Sokszínű matematika 12.

A KITŰZÖTT FELADATOK EREDMÉNYE

Logika, bizonyítási módszerek

1. Logikai feladatok, kijelentések

1. Feltéve, hogy a középső a kérdésre válaszolt: a középső lókötő, a harmadik lovag.
2. Aki ellopta az elefántot, mindig hazudik.
3. Piki.
4. Lovag plinket, lókötő plankot mond.
5. Kiss Kata, Szabó Réka, Nagy Sára, Varga Eszter.
6. Zoli: villamos, kosárlabda; Bálint: bicikli, kézilabda; Pisti: busz, úszás.

Rejtvény: Német.

2. Logikai műveletek — negáció, konjunkció, diszjunkció

1. Fehér dobozban: piros, zöld golyó. Piros dobozban: fehér, sárga golyó. Kék dobozban: sárga, piros golyó. Zöld dobozban: kék, fehér golyó. Sárga dobozban: zöld, kék golyó.
2. $\neg p$ = A négyzetnek van olyan szöge, amelyik nem derékszög.
   $\neg q$ = Van olyan háromszög, amelyik nem derékszögű.
   $\neg r$ = A szabályos ötszögnek van olyan szöge, amelyik derékszög.
   $\neg s$ = Nincs olyan deltoid, amelyik rombusz = Egyetlen deltoid sem rombusz.
   $\neg t$ = Minden trapéz paralelogramma.
   $\neg u$ = Nincs homorúszögű háromszög. = Minden háromszög nem homorúszögű.
   $\neg w$ = Van olyan háromszög, amely köré nem írható kör.
   $\neg A$ = A 3 nagyobb vagy egyenlő, mint π. ($3 \ge \pi$)
   $\neg B$ = A 4 kisebb, mint 5.
   $\neg C$ = Szabályos dobókockával dobhatunk 6-nál nagyobbat is.
   $\neg D$ = 9-nek 3-nál kevesebb osztója van.
   $\neg E$ = Minden másodfokú egyenletnek 3-nál kevesebb gyöke van.
3. $\left.\begin{array}{r} A = \neg p \\ \neg\neg p = p \end{array}\right\} \Rightarrow \neg A = p$
   $\neg A$ = Minden faluban van posta.
   $\neg B$ = Van olyan ember, aki nem kékszemű.
   $\neg C$ = Van olyan pók, amelyiknek 8-nál több szeme van.
   $\neg D$ = A február sose 30 napos.
   $\neg E$ = Van olyan szálloda, amelyben van olyan szoba, ahol nincs telefon.
   $\neg F$ = Minden munkahely olyan, hogy senki sem dolgozik.

4. Mit szoktál mondani akkor, amikor valaki megkérdezi, hogy a „plink” az jelenti, hogy „igen”?

5. *a)* Piki igazmondó, Niki és Tiki hazug.
b) Tiki biztosan igazmondó, Niki hazug, Pikiről nem tudjuk.

6. *a)* $\neg H$ $\quad \neg(\neg H)$ = Ma hétfő van.
b) $H \wedge F$ $\quad \neg(H \wedge F)$ = Ma nem hétfő van, vagy nem vagyok fáradt. = $\neg H \vee \neg F$
c) $H \wedge \neg F$ $\quad \neg(H \wedge \neg F)$ = Ma nem hétfő van, vagy fáradt vagyok. = $\neg H \vee F$
d) $\neg H \wedge F$ $\quad \neg(\neg H \wedge F)$ = Ma hétfő van, vagy nem vagyok fáradt. = $H \vee \neg F$
e) $\neg H \wedge \neg F$ $\quad \neg(\neg H \wedge \neg F)$ = Ma hétfő van, vagy fáradt vagyok.

7. *a)* $M \vee T$ $\quad$ hétfőn igaz
$\neg(M \vee T)$ = Ma nem hétfő van és tegnap nem vasárnap volt. = $\neg M \wedge \neg T$
b) $\neg M \vee \neg T$ $\quad$ csak hétfőn nem igaz
$\neg(\neg M \vee \neg T)$ = Ma hétfő van és tegnap vasárnap volt. = $M \wedge T$
c) $\neg T \vee M$ $\quad$ minden nap igaz
$\neg(\neg T \vee M)$ = Tegnap vasárnap volt és ma nincs hétfő. = $T \wedge \neg M$
d) $\neg M \vee \neg T$ $\quad$ csak hétfőn nem igaz
$\neg(\neg M \vee \neg T)$ = Ma hétfő van és tegnap vasárnap volt. = $M \wedge T$

8. *a)* Én megyek veled vagy Ottóval.
b) Veled megyek, vagy Ottóval megyek.
c) Nem megyek veled.
d) Te nem mégy, vagy én nem megyek. = Nem megyek veled.

9. *a)* $A \wedge B \wedge \neg C$ $\qquad$ *b)* $(A \vee B) \wedge \neg C$
c) $\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C$ $\qquad$ *d)* $(A \wedge B) \vee C$

10. A, B, D vagy A, C, E, tehát csak A-ról mondhatjuk biztosan, hogy hazudik.

11. *a)* Az $ABCD$ húrnégyszög és átlói nem merőlegesek. LEHET IGAZ
b) Az $ABCD$ húrnégyszög és $ADC\sphericalangle < 90^\circ$ és a BCD háromszög egyenlő szárú. HAMIS = NEM LEHET IGAZ
c) Az átlók nem merőlegesek, az $ADC\sphericalangle < 90^\circ$ és a BCD háromszög nem egyenlő szárú. BIZTOS IGAZ
d) Nem húrnégyszög és az átlók merőlegesek és az $ADC\sphericalangle \geq 90^\circ$. HAMIS = NEM LEHET IGAZ

Rejtvény: A leghátsó kivételével mindenki megszabadulhat a következő stratégiával: a leghátsó fehéret mond, ha páratlan számú fehér sapkát lát, különben feketét mond.

3. Logikai műveletek — implikáció, ekvivalencia

1. *a)* $B \rightarrow A$ $\qquad$ *b)* $\neg A \rightarrow \neg B$ $\qquad$ *c)* $A \rightarrow B$ $\qquad$ *d)* $A \vee A \neg B$

2. *a)* $A \rightarrow B$ $\qquad$ *b)* $\neg B \rightarrow \neg A$ $\qquad$ *c)* $B \rightarrow A$ $\qquad$ *d)* $B \rightarrow A$
e) $\neg B \rightarrow \neg A$ (a 2004-es kiadásban sajtóhiba van a feladat szövegében: szombat helyett vasárnap áll)
f) $B \leftrightarrow A$ $\qquad$ *g)* $A \leftrightarrow B$

3. *a)* Ha az n szám 36-ra végződik, akkor 4-gyel osztható.
b) Ha az n szám 12-vel osztható, akkor nem prím.
c) Ha az n szám 4-gyel osztható, akkor nem prím és páros.
d) Az n szám páros és számjegyeinek összege 3-mal osztható, akkor és csak akkor, ha 6-tal osztható.
e) Az n szám 12-vel osztható akkor és csak akkor, ha 4-gyel osztható és számjegyeinek összege 3-mal osztható.
f) Ha n nem páros, de számjegyeinek összege osztható 3-mal, akkor n nem osztható 6-tal.

4. *a)* $(T \wedge O) \to N$
b) $D \leftrightarrow C$
c) $A \to (B \vee C)$
d) $S \to \neg(A \wedge B)$

5. Kati.

6. Gabi csak lány lehet.

7. „Igen” válasz: van arany, „nem” válasz: nincs arany.

Rejtvény: Van olyan eset, amikor 3 kártyát kell megfordítani, még akkor is, ha kihasználjuk, hogy minden számjegyből 1 van.

4. Teljes indukció

1. $n = 1$-re $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$. T.f. n-re, biz. $n+1$-re:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

2. *a)* $n = 1$-re $19 \mid 38$. T.f. n-re, biz. $n+1$-re:

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 50 \cdot 5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 12 \cdot 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1} =$$
$$= 38 \cdot 5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 12 \cdot (5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1}).$$

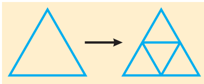
b) A feladat helyesen: $11 \mid 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$.
$n = 1$-re $11 \mid 66$. T.f. n-re, biz. $n+1$-re:

$$6^{2n+2} + 3^{n+3} + 3^{n+1} = 36 \cdot 6^{2n} + 3 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 3^n = 33 \cdot 6^{2n} + 3 \cdot (6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n).$$

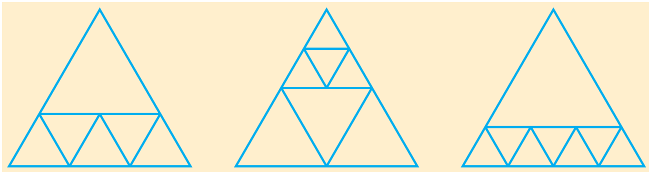
c) A feladat helyesen: $17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$.
$n = 1$-re $17 \mid 391$. T.f. n-re, biz. $n+1$-re:

$$2^{5(n+1)+3} + 5^{n+1} \cdot 3^{n+3} = 32 \cdot 2^{5n+3} + 15 \cdot 5^n \cdot 3^{n+2} =$$
$$= 34 \cdot 2^{5n+3} + 17 \cdot 5^n \cdot 3^{n+2} - 2 \cdot (2^{5n+3} + 5^n + 3^{n+2}).$$

***3.** IGAZ



$(1 \to 4)$ a háromszögek száma 3-mal növelhető.
$n = 6, 7, 8$-ra:



4. 5, 6, 7 $(= 2 \cdot 5 - 3)$, 8 kifizethető, utána hármasával bármi.

