Sokszínű matematika 10.

A KITŰZÖTT FELADATOK EREDMÉNYE

Összeállította:

FRÖHLICH LAJOS

gimnáziumi tanár

A Gondolkodási módszerek és a Valószínűségszámítás
c. fejezeteket szakmailag ellenőrizte:

DR. HAJNAL PÉTER

egyetemi docens

Tartalom

Gondolkodási módszerek

1. Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel

1. *a)* Ha vizes az úttest, akkor esik az eső a városban. Nem feltétlenül igaz.
b) Ha bezárom az ajtót, akkor elmegyek otthonról. Nem biztos.
c) Ha ő medve, akkor ő Micimackó. Nem biztos.
d) Ha felvesznek az egyetemre, akkor megnyerem az OKTV-t. Nem igaz.
e) Ha bemehetek a színházi előadásra, akkor van jegyem. Igaz.

2. *a)* Ha egy szám osztható 2-vel, akkor osztható 4-gyel. Nem igaz.
b) Ha egy szám racionális szám, akkor véges tizedes tört. Nem igaz.
c) Ha egy háromszög leghosszabb oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével, akkor derékszögű. Igaz.
d) Ha két szám szorzata 0, akkor közülük legalább az egyik 0. Igaz.

3. *a)* Szükséges, de nem elegendő.
b) Szükséges, de nem elegendő.
c) Szükséges, de nem elegendő.
d) Szükséges, de nem elegendő.
e) Elegendő, de nem szükséges.

4. *a)* Elegendő, de nem szükséges.
b) Szükséges és elegendő.
c) Szükséges, de nem elegendő.
d) Elegendő, de nem szükséges.
e) Nem szükséges, nem elegendő.

5. *a)* Szükséges, de nem elegendő.
b) Elegendő, de nem szükséges.
c) Elegendő, de nem szükséges.
d) Szükséges és elegendő.
e) Nem elegendő és nem szükséges.
f) Nem szükséges, nem elegendő.

6. Szükséges, de nem elégséges legalább 30 pontot elérni.
Elégséges, de nem szükséges 100 pontot elérni.
Szükséges és elégséges 40 pontot elérni.
Nem szükséges és nem elégséges legfeljebb 50 pontot elérni.

7. *a)* Szükséges, de nem elégséges: átlók felezik egymást.
Elégséges, de nem szükséges: négyzet legyen.
Szükséges és elégséges: oldalai egyenlőek.
b) Szükséges, de nem elégséges: osztható 2-vel.
Elégséges, de nem szükséges: osztható 12-vel.
Szükséges és elégséges: osztható 2-vel és 3-mal.

c) Szükséges, de nem elégséges: az egyik páros.
Elégséges, de nem szükséges: mindkét szám páros.
Szükséges és elégséges: ha valamelyik páratlan, a másik 4-gyel osztható vagy mindkét szám páros.

d) Szükséges, de nem elégséges: átlóik egyenlőek.
Elégséges, de nem szükséges: mindkét deltoid oldalai egységnyiek, szögei 90º-osak.
Szükséges és elégséges: három oldaluk és az általuk meghatározott két szögük egyenlőek.

9. Mivel 49 mező van, az egyik színből több van. Az átmászáskor minden csiga a másik színű mezőre kerül. A több mezőt meghatározó színű mezőkről induló 25 csiga 24 mező közül választhat, így biztos lesz olyan mező, amelyikre kettő kerül közülük.

10. Egy elégséges feltétel, hogy egy sarokmezőt hagyjunk ki. Ezt az egyik sarokmezőt kihagyó triminó-fedés megadásával indokolhatjuk. Ilyet találhatunk egyszerűen.
A szükséges és elégséges feltételhez a mezőket (i, j) koordinátapároknak gondoljuk, ahol $1 \le i, j \le 7$. Az (i, j) mezőbe írjuk bele az $i + j$ szám 3-mal való maradékos osztásánál kapott maradékot. Így a mezőket megszámoztuk úgy, hogy ha sorban balról jobbra, vagy oszlopban alulról felfelé haladunk, akkor a 0, 1, 2 számokat látjuk periodikusan ismételve. (Ez a számozás a számelméleti leírás nélkül is könnyen megadható.) Azaz minden triminó által lefedett mezőkben a számok összege $0 + 1 + 2 = 3$. Az összes lefedett szám összege $16 \cdot 3 = 48$. Ebből kiszámolható, hogy a le nem fedett mezőben 2-esnek kell állni. Ez a sarok, oldal-középső és tábla-középső pozíciókban lesz. Tehát egy szükséges feltétel, hogy egyetlen fedetlen mező legyen a fenti kilenc közül. Ez elégséges is, amit az egyes lehetőségekhez tartozó fedésekkel igazolhatunk.

11. Nem lehetséges.
Szükséges és elégséges feltétel, hogy az x koordináták különbsége plusz az y koordináták különbsége páros legyen.

12. Mivel egy él két csúcshoz tartozik, az egy csúcshoz írt számok összege

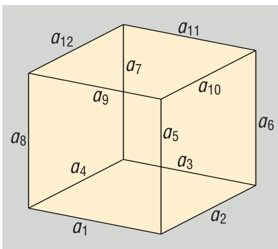
$$\frac{2(1 + ... + 12)}{8} = \frac{13 \cdot 12}{8}.$$

Ez nem egész szám, így ez a számozás nem lehetséges.

A számozás szükséges feltétele, hogy az élekre írt számok összege 4 többszöröse legyen. Ez nem elégséges feltétel.

Elégséges feltétel: legyen a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_9 tetszőleges számok. Az élekre írt számok legyenek:

$a_6 = a_1 + a_5 - a_3$
$a_7 = a_1 + a_2 + a_5 - a_3 - a_4$
$a_8 = a_2 + a_5 - a_4$
$a_{10} = a_1 + a_2 - a_9$
$a_{11} = a_3 + a_9 - a_1$
$a_{12} = a_1 + a_4 - a_9$



13. Számozzuk az oszlopokat balról és a sorokat alulról.

a) 6. sor vált, 5. oszlop vált, 6. oszlop vált.

b) 1., 3., 5. oszlop vált, 1., 3., 5. sor vált.

c) Nem érhető el.
Legyen egy sorban vagy oszlopban a kékek száma k, a váltáskor a kékek számának változása $2(3-k)$, azaz páros. Tehát szükséges feltétel, hogy a kékek száma kezdetben páros legyen.

d) Nem érhető el.
A szükséges és elégséges feltétel egy másik megfogalmazása: „Vegyünk ki tetszőlegesen négy mezőt úgy, hogy azok két sorban és két oszlopban legyenek. Ekkor köztük páros sok kék mező van.” Egy átalakítás ezt a tulajdonságot nem változtatja meg, és mivel a végén minden ilyen mezőnégyesben nulla (azaz páros) kék mezőnek kell lenni, ezért a feltételünk szükséges. Másrészt elégséges is, mert ha teljesül, akkor néhány átalakítással érjük el, hogy az első oszlopban és sorban is csak sárga mezők legyenek (ezt könnyen el tudjuk érni). A feltételünk az átalakítások során megmaradt, így a többi mező is sárga lesz. Valóban, hiszen a többi mező mindegyike benne van egy olyan mezőnégyesben, amely három mezője az első sor vagy első oszlop eleme (így már sárga), és összesen páros sok kék mező van köztük (feltételünk szerint). Ez a többi mező közül tetszőlegesen kiválasztott mező sárga színét is jelenti.

Rejtvény: Kettőt. A bal felsőt és a jobb alsót.

2. Skatulya-elv

1. *A:* nem *B:* igaz *C:* igaz *D:* igaz
a) Van közöttük két egyforma fajta állat.
b) hetet *c)* ötöt *d)* hármat *e)* négyet *f)* hetet *g)* hetet

2. Angolos és németes csoportról.

3. Mivel $33 = 5 \cdot 6 + 3$, biztosan van olyan osztályzat, mely legalább 7-szer fordul elő.

4. *A:* igaz $(365 < 745)$ *B:* igaz $(37 \cdot 20 < 745)$ *C:* nem
D: nem *E:* igaz $(4 \cdot 12 < 52)$

5. *a)* 4 *b)* 39 *c)* 33 *d)* 40

6. *A:* nem *B:* nem *C:* igen *D:* igen

7. *a)* 6 *b)* 6

8. $9 \cdot 4 + 1 = 37$ almát kell kivenni, hogy valamelyikből legalább 10 legyen.
76 almát kell kivenni, hogy mindegyikből legyen legalább 1.

9. *a)* 3 *b)* 14

10. Legyen n kék és m piros zokni. 3 húzás kell, hogy legyen biztosan egyforma színű pár és $\max\{m, n\} + 1$ húzás kell, hogy legyen két különböző színű. Tehát

$$3 \geq \max\{m, n\} + 1$$
$$2 \geq \max\{m, n\}$$

2 piros és 2 kék, vagy 2 piros és 1 kék, vagy 2 kék és 1 piros zokni van.

11. $1 + 2 + 3 + ... + 9 + 21 \cdot 9 + 1 = 235$ lemezt.

12. Valamelyik hajszínből van legalább 50. Ebből a színből van legalább 13 egyforma egy teremben, mivel $12 \cdot 4 < 50$.

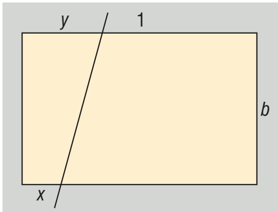
13. Osszuk fel a céltáblát 9 darab 2×2-es négyzetre. Így lesz olyan négyzet, ahová legalább 2 lövés kerül. Ezen két lövés maximális távolsága $2\sqrt{2}$ dm, ami kisebb 3 dm-nél.

14. Osszuk fel 6 db egybevágó, szabályos háromszögre a céltáblát, melyek oldalai 40 cm hosszúak. Biztos lesz egy olyan háromszög, melybe legalább két lövés kerül. Ezek távolsága nem lehet 40 cm-nél nagyobb.

15. Osszuk fel a négyzetet 9 egybevágó $\frac{1}{3}$ oldalú négyzetre. Biztos lesz olyan négyzet, melyben legalább 4 pont van, mivel $9 \cdot 3 < 30$. Ezek lefedhetőek egy $\frac{1}{4}$ sugarú körlappal.

16. A bezárt szögeket nem változtatja meg, hogy egy közös pontba toljuk az egyeneseket. A 18 egyenes 36 részre osztja a 360º-ot, így biztos van olyan szögpár (csúcsszögek), melyek nem nagyobbak 10º-nál, hisz nem lehet mind a 36 darab szög nagyobb, mint 10º.

17. Legyen a téglalap egyik oldala 1, a másik *b*. A metsző egyenes által kimetszett szakaszok *x*, ill. *y*. A területek aránya alapján



$$5 \cdot \frac{x+y}{2} \cdot b = \frac{1-x+1-y}{2} \cdot b.$$

Innen $x + y = \frac{1}{3}$. Az ilyen helyzetű egyenes áthalad a b; $\frac{1}{3}$ oldalú téglalap középpontján. A téglalap minden oldala mellett lehet ilyen típusú egyeneseket felvenni, melyek csoportonként egy pontra illeszkednek. Mivel $13 = 4 \cdot 3 + 1$, lesz olyan pont, melyre 4 egyenes illeszkedik.

18. Osszuk fel a termet 90 darab 1 m élű kockára. Biztos van olyan kocka, melyben legalább 2 légy van. Ezek maximális távolsága $\sqrt{3}$ m, ami kisebb, mint 2 m.

19. Osszuk fel a kockát 64 darab egységélű kockára. Mivel $64 \cdot 31 < 2001$, lesz olyan kocka, melyben legalább 32 pont van. Ezek közül kiválasztva 32 pontot az őket összekötő zárt töröttvonal 32 szakaszból áll, melyek mindegyike maximum $\sqrt{3}$ egység, így a töröttvonal hossza nem nagyobb, mint $32 \cdot \sqrt{3}$ egység.

20. A kézfogások száma 9-féle lehet, mivel a számok $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ elemei és a 0, illetve 9 kézfogás együtt nem lehetséges. Így a 10 ember között biztos van kettő, melyeknél a kézfogások száma egyenlő.

21. Egy csapat minimum 0, maximum 7 meccset játszhat. A csapatok meccseinek száma 7-féle lehet, hisz 0 meccset, illetve 7 meccset játszó csapat egyszerre nem lehetséges. Így mindig van legalább két olyan csapat, melyek meccseinek száma egyenlő.

22. Mivel 8-cal osztva 8-féle maradék lehet, 9 szám esetén biztosan lesz kettő azonos maradékú, melyek különbsége osztható 8-cal.

23. *a)* 15-tel osztva 15-féle maradék lehetséges. 15 egymás utáni egész szám maradéka különböző, az összes lehetséges maradék előfordul. Bármelyik nem 0 maradékhoz találunk olyan maradékot, mellyel az összege 15. Az ezen maradékot adó számok összege osztható 15-tel.

b) Nem igaz. Például ha mindegyiknek 1 a maradéka, akkor bármelyik kettő összegének 2 a maradéka.

c) Akkor nem lesz két szám különbsége osztható 15-tel, ha maradékuk különböző. Így legfeljebb 15 darab szám írható fel.
Akkor nem lesz két szám összege osztható 15-tel, ha maradékaik összege nem 15. Így legfeljebb 8 darab szám írható fel.
A feladatnak legfeljebb 8 darab, különböző maradékú szám felel meg.

24. A legkisebb szám, amit kaphatunk $1-2-...-2001=-2\,002\,999$. A legnagyobb szám nem nagyobb $1+2+...+2001=2\,003\,001$-nél. Így legfeljebb 4 006 001 különböző szám lehet az eredmény.
$1-2$ egyféleképpen értelmezhető/zárójelezhető. Ha ezt a kifejezést bővítjük $-3-4$ kifejezéssel, akkor eddigi zárójelezésünkből kettőt is készíthetünk: Az eddigi kifejezéshez egyesével vesszük hozzá -3-at és -4-et, illetve a két tag együttesen zárójelezve kerül hozzá. Más lehetőségek is vannak, de az biztos, hogy lehetőségeink legalább megkétszereződnek. Gondolatmenetünk folytatható: két újabb tag a zárójelezések lehetőségeinek számát mindig legalább megkétszerezi. Összesen több mint 2^{999} zárójelezés van, ami sokkal nagyobb szám, mint a lehetséges végeredmények száma. Így biztos lesz két különböző zárójelezés azonos végeredménnyel.

25. Legyen az öt szám: a, b, c, d, e. Képezzük a következő összegeket: $x_1 = a$, $x_2 = a + b$, $x_3 = a + b + c$, $x_4 = a + b + c + d$, $x_5 = a + b + c + d + e$. Az x_1, x_2, ..., x_5 számok 5-tel osztva 5 különböző maradéka lehet, ezért vagy különböző a maradék, és akkor van közöttük egy 5-tel osztható, vagy van két azonos maradékú, és akkor azok különbsége osztható 5-tel. Ez a különbség az eredeti a, b, c, d, e számok közül néhánynak az összege. Az 5 helyett bármilyen nagyobb egészet írhatunk. 4 szám esetén már nem biztos, hogy kiválasztható megfelelő részhalmaz. Ezt például az 1, 1, 1, 1 számnégyes mutatja.

26. Az előző alapján az 5. lépésben biztos véget ér a játék. A kezdőnek akkor lehet nyerő stratégiája, ha eléri, hogy a 4. lépésre vége legyen a játéknak.
Legyen l_i az i-edik lépésben felírt szám ötös maradéka. Nyerő stratégia: $l_1 = 1$. Mivel l_2 nem lehet 4, illetve 5, $l_2 = 1$, 2 vagy 3.
Ha $l_2 = 1$, akkor $l_3 = 2$. Ha $l_2 = 2$, akkor $l_3 = 1$. Ha $l_2 = 3$, akkor $l_3 = 3$. Bármi is az l_4, a kezdő játékos nyer.

27. Legyen a_i olyan szám, melyben i-szer van egymás után leírva a 2001. Tehát $a_1 = 2001$, $a_2 = 20012001$, ..., $a_{18} = 20012001...2001$. Ez 18 darab szám, melyeknek 17-tel osztva 17-féle maradéka lehet. Így biztos van kettő azonos maradékú közöttük. Ezek különbsége osztható 17-tel, és 2001-gyel kezdődik. Ilyen szám még a 200 107 is.

28. Az előző alapján $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, ..., $a_{18} = \overbrace{11...11}^{18}$. A két azonos 17-es maradékú különbsége osztható 17-tel, és csak 1, illetve 0 jegyből áll. Ilyen szám még az 1001 is.

29. 10-zel osztva 10-féle maradék lehet, így az 55 szám között biztosan van 6 darab, melyek maradéka azonos, ugyanaz az utolsó jegyük. Legyenek ezek $0 < a_1 < a_2 < ... < a_6 \le 100$. Ha bármely két szomszédos különbsége nagyobb lenne, mint 10, akkor a_6 100-nál nagyobb lenne. Így kell lennie két szomszédosnak, melyek különbsége 10.
11-hez 56 darab számot kell húzni, 12-höz 61 darabot.

