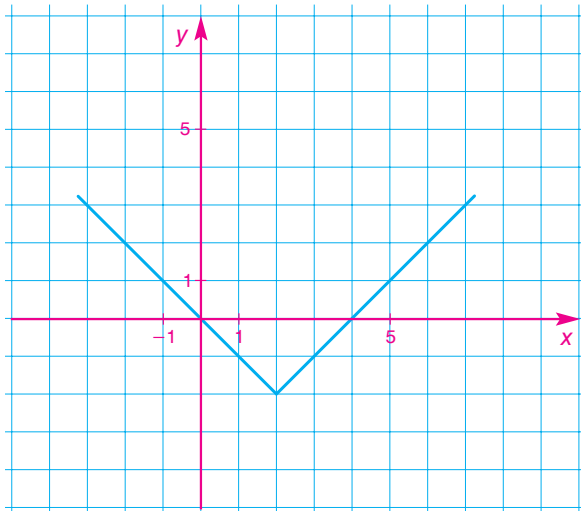
y tengelymetszete: $(0; -1)$

zérushelye: $(-7; 0); (1; 0)$

a függvény menete: $x \leq -3$; csökkenő
 $-3 \leq x$; növekvő

szélsőértéke: minimuma: $(-3; -4)$ pontban
 maximuma: nincs

5. Rajzoljuk be a derékszögű koordináta-rendszer tengelyeit úgy, hogy a grafikon az $f(x) = |x - 2| - 2$ függvény grafikonja legyen! Jellemezzük!



értelmezési tartománya: \mathbb{R}

értékkészlete: $-2 \leq y$

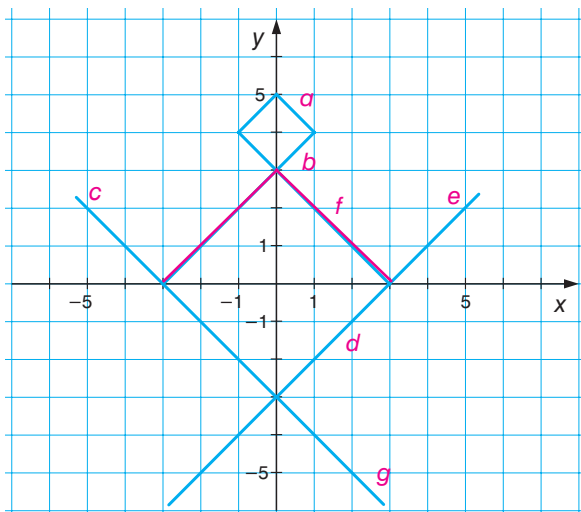
y tengelymetszete: $(0; 0)$

zérushelye: $(0; 0); (4; 0)$

a függvény menete: $x \leq 2$; csökkenő
 $2 \leq x$; növekvő

szélsőértéke: minimuma: $(2; -2)$ pontban
 maximuma: nincs

6. A pálcikabábút abszolútérték-függvények grafikonjaiból állítottuk össze. Keressünk az ábrán minél több abszolútérték-függvény grafikonot, majd rajzoljuk át őket különböző színnel! Válasszuk ki az egyiket, és jellemezzük!