5. Pisti tévedett.
1-ről indulva a darabok száma minden lépésben 2-vel nő, így csak páratlan lehet.

6. 1-ről indulva a darabok száma minden lépésben 3-mal vagy 5-tel nő.
a) $2002 = 1 + 2001 = 1 + 3 \cdot 667$ elérhető.
b) $2003 = 1 + 10 + 1992 = 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 664$.
c) 2, 3, 5, 8 kivételével minden szám lehet: (1, 4, 6, 7 lehet)
$9\ (= 1+3+5)$, $10\ (= 1+3 \cdot 3)$, $11\ (= 1+2 \cdot 5)$-ről indulva hármasával minden elérhető.

7. *a)* A tagok szimmetrikusak a középsőre nézve:
$$a_n = n + (n+1) + \ldots + (2n-1) + \ldots + (3n-3) + (3n-2) = (2n-1)^2.$$
Teljes indukció második lépése:
$$(2n-1)^2 + 3n - 1 + 3n + 3n + 1 - n = 4n^2 - 4n + 1 + 8n = (2n+1)^2.$$
b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$,
$$(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n (n+1)^2 = (-1)^n (n+1)\frac{2n+2-n}{2} = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

8. Becsléssel:
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$
Teljes indukcióval: $n = 1$: $1 \geq 1$. T.f. n-re, biz. $n+1$-re:
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}.$$

9.

Egyenesek száma:	1	2	3	4	...	n
Síkrészek száma:	2	4	7	11	...	$\dfrac{n(n+1)}{2} + 1 =$ (sejtés)

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 1.$$

Az $n+1$-edik egyenes az előző n egyenest n pontban metszi, ezek $n+1$ részre osztják az egyenest, és mindegyik egyenesdarab kettévág egy-egy síkrészt, így a síkrészek száma $n+1$-gyel nő.

***10.** Körök száma: 1 2 3 4 ... n.

Síkrészek száma: 2 4 8 14 ... $2+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=2+2\cdot(1+2+\ldots+(n-1))$ sejtés.

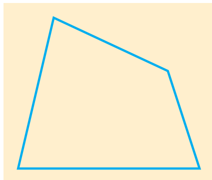
T.f.h. n körre igaz. Az n + 1-edik kör $2n$ pontban metszi az előző n kört, ez $2n$ ív a körön, amelyek kettévágnak egy síkrészt, így $2n$-nel nő a síkrészek száma.

Kiszínezhető.

1 körre igaz. T.f.h. n körre igaz. Rajzoljuk be az n + 1-edik kört, és minden , a körön belüli síkrészt színezzük az ellenkezőjére. Ezzel az új határvonalak jók lesznek, a régiek nem változnak.

A háromszögek esete abban különbözik, hogy két háromszögnek maximum 6 metszéspontja lehet.

***11.** n = 4-re igaz:



T.f.h. létezik ilyen konvex n-szög. Ennek egy tompaszögét levágva konvex n + 1 szöget kapunk.

3-nál több hegyesszög nem lehet. T.f.h. van 4, ezek összege 2 · 180º-nál kisebb. A konvex n-szög szögösszege (n – 2) · 180º. A megmaradt n – 4 db szög összege (n – 4) · 180º-nál nagyobb kellene legyen, ami nem lehet.

***12.** n = 1-re igaz.

T.f.h. minden 2^{n+1} – 1-nél nem nagyobb tömeg 1, 2, ..., 2^n tömegekkel kimérhető. Adott egy 2^{n+1} – 1-nél nagyobb, de 2^{n+2} – 1-nél nem nagyobb tömeg. 2 · 2^{n+1} – 1-ből 2^{n+1}-t levéve 2^{n+1} – 1 marad, így egy 2^{n+1}-et használunk, ami marad, a 2^{n+1} – 1-nél nem nagyobb, tehát 1, 2, ..., 2^n tömegekkel kimérhető.

Rejtvény: A szemüveg akkor párásodik be, ha hidegről melegre megy be.

Számsorozatok

1. A számsorozat fogalma, példák sorozatokra

1. A pozitív páros számok sorozatának n-edik tagja: $2n$, a sorozat első n tagjának összege: $n(n+1)$.

2. *a)* n^2

b) $\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$

c) $(2n-1)(n^2-n+1)$

3. A bizonyításokat például teljes indukcióval lehet elvégezni.

4. *a)* Érdemes a_n-t átalakítani így:

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}$$

b) Az a_n-t itt így érdemes felírni:

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

5. A sejtés általánosan így írható fel:

$$n^2+n^2+1+\ldots+n^2+n = n^2+n+1+n^2+n+2+\ldots+n^2+2n.$$

Az összegzés után a bizonyítás közvetlenül adódik.

2. Példák rekurzív sorozatokra

1. *a)*, *b)*, *c)* teljes indukcióval könnyű igazolni.

2. –

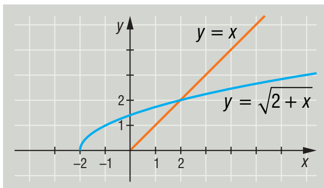
3. Az egyes „ferde” vonalak mentén adódó összegek a következők:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

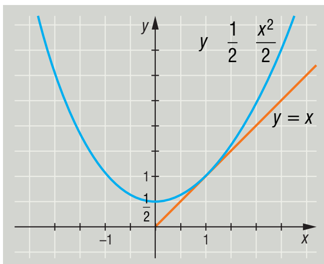
Az általános sejtés tehát az lehet, hogy az n-edik sorban álló számok öszege f_n.
A sejtés teljes indukcióval igazolható.

4. A sorozat tulajdonságait teljes indukcióval igazolhatjuk. A szemléltetést az 1. ábrán lehet elvégezni.

5. A sorozat tulajdonságait teljes indukcióval igazolhatjuk, a sorozat tagjainak szemléltetését a 2. ábrán végezhetjük el.



1. ábra



2. ábra

3. Számtani sorozatok

1. $3+6+9+...+999=\frac{2\cdot 3+332\cdot 3}{2}\cdot 333=166833.$

2. A feltételből a1 = 2 és d = 4 adódik. Így azt a legkisebb pozitív egész n-et keressük, amelyre

$$\frac{2\cdot 2+(n-1)\cdot 4}{2}\cdot n\geq 1000.$$

Az eredmény: $n = 23$.

3. Elég igazolni, hogy az $a^2 + c^2 = 2b^2$ és $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{a+c}$ egyenlőségek ekvivalensek.

4. *a)* $a_1 =-7,\ d = 3.$
b) Két megoldás van:
- $a_1 = 1,\ d = 3,$
- $a_1 = -\frac{122}{3},\ d = \frac{59}{3}.$

c) A kitűzött feladat hibás. A helyes feladat:
$a_3^2+a_7^2 = 122,$
$a_1 + a_7 = 4.$
Ennek két megoldása van:
- $a_1 =-7,\ d = 3,$
- $a_1 = \frac{67}{5},\ d = -\frac{19}{5}.$

5. Nem. Indirekt bizonyítást alkalmazva arra az ellentmondásra jutunk, hogy $\sqrt{3}$ racionális szám.

6. –

7. 5050.

8. 450,5 másodperc alatt esik le a test 4410 m magasról.

9. $2\cdot(1+2+...+12)=2\cdot\frac{1+12}{2}\cdot 12=156.$

10. Az egyenlőtlenséget kielégítő egész koordinátájú pontok száma 221.

4. Mértani sorozatok

1. $a_1 = 6,\ q = 2.$

2. –

3. $q = 2$

4. 1023.

5. *a)* $a_1 = 3, \; q = 2$

b) A feladatban hiba van, a helyes feladat:

$a_7 - a_4 = -216,$

$a_5 - a_4 = -72.$

Az egyetlen megoldás: $a_1 = -3$, $q = -2$ (a $q = 1$ eset nem ad jó megoldást).

c) Két megoldás van:

- $a_1 = -5, \; q = 2,$
- $a_1 = -5, \; q = -2.$

6. –

7. A helyesen kitöltött táblázat:

27	54	108	216
9	18	36	72
3	6	12	24
1	2	4	8

8. Két megoldás van:

- 2, 8, 32;
- 14, 14, 14

(A második megoldás esetében a számtani sorozat differenciája 0, a mértani sorozat hányadosa 1.)

9. A számtani sorozat első tagja 3, különbsége 15.

5. Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása

1. Jelölje p az $1 + \frac{1}{100} = \frac{101}{100}$ számot (ez az egyhavi kamat kiszámításához szükséges), akkor a havi törlesztő részlet:

$$5000 \cdot \frac{p^{24}}{p^{24} - 1} \approx 23537 \text{ Ft.}$$

2. Feltesszük, hogy havonta egyenlő részletekben törlesztjük a kölcsönt, ekkor a szükséges havi összeg a $q = 1 + \frac{1}{200} = \frac{201}{200}$ jelölés felhasználásával:

$$50000 \cdot \frac{q^{240}}{q^{240} - 1} \approx 71643 \text{ Ft.}$$

Tehát a kölcsönt felvehetjük.

Térgeometria

1. Térelemek

1. 15 rész

2. *a)* 5 vagy 8 rész. *b)* 9, 10 vagy 12 rész.

3. *a)* $\sqrt{2}a$ *b)* $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ *c)* $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

5. 90º; 120º

6. 35,26º; 90º

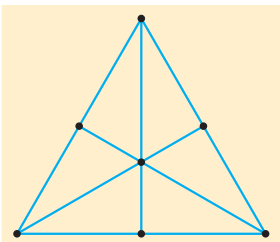
7. $\sqrt{3}a$; $\sqrt{5}a$; 39,23º; 18,43º

***9.** Igaz

2. A sík és a tér felosztása

1. $\frac{n^2-3n+2}{2}$ véges; $2n$ végtelen tartomány

2.



