Sokszínű matematika 11.

A KITŰZÖTT FELADATOK EREDMÉNYE

Összeállította:

FRÖHLICH LAJOS

gimnáziumi tanár

A Kombinatorika, gráfok és a Valószínűségszámítás, statisztika
c. fejezeteket szakmailag ellenőrizte:

DR. HAJNAL PÉTER

egyetemi docens

Tartalom

Kombinatorika, gráfok

1. Fibonacci-számok

1. Legyen a_n az n-edik lépcsőfokra való feljutások száma. $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$. Ha az n-edik lépcsőfokra lépünk, akkor az utolsó lépésünk lehetett egylépcsős, illetve kétlépcsős. Ez alapján $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ebből adódik, hogy $a_n = f_{n+1}$.

2. Legyen b_n az n szintes ház kifestéseinek száma.
   a) $b_3 = 5$; *b)* $b_4 = 8$; *c)* $b_5 = 13$.
   Ha n szintes a ház ($n > 5$), akkor két egymást kizáró lehetőség előtt állunk:
   1) tetszőlegesen kifestjük az alsó $n-2$ szintet, majd egy kék szint jön, és legfelül fehér szint lesz;
   2) tetszőlegesen kifestjük az alsó $n-1$ szintet, és a legfelső szint kék színt kap.
   Ez alapján $b_n = b_{n-2} + b_{n-1}$. Ebből adódik, hogy $b_n = f_{n+2}$.

Rejtvény: A hiba a bal oldali képen van. A képről úgy tűnik, hogy a piros háromszög átfogója és a trapéz egyik oldala kiadja az összerakott téglalap egyik átlóját. Ez azonban nem igaz. Számoljuk ki a két szakasz meredekségét! A bal oldali képen látható 169 összterületű négy alakzat az átló környékén egy kicsinyke részt többszörösen fed.

2. Permutációk, variációk

1. *a)* $4! = 24$;
   b) $4! - 3! \cdot 2 = 12$, mert arra, hogy Bea és Cili egymás mellé üljön, $3! \cdot 2$ féle lehetőség van.
   A kerek asztal esetén először is értelmezni kell, hogy mikor tekintünk két leülést különbözőnek. Több lehetőség van.
   – Ha a négy pozíciót (széket) megkülönböztethetőnek gondoljuk, akkor bármely két ültetést is meg tudunk különböztetni, amikor valaki különböző székre kerül. Ekkor teljesen új ültetést kapunk, ha mindenki eggyel balra átül.
   – A második lehetőség, hogy mindenki megjegyzi, ki ül tőle balra és jobbra. Ha ez az információ két ültetés esetén különbözik, akkor a két ültetést különbözőeknek tekintjük. Ekkor ha mindenki eggyel balra átül, akkor az új ültetést nem tekintjük az előzőtől különbözőnek. Ha viszont egy ültetést tükrön keresztül nézünk (legalább három résztvevő esetén), akkor más ültetéshez jutunk, mert a jobb és bal szomszédság felcserélődik.
   – A harmadik lehetőség, hogy mindenki csak annyit jegyez meg, hogy kik között ül. (Tehát például Anna annyit jegyez meg, hogy Bea és Cili között ül, de nem tudjuk meg, hogy ki ül a balján és ki a jobbján.) Ekkor egy ültetés tükörképét nem tekintjük új ültetésnek.
   A megoldásban mi a középső megállapodással élünk, azaz az elforgatott ülésrendet nem tekintjük különbözőnek, de a tükörképet igen.
   c) Megkérjük Annát, hogy sorolja fel, ki ült a jobbján és annak a jobbján, illetve ki ül a balján. (A körszerű ülésrendet „felvágjuk” Annánál, így a másik három résztvevő közt egy sorrendet kapunk.) Ez pontosan leírja az ülésrendet. Összesen $3! = 6$ lehetőség van.
   d) Beának és Cilinek szemben kell ülni. Két lehetőség van aszerint, hogy Anna Bea jobbjára vagy baljára ül.

2. Minden jegyre 6 lehetőség van, így 6^4 féle négyjegyű szám lehet. Minden helyi értéken mind a 6 számjegy 6^3-szor fordul elő, így az összeg

$$6^3(1+\ldots+6)+6^3(10+\ldots+60)+6^3(100+\ldots+600)+6^3(1000+\ldots+6000)=$$
$$=6^3\cdot 23\,331=5\,039\,496.$$

3. 20 db.

4. $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$ pozitív osztói a $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$ alakú számok, ahol $a\in\{0, 1, 2, 3\}$, $b\in\{0, 1, 2\}$ és $c\in\{0, 1\}$. Ez 24 lehetőség. 4800-nak 42, 5484-nek pedig 12 darab pozitív osztója van.

5. A jó elhelyezésnél a bástyák különböző sorba és különböző oszlopba esnek, azaz minden sorban egy bástya áll (és minden oszlopban is). Az első sor bástyája nyolc helyen állhat. Ezek után a második sor bástyája már csak hét pozíciót foglalhat el és így tovább. Összesen $8\cdot 7\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=5040$ lehetőség van.

6. 9333.

7. 10 db.

8. Az egyes jegyekre a lehetőségek száma 3; 2; 1; 3; 2; 1. Így a számra $3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1=36$ lehetőség van.

9. *a)* $2^5=32$;
b) $2^3+2^3=16$;
c) $2^3+1=9$;
d) legalább 6 beteg kell.

10. *a)* $9\cdot 10\cdot 10\cdot 4=3600$;
b) A tankönyv 1–3. kiadásában:
Csoportosítsuk a megszámlálandó számokat utolsó négy számjegyük szerint. Erre a négy számjegyre 10^4 lehetőség van. Ezek közül 9^4 nem tartalmazza a 3-as számjegyet, 10^4-9^4 darab tartalmazza a 3-as számjegyet.
Ezen utóbbi lehetőségek közül bármelyikhez három összeszámlálandó szám tartozik, hiszen az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ számjegyek közül kell egy elsőt kiválasztani, és már csak a 3-mal való oszthatóságra kell ügyelnünk. A 9 kiterjesztés közül pontosan három lesz jó. Ez $3\cdot(10^4-9^4)$ lehetőség.
A 9^4 darab 3-ast nem tartalmazó végződés között lesznek 3-mal oszthatók és 3-mal nem oszthatók. A hárommal oszthatók 3-mal, 6-tal vagy 9-cel kezdve maradnak 3-mal oszthatók. Ahhoz, hogy a 3-as számjegyet is tartalmazzák, ahhoz a 3-as számjegyet kell a kezdetnél használnunk. Minden ilyen végződés egy összeszámlálandó számot ad. A 3-mal nem osztható végződések nem adnak összeszámlálandó számot (ebben az esetben a 3-as számjegy felhasználása és a 3-mal való oszthatóság nem összeegyeztethető).
A megoldás befejezéseként belátjuk, hogy a 9^4 darab végződés közül pontosan $1/3\cdot 9^4=$ $=3\cdot 9^3$ darab lesz 3-mal osztható. Ehhez a 3-ast nem tartalmazó végződéseket utolsó három számjegyük szerint csoportosítjuk. Ezek mindegyike a $\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ egy elemével kezdhető, amely kilenc lehetőség közül pontosan három vezet 3-mal osztható eredményhez.
Így a válasz: $3\cdot(10^4-9^4)+3\cdot 9^3$.

A 4. kiadástól:
Inkább azt számoljuk össze, amelyik nem tartalmazza a 3-as számjegyet.
Ezek száma $8 \cdot 9^4$. Összesen $9 \cdot 10^4$ darab ötjegyű pozitív egész szám van a tízes számrendszerben.
Tehát $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4 = 37512$ darab ötjegyű szám tartalmazza a 3-as számjegyet.

Rejtvény: Igen, megszabadulhatnak.
A feladatnak két változata van: tudják, hogy megérkezésükkor milyen állapotban van a lámpa, illetve nem tudják.
Az első változat (amikor feltesszük, hogy leoltott lámpához érkeznek a rabok) egy kicsit könnyebb. Ezzel kezdjük. A rabok kijelölnek maguk közül egy számlálót, aki információt gyűjt és aki az összes rab sétáltatását be fogja jelenteni. Az összes többi (99) rab feladata, hogy elküldje azt az információt, hogy volt már sétálni. Ehhez mindegyikük a következőt teszi: Az első alkalommal, amikor sétálni megy és a lámpa nem ég, akkor felgyújtja a lámpát. A felgyújtott lámpa lesz az „üzenet”, hogy ő már volt sétálni. A további sétálásoknál a leoltott lámpát úgy hagyja (csak egyszer küld üzenetet). Ha a sétáltatásnál felgyújtott lámpát lát, akkor úgy hagyja. (Tudja ugyanis, hogy ez egy üzenet, amelyet nem szabad megzavarni.) Ha a számlálónak kinevezett rab felgyújtott lámpát lát, akkor leoltja (jelzi a többieknek, hogy újból várja az üzeneteket), és megjegyzi, hogy egy rab jelzett neki. Amikor 99-szer leoltotta a lámpát (99 rab egy-egy üzenete eljutott hozzá), akkor bejelenti, hogy mindenki sétált.
Ha a rabok nem ismerik a lámpa kezdeti állapotát, akkor a fenti megállapodás nem lesz jó. A számláló a 99-edik lámpaoltás után nem tudja, hogy 99 üzenetet kapott-e, vagy pedig egyszer leoltotta a kezdetben égő lámpát, és csak 98 üzenet jutott el hozzá. Ebben az esetben abban állpodhatnak meg, hogy a számlálón kívül minden rab kétszer üzenjen. Azaz az első két olyan sétáján, amikor leoltott lámpával találkozott, gyújtsa fel azt. (Előfordulhat, hogy a raboskodása során az 1000-edik és 2020202017-edik sétája.) Máskor ne tegyen semmit. A számláló 198 lámpaleoltás után jelezzen. Ekkor sem tudja megkülönböztetni azt a két esetet, amikor 198 üzenetet kapott, illetve egy kezdeti lámpaoltás után csak 197 üzenetet gyűjtött össze. Abban azonban biztos lehet, hogy mind a 99 rabtársától kapott jelzést a sétálásról.

3. Ismétlés nélküli kombinációk, Pascal-háromszög

1. *a)* $\binom{32}{8} = 10\,518\,300.$

b) A piros hetes mellé választunk még 7 lapot $\binom{31}{7} = 2\,629\,575$.

c) Az összes lehetőségből kivonjuk azok számát, amelyekben nincs piros.

$\binom{32}{8} - \binom{24}{8} = 9\,782\,829.$

2. $\binom{8}{3} = 56$ háromszög van, ezek közül 3 különböző.

3. $\binom{32}{5} = 201\,376.$

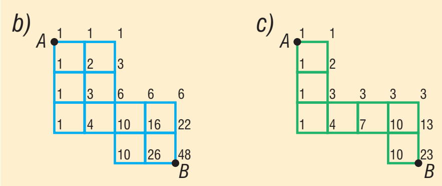
4. Maximum $\binom{12}{2} = 66$ metszéspont lehet.

5. Egyeneseinket egyesével rakjuk le az „üres” síkra. Kezdetben egy részből áll a sík, majd minden egyenes új síkrészeket alkot a korábbiak szétvágásával. Minden új egyenesnél számoljuk össze, hogy legfeljebb hány új síkrészt alakít ki: $1+(1+2+3+4+5+6)=22$. Ennyi síkrész ki is alakul, ha egyeneseink között nincsenek párhuzamosak, és nincs három olyan, amely közös ponton halad át.

6. *a)* $\binom{8}{4}=70$-féle út. 8 lépésből 4 db jobbra lépést választunk.

b) Minden csúcshoz odaírjuk, hányféleképpen juthatunk oda. Ez összesen 48-féle út.

c) 23-féle út.



7.

									1									
								1		1								
							1		2		1							
						1		3		3		1						
					1		4		6		4		1					
				1		5		10		10		5		1				
			1		6		15		20		15		6		1			
		1		7		21		35		35		21		7		1		
	1		8		28		56		70		56		28		8		1	
1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

8. A bal felső M-től kell indulnunk, és 5 lépést kell megtennünk. Minden lépésben 2 lehetőségünk van. Tehát a hó 2^5-féleképpen olvasható le.

9. A testátlók számolásához összeszámoljuk a csúcsok által meghatározott szakaszokat. Ezek tartalmazzák a test éleit, a lapok átlóit és a testátlókat. A többletet levonjuk a csúcspárok számából.

a) A dodekaédernek $\frac{12\cdot 5}{3}=20$ csúcsa van. Ezeket $\binom{20}{2}$-féleképpen köthetjük össze. Ezek közül $\frac{20\cdot 3}{2}=30$ él, az ötszöglapokon pedig 12 · 5 lapátló van. Így összesen $\binom{20}{2}-30-60=100$ testátló van.

b) Az ikozaédernek $\frac{20\cdot 3}{5}=12$ csúcsa és $\frac{12\cdot 5}{2}=30$ éle van. A háromszöglapoknak nincsenek átlói. Így az ikozaéder $\binom{12}{2}-30=36$ testátlója van.

10. k db csapat szerepel, $\binom{k}{2}$ az összes meccsek száma, hátra van $\frac{2k}{2}-k$ meccs, és már megtartottak 77 meccset, így

$$k+77=\binom{k}{2},$$

innen $k=14$. Tehát 14 csapat szerepel.

11. *a)* A legkevesebb forduló esetén háromszor kell 4 személlyel felmennie a liftnek. Az első két lift utasait kell kiválasztanunk (a harmadik liftben a kimaradtak utaznak).

$$\text{Ez } \binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}=34\,650 \text{ lehetőség.}$$

b) A legkevesebb fordulóhoz négyszer megy fel a lift. Egyszer három, a többi esetben pedig négy emberrel. Négy lehetőséget különböztetünk meg aszerint, hogy melyik fordulóban lesz a hármas utazás. Mindegyik esetet az előző rész alapján számolhatjuk ki. A válasz:

$$\binom{15}{3}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}+\binom{15}{4}\cdot\binom{11}{3}\cdot\binom{8}{4}+\binom{15}{4}\cdot\binom{11}{4}\cdot\binom{7}{3}+\binom{15}{4}\cdot\binom{11}{4}\cdot\binom{7}{4}.$$

12. Szorozzuk össze az egyes embereknek való osztások lehetőségeinek számát:

$$\binom{32}{4}\cdot\binom{28}{4}\cdot\binom{24}{4}\cdot\binom{20}{4}\cdot\binom{16}{4}\approx 69\cdot 10^{18}$$

13. Minden kereszteződő kézfogásban négy ember vesz részt, és az emberek közül bármely négy esetén pontosan egy kereszteződő kézfogás lesz. Így a kereszteződő kézfogások száma azonos a 10 emberből kiválasztható négyesek számával, azaz $\binom{10}{4}=210$-zel.

4. Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció

1. *a)* $\binom{5}{0}x^5-\binom{5}{1}x^4\cdot 2+\binom{5}{2}x^3\cdot 4-\binom{5}{3}x^2\cdot 8+\binom{5}{4}x\cdot 16-\binom{5}{5}\cdot 32$

b) $\binom{5}{0}3^5\cdot n^5+\binom{5}{1}3^4\cdot n^4\cdot 2+\binom{5}{2}3^3\cdot n^3\cdot 2^2+\binom{5}{3}3^2\cdot n^2\cdot 2^3+\binom{5}{4}3n\cdot 2^4+\binom{5}{5}2^5$

c) $\binom{10}{0}y^{10}-\binom{10}{1}y^9+\binom{10}{2}y^8-\ldots+\binom{10}{10}y^0$

d) $\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}b^n$

2. *a)* $(x-1)^4$; *b)* $(a+2)^5$.

3. A feladat nem szól arról, hogy ki az a Péter. Ezt a megoldás előtt tisztázni kell.
A legegyszerűbb megállapodás, hogy a csapatnak egyetlen tagját hívják Péternek.
Más megállapodás lehet az is, hogy egyik tagot sem hívják Péternek (pl. női csapatról van szó).
Az is elképzelhető, hogy olyan férfi csapatról van szó, amelyben mindegyik játékosnak Péter a keresztneve. Ezek a megállapodások természetesen mind más-más feladathoz vezetnek. Mi a legegyszerűbb megállapodással élünk.
a) $2^6=64$; *b)* $2^5=32$; *c)* $2^5=32$.

4. $\frac{(18+7)!}{18!7!}=480\,700.$

Analóg feladat: 18 golyót helyezünk el 8 rekeszben. A 18 golyót és a 7 rekeszfalat permutáljuk úgy, hogy sem a golyókat, sem a falakat nem tudjuk megkülönböztetni egymástól. Lásd a 4. példa megoldását.

5. *a)* Minden megoldáshoz rakjunk le x darab + jelet, majd egy | elválasztójelet, azután y darab + jelet, ismét egy | elválasztójelet, s végül z darab + jelet. Így 11 jellel leírtunk egy megoldást (ahogy leírtunk egy növényrendelést a 4. példában). A megoldások száma

$$\binom{11}{2}=55.$$

b) Az $x+y+z=9$ egyenlet ekvivalens az $(x-1)+(y-1)+(z-1)=6$ egyenlettel.
Az $x+y+z=9$ egyenlet megoldása a pozitív egészek körében ekvivalens az $x'+y'+z'=6$ egyenlet megoldásával a természetes számok körében. Ebből adódik a két egyenlet megoldásszámának azonossága. A második egyenletnek – az *a)* pont megoldási módszerével – $\binom{8}{2}=28$ megoldása van.

c) Végtelen sok, minden $(x;\, y;\, 9-x-y)$ $x,\, y\in\mathbb{Z}$ alakú számhármas.

5. Vegyes összeszámlálási feladatok (kiegészítő anyag)

1. x lány és y fiú, így

$$6y=8x,$$
$$6y+5=3x+4y.$$

Tehát 15 lány és 20 fiú tanuló volt.

2. A második, harmadik és negyedik tulajdonságoknak minden $(6m)^2$ $(m\in\mathbb{Z}^+;\, m\neq 1)$ alakú szám megfelel, és ezek nem kétjegyűek és nem prímek. Végtelen sok ilyen szám van.

3. $5^3=125$-féleképpen.

4. Először se a tigrisek, se az oroszlánok között ne tegyünk különbséget. Legyen n db oroszlán és k db tigris. Állítsuk sorba a tigriseket, és tegyünk közéjük 1-1 oroszlánt. Így $n-(k-1)$ db oroszlán marad, melyeket ezek után a tigrisekhez képest próbálunk elhelyezni. Ezt

$$\frac{(k+n-(k-1))!}{k!(n-(k-1))!}\text{-féleképpen}$$

tehetjük meg.
Mivel az állatok különbözőek, szorzunk $k!$-sal, ill. $n!$-sal.
A sorbaállítások száma tehát

$$\frac{(k+n-k+1)!}{k!(n-k+1)!}\cdot n!\cdot k!=\frac{(n+1)!n!}{(n-k+1)!},$$

5 oroszlán és 4 tigris esetén $\frac{6!\cdot 5!}{2!}=43\,200$ lehetőség van.

Más megoldás:

Képzeljük el, hogy az idomár először az oroszlánokat helyezi el, majd a tigriseket „illeszti" az oroszlánok közé. Így először az öt oroszlánt állítja sorba (5! = 120 lehetőség). Ezek meghatároznak hat (oroszlánokhoz viszonyított) pozíciót: legelső hely, négy darab „köz" és legutolsó hely. Két tigris az oroszlánokhoz képest nem kerülhet ugyanoda, mert akkor egymás mellett állnának. A hat pozícióból ki kell választanunk azt a négyet ($\binom{6}{4}=15$ lehetőség), ahová tigris kerül, majd a kiválasztott helyekre el kell helyeznünk a tigriseket (4! = 24 lehetőség). Összesen 120 · 15 · 24 = 43200 lehetőség van.

A megoldás menetéből (is) következik, hogy nincs megoldás, ha a tigrisek száma nagyobb, mint az oroszlánok száma. Ha $k \le n+1$, akkor az általánosítás egyszerű: $n!\cdot\binom{n+1}{k}\cdot k!$.

5. Először ne legyen különbség a piros és a kék golyók között. Tegyük le a 3 fehér golyót, majd rakjunk közéjük 1-1 golyót. A megmaradt 5 golyót kell elhelyeznünk a 4 lehetséges helyen, majd ki kell választanunk, hogy melyik kettő legyen kék. Tehát

$$\frac{(3+5)!}{3!\cdot 5!}\cdot\binom{7}{2}=1176.$$

Más megoldás:

Először rakjuk le a piros és kék golyókat. ($\binom{7}{2}=21$ lehetőség, hiszen a hét golyó sorában a két kék golyó helyét kell kiválasztanunk.) A lerakott hét golyóhoz viszonyítva kialakuló nyolc pozíció egyikébe sem eshet több fehér golyó. Így a fehérek elhelyezéséhez a nyolc pozícióból ki kell választanunk azt a hármat, ahová a fehér golyók kerülnek ($\binom{8}{3}=56$ lehetőség). Ez összesen 21 · 56 = 1176 lehetőség.

6. *a)* 40^3. (Minden almánál 3 lehetőség.) *b)* $\frac{(40+2)!}{40!\cdot 2!}=861.$ *c)* $\frac{(37+2)!}{37!\cdot 2!}=741.$

d) Ha n gyerek és k különböző alma van, akkor n^k lehetőség van a szétosztásra. Ha n gyerek és k megkülönböztethetetlen alma van, akkor pedig $\binom{n+k-1}{n-1}$ lehetőség van a szétosztásra. Ha ráadásul mindegyik gyereknek akarunk almát adni (tegyük fel, hogy $k \ge n$), akkor osszunk ki n almát, majd a maradék $k-n$ almát osszuk szét tetszőlegesen. Így $\binom{k-1}{n-1}$ lehetőség van.