szabály: $f(x) = -|x| + 3$

értelmezési tartománya: $-3 \leq x \leq 3$

értékkészlete: $0 \leq y \leq 3$

y tengelymetszete: $(0; 3)$

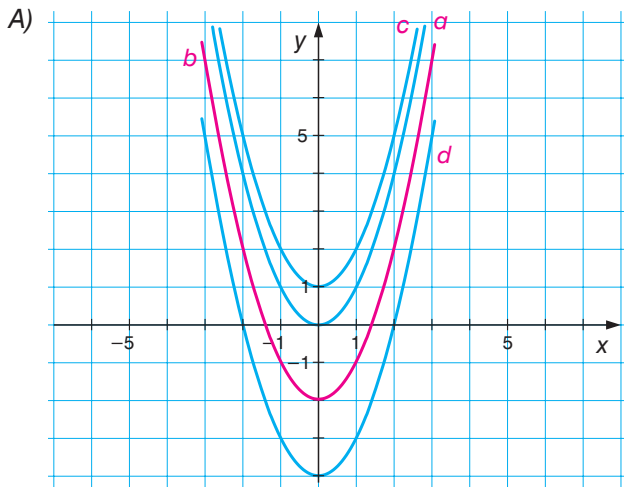
zérushelye: $(-3; 0); (3; 0)$

a függvény menete: $-3 \leq x \leq 0$; növekvő
 $0 \leq x \leq 3$; csökkenő

szélsőértéke: minimuma: $(-3; 0); (3; 0)$
 maximuma: $(0; 3)$

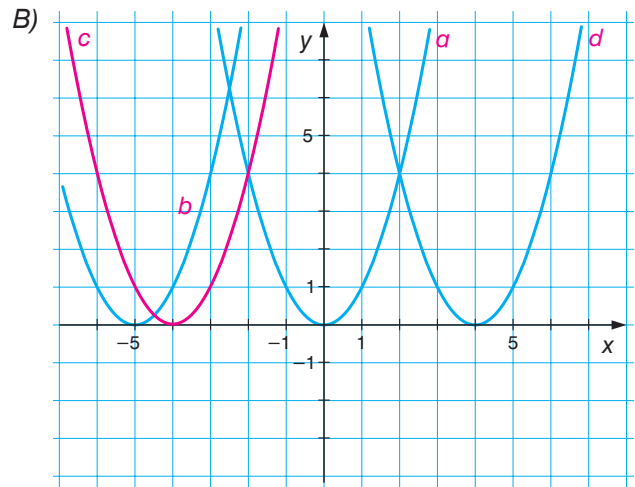
Másodfokú függvények

1. Írjuk az adott grafikonokra a nekik megfelelő függvény betűjelét! Amelyikre nem találunk grafikont, készítsük el!



$$a(x) = x^2; \quad b(x) = x^2 - 2;$$

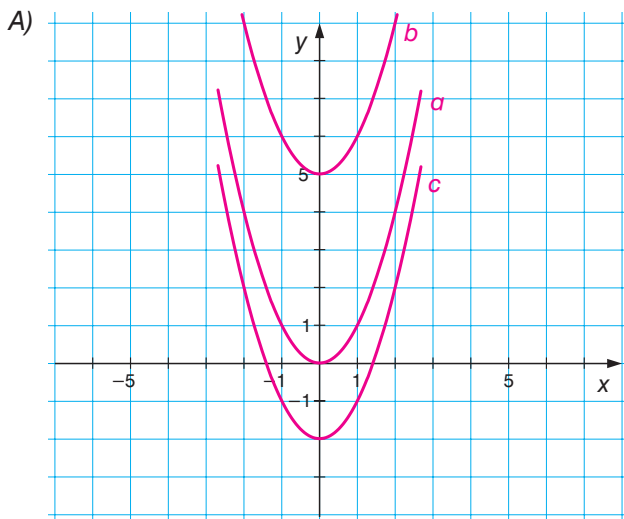
$$c(x) = x^2 + 1; \quad d(x) = x^2 - 4.$$



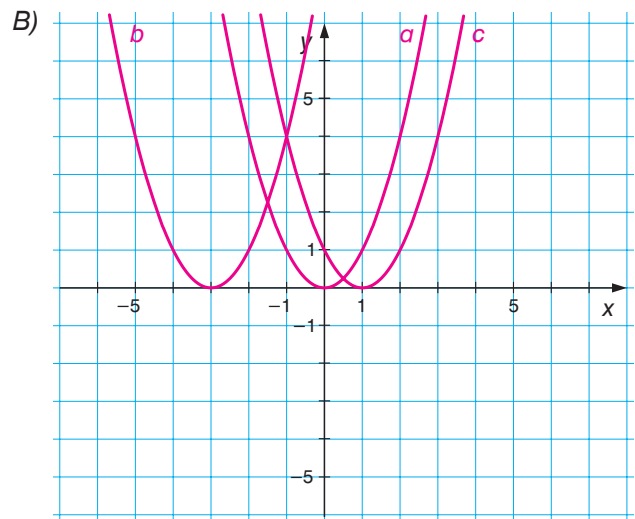
$$a(x) = x^2; \quad b(x) = (x + 5)^2;$$

$$c(x) = (x + 4)^2; \quad d(x) = (x - 4)^2.$$

2. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját!