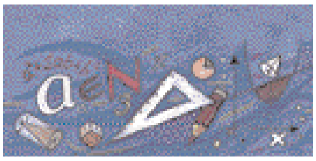
3. 35

4. $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

5. $\binom{\binom{n}{2}}{2}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8}$

6. 550

***7.** $\binom{n}{3}+3\cdot\binom{n}{4}$

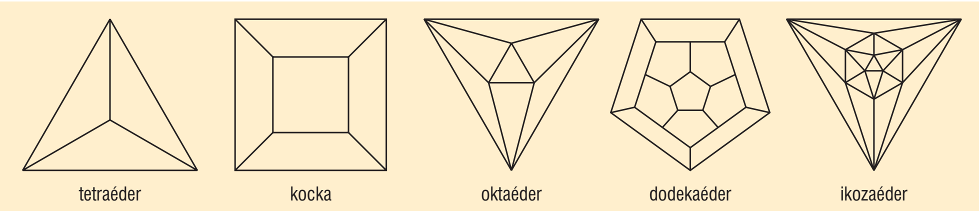


3. Testek osztályozása, szabályos testek

1. Igen. Pl. ilyen egy térbeli kereszt.

2. Legkevesebb 6, legfeljebb 20.

3.



4. $\frac{a}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

5. $10\sqrt{6}$ cm

6. 8,16 cm; 16,32 cm

***7.** $3\sqrt{2}a$

***8.** $\frac{\sqrt{3}}{6}a$

4. A terület fogalma, a sokszögek területe

1. $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

2. 14 cm; 25,38°; 154,62°

3. 7,48 cm; 14,7 cm; 46,68°

4. 7-szerese.

5. $\frac{1}{7}$ része.

6. A súlyvonal a megfelelő egyenes.

7. 172,05 cm^2.

9. $\frac{8}{3}$ területegység.

***10.** Igen. Az oldalai lehetnek: 3 és 6, vagy 4 és 4.

***11.** *b)* $n = 3$, 4 vagy 6 esetén.

5. A kör és részeinek területe

1. 3; 9

2. $\sqrt{2}$

3. Igen.

4. 6,28 km-rel

5. *a)* 2,09 cm^2 *b)* 3 cm^2 *c)* 1,91 cm^2

6. 0,56 m^2

7. *a)* 5,5 cm^2 *b)* 15,28 cm^2 *c)* 15,71 cm^2 *d)* 11,25 cm^2

8. *a)* $\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{1}{2}$

10. Egyenlők.

11. 45,32 cm^2

12. 6,77 cm^2

***13.** 262,88 cm^2

6. A térfogat fogalma, a hasáb és henger térfogata

1. 8 féle. $A_{max} = 146$ (1; 1; 36). $A_{min} = 66$ (3; 3; 4).

2. Élei: $6\sqrt{2}; 8\sqrt{2}; 10\sqrt{2}$; $V = 960\sqrt{2}$; $A = 752$; 45º; 64,9º

3. Élei: 4 cm; 6 cm; 8 cm. $A = 208$ cm^2

4. Élei: 10 cm; 15 cm; 20 cm. $V = 3000$ cm^3

5. *a)* $A = 686{,}6$ cm^2; $V = 866$ cm^3 *b)* $A = 1344{,}1$ cm^2; $V = 3441$ cm^3
c) $A = 1719{,}62$ cm^2; $V = 5196{,}2$ cm^3 *d)* $A = 3538{,}84$ cm^2; $V = 2628{,}32$ cm^3

6. *a)* $V = 785{,}4$ cm^3; $A = 471{,}24$ cm^2 *b)* $V = 10000$ cm^3; $A = 2628{,}32$ cm^2
c) $V = 17904{,}94$ cm^3; $A = 5080{,}99$ cm^2

7. 21,46%

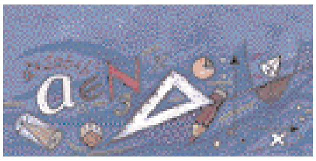
8. $V_1 = 13244{,}76$ cm^3; $A_1 = 3358{,}7$ cm^2 $V_2 = 2548{,}9$ cm^3; $A_2 = 1119{,}57$ cm^2

9. $V_1 = 628{,}32$ cm^3; $A_1 = 408{,}41$ cm^2 $V_2 = 1005{,}31$ cm^3; $A_2 = 653{,}45$ cm^2

10. $V_1 = 288{,}5$ cm^3; $V_2 = 711{,}5$ cm^3 $A_1 = 330{,}9$ cm^2; $A_2 = 500{,}1$ cm^2

***11.** $A = 112$ cm^2; $V = 64$ cm^3

***12.** 3 féle.



7. A gúla és a kúp térfogata

1. *a)* $276{,}39\ \text{cm}^3$; $333{,}78\ \text{cm}^2$
   b) $623{,}61\ \text{cm}^3$; $487{,}3\ \text{cm}^2$
   c) $1038{,}09\ \text{cm}^3$; $656{,}17\ \text{cm}^2$
   d) $1500\ \text{cm}^3$; $840{,}77\ \text{cm}^2$
2. *a)* $157{,}08\ \text{cm}^3$; $201{,}22\ \text{cm}^2$
   b) $301{,}59\ \text{cm}^3$; $301{,}59\ \text{cm}^2$
   c) $301{,}59\ \text{cm}^3$; $301{,}59\ \text{cm}^2$
3. $58{,}93\ \text{cm}^3$
4. $678{,}41\ \text{cm}^2$
5. $748{,}55\ \text{cm}^2$
6. $65{,}35\ \text{cm}^3$
7. $323{,}61\ \text{cm}^2$; $333{,}\dot{3}\ \text{cm}^3$
8. $166{,}\dot{6}\ \text{cm}^3$; $173{,}21\ \text{cm}^2$
9. $30{,}16\ \text{cm}^3$; $52{,}78\ \text{cm}^2$

*11. $A = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^2$; $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$

*12. $a = 3r$ esetén.

8. A csonka gúla és a csonka kúp

1. *a)* $16{,}69\ \text{cm}$
   b) $1148{,}58\ \text{cm}^3$; $720{,}2\ \text{cm}^2$
   c) $82{,}76°$
2. *a)* $254{,}29\ \text{cm}^3$; $275{,}96\ \text{cm}^2$
   b) $282{,}92\ \text{cm}^3$; $288{,}5\ \text{cm}^2$
3. *a)* $3517{,}75\ \text{cm}^3$; $3119{,}38\ \text{cm}^2$
   b) $4345{,}92\ \text{dm}^3$; $1518{,}58\ \text{dm}^2$
   c) $107{,}93\ \text{dm}^3$; $157{,}58\ \text{dm}^2$
4. $97{,}49\ \text{cm}^3$; $119{,}38\ \text{cm}^2$
5. $V_1 = 33{,}\dot{3}\ \text{cm}^3$; $V_2 = 233{,}\dot{3}\ \text{cm}^3$ $A_1 = 72{,}17\ \text{cm}^2$; $A_2 = 266{,}51\ \text{cm}^2$
6. $A = 360\ \text{cm}^2$; $\alpha = 53{,}13°$
7. $\dfrac{7}{24}\pi\ \text{dm}^3$; $\dfrac{7}{4}\pi\ \text{dm}^2$
8. *a)* $18{,}93\ \text{cm}$; $6{,}31\ \text{cm}$
   b) $21{,}85\ \text{cm}$; $11833{,}45\ \text{cm}^3$
9. $573{,}87\ \text{dm}^3$
10. $390{,}23\ \text{dm}^3$

9. A gömb térfogata és felszíne

1. *a)* $5\,575\,280\ \text{cm}^3$; $152\,053\ \text{cm}^2$ *b)* $33\,510\ \text{cm}^3$; $5027\ \text{cm}^2$
2. $2974\ \text{m}^3$
3. $104\ \text{cm}^2$
4. $\frac{3\pi \cdot r^2}{4}$; $\frac{3}{16}$ rész
5. $\frac{\sqrt{15}}{5} r$
7. 27,14 N
8. $1{,}6\ \text{dm}^3$; $6{,}62\ \text{dm}^2$

*9. $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$

*10. $\frac{4\pi}{81} R^3$

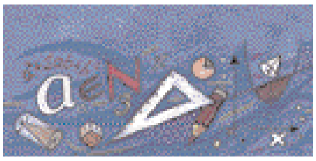
*11. $268\,083\ \text{cm}^3$; $20\,106\ \text{cm}^2$

10. Egymásba írt testek

1. $1440\ \text{cm}^3$
2. $36{,}74\ \text{cm}^3$
3. *a)* 10 cm; $2\sqrt{34}$ cm; $2\sqrt{41}$ cm *b)* $160\ \text{cm}^3$; $55{,}46\ \text{cm}^2$
4. $216\ \text{cm}^3$
5. 0
6. 30,23%
7. $\rho = 2{,}07$ cm; $A = 189{,}61\ \text{cm}^2$; igaz
8. $18\,724{,}57\ \text{cm}^3$; $4681{,}14\ \text{cm}^2$

*9. 39,23%

10. $\frac{A_1}{A_2} = 4$; $\frac{V_1}{V_2} = 8$
11. 3,41 cm
12. $\sqrt[3]{\frac{5}{9}} \cdot m$ (m a kúp magassága)



Valószínűségszámítás, statisztika

1. Geometriai valószínűség

1. 0,29.