7. Legyen a maximális tartományszám a_n, ahány tartományra n darab kör felvágja a síkot. A kis paraméterek vizsgálata egyszerű: $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=8$, $a_4=14$, $a_5=22$. Ha n darab kör mellé rakunk egy új ($n+1$-edik) kört, akkor ezt a korábbi körök mindegyike legfeljebb két pontban metszi. Ez a legfeljebb $2n$ metszéspont legfeljebb $2n$ ívet alakít ki az új körön. Ezek az ívek korábbi tartományokat vágnak ketté. A szétvágott tartományok száma lesz a többlet a korábbi tartományszámhoz viszonyítva.

Ez alapján $a_{n+1} \le a_n + 2n$, sőt egyenlőség áll fenn: $a_{n+1} = a_n + 2n$.

Így $a_n = 2+4+6+\ldots+2(n-1) = n^2-n+2$.

Vessük össze a 3.5. feladattal és annak megoldásával.

8. *a)* Minden csúcs azonos színű → 2 db színezés;
b) 1 pont más színű → 2 db;
c) 2–6 pont → 6 db;
d) 3–5 pont → 6 db;
e) 4–4 pont → 7 db.
Összesen 23 eset van.

9. *a)* A tízszög csúcsai $\binom{10}{2}=45$ szakaszt határoznak meg. Ezek közül 10 a sokszög oldala, a maradék $45-10=35$ darab pedig a tízszög átlója.

b) Minden átlómetszéshez tartozik négy csúcs (a metsző átlók végpontjai), és minden csúcsnégyeshez tartozik pontosan egy átlómetszés (a négy közül a kerületi sorrendben szemköztes elemek által meghatározott átlók metszése). Ha minden csúcsnégyes különböző átlómetszést határoz meg (ez lehetséges), akkor $\binom{10}{4}$ átlómetszés alakul ki. Ennél több nem lehetséges. Vessük össze ezt a feladatot a 3.13. feladattal és annak megoldásával!

c) A legtöbb tartomány akkor alakul ki, ha nincs három egy ponton átmenő átló. Sokszögünket helyezzük a koordinátasíkra úgy, hogy egyik oldal és egyik átló se legyen vízszintes.
A kialakuló tartományokat két csoportba osztjuk: az egyikbe azok tartoznak, amelyek legalsó csúcsa a sokszögnek nem csúcsai, a másikba azok, amelyek legalsó csúcsa a sokszög egyik csúcsa. Az első típusú tartományok legalsó csúcsa két átló metszéspontja. Megfordítva: minden átlók által kialakított metszésponthoz tartozik egy első típusú tartomány, amelynek ez a metszéspont a legalsó pontja. Így az első típusú tartományból ugyanannyi van, mint ahány metszéspont az átlók között: esetünkben $\binom{10}{4}=210.$
A második típusú tartományok összeszámolásához csoportosítsuk őket a legalsó csúcsuk szerint. Fussunk végig a legfelső csúcson kívüli kilenc csúcson. Mindegyik csúcsnál a hozzá „fentről” befutó átlók és oldalak számából 1-et levonva kapjuk meg az oda tartozó második típusú tartományokat. Ezeknek a számoknak az összege az összes átló és oldal számából levonva 9, azaz $\binom{10}{2}-9=36.$ Ez a második típusú tartományok száma. Összesen $210+36=246$ tartomány van.

d) n-szög esetén összesen $\binom{n}{2}-n$ átló van, az átlók közötti metszéspontok száma legfeljebb $\binom{n}{4}$, a kialakuló tartományok száma legfeljebb

$$\binom{n}{4}+\left(\binom{n}{2}-(n-1)\right).$$

Rejtvény: A zsinórokat nevezzük el balról jobbra haladva 1, 2 és 3-nak. Egy lövési sorrendhez elég tudnunk, hogy melyik zsinórról lövünk, hiszen mindig az aktuálisan legalsó léggömb a cél. Így egy lelövési sorrend lehet például: 113212. Általában egy lelövési sorrend egy olyan hat hosszú sorozat, amelyben három darab 1-es, két 2-es és egy 3-as szerepel.
Ilyenből $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}=20\cdot 3=60$ van.

6. GRÁFOK – pontok, élek, fokszám

2. Nincs, mert egy gráf páratlan fokszámú pontjainak száma páros.

3. *a)* Szabályos tetraéder.

b) Élek száma: $e = \dfrac{5 \cdot 3}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ nem lehetséges.

d) $e = \dfrac{7 \cdot 3}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ nem lehetséges.

c) Két azonos élhosszúságú tetraéder összeillesztve egy lapja mentén.

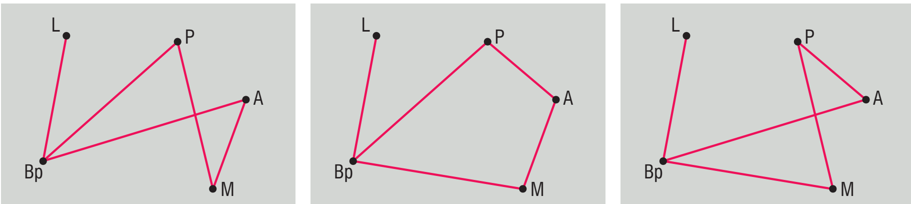
e) Szabályos oktaéder.

4. Legyenek egy gráf pontjai az ötszöglapok és a hatszöglapok, az élei pedig jelentsék a szomszédságot.
Az ötszöglapok fokszáma 5, a hatszöglapoké 6. Az ötszöglaphoz illeszkedő élek száma $12 \cdot 5 = 60$. Minden ilyen él egy ötszöglaphoz és egy hatszöglaphoz illeszkedik, és egy hatszöglaphoz 3 ilyen él illeszkedik.

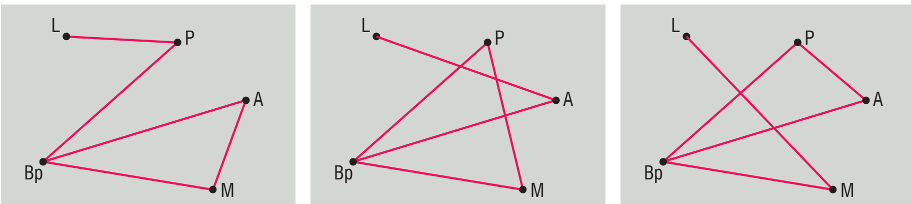
Így a hatszöglapok száma: $\dfrac{60}{3} = 20$.

5. Legyenek a városok egy gráf pontjai, a járatok pedig az élek.

a) I. Ha a londoni járat Budapestre megy, akkor a másik két járatot Budapestről háromféleképpen választhatjuk.



II. Ha a londoni járat nem Budapestre megy, akkor ez háromféleképpen valósulhat meg.



b) Ez nem lehetséges, mert a páratlan fokszámú pontok száma nem lehet páratlan.

c) Ha egy 5 pontú egyszerű gráfban 3 db 4 fokszámú pont van, akkor a többi 2 pontnak legalább 3 a fokszáma, így ez az eset sem lehetséges.

6. Legyenek egy gráf pontjai a városok, az élek pedig a városokat összekötő útvonalak. Ha a gráf összefüggő, akkor bármely városból el lehet jutni a fővárosba. Ha nem összefüggő, akkor tekintsük a fővárost tartalmazó komponenst. Ebben a komponensben kell még egy páratlan fokszámú pont, mivel egy komponens páratlan fokszámú pontjainak száma csak páros lehet. Tehát Messziút is ehhez a komponenshez tartozik, hiszen a többi város páros fokszámú. Ekkor is el lehet jutni a fővárosba Messziútból.

7. *a)* A *b)* pont speciális esete.

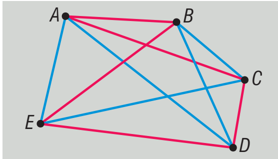
b) Ha van 0 fokú csúcs, akkor a fokszámok a $\{0, 1, 2, ..., n-3, n-2\}$ halmaz elemei (azaz ilyenkor nem lehet $n-1$ fokú csúcs). Ha nincs 0 fokú csúcs, akkor a fokszámok a $\{1, 2, ..., n-2, n-1\}$ halmaz elemei. Mindkét esetben az n fokszámra $n-1$ lehetőség van, így lesz egybeesés köztük.

8. Legyenek a résztvevők egy gráf pontjai, az osztálytársi kapcsolatok pedig az élei. Az osztálytársak egy teljes gráfot alkotó komponens tagjai.
Akik 6-ot mondtak, azok egy 7 pontú teljes gráfhoz tartoznak. Mivel 8 ilyen válasz volt, legalább két ilyen komponens van, tehát legalább hat 6-os válasz hiányzik.
Akik 4-et mondtak, azok egy 5 pontú teljes gráf tagjai. Mivel 7 ilyen válasz volt, legalább két ilyen komponens van, tehát legalább három 4-es válasz hiányzik.
Akik 3-at mondtak, azok egy 4 pontú teljes gráf tagjai. Mivel 5 ilyen válasz volt, legalább két ilyen komponens van, tehát 3 ilyen válasz hiányzik.
Akik 2-t mondtak, azok egy 3 pontú teljes gráf tagjai. Mivel 2 ilyen válasz volt, legalább 1 ilyen válasz hiányzik.
Így megkaptuk a 13 hiányzó választ.

9. (5) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ a nagyvadak szimpatikusak $\overset{(6)}{\Rightarrow}$ a nagyvadaknak nincs agyaruk $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ a nagyvadak nem kellően felfegyverzettek $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ a nagyvadak nem elefántok $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ bemehetnek a porcelánboltba.
Igen, következik.

10. Legyenek a bálon részt vevő diákok egy gráf pontjai, és az él jelezze, hogy ki kivel táncolt. Ha minden él egy fiú és egy lány között húzható meg, akkor a fiúk fokszámának összege és a lányok fokszámának összege egyenlő kell, hogy legyen. Ha évfolyamonként a fiúk és a lányok száma egyenlő, akkor a fiúkra és a lányokra vonatkozó iskolai átlagnak egyenlőnek kell lennie, de ez a diagram alapján nem teljesül. Így vagy az adatfelvételkor nem emlékeztek jól, hogy hány emberrel táncoltak, vagy a fiúk nem csak (az iskolabeli) lányokkal táncoltak, vagy a fiúk nem csak lányokkal táncoltak.

11. Jelöljük a 6 pontot rendre u, v, w, x, y, z-vel Először azt látjuk be, hogy van egy egyszínű háromszög. Tekintsük a v csúcsot és az ebből induló öt élt. A színek szimmetriája miatt feltehető, hogy színeik közt a piros van többségben. A legalább három piros él elvezet v három piros szomszédjához. Ha ezek között van piros él, akkor ennek két végpontjához v-t hozzávéve egy olyan hármast kapunk, amelyeket összekötő mindegyik él piros. Ha a három pontot összekötő élek között nincs piros él, akkor olyan háromszöghöz jutottunk, amelynek minden éle kék.
A második egyszínű háromszög keresésénél induljunk ki egy xyz egyszínű (feltehetjük, hogy kék) háromszögből. Legyen v egy negyedik csúcs. Ha a v-ből az x-hez, y-hoz és z-hez vezető három él nem mind piros, akkor az előző bekezdés gondolatmenete egy olyan egyszínű háromszöghöz vezet, amely a kiindulási háromszöghöz képest új, és már készen is vagyunk. Ha mindhárom él piros, és ugyancsak ez teljesül a maradék u és w két csúcsra, akkor az u, v és w közti éleket nézzük meg. Ha mindhárom él kék, készen vagyunk. Ha valamelyik él piros, akkor is megtaláljuk az új egyszínű háromszöget, ha a piros él két végpontjához x-et (vagy y-t vagy z-t) hozzáadjuk.



12. *a)* Az előző feladat alapján, ha egy csúcsból 3 azonos színű él futna ki, akkor ott egyszínű háromszög keletkezne.

b) Ha a gráfból töröljük a piros éleket, akkor a gráf összefüggő, és minden pontjának 2 a fokszáma. Tehát van a gráfban zárt Euler-vonal.

13. Legyenek a tudósok egy gráf pontjai, és az élek jelezzék, ha leveleznek. Az élek színe jelentse a témát. A skatulyaelv szerint egy tudóstól legalább 6 azonos színű (piros) él indul. Ha ezt a 6 pontot összekötő élek mindegyike a másik két színből való, akkor az előző feladat alapján van egyszínű háromszög. Ha legalább az egyik él piros, akkor is van egyszínű háromszög.

14. Ha a csónakból való kiszállás után valamelyik ponton több a misszionárius, akkor a túlparton több a kannibál, és baj van. Ha egy kiegyenlített helyzet előtt a csónakban több a kannibál, akkor az indulási oldalon volt baj, ha pedig kevesebb, akkor az érkezési oldalon volt baj. Tehát a csónakban egy kannibál és egy misszionárius lehet csak, így pedig nem lehet átjutni.

Más megoldás:

Vegyük azt a feltételezett legelső pillanatot, amikor a csónaknak a jobb partra való visszatérése után a bal parton legalább két misszionárius van.
Mivel a másik parton is kell misszionáriusnak lenni, ezért biztos, hogy ekkor mindkét parton ugyanannyi a kannibálok és a misszionáriusok száma (3-3 és 1-1, vagy 2-2, és 2-2).
A 3-3, 1-1 eset nem lehet, mert akkor (mivel a legelső olyan esetet néztük, amikor legalább 2 misszionárius van itt) ezt megelőzően a bal partra két misszionáriusnak kellett volna érkeznie. Akkor viszont előtte az ott lévő misszionárius kisebbségben lett volna.
A 2-2, 2-2 eset azért nem lehet, mert akkor ezt megelőzően a jobb partra (az egyensúlyi probléma miatt) csak olyan csónak térhetett volna vissza (illetve ettől kezdve a két part között csak olyan csónak közlekedhet), amelyben se misszionáriusból, se kannibálból nem ülhet több. Így azonban nem lehet átkelni a folyón.
Ellentmondásra jutottunk, a feladatnak nincs megoldása.

15. A 4 kannibál átevez, majd 1 visszahozza a csónakot. A 4 misszionárius átevez, majd 1 kannibál visszamegy a társáért.

16. Legyenek a diákok egy gráf pontjai, és irányított él mutasson arra, akibe szerelmesek.
Fiúk: A, B, C, D. Lányok: E, F, G, H.
A feladat feltételei szerint minden pontból egy él fut ki, és minden pontba egy él fut be. Így minden pont 2 fokú, és így van olyan kör a gráfban, melyen a fiúk és a lányok felváltva követik egymást. Mivel a szerelem nem lehet kölcsönös, nincs két pontú kör. Tehát vagy két 4 pontú van, vagy egy 8 pontú. (*)
A feltételek:

(1) $A \to X_1 \to Y_1 \to E \qquad X_1 \in \{F, G, H\};\ Y_1 \in \{B, C, D\}$

(2) $B \to X_2 \to Y_2 \to F \qquad X_2 \in \{E, G, H\};\ Y_2 \in \{A, C, D\}$

$X_1 \neq X_2 \Leftarrow Y_1 \neq Y_2$

(3) $C \to X_3 \to D$

(4) $X_2 \neq G \Rightarrow X_2 = E$ vagy $X_2 = H$

(5) $H \to Y_3 \to X_4 \quad X_4 \neq G \quad Y_3 \neq A$

I. Ha $X_2 = H \Rightarrow Y_2 = Y_3$ és $X_4 = F$ és $Y_1 \neq B$

$A \to X_1 \to Y_1 \to E \qquad X_1 \in \{F, G\}$

$B \to H \to Y_2 \to F \qquad Y_2 \in \{C, D\}$

$C \to X_2 \to D$

Ha $Y_2 = D \Rightarrow X_2 = H$ $\lightning$

$$\Downarrow$$

$$Y_2 = C \Rightarrow F = X_2 \Rightarrow X_1 = G$$

$$Y_1 \neq C \Rightarrow Y_1 = D$$

$B \to H \to C \to F \to D$ $\lightning$

II. Ha $X_2 = E \Rightarrow Y_1 = B \Rightarrow$ 8 pontú kör van.

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{A}{\bullet} & \to & \overset{X_1}{\bullet} & \to & \overset{B}{\bullet} & \to & \overset{E}{\bullet} \\ \uparrow & & & & & & \downarrow \\ \underset{X_4}{\bullet} & \leftarrow & \underset{D}{\bullet} & \leftarrow & \overset{X_3}{\underset{F}{\bullet}} & \leftarrow & \underset{C}{\bullet} \Leftarrow (3) \\ & & \Uparrow & & \Uparrow & & \\ & & (3) & & (2) & & (5) \Rightarrow X_4 \neq H \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$X_4 = G \Rightarrow X_1 = H$$

Aladár Hannába szerelmes.

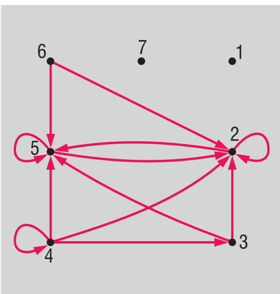
Más megoldás:

(*)-ig ugyanaz, majd a feltételekből következően A és E, B és F, továbbá C és D egy-egy körben van.

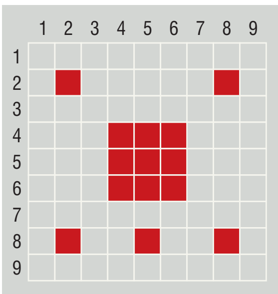
Először kizárjuk azt, hogy két négy hosszú körünk van (amelyekben két csúcs lánynak, két csúcs fiúnak felel meg). Tegyük fel, hogy mégis kialakul ez a helyzet. Ekkor C és D egy kör fiúi, így a másik körben szereplő fiúk A és B, ahol a két lány E és F. Azaz H és G egy négy hosszú körre esik. De ekkor az a fiú, akit Hanna szeret, az Grétát szeretné, ami pedig kizárt.

A nyolc hosszú kör esetében haladjunk végig a körön, és nézzük a fiúk sorrendjét. Feltételeink szerint C után D jön, majd A és B következik valamilyen sorrendben. A két eset egyszerűen analizálható, és azt kapjuk, hogy csak az egyik eset lehetséges, így a sorrend *AHBECFDG*, azaz Aladár Hannába szerelmes.

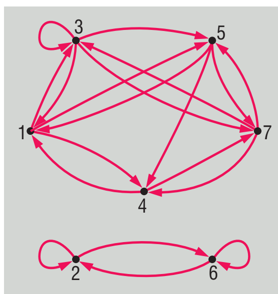
17. *a)*



b)



c)



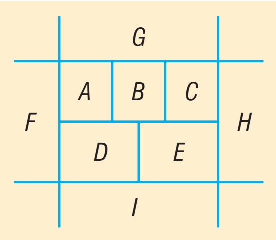
7. GRÁFOK – út, vonal, séta, kör, Euler-vonal (kiegészítő anyag)

1. *a)* Minden pont fokszáma 4, és a gráf összefüggő, így van (zárt) Euler-vonala.
b) 4 pont fokszáma páratlan, tehát nem járható be.
c) 2 pont fokszáma páratlan, a többi páros. Így van nyitott Euler-vonala, tehát bejárható.

2. 8 pont fokszáma páratlan, így nem lehetséges.

3. Legyenek egy gráf pontjai a bank helyiségei, és az élek jelezzék az ajtókat (csak a *B* és a *H* helyiség fokszáma páratlan). Az Euler-vonalnak nyitottnak kell lennie a *B* és *H* csúcsok közt. Mivel *B*-ből indult, *H*-ban van a széf.

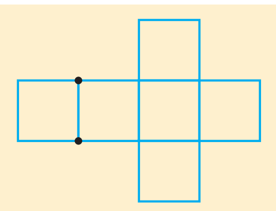
4. *a)* Mivel 2-nél több páratlan fokszámú pont van, nem rajzolható meg.
b) Mivel 8 pont fokszáma páratlan, a gráfot 4 vonalra lehet felbontani, így 3-szor kell felemelni a ceruzát.
c) A tartományok alkossák egy gráf csúcsait. Minden szakasz feleljen meg egy élnek a két oldalán lévő tartományok között. A kívánt görbét követve gráfunkban egy Euler-vonalat járnánk be, amely viszont nincs, hiszen négy csúcs/tartomány foka is páratlan. Tehát nincs ilyen görbe.



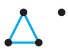
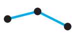
5. A három legrövidebb él mellé ugyanolyan hosszal rakjunk be egy-egy párhuzamos élt. A kapott gráfban minden fok páros, így van benne zárt Euler-vonal, amely megfelel az eredeti gráf egy bejárásának, ahol a három legrövidebb élt duplán járjuk be. Ennél jobb útvonalunk nem lehet, mert gráfunkban hat páratlan fokú pont van. Így legalább három élt többszörösen be kell járnunk.
A lehetséges útvonal:

AGHBCHDCHIDEIFEIGFABGA.

6. Az élvázon biztos lesz páratlan fokú pont, így nem lehet zárt Euler-vonala. Ha csak 2 páratlan fokú pont van, akkor a drótot elég 1 helyen elvágni és két helyen forrasztani. Pl.