Rejtvény:

1, 5, 6, 2, 4, 3, 7 $\to$ 1, 4, 3, 7, 5, 6, 2 $\to$ 5, 6, 2, 1, 4, 3, 7 $\to$

2, 1, 4, 5, 6, 3, 7 $\to$ 2, 1, 5, 6, 3, 4, 7 $\to$ 6, 3, 4, 7, 2, 1, 5 $\to$

7, 2, 1, 5, 6, 3, 4 $\to$ 1, 5, 6, 7, 2, 3, 4 $\to$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

3. Sorba rendezési problémák

1. *a)* 8!

b) 4!, mivel a négy párban a sorrend adott.

c)-d) Tisztázni kell, hogy egy kör alakú asztal mellé ültetések közt kettőt mikor tekintünk különbözőnek. Két lehetőség van: I) Ha két ülésrend esetén mindenkit mindkét esetben ugyanazon két ember fogja közre, akkor a két ülésrendet azonosnak tekintjük. II) Ha a két ülésrend esetén mindenkinek mindkét esetben ugyanaz a bal és ugyanaz a jobb oldali szomszédja, akkor a két ülesrendet azonosnak tekintjük. A két szemléletmód abban különbözik, hogy ha egy ülésrendet egy tükörben tekintünk, akkor az I) szemlélet mellett ugyanazon ülésrendet látjuk, mint a tükör nélkül tekintett eredetit. Míg a II) szemlélet szerint (feltéve, hogy legalább hárman ülnek az asztalnál) másik ülésrendhez jutottunk, mert az eredeti bal szomszédok most jobb szomszédok lettek.
A II) szemlélet szerint a *c)*-re a válasz 7!, hiszen a nyolc résztvevő közül az egyik leírja, hogy tőle balra ki ült, és továbbmenve balra milyen sorrendben követte egymást a rajta kívüli hét részvevő, akkor a teljes ülésrend egyértelműen tisztázva lesz. A hét résztvevő sorrendjére 7! lehetőség van. Az I) szemléletben a lehetőségek száma feleződik.
A *d)* kérdésre a II) szemléletben a válasz: $2 \cdot 3! \cdot 2^3$, hiszen az egyik férfinak az ülésrend leírásához el kell mondani, melyik oldalon ült a felesége, arrafelé haladva milyen sorrendben ült a másik három házaspár, és mindegyik házaspár esetén tisztázni kell, hogy a férj és a feleség a két lehetőség közül milyen sorrendben ült. Az I) szemléletben a lehetőségek számát felezni kell.

2. Ha nem vesznek össze, akkor 4!-féleképpen ülhetnek le. Ha Bea és Cili egymás mellé akarnak ülni, akkor $3! \cdot 2$-féleképpen ülhetnek. Így ha nem akarnak egymás mellé ülni, akkor $4! - 3! \cdot 2 = 3! \cdot (4 - 2) = 2 \cdot 3! = 12$-féleképpen ülhetnek le.

3. *a)* 11! *b)* $\dfrac{6!}{2}$ *c)* $\dfrac{12!}{2 \cdot 2 \cdot 2}$

4. $\dfrac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$, mivel az azonos jelek sorrendje nem számít.

5. A 7 betűs szavak száma $\dfrac{7!}{4! \cdot 3!}$. A 6 betűs szavak száma $\dfrac{6!}{4! \cdot 2!} + \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = \dfrac{3 \cdot 6! + 4 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 3! \cdot 2!} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!}$.

A két szám egyenlő.

6. $\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot 2^6$, 2^6-nal azért kell szorozni, mert bármelyiket megfordítva új rendezést kapunk.

7. $\frac{10!}{6!\cdot 4!}$, a fejek, ill. írások egymás közti sorrendje nem számít.

8. A sorrendhez le kell írnunk mi haladt az opel mögött, kettővel az opel mögött és hárommal az opel mögött (ami egyben az opel elott haladó autó). Ez éppen a másik három autó egy sorrendje. Erre $3! = 6$ lehetőség van.

9. $\frac{5!}{5\cdot 2}$

10. $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$-féleképpen. Az egyik felső lyuknál kezdve hátul ismeretlen úton 10 lehetőség van a felbukkanására. Ezután elöl adott, hogy melyik lyukat kell választani. A következőnél már csak 8 lehetőség van és így tovább.

11. *a)* 4!

b) $4 \cdot 2 = 8$-féleképpen. Először kiválasztjuk, hogy melyik kerüljön a helyére, azután a többit rendezhetjük úgy, hogy egy se kerüljön a helyére (ez 2 lehetőség).

c) Arra nincs lehetőség, hisz ekkor a negyediket is csak a helyére rakhatjuk.

12. *a)* 5!

b) A 11)-es feladat borítékokkal is elmondható. Ebből kiderül, hogy a borítékolás $4! = 24$ módon lehetséges. Ebből egyszer minden a helyére kerül, nyolcszor pontosan egy levél kerül a helyére. Könnyen meggondolható, hogy hatszor lesz olyan elrendezés, hogy pontosan két levél kerül a helyére. Azaz $24 - 1 - 8 - 6 = 9$-szer lesz az, hogy egy levél sem kerül a helyére. Az eredeti problémára visszatérve: öt levél esetén ötféleképpen választhatjuk ki azt az egyetlen levelet, amelyik a helyére kerül, majd 9-féleképpen rendezhetjük el a maradék négy levelet úgy, hogy további helyrekerülés már ne legyen. Összesen $5 \cdot 9 = 45$ lehetőség van.

c) $\binom{5}{3}$ választható ki, melyik három legyen a helyén. A fennmaradó kettő helye már egyértelmű.

13. András megoldása helyes.

14. A legalacsonyabbnak a sor szélén kell állnia, és a következő magasságúnak vagy mellette, vagy a sor másik végén. A többiek sorrendje mindkét esetben 4-féle lehet. Így az összes esetek száma $16 = 2 \cdot (4+4)$. A 2-es szorzó azért kell, mert egy jó sorrendet megfordítva is jó sorrendet kapunk.
Egy másik érvelés: A sort úgy alakítsuk ki, hogy a játékosok magasság szerint csökkenő sorrendben menjenek fel a pályára és álljanak be az eddigi sorba. A legmagasabb játékos után a további négy játékos mindegyike két választás előtt áll: vagy a sor elejére, vagy a sor végére áll. Összesen 2^4 lehetőség van a sor teljes kialakítására.

4. Kiválasztási problémák

1. $\binom{5}{3}\cdot 3!$-féle zászló. Először kiválasztjuk a 3 színt, majd ezek sorrendje tetszőleges.

Másként: $\frac{5!}{2!}$-féle, mivel tetszőlegesen sorbarendezzük az 5 színt, de az utolsó 2 sorrendje nem fontos, hisz az első 3 adja a zászló színét.

Egy harmadik érvelési mód: Legfelülre öt lehetőségből választhatunk. Alá már egy új színnek kell kerülni, amire négy lehetőség van. Alulra a maradék három színből választunk egyet. Összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ lehetőség van.

2. $5 \cdot 4 \cdot 4$-féle zászló. Az első szín választására 5 lehetőség van, a következő színekre csak 4, hisz az előző színt nem választhatjuk.

3. *a)* $\frac{9!}{4!}$

b) 9^5-féleképpen, hisz minden húzásnál 9 lehetőség van.

4. *a)* $\binom{6}{4}\cdot 4!$ eset lehet, kiválasztjuk a 4 számot, majd ezeket tetszőleges sorrendben rendezhetjük.

b) 7-szer.

5. *a)* $6 \cdot 5 \cdot 4$ *b)* 6^3

6. *a)* 4^4.

b) 4^3.

c) $4^2 \cdot (4+3+2+1)$ Külön számoljuk az eseteket attól függően, hogy mi az első szám.

d) $3 \cdot 4^3$, mivel az első szám nem lehet 1.

e) $4^2 \cdot 4$, mivel az utolsó két jegy 4-féle lehet.

7. *a)* 6^3.

b) $6 \cdot 6 \cdot 3$.

c) 6, mivel az utolsó két jegy 1-féle lehet.

8. 3^{14}-féleképpen.

9. A megfogalmazás kétértelmű!
Ha úgy értjük, hogy minden szín csak egyszer szerepelhet:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \geq 365$$
$$n \geq 6$$

Legalább 6 szín kell.

Ha úgy értjük, hogy a színek ismétlődhetnek, akkor n szín esetén n^5 színezési lehetőség van. Így olyan n-et kell választani, amelyre $n^5 \geq 365$. n minimális értéke 4.

10. $2^8 - 2 = 254$ szám írható fel. 2^8 az összes, ezen számjegyekből álló 8 jegyű szám, és 2, melyekben csak az egyik számjegy szerepel.

11. $26^3 \cdot 10^3$-féle, mivel 26 betű és 10 számjegy használható.

12. $10^6 - 9^6$-féle szám, mivel 10^6 legfeljebb 6 jegyű természetes szám van, és ezek között 9^6 olyan, melyben nincs 1 számjegy.

13. *a)* $2; \frac{1}{2}$ *b)* $\frac{1}{4}; 1; 4$

14. 3 jegyű jelsorozat 2^3-féle, 2 jegyű 2^2-féle, 1 jegyű 2-féle lehet. Ez a 14 lehetőség kevés.

15. $4 \cdot 10^5$-féle 0,12... alakú, $7 \cdot 10^6$-féle 0,1x... alakú (ahol $x \geq 3$) és $3 \cdot 10^7$-féle 0,2...; 0,3...; 0,4... alakú szám van. Ez összesen $374 \cdot 10^5$ darab szám.

16. *a)* 2^3 *b)* $4 \cdot 5^3$ *c)* $11 \cdot 12^3$
Az első helyi értéken nem állhat 0 az egyik esetben sem.

17. $8 \cdot 2 \cdot 9 = 144$ különböző kód.

Rejtvény: Jobbról a 2. pohár tartalmát átöntjük az 5.-be, majd a 4.-ét a 7.-be.

A gyökvonás

1. Racionális számok, irracionális számok

1. *a)* $0{,}41\dot{6}$ *b)* $1{,}\dot{8}5714\dot{2}$
c) $0{,}\dot{6}47058823529411\dot{7}$ *d)* $0{,}\dot{5}88235294117647\dot{0}$

2. *a)* $\dfrac{3142}{1000}$ *b)* $\dfrac{3139}{999}$ *c)* $\dfrac{3091}{990}$ *d)* $\dfrac{2828}{900}$

3. Indirekt bizonyítást alkalmazunk.

a) Tegyük fel, hogy $\sqrt{7}$ racionális.

$\sqrt{7} = \dfrac{p}{q}$, ahol $(p; q) = 1$, $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

Innen $7q^2 = p^2$. A bal oldalon a 7 kitevője páratlan szám, míg a jobb oldalon páros szám, ami ellentmond a számelmélet alaptételének, így ez lehetetlen. Tehát $\sqrt{7}$ irracionális.

b) Az előzőhöz hasonlóan:

Tegyük fel, hogy $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, $(p; q) = 1$ és $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

Innen $2q^2 = p^2$.

A 2 kitevője eltér a két oldalon, ami ellentmond a számelmélet alaptételének. Így a $\sqrt{2}$ irracionális, tehát a $\sqrt{2}+1$ is.

c) Belátható, hogy $\sqrt{3}$ irracionális, így a $\sqrt{3}-1$ is.

d) Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{7} = \dfrac{p}{q}$, $(p; q) = 1$ és $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

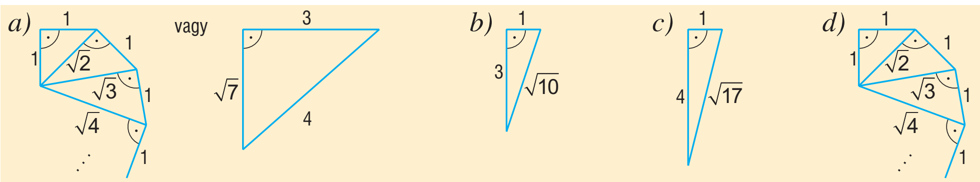
Innen $\left(9+2\sqrt{14}\right)q^2 = p^2$, ami csak akkor lehet igaz, ha $\sqrt{14}$ racionális. Ezt hasonlóan vizsgáljuk:

Tegyük fel, hogy $\sqrt{14} = \dfrac{m}{n}$, $(m; n) = 1$ és $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Innen $14n^2 = m^2$.

A 7 kitevője a két oldalon különböző, ami lehetetlen, így a $\sqrt{14}$ irracionális, tehát a $\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)$ is.

4. Pitagorasz tételét alkalmazzuk többször egymás után.



d) Az 1956-ik lépésben kapjuk a $\sqrt{1956}$ hosszúságú szakaszt.

5. Például $\pi - 2{,}15$.

Rejtvény: $1{,}\dot{9} = \frac{18}{9} = \frac{2}{1}$.

2. A négyzetgyökvonás azonosságai

1. *a)* 5 *b)* 10 *c)* 3 *d)* 25
e) 5 *f)* 49 *g)* 4 *h)* 9

2. *a)* $\sqrt{15} > \sqrt{14} \Rightarrow \sqrt{3}\cdot\sqrt{5} > \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{27} < \sqrt{28} \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^3 < \sqrt{14}\cdot\sqrt{2}$

c) $\sqrt{4} < \sqrt{42} \Rightarrow \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{8}} < \sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$

d) $\sqrt{7} > \frac{2\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}}\cdot\frac{\sqrt{21}}{2} > \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$

3. *a)* $2\sqrt{3} - 21$ *b)* $9 + \sqrt{6} + \sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ *c)* $38 - 12\sqrt{10}$
d) $68 + 6\sqrt{35}$ *e)* 33 *f)* $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$

4. *a)* 2 *b)* 6 *c)* 26 *d)* 22 *e)* 38 *f)* $2\sqrt{30} - 8$

Rejtvény: $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3^4\cdot 2^3}}}$ $\sqrt{3\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{3^3}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3^6}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3^4\cdot 3^2}}}$

Tehát a $\sqrt{3\sqrt{3}}$ a nagyobb.

3. A négyzetgyökvonás azonosságainak alkalmazásai

1. *a)* $3\sqrt{8} = 6\sqrt{2}$

b) $\sqrt{48} < \sqrt{50} \Rightarrow 4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$

c) $\sqrt{28} > \sqrt{27} \Rightarrow 2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

d) $\sqrt{125} < \sqrt{128} \Rightarrow 5\sqrt{5} < 8\sqrt{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\sqrt{21}}{7} < \frac{\sqrt{15}}{5}$

f) $\sqrt{81\cdot 5} > \sqrt{196\cdot 2} \Rightarrow 9\sqrt{5} > 14\sqrt{2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{5}}{4} > \frac{7\sqrt{2}}{6}$

2. *a)* $\frac{1}{\sqrt{a}}$ *b)* $\sqrt{\frac{a}{b}}$ *c)* $\sqrt{a+b}$ *d)* -1 *e)* -2

3. *a)* $5\sqrt{3}$ *b)* $\sqrt{2}$ *c)* $6\sqrt{7}$ *d)* 40 *e)* $9a-4b$

4. *a)* $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ *b)* $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ *c)* $-2\left(\sqrt{2}+3\right)$ *d)* $3\left(3\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)$

e) $\frac{2\sqrt{6}-9}{57}$ *f)* $\frac{11\sqrt{15}-25}{70}$ *g)* $\frac{a-5\sqrt{a}+6}{2(a-4)}$

5. *a)* $\sqrt{11}-\sqrt{5}<\sqrt{13}-\sqrt{5} \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}<\frac{8}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$

b) $2\sqrt{3}+\sqrt{6}<\sqrt{14}+\sqrt{6} \Rightarrow \frac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}<\frac{8}{\sqrt{14}-\sqrt{6}}$

c) $4\sqrt{3}<5\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<3\sqrt{2}-2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{4}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}<\frac{6}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

6. *a)* $\frac{6-5\sqrt{3}}{3}$ *b)* $\frac{70+15\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{10}$ *c)* 4

d) $\frac{7}{a-4}$ $a\geq 0; a\neq 4$ *e)* $\frac{2\left(x^2-3\sqrt{x^3}-8x-5\sqrt{x}-9\right)}{(x-1)(x-9)}$ $x\neq 1; 9;\ x\geq 0$

7. *a)* $\frac{4}{4-y} \to \frac{16}{27}$ *b)* $\frac{6y-4}{9y-1} \to -11$

4. Számok *n*-edik gyöke

1. *a)* 2 *b)* 4 *c)* 2 *d)* –3 *e)* –5 *f)* 2
g) –2 *h)* 10 *i)* –6

2. *a)* $|a|$ *b)* b *c)* $-c$ *d)* $|d|$ *e)* e^3 *f)* f^2
g) $|g^3|$ *h)* $|h^5|$ *i)* $|x|$

Rejtvény: $10=4\cdot 4-4-\sqrt{4}$ $14=4\cdot 4-4+\sqrt{4}$ $18=4\cdot 4+4-\sqrt{4}$
$22=4\cdot 4+4+\sqrt{4}$ $32=4\cdot 4+4\cdot 4$

5. Az *n*-edik gyökvonás azonosságai

1. *a)* 2 *b)* 5 *c)* –4 *d)* –1 *e)* 2 *f)* 3

2. *a)* $\sqrt[4]{16\cdot 26} > \sqrt[4]{81\cdot 5} \Rightarrow 2\cdot\sqrt[4]{26} > 3\cdot\sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[3]{125\cdot 7} > \sqrt[3]{216\cdot 4} \Rightarrow 5\cdot\sqrt[3]{7} > 6\cdot\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[5]{81\cdot 15} > \sqrt[5]{32\cdot 37} \Rightarrow 3\cdot\sqrt[5]{5} > 2\cdot\sqrt[5]{37}$

3. *a)* $\sqrt[20]{32}$ *b)* $\sqrt[18]{625}$ *c)* $\sqrt[15]{a^6}$ $a \in \mathbb{R}$ *d)* $\sqrt[24]{a^{17}}$ $a \ge 0$

e) $\sqrt[60]{a^{29}}$ $a \ge 0$ *f)* $\sqrt[10]{a^7}$ $a \ge 0$ *g)* $\sqrt[12]{b}$ $b > 0$ *h)* $\sqrt[24]{a^{11}}$ $a > 0$

4. *a)* 0

b) $4\cdot a\cdot\sqrt[4]{a}$ $a \ge 0$

c) $\sqrt[5]{a^2 b}(a + a^2 b - b)$

d) $\sqrt[4]{a^2}\left(5|a| - 3a^2 - |a^3|\right)$

e) $a^2\cdot b^2\cdot\sqrt[8]{a^2\cdot b^7} + a\cdot b\cdot\sqrt[8]{a^2\cdot b^5} - a\cdot b\cdot\sqrt[8]{a^6\cdot b}$ $a; b \ge 0$

f) $a\cdot\sqrt[n]{a^3} + a^2\cdot\sqrt[n]{a} - a^3$ $a \ge 0,$ ha n páros

5. *a)* $\dfrac{\sqrt[4]{7^3}}{7}$ *b)* $\dfrac{8\cdot\sqrt[3]{2}}{5}$ *c)* $\dfrac{8\cdot\sqrt[5]{2^4}}{3}$ *d)* $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{a}$ $a > 0$ *e)* $\dfrac{3\cdot\sqrt[6]{a^5}}{5}$ $a > 0$

Rejtvény: $\sqrt[1024]{2}$.