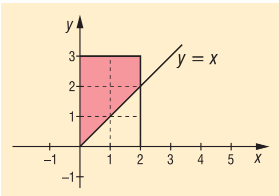
2. 0,25.

3. $y^2 = 48,\ \ y \approx 7.$

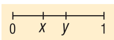
4. 0,5.

5. $1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$

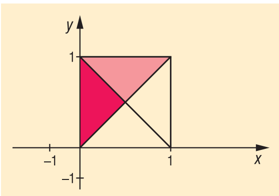
6.



$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

7. 

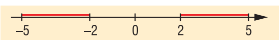
$0 \le x,\ y \le 1.$



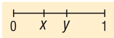
$x + y \le 1,$

$p = \frac{1}{2}.$

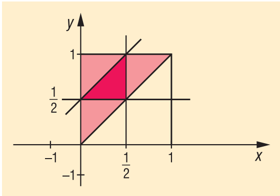
8. $-5 \le b \le 5,$
$b^2 - 4 \ge 0,$
$|b| \ge 2.$



$p = \frac{6}{10}.$

9. 

$0 \le x < y \le 1$.



$$\left.\begin{array}{r} y \ge 1-y \\ x+(1-y) \ge y-x \\ 1-x \ge x \end{array}\right\} p = \frac{1}{4}.$$

Rejtvény: A valószínűség 1, mert a három pont meghatároz egy síkot.

2. Várható érték

1. Tornádóra fogadva a nyereség várható értéke: –0,1.
   Villámra fogadva a nyereség várható értéke: 0.
   Szélvészre fogadva a nyereség várható értéke: –0,1.
   Tehát Villámra érdemes fogadni.

2. 80 Ft.

3. $\frac{2}{16} \cdot 60 + \frac{8}{16} \cdot 15 + \frac{6}{16} \cdot 10 - 20 = -\frac{5}{4}$.

4. $\approx 0{,}275$.

5. Páros: $\frac{1}{2} \cdot 18 - 10 = -1$. 3-mal osztható: $\frac{3}{10} \cdot 40 - 10 = 2$. 5-tel osztható: $\frac{2}{10} \cdot 50 - 10 = 0$.
   Tehát 3-mal oszthatóra érdemes tippelni.

6. $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot 500 - 50 = -6$.

7. 100 Ft helyett 1200 Ft-tal számolva:

$$\frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot 1200 = 0,$$
$$x = 400 \text{ (Ft)}.$$

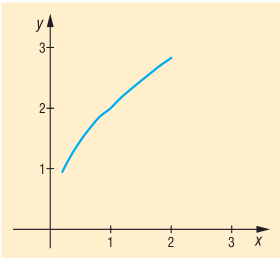
3. Statisztika

1. Magyarország minden tekintetben utolsó.
   Nyugati nyelveket tekintve Szlovénia vezet, Csehország a második.
   Valamely idegen nyelveknél számít, hogy az ország korábban más országokkal együtt alkotott egy államot.

3. *d)* Budapesten szállodát.

4. *a)* Többség az iskolában tanórán találkozott az internettel.
b) Együtt nem 100%.
c) Mit jelent a „megismerkedni”? Lehet, hogy megismerkedett vele, de nem szokott internetezni!

5. *a)*



b) $1{,}68 \approx 1{,}7$

6. Zöldek, mert bár az adatok ugyanazok, az ő grafikonjuk „szemre” erőteljesebb növekedést mutat.

7. Péter javított, ezért az y tengelyen az egység nagyobb legyen.
Péter rontott, ezért az y tengelyen az egység kisebb legyen.

8. *b)* 31,5.
c) 36,8.
d) Ahol az 50%-ot eléri: 1500 – 1999 osztályközepe: 1750 ezer.

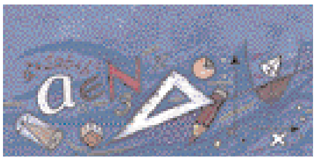
10. *a)* $a_{2004} = 59$.
b) Az egymás utáni tagok távolsága feleződik: 19; 99; 59; 79; 69; 74; ...

$$a_{2004} = 99 - 20\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{2002}\right) \approx 72{,}34$$

11. *a)* Az átlag 3-mal nő, a szórás nem változik.
b) Az átlag és a szorzás is az 5-szöröse lesz.

12. Ha a legnagyobb 15 lenne, a terjedelem miatt a legkisebb 7.
Középen a medián miatt 8, 8 vagy 7, 9 áll. Ezen 4 szám összege 38, a többi 4 összege $64 - 38 = 26$ kellene legyen, de az nem lehet, mert egyik sem kisebb 7-nél.
A legnagyobb szám 14 lehet → a legkisebb 6, középen 7, 9 vagy 8, 8 közül csak 8, 8 lehet, mert a 8 módusz, így a számok: 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 14.

13. *c)* Iskolai végzettség, testvérek száma.



Gondolkodási módszerek — összefoglalás

1. Halmazok, kijelentések, események

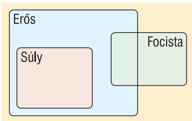
1. $((Z \setminus H) \setminus E) \cup (H \cap E) = (Z \cap \overline{H} \cap \overline{E}) \cup (H \cap E)$

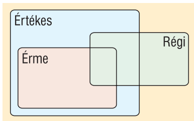
$(p_Z \wedge \neg p_H \wedge \neg p_E) \vee (p_H \wedge p_E)$

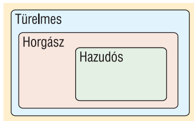
$(E_Z - E_H - E_E) + (E_H \cdot E_E) = (E_Z \cdot \overline{E}_H \cdot \overline{E}_E) + (E_H \cdot E_E)$

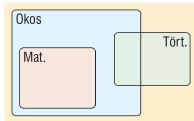
görög saláta, tiramisu

2. *a)* Nem igaz. *b)* Nem igaz. *c)* Nem igaz. *d)* Nem igaz.









3. Április 30 napos. A halmazábrán láthatóan eddig 23 nap volt felsorolva, így a hiányzó szám a 30 – 23 = 7.

a) N napos: 15.

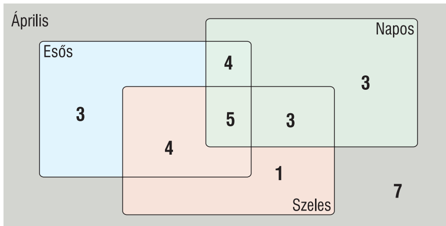
b) $\overline{E}$ nem esős: 14.

c) $\overline{E} \cap \overline{S} \cap \overline{N} = \overline{E \cup S \cup N} \Rightarrow 7$: nem esős, nem szeles és nem napos.

d) $S \cup E$: szeles vagy esős: 20.

e) $\overline{E} \cap \overline{S} = \overline{E \cup S}$ nem esős és nem szeles: 10.

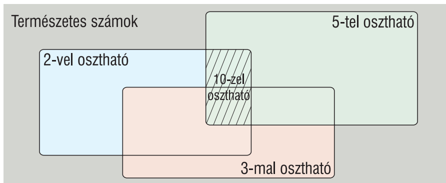
f) $N \cap (S \cup E)$ napos és (szeles vagy esős): 12.



4. *a)* – Minden 2-vel és 5-tel osztható természetes szám osztható 10-zel.

– Van olyan 3-mal osztható szám, amely 10-zel is osztható.

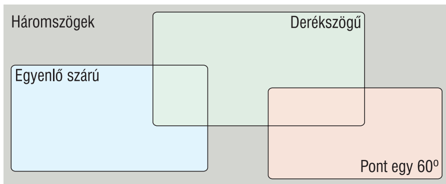
– Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel és 5-tel is.



b) – Van egyenlő szárú derékszögű háromszög.

– Nincs olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek pont egy 60º-os szöge van.

– Ha egy háromszögnek pont egy 60º-os szöge van, akkor nem lehet egyenlő szárú.



2. Kombinatorika, valószínűség

1. $4 \cdot 5 \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot 3 = 60 \cdot 4845 \cdot 28 = 8\,139\,600.$

2. *a)* 26! *b)* 5! · 21! *c)* 3! · 17!

3. *a)* $\binom{12}{3} \cdot 9 = 1980$ *b)* $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \binom{9}{5} = 33264$

4. $\frac{2}{8} = 0,25$

5. Ugyanannyi: $\frac{108}{216}$.

Páros: 3 páros vagy 1 páros és 2 páratlan.
Páratlan: 3 páratlan vagy 1 páratlan és 2 páros. (Szimmetria elv.)

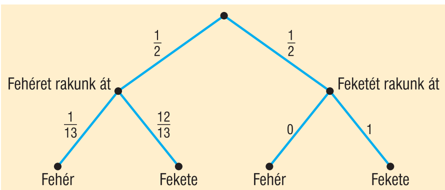
6. 4 többszöröseinek száma + 17 többszöröseinek száma – 4 · 17 többszöröseinek száma = = 100 + 23 – 5 = 118. Így a keresett valószínűség: $\frac{118}{400} = 0,295$.

7. Komplementer: mind különböző $\Rightarrow\ 1 - \dfrac{\frac{50!}{35!}}{50^{15}}$.

8. $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27} = 0,\dot{7}0\dot{3}$

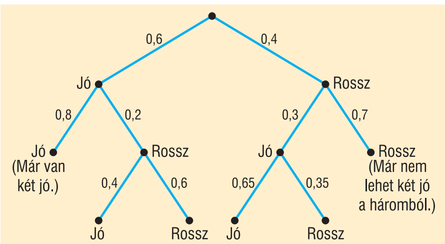
9. *a)* $\frac{2}{6}$ *b)* $\frac{4}{6}$

10.