7. *a)* Egy 14 pontú gráfban legalább 13 élnek kell lenni, hogy a gráf összefüggő lehessen. Legfeljebb 7 élt lehet törölni, hisz 20 él van.
b) 7 élt elhagyva még összefüggő lehet a gráf, és a körök is megszűnnek.

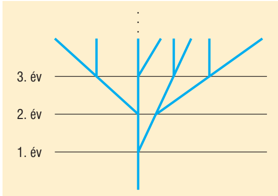
8. *a)* igaz; *b)* hamis, pl.:  ; *c)* igaz;
d) hamis, pl.:  ; *e)* igaz.

8. Fagráfok (kiegészítő anyag)

1. Legalább 5 út kell, hogy összefüggő legyen.

2. A fa teljes gráfja nem rajzolható meg, hiszen végtelen. Az első 3 év az ábrán látható.

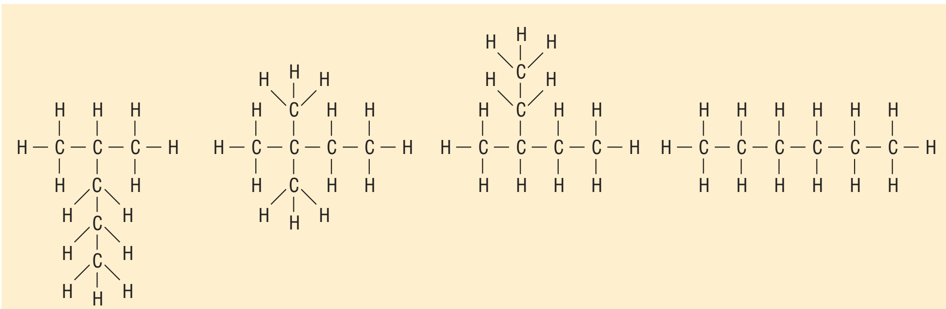
$f_0 = 1,\ f_1 = 2,\ f_n = 2 \cdot f_{n-1} \ \Rightarrow\ f_n = 2^n \ \Rightarrow\ f_6 = 64.$



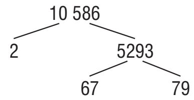
3. *a)* A szénhidrogéneknek megfelelő gráfok olyan gráfok, amelyekben egy (H) és négy (C) fokú csúcsok szerepelnek, nincs bennük hurokél, de párhuzamos élek lehetnek bennük.
- etán: fagráf, 6 db 1 fokú és 2 db 4 fokú pont;
- ciklobután: van benne kör, nincs többszörös él, 8 db 1 fokú és 4 db 4 fokú pont;
- etilén: nincs benne kör, van többszörös él, 4 db 1 fokú és 2 db 4 fokú pont;
- acetilén: nincs benne kör, van többszörös él, 2 db 1 fokú és 2 db 4 fokú pont;
- benzol: van benne kör, van többszörös él, 6 db 1 fokú és 6 db 4 fokú pont.

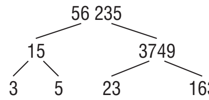
b)
- fokszámok összege: $33 \cdot 4 + 93 =$ páratlan, nincs ilyen vegyület;
- élek száma: $\left.\begin{array}{r} \dfrac{4\cdot 10+22}{2}=31 \text{ él} \\ 32 \text{ pont} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{fagráf} \Rightarrow \text{alkán;}$
- élek száma: $\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \dfrac{5\cdot 4+10}{2}=15 \text{ él} \\ 15 \text{ pont} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{van benne kör} \\ \text{kétszer annyi H, mint C (nem lehet kettő kötött él)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{cikloalkán;}$
- élek száma: $\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \dfrac{10\cdot 4+8}{2}=24 \text{ él} \\ 18 \text{ pont} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{van benne kör} \\ \text{több C, mint H} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{van többszörös éle, tehát arén}$

c) Ha h darab hidrogénatom szerepel, akkor a szénhidrogénnek megfelelő gráfban $h+6$ csúcs van, a fokok összege pedig $h+24$. A fokok összege a kétszeres élszám, amely most a csúcsszámnál eggyel kisebb szám kétszerese (gráfunk fagráf), azaz $2(h+5)$. A fokok összegének kétféle felírásából $h = 14$.
A lehetőségek:



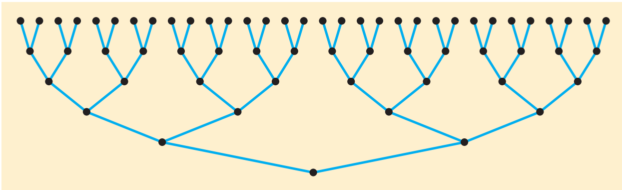
4.





$10\,586 = 2 \cdot 67 \cdot 79$ $\qquad$ $56\,235 = 3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 163$

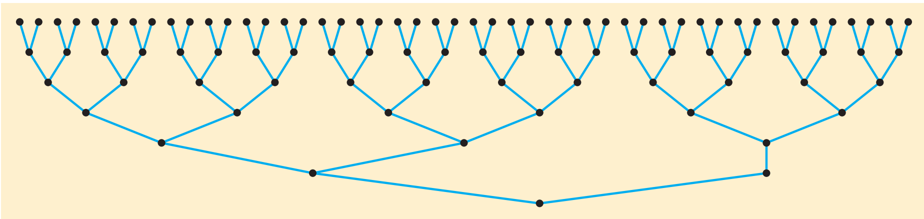
5. *a)*



$n = 32$ Az 1. fordulóban kiesik 16, marad 16;
a 2. fordulóban kiesik 8, marad 8;
a 3. fordulóban kiesik 4, marad 4;
a 4. fordulóban kiesik 2, marad 2;
az 5. fordulóban kiesik 1, marad 1.

5 forduló és 31 mérkőzés kell.

b)



$n = 48$ 1. forduló: kiesik 24, marad 24;
2. forduló: kiesik 12, marad 12;
3. forduló: kiesik 6, marad 6;
4. forduló: kiesik 3, marad 3;
5. forduló: kiesik 1, marad 2;
6. forduló: kiesik 1, marad 1.

6 forduló és 47 mérkőzés kell.

c) $n = 1024 = 2^{10} \Rightarrow$ 10 forduló, 1023 mérkőzés;
$n = 2\,765\,289$, $2^{21} < n < 2^{22} \Rightarrow$ 22 forduló, 2 765 288 mérkőzés kell.

Más megoldás:

Minden mérkőzés egy versenyzőről megmutatja, hogy nem a legjobb. n versenyzőnél $n - 1$-ről kell „bebizonyítani”, hogy nem a legjobb. Ehhez $n - 1$ mérkőzés kell. Másképpen: $n - 2$ mérkőzés nem elég, mert akkor csak $n - 2$ vesztes lenne, azaz legalább két versenyző lenne vereség nélkül. Közülük egyik sem zárható ki mint legjobb. $n - 1$ mérkőzéssel azonban meg is oldható a probléma. Ha nem játszatunk tovább vesztes versenyzőt, akkor el sem ronthatjuk a torna megszervezését.

a) $n = 32$, tehát 31 mérkőzésre van szükség.

b) $n = 48$, tehát 47 mérkőzésre van szükség.

c) $n = 1024$, tehát 1023 mérkőzésre van szükség.
$n = 2\,765\,289$, tehát 2 765 288 mérkőzésre van szükség.

A második legjobb kiválasztása nehezebb probléma. Feltesszük, hogy játékosainknak van egy erősorrendje, és mindig az erősebb nyer. (Ez a „valódi” sportban nincs mindig így.)

A második „legerősebb” versenyző kiválasztását a valódi sportesemények rendezői nem vállalják, hanem az utolsó mérkőzést döntőnek nevezik és a vesztest tekintik a második legjobbnak. Azt, hogy a két legerősebb versenyző az első mérkőzésen találkozzon, azt előzetes erősorrendek alapján megtervezett tornákkal küszöbölik ki.
A második legerősebb versenyző azok közül kerülhet ki, akik csak a legerősebbtől kaptak ki. Így kell egy tornát rendezni a legerősebb kiválasztására, majd egy külön tornát azok számára, akiket a legerősebb győzött le.

6. *a)* Igaz, ha legalább 2 pont van.
b) Hamis .
c) Hamis, ha legalább 2 pont van.
d) Hamis, mert akkor lenne benne kör.

7. I. Egy csúcsból 4 él indul ki $\Rightarrow$ 5-féleképpen.

II. Egy csúcsból 3 él indul ki $\Rightarrow \binom{4}{3}$ hogy mely 3-ba, majd a negyediket 3-féleképpen köthetjük össze velük, mind az 5 csúcs esetén $\binom{5}{1}\binom{4}{3}\binom{3}{1} = 60$ -féleképpen.

III. Ha egy csúcsból legfeljebb 2 él indul ki, akkor a falvak egy útvonalra vannak „felfűzve”. Sorbarendezésük $\frac{5!}{2}$ -féleképpen történhet (osztunk 2-vel, hiszen ha egy sorbarendezést tükrözünk, az ugyanazt az úthálózatot határozza meg).
Összesen 125-féle úthálózat lehetséges.

8. Kétjegyű boldog számból indulva az utolsó előtti szám 10 vagy 100. Gondolkozzunk visszafelé haladva!

$$1 \text{ — } \boxed{10} \text{ — } 9+1 \left\langle \begin{array}{l} \boxed{31} \\ \boxed{13} \text{ — } 4+9 \left\langle \begin{array}{l} \boxed{23} \\ \boxed{32} \text{ — } 16+16 \text{ — } \boxed{44} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$1 \text{ — } \boxed{100} \text{ — } 64+36 \left\langle \begin{array}{l} \boxed{86} \\ \boxed{68} \text{ — } 64+4 \left\langle \begin{array}{l} \boxed{82} \text{ — } 81+1 \left\langle \begin{array}{l} \boxed{91} \\ \boxed{19} \end{array}\right. \\ \boxed{28} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Az összes kétjegyű boldog szám tehát: 10; 13; 19; 23; 28; 31; 32; 44; 68; 82; 86; 91.

1. Rejtvény: Feltehetjük, hogy a felmenőim között nem történt rokonházasság. Ebben az esetben a dédapáim nagyapjai (összesen 8 személy) közül 4 a nagyanyáimnak a dédapja. Ők nyilvánvalóan különböző személyek, mint a nagyapáim dédapjai. (A nagyapák dédapjai is 8-an vannak, közöttük viszont szerepel a dédanyáim 4 nagyapja. A két halmaznak tehát vannak közös elemei, de 4-4 elemben különböznek.)

2. Rejtvény: Toljuk be az *A* ponthoz a *Q* kocsit, kapcsoljuk ott le, és *B* felől toljuk hozzá a *P* kocsit. Mindent egybekapcsolva húzzuk ki a kocsikat az egyenes szakaszra, ahol *C*-n túl lekapcsoljuk *Q*-t. A *P* kocsit visszavisszük az eredeti helyére, sőt betoljuk *A*-hoz, ahol lekapcsoljuk. *C* felől megközelítve *A*-t *P*-t behúzhatjuk a célhelyére, majd a „keleten” lévő *Q*-t is egyszerűen a célhelyre vezethetjük.

9. A kombinatorika gyakorlati alkalmazásai

1. • szoba: $2 \cdot 24\,000 + 24\,000 \cdot 0{,}5 + 24\,000 \cdot 0{,}75 = 24\,000 \cdot 3{,}25$ Ft
• félpanzió: $2 \cdot 6 \cdot 2000 + 6 \cdot 2000 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 2000 \cdot 0{,}75 = 12\,000 \cdot 3{,}25$ Ft
• biztosítás: $6 \cdot 1000 = 6000$ Ft
• parkolás: $6 \cdot 1500 = 9000$ Ft
• benzin: $12 \cdot 6{,}8 \cdot 248 = 20\,236{,}8$ Ft
Síbérlet nélkül a költség 152 236,8 Ft.
• Síbérlet: $2 \cdot 117{,}2 + 66{,}8 = 301{,}2$ €
• 4 napra: $2 \cdot 84{,}7 + 48{,}3 = 217{,}7$ €
83,5 €-t kockáztatnak.

2. A vízgyűjtő terület: $120 \cdot 1000^2 \cdot 10^2\ \mathrm{dm}^2 = 12 \cdot 10^9\ \mathrm{dm}^2$.
A hó vastagsága: 3 dm.
A hó térfogata: $36 \cdot 10^9\ \mathrm{dm}^3$.
A víz térfogata: $10{,}8 \cdot 10^9\ \mathrm{dm}^3$.
A tóba kerül: $4{,}86 \cdot 10^9\ \mathrm{dm}^3$.
A tó felszíne: $1{,}5 \cdot 1000^2 \cdot 10^2\ \mathrm{dm}^2 = 150 \cdot 10^6\ \mathrm{dm}^2$.
A vízszint emelkedése: 32,4 dm.

Hatvány, gyök, logaritmus

1. Hatványozás és gyökvonás (emlékeztető)

1. *a)* a^5; *b)* b^{-11}; *c)* a^{-48}; *d)* $a^{-15}b^{-10}$; *e)* a^8b^{10}; *f)* $a^{46}b^{39}c^{26}$.

2. *a)* $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$; $a>0$; *b)* $\sqrt[3]{b^5}$; $b\neq 0$; *c)* $\sqrt[4]{a^{-3}}$; $a>0$;

d) $\sqrt[6]{\dfrac{a^{11}}{b}}$; $a,b>0$; *e)* $\sqrt[24]{\dfrac{b^{19}}{a^{61}}}$; $a,b>0$; *f)* $\sqrt[30]{\dfrac{b^{69}}{a^{52}}}$; $a,b>0$.

3. *a)* $\sqrt[4]{3^{16}}<\sqrt[4]{3^{17}} \;\Rightarrow\; 3^4<\sqrt[4]{3^{17}}$

b) $2^{-5}\cdot 5^{-5}<2^{-5}\cdot 5^{-4} \;\Rightarrow\; 10^{-5}<32^{-1}\cdot 625^{-1}$

c) $\sqrt[15]{2^{15}\cdot 3^5\cdot 5^5}>\sqrt[15]{2^9\cdot 3^6\cdot 5^6} \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{120}>\sqrt[5]{1800}$

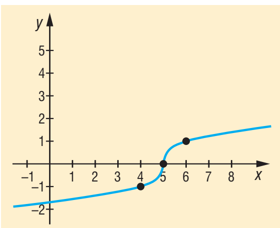
4. *a)* 1; *b)* 2; *c)* 6; *d)* 7; *e)* 9; *f)* 3.

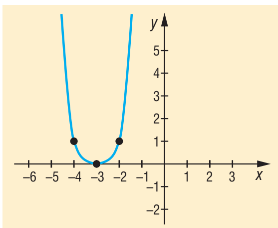
Rejtvény:

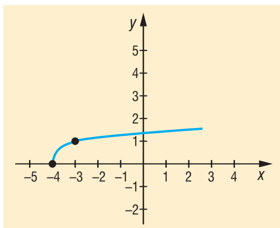
$$\sqrt{28+16\sqrt{3}}+\sqrt{28-16\sqrt{3}}=\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)^2}=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}=8$$

2. Hatványfüggvények és gyökfüggvények

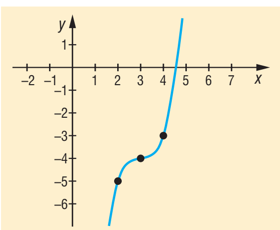
1. *a)* $f(x)=\sqrt[3]{x-5}$ $x\in\mathbb{R}$; *b)* $f(x)=(x+3)^4$ $x\in\mathbb{R}$; *c)* $f(x)=\sqrt[4]{x+4}$ $x\geq -4$;

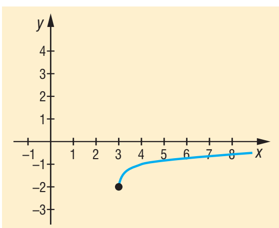


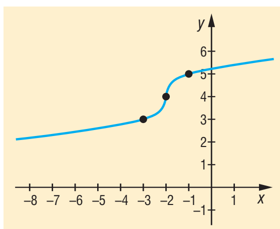




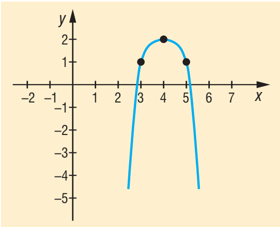
d) $f(x)=(x-3)^3-4$ $x\in\mathbb{R}$; *e)* $f(x)=\sqrt[4]{x-3}-2$ $x\geq 3$; *f)* $f(x)=\sqrt[3]{x+2}+4$ $x\in\mathbb{R}$;

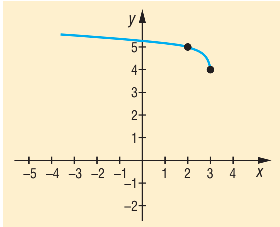


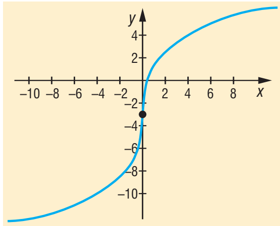




g) $f(x) = -(x-4)^4 + 2 \quad x \in \mathbb{R}$; *h)* $f(x) = \sqrt[4]{3-x} + 4 \quad x \le 3$; *i)* $f(x) = 3\sqrt[3]{3x} - 3 \quad x \in \mathbb{R}$.







Rejtvény: *a) f:* $x_0 = 3 + \sqrt[3]{4}$ *b) g:* $x_0 = 79$

3. Törtkitevőjű hatvány

1. *a)* $\sqrt[5]{3}$; *b)* $\sqrt[4]{8}$; *c)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4^5}}$;

d) $\sqrt[5]{\dfrac{9}{25}}$; *e)* $\sqrt[7]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}$; *f)* nem értelmezhető.

2. *a)* $2^{\frac{1}{3}}$; *b)* $2^{\frac{3}{5}}$; *c)* $2^{-\frac{3}{7}}$; *d)* $2^{\frac{7}{12}}$;

e) $2^{\frac{17}{12}}$; *f)* $2^{-\frac{5}{6}}$; *g)* $2^{\frac{27}{20}}$.

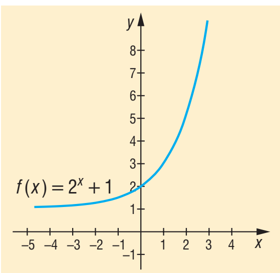
3. *a)* $a^{\frac{5}{6}}$; *b)* $b^{\frac{9}{4}}$; *c)* $c^{\frac{11}{12}}$; *d)* $d^{\frac{9}{10}}$.

4. *a)* $3^{-\frac{3}{2}} < 3^{-\frac{2}{3}} < \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}} < 3^{\frac{2}{3}} < \sqrt[4]{3^3}$; *b)* $4^{-\frac{3}{2}} < 4^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} < \sqrt[7]{4} = 2^{\frac{2}{7}} < \sqrt[5]{16}$.

Rejtvény: $3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{9}{6}} = \sqrt[6]{19683}$, $5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{625}$, tehát $3^{\frac{3}{2}} > 5^{\frac{2}{3}}$.

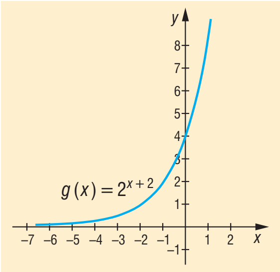
4. Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális függvény

1. *a)*



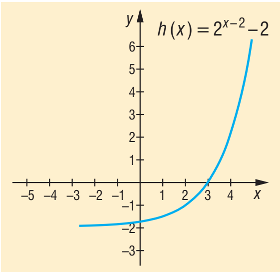
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = (1; \infty)$
szig. mon. növő
max.: nincs
min.: nincs
legnagyobb alsó korlát: 1
felülről nem korlátos
zérushely nincs
nem páros, nem páratlan

b)



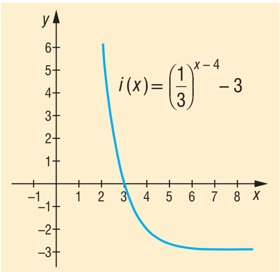
$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = (0; \infty)$
szig. mon. növő
max.: nincs
min.: nincs
legnagyobb alsó korlát: 0
felülről nem korlátos
zérushely nincs
nem páros, nem páratlan

c)



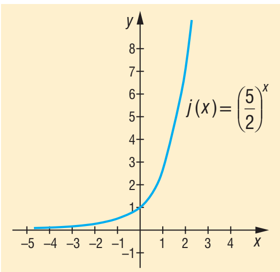
$D_h = \mathbb{R}$
$R_h = (-2; \infty)$
szig. mon. növő
max.: nincs
min.: nincs
legnagyobb alsó korlát: –2
felülről nem korlátos
zérushely: $x_0 = 3$
nem páros, nem páratlan

d)



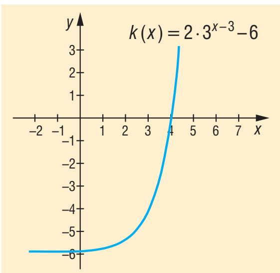
$D_i = \mathbb{R}$
$R_i = (-3; \infty)$
szig. mon. csökkenő
max.: nincs
min.: nincs
legnagyobb alsó korlát: –3
felülről nem korlátos
zérushely: $x_0 = 3$
nem páros, nem páratlan

e)



$D_j = \mathbb{R}$
$R_j = (0; \infty)$
szig. mon. növő
max.: nincs
min.: nincs
legnagyobb alsó korlát: 0
felülről nem korlátos
zérushely nincs
nem páros, nem páratlan

f)

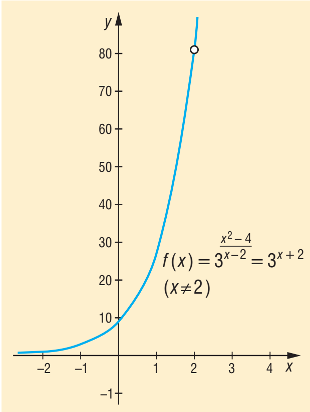


$D_k = \mathbb{R}$
$R_k = (-6; \infty)$
szig. mon. növő
max.: nincs
min.: nincs
legnagyobb alsó korlát: –6
felülről nem korlátos
zérushely: $x_0 = 4$
nem páros, nem páratlan

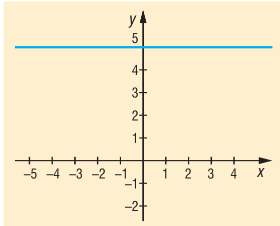
2. *a)* $\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-4{,}279 \cdot 10^{-4} \cdot 100} = 1 - e^{-0{,}04279} = 0{,}0419;$

b) $\dfrac{N_0 - N}{N_0} \cdot 100\% = \left(1 - e^{-4{,}279 \cdot 10^{-4} \cdot 1620}\right) \cdot 100\% = 50\%.$

3.