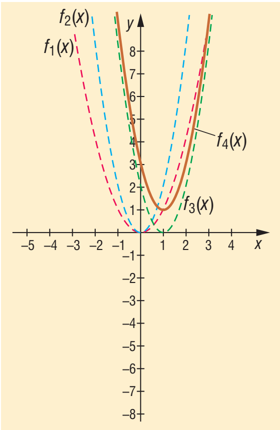
A másodfokú egyenlet

1. A másodfokú egyenlet és függvény

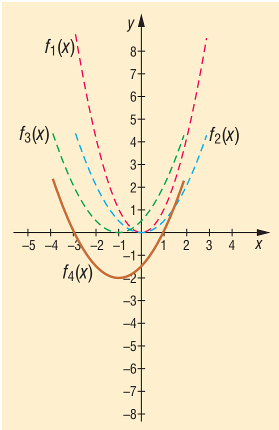
1. *a)* $(x-2)^2$ *b)* $(x-3)^2-1$ *c)* $(x+4)^2-18$

d) $2(x+2)^2-13$ *e)* $-(x-4)^2+14$ *f)* $-3(x-1)^2+4$

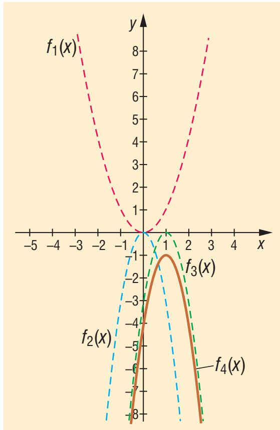
2. *a)*



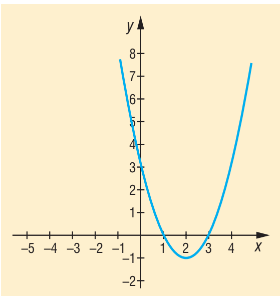
b)



c)

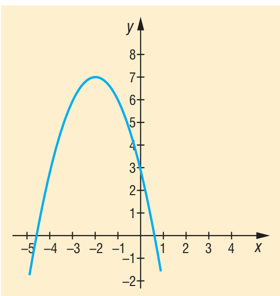


3. *a)*

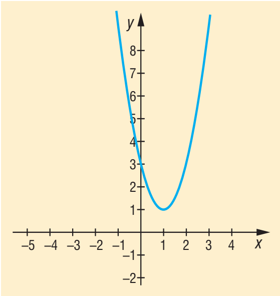


$f(x)=(x-2)^2-1$
$D_f=\mathbb{R}$
$R_f=[-1;\infty[$
minimum van, helye: $x=2$
értéke: $y=-1$
maximum nincs
zérushely: $x_1=1$; $x_2=3$
$]-\infty;2]$ szig. mon. csökkenő
$[2;\infty[$ szig. mon. növő
alulról korlátos, a legnagyobb alsó korlát -1

b)



$f(x)=-(x+2)^2+7$
$D_f=\mathbb{R}$
$R_f=]-\infty;7]$
maximum van, helye: $x=-2$
értéke: $y=7$
minimum nincs
zérushely: $x_1=-2+\sqrt{7}$; $x_2=-2-\sqrt{7}$
$]-\infty;-2]$ szig. mon. növő
$[-2;\infty[$ szig. mon. csökkenő
felülről korlátos, a legkisebb felső korlát 7

c) 

$f(x) = 2(x-1)^2 + 1$
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = [1; \infty[$
minimum van, helye: $x = 1$
értéke: $y = 1$
maximum nincs
zérushely nincs
$]-\infty; 1]$ szig. mon. csökkenő
$[1; \infty[$ szig. mon. növő
alulról korlátos, a legnagyobb alsó korlát 1
„meredekség” kétszeres

4. *a)* $D = 16 - 4q$
0 zh.: $q > 4$
1 zh.: $q = 4$
2 zh.: $q < 4$

b) $D = 16 + 4q$
0 zh.: $q < -4$
1 zh.: $q = -4$
2 zh.: $q > -4$

c) $D = 16 - 8q$
0 zh.: $q > 2$
1 zh.: $q = 2$
2 zh.: $q < 2$

5. $f(x) = x^2 + px + q$

minimum helye: $x = -\dfrac{p}{2}$

értéke: $y = -\dfrac{p^2}{4} + q$

a) $p = -2;\ q = 3$ *b)* $p = 2;\ q = -1$ *c)* $p = -8;\ q = 13$

6. Minden érték pozitív, ha $D < 0$.
a) $9 < q$ *b)* $4 < q$ *c)* $8 < q$

7. Minden érték negatív, ha $D < 0$.
a) $q < -4$ *b)* $q < -1$ *c)* $q < -2$

2. A másodfokú egyenlet megoldóképlete

1. *a)* $x_1 = 11;\ x_2 = -11$ *b)* $x_1 = 3;\ x_2 = -3$
c) $x_1 = 16;\ x_2 = -16$ *d)* nincs megoldás

2. *a)* $x_1 = 1;\ x_2 = -3$ *b)* $x_1 = 2;\ x_2 = -3$
c) $x_1 = 2;\ x_2 = -\dfrac{4}{3}$ *d)* nincs megoldás

3. *a)* $(x-1)^2 = 4$
$x_1 = 3;\ x_2 = -1$

b) $(x+2)^2 = 9$
$x_1 = 1;\ x_2 = -5$

c) $2(x-1)^2 = 25$
$x_{1,2} = 1 \pm \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

d) $(x+1)^2 = -2$
nincs megoldás

4. *a)* $x_1 = -3;\ x_2 = 1$ *b)* $x_1 = 3;\ x_2 = 1$
c) $x_1 = -5;\ x_2 = 2$ *d)* $x = 2$

5. *a)* $x_1 = 10, x_2 = 0$
b) $y_1 = -5, y_2 = 5$
c) $v_1 = -4, v_2 = 4$
d) $u_1 = 8, u_2 = -3$

6. *a)* $\frac{1}{3} > a$ *b)* $a = \frac{1}{3}$ *c)* $a > \frac{1}{3}$

7. *a)* $b < -2\sqrt{2}$ vagy $b > 2\sqrt{2}$

b) $b_1 = -2\sqrt{2}$ vagy $b_2 = 2\sqrt{2}$

c) $-2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$

8. *a)* $4 > c$ *b)* $c = 4$ *c)* $c > 4$

3. A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés

1. *a)* $x_1 = 2;\ x_2 = -2$
b) $x_1 = \frac{2}{3};\ x_2 = -\frac{1}{2}$
c) $x_1 = -2;\ x_2 = 4$
d) $x_1 = -1;\ x_2 = 4$

2. *a)* $(x-2)(x-4) = 0$
b) $(x+3)(x-5) = 0$
c) $(3x-2)(4x+3) = 0$
d) $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) = 0$
e) $(x-a-b)(x-a+b) = 0$

3. *a)* $(x-3)(x-5)$
b) $2(x-5)(x-2)$
c) $-(2x-3)(x+5)$
d) $-(2x+1)(x+3)$

4. *a)* $\frac{x+1}{x-1}$ $x \neq 1; 3$
b) $\frac{x+3}{3-x}$ $x \neq 1; 3$
c) $\frac{3(x-1)}{2x-1}$ $x \neq \frac{1}{2}; -2$
d) $\frac{3x+2}{2-x}$ $x \neq \frac{1}{2}; 2$

5. *a)* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{2}$

c) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} = \frac{10}{3}$

d) $\left|x_1^2 - x_2^2\right| = \left|x_1+x_2\right|\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = 3$

6. *a)* $x_1 + x_2 = -p$
b) $\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{p^2-4q}$
c) $x_1 \cdot x_2 = q$
d) $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$
e) $\left|x_1^2 - x_2^2\right| = |p|\sqrt{p^2-4q}$

7. *a)* $c = -1$ *b)* $-1 < c < 0$ *c)* nincs ilyen c
d) $c = 0$ *e)* $c > 0$ *f)* $c < -1$

8. Az x együtthatójának 0-nak kell lennie.

$$4k - 8 = 0;$$
$$k = 2.$$

Ekkor az egyenlet $x^2 + 2 = 0$ alakú, tehát nincs valós gyöke. Nincs megfelelő k.

9. $x^2 + 5x + 6 = 0$

10. A keresett egyenlet legyen $y^2 + by + c = 0$ alakú.
Tudjuk $y_1 = x_1 + 2$
$y_2 = x_2 + 2$

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + 4 = \frac{19}{15} + 4 = \frac{79}{15}$$

$$y_1 \cdot y_2 = (x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{6}{15} + 2\frac{19}{15} + 4 = \frac{104}{15}$$

$$y^2 - \frac{79}{15}y + \frac{104}{15} = 0$$
$$15y^2 - 79y + 104 = 0$$

4. Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek

1. *a)* $x = 2$ *b)* $x = -3$ *c)* $x = 2$

2. *a)* $x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $x^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ nincs megoldás

b) $x^3 = 3$ $x^3 = -1$

$x_1 = \sqrt[3]{3}$ $x_2 = -1$

c) $x^4 = 4$ $x^4 = -\frac{1}{2}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ nincs megoldás

3. *a)* $(x+1)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(x+1)^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ nincs megoldás

b) $(x-2)^3 = 2$ $(x-2)^3 = -\frac{1}{2}$

$x_1 = 2 + \sqrt[3]{2}$ $x_2 = 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c) $(2x-1)^4 = 4$ $\qquad$ $(2x-1)^4 = -\dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{1 \pm 1}{2}$ $\qquad$ nincs megoldás

$x_1 = 0;\ x_2 = 1$

4. *a)* Legyen $x^2 + x = y$, így $y(y+1) - 2 = 0$.
Innen $x^2 + x = -2$ vagy $x^2 + x = 1$

nincs megoldás $\qquad$ $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) Legyen $x^2 + 2x = y$, így $y(y-1) = 6$.
Innen $x^2 + 2x = 3$ vagy $x^2 + 2x = -2$
$x_1 = 3;\ x_2 = -1$ $\qquad$ nincs megoldás

c) Legyen $x^2 - x + 1 = y$, így $y(y-2) - 3 = 0$.
Innen $x^2 - x + 1 = 3$ vagy $x^2 - x + 1 = -1$
$x_1 = 2;\ x_2 = -1$ $\qquad$ nincs megoldás

5. *a)* $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

b) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 0$
$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0$

c) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-4) = 0$
$x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$

6. *a)* $(x-3)(x+1)(x-1) = 0$
$x_1 = 3;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1$

b) $(x-3)(x+1)(x^2+1) = 0$
$x_1 = 3;\ x_2 = -1$

c) $(x+1)(x-2)(x^2+1) = 0$
$x_1 = -1;\ x_2 = 2$

7. *a)* $x = 1$ $\qquad$ *b)* $x = \dfrac{1}{2}$ vagy $x = 2$

c) $x = \dfrac{1}{3}$ vagy $x = 3$ vagy $x = 1$

8. *a)* $x = \sqrt[3]{3}$ vagy $x = \sqrt[3]{2}$ $\qquad$ *b)* nincs valós megoldás $\qquad$ *c)* $x = \dfrac{1}{2}$ vagy $x = 2$

5. Másodfokú egyenlőtlenségek

1. *a)* $-4 < x < 4$ $\qquad$ *b)* $x < -5$ vagy $5 < x$ $\qquad$ *c)* $-8 \le x \le 8$

2. *a)* $x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ vagy $x > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ *b)* $-1 \le x \le 3$ $\qquad$ *c)* $-\dfrac{1}{2} < x < 4$

3. *a)* $x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ vagy $x > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ *b)* $-1 \le x \le 3$ $\qquad$ *c)* $x \in \mathbb{R}$

4. *a)* $x<-1$ vagy $x>1$ *b)* $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ *c)* $-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}<x<\sqrt[3]{4}$

5. *a)* $x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ vagy $0<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ *b)* $x=1$ vagy $x<0$

c) $\frac{5}{3}<x<2$ vagy $x<1$ vagy $x>3$

6. *a)* $D<0$

$4-4m<0$

$m>1$

b) nincs ilyen m

c) $4-m>0$ és $D<0$

$m<4$ és $9-4(4-m)(m+4)<0$

$-\frac{\sqrt{55}}{2}<m<\frac{\sqrt{55}}{2}$

6. Paraméteres másodfokú egyenletek

1. Kétszeres gyök $\Leftrightarrow D=0$

a) $a^2-16=0$ *b)* $9-4a=0$ *c)* $a^2-4a=0$ *d)* $a^2-4(a+1)=0$

$a_1=4;\ a_2=-4$ $a=\frac{9}{4}$ $a_1=0;\ a_2=4$ $a_{1,2}=2\pm2\sqrt{2}$

2. *a)* $D=a^2-16$

$a=\pm4$: egy gyök, $x=2$ ill. $x=-2$

$-4<a<4$: nincs gyök

$a<-4$ vagy $4<a$: két gyök, $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-16}}{2}$

b) $D=b^2-4a$

$b^2=4a$: egy gyök, $x=\frac{b}{2}$

$b^2<4a$: nincs gyök

$b^2>4a$: két gyök, $x_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4a}}{2}$

c) $D=b^2-20a$

$b^2=20a$ és $a\ne0$: egy gyök, $x=\frac{b}{2a}$

$b^2<20a$ és $a\ne0$: nincs gyök

$b^2>20a$ és $a\ne0$: két gyök, $x_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-20a}}{2a}$

$a=0$: egy gyök, $x=\frac{b}{5}$

d) $a = 0$: lineáris egyenlet, egy gyök, $x = \frac{1}{b}$ $(b \neq 0)$, ha $b = 0$, nincs megoldás

$a \neq 0$: másodfokú, $D = b^2 - 4a(a+1)$

$b^2 = 4a(a+1)$: egy gyök, $x = \frac{b}{2a}$

$b^2 < 4a(a+1)$: nincs gyök,

$b^2 > 4a(a+1)$: két gyök, $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a(a+1)}}{2a}$

3. *a)* $a = 0$: $x = 1$

$a \neq 0$: $x_{1,2} = \frac{1 - a \pm \sqrt{a^2+1}}{2}$

b) $a = 0$: $x = 1$

$a \neq 0$: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4a^2+1}}{2}$

c) Kikötés: $x \neq a; -a; 0$.
Szorzunk a nevezőkkel:

$$x(x-a) + x(x+a) = x^2 - a^2;$$

innen:

$$x^2 + a^2 = 0;$$

tehát:

$$x = a = 0.$$

Ez az eredeti egyenletnek nem megoldása, tehát nincs megoldás.

4. Nincs valós megoldás $\Leftrightarrow D < 0$.

a) $a^2 - 16a < 0$
$0 < a < 16$

b) $a^2 - 4(a-4) < 0$
$a^2 - 4a + 16 < 0$
$(a-2)^2 + 12 < 0$
nincs ilyen a

c) $a \neq 0$ és $D < 0$
$a \neq 0$ és $(a-1)^2 - 20a < 0$
innen $11 - 2\sqrt{30} < a < 11 + 2\sqrt{30}$

5. $m < 0$ és $D < 0$
$m < 0$ és $(m-1)^2 - 4m < 0$
$m < 0$ és $3 - 2\sqrt{2} < m < 3 + 2\sqrt{2}$
Tehát nincs ilyen m.

6. $m > 0$ és $D < 0$
$m > 0$ és $m^2 + 20m < 0$
$m > 0$ és $m(m+20) < 0$
Tehát nincs ilyen m.

7. $-m < 0$ és $D < 0$
$m > 0$ és $(m-1)^2 + 4m(m+2) < 0$
$m > 0$ és $-1 < m < -\frac{1}{5}$
Tehát nincs ilyen m.

7. Négyzetgyökös egyenletek

1. *a)* $x = 36$ *b)* $x = 25$ *c)* nincs valós megoldás

2. *a)* $5 - x = 4$

b) $x = \dfrac{5+\sqrt{41}}{8}$

c) $\sqrt{5-x} = \dfrac{x}{2} - 3$

Kikötés: $5 - x \geq 0$ és $\dfrac{x}{2} - 3 \geq 0.$

Nincs ilyen x.