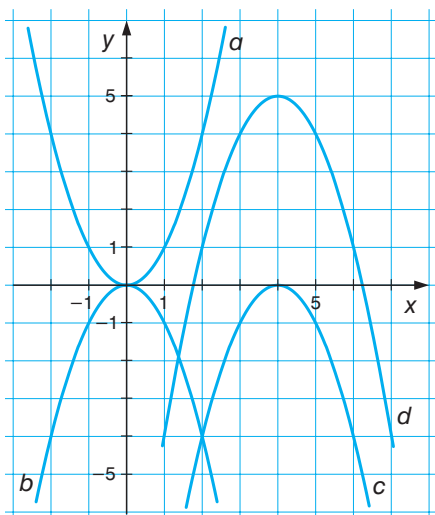


$$a(x) = x^2; \quad b(x) = x^2 + 5; \quad c(x) = x^2 - 2.$$



$$a(x) = x^2; \quad b(x) = (x + 3)^2; \quad c(x) = (x - 1)^2.$$

3. Írjuk be az adott grafikonokhoz tartozó szabályt! Jellemezzük a c grafikonhoz tartozó függvényt!



$$a(x) = x^2$$

$$\text{szabály: } c(x) = -(x - 4)^2$$

értelmezési tartománya: \mathbb{R}

$$b(x) = -x^2$$

értékkészlete: $y \leq 0$

y tengelymetszete: $(0; -16)$

$$d(x) = -(x - 4)^2 + 5$$

zérushelye: $(4; 0)$

a függvény menete: $x \leq 4$; növekvő

$4 \leq x$; csökkenő

szélsőértéke: minimuma: nincsen

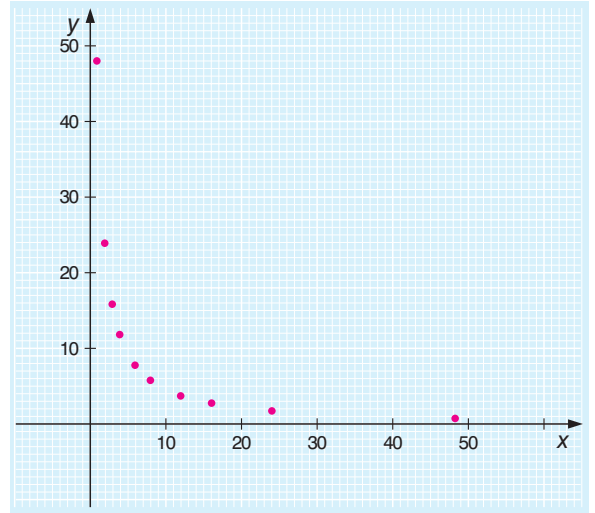
maximuma: $(4; 0)$



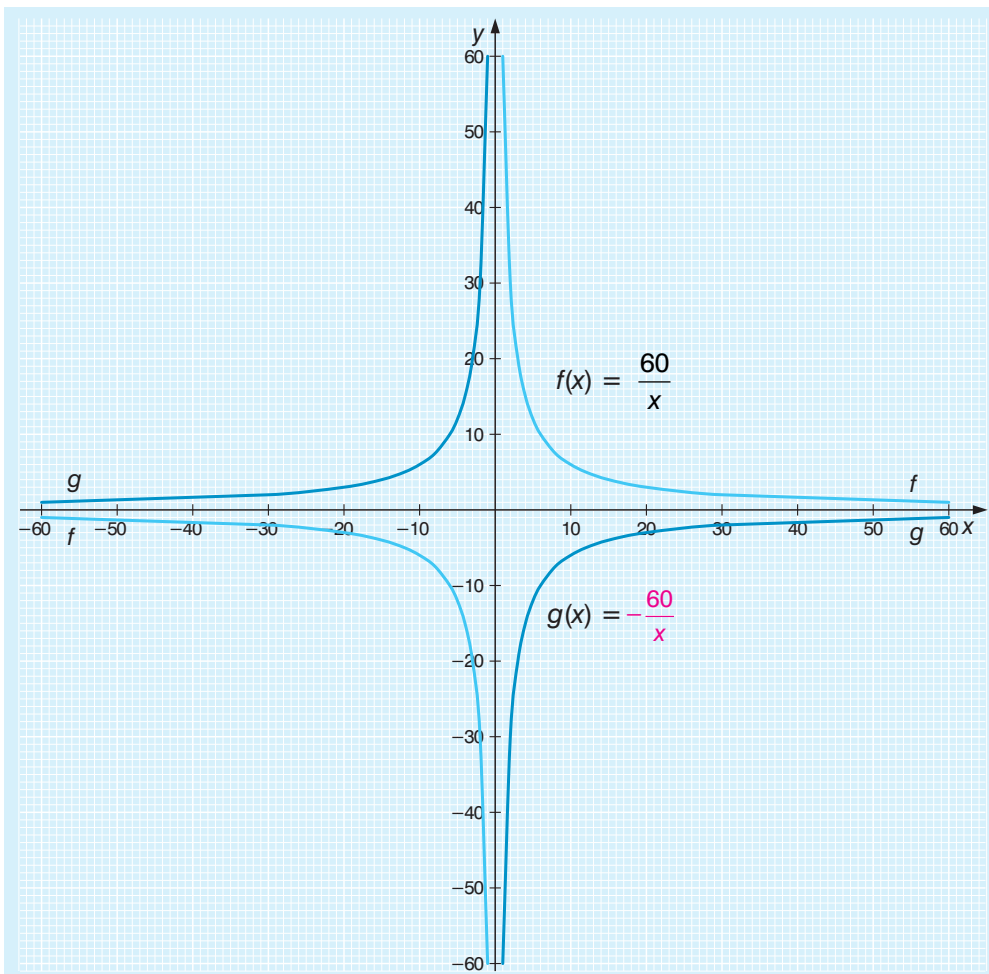
Egyéb függvények (Kiegészítő anyag)

1. Egy cukrászdában egy napon minden vevő ugyanannyi krémet vásárolt az egyik tálcáról. Hány vevő vásárolhatott, és fejenként hány krémet vehettek, ha a tálcán 48 krémes volt? Töltsük ki a táblázatot! Ábrázoljuk a krémesek számának változását a vevők számának függvényében!

Vevők száma	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
Krémesek száma	48	24	16	12	8	6	4	3	2	1