Rejtvény: $g(x) = 5^{(x+1)^2 - 2x - x^2} = 5$



5. Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

1. *a)* $x = 2;$ *b)* $x = \dfrac{13}{4};$ *c)* $x_1 = 1; x_2 = 3$ *d)* $x_1 = \dfrac{3}{2};\ x_2 = -5$

e) $x = 3;$ *f)* $x = 2;$ *g)* $x = 3;$ *h)* $x = 0;$

i) $x_1 = 0; x_2 = 1;$ *j)* $x = 1;$ *k)* $x = 2;$ *l)* $x = -\dfrac{4}{3};$

m) $x = \dfrac{1}{2};$ *n)* $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\quad k \in \mathbb{Z};$ *o)* $x_1 = 2;\ x_2 = \dfrac{3}{2};\ x_3 = 1.$

2. *a)* $x = 1; y = 3;$ *b)* $x = 0; y = 4;$

c) $x = 2; y = 1;$ *d)* $x_1 = 1; y_1 = -2;\ x_2 = -\dfrac{2}{3}; y_2 = 3;$

e) $x_1 = 0; y_1 = 1; x_2 = -2; y_2 = -1; x_3 = 1; y_3 = 2; x_4 = -3; y_4 = -2;$

f) $x_1 = \dfrac{1}{4}; y_1 = \dfrac{5}{8}; x_2 = \dfrac{5}{8}; y_2 = \dfrac{1}{4};$

g) $x_1 = 1; y_1 = \dfrac{1}{2}; x_2 = 0; y_2 = \dfrac{3}{2};$

h) $x_1 = 1; y_1 = 2; x_2 = \dfrac{9}{2}; y_2 = -5; x_3 = -\dfrac{3}{2}; y_3 = 7;$

i) $x_1 = \dfrac{1}{2}; y_1 = \dfrac{1}{2}; x_2 = -\dfrac{1}{2}; y_2 = -\dfrac{1}{2}.$

3. *a)* $x<\frac{4}{5}$; *b)* $x\le 1$; *c)* $x\le -\frac{9}{4}$;

d) $\frac{3}{2}\le x$ vagy $x\le -\frac{3}{4}$; *e)* $x\le -3$ vagy $4\le x$; *f)* $x<2$ vagy $5<x$;

g) $x\ge -3$; *h)* $x<0$ vagy $1<x$; *i)* $x>2$ vagy $0<x<1$.

Rejtvény: Mivel $2\cdot\cos^2\frac{x^2+3y}{6}\le 2$ és $3^x+3^{-x}\ge 2$, megoldás akkor lehet, ha

$\cos^2\frac{x^2+3y}{6}=1$ és $3^x+3^{-x}=2$. A másodikból $x=0$, így

$$\cos^2\frac{y}{2}=1,$$
$$\cos\frac{y}{2}=\pm 1,$$
$$y=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

A megoldás $(0;\,2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

6. A logaritmus fogalma

1. *a)* $\log_3 9=2$; *b)* $\log_9 3=\frac{1}{2}$; *c)* $\log_2 1024=10$;

d) $\log_5 625=4$; *e)* $\lg 100\,000=5$; *f)* $\log_{\frac{3}{4}}\frac{16}{9}=-2$;

g) $\log_{\frac{1}{3}} 27=-3$; *h)* $\log_8 16=\frac{4}{3}$.

2. *a)* 11; *b)* 3; *c)* 5; *d)* $\frac{1}{3}$;

e) 4; *f)* 5; *g)* 625; *h)* $\frac{1}{3}$.

3. *a)* $a=5$; *b)* $b=49$; *c)* $c=1$; *d)* $d=e^{-3}$;

e) $e=\frac{1}{25}$; *f)* $f=\frac{1}{4}$; *g)* $g=\frac{9}{4}$; *h)* $h=\sqrt{\frac{7}{3}}$.

4. *a)* $a=3$; *b)* $b=10$; *c)* $c=25$; *d)* $d=\frac{1}{9}$;

e) $e=\frac{1}{4}$; *f)* $f=5^{-\frac{4}{3}}$; *g)* $g=\frac{2}{3}$; *h)* (nincs megoldás) nincs értelmezve.

5. *a)* $x > \frac{3}{2}$; *b)* $\frac{1}{5} < x < 2$;

c) $x > 4$; *d)* $0 < x < \frac{5}{2}$; és $x \neq 1$;

e) $x > 2$ vagy $x < \frac{2}{5}$; *f)* $-5 < x < -4$ vagy $4 < x < 5$.

6. $t = \frac{\ln 2}{\lambda} \sim 1620$ év múlva.

7. A logaritmusfüggvény

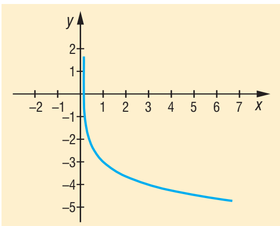
1. *a)*

hónap	március	április	május	június	július	augusztus
a növény magassága	0	40	52	61	67	70

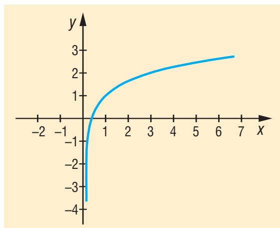
b) $\frac{80-55}{55} \cdot 100\% \approx 45{,}45\%$.

c) Az adatok nem olvashatók le pontosan.
Leginkább $f(x) = 15 \cdot \log_2(10x - 28) - 15 = 15 \cdot \log_2(5x - 14)$.

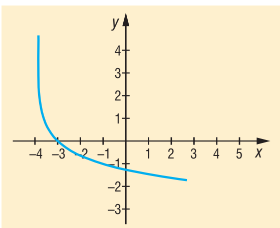
2. *a)* $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 3 \quad (x > 0)$;



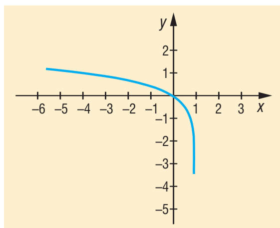
b) $g(x) = \log_3 x + 1 \quad (x > 0)$;



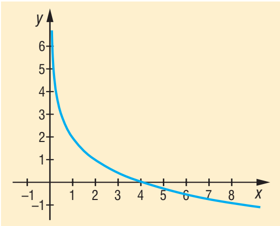
c) $h(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 4) \quad (x > -4)$;



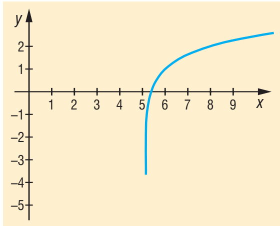
d) $i(x) = \log_5(1 - x) \quad (x < 1)$;



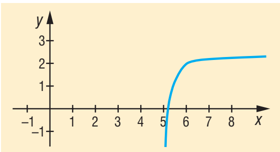
e) $j(x)=2+\log_{\frac{1}{2}} x \quad (x>0);$



f) $k(x)=1-\log_{\frac{1}{3}}(x-5) \quad (x>5);$



g) $l(x)=2+\frac{1}{5}\log_2(x-5) \quad (x>5).$



3. $f(x)=\log_2(x-1);\quad g(x)=\log_2(3-x);\quad h(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)+2;$

$i(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-3$ vagy $\log_a(x+2)-3 \quad (0<a<1).$

8. A logaritmus azonosságai

1. *a)* $x=\frac{ab}{cd};$ *b)* $x=\frac{a^2\sqrt{c}}{b^3d^{\frac{2}{3}}};$ *c)* $x=\frac{1}{ab^2c^3d};$ *d)* $x=\lg\frac{a}{bcd}.$

2. *a)* $a=99;$ *b)* $b=\frac{2}{27};$ *c)* $c=\frac{100}{3};$ *d)* $d=18.$

3. *a)* $\frac{7}{2};$ *b)* 14; *c)* 10; *d)* 243; *e)* 12; *f)* 1.

Rejtvény: Mivel $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c \quad (a;\,b;\,c>0$ és $a;\,b\neq 1),$

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8=\log_2 8=3.$$

9. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

1. *a)* $x=8;$ *b)* $x=-1;$ *c)* $x=5;$ *d)* $x=5;$
e) $x=7;$ *f)* nincs megoldás; *g)* $x=3;$ *h)* $x_1=1;\ x_2=2;$
i) $x=10;$ *j)* $x_1=8;\ x_2=2;\ x_3=-8;\ x_4=-2.$

2. *a)* $x = 2$; $y = 50$;

b) $x = 8$; $y = 9$;

c) $x = 6\sqrt{6}$; $y = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

d) $x_1 = \frac{1}{2}$; $y_1 = \frac{1}{8}$; $x_2 = 8$; $y_2 = 2$;

e) $x = \frac{9}{2}$; $y = \frac{1}{2}$;

f) $x_1 = 125$; $y_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{5}$; $y_2 = 3$.

3. *a)* $-\frac{4}{3} < x < \frac{13}{3}$;

b) $-\frac{7}{16} < x$;

c) $-\frac{1}{3} < x < 1$;

d) $x < -\frac{3}{4}$ vagy $\frac{1}{2} < x$;

e) $x > 8$;

f) $\frac{6}{35} < x < \frac{1}{4}$;

g) $\frac{29}{10} < x < 4$ vagy $4 < x < \frac{35}{6}$;

h) $x < 2 - \sqrt{2}$;

i) $\frac{\sqrt{17} - 1}{2} < x < 2$.

A trigonometria alkalmazásai

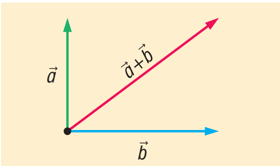
1. Vektorműveletek rendszerezése, alkalmazások (emlékeztető)

1. $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$; $\quad \vec{e}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $\quad \vec{f}=\vec{b}+\vec{c}$.

2. *a)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$; *b)* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{a}$;

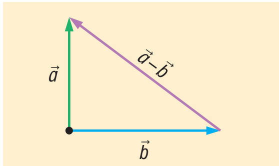
c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}$; *d)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{a}-2\vec{c}$.

3. *a)*



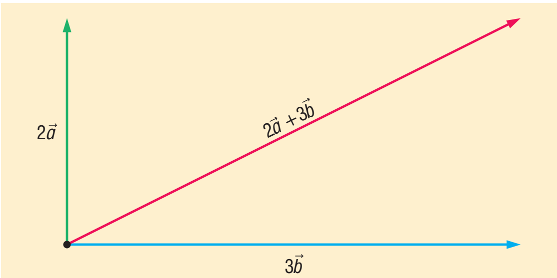
$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{9+16}=5$;

b)



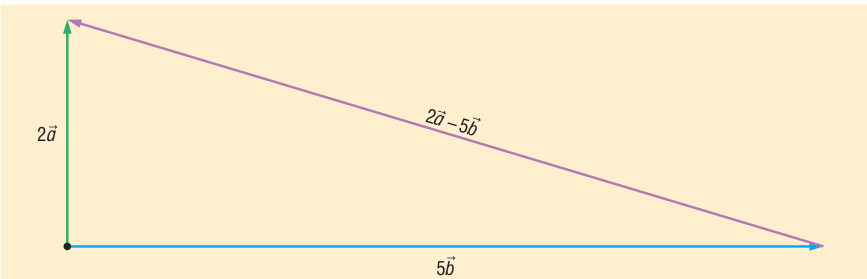
$|\vec{a}-\vec{b}|=5$;

c)



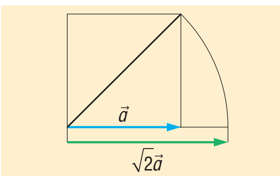
$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{36+144}=6\sqrt{5}$;

d)

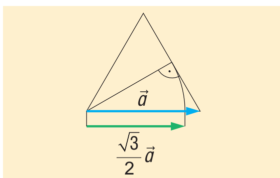


$|2\vec{a}-5\vec{b}|=\sqrt{36+400}=2\sqrt{109}$.

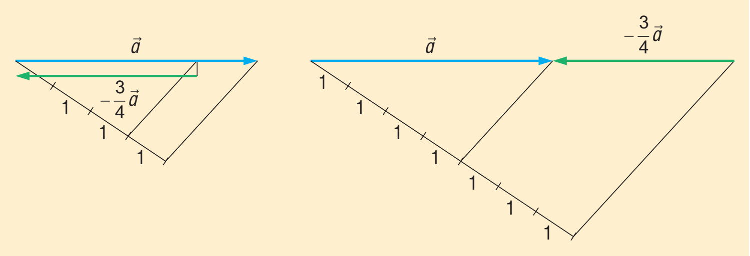
4. *a)*



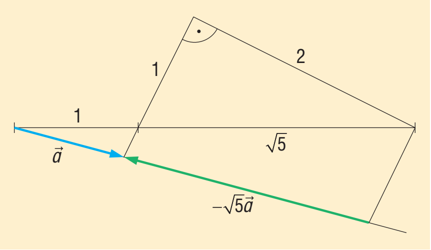
b)



c)



d)



5. a) $5\vec{a}-\vec{b}$; b) $6\vec{b}-2\vec{a}$; c) $\frac{7}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$; d) $4\vec{b}-2\vec{a}$.

6. $\vec{d}=\dfrac{7\vec{b}+8\vec{c}}{15}$.

A D a BC oldalt a mellette levő oldalak arányában, azaz 8 : 7 arányban osztja.

7. $\vec{c}=\dfrac{3\vec{b}+4\vec{a}}{7}$.

8. $ABCD$ paralelogramma $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}$$
$$\vec{b}+\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}.$$

9. Legyen A a vonatkoztatási pont, így

$$\vec{a}=0$$
$$\vec{a}_1=-\vec{c}$$
$$\vec{b}_1=2\vec{b}$$
$$\vec{c}_1=2\vec{c}-\vec{b},$$

tehát

$$\vec{s}_1=\frac{\vec{a}_1+\vec{b}_1+\vec{c}_1}{3}=\frac{-\vec{c}+2\vec{b}+2\vec{c}-\vec{b}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\vec{s}.$$

2. A skaláris szorzat

1. *a)* $3\sqrt{3}$; *b)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* 0; *d)* -5.

2. *a)* $60°$; *b)* $45°$; *c)* $90°$; *d)* $150°$.

3. Ha nem az (általunk kifejtett) erő irányába esik az elmozdulás.

4. $\vec{b} \parallel \vec{c}$.

5. *a)* $-\frac{1}{2}$; *b)* $-\frac{1}{2}\vec{c}$; *c)* $\frac{1}{4}$; *d)* $\frac{1}{2}\vec{b}$.

6. *a)* $0° < \alpha < 180°$; *b)* $\alpha = 180°$; *c)* $\alpha = 90°$; *d)* $\vec{a} = \vec{b},\ \alpha = 0°$.

7. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b}$.

8. Legyen $\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}$ és $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b}$ a két átlóvektor, így

$$e^2 + f^2 = \vec{e}^{\,2} + \vec{f}^{\,2} = (\vec{b} - \vec{a})^2 + (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{b}^{\,2} + \vec{a}^{\,2} - 2\vec{b}\vec{a} + \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\vec{a}\vec{b} = 2a^2 + 2b^2.$$

9. Tükrözzük az a oldal felezőpontjára a háromszöget. Ekkor olyan paralelogrammát kapunk, melynek egyik átlója s_a kétszerese. Az előző feladat alapján

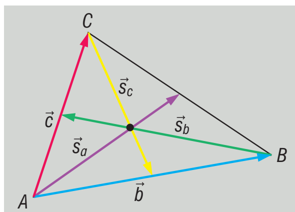
$$a^2 + (2s_a)^2 = 2b^2 + 2c^2.$$

A többi oldalra hasonlóan kapjuk:

$$\begin{aligned}
(2s_a)^2 + a^2 &= 2b^2 + 2c^2\\
(2s_b)^2 + b^2 &= 2a^2 + 2c^2\\
(2s_c)^2 + c^2 &= 2a^2 + 2b^2\\
\hline
4s_a^2 + 4s_b^2 + 4s_c^2 &= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2.
\end{aligned}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Más megoldás:



$$s_a^2 = \vec{s}_a^{\,2} = \left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 + 2\vec{b}\vec{c}}{4}$$

$$s_b^2 = \vec{s}_b^{\,2} = \left(\frac{\vec{c}}{2} - \vec{b}\right)^2 = \frac{c^2 + 4b^2 - 4\vec{b}\vec{c}}{4}$$

$$s_c^2 = \vec{s}_c^{\,2} = \left(\frac{\vec{b}}{2} - \vec{c}\right)^2 = \frac{b^2 + 4c^2 - 4\vec{b}\vec{c}}{4}.$$

$$a^2 = \vec{a}^{\,2} = (\vec{b} - \vec{c})^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{b}\vec{c}$$
$$\Downarrow$$
$$2\vec{b}\vec{c} = b^2 + c^2 - a^2$$

Tehát

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{6b^2 + 6c^2 - 6\vec{b}\vec{c}}{4} = \frac{6b^2 + 6c^2 - 3b^2 - 3c^2 + 3a^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

10. Legyen $\vec{e}_a$ az $\vec{a}$-val azonos irányú $\left(\vec{e}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)$.

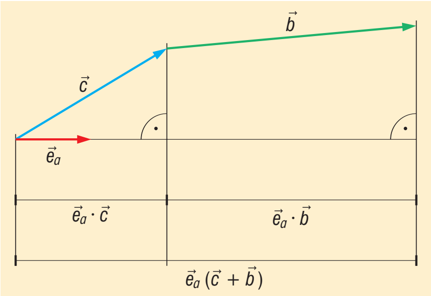
Az ábra alapján

$$\vec{e}_a(\vec{c}+\vec{b}) = \vec{e}_a \cdot \vec{c} + \vec{e}_a \cdot \vec{b}.$$

Szorozzuk mindkét oldalt $|\vec{a}|$-val,

$$\vec{a}(\vec{c}+\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Tehát a skalárszorzat disztributív az összeadásra nézve.



3. Skaláris szorzat a koordináta-rendszerben

1. *a)* 5; *b)* 15; *c)* 10; *d)* 5.

2. *a)* $\alpha = 90^\circ$; *b)* $\alpha = 180^\circ$; *c)* $\alpha = 45^\circ$; *d)* $\alpha \approx 172^\circ$.

3. *a)* $x = -3$; *b)* $x = \dfrac{7}{6}$; *c)* $x = \dfrac{11}{3}$;

d) Az $\vec{a}\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$ a jó vektor, de ennek megfelelő valós x nincs.

4. $\vec{e}_a\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$.

5. A $\cos\gamma = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ összefüggés alkalmazásával $\gamma = 60{,}3^\circ$; $\alpha = 70{,}3^\circ$; $\beta = 49{,}4^\circ$.

6. $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = 87$ J.

7. *a)* Legyen $\vec{u}(4; 3)$ és $\vec{v}(a; b)$, ekkor

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha,$$
$$4a + 3b = 5\sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos\alpha.$$

Ha $\alpha = 0^\circ \Rightarrow 3a = 4b \Rightarrow 4a + 3b = 5\sqrt{a^2+b^2}$;

$0 < \alpha \le 180^\circ \Rightarrow 3a \ne 4b \Rightarrow 4a + 3b < 5\sqrt{a^2+b^2}$.

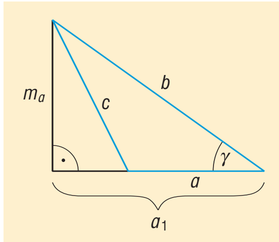
b) Legyen $\vec{u}(a; 3)$ és $\vec{v}(4; b)$, ekkor

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha,$$
$$4a + 3b = \sqrt{a^2+9} \cdot \sqrt{16+b^2} \cdot \cos\alpha.$$

Ha $\alpha = 0^\circ \Rightarrow ab = 12 \Rightarrow 4a + 3b = \sqrt{a^2+9} \cdot \sqrt{16+b^2}$;

$0 < \alpha \le 180^\circ \Rightarrow ab \ne 12 \Rightarrow 4a + 3b < \sqrt{a^2+9} \cdot \sqrt{16+b^2}$.