3. Nem negatív tagok összege csak akkor 0, ha minden tag 0.
a) nincs megoldás *b)* nincs megoldás *c)* nincs megoldás

4. *a)* $x = 17$ *b)* $x = \dfrac{65}{32}$ *c)* $x = 2 + 2\sqrt{7}$

5. *a)* nincs megoldás $(|x+3| = x+1)$
b) nincs megoldás $(|x-2| = |x-5| + 4)$
c) $x = -1$ $(|x+4| = |x-1| + 1)$

6. *a)* $x_1 = 3\sqrt{2};\ x_2 = -3\sqrt{2}$

Legyen $\sqrt{x^2-9} = a$, így az $a^2 + a - 12 = 0$ egyenletet kapjuk.

b) Legyen $\sqrt{x^2+3x+9} = a$, így az $a^2 + a - 36 = 0$ egyenletet kapjuk.

Így $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{119 - 2\sqrt{145}}}{2}$.

c) Legyen $\sqrt{x^2-4x+4} = a$, így az $a^2 + a - 8 = 0$ egyenletet kapjuk.

Innen $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2};\ x_2 = \dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$.

8. A számtani és mértani közép

1. *a)* $A(7;8) = \dfrac{15}{2}$ $G(7;8) = \sqrt{56} \sim 7{,}483$

b) $A\left(27; \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{82}{6}$ $G\left(27; \dfrac{1}{3}\right) = 3$

c) $A(125;\, 5) = 65$ $G(125;\, 5) = 25$

2. *a)* 35 *b)* 4

3. 5 találatra.

4. 5,499%-os.

5. $\frac{600}{11} = 54,5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ az átlagsebesség.

6. Az egyik oldal legyen a.

Ekkor a kerület $k = 2\left(a + \frac{100}{a}\right)$.

Ez akkor minimális, ha $a = 10$, azaz négyzetről van szó.

7. Nincs valós megoldás, hisz $\frac{x + \frac{2}{x}}{2} \geq \sqrt{2}$, így $x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$.

8. A másik befogó hossza 2, így $a + \frac{1}{a} > 2$.

9. Szélsőérték-feladatok

1. *a)* minimum helye: $x = 0$ értéke: $y = -4$ *b)* maximum helye: $x = 0$ értéke: $y = 2$ *c)* minimum helye: $x = 1$ értéke: $y = 2$

2. *a)* maximum helye: $x = -1$ értéke: $y = -3$ *b)* maximum helye: $x = \frac{3}{2}$ értéke: $y = \frac{13}{2}$ *c)* minimum helye: $x = \frac{1}{3}$ értéke: $y = \frac{5}{3}$

3. *a)* minimum helye: $x = -1$ értéke: $y = -8$ maximum nincs *b)* minimum helye: $x = -2$ értéke: $y = -6$ maximum helye: $x = -3$ értéke: $y = 0$ *c)* minimum helye: $x = -1$ értéke: $y = -8$ maximum helye: $x = 1$ értéke: $y = 0$

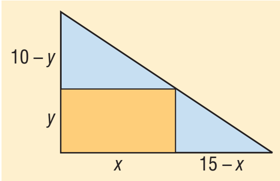
4. *a)* $f(x) = (x-1)^2$ *b)* $f(x) = (x+2)^2 + 2$ *c)* $f(x) = (x-3)^2 - 5$

5. *a)* $f(x) = -x^2 - 10$ *b)* $f(x) = -(x-2)^2 - 2$ *c)* $f(x) = -(x-4)^2 - 3$

6. Ekkor a négyzetösszeg

$$(30-x)^2 + x^2 = 2(x-15)^2 + 450.$$

Ez akkor a legkisebb, ha $x = 15$. Két egyenlő szám összegére kell osztani.



7. A háromszögek hasonlósága miatt:

$$\frac{15-x}{x}=\frac{y}{10-y}.$$

Innen

$$x=\frac{3(10-y)}{2}.$$

A terület:

$$t=\frac{3(10-y)y}{2}.$$

Ez akkor maximális, ha $y = 5$ cm és $x=\frac{15}{2}$ cm.

8. Legyen az egyik rész hossza x. Ekkor a félkörök területeinek összege:

$$t=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2\pi}{2}+\frac{\left(10-\frac{x}{2}\right)^2\pi}{2}=\frac{\pi}{4}((x-10)^2+100).$$

Ez akkor a legkisebb, ha $x = 10$ cm, és ekkor a terület 25π cm^2.

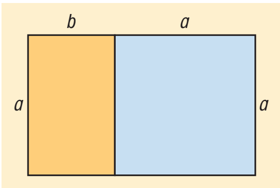
9. Legen az eltelt idő x s.
Ekkor a távolság

$$s=\sqrt{(40-4x)^2+(30-2x)^2}=\sqrt{20(x-11)^2+80}.$$

Ez akkor a legkisebb, ha $x = 11$. Azaz 11 s múlva lesznek a legközelebb.

Rejtvény: Mivel a félkörök száma mindig duplázódik, átmérőjük hossza pedig feleződik, ezért a vonalak hossza állandó, $\frac{\pi}{2}$.

10. Másodfokú egyenletre vezethető problémák



1. A hasonlóság miatt $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$.

Innen $\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-1=0.$ $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, mivel $\frac{a}{b}>0$.

2. A szöveg alapján $x(x+1)=x+25$. Innen $x_1=5$ vagy $x_2=-5$.

3. Legyen az oldalak száma n. Ekkor az átlók száma $\frac{n(n-3)}{2}$, belső szögek összege $(n-2)\cdot 180°$. A szöveg alapján

$$\frac{n(n-3)}{2}-n=\frac{(n-2)\cdot 180°}{90°}.$$

Innen $n = 8$ vagy $n = 1$. 8 oldalú a sokszög.

4. Az egyik konvex sokszög legyen x oldalú, a másik y oldalú. Így

$$\left.\begin{aligned} \frac{x(x-3)}{2}+\frac{y(y-3)}{2}&=158 \\ (x-2)\cdot 180^\circ+(y-2)\cdot 180^\circ&=4320^\circ \end{aligned}\right\}$$

Innen $x = 16$; $y = 12$. Az egyik konvex sokszög 16, a másik 12 oldalú.

5. Legyen a sebesség x. A szöveg alapján

$$\frac{540}{x}+1=\frac{540}{x-10}$$

Innen $x=5\left(1+\sqrt{217}\right)$, mivel $x>0$. Az autó sebessége kb. 78,65 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

6. Legyen az egyik befogó x. A terület alapján a másik $\frac{110}{x}$. A Pitagorasz-tétel alapján

$$x^2+\left(\frac{110}{x}\right)^2=221.$$

Innen $x_1 = 10$ vagy $x_2 = 11$. Az egyik befogó 10 cm, a másik 11 cm.

7. Legyen x az egy nap alatt megoldott tesztek száma. A szöveg alapján

$$\frac{720}{x}=\frac{720}{x+20}+3.$$

Innen $x = 60$ $(x > 0)$. 12 napig tartott.

8. A mélység legyen x m. A szabadon eső test gyorsulása alapján $s=\frac{g}{2}t_1^2$.

A hang terjedése alapján $s = v_\text{h}t_2$. Tudjuk, hogy $t_1 + t_2 = 10$ s. Így

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v_\text{h}}=10,$$

$$\sqrt{\frac{2x}{9{,}81}}+\frac{x}{340}=10.$$

Innen $x \approx 385{,}6$. A szakadék mélysége 385,6 m.

Rejtvény: Ha a kisebb –1 és a nagyobb 1.

Geometria

A KÖRREL KAPCSOLATOS ISMERETEK BŐVÍTÉSE

2. Középponti és kerületi szögek tétele

1. *a)* 30º *b)* 69º *c)* $\frac{\pi}{3}$ *d)* $\frac{5\pi}{8}$ *e)* 168º *f)* $\frac{\beta}{2}$

2. *a)* 30º *b)* 168º *c)* $\frac{3\pi}{2}$ *d)* $\frac{5\pi}{6}$

e) nem lehet ekkora kerületi szög *f)* 2α

3. *a)* 60º; 120º *b)* 70º; 140º *c)* $\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}$

d) $\frac{7\pi}{15}; \frac{14\pi}{15}$ *e)* 137º; 274º *f)* $\frac{\omega}{3}; \frac{2\omega}{3}$

4. *a)* 60º *b)* 105º *c)* 108º *d)* 110º *e)* $180^\circ \cdot \frac{m}{n}$

5. *a)* 30º; 60º; 90º *b)* 45º; 60º; 75º *c)* 30º; 50º; 100º

d) 35º; 45º; 100º *e)* $\frac{180^\circ \cdot p}{p+q+r}; \frac{180^\circ \cdot q}{p+q+r}; \frac{180^\circ \cdot r}{p+q+r}$

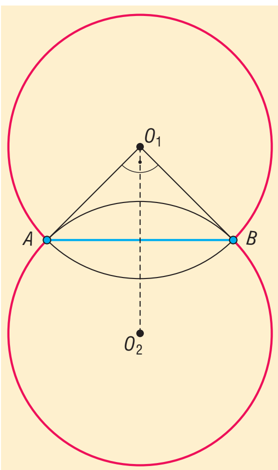
6. 5 cm

7. 10 cm

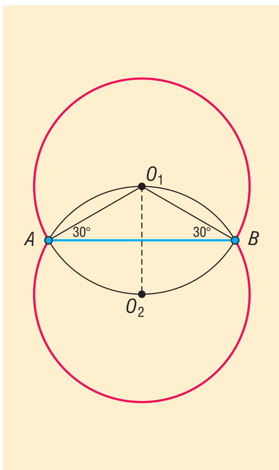
8. 60º

3. Kerületi szögek tétele

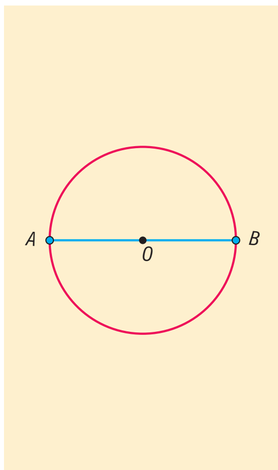
1. *a)*



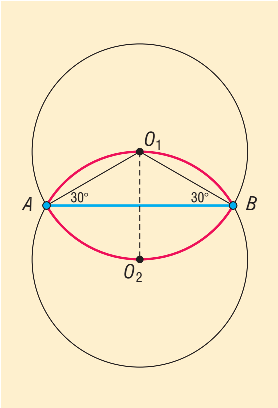
b)



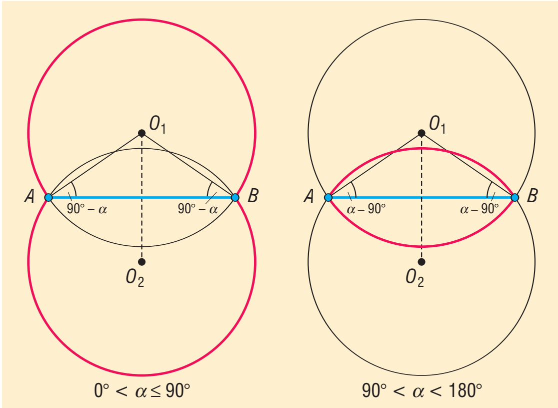
c)



d)

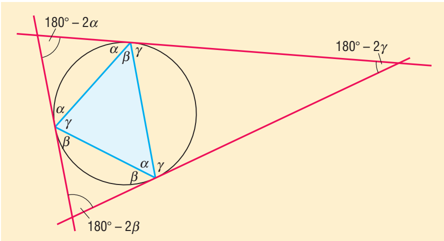


e)



2. *a)*; *b)*; *c)* a *d)* alapján.

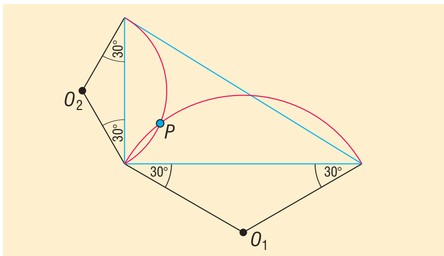
d)



3. 30º-os szögben látszódik.

4. 52º, illetve 128º-ban.

5. Megszerkesztjük az adott két pont által adott szakasz α szöghöz tartozó látószög körívét. Ahol ez metszi az egyenest, ott van a keresett pont.
A megoldások száma lehet 0; 1; 2; 3, ill. 4.

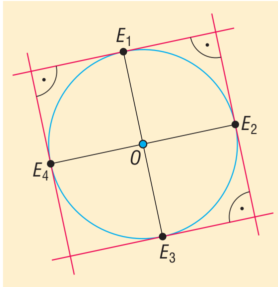


6. Mindkét befogóhoz megszerkesztjük a 120º-os látószög köríveket. Ezek metszéspontja a keresett pont. Innen az átfogó is 120º-os szögben látszódik.

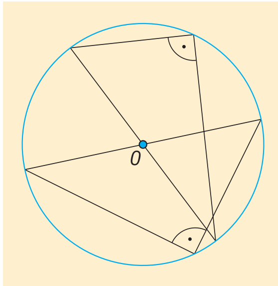
7. Adott a; s_a és α.
Felvesszük a-t, majd megrajzoljuk az α szögű látószög körívét. Az a felezőpontjából körzőzünk s_a sugárral. Ahol ez a kör metszi a látószög körívet, ott van a háromszög harmadik csúcsa.

8. Rajzoljuk meg azt a kört, melynek egy húrja a színpadot jelölő szakasz, és érinti az oldalpáholyokat jelölő egyenest. Az érintési pont a keresett hely.

Rejtvény: Rajzoljunk 90º-os szöget úgy, hogy szárai érintsék a kört, majd ezen szárakra illeszkedve ezt ismételjük meg mindkét száron. A kapott szemközti érintési pontokat összekötő húrok metszéspontja a középpont.



Más megoldás: Úgy rajzoljuk meg a 90º-ot, hogy csúcsa a körvonalon legyen, és szárai egy-egy húrt metszenek ki a körből. A két új pontot összekötő szakasz átmérő lesz.



4. A húrnégyszögek tétele

1. *a)* igaz *b)* igaz *c)* hamis *d)* igaz
e) hamis *f)* igaz *g)* igaz

2. *a)* 150º; 70º *b)* 60º; 120º *c)* 102º; 38º *d)* ez nem lehet
e) $180^\circ - \alpha$; $180^\circ - \beta$;

3. Ezek húrnégyszögek, mivel két szemközti szögük összege 180º.

4. Mivel a külső szög a mellette fekvő belső szög mellékszöge, az állítás ekvivalens azzal, hogy a szemközti szögek összege 180º, tehát húrnégyszög.

5. Mivel DE párhuzamos az érintővel $EDB\sphericalangle = \alpha + \beta$.
Így $EDB\sphericalangle + ECB\sphericalangle = (\alpha + \beta) + \gamma = 180^\circ$, tehát $EDBC$ húrnégyszög.

6. Kettő.

7. Mivel $BM \perp AC$, $CBM\sphericalangle = 90^\circ - \gamma$. Mivel $CM \perp BA$, $BCM\sphericalangle = 90^\circ - \beta$.
Így $CMB\sphericalangle = 180^\circ - (\beta + \gamma)$, tehát $CM'B\sphericalangle = 180^\circ - (\beta + \gamma)$.
Ekkor $CM'B\sphericalangle + CAB\sphericalangle = 180^\circ$, tehát $CABM'$ húrnégyszög.

8. Az f_α és f_δ által meghatározott belső szög $\dfrac{\alpha + \delta}{2}$, az f_β és f_γ által meghatározott belső szög pedig $\dfrac{\beta + \gamma}{2}$.
Ezek szemközti szögek, és összegük

$$\frac{\alpha + \delta}{2} + \frac{\beta + \gamma}{2} = 180^\circ,$$

mivel a konvex négyszög belső szögeinek összege 360º. Tehát a keletkezett négyszög húrnégyszög.

A HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ ÉS ALKALMAZÁSAI

1. Párhuzamos szelők és szelőszakaszok

1.

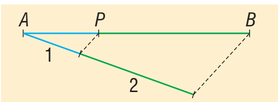
a	b	c	d	x	y
7	4	9	$\frac{36}{7}$	6	$\frac{66}{7}$
10	$\frac{60}{11}$	11	6	8	$\frac{136}{11}$
a	$\frac{3a}{7}$	$\frac{28}{3}$	4	7	10
10	$\frac{30}{11}$	11	3	$\frac{99}{14}$	9
$\frac{56}{5}$	7	$\frac{72}{5}$	9	8	13

2. $\frac{x}{20}=\frac{8}{18}$

$x=\frac{80}{9}$

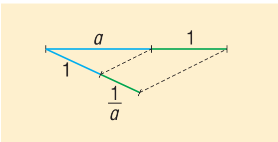
A rövidebb alap $\frac{80}{9}$ cm.

3. *a)*

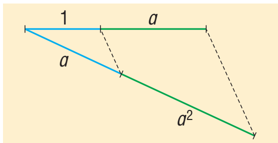


A többi hasonlóan szerkeszthető.

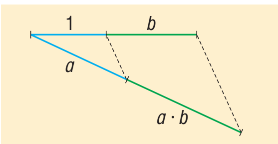
4. *a)*



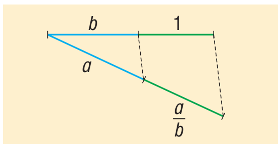
b)



c)



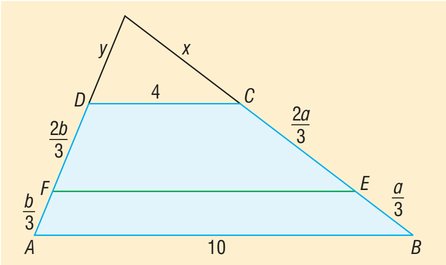
d)



5. $\frac{AE}{BE}=\frac{8}{3}$, azaz $\frac{10+x}{x}=\frac{8}{3}$.