- *2. A grafikon alapján töltsük ki a táblázatot (csak egész számokból álló számpárokat írjunk be)! Mi lehet a g grafikonhoz tartozó hozzárendelési szabály?



<u>60</u>
1 · 60
2 · 30
3 · 20
4 · 15
5 · 12
6 · 10

x	-60	-30	-20	-15	-12	-10	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
f(x)	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-10	-12	-15	-20	-30	-60	60	30	20	15	12	10	6	5	4	3	2	1
g(x)	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60	-60	-30	-20	-15	-12	-10	-6	-5	-4	-3	-2	-1



Sorozatok, számtani sorozatok, mértani sorozatok

1. Keressünk szabályt az alábbi sorozatokhoz, majd folytassuk mindegyiket néhány taggal!

- a) H; K; SZ; CS; P; SZ; V; H; K a hét napjainak kezdőbetűi
- b) T; NY; Ő; T; T; NY; Ő; T az évszakok kezdőbetűi
- *c) T; H; H; N; Ö; H; H; NY; K; SZ a tízesek kezdőbetűi
- *d) M; V; F; M; J; U; N a Nap bolygóinak kezdőbetűi

2. Töltsük ki a táblázatot, ha tudjuk, hogy a középső (b_n) sorban egy számtani sorozat tagjai vannak! A táblázatban bármely két szomszédos számból úgy kapjuk az alatta levő számot, hogy az egyik számból kivonjuk az előtte álló számot.