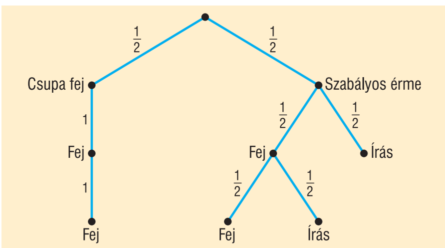
$\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{25}{26} = 0,9\dot{6}1538\dot{4}$

11.



$0,6 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,65 = 0,606$

12.



$P(\text{két fej}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{8}$.

P(szabályos érme, feltéve, hogy két fejet dobunk) $= \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{8}{5}} = \frac{1}{5} = 0,2$.

Algebra és számelmélet — összefoglalás

1. Számok és műveletek

1. 3.

2. Igen, a négyzete is irracionális.

3. Pl.: 2,323323332...

4. 2 km.

5. 96%-át.

6. 17%-os a haszon.

7. $\approx 77\%$, $\approx 29\%$.

8. 30 tanuló.

2. Számelmélet, oszthatóság

1. $2^{18} \cdot 5^{11} \cdot 7^{10}$.

2. A számjegyek összege 3, nem lehet prím.

3. Nincs. p és $p + 11$ közül az egyik páros, $p = 2$-re nem igaz.

4. Igen, $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$, minden prímtényező kisebb 25-nél.

5. *a)* Pl.: $1988 = 11111000100_2$
b) Pl.: $1988 = 13112_6$

6. 7-es, 8-as, 9-es.

7. 1805.

***8.** $n = 5$ és $n = 13$.

3. Hatvány, gyök, logaritmus

1. 3^{25}.

2. 15 nullára végződik.

3. *a)* 18 éves, 70 kg-os tanuló esetén 27 030 m.
b) 1 892 160 kg.

4. *a)* $2^5 = 32$ *b)* $2^{-4} \cdot 3^{-5}$ *c)* $2^{-1} = \frac{1}{2}$

5. *a)* $9-4\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-2\right)^2$ *b)* $16-6\sqrt{7}=\left(3-\sqrt{7}\right)^2$

6. *a)* Az első a nagyobb. *b)* Az első a nagyobb.

7. *a)* $\frac{1}{\sqrt{10}}$; $a>3$ *b)* 6; $b\geq 0$; $b\neq 1$; $b\neq 16$

*8. A kifejezés = $4n$.

9. *a)* 4 *b)* 16 *c)* 6

10. *a)* $\left(\frac{81}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}<\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{5}<\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\frac{25}{9}<27^{\frac{1}{3}}=3<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9<9^{\frac{3}{2}}=27$

b) $7^{\log_{\frac{1}{7}}5}=\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7 3}=\frac{1}{3}<7^{\log_7 5-1}=\frac{5}{7}<7^{\log_{13}1}=1<7^{1-\log_{49}25}=\frac{7}{5}<49^{\log_7 2}=4$

c) $\log_3\frac{1}{27}=-3=\log_2 0{,}125<\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}<\log_{25}5=\frac{1}{2}<\log_{\sqrt{2}}8=6$

11. *a)* $x=10$ *b)* $x=\frac{5^2}{2^3}=\frac{25}{8}=3{,}125$ *c)* $x=1$

4. Műveletek racionális kifejezésekkel

1. *a)* $2a(4a-3)$ *b)* $b^2(5b+1)(5b-1)$ *c)* $7(2c+3)^2$

2. Pl. $d^2 \mid (d-3)+(d-2)^2+(d-1)^3$

3. *a)* 1000 *b)* 2

4. *a)* $\frac{1-3x}{2(x^2-9)}$ *b)* $\frac{-2}{b^2-1}$ *c)* $\frac{-8}{3(x+2)}$

5. Egyenletek, egyenlőtlenségek

1. 7,5 liter 40%-os és 2,5 liter 80%-os.

2. 513.

3. 90 km.

4. 450.

5. 180 km.

6. Legkésőbb 4 órakor.

7. *a)* $n=8;\ 9;\ 11;\ 15$ *b)* $n=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$ *c)* $7<n<23$

8. 21 m széles, 33 m hosszú.

9. I. 20 órát, óránként 20 db. II. 16 óra; óránként 25 db.

10. 30 €-ért vette.

***11.** $p = \frac{1}{4}$; $p = 4$; $p = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

***12.** $p = -20$

13. *b)* $x_1 = -16{,}5$; $x_2 = 1{,}5$ *c)* $x = \frac{1}{2}$

14. *a)* $x = \frac{7}{3}$ *b)* $x = \frac{3}{2}$ *c)* $x_1 = 2$; $x_2 = 0$

***15.** $n = 4$

16. *a)* $x < \frac{3}{2}$ vagy $x > 4$ *b)* $-5 < x < -2$ vagy $-1 < x$

17. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ *b)* $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{4}{3}k\pi$; $\frac{8\pi}{15} + \frac{4}{5}l\pi$; $k, l \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{2} + l\pi$; $l \in \mathbb{Z}$ *d)* $x = 2k\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$; $k, l \in \mathbb{Z}$

18. *a)* $2k\pi + \frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{7\pi}{3} + 2k\pi$; *b)* $2l\pi + \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{3} + 2l\pi$; $l \in \mathbb{Z}$

6. Egyenletrendszerek

1. *a)* Kb. 65 Ft 1 liter üdítő ára.
b) 41 Ft-nak adódik 1 liter ára.
Az ár nem arányos az üdítő mennyiségével.

2. 8 piros; 42 kék.

3. 9 polc; 112 könyv.

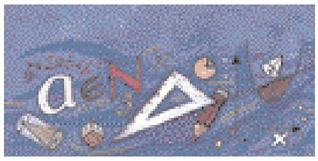
4. *a)* 77-szerese.
b) 98,7%-kal kisebb.

5. *a)* $x = -\frac{3}{5}$; $y = \frac{4}{5}$ *b)* $x_1 = -3$; $y_1 = -1$; $x_2 = \frac{3}{2}$; $y_2 = \frac{1}{2}$

c) $x_1 = 10$; $y_1 = 11$; $x_2 = -10$; $y_1 = -11$

6. *a)* $x_1 = -1$; $y_1 = 19$; $y_2 = 4x_2$; $x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *b)* $x = -\frac{1}{4}$; $y = \frac{7}{4}$

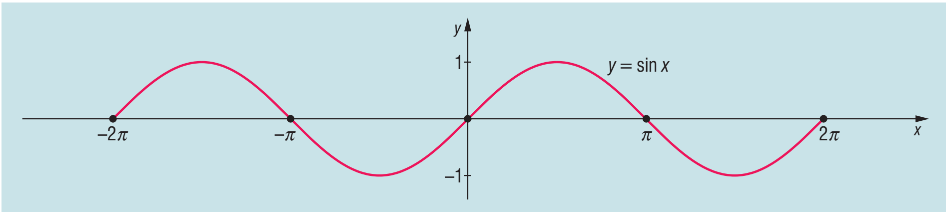
c) $x_1 = 2$; $y_1 = 5$; $x_2 = 2$; $y_2 = -5$; $x_3 = -2$; $y_3 = 5$; $x_4 = -2$; $y_4 = -5$;
$x_5 = 5$; $y_5 = 2$; $x_6 = 5$; $y_6 = -2$; $x_7 = -5$; $y_7 = 2$; $x_8 = -5$; $y_8 = -2$



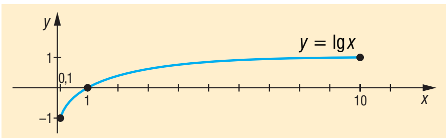
Függvények — összefoglalás

1. A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai

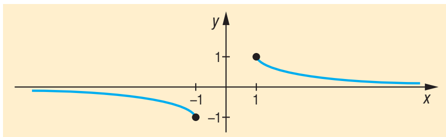
1. *a)*



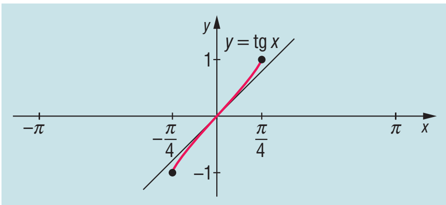
b)



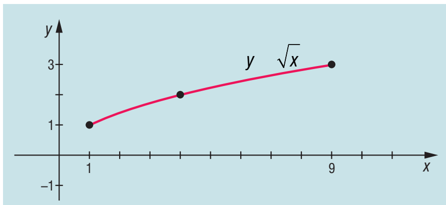
c)



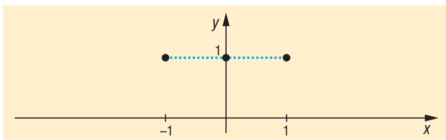
d)



e)



f) A függvény görbéje nem rajzolható meg pontosan, két szakasz mentén mindenütt sűrűn elhelyezkedő pontokból áll.



2. *a)* injektív;
b) egyik sem;
c) egyik sem;
d) szürjektív;
e) bijektív;
f) injektív.

2. Műveletek függvényekkel

1. *a)* $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4$;
b) $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^{x^2}$;
c) $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4^x$;
d) $g \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^{2^x}$.

2. $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$; $f \circ f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$;

$f \circ f \circ \ldots \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, az f n-szer szerepel.