Innen $x=6$. $BE=6$ cm.

6. Legyen a trapéz két szára a; b, a kiegészítő háromszög oldalai pedig x; y.



$$FE \parallel DC \Leftrightarrow \frac{\frac{2a}{3}}{x} = \frac{\frac{2b}{3}}{y} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \Leftrightarrow AB \parallel CD,$$

ez pedig igaz.

A szelőszakaszok tétele alapján

$$\frac{a+x}{x} = \frac{10}{4} \quad \text{és} \quad \frac{\frac{2a}{3}+x}{x} = \frac{FE}{4}.$$

Innen $FE = 8$ cm.

7. Húzzunk párhuzamost a talajjal 3 m magasságban. A torony magassága legyen x. Így

$$\frac{x-3}{0,5} = \frac{42}{2},$$

$$x = \frac{27}{2}.$$

A torony 13,5 m magas.

8. Legyen $BB' = x$; $AB = a$ és $BC = b$.

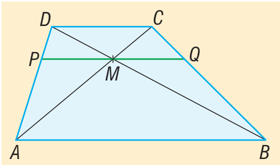
A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján

$$\frac{2}{x} = \frac{a+b}{b} \quad \text{és} \quad \frac{5}{x} = \frac{a+b}{a}.$$

Innen $x = \frac{10}{7}$, így $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$.

A BB' szakasz $\frac{10}{7}$ cm, és a B 2 : 5 arányban osztja az AC szakaszt.

9. A párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt:

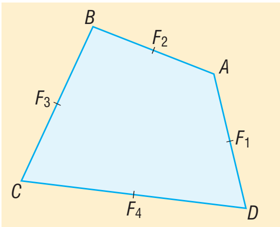


$$\frac{PM}{AB} = \frac{DM}{DB} = \frac{DM}{DM+MB} = \frac{1}{1+\frac{MB}{DM}} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{QB}{CQ}} = \frac{CQ}{CQ+QB} = \frac{CQ}{CB} = \frac{MQ}{AB},$$

tehát $PM = MQ$.

10. F_1F_2 az $ABD_\triangle$ középvonala, tehát $F_1F_2 \parallel BD$ és $F_1F_2 = \frac{BD}{2}$.

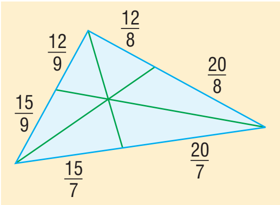


F_3F_4 a $BCD_\triangle$ középvonala, tehát $F_3F_4 \parallel BD$ és $F_3F_4 = \frac{BD}{2}$.

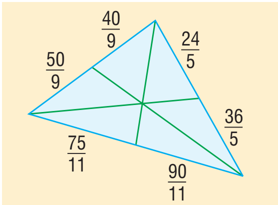
Tehát $F_1F_2 = F_3F_4$ és $F_1F_2 \parallel F_3F_4$, így $F_1F_2F_3F_4$ paralelogramma.

2. A szögfelezőtétel

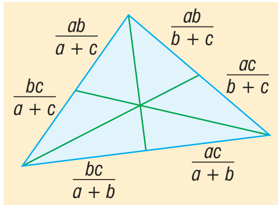
1. *a)*



b)



c)

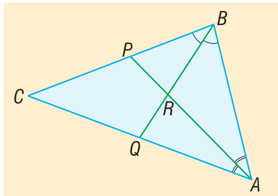


2. A szögfelező osztásaránya, és F felezése miatt

$$\frac{DC}{AD}=\frac{CF}{AF}=\frac{CF}{FB}=\frac{CE}{EB}.$$

Tehát $DE \parallel AB$.

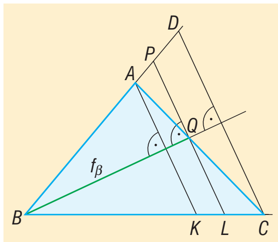
3. $\frac{AQ}{QC}=\frac{AB}{BC}$, innen $AQ=\frac{8}{3}$.



$\frac{QR}{RB}=\frac{AQ}{AB}=\frac{2}{3}$

A szögfelező 2 : 3 arányban osztja a másik szögfelezőt.

4. Készítsünk ábrát. Adott: a, c, f_β.
Ha $a > c$, tükrözzük a háromszöget f_β-ra: $A' = K$; $C' = D$.
Legyen $f_\beta \cap b = Q$. Állítsunk merőlegest Q-ba f_β-ra, így kapjuk P, ill. L pontokat. A párhuzamos szelők tétele alapján



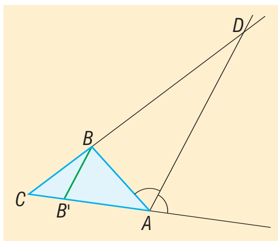
$$\frac{AP}{PD}=\frac{AQ}{QC}=\frac{AK}{DC}=\frac{c}{a} \quad (KQA_\triangle \sim QCD_\triangle)$$

Mivel $PD = a-c-AP$, kapjuk, hogy $\frac{AP}{c}=\frac{a-c}{a+c}$. Így megszerkeszthető az AP szakasz, tehát a BP szakasz is. Vegyük fel f_β szakaszt, majd egyik végpontjában (Q) állítsunk rá merőlegest. A másik végpontjából (B) körzőzzünk PB hosszával. A merőlegesből ez kimetszi P és L pontokat. B-ből a BP szárra felmérjük a c oldalt, a BL szárra pedig az a oldalt. Így a háromszöget megszerkesztettük.
Ha $a = c$, akkor PB eleve c hosszúságú, így azt nem kell megszerkeszteni.
A szerkesztés feltétele, hogy $PB=\frac{2ac}{a+c}>f_\beta$.

5. Rajzoljunk ábrát!
Legyen $AB' = AB$. Vizsgáljuk a szögeket:

$CDA\sphericalangle = 180° - DBA\sphericalangle - BAD\sphericalangle = 180° - (\alpha+\gamma) - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$,

$CBB'\sphericalangle = \beta - ABB'\sphericalangle = \beta - \frac{180° - \alpha}{2} = \beta - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$.



Tehát $CDA\sphericalangle = CBB'\sphericalangle$, így $B'A \parallel AD$.
A párhuzamos szelők tétele miatt

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB'}{AC} = \frac{AB}{AC}.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

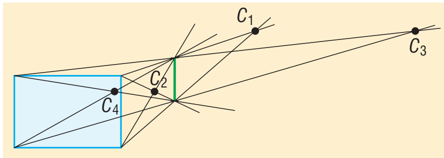
3. A középpontos hasonlósági transzformáció

1. *a)* nagyítás *b)* kicsinyítés *c)* nagyítás
d) kicsinyítés *e)* nagyítás *f)* kicsinyítés

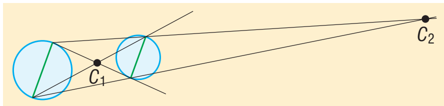
2. A levágott kis háromszögek egymással és a megmaradt háromszöggel egybevágóak.

3. A képháromszög a középvonalak alkotta háromszög.

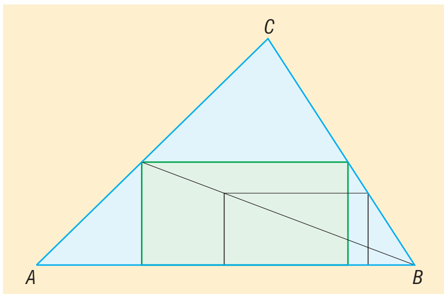
5. A szakasz két végpontját összekötjük a vele párhuzamos egyik oldal egy-egy végpontjával. Az így kapott két egyenes metszéspontja jó hasonlósági centrumnak. Négy különböző pontot kaphatunk így.



6. Vegyünk fel a két körben egy-egy párhuzamos átlót. Ezek végpontjait párba összekötve a kapott egyenesek metszéspontjai lesznek a hasonlósági centrumok. Két megfelelő pont kapható.

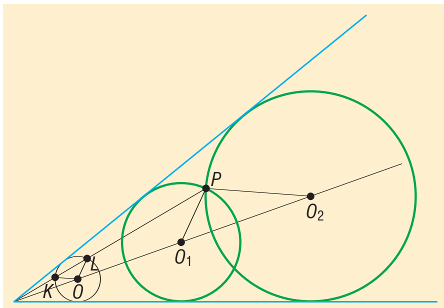


7. Legyen $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm és $AC = 5$ cm. Szerkesszünk egy olyan téglalapot, melynek két oldalának aránya 2 : 1, a nagyobbik oldala az AB-re illeszkedik, és az egyik rövidebb oldalának másik végpontja BC-re. A szabad csúcspont és a B csúcs által meghatározott egyenes az AC oldalból kimetszi a keresett téglalap egyik csúcsát. Innen párhuzamosokat húzva az első téglalap oldalaival, megkapjuk a keresett téglalapot.



8. Vegyünk fel a szögtartományban egy kört, amely érinti a két szárat (középpontja (O) a szögfelező félegyenesre illeszkedik). A P és a szög csúcspontja által meghatározott egyenes a kört két pontban metszi, legyenek ezek K és L. Húzzunk párhuzamosokat P-n keresztül OK-val és OL-lel. Ahol ezek metszik a szögfelezőt, ott vannak a keresett körök középpontjai. Két ilyen kör van.

$$KO \parallel PO_2,\ LO \parallel PO_1.$$



9. *a)* $A(4;-5)$ $B(-8;-6)$ $C(-5;-2)$ *b)* $A\left(-2;\frac{5}{2}\right)$ $B(4;3)$ $C\left(\frac{5}{2};1\right)$

c) $A\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right)$ $B\left(-\frac{8}{3};-2\right)$ $C\left(-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ *d)* $A\left(-5;\frac{25}{4}\right)$ $B\left(10;\frac{15}{2}\right)$ $C\left(\frac{25}{4};\frac{5}{2}\right)$

e) $A(16;-20)$ $B(-32;-24)$ $C(-20;-8)$

4. A hasonlósági transzformáció

1. Alkalmazzuk a következő transzformációkat:
   - úgy toljuk el a kisebb kört, hogy középpontja egybeessen a nagyobb kör középpontjával,
   - forgassuk el a kisebb kört a középpontja körül olyan szöggel, hogy a két átmérő fedésbe kerüljön,
   - a kisebb kört a középpontjából nagyítsuk $\lambda = \frac{4}{3}$ hasonlósággal.

2. Az eredeti háromszög legyen $ABC_\triangle$, a tengelyes tükörképe $A'B'C'_\triangle$, és a kicsinyített kép $A''B''C''_\triangle$. Ha a t tengelyre tükrözzük az $A'B'C'_\triangle$-et és az $A''B''C''_\triangle$-et a kicsinyítés vetítő egyeneseivel, akkor $A'B'C'_\triangle$ képe $ABC_\triangle$, az $A''B''C''_\triangle$ képe pedig olyan háromszög lesz, melyre alkalmazva az O középpontú ($\lambda = 2$) kétszeres nagyítást, a képe $ABC_\triangle$. Így az állítást beláttuk.

5. Alakzatok hasonlósága; a háromszögek hasonlóságának alapesetei

1. *a)* igaz *b)* nem *c)* nem *d)* igaz *e)* nem *f)* igaz
   g) nem *h)* igaz *i)* nem

2. Azonos körüljárással nevezzük el a két háromszög csúcsait *ABC*-nek, illetve *PQR*-nek. A következő hasonlóságnál $PQR_\triangle$ képe $ABC_\triangle$:
   - $\overrightarrow{PA}$ vektorú eltolás,
   - *A* középpontú $ACP'\sphericalangle$ irányított szögű forgatás,
   - *A* középpontú $\frac{AC}{AP''}$ arányú középpontos hasonlóság.

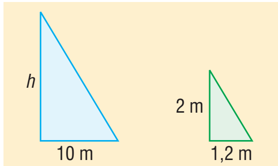
3. Tekintsük a következő hasonlósági transzformációt:
   Toljuk el az egyik derékszögű háromszöget úgy, hogy a derékszögek csúcsai egybeessenek; a közös derékszögű csúcs körül forgassuk el ezt a háromszöget úgy, hogy a derékszögek szárai egybeessenek; amennyiben az egyenlő hegyesszögek nem egy félegyenesre illeszkednek, tükrözzük a háromszöget a derékszög szögfelezőjére. Így egy olyan középpontos hasonlósággal, melynek középpontja a közös derékszögű csúcs, elérhető, hogy az egyenlő szögek csúcspontja egybeessen.
   Így az egyik háromszög képe a másik háromszög.

4. Legyen az egyik téglalap *ABCD*, a másik *EFGH*. Legyen $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$.
   Egy középpontos hasonlósággal elérhető, hogy $A'B' = EF$ legyen.

Ekkor $B'C' = FG$, mivel $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Így $A'B'C'D'$ egybevágó $EFGH$ téglalappal, tehát $ABCD$ és $EFGH$ hasonló.

5. Mivel a két háromszög hasonló: $\frac{h}{10} = \frac{2}{1,2}$.



Innen $h = \frac{50}{3}$. A torony 16,7 m magas.

6. A hasonlóság aránya $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

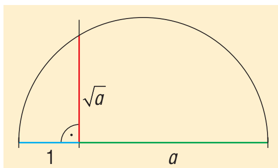
Így a másik két oldal $12\text{ cm} \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{5}$ cm és $16\text{ cm} \cdot \frac{2}{5} = \frac{32}{5}$ cm.

6. A hasonlóság néhány alkalmazása

1.

a	b	c	p	q	m
5	12	13	$\frac{25}{13}$	$\frac{144}{13}$	$\frac{60}{13}$
3	4	5	$\frac{9}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{12}{5}$
5	12	13	$\frac{25}{13}$	$\frac{144}{13}$	$\frac{60}{13}$
6	8	10	3,6	6,4	4,8
20	$\frac{80}{3}$	$\frac{100}{3}$	12	$\frac{64}{3}$	16
$\frac{65}{6}$	26	$\frac{169}{6}$	$\frac{25}{6}$	24	10

2. Az $(1 + a)$ szakasz Thalesz-köre kimetszi a merőlegesből a $\sqrt{a}$ hosszúságú szakaszt.



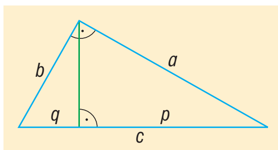
3. Az átfogó két szelete 4 cm és 12 cm hosszú.

A befogótétel alapján az egyik befogó $\sqrt{4 \cdot 16} = 8$ cm, míg a másik $\sqrt{12 \cdot 16} = 8\sqrt{3}$ cm hosszú.

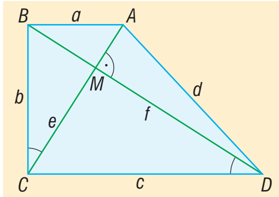
4. Használjuk az ábra jelölését!

A befogótétel alapján: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p \cdot c}{q \cdot c} = \frac{p}{q}$.

Ezzel az állítást beláttuk.



5. Tekintsük az ábrát!



A két jelzett szög egyenlő, mivel merőleges szárú hegyesszögek. Így (abe) háromszög és (bcf) háromszög hasonló, hisz szögeik egyenlőek. Tehát

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c},$$
$$a\cdot c=b^2.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Megfordítás:

Tudjuk, hogy:

$$b^2=a\cdot c.$$
$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b},$$

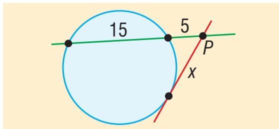
tehát (bcf) háromszög hasonló (abe) háromszöggel (két oldal aránya és a közbezárt szög egyenlő). Innen $BDC\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, így

$$MCD\sphericalangle + MDC\sphericalangle = MCD\sphericalangle + ACB\sphericalangle = 90^\circ.$$

Tehát $CMD\sphericalangle = 180^\circ - (MCD\sphericalangle + MDC\sphericalangle) = 90^\circ$.

Az állítás megfordítása is igaz.

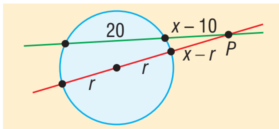
6. Tudjuk, hogy:



$$x^2 = 5\cdot 20,$$
$$x = 10.$$

Az érintőszakasz 10 cm.

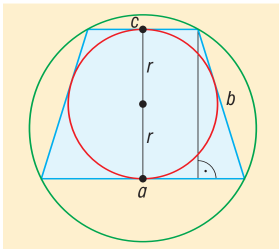
7. Tudjuk, hogy:



$$(x-10)(x+10) = (x-r)(x+r),$$
$$10 = r.$$

A kör sugara 10 cm.

8. Mivel húrtrapéz, szimmetrikus.



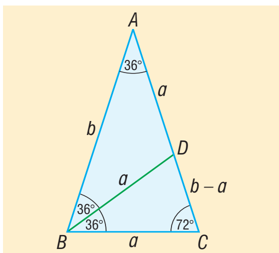
Mivel érintőtrapéz, $a + c = 2b$.

Pitagorasz tétele alapján

$$(2r)^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2,$$
$$(2r)^2 = ac.$$

A kör átmérője mértani közepe az alapoknak.

9. A szögek egyenlősége miatt



$$BC = BD = AD \quad \text{és} \quad BCD_\triangle \sim ABC_\triangle.$$

A hasonlóság miatt $\dfrac{BC}{DC}=\dfrac{AC}{BC}$,

akkor $\dfrac{a}{b-a}=\dfrac{b}{a}$.