A)

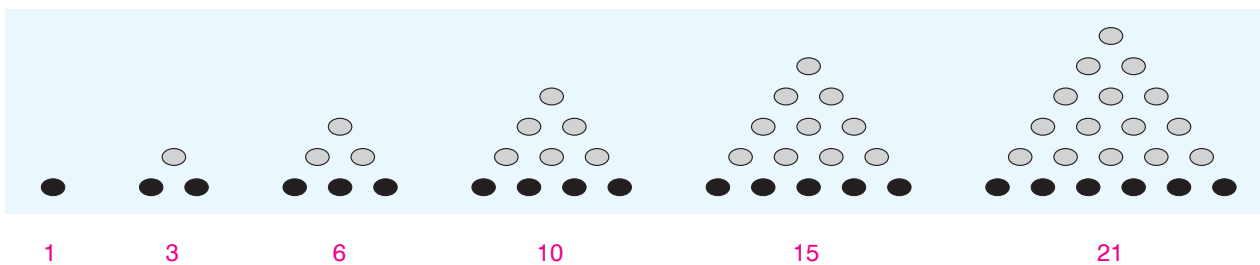
a_n	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49	
b_n	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15
c_n	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

B)

a_n	121	81	49	25	9	1	1	9	25	49	81	121	
b_n	-48	-40	-32	-24	-16	-8	0	8	16	24	32	40	48
c_n	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	

A táblázat első sorában levő számsorozat (a_n) a A) négyzetszámok sorozata.
 A táblázat harmadik sorában levő számsorozat (c_n) egy állandó sorozat.

3. Kavicsokat helyeztünk el az ábra szerint. Írjuk a kupacuk alá, hogy hány kavics van benne!



A következő kupacban 28 kavics lesz, a tizedikben 55, a századikban 5050, a 2010.-ben 2021055 kavics lesz. Ezernél több kavics először a 45-dik kupacban lesz.

$$2\ 021\ 055 = (1 + 2010) \cdot \frac{2010}{2} \quad \frac{(1 + 45) \cdot 45}{2} = 23 \cdot 45 = 1035$$

4. Számoljuk ki az 5-tel kezdődő 4-gyel osztható háromjegyű természetes számok összegét!

$$\begin{aligned} a_1 &= 500 \\ a_n &= 596 \\ n &= 100 : 4 = 25 \\ S_n &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \\ S_{25} &= \frac{(500 + 596) \cdot 25}{2} \\ S_{25} &= \frac{1096 \cdot 25}{2} \\ S_{25} &= 548 \cdot 25 \\ S_{25} &= 13\ 700 \end{aligned}$$

Összesen 25 természetes szám rendelkezik a fenti tulajdonságok mindegyikével, közülük a legkisebb a 500, a legnagyobb a 596. A keresett összeg: 13 700.



5. Megadtuk egy mértani sorozat 6. és 7. tagját. Adjuk meg az előző és a következő 3 tagot is!

- $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ 2 8; 32; 128 512 2048
 • • • • • • • •
- 5 25 125 625; 3125; 15 625 78 125 390 625
 • • • • • • • •
- -10^6 10^5 -10^4 1000; -100 ; 10^1 -10^0 10^{-1}
 • • • • • • • •
- $\frac{45}{32}$ $\frac{15}{8}$ $\frac{5}{2}$ $3\frac{1}{3}$; $4\frac{4}{9}$; $\frac{160}{27}$ $\frac{640}{81}$ $\frac{2560}{243}$
 • • • • • • • •
- $\frac{10}{3}$ $\frac{40}{9}$

6. Írjuk fel a sorozat harmadik, negyedik, ötödik tagját úgy, hogy

a) számtani sorozat legyen;

b) mértani sorozat legyen!

Írjuk fel a sorozat első öt tagjának összegét!

a)

	Az első öt tag	d	Az első öt tag összege
A	5; 10; 15; 20; 25	5	75
B	-5; 10; 25; 40; 55	15	125
C	5; -10; -25; -40; -55	-15	-125
D	-5; -10; -15; -20; -25	-5	-75
E	-5; -5; -5; -5; -5	0	-25
F	5; 0; -5; -10; -15	-5	-25
G	$\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; 0; $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0
H	$\frac{3}{4}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{11}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$

b)