4. A szinusztétel

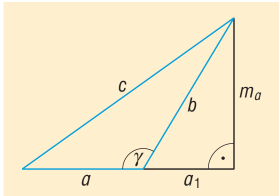


1. A $t_\triangle = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ képlet alapján $\sin\gamma = \dfrac{8}{15}$, így $\gamma_1 = 32{,}23°$ vagy $\gamma_2 = 147{,}77°$.

a) Ha $\gamma = 32{,}23°$, akkor a_1 a b oldal a-ra eső merőleges vetülete. Így $a_1^2 = b^2 - m_a^2 = 161$. Mivel $a_1 > a$, a háromszögben $\beta > 90°$. Legyen $a_2 = a_1 - a$. A Pitagorasz-tétel alapján

$$c^2 = a_2^2 + m_a^2 = 325 - 20\sqrt{161};$$
$$c \approx 8{,}43 \text{ cm}.$$

Így $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{m_a}{a_2}$, $\beta = 108{,}6°$; $\alpha = 39{,}17°$.



b) Ha $\gamma = 147{,}77°$, akkor az előzőhöz hasonlóan $a_1 = \sqrt{161}$.

$$c^2 = (a + a_1)^2 + m_a^2;$$
$$c \approx 24{,}4 \text{ cm}.$$

Így $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{m_a}{a + a_1}$, $\beta = 19{,}6°$; $\alpha = 12{,}63°$.

2. A $t = \dfrac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$ képlet alapján $\sin\varphi = \dfrac{2}{3}$. Mivel φ hegyesszög, $\varphi = 41{,}8°$.

3. A $t = \dfrac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha}$ képlet alapján $t = 28{,}26 \text{ cm}^2$.

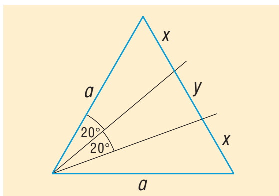
4. Az átlók által meghatározott háromszögek területe

$$t = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{8}.$$

A Heron-képlet alapján

$$t = \sqrt{\frac{e+f+2a}{4} \cdot \frac{e+2a-f}{4} \cdot \frac{e+f-2a}{4} \cdot \frac{f+2a-e}{4}},$$
$$16^2 \cdot t^2 = (35^2 - 4a^2)(4a^2 - 5^2).$$

Innen $a = 6{,}43$ cm és $b = 16{,}47$ cm.



5. A szinusztétel alapján

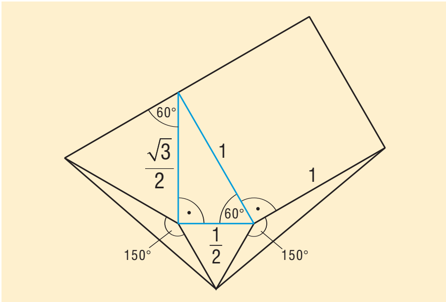
$$\frac{x}{a} = \frac{\sin 20°}{\sin 100°}.$$

Innen $x = 10{,}4$ cm és $y = a - 2x = 9{,}2$ cm.

6. Legyen $a-b = 10$ cm. A szinusztétel alapján
$$\frac{a}{b}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 50^\circ},$$
azaz
$$\frac{b+10}{b}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 50^\circ}.$$
Innen $b = 76{,}6$ cm, $a = b + 10 = 86{,}6$ cm, $c=b\dfrac{\sin 70^\circ}{\sin 50^\circ}=94$ cm.

7. Mivel a körív hossza egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szög nagyságával, a középponti szögek 80º, 120º és 160º. Így
$$t=\frac{r^2}{2}(\sin 80^\circ+\sin 120^\circ+\sin 160^\circ)\approx 1{,}1\ \text{m}^2.$$
Mivel $a = 2r \cdot \sin\alpha$, és a kerületi szög (α) fele a hozzá tartozó középponti szögnek,
$$a = 1{,}3 \text{ m};\ \ b = 2 \text{ m};\ \ c = 1{,}7 \text{ m};\ \ k = 5 \text{ m}.$$

8. A területet az 5 háromszög és a négyzet területeinek öszegeként határozzuk meg.
$$t=\frac{18+7\sqrt{3}}{16}\approx 1{,}88.$$



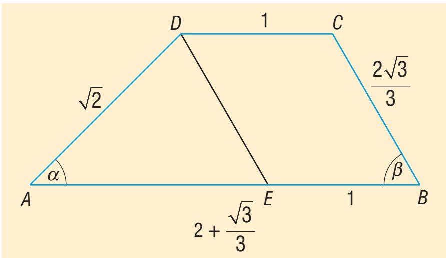
5. A koszinusztétel

1. A c és az a oldalra felírt koszinusztétel alapján $c=5\sqrt{7}\approx 13{,}2$ [cm] és $\alpha = 40{,}9^\circ$. Így $\beta = 79{,}1^\circ$.

2. Legyen a két oldal $a = 5x$, illetve $4x = b$. A koszinusztétel alapján $x=\dfrac{20}{\sqrt{61}}$.

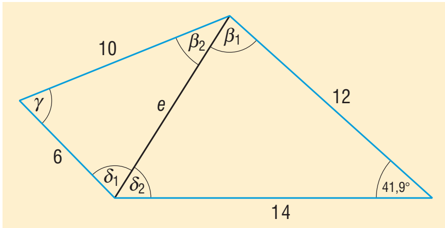
Így $a=\dfrac{100}{\sqrt{61}}$ cm és $b=\dfrac{8}{\sqrt{61}}$ cm.

3. Legyen $DE \parallel CB$. $AED_\triangle$-ben a koszinusztételt alkalmazva $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
A trapéz szögei 45º; 60º; 120º; 135º.



4. A koszinusztételt alkalmazzuk:

$$e^2 = 12^2 + 14^2 - 2 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \cos 41{,}9^\circ = 90,$$



$$\cos\beta_1 = \frac{12^2 + 90 - 14^2}{2 \cdot 12 \cdot \sqrt{90}} \Rightarrow \beta_1 = 80{,}4^\circ,$$

$$\cos\beta_2 = \frac{10^2 + 90 - 6^2}{2 \cdot 10 \cdot \sqrt{90}} \Rightarrow \beta_2 = 35{,}7^\circ,$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 116{,}1^\circ,$$

$$\cos\gamma = \frac{10^2 + 6^2 - 90}{2 \cdot 10 \cdot 6} \Rightarrow \gamma = 67{,}5^\circ,$$

$$\delta = 360^\circ - \beta - \gamma - \alpha = 134{,}5^\circ.$$

5. A gépek által megtett utak $600x$; $600\left(x + \frac{1}{60}\right)$, az utak által közbezárt szög pedig 135°.

A koszinusztétel alapján $x = 0{,}172$ $(x > 0)$. 10,32 perc.

6. A Heron-képlet alapján $t = 84$. A terület a kör sugara segítségével:

$$t = \frac{14 \cdot r}{2} + \frac{13 \cdot r}{2}.$$

Így $r = \frac{56}{9}$ egység.

7. Ha $a^2 + b^2 < c^2$, akkor a koszinusztétel alapján

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &< a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \\ ab\cos\gamma &< 0 \\ \gamma &> 90^\circ \end{aligned}$$

Ez nem lehet igaz mindhárom szögre, így ilyen háromszög nem létezik.

8. Ha $a^2 + b^2 \ge 2c^2$, $b^2 + c^2 \ge 2a^2$, $c^2 + a^2 \ge 2b^2$, akkor ezek összege

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2a^2 + 2b^2 + 2c^2.$$

Tehát mindhárom esetben csak egyenlőség lehet. Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $a = b = c$.

9. Tegyük fel, hogy teljesül a szinusztétel, azaz $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$. Legyen $a = x\sin\alpha$; $b = x\sin\beta$; $c = x\sin\gamma$. Ezeket a koszinusztételbe behelyettesítve kapjuk, hogy az egyenlőség teljesül. Mivel az átalakítások ekvivalensek, a tételt beláttuk.

6. Trigonometrikus összefüggések alkalmazásai

1. A koszinusztétel alapján

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac{a^2}{4}+c^2-s_a^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot c}.$$

Innen $s_a=\frac{\sqrt{106}}{2}$ cm.

Hasonlóan $s_b=\frac{\sqrt{79}}{2}$ cm és $s_c=\frac{\sqrt{46}}{2}$ cm.

2. 422,5 km.

3. Az arányok alapján a szögek 20º, 70º és 90º. Az ismert oldal helyzete alapján három eset van.

a) $\alpha=70º$: $c=53{,}2$ cm, $b=18{,}2$ cm.

b) $\alpha=20º$: $c=137{,}4$ cm, $b=146{,}2$ cm.

c) $\alpha=90º$: $c=17$ cm, $b=47$ cm.

4. Ha az adott szög α, akkor a következő koszinusztételeket írjuk fel:

$$b^2=s_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2s_a\frac{a}{2}\cos\varphi;$$
$$c^2=s_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2s_a\frac{a}{2}\cos(180º-\varphi);$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Ezekből $b=6{,}2$ cm és $c=4{,}4$ cm.

5. Tudjuk, hogy a szögfelező az átfogót a befogók arányában osztja, a két rész $\frac{10b}{a+b}$, ill. $\frac{10a}{a+b}$. Írjuk fel ezekre a koszinusztételt, és írjuk fel a Pitagorasz-tételt

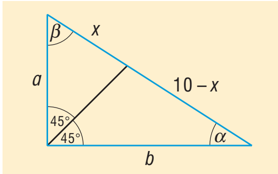
$$\frac{100b^2}{(a+b)^2}=b^2+16-8b\cos45º;$$
$$\frac{100a^2}{(a+b)^2}=a^2+16-8a\cos45º;$$
$$a^2+b^2=100.$$

Ezek alapján $a=9{,}12$ cm és $b=4{,}1$ cm.

Másik megoldás:
A szinusztételt alkalmazzuk

$$\left.\begin{aligned}\frac{4}{x}&=\frac{\sin\beta}{\sin 45^\circ}\\ \frac{4}{10-x}&=\frac{\sin\alpha}{\sin 45^\circ}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{4}{x}&=\frac{b\cdot 2}{10\sqrt{2}}\\ \frac{4}{10-x}&=\frac{a\sqrt{2}}{10}\end{aligned}\right\}$$



Innen $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pitagorasz tétele alapján $a^2+b^2=100$.
Tehát

$$\left.\begin{aligned}a^2+b^2&=100\\ a+b&=\frac{ab}{2\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}$$

$$100+2ab=\frac{a^2b^2}{8}$$

$$a^2b^2-16ab-800=0$$

Innen, mivel $ab>0$

$$ab=8+12\sqrt{6},$$

$$a=\frac{8+12\sqrt{6}}{b}.$$

Tehát

$$\left(\frac{8+12\sqrt{6}}{b}\right)^2+b^2=100$$

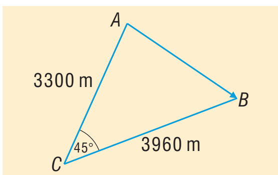
$$b^4-100b^2+192\sqrt{6}+928=0$$

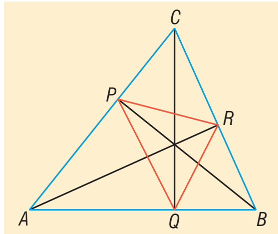
Innen

$$b_1^2=56-16\sqrt{6} \qquad \text{vagy} \qquad b_2^2=44+16\sqrt{6}$$
$$a_1^2=44+16\sqrt{6} \qquad\qquad\qquad a_2^2=56-16\sqrt{6}$$

Tehát a befogók 9,12 cm és 4,1 cm.

6. Legyen a villám kiindulópontja az A pont, a végpontja B. A feladat szövege szerint A-ból 10 s, B-ből 12 s alatt és a dörgés hangja a C megfigyelőhöz, és C-ből az AB szakasz 45° alatt látszik. Az AB szakaszra a koszinusztételt felírva és a számítást elvégezve: $AB = 2844$ m.





7. Mivel $CQA\sphericalangle = CRA\sphericalangle = 90^\circ$, R és Q illeszkedik AC Thalesz körére. Mivel az adott ívhez tartozó kerületi szögek egyenlőek, $RQC\sphericalangle = RAC\sphericalangle = 90^\circ - \gamma$. Hasonlóan belátható, hogy $CQP\sphericalangle = CBP\sphericalangle = 90^\circ - \gamma$. Így $RQP\sphericalangle = 180^\circ - 2\gamma$.
$CAQ_\triangle$-ben $QA = b \cdot \cos\alpha$, $BPA_\triangle$-ben $PA = c \cdot \cos\alpha$.
$PAQ_\triangle$-ben koszinusztétel

$$PQ^2 = b^2 \cdot \cos^2\alpha + c^2 \cdot \cos^2\alpha - 2bc \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos\alpha = \cos^2\alpha \cdot a.$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$RQ^2 = \cos^2\beta \cdot b, \quad RP^2 = \cos^2\gamma \cdot c.$$

Így

$$k = \sqrt{a}\cos\alpha + \sqrt{b}\cos\beta + \sqrt{c}\cos\gamma.$$

8. Legyen $\alpha = 120^\circ$, így a a leghosszabb oldal. Legyen $2c = a + b$. Ebből és az a oldalra felírt koszinusztételből adódik, hogy $b = \frac{3}{5}c$ és $a = \frac{7}{5}c$. Ezeket behelyettesítve a megfelelő koszinusztételbe kapjuk, hogy $\gamma = 38{,}21^\circ$ és $\beta = 21{,}79^\circ$.

7. Összegzési képletek

1. *a)* $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

b) $\sin(-15^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; $\cos(-15^\circ) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

c) $\sin 105^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos 105^\circ = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

2. *a)* $$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) =$$
$$= (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

b) $$\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\alpha + \sin\alpha\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\alpha\sin\frac{2\pi}{3} +$$
$$+ \sin\alpha\cos\frac{4\pi}{3} + \cos\alpha\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = 0.$$

3. *a)* $\sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y$.
b) $\sin(x+y) - \sin(x-y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y - \sin x\cos y + \cos x\sin y = 2\cos x\sin y$.

4. *a)* Tudjuk: $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$.

Legyen: $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ és $y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\Rightarrow$ $x + y = \alpha$ és $x - y = \beta$.

Tehát: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

b) Tudjuk: $\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y.$

Legyen: $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ és $y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\Rightarrow$ $x+y=\alpha$ és $x-y=\beta.$

Tehát: $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

5. *a)* $\sin\gamma=\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))=-\sin((\alpha+\beta)-180^\circ)=\sin(\alpha+\beta).$

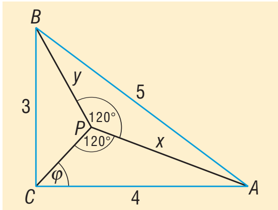
b) $\sin\alpha\sin\gamma-\cos\alpha\cos\gamma=-\cos(\alpha+\gamma)=\cos((\alpha+\gamma)-180^\circ)=\cos(180^\circ-(\alpha+\gamma))=\cos\beta.$

6. *a)* $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

b) $\sin(\alpha+\beta-\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

c) $\cos(\alpha-\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

7. $CPB_\triangle$-ben a szinusztételből:



$$y=2\sqrt{3}\cos\varphi;$$

$CAP_\triangle$-ben a szinusztételből:

$$x=\frac{8}{\sqrt{3}}\sin\varphi;$$

$PAB_\triangle$-ben koszinusztételből $\operatorname{tg}\varphi=1{,}0796$, így $\varphi=47{,}2^\circ$.
Tehát $x=3{,}39$ m és $y=2{,}35$ m.

8. Az összegzési képletek alkalmazásai

1. *a)* $\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3};$ *b)* $\operatorname{tg}(-75^\circ)=-2-\sqrt{3};$ *c)* $\operatorname{tg}105^\circ=-2-\sqrt{3}.$

2. *a)* $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-1}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}.$$

b) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+1}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$$

3. Tudjuk: $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$.

Így: $\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{ctg}(\alpha+\alpha)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

4. *a)* A $\left.\begin{array}{r} 2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{4} \\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer alapján:

$$\sin\alpha_1=\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{8}};\quad \cos\alpha_1=\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}};$$
$$\sin\alpha_2=-\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{8}};\quad \cos\alpha_2=-\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}};$$
$$\sin\alpha_3=\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}};\quad \cos\alpha_3=\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{8}};$$
$$\sin\alpha_4=-\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}};\quad \cos\alpha_4=-\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{8}}.$$

b) A $\left.\begin{array}{r} \cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{1}{3} \\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer alapján:

$$\sin\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \cos\alpha_1=\sqrt{\frac{2}{3}};\quad \operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\sin\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \cos\alpha_2=-\sqrt{\frac{2}{3}};\quad \operatorname{tg}\alpha_2=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\sin\alpha_3=-\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \cos\alpha_3=\sqrt{\frac{2}{3}};\quad \operatorname{tg}\alpha_3=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\sin\alpha_4=-\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \cos\alpha_4=-\sqrt{\frac{2}{3}};\quad \operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

c) A $\left.\begin{array}{r} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{4} \\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer alapján:

$$\sin\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{17}};\quad \cos\alpha_1=\frac{4}{\sqrt{17}};$$
$$\sin\alpha_2=-\frac{1}{\sqrt{17}};\quad \cos\alpha_2=-\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

d) A $\left.\begin{aligned}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer alapján:

$$\sin\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{5}};\quad \cos\alpha_1=\frac{2}{\sqrt{5}};$$
$$\sin\alpha_2=-\frac{1}{\sqrt{5}};\quad \cos\alpha_2=-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

5. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

6. *a)* $\dfrac{2}{\sin 2\alpha}=\dfrac{2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha.$

b) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=2\operatorname{ctg}\alpha.$

c) $2(\cos(45^\circ+\alpha))^2=2(\cos 45^\circ\cos\alpha-\sin 45^\circ\sin\alpha)^2=(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=$
$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin 2\alpha.$

7. Legyen $\alpha=x$; $\beta=2x$, így $\gamma=180^\circ-3x$.

A szinusztétel alapján $\cos x=\dfrac{7}{12}$, tehát $x=54{,}3^\circ$.

Koszinusztétellel a hiányzó oldal is meghatározható.

$$c=3{,}14\text{ cm};\quad \alpha=54{,}3^\circ;\quad \beta=108{,}6^\circ;\quad \gamma=17{,}1^\circ$$

8. A szögfelezőtétel és koszinusztételek alkalmazásával $\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{121}{120}$, így nincs ilyen háromszög.

9. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek

1. *a)* $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ *b)* $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+l\pi,\ l\in\mathbb{Z};$

c) $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+m\pi,\ m\in\mathbb{Z};$ *d)* $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$

2. *a)* $x=\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ *b)* $x=\dfrac{\pi}{12}-m\pi,\ m\in\mathbb{Z};$

c) $x=\dfrac{\pi}{2}-n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$

3. *a)* $x=\dfrac{\pi}{2}+2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$ vagy $x=\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z};$

b) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

c) $x=\frac{\pi}{2}+2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$ vagy $x=\pi+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$

4. $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

5. *a)* $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ vagy $x=\frac{\pi}{6}+2m\pi$ vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2n\pi;\ k;m;n\in\mathbb{Z};$

b) $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z};$

c) $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}.$

6. *a)* $\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z};$ *b)* $\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z};$

c) $-\frac{2\pi}{3}+l\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+l\pi;\ l\in\mathbb{Z}.$

7. *a)* $\frac{\pi}{2}+2m\pi\le x\le\frac{7\pi}{6}+2m\pi$ vagy $-\frac{\pi}{2}+2l\pi\le x\le-\frac{\pi}{6}+2l\pi;\ m;l\in\mathbb{Z};$

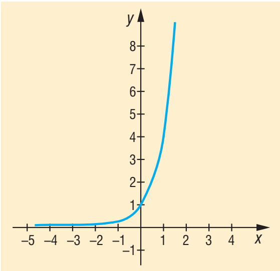
b) $\frac{\pi}{2}+2n\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}+2n\pi;\ n\in\mathbb{Z};$

c) $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$ vagy $\frac{\pi}{6}+2m\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+2m\pi;\ m;n\in\mathbb{Z}.$

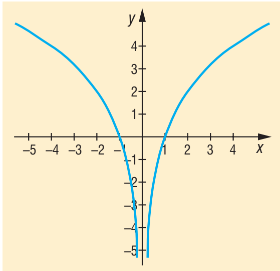
Függvények

1. Az exponenciális- és logaritmusfüggvény

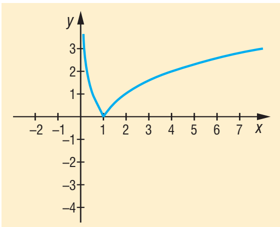
1. *a)* $x \mapsto 2^{2x} = 4^x$;



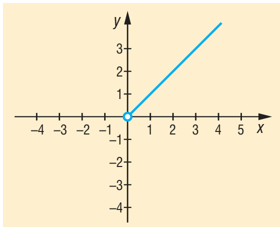
b) $x \mapsto \log_2 x^2, \; x \neq 0.$



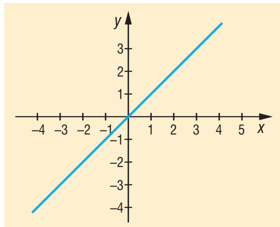
2. *a)* $x \mapsto |\log_2 x|, \; x > 0;$



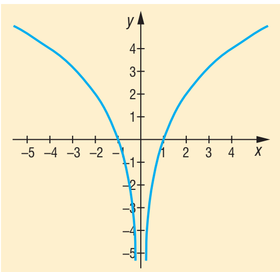
b) $x \mapsto 2^{\log_2 x}, \; x > 0;$



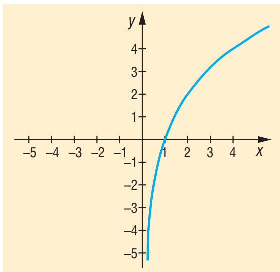
c) $x \mapsto \log_2 2^x.$



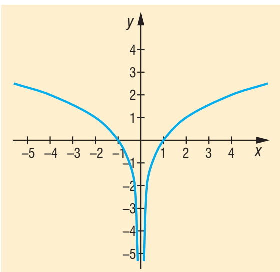
3. *a)* $x \mapsto \log_2 x^2, \; x \neq 0;$