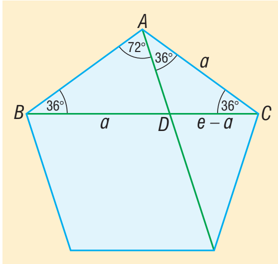
Tehát az alap valóban a szár nagyobbik aranymetszete.

10. A szabályos ötszög egy belső szöge $\dfrac{3\cdot180^\circ}{5}=3\cdot36^\circ$.

Így az átlók az oldalakkal bezárt kisebb szöge 36°.
A szögek egyenlősége miatt $a=AB=BD$, és $ADC_\triangle\sim ABC_\triangle$.
Tehát

$$\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{AC},$$
$$\frac{a}{e-a}=\frac{e}{a}.$$

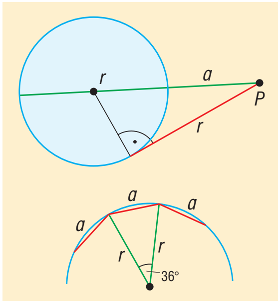
Az oldal tehát az átló nagyobbik aranymetszete.



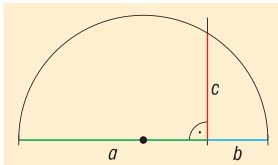
11. Egy r átmérőjű körhöz szerkesszünk r hosszúságú érintőszakaszt, majd a kapott külső pontot kössük össze a kör középpontjával. A kisebbik szelőszakasz lesz a tízszög oldala, mivel ez az r nagyobbik aranymetszete.

$$r^2=a(a+r),$$
$$r(r-a)=a^2,$$
$$\frac{r}{a}=\frac{a}{r-a}.$$

Így kapunk 36° szárszögű egyenlő szárú háromszöget.



12. A téglalap oldalai: a; b.
A négyzet oldala: c.
A feladat alapján: $a\cdot b=c^2$, azaz a és b mértani közepét kell megszerkeszteni.



7. Hasonló síkidomok területének aránya

1. *a)* Az oldalak aránya: $\dfrac{1}{2}$, az oldalak hossza: $\dfrac{20}{3}$ cm, ill. $\dfrac{40}{3}$ cm.

b) Az oldalak aránya: $\dfrac{1}{4}$, az oldalak hossza: 4 cm, ill. 16 cm.

c) Az oldalak aránya: $\dfrac{2}{3}$, az oldalak hossza: 8 cm, ill. 12 cm.

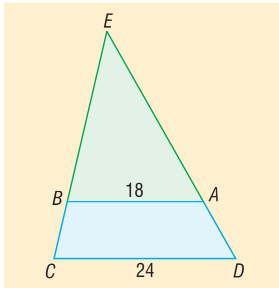
d) Az oldalak aránya: $\dfrac{3}{5}$, az oldalak hossza: $\dfrac{15}{2}$ cm, ill. $\dfrac{25}{2}$ cm.

e) Az oldalak aránya: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, az oldalak hossza: $\dfrac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ cm, ill. $\dfrac{20\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ cm.

f) Az oldalak aránya: $\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ $(p;q>0)$, az oldalak hossza: $\dfrac{20\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$ cm, ill. $\dfrac{20\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$ cm.

2. $AEB_{\triangle} \sim DEC_{\triangle}$

$$\lambda = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{t_{DEC}}{t_{AEB}} = \frac{16}{9}$$



a) $$\frac{t_{ABE} + t_{ABCD}}{t_{ABE}} = \frac{16}{9}$$
$$\frac{t_{ABCD}}{t_{ABE}} = \frac{7}{9}$$

b) $$\frac{t_{DEC}}{t_{ABCD} - t_{DEC}} = \frac{16}{9}$$
$$\frac{t_{ABCD}}{t_{DEC}} = \frac{25}{9}$$

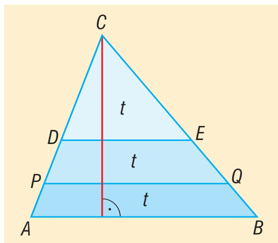
3. A párhuzamos szelők tétele miatt a kis háromszögek hasonlóak az eredetihez, és $\lambda = \frac{1}{5}$. Így területük $\frac{1}{25}$ része az eredetinek.

$$\frac{t_{\text{hatszög}}}{t_{\triangle}} = \frac{t_{\triangle} - 3\frac{t_{\triangle}}{25}}{t_{\triangle}} = \frac{22}{25}.$$

4. A két téglalap hasonlóságának aránya $\frac{a}{b}$, így a területek aránya $\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

5. A két háromszög hasonló, hasonlóságuk aránya $\frac{5}{12}$. Tehát területük aránya $\frac{25}{144}$.

6. $DCE_{\triangle} \sim ABC_{\triangle}$ és $\frac{t_{DEC}}{t_{ABC}} = \frac{1}{3}$, tehát $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$, így $\frac{m_c''}{m_c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



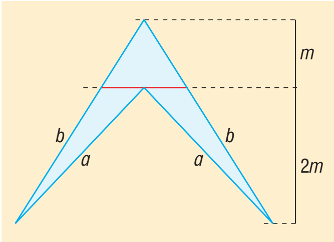
DE távolsága AB-től $\left(10 - \frac{10}{\sqrt{3}}\right)$ cm.

$PQC_{\triangle} \sim ABC_{\triangle}$ és $\frac{t_{PQC}}{t_{ABC}} = \frac{2}{3}$, tehát $\lambda' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, így $\frac{m_c'}{m_c} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

PQ távolsága AB-től $\left(10 - \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ cm $\sim 1{,}8$ cm.

7. A két körcikk hasonló és területük atánya $\frac{16}{25}$, tehát hasonlóságuk aránya $\frac{4}{5}$. A sugarak aránya így $\frac{4}{5}$, összegük 20 cm. Így az egyik sugár $\frac{4 \cdot 20}{9}$ cm, a másik $\frac{5 \cdot 20}{9}$ cm.
(~ 8,9 cm ill. ~ 11,1 cm)

Rejtvény: Igen van. Pl.:



8. Hasonló testek térfogatának aránya

1. *a)* $\lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{9};\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{27}$

b) $\lambda = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{25};\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{125}$

c) $\lambda = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{9}{49};\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{343}$

d) $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2};\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $\lambda = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{p^2}{q^2};\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{p^3}{q^3}$

2. *a)* $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2};\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{27} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3};\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{9}$

c) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{64} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4}$

d) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{125} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{5};\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{9}{25}$

e) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{q}};\ \frac{A_1}{A_2} = \sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}}$

3. A felszínek aránya $\frac{121}{9}$; a térfogatok aránya $\frac{1331}{27}$.

4. A gúla térfogata V, a kis gúláé V_1, a csonkagúláé V_2.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V - V_1}{V_1} = \frac{V}{V_1} - 1 = \sqrt{\left(\frac{A}{A_1}\right)^3} - 1 = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1{,}83$$

5. Az alaplap területe A, innen számítva a síkmetszetek területei A_1; A_2; A_3. A gúla magassága m, a metszetekhez tartozó gúlák magasságai m_1; m_2; m_3.

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow A_1 = \frac{9}{16} \cdot 16 = 9\ \text{cm}^2.$$

$$\frac{A_2}{A} = \left(\frac{m_2}{m}\right)^2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4\ \text{cm}^2.$$

$$\frac{A_3}{A} = \left(\frac{m_3}{m}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow A_3 = \frac{1}{16} \cdot 16 = 1\ \text{cm}^2.$$

6. Legyen a gúla térfogata $V=\frac{A\cdot m}{3}=\frac{8^2\cdot 20}{3}=\frac{1280}{3}$ [cm^3].

A magasság harmadolásával kapott két gúla térfogata csökkenő sorrendben V_1, ill. V_2.
A keresett térfogat

$$V_1-V_2=\lambda^3V-\lambda'^3V=(\lambda^3-\lambda'^3)V=$$
$$=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)V=\frac{7}{27}V=\frac{8960}{81}\ [\text{cm}^3]\approx 110{,}6\ \text{cm}^3.$$

HEGYESZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

1. Távolságok meghatározása a hasonlóság segítségével

1. *a)* $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\frac{BC}{AC}=1$

b) $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$ $\quad\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$ $\quad\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\frac{BC}{AC}=\sqrt{3}$

d) $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad\frac{BC}{AC}=2-\sqrt{3}$

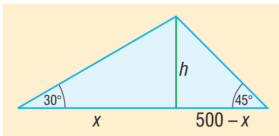
2. $\frac{h}{50}=\sqrt{3},$

$h=50\sqrt{3}.$

A torony $50\sqrt{3}$ m magas.

3. $\alpha=4{,}6°.$

4. Tudjuk, hogy $\frac{x}{h}=\sqrt{3}$ és $h=500-x$.

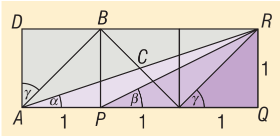


Így

$$\frac{x}{\sqrt{3}}=500-x;$$
$$x=\frac{500\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2};$$
$$h=250\left(\sqrt{3}-1\right).$$

A hegy 183 m magas.

Rejtvény: 90º az összeg.



$$\left.\begin{array}{ll}\text{Látható: } AB=\sqrt{2} \;\text{ és }\; BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \Rightarrow \dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{2}.\\ \text{Tudjuk, hogy:} & \dfrac{RQ}{PQ}=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right\} \Rightarrow BAC\sphericalangle=\beta$$

Így $\alpha+\beta+\gamma=DAB\sphericalangle+BAC\sphericalangle+\alpha=90º$.

2. Hegyesszögek szögfüggvényei

1. *a)* $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ $\quad\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ $\quad\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}$ $\quad\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$

b) $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$ $\quad\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ $\quad\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{5}{12}$ $\quad\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{12}{5}$

c) $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\operatorname{tg}\alpha=1$ $\quad\operatorname{ctg}\alpha=1$

d) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ $\quad\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\dfrac{13}{3}}$ $\quad\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{13}}$

2. *a)* $\sin 36º=0{,}5878$ $\quad\cos 36º=0{,}8090$ $\quad\operatorname{tg}36º=0{,}726$ $\quad\operatorname{ctg}36º=1{,}3764$

b) $\sin 52º40'=0{,}7951$ $\quad\cos 52º40'=0{,}6065$ $\quad\operatorname{tg}52º40'=1{,}3111$ $\quad\operatorname{ctg}52º40'=0{,}7627$

c) $\sin 11º32'=0{,}1999$ $\quad\cos 11º32'=0{,}9798$ $\quad\operatorname{tg}11º32'=0{,}2041$ $\quad\operatorname{ctg}11º32'=4{,}9006$

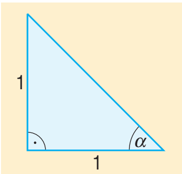
d) $\sin 89{,}2º=0{,}9999$ $\quad\cos 89{,}2º=0{,}0140$ $\quad\operatorname{tg}89{,}2º=71{,}6151$ $\quad\operatorname{ctg}89{,}2º=0{,}0140$

e) $\sin\dfrac{\pi}{6}=0{,}5$ $\quad\cos\dfrac{\pi}{6}=0{,}8660$ $\quad\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}=0{,}5774$ $\quad\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}=1{,}7321$

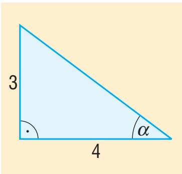
f) $\sin\dfrac{2\pi}{7}=0{,}7818$ $\quad\cos\dfrac{2\pi}{7}=0{,}6235$ $\quad\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{7}=1{,}2540$ $\quad\operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{7}=0{,}7975$

g) $\sin\dfrac{\pi}{12}=0{,}2588$ $\quad\cos\dfrac{\pi}{12}=0{,}9659$ $\quad\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}=0{,}2679$ $\quad\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}=3{,}7321$

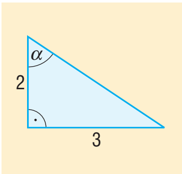
3. *a)*



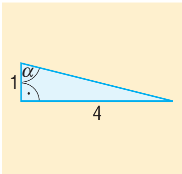
b)



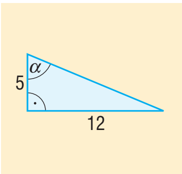
c)



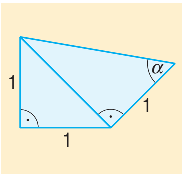
d)



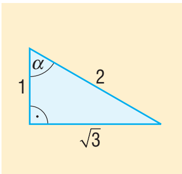
e)



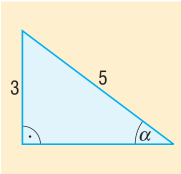
f)



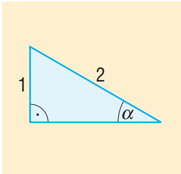
g)



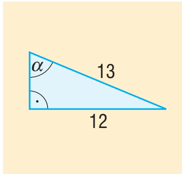
4. *a)*



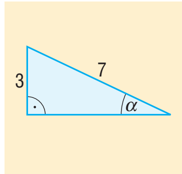
b)



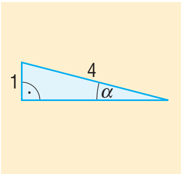
c)



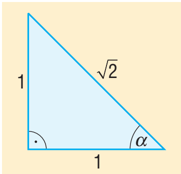
d)



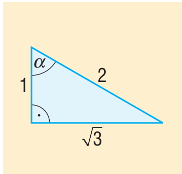
e)



f)

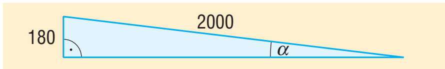


g)



5. $\sin\alpha = \dfrac{180}{2000} = 0{,}09$

$\alpha = 5{,}7°$



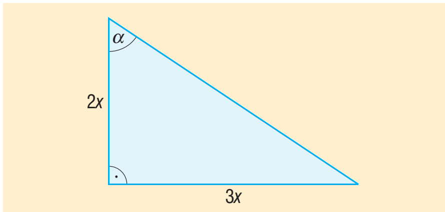
6.

$$t = 24,$$

$$\frac{3x \cdot 2x}{2} = 24,$$

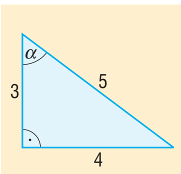
$$x = 2\sqrt{2}.$$

A háromszög szögei 62,6° és 27,4°, befogói $4\sqrt{2}$ cm és $6\sqrt{2}$ cm.

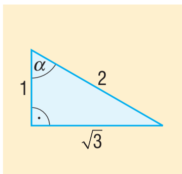


3. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között

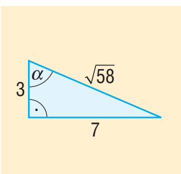
1. *a)* $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$



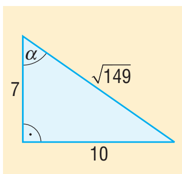
b) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



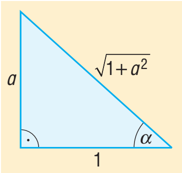
c) $\sin\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{58}}$; $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{58}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{7}$



d) $\sin\alpha = \dfrac{10}{\sqrt{149}}$; $\cos\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{149}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{10}{7}$



e) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = a$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{a}$



2. *a)* $$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin 2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \quad (\cos\alpha > 0)$$

b) $$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$$

c) $$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sqrt{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}} = \cos\alpha$$

d) $$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}} = \sin\alpha$$

e) $$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$

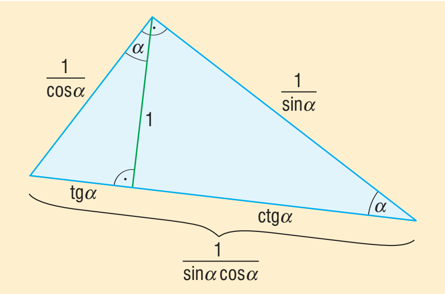
f) $$\frac{\operatorname{tg}^3\alpha+1}{\operatorname{tg}^3\alpha-1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$$
$$\frac{\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+1}{\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}-1} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$
$$\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha} = \frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$

g) $$\frac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2} = (1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$$
$$1+\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+2\sin\alpha+2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha = 2(1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$

3. *a)*
$$\cos(\alpha-7^\circ)=\sin(\alpha-11^\circ)$$
$$\sin(97^\circ-\alpha)=\sin(\alpha-11^\circ)$$
$$97^\circ-\alpha=\alpha-11^\circ$$
$$\alpha=54^\circ$$

b) $\alpha=49^\circ$ *c)* $\alpha=15^\circ$ *d)* $\alpha=\frac{75^\circ}{7}$

4.