3. *a)* $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x - 3$;

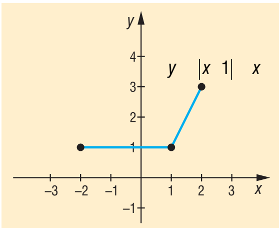
b) $g^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$;

c) $h^{-1}: [0;\ 1] \to [0;\ 1],\ x \mapsto \sqrt{1-x^2}$;

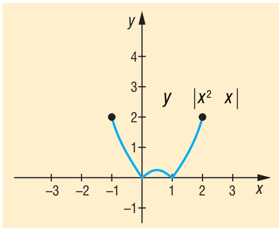
d) $k^{-1}: [0;\ 1] \to [-1;\ 0],\ x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$;

3. Függvénytulajdonságok

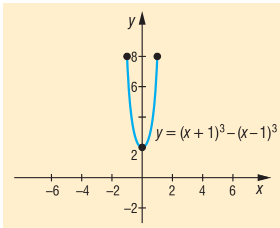
1. *a)*



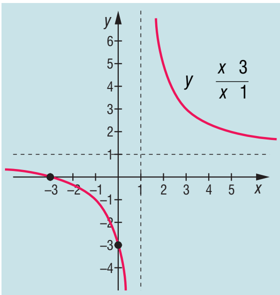
b)



c)

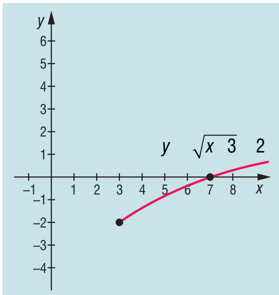


2. *a)*



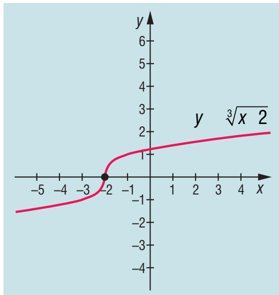
Zérushely: $x = -3$.

b)



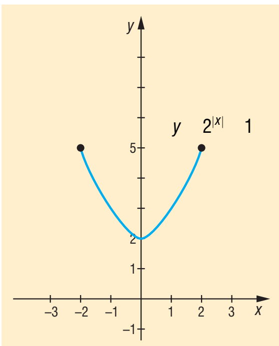
Zérushely: $x = 7$.

c)



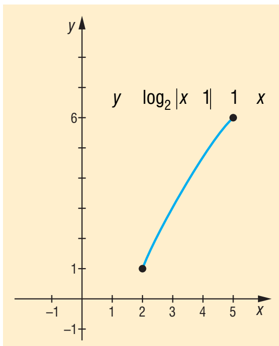
Zérushely: $x = -2$.

3. *a)*



Minimumhely $x = 0$, minimum értéke: 2; maximumhelyek: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, maximum értéke: 5.

b)

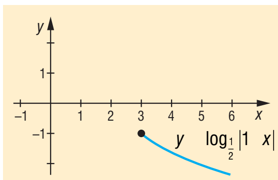


Minimumhely $x = 2$, minimum érték: 1; maximumhely: $x = 5$, maximum érték: 6.

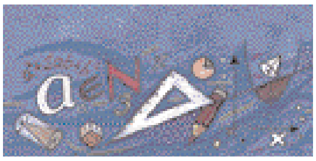
c) A kitűzött feladatban hiba van. A helyes függvény:

$x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} |1-x|$,

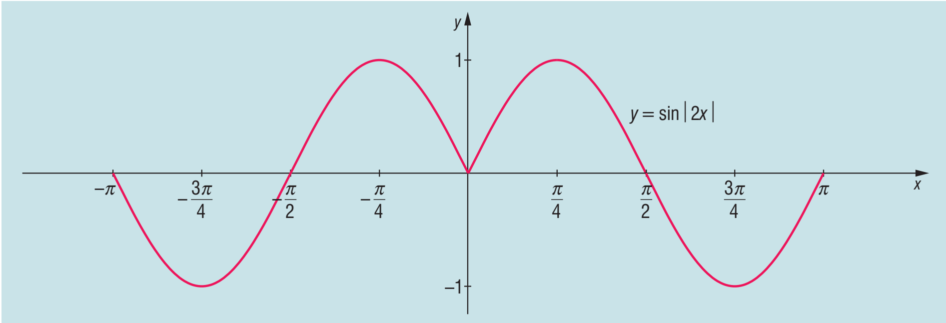
$x \in [3;\ +\infty[$



A függvénynek minimuma nincs (alulról nem korlátos), maximumhelye $x = 3$, a maximum érték: -1.

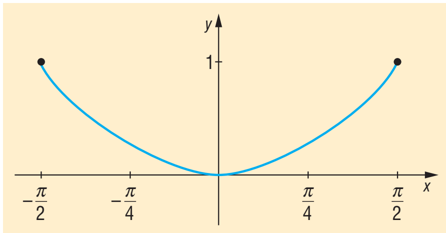


d)



Minimumhelyek: $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$ és $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, a minimum értéke: –1, maximumhelyek: $x_3 = -\frac{\pi}{4}$ és $x_4 = \frac{\pi}{4}$, a maximum értéke: 1, az $x = 0$ helyen helyi minimuma van a függvénynek, a minimum értéke 0.

e) Minimumhely $x = 0$, a minimum értéke: 0, maximumhelyek $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, a maximum értéke 1.



4. A függvény zérushelye: $x = 0$, minimumhelye $x = -1$, a minimum értéke: –1, maximumhelye $x = 1$, a maximum értéke: 1.

5. *a)* Az egyetlen valós gyök: $x = 2$.
b) Az egyetlen valós gyök: $x = 4$.
c) A két valós gyök: $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$.

6. *a)* A kitűzött feladatban hiba van. A helyes feladat:
$$\log_{x-2} x \le \log_{x-2} 4,\quad x > 2,\ x \ne 3.$$
A megoldás: $3 < x \le 4$.
b) A megoldás: $-2 < x < 1$.
c) A megoldások a következő intervallumok: $-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$.

7. *a)* Egy valós gyöke van: $x = \frac{1}{2}$.
b) Két valós gyöke van: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
c) A két valós gyök: $x_1 = 3$ és $x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

8. Nem periodikus, indirekt úton lehet bizonyítani.

Geometria — összefoglalás

1. Alapvető fogalmak

1. *a)* hamis; *b)* igaz

2. *a)* $AB \leq 4$ cm; *b)* igaz

3. A szögek nagysága: 42º, 57º, 72º, 87º, 102º.

4. A hajó az északi iránnyal +105º-ot bezáró, közelítőleg délnyugati irányban halad.

5. Jelölje a park hosszabbik oldalának hosszát a, a rövidebbikét b. Ha $\frac{a}{b} \leq 2$, akkor a közrefogott alakzat négyzet, ha $\frac{a}{b} > 2$, akkor az ösvények és a park határa egy hatszöget fog közre.

6. Legfeljebb 4 pontot kaphatunk így. Nincs mindig megfelelő pont.

7. A metszéspontok száma 40.

8. *a)* 8 térrész; *b)* 15 térrész; *c)* 16 térrész; *d)* 29 térrész.

2. Geometriai transzformációk

2. Két megfelelő négyzet van, csúcsaik rendre (16; 0), 0; 16), (–16; 0), (0; –16), illetve (8; 8), (–8; 8), (–8; -8), (8; –8).

4. *a)* A közös rész egy $\frac{4}{3}$ cm oldalú szabályos háromszög. $K = 4$ cm, $T = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ cm^2 ≈ ≈ 0,77 cm^2.

b) Az egyesítés egy konkáv hétszög. $K = 20$ cm, $T = \frac{68\sqrt{3}}{9}$ cm$^2 \approx 13{,}087$ cm^2.

7. *a)* $A'(-4; 10)$, $B'(2; -6)$, $C'(16; 4)$
b) $A'(-10; 12)$, $B'(-4; -4)$, $C'(10; 6)$

8. A nagyítás 80-szoros, a kép és a vászon távolsága 3,95 m.

3. Vektorok. Szögfüggvények

1. $h \approx 34{,}29$ m.

2. $d \approx 8{,}5$ m.

3. $\alpha \approx 25{,}15º$.

4. *a)* $\sin\alpha = 0{,}6$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{4}{3}$.

b) $\cos\alpha = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

c) $\sin\alpha \approx 0{,}9029$; $\cos\alpha \approx 0{,}4299$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx 0{,}4762$.

d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}+2 \approx 4{,}2361$; $\sin\alpha \approx 0{,}9029$; $\cos\alpha \approx 0{,}4299$.

5. Az osztópontok helyvektorai rendre a *B* csúcstól a *C* csúcs felé haladva:

$$\frac{5\vec{b}+\vec{c}}{6},\ \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3},\ \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3},\ \frac{\vec{b}+5\vec{c}}{6}.$$

6. $\vec{f}_{AB} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{f}_{BC} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\vec{f}_{CA} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$, $\vec{s}_{ABC} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$.

7. *a)* $\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$ *b)* $\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$ *c)* $\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

Az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontja azonos a középvonalak metszéspontjával.

9. $y = -6$

4. Nevezetes síkidomok tulajdonságai

1. *a)* $\alpha = 40°$; $b \approx 7{,}51$ cm; $c \approx 7{,}05$ cm.

b) $a \approx 4{,}97$ cm; $\alpha \approx 41{,}31°$; $\gamma \approx 43{,}69°$.

c) $c \approx 8{,}88$ cm; $\alpha \approx 61{,}19°$; $\beta \approx 73{,}81°$.

d) $\alpha \approx 59{,}36°$; $\beta \approx 81{,}05°$; $\gamma \approx 39{,}59°$.

3. A befogók: $a \approx 18{,}26$ cm; $b \approx 8{,}16$ cm. A hegyesszögek: $\alpha \approx 65{,}92°$; $\beta \approx 24{,}08°$; $T = \frac{68\sqrt{3}}{9}\ \text{cm}^2 \approx 13{,}087\ \text{cm}^2$.