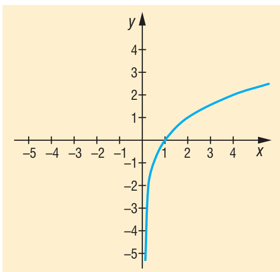
$x \mapsto 2 \cdot \log_2 x, \; x > 0;$



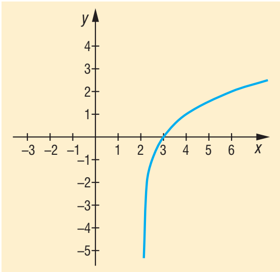
b) $x \mapsto \log_2 \sqrt{x^2}, \; x \neq 0;$



$x \mapsto \log_2 x, \; x > 0.$

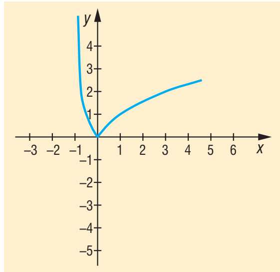


4. *a)* $x \mapsto \log_2(x-2),\ \ x > 2;$



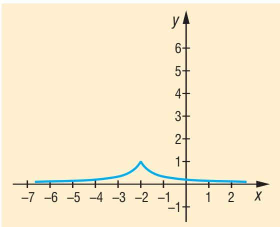
(2; ∞) szig. mon. növő
max.: nincs
min.: nincs

b) $x \mapsto \left|\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\right|,\ \ x > -1;$



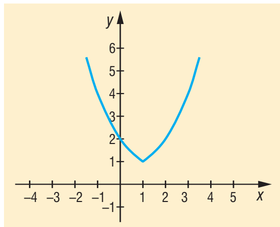
(–1; 0] szig. mon. csökkenő
[0; ∞) szig. mon. növő
max.: nincs
min.: helye $x = 0$
értéke $y = 0$

c) $x \mapsto \left(\dfrac{1}{3}\right)^{|(x+2)|};$



(–∞; –2] szig. mon. növő
[–2; ∞) szig. mon. csökkenő
max.: helye $x = -2$
értéke $y = 1$
min.: nincs

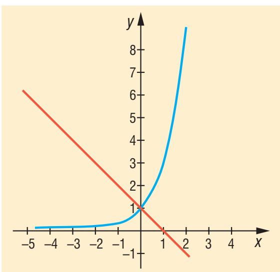
d) $x \mapsto 2^{|x-1|}.$



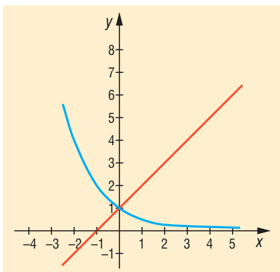
(–∞; 1] szig. mon. csökkenő
[1; ∞) szig. mon. növő
max.: nincs
min.: helye $x = 1$
értéke $y = 1$

2. Egyenletek és függvények

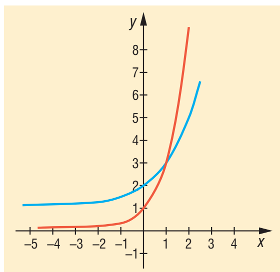
1. *a)* $3^x = 1 - x;$
$x = 0;$



b) $2^{-x} = 1 + x;$
$x = 0;$



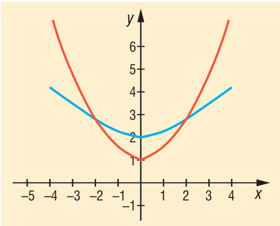
c) $3^x + 6^x = 9^x;$
$1 + 2^x = 3^x;$
$x = 1;$



d) $3^{|x|}+4^{|x|}=5^{|x|}$;

$$1+\left(\frac{4}{3}\right)^{|x|}=\left(\frac{5}{3}\right)^{|x|};$$

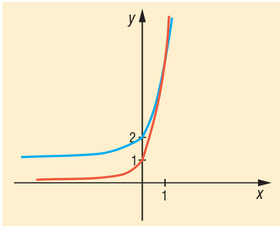
$x_1=2 \quad x_2=-2$;



e) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=6^x$;

$$1+\left(17+12\sqrt{2}\right)^x=\left(18+12\sqrt{2}\right)^x;$$

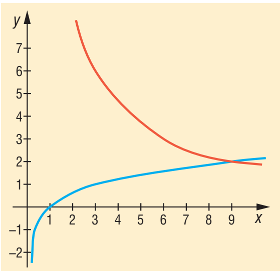
$x=1.$



2. *a)* $x\cdot\log_3 x=18$;

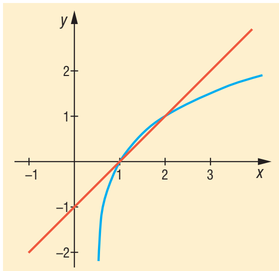
$$\log_3 x=\frac{18}{x};$$

$x=9$;



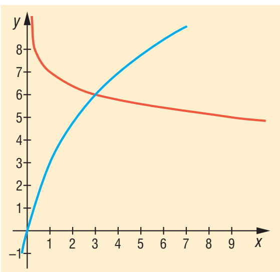
b) $\log_2 x=x-1$;

$x_1=1 \quad x_2=2$;



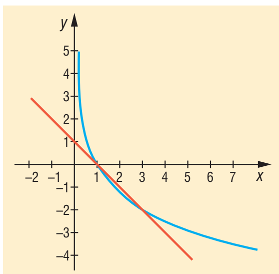
c) $3\log_2(x+1)=\log_{\frac{1}{3}}x+7$;

$x=3$;



d) $2\log_{\frac{1}{3}}x=1-x$;

$x_1=1 \quad x_2=3.$



3. Trigonometrikus függvények

1. *a)* $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = [-1; 1]$

zérushelyei: $x_0 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

páros függvény

periódusa π

$\left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ szig. mon. csökkenő; $k \in \mathbb{Z}$

$\left[\frac{\pi}{2} + l\pi; \pi + l\pi\right]$ szig. mon. növő; $l \in \mathbb{Z}$

korlátos

b) $g(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$D_g = \mathbb{R}$

$R_g = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

nem páros és nem páratlan függvény

periódusa 2π

$\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$ szig. mon. növő; $k \in \mathbb{Z}$

$\left[\frac{3\pi}{4} + 2l\pi; \frac{7\pi}{4} + 2l\pi\right]$ szig. mon. csökkenő; $l \in \mathbb{Z}$

zérushelyei: $x_0 = \frac{\pi}{4} + m\pi;\ m \in \mathbb{Z}$

korlátos

c) $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = [-2; 2]$

nem páros és nem páratlan függvény

periódusa 2π

$\left[-\frac{5\pi}{6} + 2n\pi; \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right]$ szig. mon. növő; $n \in \mathbb{Z}$

$\left[\frac{\pi}{6} + 2m\pi; \frac{7\pi}{6} + 2m\pi\right]$ szig. mon. csökkenő; $m \in \mathbb{Z}$

zérushelyei: $x_0 = -\frac{\pi}{3} + n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

korlátos

d) $h(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$D_h=\mathbb{R}$
$R_h=[-1;\ 1]$
nem páros és nem páratlan függvény
periódusa 2π

$\left[-\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$ szig. mon. növő; $k\in\mathbb{Z}$

$\left[\frac{\pi}{6}+2l\pi;\frac{7\pi}{6}+2l\pi\right]$ szig. mon. csökkenő; $l\in\mathbb{Z}$

zérushelyei: $x_0=-\frac{\pi}{3}+n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$

korlátos

e) $g(x)=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4}$
$D_g=\mathbb{R}$
$R_g=\left[\frac{1}{2};1\right]$
páros függvény
periódusa $\frac{\pi}{2}$

$\left[-\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2};n\frac{\pi}{2}\right]$ szig. mon. növő; $n\in\mathbb{Z}$

$\left[k\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right]$ szig. mon. csökkenő; $k\in\mathbb{Z}$
zérushelye nincs
korlátos

f) $h(x)=\sin x\cdot|\cos x| = \begin{cases}\frac{\sin 2x}{2}, & \text{ha } -\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})\\ -\frac{\sin 2x}{2}, & \text{ha } \frac{\pi}{2}+2m\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}+2m\pi\ \ (m\in\mathbb{Z})\end{cases}$

$D_h=\mathbb{R}$
$R_h=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$
páratlan függvény
periódusa 2π
zérushelyei: $x_0=m\frac{\pi}{2};\ m\in\mathbb{Z}$

$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$
szig. mon. csökkenő; $k\in\mathbb{Z}$

$$\left[-\frac{\pi}{4}+2m\pi;\frac{\pi}{4}+2m\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2m\pi;\frac{3\pi}{4}+2m\pi\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4}+2m\pi;\frac{3\pi}{2}+2m\pi\right]$$

szig. mon. növő; $m\in\mathbb{Z}$
korlátos

2. *a)* $f(x)=\dfrac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{1+\cos 2x+\sin 2x};\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f(x)=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}x+1}=\frac{1}{\mathrm{tg}x+1}+\mathrm{tg}x-1$$

$$D_f=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$$

$R_f=(-\infty;-4]\cup[0;\infty)$
zérushelye: $x_0=0$
minimuma nincs
lokális minimum helye: $x=0$
értéke: $y=0$
maximuma nincs
lokális maximum helye: $\mathrm{tg}x=-2\Rightarrow x=-1{,}11$
értéke: $y=-4$

$\left(-\dfrac{\pi}{2};-1{,}11\right]\cup\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ szig. mon. növő

$\left[-1{,}11;-\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{4};0\right]$ szig. mon. csökkenő

b) $g(x)=\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}=\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right);\quad x\in\left(-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$D_g=\left(-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$$

$R_g=\mathbb{R}$
zérushelye: $x_0=-\dfrac{\pi}{4}$
minimuma nincs
maximuma nincs
szig. mon. növő

4. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (kiegészítő anyag)

1. 3 db megoldás.

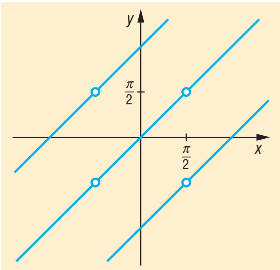
2. Van valós gyök, ha $\frac{1}{2} \le a \le 1$.

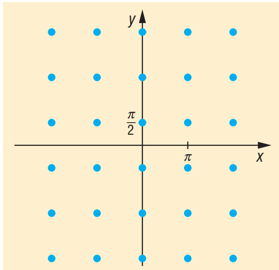
3. $R_f = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

4. A bal oldal maximuma 4, a jobb oldal minimuma 4.

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad n \in \mathbb{Z}$.

5. *a)* $y = x + n\pi; \ n; m \in \mathbb{Z}; \ x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi;$ *b)* $x = k\pi; \ y = \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad k; n \in \mathbb{Z}$.





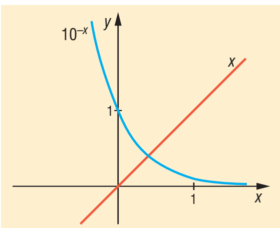
5. Vegyes feladatok (kiegészítő anyag)

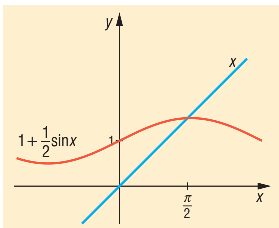
1. *a)* $-3 < x < -\sqrt{6}$ vagy $\sqrt{6} < x < 3$;

b) $\frac{1}{2} < x < 1$;

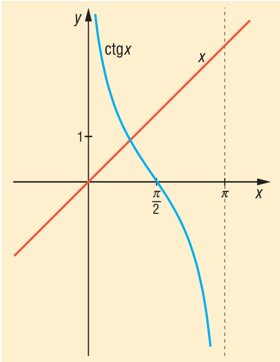
c) $\frac{\pi}{8} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ vagy $-\frac{\pi}{4} + n\pi < x < -\frac{\pi}{8} + n\pi \quad (k; n \in \mathbb{Z})$.

2. *a)* $x = 0{,}399$; *b)* $x = 1{,}49$;

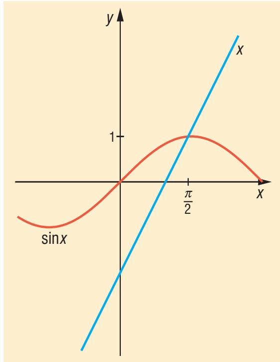




c) $x = 0{,}86;$

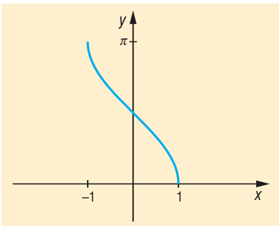


d) $x = 1{,}498 \approx \dfrac{\pi}{2}.$

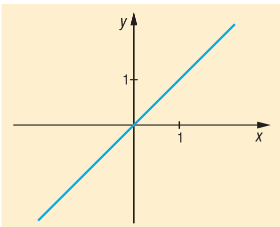


6. Inverz függvények (kiegészítő anyag)

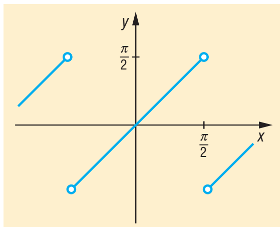
1.



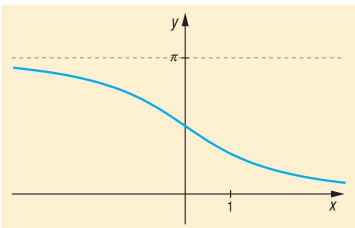
2. *a)*



b)



3.



4. *a)* $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} \overset{?}{=} \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x \qquad \alpha; \beta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$

Legyen $\alpha = \operatorname{arctg} x$ és $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x},$

$$\underbrace{\operatorname{tg}\alpha = x \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{x}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{ctg}\beta = x = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha;\beta > 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}; \\ \alpha;\beta < 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

b) $\arcsin x + \arccos x \stackrel{?}{=} \dfrac{\pi}{2} \quad (-1 \le x \le 1).$

Legyen $\alpha = \arcsin x$ és $\beta = \arccos x$, ekkor (1) $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (2) $\beta \in [0; \pi]$.

$\sin\alpha = x$ és $\cos\beta = x \stackrel{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}.$

Koordinátageometria

1. Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal (emlékeztető)

2. *a)* $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$; *b)* $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; *c)* $\vec{c} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$;
d) $\vec{d} = -6\vec{j}$; *e)* $\vec{e} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$; *f)* $\vec{f} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$.

3. *a)* $\vec{a} + \vec{b}(1; 7)$; *b)* $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}(5; -1)$; *c)* $\vec{d} - \vec{b}(7; -14)$;
d) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}(3; 4)$; *e)* $2\vec{c}(-4; 6)$; *f)* $-3\vec{d}(-21; 27)$;
g) $\frac{1}{3}\vec{a}\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$; *h)* $-\frac{3}{5}\vec{d}\left(-\frac{21}{5}; \frac{27}{5}\right)$; *i)* $3\vec{a} + 2\vec{b}(3; 16)$
j) $3\vec{c} - 5\vec{d}(-41; 54)$ *k)* $2(-2\vec{a} + 6\vec{d})(80; 100)$ *l)* $-\frac{3}{4}(7\vec{c} - 5\vec{a})$
$-\frac{21}{4}\vec{c} + \frac{15}{4}\vec{a}\left(\frac{57}{4}; -\frac{33}{4}\right)$.

4. *a)* $\overrightarrow{AB}(3, 1)$ $\overrightarrow{BA}(-3, -1)$;
b) $\overrightarrow{AB}(-5, 5)$ $\overrightarrow{BA}(5, -5)$;
c) $\overrightarrow{AB}(9, -5)$ $\overrightarrow{BA}(-9, 5)$;
d) $\overrightarrow{AB}(-12, 12)$ $\overrightarrow{BA}(12, -12)$.

5. *a)* 6; *b)* 15; *c)* –73; *d)* 92.

6. $x = \frac{20}{7}$.

2. Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge

1. *a)* $\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{13}$; *c)* $\sqrt{13}$; *d)* $\sqrt{65}$; *e)* 1; *f)* $\sqrt{11}$.

2. *a)* 3; *b)* $2\sqrt{2}$; *c)* 13; *d)* 5; *e)* $2\sqrt{41}$; *f)* 4.

3. *a)* $\sqrt{10}$; *b)* $5\sqrt{2}$; *c)* $\sqrt{106}$; *d)* $12\sqrt{2}$.

4. *a)* $\sqrt{34} + 2\sqrt{10} + \sqrt{26}$; *b)* $\sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{29}$; *c)* $\sqrt{40} + \sqrt{45} + \sqrt{97}$.

5. *a)* 90º; *b)* 72,5º; *c)* 176º.

6. *a)* 14; *b)* $\frac{11}{2}$; *c)* 21.

7. *a)* $t = 18;\ k = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{26}$; *b)* $D(7;\, 4)$.

8. $y = \dfrac{50\sqrt{3} - 96}{13} \approx -0{,}723$.

3. Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái

1. *a)* $F\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$; *b)* $F\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$; *c)* $F\left(\frac{5}{2}; -\frac{15}{2}\right)$; *d)* $F(2; -1)$

2. *a)* $C(-3;\, 0)$ $D(6;\, 3)$; *b)* $C(9; -4)$ $D(-6;\, 11)$;
c) $C(-11;\, 0)$ $D(12; -15)$; *d)* $C(20; -19)$ $D(-16;\, 17)$.

3. *a)* $C\left(1; \frac{4}{3}\right)$ $D\left(2; \frac{5}{3}\right)$; *b)* $C\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$ $D\left(\frac{2}{3}; \frac{13}{3}\right)$;
c) $C\left(1; -\frac{20}{3}\right)$ $D\left(4; -\frac{25}{3}\right)$; *d)* $C(4; -3)$ $D(0;\, 1)$.

4. *a)* $C(-6; -1)$ $D(9;\, 4)$; *b)* $C(14; -9)$ $D(-11;\, 16)$;
c) $C(-20;\, 5)$ $D(25; -20)$; *d)* $C(32; -31)$ $D(-28;\, 29)$.

5. *a)* $P\left(-\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)$; *b)* $P\left(-\frac{13}{4}; \frac{5}{4}\right)$; *c)* $P\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right)$;
d) $P\left(-\frac{15}{8}; \frac{3}{8}\right)$; *e)* $P\left(\frac{13}{7}; -2\right)$; *f)* $P\left(-\frac{15}{19}; -\frac{6}{19}\right)$.

6. *a)* $D(-1; -9)$ $F\left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$; *b)* $D(5; 3)$ $F\left(0; -\frac{1}{2}\right)$; *c)* $D(-9; 1)$ $F\left(-\frac{7}{2}; -1\right)$.

7. $$\vec{p} = \frac{\vec{f_1} + \vec{f_3}}{2} = \frac{\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \dfrac{\vec{c} + \vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4};$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{f_2} + \vec{f_4}}{2} = \frac{\dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \dfrac{\vec{a} + \vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$

A két felezőpont egybeesik: $P\left(2; \frac{7}{4}\right)$.

8. *a)* $S(3;\,3)$; *b)* $S\left(\frac{2}{3};1\right)$; *c)* $S\left(\frac{1}{3};-\frac{8}{3}\right)$.

9. *a)* $C(4;-2)$; *b)* $C(10;-10)$; *c)* $C(10;-22)$.

10. *a)* $A(-4;\,1)$ $B(0;-5)$ $C(10;\,7)$;

b) $\vec{s}=\frac{\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3}}{3}$ $\vec{s}'=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\vec{s}(2;\,1)$; $\vec{s}'(2;\,1)$;

$\vec{s}=\vec{s}'$.

11. $B(5;\,1)$ $C(2;\,7)$ $S\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3}\right)$.

4. Az egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben

1. *a)* $x=-6$; *b)* $x=6$; *c)* $x=-9$;

d) $x=15$; *e)* $x=-4$; *f)* $x=3\left(\sqrt{2}-2\right)$.

2. *a)* $y=\frac{17}{5}$; *b)* $y=5$ *c)* $y=3$

d) $y=\frac{31}{7}$; *e)* $y=\frac{11}{3}$; *f)* $y=\frac{2\sqrt{2}+17}{5}$.

3. *a)* nem; *b)* igen; *c)* igen; *d)* nem; *e)* nem.

4. *a)* igen; *b)* nem; *c)* nem; *d)* nem.

5. *a)* $\vec{v}(3;-2)$ $\vec{n}(2;\,3)$ $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{3}$ $\alpha=-33{,}7^\circ$;

b) $\vec{v}(1;\,1)$ $\vec{n}(1;-1)$ $\operatorname{tg}\alpha=1$ $\alpha=45^\circ$;

c) $\vec{v}(5;-6)$ $\vec{n}(6;\,5)$ $\operatorname{tg}\alpha=-1{,}2$ $\alpha=-50{,}2^\circ$.

6. *a)* $\vec{n}(0;\,2)$ $\vec{v}(1;\,0)$ $\operatorname{tg}\alpha=0$ $\alpha=0^\circ$;

b) $\vec{n}(1;-2)$ $\vec{v}(2;\,1)$ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ $\alpha=26{,}6^\circ$;

c) $\vec{n}(3;\,5)$ $\vec{v}(5;-3)$ $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}6$ $\alpha=-31^\circ$;

d) $\vec{n}(2;\,5)$ $\vec{v}(5;-2)$ $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}4$ $\alpha=-21{,}8^\circ$.