4. Nevezetes szög szögfüggvényei

1. *a)* $\sin 30^\circ+\cos 60^\circ=1$

b) $2\cdot\cos 30^\circ+\operatorname{tg}60^\circ=2\cdot\sqrt{3}$

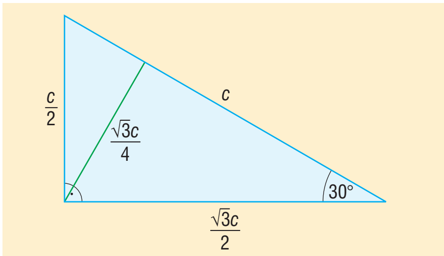
c) $4\cdot\sin 45^\circ-4\cdot\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{6\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\operatorname{tg}30^\circ-2\cdot\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ+3\cdot\operatorname{ctg}45^\circ}=\frac{6\cdot\sqrt{3}-18\cdot\sqrt{2}-\sqrt{6}+6}{51}$

2. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}c$

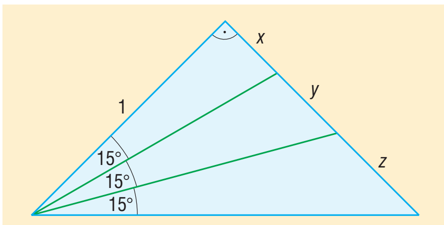
$b=\frac{c}{2}$

$m_c=\frac{\sqrt{3}}{4}c$



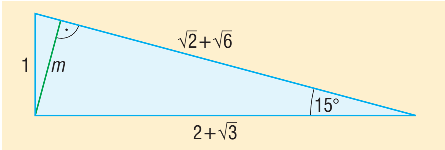
3. Tudjuk:
$$\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3},$$
$$x=2-\sqrt{3}.$$

Tudjuk:
$$\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$x+y=\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}-2=\frac{3\cdot\sqrt{3}-4}{2}.$$



Tehát:

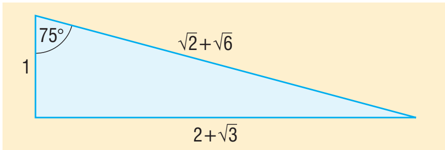
$$z = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$



4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \dfrac{m}{2+\sqrt{3}},$

$m = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

Ezzel az állítást beláttuk.



5. $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{tg} 75^\circ = 2+\sqrt{3}$

$\operatorname{ctg} 75^\circ = 2-\sqrt{3}$

5. Háromszögek különböző adatainak meghatározása szögfüggvények segítségével

1. *a)* $t = \dfrac{15}{4}$ *b)* $t = \dfrac{133\cdot\sqrt{3}}{5} \approx 46{,}1$

c) $t = \dfrac{5427\cdot\sqrt{2}}{200} \approx 38{,}4$ *d)* $t \approx 4{,}41$

2. $\sin\gamma = \dfrac{2\cdot t}{ab} = \dfrac{2\cdot 17{,}2}{6\cdot 8} = 0{,}71667;\quad \gamma_1 = 45{,}8^\circ;\quad \gamma_2 = 134{,}2^\circ.$

3. $t = 8\cdot 12\cdot \sin 60^\circ = 48\cdot\sqrt{3} \approx 83{,}1\,[\mathrm{cm}^2]$

4. *a)* $t = 6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$ *b)* $t = 10\cdot\dfrac{\sin 36^\circ}{2} \approx 3{,}0$

c) $t = 8\cdot\dfrac{\sin 45^\circ}{2} = 2\cdot\sqrt{2}$ *d)* $t = 5\cdot\dfrac{\sin 72^\circ}{2} = \dfrac{5\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{8} \approx 2{,}38$

5. *a)* $R = 3$ *b)* $R = \dfrac{7\cdot\sqrt{2}}{5}$ *c)* $R = \dfrac{39\cdot\sqrt{3}}{25}$ *d)* $R = \sqrt{2}$

6. *a)* $\alpha = 90°$ *b)* $\alpha = 30°$ *c)* $\alpha = 44{,}4°$ *d)* $\alpha = 20{,}5°$

7. 19,2°

8. $R = 8$ cm; $a = 4 \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$; $t = 16 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)$.

9. $\alpha = 75°$; $\beta = 45°$; $\gamma = 60°$, mivel $a = 2 \cdot \sin 75°$, stb.

$$a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \quad b = \sqrt{2}, \quad c = \sqrt{3}, \quad t = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \quad k = \frac{\sqrt{6} + 3 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

10. Tudjuk, hogy $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ és $c = 2 \cdot R \cdot \sin\gamma$, így $t = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$.

6. Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével

1. n szög esetén $\dfrac{R^2\pi - n \cdot \dfrac{R^2 \sin \dfrac{360°}{n}}{2}}{R^2\pi} \cdot 100\% = \dfrac{2\pi - n \cdot \sin \dfrac{360°}{n}}{\pi} \cdot 50\%.$

a) 17,3% *b)* 10% *c)* 6,5% *d)* 4,5%

2. *a)* $\alpha = 29°$ *b)* $\beta = 41{,}4°$

3. *a)* $\varphi = 37{,}8°$; $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$ *b)* $\sin\dfrac{\omega}{2} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{6}}{8}$; $\omega = 133{,}4°$

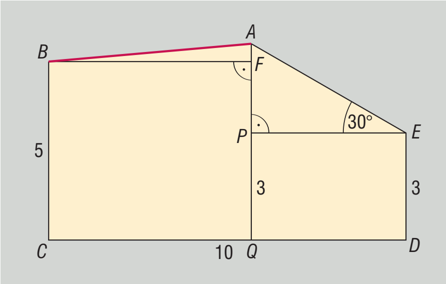
Az oldallap alaphoz tartozó magassága $4 \cdot \sqrt{2}$ cm, szárhoz tartozó magassága $\dfrac{8 \cdot \sqrt{2}}{3}$ cm.

4. Mivel $APE_\triangle$-ben $AEP\sphericalangle = 30°$,

$AP = \dfrac{5}{2}$ cm és $PE = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

Így $AF = AP + PQ - QF = \dfrac{1}{2}$ cm

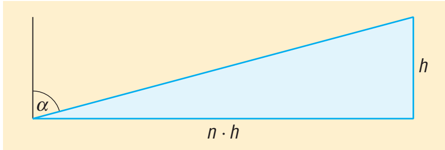
és $BF = CD - PE = 10 - \dfrac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm.



$$\operatorname{tg}(\beta - 90°) = \frac{AF}{BF} = 0{,}0882,$$
$$\beta - 90° = 5°,$$
$$\beta = 95°.$$

$\alpha = 90° - \beta + 60° = 55°$; $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{119 - 50 \cdot \sqrt{3}} \approx 5{,}7$ cm.

5. *a)* $\alpha = 63{,}4°$;
b) $\alpha = 71{,}6°$;
c) $\alpha = 78{,}7°$.



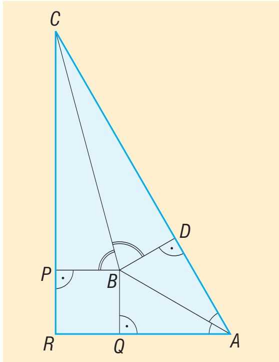
6. Tudjuk, hogy $BAQ\sphericalangle = 30°$, $BAD\sphericalangle = 30°$, $CBA\sphericalangle = 135°$. Így $CBD\sphericalangle = 75°$, $CBP\sphericalangle = 75°$, $ABQ_\triangle \cong ADB_\triangle$ és $BDC_\triangle \cong PBC_\triangle$.

$$BD = BQ = PB = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

$$CP = PB \cdot \operatorname{tg} 75° = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

$$CR = CP + PR = CP + BQ = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

A hegy 2,37 km magas.



7. Pitagorasz tétele alapján

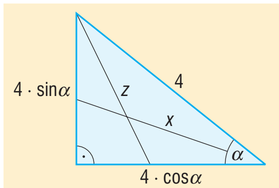
$$l = 2\cdot\sqrt{400^2 + 12^2} = 800{,}36;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{400} = \frac{3}{100} \Rightarrow \alpha = 1{,}72°.$$

A huzal hossza 800,36 cm, a vízszintessel bezárt szöge 1,72°.

8. *f)* $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{4\cdot\cos\alpha}{x}$ $\qquad$ $\cos\frac{90°-\alpha}{2} = \frac{4\cdot\sin\alpha}{z}$

$$x = 4\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad z = 4\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{90°-\alpha}{2}}$$



a) $x = 4\cdot\frac{\cos 45°}{\cos 22{,}5°} = 3{,}1$ $\qquad$ $z = 4\cdot\frac{\sin 45°}{\cos 22{,}5°} = 3{,}1$

b) $x = 4\cdot\frac{\cos 60°}{\cos 30°} = 2{,}31$ $\qquad$ $z = 4\cdot\frac{\sin 60°}{\cos 15°} = 3{,}6$

c) $x = 4\cdot\frac{\cos 75°}{\cos 37{,}5°} = 1{,}3$ $\qquad$ $z = 4\cdot\frac{\sin 75°}{\cos 7{,}5°} = 3{,}9$

d) $x = 4\cdot\frac{\cos 40°}{\cos 20°} = 3{,}3$ $\qquad$ $z = 4\cdot\frac{\sin 40°}{\cos 25°} = 2{,}8$

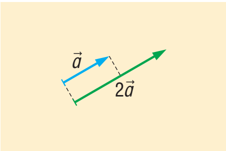
e) $x = 4\cdot\frac{\cos 27°30'}{\cos 13°45'} = 3{,}65$ $\qquad$ $z = 4\cdot\frac{\sin 27°30'}{\cos 31°15'} = 2{,}16$

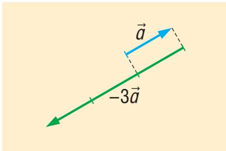
VEKTOROK

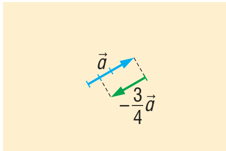
1. Vektor fogalma: vektorok összege, különbsége, vektor szorzása számmal (emlékeztető)

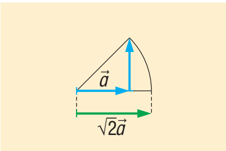
1. *a)* $\vec{a}=\vec{c}$ *b)* $\vec{a}\parallel\vec{c};\ \vec{b}\parallel\vec{d}$ *c)* $\vec{b}=-\vec{d}$

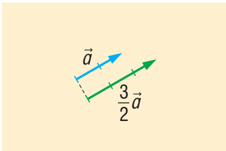
2. *a)* $\vec{f}$ *b)* $\vec{f}$ *c)* $\vec{0}$ *d)* $\vec{a}$ *e)* $\vec{c}$ *f)* $-\vec{a}$
g) $\vec{e}$ *h)* $2\cdot\vec{c}$ *i)* $\vec{e}$ *j)* $2\cdot\vec{e}-\vec{f}=3\cdot\vec{d}+\vec{a}$

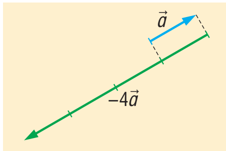
3. *a)*


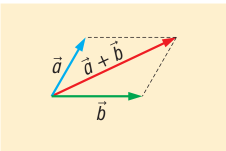
b)


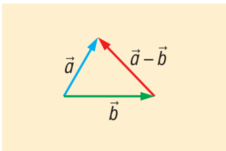
c)


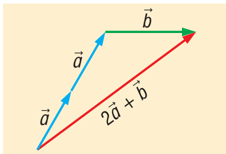
d)


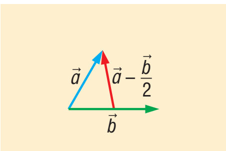
e)


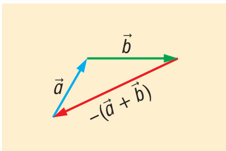
f)


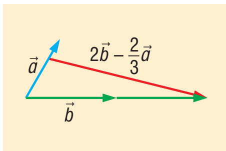
4. *a)*


b)


c)


d)


e)


f)


5. *a)* $5\cdot\vec{a}+\vec{b}$ *b)* $-4\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ *c)* $(\sqrt{2}-12)\cdot\vec{a}+4\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot\vec{b}$

6. $\frac{\vec{a}+\vec{c}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\vec{b}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\vec{d}\qquad /\cdot\sqrt{3}$

$\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$

$\vec{c}-\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}$

7. *a)* $\overrightarrow{OF}=\vec{a}+\vec{b}$ *b)* $\overrightarrow{OD}=\vec{b}+\vec{c}$ *c)* $\overrightarrow{OG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

d) $\overrightarrow{GB}=-(\vec{a}+\vec{c})$ *e)* $\overrightarrow{DE}=\vec{a}-\vec{b}$ *f)* $\overrightarrow{FD}=\vec{c}-\vec{a}$

g) $\overrightarrow{DA}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ *h)* $\overrightarrow{CF}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

2. Vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre

1. *a)* $|\vec{a}|=2$ *b)* 3 *c)* $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *d)* 2 *e)* 6

2. Szabályos háromszögben az egy oldalhoz tartozó magasságvonal és súlyvonal egybeesik, így $\vec{m}\parallel\vec{f}$. Mivel az $M=S$, $\vec{m}=\dfrac{2}{3}\vec{f}$, $\alpha=\dfrac{2}{3}$.

3. Az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{DA}$. Így $\alpha=-1$.

4. $\overrightarrow{AF}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

5. $\overrightarrow{CN}=\dfrac{3\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{4}$ $\overrightarrow{CM}=\dfrac{3\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}}{4}$

6. $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3\cdot\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}}{5}$

7. Az $\overrightarrow{AC}=\dfrac{5\cdot\overrightarrow{AB}+4\cdot\overrightarrow{AP}}{9}$, így $\overrightarrow{AP}=\dfrac{9\cdot\overrightarrow{AC}-5\cdot\overrightarrow{AB}}{4}$.

3. Vektorok alkalmazása a síkban és a térben

1. Mivel $\vec{s}=\vec{0}$ és $\vec{s}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, így $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Tetraédernél hasonlóan az S legyen a vonatkoztatási pont.

2. *a)* $\dfrac{AP}{PB}=1$ *b)* 2 *c)* $\dfrac{1}{3}$ *d)* $\dfrac{3}{2}$

3. $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; $\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$; $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$; $\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$; $\dfrac{2\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}}{2}$; $\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}+\vec{c}}{2}$

4. Legyen a négyszög $ABCD$, az oldalfelező pontok F_1, F_2, F_3, F_4, az átlók felezőpontjai P és Q. Tudjuk, hogy $F_1F_2F_3F_4$ egy paralelogramma, tehát a középvonalak felezik egymást. A metszéspontjukba mutató vektor

$$\frac{\vec{f_1}+\vec{f_3}}{2}=\frac{\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}+\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

Az átlók felezőpontját összekötő szakasz felezőpontjába mutató vektor:

$$\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}=\frac{\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

A két vektor azonos, tehát a két pont egybeesik.

5. Mivel $\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+\overrightarrow{a'}}{2}$, így $\overrightarrow{a'}=2\cdot\vec{p}-\vec{a}$.

4. Vektorok a koordináta-rendszerben, vektor koordinátái, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

1. *a)* $(4;-10)$ *b)* $(-2; 5)$ *c)* $\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$ *d)* $\left(-1;\frac{5}{2}\right)$

e) $\left(-\frac{3}{4};\frac{15}{8}\right)$ *f)* Mivel $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+1-\sqrt{2}=0$, $(0; 0)$.

2. *a)* $(0; 7)$ *b)* $(2; 1)$ *c)* $(-2;-1)$ *d)* $(-1; 17)$ *e)* $\left(0;\frac{7}{2}\right)$ *f)* $\left(-1;-\frac{6}{5}\right)$

3. *a)* $A'(1;-1)$ $B'(-2;-3)$ $C'(0; 3)$ *b)* $A'(-2; 2)$ $B'(4; 6)$ $C'(0;-6)$

c) $A'\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ $B'\left(\frac{2}{3};1\right)$ $C'(0;-1)$ *d)* $A'(3;-3)$ $B'(-6;-9)$ $C'(0; 9)$

e) $A'\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ $B'\left(-\frac{4}{3};-2\right)$ $C'(0; 2)$ *f)* $A'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $B'\left(\sqrt{2};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ $C'\left(0;-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

4. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, azaz $\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}$.
Így $\vec{d}=\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}$, $D(0;-3)$.

5. *a)* $F\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ *b)* $E\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right)$; $G\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Szögfüggvények

1. A szinusz- és koszinuszfüggvény definíciója, egyszerű tulajdonságai

1. *a)* 0 *b)* $\frac{\sqrt{3}}{4}$ *c)* 2,7475

2. *a)* $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$ *b)* $\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

3. *a)* Mivel $\frac{\pi}{2} > 1 > \frac{\pi}{4}$, ezért $\cos 1 < \sin 1$. *b)* Mivel $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, ezért $\cos 3 < \sin 3$.

4. *a)* pozitív *b)* pozitív *c)* pozitív

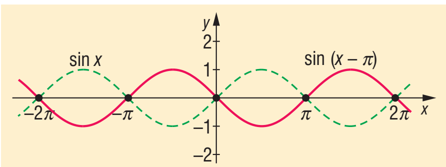
2. A szinuszfüggvény grafikonja

1. *a)* $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\quad x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

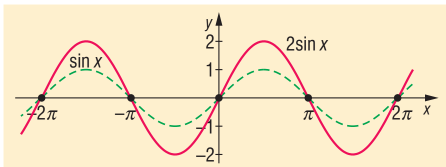
b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z};\quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$

c) $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

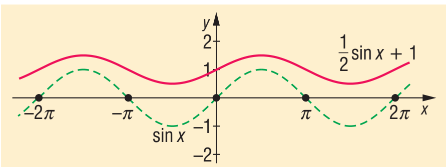
2. *a)*



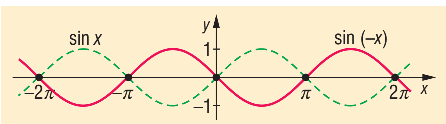
b)



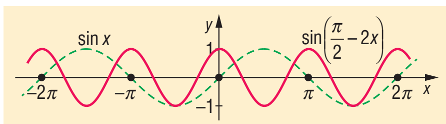
c)



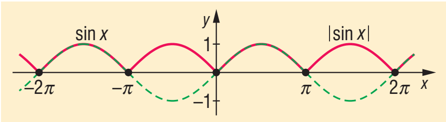
3. *a)*



b)



c)



4. Tekintsük a következő pontokat a koodináta-rendszerben:

$$A(x_1;\sin x_1),\ B(x_2;\sin x_2),\ C(x_3;\sin x_3),\ D\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3}{3}\right)$$

a) Ha $x_1 < x_2 < x_3$, akkor D az ABC háromszög súlypontja. Mivel a szinuszfüggvény az adott intervallumon alulról konkáv, az ABC háromszög belső pontjai, így D is a görbe alatt helyezkedik el, tehát

$$\sin\frac{x_1+x_2+x_3}{3} > \frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3}{3}.$$

b) Ha az A, B, C pontok közül valamelyik kettő egybeesik, akkor ez a 3 pont egy szakaszt határoz meg, melyen D egy harmadolópont. Ez is a görbe alatt helyezkedik el, tehát itt is igaz az előző egyenlőtlenség.

c) Ha $A = B = C$, akkor a 4 pont egybeesik, tehát a két oldal egyenlő.