	Az első öt tag	q
A	5; 10; 20; 40; 80	2
B	-5; 10; -20; 40; -80	-2
C	5; -10; 20; -40; 80	-2
D	-5; -10; -20; -40; -80	2
E	-5; -5; -5; -5; -5	1
F	5; 0; -; -; -	-
G	$\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$	$\frac{1}{2}$
H	$\frac{3}{4}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{25}{12}$; $\frac{125}{36}$; $\frac{625}{108}$	$\frac{5}{3}$

$$\frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{11}{4}\right) \cdot 5}{2} = \frac{14}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{12} \quad \frac{25}{12} \cdot \frac{5}{3} = \frac{125}{36} \quad \frac{125}{36} \cdot \frac{5}{3} = \frac{625}{108}$$

7. Egy számtani sorozat első tagja 12. Írjunk olyan öttagú sorozatot, hogy a sorozat

a) növekvő Pl.: 12; 14; 16; 18; 20 $d = 2$

b) csökkenő Pl.: 12; 10; 8; 6; 4 $d = -2$

c) állandó (konstans) legyen! 12; 12; 12; 12; 12 $d = 0$

8. Egy mértani sorozat első tagja 12. Írjunk olyan öttagú sorozatot, hogy a sorozat

- a) növekvő Pl. 12; 24; 48; 96; 192 $q = \frac{2}{1}$
 b) csökkenő Pl. 12; 6; 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$ $q = \frac{1}{2}$
 c) állandó legyen 12; 12; 12; 12; 12 $q = 1$
 d) az előző feltételek egyike se teljesüljön! Pl. 12; -24; 48; -96; 192 $q = -2$

9. A 8. a osztályban az volt a matek házi feladat, hogy fel kellett írni egy olyan mértani sorozat első négy tagját, amelynek hányadosa $\frac{1}{3}$. Évi és Robi összehasonlította a megoldásait, és meglepve tapasztalták, hogy Évi sorozata csökkenő, Robié növekvő. Írjunk ilyen sorozatokat!

- a) csökkenő: Pl. 81; 27; 9; 3
 b) növekvő: Pl. -81; -27; -9; -3

10. Határozzuk meg az alábbi mértani sorozatoknak a hányadosát és a hiányzó tagjait! Minden esetben számítsuk ki az első négy elem összegét! Amelyiknél lehet, írjunk két megoldást!

a) 1; $\boxed{3}$; 9; $\boxed{27}$ $q = 3$ Az első négy elem összege: 40

b) $-\frac{1}{2}$; $\boxed{2}$; $\boxed{-8}$; 32 $q = -4$ Az első négy elem összege: 25,5

c) $\frac{\boxed{-5}}{5}$; -15; $\frac{\boxed{-45}}{45}$; -135 $q = \begin{matrix} q_1 = 3 \\ q_2 = -3 \end{matrix}$ Az első négy elem összege: $\begin{matrix} -200 \\ -100 \end{matrix}$

d) -6; 4; $\frac{\boxed{-8}}{3}$; $\frac{\boxed{16}}{9}$ $q = \frac{-2}{3}$ Az első négy elem összege: $\frac{-26}{9} = -2\frac{8}{9}$

$$-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \quad 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{3} \quad -\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9} \quad -6 + 4 - \frac{24}{9} + \frac{16}{9} = -2 - \frac{8}{9} = -2\frac{8}{9}$$

11. Leírtuk egy mértani sorozat két tagját. Iktassunk közéjük annyi tagot, amennyi pont található közöttük! Melyik esetben van több megoldás? Miért?

a) 1 $\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}$ $\begin{matrix} 8 \\ \bullet \\ -8 \end{matrix}$ 64 $q = \begin{matrix} q_1 = 8 \\ q_2 = -8 \end{matrix}$

b) 1 $\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}$ $\begin{matrix} 4 \\ \bullet \end{matrix}$ $\begin{matrix} 16 \\ \bullet \end{matrix}$ 64 $q = 4$

c) 1 $\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}$ $\begin{matrix} 2 \\ \bullet \\ 4 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 8 \\ \bullet \\ -8 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 16 \\ \bullet \\ 16 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 32 \\ \bullet \\ -32 \end{matrix}$ 64 $q = \begin{matrix} q_1 = 2 \\ q_2 = -2 \end{matrix}$

Válasz: Ha páratlan számú tag hiányzik. Ekkor a q értéke egy szám és az ellentettje is lehet.