7. *a)* $m_f=-1$; $\alpha=-45^\circ$; *b)* $m_f=-\frac{1}{5}$; $\alpha=-11{,}3^\circ$; *c)* $m_f=-2$; $\alpha=-63{,}4^\circ$;

d) $m_f=\frac{1}{3}$; $\alpha=18{,}4^\circ$; *e)* $m_f=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\alpha=-24^\circ$; *f)* nem értelmezhető, $\alpha=90^\circ$.

8. *a)* $y=-18$; *b)* $y=2$.

5. Az egyenes egyenlete I.

1. *a)* $x+y=0$; *b)* $2x+3y=0$; *c)* $-x+4y=0$;
d) $5x-3y=0$; *e)* $4x+8y=0$.

2. *a)* $-x+y=1$; *b)* $3x+y=-6$; *c)* $x-4y=19$.

3. *a)* $\vec{n}(0;\,1)$ $\vec{v}(1;\,0)$ $\operatorname{tg}\alpha=0$;
b) $\vec{n}(1;\,1)$ $\vec{v}(1;\,-1)$ $\operatorname{tg}\alpha=-1$;
c) $\vec{n}(1;\,-3)$ $\vec{v}(3;\,1)$ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$;
d) $\vec{n}(4;\,-1)$ $\vec{v}(1;\,4)$ $\operatorname{tg}\alpha=4$;
e) $\vec{n}(1;\,0)$ $\vec{v}(0;\,1)$ nem értelmezhető.

4. *a)* $y=-\frac{3}{2}$; *b)* $y=-4$; *c)* $y=\frac{7}{2}$;
d) $y=-14$; *e)* $y=\frac{1}{6}$; *f)* $y=\frac{-3-5\sqrt{5}}{2}$.

5. *a)* $x-y=0$; *b)* $x+7y=5$; *c)* $12x-10y=-37$; *d)* $20x+6y=-79$.

6. *a)* $2x-3y=-4$; *b)* $\sqrt{3}x-2y=\sqrt{3}-4$; *c)* $2x-y=0$.

6. Az egyenes egyenlete II.

1. *a)* $x-y=0$; *b)* $3x-2y=0$; *c)* $4x+y=0$;
d) $7x+5y=0$; *e)* $2x-8y=0$; *f)* $\sqrt{5}x-y=0$.

2. *a)* $x-2y=-2$; *b)* $5x+2y=11$; *c)* $2x-7y=-64$.

3. *a)* $x-2y=0$; *b)* $x-y=0$; *c)* $\sqrt{3}x-y=0$;
d) $x=0$; *e)* $x+y=0$; *f)* $\sqrt{3}x+y=0$.

4. *a)* $y=x-1$; *b)* $y=3x+8$; *c)* $y=-2x+1$.

5. *a)* $x-3y=0$; *b)* $13x+6y=-4$; *c)* $6x-y=-13$.

6. $2y=x$.

7. *a)* $2x-3y=16$; *b)* $3x+2y=11$.

8. $a=2$ vagy $a=-2$.

9. $p=2\sqrt{3}$ vagy $p=-2\sqrt{3}$.

10. Igen.

11. $t = 15$.

12. a: $7x - 2y = -20$; f_a: $2x + 7y = 17$;
b: $x - 2y = 4$; f_b: $2x + y = 3$;
c: $x + y = 10$; f_c: $x - y = -2$.

13. a: $7x - 3y = -22$; s_a: $x + 11y = 14$;
b: $3x - 7y = 2$; s_b: $11x + y = -6$;
c: $x + y = 4$; s_c: $x - y = -2$.

14. a: $2x + 5y = 2$; m_a: $5x - 2y = 0$;
b: $3x - y = 1$; m_b: $x + 3y = 0$;
c: $7x + 4y = 34$; m_c: $4x - 7y = 0$.

7. Két egyenes metszéspontja, távolsága, hajlásszöge

1. *a)* $M(2; 3)$; *b)* $M(1; -4)$; *c)* $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;
d) $M(1; 1)$; *e)* nincs, $e \parallel f$.

2. $A\left(\frac{3}{8}; \frac{45}{8}\right)$ $B\left(-\frac{12}{5}; 1\right)$ $C(5; 1)$.

3. $P\left(\frac{355}{46}; -\frac{11}{46}\right)$.

4. *a)* $\frac{2}{\sqrt{5}}$; *b)* $\frac{12}{\sqrt{5}}$; *c)* $\sqrt{5}$; *d)* $\frac{13}{\sqrt{5}}$; *e)* $\frac{16}{\sqrt{5}}$; *f)* 0.

5. $m_a = \frac{37}{8}$; $m_b = \frac{37\sqrt{2}}{10}$; $m_c = \frac{37\sqrt{34}}{34}$; $t_\triangle = \frac{1369}{80} \approx 17{,}1$.

6. *a)* 6; *b)* $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\frac{5\sqrt{34}}{17}$; *d)* 0.

7. $t = 27$;

8. *a)* 26,6°; *b)* 45°; *c)* 26,6°; *d)* 45°; *e)* 0°.

9. $\alpha = 45°$; $\beta = 59°$; $\gamma = 76°$.

10. $m_a = \frac{24\sqrt{5}}{5}$; $m_b = 9\sqrt{2}$; $m_c = \frac{72\sqrt{53}}{53}$; $t_\triangle = 72$; $\alpha = 76°$; $\beta = 70{,}3°$; $\gamma = 33{,}7°$.

11. $t_\triangle = 47$; $M\left(\frac{436}{11}; \frac{256}{171}\right)$.

12. $M\left(\frac{153}{44}; \frac{51}{11}\right)$; $\alpha = 95{,}8°$.

13. $t = \frac{867\sqrt{3}}{5}$.

8. A kör egyenlete

1. *a)* $x^2 + (y-1)^2 = 4$; *b)* $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$;

   c) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = \frac{1}{4}$; *d)* $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 3$.

2. *a)* $(x+2)^2 + y^2 = 4$; *b)* $x^2 + (y-4)^2 = 5$;

   c) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 13$; *d)* $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 50$.

3. *a)* $K(0; 2)$ $r = 2$; *b)* $K(-1; 1)$ $r = 1$; *c)* $K\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ $r = \frac{\sqrt{53}}{4}$;

   d) Nem kör. *e)* $K\left(\sqrt{3}; -\sqrt{5}\right)$ $r = \sqrt{7}$.

4. $p < 25$.

   a) $p = 24$; *b)* $p = 16$; *c)* $p = \frac{91}{4}$; *d)* $p = 20$; *e)* $p = \frac{91}{4}$; *f)* nincs ilyen p.

5. $K(2; -1)$ $r = 6$;

   $\left(0; 4\sqrt{2}-1\right)$ $\left(0; -1-4\sqrt{2}\right)$ $\left(2+\sqrt{35}; 0\right)$ $\left(2-\sqrt{35}; 0\right)$.

6. *a)* $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$; *b)* $\left(x - \frac{23}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{23}{8}\right)^2 = \frac{289}{32}$;

   c) $x^2 + y^2 = 13$.

7. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

9. A kör és az egyenes kölcsönös helyzete; két kör közös pontjai

1. *a)* $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; *b)* $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$;

   c) $\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}; 1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ $\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}; 1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$; *d)* $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ érinti;

   e) $\left(\frac{-24-\sqrt{26}}{10}; \frac{8-3\sqrt{26}}{10}\right)$ $\left(\frac{-24+\sqrt{26}}{10}; \frac{8+3\sqrt{26}}{10}\right)$.

2. *a)* $r = 2$; *b)* $r = 3$; *c)* $r = \frac{11}{5}$.

3. *a)* $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$
$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$;

b) $\left(x-5-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(y-5-2\sqrt{3}\right)^2 = \left(5+2\sqrt{3}\right)^2$

$\left(x-5+2\sqrt{3}\right)^2 + \left(y-5+2\sqrt{3}\right)^2 = \left(5-2\sqrt{3}\right)^2$;

c) $\left(x+5-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-5+2\sqrt{2}\right)^2 = \left(5-2\sqrt{2}\right)^2$

$\left(x+5+2\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-5-2\sqrt{2}\right)^2 = \left(5+2\sqrt{2}\right)^2$;

d) $\left(x-7+2\sqrt{5}\right)^2 + \left(y+7-2\sqrt{5}\right)^2 = \left(7-2\sqrt{5}\right)^2$

$\left(x-7-2\sqrt{5}\right)^2 + \left(y+7+2\sqrt{5}\right)^2 = \left(7+2\sqrt{5}\right)^2$;

e) $\left(x+7-2\sqrt{6}\right)^2 + \left(y+7-2\sqrt{6}\right)^2 = \left(7-2\sqrt{6}\right)^2$

$\left(x+7+2\sqrt{6}\right)^2 + \left(y+7+2\sqrt{6}\right)^2 = \left(7+2\sqrt{6}\right)^2$;

f) $\left(x+7-2\sqrt{5}\right)^2 + \left(y-7+2\sqrt{5}\right)^2 = \left(7-2\sqrt{5}\right)^2$

$\left(x+7+2\sqrt{5}\right)^2 + \left(y-7-2\sqrt{5}\right)^2 = \left(7+2\sqrt{5}\right)^2$.

4. $\left(x - \frac{8+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 16$;

$\left(x - \frac{10-8\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 16$.

5. $A\left(4+2\sqrt{2}; 0\right)$ $B\left(0; 4+2\sqrt{2}\right)$.

6. *a)* $2x - 5y = 5\sqrt{29} - 29$ $2x - 5y = -29 - 5\sqrt{29}$;

b) $5x + 2y = 5\sqrt{29}$ $5x + 2y = -5\sqrt{29}$.

7. $M\left(\frac{-5-4\sqrt{91}}{53}; \frac{168-14\sqrt{91}}{53}\right)$ $L\left(\frac{4\sqrt{91}-5}{53}; \frac{168+14\sqrt{91}}{53}\right)$.

8. *a)* $r < \sqrt{106} - 4$; *b)* $r = \sqrt{106} - 4$; *c)* $\sqrt{106} - 4 < r < \sqrt{106} + 4$.

9. *a)* $\sqrt{7}y = x+5 \quad \sqrt{7}y = -x-5$;

b) $\left(20-2\sqrt{66}\right)x+17y = 28+4\sqrt{66} \quad \left(2\sqrt{66}+20\right)x+17y = 28-4\sqrt{66}$;

c) $7x+17y = 73 \quad x-y = 7$;

d) $\left(35+4\sqrt{33}\right)x-17y = 49-8\sqrt{33} \quad \left(4\sqrt{33}-35\right)x+17y = -49-8\sqrt{33}$;

e) belső pont, így nincs érintő

10. A parabola egyenlete

1. *a)* $y^2 = 6x;\ F\left(\frac{3}{2};0\right);\ x = -\frac{3}{2}$ vagy $y^2 = -6x;\ F\left(-\frac{3}{2};0\right);\ x = \frac{3}{2}$;

b) $x^2 = 6y;\ F\left(0;\frac{3}{2}\right);\ y = -\frac{3}{2}$ vagy $x^2 = -6y;\ F\left(0;-\frac{3}{2}\right);\ y = \frac{3}{2}$.

2. *a)* $F\left(0;\frac{1}{4}\right);\ y = -\frac{1}{4};\ T(0;0)$;

b) $F\left(2;\frac{1}{4}\right);\ y = -\frac{1}{4};\ T(2;0)$;

c) $F\left(-1;\frac{1}{2}\right);\ y = \frac{7}{2};\ T(-1;2)$;

d) $F(1;1);\ y = -1;\ T(1;0)$.

3. *a)* $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2};\frac{-\sqrt{17}-1}{2}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{17}+1}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$;

b) $\left(\frac{-9-\sqrt{97}}{8};\frac{1+\sqrt{97}}{4}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{97}-9}{8};\frac{1-\sqrt{97}}{4}\right)$;

c) $\left(\frac{7-4\sqrt{34}}{9};\frac{-2-\sqrt{34}}{3}\right) \quad \left(\frac{7+4\sqrt{34}}{9};\frac{\sqrt{34}-2}{3}\right)$;

d) $\left(2-2\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right) \quad \left(2\sqrt{2}+2;\sqrt{2}-1\right)$.

4. *a)* $y = 2$;
b) $2x+y = 1$;
c) $10x+y = -7$;
d) $4x+y = 2$;
e) $6x-y = 23$;
f) $16x+y = -34$.

5. *a)* $y = \left(6-2\sqrt{7}\right)x; \quad y = \left(2\sqrt{7}+6\right)x$;

b) Belső pont, így nincs érintő.

c) $2x-y = -3$;

d) $y = -2$;

e) $y = -2; \quad y = 3x-162$;

f) $y = \left(8-4\sqrt{5}\right)x+4\sqrt{5}-14$;

$y = \left(8+4\sqrt{5}\right)x-4\sqrt{5}-14$.

6. *a)* $\left(-\frac{\sqrt{2\sqrt{17}-2}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{17}-2}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$;

b) $\left(-\frac{\sqrt{2\sqrt{93}+6}}{2}; \frac{3+\sqrt{93}}{2}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{93}+6}}{2}; \frac{3+\sqrt{93}}{2}\right)$;

c) (0; 0).

7. $C\left(\sqrt{3}; -3\right)$ $B\left(-\sqrt{3}; -3\right)$ $k = 6\sqrt{3}$ $t = 3\sqrt{3}$.

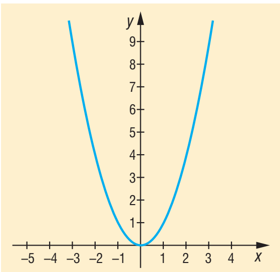
11. A parabola és a másodfokú függvény (kiegészítő anyag)

1. *a)* $x = 2$; *b)* $x = \frac{1}{2}$; *c)* $x = \frac{5}{2}$; *d)* $x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$; *e)* $x = -\frac{1}{16}$.

2. *a)* (1; –2); *b)* (–3; 5); *c)* (8; –5).

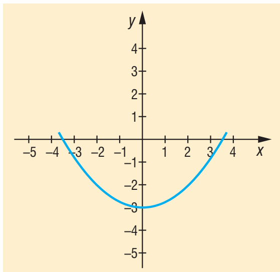
3. *a)* $x \mapsto x^2$

$p = \frac{1}{2}$; $T(0; 0)$; $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$; $y = -\frac{1}{4}$;



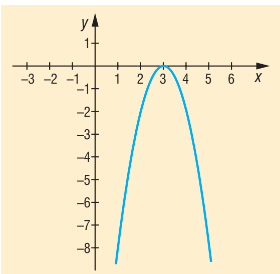
b) $x \mapsto \frac{x^2}{4} - 3$

$p = 2$; $T(0; -3)$; $F(0; -2)$; $y = -4$;



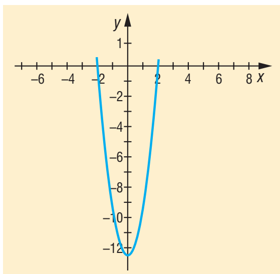
c) $x \mapsto -2(x-3)^2$

$p = \frac{1}{4}$; $T(3; 0)$; $F\left(3; -\frac{1}{8}\right)$; $y = \frac{1}{8}$;



d) $x \mapsto 2x^2 + 2x - 12 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$

$p = \frac{1}{4}$; $T\left(-\frac{1}{2}; -\frac{25}{2}\right)$; $F\left(-\frac{1}{2}; -\frac{99}{8}\right)$; $y = -\frac{101}{8}$.



4. *a)* $x \mapsto -\frac{1}{6}(x+1)^2+2;$ *b)* $x \mapsto -2(x-1)^2+2;$ *c)* $x \mapsto \frac{1}{4}(x-5)^2+\frac{3}{2}.$

5. $\frac{9}{5}(y+5)=(x-1)^2 \Rightarrow x \mapsto \frac{5}{9}(x-1)^2-5.$

12. Kúpszeletek és egyenleteik a koordináta-rendszerben (kiegészítő anyag)

1. *a)* $2a=10;\ 2b=6;$ *b)* $2a=30;\ 2b=5;$ *c)* $2a=2\sqrt{5};\ 2b=2\sqrt{3}.$

2. *a)* $F_2(3;0);\quad 2a=2\sqrt{265};\quad \frac{x^2}{265}+\frac{y^2}{256}=1;$

b) $F_2(-5;0);\quad 2a=2\sqrt{281};\quad \frac{x^2}{281}+\frac{y^2}{256}=1;$

c) $F_2(1;0);\quad 2a=2\sqrt{257};\quad \frac{x^2}{257}+\frac{y^2}{256}=1;$

d) $F_2\left(-\sqrt{7};0\right);\quad 2a=2\sqrt{263};\quad \frac{x^2}{263}+\frac{y^2}{256}=1.$

4. *a)* $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1;$ *b)* $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{40}=1;$ *c)* $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{72}=1;$ *d)* $\frac{x^2}{9}-y^2=1.$

5. $F_1(2;2);\quad F_2(-2;-2);\quad y=x;\quad y=-x.$

Valószínűségszámítás, statisztika

1. Klasszikus valószínűségi modell

1. *b)* Azonosak a szerepek.

c) $\frac{1}{2}$.

3. A komplementer esemény valószínűségét érdemes meghatározni: azaz, hogy nem húztunk ászt. Ekkor a többi 28 lapból választunk 4-et.

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}}.$$

4. A komplementer esemény valószínűségét határozzuk meg, azaz a legalacsonyabb nem közvetlenül utána vonul be.

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{10!}{11!} = \frac{10}{11}.$$

5. Anna nyerőszámai: 2; 4; 6. ($A = \{2; 4; 6\}$);
Béla nyerőszámai: 3; 5. ($B = \{3; 5\}$).
Annak a valószínűsége, hogy valamelyikük nyer:

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B) = \frac{8}{17} + \frac{7}{17} - 0 = \frac{15}{17}.$$

Így az 1 dobásának valószínűsége:

$$1 - p(A+B) = \frac{2}{17}.$$

6. *a)* $p = \frac{24}{32}$; *b)* $p = \frac{1}{32}$; *c)* $p = \frac{21}{32}$; *d)* $p = \frac{11}{32}$.

7. A: párost dobtunk; B: prímet dobtunk;
C: összetett számot dobtunk; D: 3-mal osztható számot dobtunk.

$$p(A) = \frac{13}{20};\quad p(B) = \frac{3}{8};\quad p(C) = \frac{21}{40};\quad p(D) = \frac{21}{40};$$

$$p(6) = \frac{2}{5};$$

$$p(1) = 1 - p(B) - p(C) = \frac{1}{10};$$

$$p(3) = p(D) - p(6) = \frac{1}{8};$$

$$p(4) = p(C) - p(6) = \frac{1}{8};$$

$$p(2) = p(A) - p(4) - p(6) = \frac{1}{8};$$

$$p(5) = p(B) - p(2) - p(3) = \frac{1}{8}.$$

8. *a)* $p = \dfrac{6!}{6^6}$.

Kedvező esetek: az első dobásnál 6-féle lehetőség, a másodiknál pedig 5-féle van stb. Összes eset: minden dobásnál 6-féle lehetőség van.

b) $p = \dfrac{5^5}{6^6}$.

Kedvező esetek: az első dobás 1 lehetőség, a többinél 5 lehetőség van.

c) $p = \dfrac{5!}{6^6}$.

Kedvező esetek: az első két dobásnál 1-1 lehetőség, a harmadiknál 5 lehetőség, majd mindig 1-gyel kevesebb van.

d) $p = \dfrac{5^4}{6^6} \cdot \dbinom{6}{2}$.

Kedvező esetek: a két 6-os dobáson kívüli 4 dobásnál 5 lehetőség van, majd megszorozzuk azzal, ahányféle sorrendben a két 6-ost dobhatjuk (amelyik két dobás 6-os).

e) A komplementer esemény valószínűségét határozzuk meg: azaz hogy nincs hatos. Ezt vonjuk ki 1-ből.

$$p = 1 - \frac{5^6}{6^6}.$$

9. $p(A) = 1 - \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{15}{16}$, 1-féleképpen nincs fej.

$$p(\bar{A}) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

$$p(B) = 1 - \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nincs} \\ \text{írás}}}{\frac{1}{2^4}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{egy} \\ \text{írás} \\ \text{van}}}{\frac{4}{2^4}} \right) = \frac{11}{16}.$$

$$p(\bar{B}) = \frac{5}{2^4} = \frac{5}{16}.$$

$$p(A \cdot B) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{egy} \\ \text{fej}}}{\frac{4}{2^4}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{két} \\ \text{fej}}}{\frac{6}{2^4}} = \frac{5}{8}.$$

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B)=\frac{15}{16}+\frac{11}{16}-\frac{10}{16}=1.$$

$$p(\overline{A}\cdot B)=p(\overline{A})=\frac{1}{16}.$$

$$p(A+\overline{B})=p(A)=\frac{15}{16}.$$

10. $p(A)=1-\frac{5^2}{6^2}=\frac{11}{36}.$

$\uparrow$
Nem dobtunk 6-ot, azaz mindkét kockán 5 lehetőség van.

$$p(\overline{A})=\frac{25}{36};\quad p(B)=\frac{1}{2};\quad p(\overline{B})=\frac{1}{2}.$$

$$p(A\cdot B)=\frac{5}{36}.$$

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B)=\frac{11}{36}+\frac{18}{36}-\frac{5}{36}=\frac{2}{3}.$$

$$p(\overline{A}\cdot B)=\frac{3^2+2^2}{6^2}=\frac{13}{36}.$$

$\uparrow$
3^2 páratlan-páratlan pár és 2^2 páros-páros pár lehet.

$$p(A+\overline{B})=p(A)+p(\overline{B})-p(A\cdot\overline{B})=\frac{11}{36}+\frac{18}{36}-\frac{6}{36}=\frac{23}{36}.$$

11. Ha a 3 rossz tömegű lap között van az a kettő is, melynek a mérete is rossz, akkor 500 lap közül 6 rossz, így a valószínűség:

$$1-\frac{6}{500}=\frac{494}{500}=\frac{247}{250}=0,988.$$

12. *a)* A komplementer esemény segítségével érdemes dolgozni, vagyis azzal, hogy nincs közöttük egy pár sem.

$$p=1-\frac{12\cdot10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{215}{231}.$$

Az első húzásra bármelyik kesztyű húzható, a másodikra a párján kívül a többi, majd a húzott kesztyű párját sem lehet húzni a következőben stb.

b) Biztosan lesz egy jó pár!

c) $p=1-\frac{12\cdot10\cdot8\cdot6\cdot4}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}=\frac{25}{33}.$ Csökken a valószínűség.

d) Komplementer eseménnyel dolgozva csak jobbosokat vagy csak balosokat húzni két esetben lehet. Így

$$p=1-\frac{2}{\binom{12}{6}}=\frac{461}{462}.$$

13. Legyen k a narancsok száma. Mivel $p(N)=\frac{3}{4}$,

$$\frac{k}{k+4}=\frac{3}{4},$$
$$k=12.$$

12 darab narancs van. Legyen i a szükséges narancsok száma. Ekkor

$$\frac{4}{12+4+i}<\frac{1}{10},$$
$$24<i.$$

Legalább 25 narancs kell még.