4. *a)* $\alpha \approx 75{,}54°$; $T \approx 17557{,}83\ \text{m}^2$.

b) A maximális területű játéktér oldalai 119,46 m és 73,49 m, területe $T \approx 8779{,}12\ \text{m}^2$.

5. *a)* $\alpha = 50°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 70°$.

b) $a \approx 3{,}06$ cm; $b \approx 3{,}46$ cm; $c \approx 3{,}76$ cm; $T \approx 4{,}99\ \text{cm}^2$.

c) $T_a \approx 1{,}52\ \text{cm}^2$; $T_b \approx 2{,}46\ \text{cm}^2$; $T_c \approx 3{,}6\ \text{cm}^2$.

6. A belső szögfelezők által meghatározott négyszög szögei valamelyik körüljárási irányban: 87,5°; 115°; 92,5°; 65°. Ha egy konvex négyszög belső szögfelezői közrefognak egy négyszöget, akkor az mindig húrnégyszög.

7. *a)* Az oldalfelező pontok által meghatározott négyszög téglalap, így az eredeti négyszög átlói merőlegesek egymásra.

b) Az oldalfelező pontok által meghatározott négyszög rombusz, így az eredeti négyszög átlói egyenlő hosszúak.

8. *a)* $n = 9$;
b) n (a sokszög oldalszáma) lehetséges értékei: 14, 15, 16, 17, 18.

9. A sokszög oldalainak száma: $n = 2k + 3$.

10. A legkisebb szög 117º-os, a legnagyobb 171º-os.

5. Koordinátageometria

1. *a)* $A'(4; 10)$, $B'(8; -4)$, $C'(-6; 2)$
b) $S\left(2; \dfrac{8}{3}\right)$
c) $\left(x - \dfrac{97}{43}\right)^2 + \left(y - \dfrac{83}{43}\right)^2 = \dfrac{126034}{1849}$
d) $K_{ABC} = 2\left(\sqrt{53} + \sqrt{58} + \sqrt{41}\right) \approx 42,6$
e) $T_{ABC} = 86$

2. Az érintő egyenlete: $-3x + 4y = -43$.

3. A csúcsok koordinátái (0; 0), (0; –3), (4; 0), a háromszög területe 6 egység.

4. A $H_1(-3; -5)$ harmadoló pontra illeszkedő érintők egyenlete $x = -3$ és $8x - 15y = 51$, a $H_2(-4; -7)$ harmadoló pontra illeszkedő érintők egyenlete pedig

$$y = \left(4 + \frac{6\sqrt{14}}{7}\right)x + 9 + \frac{24\sqrt{14}}{7} \quad \text{és} \quad y = \left(4 - \frac{6\sqrt{14}}{7}\right)x + 9 - \frac{24\sqrt{14}}{7}.$$

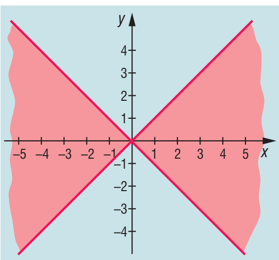
5. A súlypontok halmaza az $y = 2x + \dfrac{1}{3}$ egyenletű egyenes kivéve a $\left(\dfrac{23}{19}; \dfrac{46}{19}\right)$ pontot, ugyanis ekkor nem jön létre háromszög.

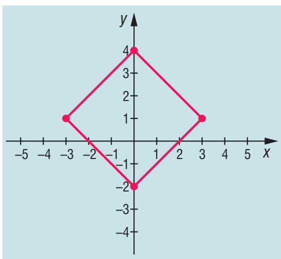
6. *a)* $a_1 = -3$; $a_2 = 1$ *b)* $a = -\dfrac{1}{2}$

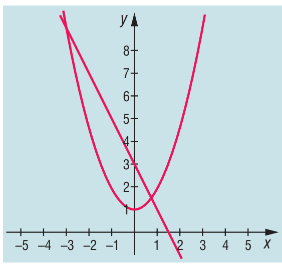
7. $T = 29$

8. A két érintő hajlásszöge $\approx 141,06$.

9. $a = 2\sqrt{3}$; $T = 3\sqrt{3}$.

10. *a)*


b)


c)


Középszintű érettségi gyakorló feladatsorok

4. Feladatsor I. rész

1. Az osztást elvégezve: 1 : 7 = 0,142857..., ezután a maradék újra 1 lesz, így ismétlődnek a számjegyek. A szakaszos tizedestört szakasza 6 jegyből áll. (1 pont)

A 2005 1 maradékot ad 6-tal osztva, így a tizedesvessző utáni 2005-ödik számjegy az 1. (1 pont)

2. A pálca és az árnyéka által meghatározott derékszögű háromszög hasonló a torony és az árnyéka által meghatározott derékszögű háromszöghöz. (1 pont)

Így a torony magassága: $m = 15 \cdot \frac{1}{0,75} = 15 \cdot \frac{4}{3} = 20.$ Tehát a torony 20 m magas. (1 pont)

3. Ránézésre adódik a * = 3 megoldás, hiszen $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$. (1 pont)

Azonban az egyenletnek van más megoldása is. Átrendezve a $3*^2 + * - 30 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek a megoldóképlet alapján két megoldása van: $*_1 = 3$ és $*_2 = -\frac{10}{3}$. Ezek valóban megoldásai az eredeti egyenletnek, hiszen $* \neq 0$. Tehát a * helyére írható számok halmaza $\left\{3; -\frac{10}{3}\right\}$. (2 pont)

Természetesen a 3 pont akkor is jár, ha rögtön a másodfokú egyenlet megoldásával kezd és kapja meg a * = 3 megoldást is.)

4. Az 1. lámpának megfelelő sávban haladó járművek csak az 5. sávban haladókat akadályozzák, így az 1. lámpa csak azért piros, hogy az 5. lámpa zöld lehessen. (1 pont)

Ekkor a 2. és 3. lámpa szintén piros kell legyen, viszont a 4. és a 6. lehet zöld. (1 pont)

5. A hatványozás azonosságait alkalmazva: $z = (2a)^{2b} = 2^{2b} \cdot a^{2b} = (2^2)^b \cdot a^b \cdot a^b = (4a)^b \cdot a^b$. (2 pont)

Ebből $x = 4a$. (1 pont)

6. Ha mindegyik szám ugyanannyival nő (vagy csökken), az átlaguk is annyival nő (vagy csökken), így az első lépés után 22 lesz. (1 pont)

Mivel mindegyik számot megszoroztuk 4-gyel, az átlaguk is 4-szeres lett, azaz 88. Ezután mindegyik számot csökkentettük 10-zel, az átlaguk is 10-zel csökkent, így végül 78 lett. (1 pont)

(Számolhattunk volna végig az öt szám összegével, de mivel a számok száma nem változott, mindegyikkel ugyanazt csináltuk, ezért a fenti megoldás is megfelelő.)

7. A tank 0,7 részének és $\frac{1}{4} = 0,25$ részének különbsége, azaz a 0,45 része 18 liter. (1 pont)

Ekkor a tank $\frac{18}{0,45} = 40$ liter. Tehát az autó tankja 40 literes. (1 pont)

8. A körök helyzete miatt mindkét kör sugara 12 cm. Az *ABC* és az *ABD* háromszögek egyenlő oldalúak, így a $CAD\sphericalangle = CBD\sphericalangle = 120°$. (1 pont)
A teljes szög 360º, és a körív hossza arányos a középponti szöggel, ezért a vastag vonallal jelzett út a 12 cm sugarú kör kerületének $\frac{4}{3}$ része, azaz $\frac{4}{3}\cdot 2\cdot 12\pi = 32\pi \approx 100{,}53$ cm. (1 pont)

9. Mivel minden lehetőség egyformán valószínű, klasszikus valószínűségi modellről van szó, amikor a valószínűség a kedvező és az összes eset számának hányadosa. A $6 \cdot 3 = 18$ versenyző versenyző közül az első három helyezettet a sorrend figyelembe vétele nélkül $\binom{18}{3}$ féleképpen választhatjuk ki, ennyi az összes eset. (1 pont)
Kedvező, ha mind a három dobogós egy iskolából jött, 6 iskola van, ezért ez 6 féleképpen lehetséges. (1 pont)
Tehát a keresett valószínűség: $\dfrac{6}{\binom{18}{3}} = \dfrac{1}{136} \approx 0{,}007.$ (1 pont)
Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a kedvező és az összes eset számolásánál is figyelembe vesszük a sorrendet, ekkor a valószínűséget a következőképpen írhatjuk fel: $\dfrac{6\cdot 3!}{18\cdot 17\cdot 16}$.