12. Mennyi a mértani sorozat első tagja, ha adott a hatodik tagja és a hányadosa?

a) $\frac{27}{4} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \quad a_1 = 6 \cdot \frac{3}{4} \quad q = \frac{2}{3}$ $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2 \quad 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$
 $3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \quad \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4} \quad \frac{9}{64} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{16} \quad -\frac{3}{16} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4}$

b) $-\frac{16}{27} \cdot \frac{4}{9} \cdot -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot -\frac{3}{16} \cdot \frac{9}{64} \quad a_1 = -\frac{16}{27} \quad q = -\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{3} \quad \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9} \quad \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{27}$

Számoljuk ki mindkét sorozatban az első és hatodik, a második és ötödik, a harmadik és negyedik tagok szorzatát! Mit veszünk észre? Miért?

a) $a_1 \cdot a_6 = 6 \quad a_2 \cdot a_5 = 6 \quad a_3 \cdot a_4 = 6$
b) $a_1 \cdot a_6 = -\frac{1}{12} \quad a_2 \cdot a_5 = -\frac{1}{12} \quad a_3 \cdot a_4 = -\frac{1}{12}$

$\frac{27}{4} \cdot \frac{8}{9} = 6; -\frac{16}{27} \cdot \frac{9}{64} = -\frac{1}{12} \quad \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3} = 6; \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{3}{16}\right) = -\frac{1}{12} \quad 3 \cdot 2 = 6; -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$

$a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4$
 $a_1 \cdot (a_1 \cdot q^5) = a_1^2 \cdot q^5 \quad (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^4) = a_1^2 \cdot q^5 \quad (a_1 \cdot q^2) \cdot (a_1 \cdot q^3) = a_1^2 \cdot q^5$

13. Egy számítógép amortizációja évente 25%, azaz ennyit veszít az értékéből. Hány év múlva lesz egy 120 000 Ft-ért vásárolt számítógép értéke a vásárlási összeg negyedrésznél kevesebb?

1 év múlva $120\,000 \text{ Ft} \cdot 0,75 = 90\,000 \text{ Ft}$
2 év múlva $90\,000 \text{ Ft} \cdot 0,75 = 67\,500 \text{ Ft}$
3 év múlva $67\,500 \text{ Ft} \cdot 0,75 = 50\,625 \text{ Ft}$
4 év múlva $50\,625 \text{ Ft} \cdot 0,75 = 37\,968,75 \text{ Ft}$
5 év múlva $37\,968,75 \text{ Ft} \cdot 0,75 = 28\,476,562 \text{ Ft} < 30\,000 \text{ Ft}$

5 év múlva a számítógép értéke kevesebb a vásárlási összeg negyedénél.

14. Jenő a nagymamájától érettségire 100 000 Ft-ot kapott, és Jenő ezt az összeget 10%-os kamattal 5 évre lekötötte. Hány forintot vehet fel 5 év múlva, ha a kamatot minden év végén hozzáírják a lekötött összeghez, és a következő évben már az is kamatozik (kamatos kamat)?

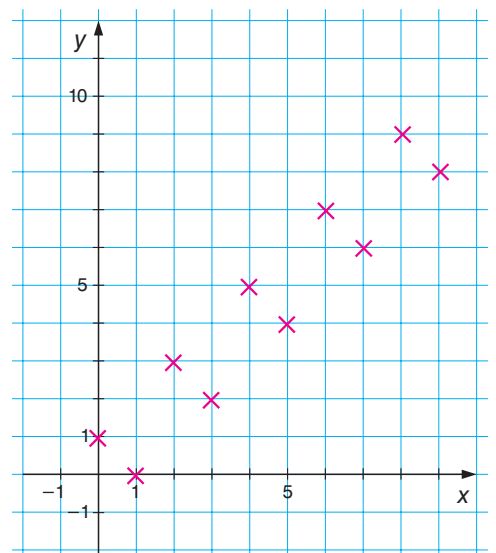
$a_1 = 100\,000 \text{ Ft} \quad a_6 = a_1 \cdot q^5 \quad \text{Jenő 5 év elteltével (a 6. év elején) 161\,050 forintot vehet fel.}$
 $q = 1,1 \quad a_6 = 100\,000 \cdot 1,1^5$
 $a_6 = ? \quad a_6 = 100\,000 \cdot 1,61051$
 $a_6 = 161\,051$

15. Adjuk meg annak a sorozatnak az első öt tagját, amelynek n -edik elemét az $a_n = 3n - n^2$ szabály alapján számíthatjuk ki (n pozitív egész szám)!