14. Legyen e a meggyes és a a marcipános bonbonok száma. Ekkor

$$\frac{3}{5}=\frac{e+a}{6+e+a},$$
$$\frac{2}{3}=\frac{6+a}{6+e+a}.$$

Innen $e=5$; $a=4$.
4 db marcipános és 5 db meggyes bonbon van.

15. 5 megfelelő szám van, így $\frac{1}{5}$ a valószínűség.

16. A megfelelő rúdhármasok száma 5, mivel bármely kettő hosszának összege nagyobb kell, hogy legyen a harmadik hosszánál. Tehát

$$p=\frac{5}{\binom{6}{3}}=\frac{3}{10}.$$

17. Annak, hogy két valós gyök legyen, az a feltétele, hogy $b^2>4c$. Erre 17 lehetőség van. Így

$$p(2\text{ db gyök})=\frac{17}{36}.$$

Annak, hogy egy gyök legyen, két számpár felel meg, a (4; 4), illetve a (2; 1).

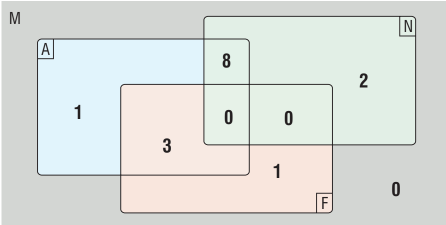
$$p(1\text{ db gyök})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

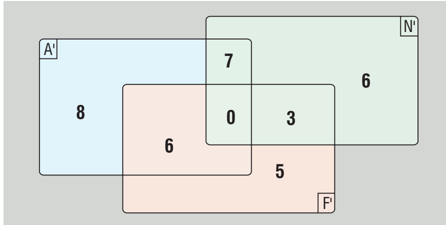
Ezek alapján:

$$p(\text{nincs gyök})=\frac{17}{36}.$$

18. Három szám (6; 10; 14) felel meg, így $p=\frac{3}{11}$.

19. Legyen M a magyarul beszélők, A az angolul beszélő magyarok, N a németül beszélő magyarok, F a franciául beszélő magyarok, A', N', F' a megfelelő külföldiek halmaza. Venn-diagrammal ábrázoljuk az elemek számát.





A komplementer eseménnyel dolgozunk (azzal, hogy nem értik meg egymást). Az 1 csak angolul tudó magyar mellé tizennégyféleképpen választhatunk párt. Ha ehhez hasonlóan minden egyes esetre végignézzük a párosítási lehetőségeket, azt kapjuk, hogy

$$p = 1 - \frac{\overset{A}{14} + \overset{A-N}{8\cdot 5} + \overset{N}{2\cdot 19} + \overset{A-F}{3\cdot 6} + \overset{F}{21} + \overset{F'}{5\cdot 21} + \overset{F'-N'}{3\cdot 8} + \overset{N'}{6\cdot 14}}{\binom{50}{2}} = \frac{881}{1225} \approx 0{,}72.$$

72% valószínűséggel fogják egymást megérteni.

Rejtvény: Az osztályban legyen f fiú és l lány.

$$p(\text{fiút választanak}) = \frac{f}{f+l},$$
$$p(\text{lányt választanak}) = \frac{l}{f+l}.$$

A feltételek szerint $\frac{f}{f+l} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{f+l}$. Ebből $3f = 2l$, $5f = 2l + 2f$. A jobb oldal a dupla osztálylétszám, azaz az osztály kétötöde fiú.

2. Visszatevéses mintavétel

1. Minden sarokhoz írjuk oda, hogy hányféle úton juthatunk el oda. Ez a felette és tőle balra lévő sarkoknál szereplő lehetőségek összege.

a) A B pontba 252-féleképpen juthatunk el, így $p(B) = \frac{252}{2^{10}} = \frac{63}{256} \approx 0{,}25.$

b) c) d) A C és D pontokon túljutnak 10 utcasaroknyi mozgással, az E-be pedig nem jutnak el. Így mindháromnál a valószínűség 0.

2. *b)* $\binom{5}{3}$-féleképpen választható ki az a 3 érme, amelyen fej van, és minden érmének 2 lehetősége van, így

$$p = \frac{\binom{5}{3}}{2^5} = \frac{5}{16}.$$

c) Határozzuk még meg a 4, illetve 5 fej dobásának valószínűségét!

$$p=\frac{\binom{5}{3}}{2^5}+\frac{\binom{5}{4}}{2^5}+\frac{\binom{5}{5}}{2^5}=\frac{1}{2}.$$

d) Nem változnak.

3. *a)* $p = 0{,}85^{25}$.

b) Komplementer eseménnyel dolgozunk (azzal, hogy n lövésből nem szereznek gólt).

$$1-0{,}85^n \geq 0{,}75;$$
$$n \geq \log_{0{,}85} 0{,}25;$$
$$n \geq 8{,}53.$$

Legalább 9-szer kell kapura lőni.

4. *a)* Adjuk össze annak valószínűségét, hogy 7-szer, illetve 8-szor húztunk-e pirosat.

$$p=\frac{8^7\cdot 24\cdot 8}{32^8}+\frac{8^8}{32^8}=\frac{25}{65\,536}\approx 0{,}000\,38.$$

7 húzásnál 8 piros közül választhatunk, 1 húzásnál pedig 24 nem piros közül, majd nyolcféleképpen adhatjuk meg a nem piros helyét.

b) $p=\dfrac{24^8}{32^8}=\dfrac{6561}{65\,536}\approx 0{,}1.$

c) Hasonlóan az *a)* ponthoz

$$p=\frac{28^8}{32^8}+\frac{4\cdot 28^7\cdot\binom{8}{1}}{32^8}+\frac{4^2\cdot 28^6\cdot\binom{8}{2}}{32^8}+\frac{4^3\cdot 28^5\cdot\binom{8}{3}}{32^8}\approx 0{,}989.$$

5. Adjuk össze annak valószínűségét, hogy kettő, illetve három kockával dobtunk legfeljebb 4-est!

$$p=\binom{3}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{4^3}{6^3}=\frac{20}{27}\approx 0{,}74.$$

6. Egy nem nulla szám van, és ennek helyét $\binom{3}{1}$-féleképpen választhatjuk ki:

$$p=\frac{9\cdot\binom{3}{1}}{10^3}=\frac{27}{1000}=0{,}027.$$

7. Annak a valószínűsége, hogy a Falábúak mind az ötöt berúgják, $0{,}8^5$. A Kurtalábúak 3-at lőnek be és kettőt nem , és ezt $\binom{5}{3}$ féle sorrendben tehetik meg. Tehát

$$p=0{,}8^5\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2\cdot\binom{5}{3}=0{,}067.$$

8. *a)* $p=\left(\frac{17}{35}\right)^{10}\approx 0{,}000\,73.$

b) Ugyanaz, mint az előbb.

c) $p=\left(\frac{17}{35}\right)^{10}\cdot\binom{10}{5}\approx 0{,}184.$

9. *a)* $p=(0{,}25)^{15}\approx 9{,}3\cdot 10^{-10}.$

b) $p=(0{,}25)^{15}\cdot 4\approx 3{,}7\cdot 10^{-9}.$

c) $p=\binom{15}{2}\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75^{13}=0{,}156.$

$\uparrow$
Ki az a két ember?

d) $p=0{,}75^{15}+\binom{15}{1}\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75^{14}+\binom{15}{2}\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75^{13}=0{,}236.$

$\uparrow$
Mind máshova száll.

10. Ha 5-ször ugrik előre, a 30-ba kerül. Valószínűség: $p=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}.$

Ha 4-szer ugrik előre, a 20-ba kerül. Valószínűség: $p=\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\binom{5}{1}=\frac{5}{32}.$

Ha 3-szor ugrik előre, a 10-be kerül. Valószínűség: $p=\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\binom{5}{2}=\frac{5}{16}.$

Ha 2-szer ugrik előre, a 0-ba kerül. Valószínűség: $p=\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\binom{5}{3}=\frac{5}{16}.$

Ha 1-szer ugrik előre, a –10-be kerül. Valószínűség: $p=\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\binom{5}{4}=\frac{5}{32}.$

Ha nem ugrik előre, a –20-ba kerül. Valószínűség: $p=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}.$

11. *a)* Akkor cserélnek helyet, ha Aladár kettőt előre, Benő pedig kettőt hátra ugrik.

$$p=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

b) Ez nem történhet meg, mivel minden ugrás után ellentétes paritású pontban vannak.

Rejtvény: Furcsa, de Bélának van igaza. Érvelése is meggyőző: A bonyolultan leírt eljárás igazából a következő. A játékossal befestetik az egyik ajtót pirosra, a másik kettőt pedig kékre (a piros ajtó a játékos első választása), majd megkérdezik a játékost, hogy mikor nyerje meg az autót: ha az a piros ajtó mögött van, vagy akkor, ha (valamelyik) kék ajtó mögött. Ha a játékos a piros ajtót mondja, akkor ragaszkodik az eredeti választásához. Ha kék ajtót mond, akkor viszont változtat, és ezzel növeli nyerésének a valószínűségét. Az egyik kék ajtó kinyitása csak egy teátrális esemény, amely összezavarja a fenti „tiszta” képet.

3. Mintavétel visszatevés nélkül (kiegészítő anyag)

1. $p=\dfrac{\binom{290}{8}}{\binom{300}{8}}\approx 0,76.$

2. *a)* $p=\dfrac{\binom{15}{3}}{\binom{40}{3}}=\dfrac{7}{152}=0,046;$

b) $p=\dfrac{\binom{15}{2}\cdot\binom{13}{4}}{\binom{40}{6}}=0,02;$

c) $p=\dfrac{\binom{28}{3}}{\binom{40}{3}}=\dfrac{63}{190}=0,33;$

d) $p=0$, hisz 12 karamellás van.

3. *a)* $p=\dfrac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}}=0,295;$

b) $p=\dfrac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}}=0,002;$

c) $p=\dfrac{\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{5}+\binom{4}{4}\cdot\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}}=0,004;$

d) $p=1-\dfrac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}}=0,998;$

e) –

4. *a)* $p=\dfrac{\binom{397}{40}}{\binom{400}{40}}=0,728;$

b) $p=\dfrac{\binom{397}{37}}{\binom{400}{40}}=0,0009;$

c) $p=\dfrac{\binom{397}{40}+\binom{3}{1}\cdot\binom{397}{39}}{\binom{400}{40}}=0,178;$

d) $p=1-\dfrac{\binom{397}{40}}{\binom{400}{40}}=0,272.$

5. $$\frac{\binom{19}{n-1}}{\binom{20}{n}}\cdot 2=\frac{2\cdot\binom{18}{n-1}+\binom{18}{n-2}}{\binom{20}{n}}.$$

Innen $n=1$.

6. *a)* $p=\dfrac{\binom{425}{5}}{\binom{1103}{5}}=0{,}0084;$

b) $p=\dfrac{\binom{425}{2}\cdot\binom{678}{3}}{\binom{1103}{5}}=0{,}346;$

c) $p=1-\dfrac{\binom{678}{5}+\binom{425}{1}\cdot\binom{678}{4}}{\binom{1103}{5}}=0{,}638;$

d) $p=\dfrac{425\cdot 424\cdot 678\cdot 677\cdot 676}{1103\cdot 1102\cdot 1101\cdot 1100\cdot 1099}=0{,}035;$

e) $p=\dfrac{678\cdot 677\cdot 676\cdot 425\cdot 424}{1103\cdot 1102\cdot 1101\cdot 1100\cdot 1099}=0{,}035.$

7. Akkor vett ki legalább 100 Ft-ot, ha az egyik érme 100 Ft-os és a másik bármelyik lehet, vagy pedig a 4 db 50 Ft-osból vett ki kettőt.

$$p=\frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{62}{1}+\binom{4}{2}+\binom{10}{2}}{\binom{72}{2}}=0{,}263.$$

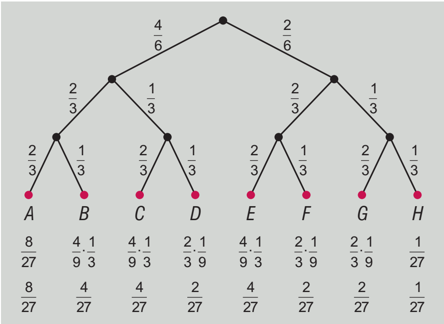
8. A három lottószelvényen 15 számot jelölt meg, ha feltesszük, hogy különböző számötösöket játszik meg. A komplementer esemény valószínűségével dolgozunk, azaz 1 találata van, vagy nincs találata.
Aszerint tekintjük az eseteket, hogy hány szelvényen van 1 találata.

$$p=1-\frac{\binom{75}{5}+\binom{15}{1}\cdot\binom{75}{4}+\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{1}^2\cdot\binom{75}{3}+\binom{3}{3}\cdot\binom{5}{1}^3\cdot\binom{75}{2}}{\binom{90}{5}}=0{,}07.$$

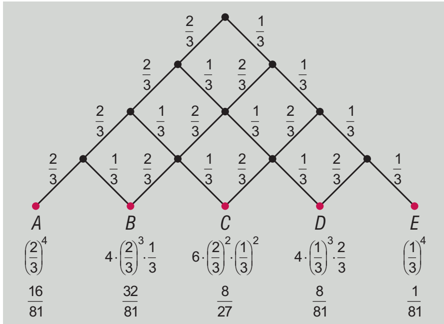
Az első tag megfelel annak az eseménynek, ha nincs találata, a második annak, hogy egy szelvényen egy találata van, a harmadik annak, hogy két szelvényen van 1-1 találata, a negyedik pedig annak, hogy mindhárom szelvényen van 1 találat.

4. Valószínűségi játékok gráfokon (kiegészítő anyag)

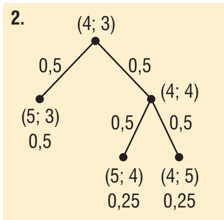
1. *a)*

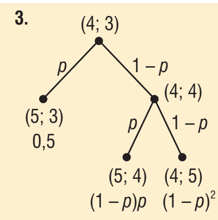


b)



2. Az első szám legyen Anna pontjainak száma, a második pedig Csaba pontjaié. Balra haladva Anna nyer egy pontot.
Anna 0,75 valószínűséggel nyer.





3. Az előzőhöz hasonló jelöléssel

$$p+(1-p)p<(1-p)^2 \qquad (0<p<1)$$

$$0<p<1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

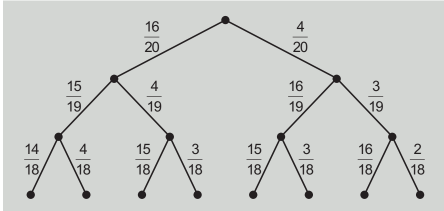
4. *a)* $A=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$; $B=\frac{8}{31}$; $C=\frac{7}{31}$; $D=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$; $E=\frac{7}{30}$; $F=\frac{23}{30}$; $G=\frac{7}{30}$;
$H=\frac{23}{30}$; $I=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}$;

b) $p=\frac{8}{32}\cdot\frac{7}{31}\cdot\frac{6}{30}=0{,}0113 \quad \left(p=\frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}}\right)$;

c) $p=\frac{8}{32}\cdot\frac{7}{31}\cdot\frac{6}{30}+\frac{8}{32}\cdot\frac{24}{31}\cdot\frac{7}{30}+\frac{8}{32}\cdot\frac{7}{31}\cdot\frac{24}{30}+\frac{24}{32}\cdot\frac{8}{31}\cdot\frac{7}{30}=$

$$=\frac{8\cdot7\cdot6+3\cdot(8\cdot7\cdot24)}{32\cdot31\cdot30}=0{,}147 \quad \left(p=\frac{\binom{8}{3}+\binom{8}{2}\cdot\binom{24}{1}}{\binom{32}{3}}\right).$$

5. *a)* Balra lépve ismert tételt húzott.



b) $p=\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}+3\cdot\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{18}=0{,}912$

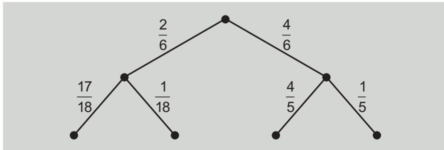
$\left(p=\frac{\binom{13}{6}+\binom{16}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{20}{3}}\right);$

c) $\frac{p_1}{p_2}=\frac{\frac{17\cdot16\cdot15}{20\cdot19\cdot18}+\frac{17\cdot16\cdot3}{20\cdot19\cdot18}\cdot3}{\frac{16\cdot15\cdot14}{20\cdot19\cdot18}+\frac{16\cdot15\cdot4}{20\cdot19\cdot18}\cdot3}=\frac{68}{65}$ $\left(\frac{p_1}{p_2}=\frac{\binom{17}{3}+\binom{17}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{16}{3}+\binom{16}{2}\cdot\binom{4}{1}}\right)$ $p_1-p_2=0{,}042.$

Az esélye $\frac{68}{65}$-szörös lenne, 4,2%ponttal lenne több.

6. Az első szinten balra halad, ha lány a nyitó. A második szinten balra halad, ha védhető a nyitás.

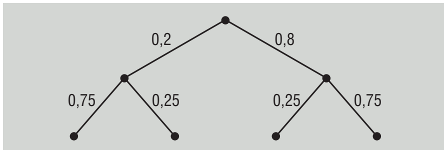
$$p=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{18}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{5}=0{,}152.$$



7. Az első szinten balra haladva nem fázik meg. A második szinten balra haladva nem lesz influenzás.

$$p=0{,}2\cdot0{,}75+0{,}8\cdot0{,}25=0{,}35.$$

35% az esélye, hogy nem lesz influenzás.



8. *b)* Akkor nem nyer senki, ha mindhárman fejet vagy mindhárman írást dobnak. Ennek valószínűsége egy dobásnál $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}.$

Annak a valószínűsége, hogy 20 meneten keresztül senki sem nyer, vagy $\left(\frac{1}{4}\right)^{20}.$

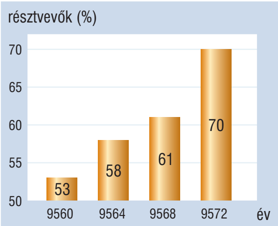
c) Egy menetben annak a valószínűsége, hogy valaki nyer, vagy $\frac{3}{4}$. Mivel mindhármuknak azonosak a nyerési esélyei, András $\frac{1}{4}$ valószínűséggel nyer.

d) Akkor nyer, ha ő fejet dob, és a többiek írást, vagy írást dob, és a többiek fejet. Ennek valószínűsége $p=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}=\frac{1}{4}.$

Ebben az esetben is $\frac{1}{4}$ valószínűséggel nyer.

5. Valóság és statisztika

1.



2. 9572-ben szavazásra jogosultak száma: 8 100 000
9568-ban szavazásra jogosultak száma: 8 228 000
A szavazók száma közötti különbség:

$$8\ 100\ 000 \cdot 0{,}7 - 8\ 228\ 000 \cdot 0{,}61 = 650\ 920.$$

650 920 fővel többen vettek részt.

3. $13^{\underline{00}}$-kor tudhatják.

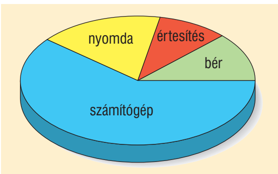
4. $\left[\dfrac{110}{8}\right] + 1$ db teherautó kell, azaz 14 darab. A kocsisor 67,2 m hosszú.

5. *a)* Egy láda szalagszükséglete $2 \cdot 50 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 50 = 380$ cm. Az 11 000 ládához 41,8 km szalag kell.

b) Ekkor 83,6 km-nyi kell. Mindkét esetben elég 160 km szalag.

6. 4100 millió dig.

7.



8. Semennyivel, hiszen a zöldekre szavaztak többen.