10. Az uszoda hosszának 90-szerese 3 km, így az uszoda hossza $3000 : 90 = 33{,}\dot{3}$ m. (1 pont)
A kerülete $3000 : 25 = 120$ m, két szomszédos oldalának összege a kerület fele: 60 m, így a medence szélessége $60 - 33{,}\dot{3} = 26{,}\dot{6}$ m. (1 pont)
A területe $26{,}\dot{6} \cdot 33{,}\dot{3} \approx 888{,}91$ m^2. Tehát a medence területe közelítőleg 889 m^2. (1 pont)

11. A négyzetre emelést elvégezve a következőt kapjuk: $10^{8n^2+16} + 2 \cdot 10^{4n^2+8} + 1$. (1 pont)
Ebben két darab 1-es és egy darab 2-es számjegy szerepel, azaz a számjegyek összege 4. (2 pont)

12. Mivel mindegyik háromjegyű számot ugyanakkora eséllyel választhatjuk, klasszikus valószínűségi modellről van szó.
Háromjegyű szám $999 - 99 = 900$ darab van, ennyi az összes lehetőség. (1 pont)
Ahhoz, hogy $\log_2 N$ egész szám legyen, *N* a 2 valamely egész kitevős hatványa kell legyen. A 2 hatványok közül a háromjegyűek: 128, 256, 512. (1 pont)
Tehát a keresett valószínűség: $\dfrac{3}{900} = \dfrac{1}{300}$. (1 pont)

4. Feladatsor II. rész / A

13. *a)* Ha *x* a kiírt ár, 10% engedmény után 0,9*x* lesz. (2 pont)
A 900 forintos áru 20% haszonnal $1{,}2 \cdot 900 = 1080$ Ft. (2 pont)
Ezek egyenlőségéből $x = \dfrac{1080}{0{,}9} = 1200$ Ft. Tehát a kereskedőnek 1200 Ft-os árat kell kiírni. (2 pont)

b) A háromszori csökkenés után az ár: 1200 · 0,9 · 0,9 · 0,9 = 1200 · 0,729 = 874,8 Ft. (3 pont)

Ez az eredeti ár 0,9 · 0,9 · 0,9 = 0,729 része, azaz 72,9%-a. (3 pont)

14. *a)* Átalakítva az egyenletet: $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2 - \sqrt[5]{x} - 2 = 0$. $\sqrt[5]{x} = a$ jelöléssel az egyenlet: $a^2 - a - 2 = 0$, a megoldóképlet alapján $a_1 = 2$ és $a_2 = -1$. (3 pont)

Ebből $x_1 = 2^5 = 32$ és $x_2 = (-1)^5 = -1$. Az egyenlet megoldásai tehát a 32 és a -1. (2 pont)

b) A második egyenlet 2-szerese: $6x + 6y = 12xy$. Így $xy = 1$. (2 pont)

Az első egyenletből $x + y = 2$, amiből $y = 2 - x$. (2 pont)

Az $xy = 1$ egyenletbe behelyettesítve: $x(2 - x) = 1$, azaz $x^2 - 2x + 1 = 0$, másképp $(x - 1)^2 = 0$, aminek egy megoldása az $x = 1$. (2 pont)

Ekkor $y = 2 - 1 = 1$.

Tehát az egyenletrendszer megoldása $x = 1$ és $y = 1$. (1 pont)

15. *a)* Mivel *E* és *F* harmadolópontok, $DE = EF = FC$, így az *ADE*, *AEF*, *AFC* háromszögek területe egyenlő, hiszen magasságuk ugyanaz. Hasonlóképpen *G*, *H* harmadolópontok, így $AG = GH = HB$, az *ACG*, *GCH*, *HCB* háromszögek területe egyenlő, mert magasságuk ugyanaz. Tehát igazságos az osztozkodás, ha mindegyik testvér egy-egy darabot kap az *ABC* és az *ACD* háromszögből is. (5 pont)

b) A három testvér egy-egy darabot kap az *ABC* háromszögből, az *ACG* háromszöget 3 gyerek kaphatja, a *GCH* háromszöget ezután már csak 2 gyerek, ekkor a *HCB* háromszög egyértelműen a harmadiké, ez 3 · 2 = 6 lehetőség. (3 pont)

Ugyanígy az ADC háromszögben levő háromszögeket is 6-féleképpen oszthatják el. (1 pont)

Mivel mindegyik testvérnek mindkét nagy háromszögből kell kapni egyet-egyet, a lehetőségek száma: 3 · 3 = 9. Tehát 9-féleképpen osztozhatnak igazságosan az örökségen. (3 pont)

16. *a)* A számtani sorozat tagjai: a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, ..., $a_{50} = a_1 + 49d$, a_{51}, $a_{51} + d$, $a_{51} + 2d$, ..., $a_{100} = a_{51} + 49d$. (1 pont)

Így az első 50 és a következő 50 tag különbsége: $50 \cdot (a_{51} - a_1) = 2500$. (2 pont)

Mivel $a_{51} = a_1 + 50d$, így $d = 1$. (2 pont)

Az első 50 tag összege: $50 \cdot \dfrac{2a_1 + 49}{2} = 200$, amiből $a_1 = -20{,}5$. Tehát a sorozat első tagja: $-20{,}5$. (2 pont)

b) Könnyebb dolgunk van, ha a répában maradt lé arányát számoljuk. Az első nyomás után a répában levő lé $\dfrac{3}{4}$ része marad benne, a második után a $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$, s.í.t., az n-edik nyomás után a $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ része marad benne, ennek kell $\dfrac{1}{3}$-nál kisebbnek lenni: $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < \dfrac{1}{3}$. (3 pont)

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $n \cdot \lg\dfrac{3}{4} < \lg\dfrac{1}{3}$, amiből $n > \dfrac{\lg\frac{1}{3}}{\lg\frac{3}{4}}$, mert

$\lg\frac{3}{4} < 0$. Ebből $n > 3{,}8$. Tehát legalább 4 nyomás szükséges, hogy a répában levő lének legalább $\frac{2}{3}$ részét kinyomjuk. (Erre az eredményre logaritmus nélkül, próbálgatással is eljuthatunk.) (2 pont)

Megjegyzés: Természetesen ugyanerre az eredményre juthatunk, ha a répából kinyomott lét számoljuk, az n-edik nyomás után ez:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{\frac{3}{4}-1}>\frac{2}{3}.$$

4. Feladatsor II. rész / B

17. *a)* A lányok számát L-lel, a fiúkét F-fel jelölve a lányok pontjainak összege $83L$, a fiúké $71F$, így az osztályátlag: $\frac{83L+71F}{L+F}=80$. (4 pont)

Ebből $L = 3F$, azaz a lányok száma 3-szorosa a fiúk számának. (2 pont)

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha meggondoljuk, hogy a fiúk átlagpontszáma 9-cel kevesebb, a lányoké 3-mal több, mint az osztályátlag. Így az osztálylétszám $4F$, aminek $3F$ a $\frac{3}{4}$ része, vagyis a 75%-a. Tehát a lányok száma 75%-a az osztálylétszámnak. (2 pont)

b) Ha valaki minden kérdésre helyesen válaszolt, $5 \cdot 25 = 125$ pontot szerzett, ezért 127 pontot nem lehet szerezni, András biztosan tévedett. (2 pont)

A következő legmagasabb pontszám úgy lehetséges, ha valaki 24 kérdésre jó választ adott, 1-et üresen hagyott, ez $5 \cdot 24 + 1 = 121$ pontot jelent. Tehát Bence biztosan tévedett, míg Csaba mondhatott igazat. (3 pont)

A következő legmagasabb pontszám úgy lehetséges, ha valaki 24 kérdésre jó választ adott, 1-re rosszat, ez 120 pontot ér.

A következő lehetséges pontszám 23 jó válasz és 2 üres esetén lehet, ez $23 \cdot 5 + 2 = 117$. Ezért Dénes Biztosan tévedett. (2 pont)

23 jó, 1 üres, 1 rossz válasz 116 pont, 23 jó, 2 rossz válasz 15 pont, ezért Endre mondhatott igazat. (2 pont)

18. A Földön levő vizek $51{,}37 + 25{,}2 + 20{,}72 = 97{,}29\%$-a sós víz. (Másképp: $100 - 2{,}71 = 97{,}29\%$).

Így a sós víz térfogata $0{,}9729 \cdot 1387{,}5 \cdot 10^{15} \approx 1350 \cdot 10^{15}\ \text{m}^3 = 1{,}35 \cdot 10^{18}\ \text{m}^3$, a maradék édesvíz térfogata $37{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{m}^3$. (5 pont)

A sós víz tömege: $1035 \cdot 1{,}35 \cdot 10^{18} = 1397{,}25 \cdot 10^{18} \approx 1{,}397 \cdot 10^{21}$ kg.

Az édesvíz tömege: $1000 \cdot 37{,}5 \cdot 10^{15} \approx 0{,}038 \cdot 10^{21}$ kg.

Tehát a Földön levő víz tömege: $1{,}435 \cdot 10^{21}$ kg. (4 pont)

A feladat megoldásából láthatjuk, hogy a Földön levő víz tömege nagyobb, mint a levegőé.

19. *a)* A torony alapjánál $y = 0$, ez akkor lehet, ha $\dfrac{x}{62,5} = 1$, azaz $x = 62,5$ m. A torony szélessége ennek kétszerese, azaz 125 m. (3 pont)

b) A 2. szinten y = 115,75, így $115,75 = -91 \cdot \ln \dfrac{x}{62,5}$, amiből $x = 62,5 \cdot e^{-\frac{115,75}{91}} \approx$ $\approx 17,52$ m. Ez a torony szélességének fele, így a 2. szinten a torony szélessége: 35,04 m $\approx$ 35 m. (5 pont)

c) A toronyból a horizonthoz vezető szakasz a gömböt érinti, így a következő ábrát rajzolhatjuk, ahol a kör a földgömb középpontján átmenő síkmetszete, HT a kör érintője, OH a sugara, OT pedig a Föld sugaránál a terasz magasságával nagyobb. Így a Pitagorasz-tétel alapján:

$$HT^2 = 6370276^2 - 6,37^2 \cdot 10^{12} = 40,5804 \cdot 10^{12} - 40,5769 \cdot 10^{12} = 35 \cdot 10^8,$$

amiből $HT = 5,916 \cdot 10^4$ m $\approx 60 \cdot 10^3$ m. Tehát a 3. szinten levő teraszról 60 km-re lehet ellátni. (9 pont)