$a_1 = 3 \cdot 1 - 1^2; \quad a_2 = 3 \cdot 2 - 2^2; \quad a_3 = 3 \cdot 3 - 3^2; \quad a_4 = 3 \cdot 4 - 4^2; \quad a_5 = 3 \cdot 5 - 5^2$
 $a_1 = 2; \quad a_2 = 2; \quad a_3 = 0; \quad a_4 = -4; \quad a_5 = -10$

16. Egy sorozatban a páratlan sorszámú helyeken a sorszámnál 1-gyel kisebb, a páros helyeken a sorszámnál 1-gyel nagyobb szám áll. Töltsük ki a táblázatot, és ábrázoljuk a sorozat tagjait!

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	0	3	2	5	4	7	6



Az 1,00 – 5,49 számok négyzetei

Szám	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Az 5,50 – 9,99 számok négyzetei

Szám	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TARTALOM

Ismétlés	3
1. Algebrai kifejezések	
Algebrai kifejezések (Emlékeztető)	5
Hogyan oldunk meg egyenleteket, egyenlőtlenségeket? (Emlékeztető)	7
Többtagú algebrai kifejezések szorzása	10
Összeg és különbség négyzete (Kiegészítő anyag)	12
Összeg és különbség szorzata (Kiegészítő anyag)	13
Kiemelés, szorzattá alakítás	14
2. Szöveges feladatok	
Egyenletek alkalmazása feladatmegoldásban (Emlékeztető)	16
Hány éves a kapitány?	18
Gondoltam egy számra... ..	20
Fogócska matematikus szemmel	22
Méregkeverés – egyenletekkel	25
Együttes munkavégzés	27
Szögek, oldalak, átlók: geometriai számítások	28
3. Halmazok	
Halmazok	30
Beszljünk helyesen a matematika nyelvén!	33
Hányféle útvonal lehet? Az összegzési módszer	35
Hányféleképpen választhatunk?	37
Válasszuk szét az eseteket!	39
Hány lehetőség van?	41
4. Geometria I.	
A terület	43
A négyzetgyökvonás. Táblázathasználat (Kiegészítő anyag)	46
Pitagorasz tétele	49
A Pitagorasz-tétel alkalmazásai	51
5. Térgeometria	
A testek csoportosítása: gúla, kúp	58
Nézzük több oldalról!	61
Csúcsok, élek, lapok	63
Testek hálója	65

Testek felszíne	66
A gúla, kúp és gömb felszíne (Kiegészítő anyag)	68
Testek térfogata	70
A gúla, kúp és gömb térfogata (Kiegészítő anyag)	72
Testek felszíne és térfogata	74

6. Statisztika, valószínűség

Adatok elemzése	76
Mennyi a valószínűsége	81

7. Geometria II.

Az eltolás	85
A vektorok	86
A párhuzamos eltolás alkalmazása, szerkesztések	89
Egybevágósági transzformációk	93
A középpontos hasonlóság	96

8. Függvények

Hozzárendelések, függvények, sorozatok	102
Lineáris függvények. A függvények tulajdonságai	104
Az abszolútérték-függvény	108
Másodfokú függvények	110
Egyéb függvények (Kiegészítő anyag)	111
Sorozatok, számtani sorozatok, mértani sorozatok	112

Kiadja a Mozaik Kiadó, 6723 Szeged, Debreceni u. 3/B. • Tel.: (62) 470-101, 554-666
Drótposta: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu
Felelős kiadó: Török Zoltán • Grafikus: Deák Ferenc • Műszaki szerkesztő: Becsei György
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Kovács János
Terjedelem: 15,45 (A/5) ív • Tömeg: 385 g • 2012. január • Raktári szám: MS-2318/1