3. A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek

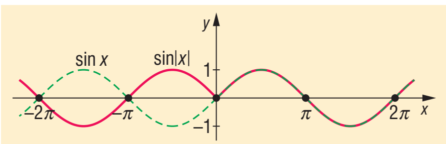
1. *a)* $x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ *b)* $x=m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$ *c)* $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2. *a)* $\frac{\pi}{4}+n\pi\le x\le\frac{3\pi}{4}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ *b)* $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

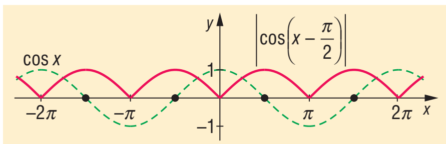
c) $-\frac{\pi}{2}+2l\pi<\sin x<\frac{\pi}{2}+2l\pi,\ l\in\mathbb{Z}$

Ha $l = 0$, akkor $x\in\mathbb{R}$; ha $l\ne 0$, akkor nincs megoldás. Tehát $x\in\mathbb{R}$.

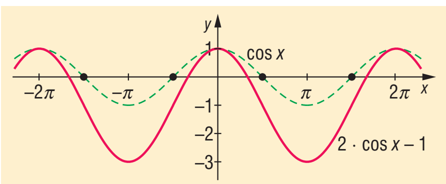
3. *a)*



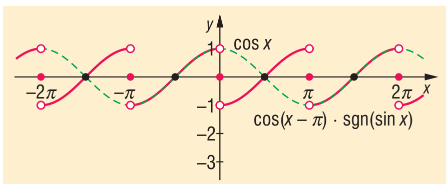
b)



c)



d)



4. *a)* Mivel bármely valós szám esetén $x^2+1\ge 1$ és $-1\le\sin x\le 1$, csak akkor lehet megoldás, ha $x^2+1=1$ és $\sin x=1$. Az első feltételnek csak a 0 tesz eleget, amely azonban nem elégíti ki a második feltételt, így az egyenletnek nincs megoldása.

b) Ha $x<0$, igaz az egyenlőtlenség. Ha $x>0$, akkor tudjuk, hogy

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \quad \text{és} \quad 0\leq 2|\sin x|\leq 2.$$

Csak akkor lehet megoldás, ha

$$x+\frac{1}{x}=2 \quad \rightarrow \quad x=1,$$

$$2|\sin x|=2 \quad \rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

A megoldás $x<0$.

c) Tudjuk, hogy

$$\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\geq 2 \quad \text{és} \quad -2\leq 2\sin x\leq 2.$$

Csak akkor lehet megoldás, ha

$$\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}=2 \quad \rightarrow \quad x=0+l\pi,\ l\in\mathbb{Z},$$

$$2\sin x=2 \quad \rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+2m\pi,\ m\in\mathbb{Z}.$$

Nincs megoldás.

4. A tangesns- és kotangensfüggvény

1. *a)* –8,4188 *b)* 56,8022

2. *a)* $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

b) $x=\frac{\pi}{4}+l\pi,\ l\in\mathbb{Z}$

c) $\operatorname{tg} x_1=1 \qquad \operatorname{tg} x_2=5$

$x_1=\frac{\pi}{4}+l\pi \qquad x_2=1{,}37+k\pi,\ l,k\in\mathbb{Z}$

d) $\operatorname{tg} x>0$

$k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

e) $-\frac{\pi}{2}+l\pi<2x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+l\pi,$

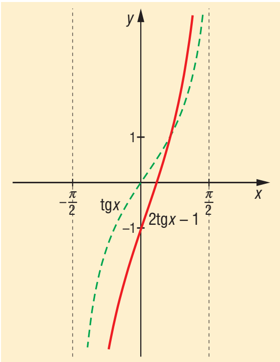
$-\frac{\pi}{8}+l\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+l\frac{\pi}{2},\ l\in\mathbb{Z}$

f) $m\pi < |x| < \dfrac{\pi}{6} + m\pi$

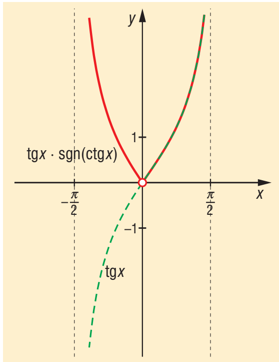
Ha $m < 0$, nincs megoldás.

Ha $m \geq 0$, akkor $-\dfrac{\pi}{6} - m\pi < x < -m\pi$ vagy $m\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

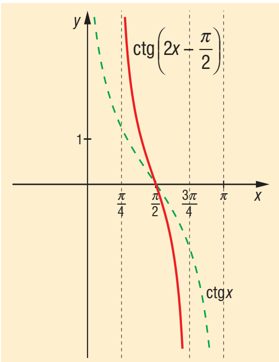
4. *a)*



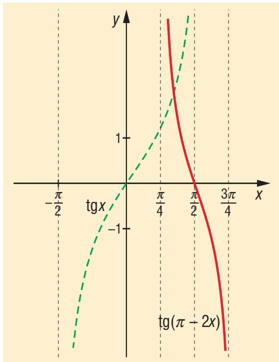
b)



c)



d)



4. Tekintsük a következő pontokat a koodináta-rendszerben:

$$A(x_1; \operatorname{tg} x_1),\ B(x_2; \operatorname{tg} x_2),\ C(x_3; \operatorname{tg} x_3),\ D\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{tg} x_3}{3}\right)$$

a) Ha $x_1 < x_2 < x_3$, akkor D az ABC háromszög súlypontja. Mivel a tangensfüggvény az adott intervallumon alulról konvex, az ABC háromszög belső pontjai, így D is a görbe fölött helyezkedik el. Tehát

$$\operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} > \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{tg} x_3}{3}.$$

b) Ha A, B, C közül valamelyik kettő egybeesik, akkor a 3 pont egy szakaszt határoz meg, melyen D harmadolópont. Ez szintén a görbe fölött helyezkedik el, így itt is igaz az előző egyenlőtlenség.

c) Ha $A = B = C$, akkor a két oldal egyenlő.

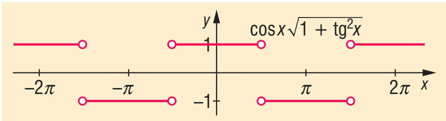
6. Az előző alapján

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 3 \cdot \operatorname{tg} 60° = 3 \cdot \sqrt{3}.$$

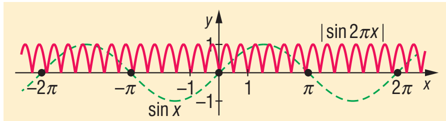
Ezzel az állítást beláttuk.

5. Összetett feladatok és alkalmazások

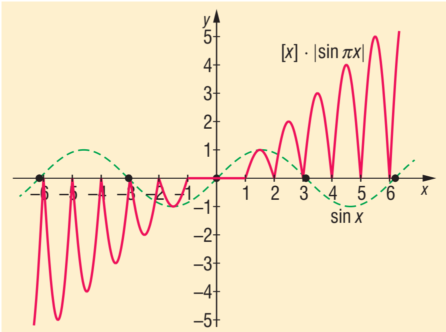
1. *a)*



b)



c)



2. *a)* Mivel $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ és $\cos(\pi+x)=-\cos x$, az egyenlet megoldása

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

b) Használjuk fel, hogy $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-x\right)$. Így

$$\frac{5\pi}{6}-x=x+\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{vagy} \quad \frac{5\pi}{6}-x=-x-\frac{\pi}{6}+2m\pi$$

$$x=\frac{\pi}{3}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \qquad \text{nincs megoldás}$$

c) Osszunk $\sqrt{2}$-vel, és kapjuk, hogy

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{4}\quad\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

d) Mivel $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Így kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

$$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi,$$

$$x=k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

3. *a)* Mivel $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, kapjuk, hogy:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2},$$

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{12}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

b) Mivel $\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}>0$, kapjuk

$$\operatorname{tg}^4 x-2\operatorname{tg}^2 x+1>0,$$

$$(\operatorname{tg}^2 x-1)^2>0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x\neq 1,$$

$$x\neq\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

c) $\sin\pi x>\cos\pi x,$

$$\frac{\pi}{4}+2l\pi<\pi x<\frac{5\pi}{4}+2l\pi,$$

$$\frac{1}{4}+2l<x<\frac{5}{4}+2l,\ l\in\mathbb{Z}.$$

d) $1-\cos x<\operatorname{tg}x(1-\cos x),$

$$0<(\operatorname{tg}x-1)(1-\cos x)$$

Mivel $1-\cos x\geq 0$,

$$\operatorname{tg}x>1\ \text{ és }\ \cos x\neq 1,$$

$$\frac{\pi}{4}+n\pi<x<\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

4. *a)* $\cos 4x\neq 0$ és $\cos 3x\neq 0$ és $\sin 3x\neq 0$

$$x\neq n\frac{\pi}{6}\ \text{ és }\ x\neq\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4},\ n,k\in\mathbb{Z}.$$

b) $\operatorname{ctg}^2 3x \le 1$ és $\sin 3x \ne 0$,
$-1 \le \operatorname{ctg} 3x \le 1$ és $\sin 3x \ne 0$,

$$\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) $\operatorname{tg} 3x \ge 0$ és $\cos 3x \ne 0$,

$$l\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{6} + l\frac{\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z}.$$

d) $-1 < \operatorname{tg} x \le 1$ és $\cos x \ne 0$,

$$-\frac{\pi}{4} + m\pi < x \le \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{3},\ m \in \mathbb{Z}.$$

5. Tudjuk, hogy $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$ és $\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3}{3} \le \sin\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ $(0 \le x_1;\ x_2;\ x_3 \le \pi)$.

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \le \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3 \le \left(\sin\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3 = \sin^3\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right) = \frac{1}{8}$$

6. Geometriai alkalmazások

1. *a)* $t = 5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ *b)* $t = \frac{63}{8}\ \text{cm}^2$ *c)* $t = \frac{39\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}^2$ *d)* $t = 394{,}1\ \text{cm}^2$

2. *e)* $t = \frac{R^2}{2}(\sin 230° + \sin 78° + \sin 52°) = \frac{R^2}{2}$

a) $t = \frac{25}{2}\ \text{cm}^2$ *b)* $t = 72\ \text{dm}^2$ *c)* $t = 3042\ \text{mm}^2$ *d)* $t = 288\ \text{cm}^2$

3. *a)* 30°; 150° *b)* 48,6°; 131,4° *c)* 18,2°; 161,8° *d)* 12,5°; 167,5°

4. *a)* 4 *b)* 15,2 *c)* 3,2 *d)* 4,3

5. *a)* $\frac{35\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$ *b)* $26\ \text{cm}^2$ *c)* $16{,}9\ \text{m}^2$

6. Tudjuk, hogy egy a, b oldalú α szögű paralelogramma területe $a \cdot b \cdot \sin\alpha$, valamint, hogy egy konvex négyszög középvonalai egy olyan paralelogrammát határoznak meg, melynek oldalai az átlók fele, egyik szöge az átlók által bezárt szög, és területe fele a négyszög területének. Így

$$t = 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \sin\varphi = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Valószínűségszámítás

1. Események

1. *a)* (i, i, i) (i, i, f) (i, f, f) (f, f, f)
(i, f, i) (f, i, f)
(f, i, i) (f, f, i)

b) Írásból és fejből álló négyesek, 16 elemi esemény.

c) Rendezett számpárok, 36 elemi esemény.

d) Ugyanaz, mint a *c)*.

e) (p, p, p) (p, p, k) (p, k, k)
(p, k, p) (k, p, k)
(k, p, p) (k, k, p)

f) A könyvhöz választhatunk egy embert, majd a többihez a megmaradtak közül, 12 elemi esemény.

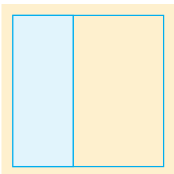
g) Mindkét tárgyhoz bárkit rendelhetünk, 16 elemi esemény.

h) Az 1, ..., 5 számokból álló n-esek (n db szám egymás után) és ezeket követő 6-os, végtelen sok elemi esemény.

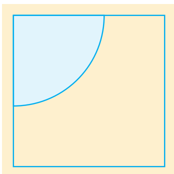
2. $A = \{(i; f); (f; i)\}$
$B = \{(i; f); (f; i); (f; f)\}$
$C = \{(i; i); (i; f); (f; i)\}$

3. $A = \{(6; 1); (6; 2); (6; 3); (6; 4); (6; 5); (6; 6)\}$
$B = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5); (6; 6)\}$
$C = \{(2; 1); (4; 2); (6; 3)\}$
$D = \{(2; 1); (3; 1); (3; 2); (4; 1); (4; 2); (4; 3); (5; 1); ...; (5; 4); (6; 1); ...; (6; 5)\}$

4. *A:*

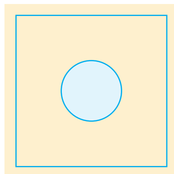


B:



C: Ilyen nincs.

D:



5. Biztos esemény: *B*, *E*. Lehetetlen esemény: *C*.

2. Műveletek eseményekkel

1. $A = \{4; 5; 6\}$
$\overline{A} = \{1; 2; 3\}$
$\overline{A}$: 4-nél kisebbet dobunk

$B = \{1; 2\}$
$\overline{B} = \{3; 4; 5; 6\}$
$\overline{B}$: nagyobb 2-nél a dobott szám

$C = \{(6; 1); (6; 2); ...; (6; 6); (5; 6); ...; (1; 6)\}$
$\overline{C}$: a két szám közül egyik sem 6-os
$\overline{C} = \{(1; 1); (1; 2); ...; (1; 5); (2; 1); ...; (2; 5); ...; (5; 5)\}$

$D = \{(f, f, f)\}$
$\overline{D} = \{(i, f, f); (f, i, f); (f, f, i); (i, i, f); (i, f, i); (f, i, i); (i, i, i)\}$
$\overline{D}$: 3 dobás között van írás

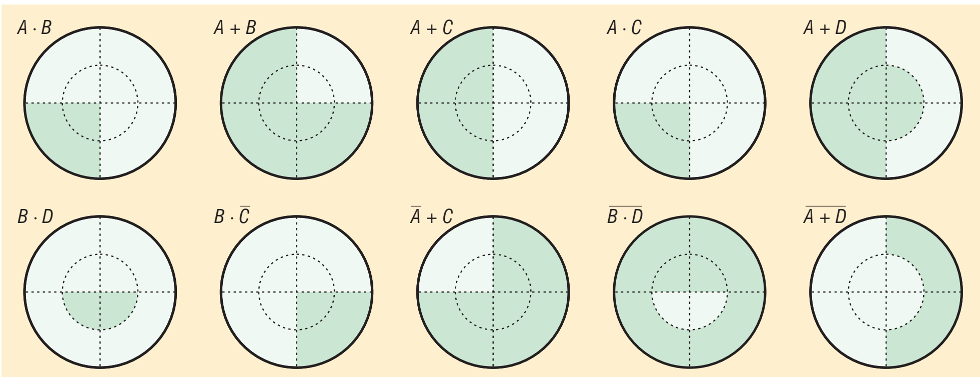
$E = \{(i, i, i); (f, f, f)\}$
$\overline{E} = \{(i, i, f); (i, f, i); (f, i, i); (f, f, i); (f, i, f); (i, f, f)\}$
$\overline{E}$: nem minden dobás egyforma

2. $A \cdot B$: a dobott szám a 2
$A + B$: prím vagy páros (nem 1)
$C + D$: biztos esemény ($\overline{C} = D$)
$C \cdot D$: lehetetlen esemény
$\overline{B} \cdot C$: (1 vagy 3) 4-nél kisebb páratlan
$\overline{C} + \overline{D}$: biztos esemény
$\overline{C} \cdot \overline{D}$: lehetetlen esemény

3. $A \cdot B$: 3-mal osztható páros szám
$A \cdot C = C$
$A \cdot D = D$
$C \cdot D = C$
$C + D = D$
$A + C = A$
$\overline{B} \cdot C = \varnothing$
$B \cdot \overline{C}$: 3-mal osztható és nem minden jegy 6-os

4. *a)* $\underline{A} \cdot (B + C)$: angolul tanuló vagy énekkaros lány
$\overline{A} \cdot B \cdot C$: angolul tanuló, énekkaros fiú
b) $\underline{A} \cdot B \cdot C = A$: minden lány énekkaros és tanul angolul
$\overline{A} = C$: minden fiú énekkaros, és csak ők

5.



6. a) $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

b) $A \cdot B \cdot C$

c) $A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

d) $A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$

e) lásd *d)*

f) $A \cdot B \cdot C$

g) $A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

3. Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség

4. Akkor nyerünk, ha a dobott számok összege 11; 12; ...; 18.
A 11-et 3 darab 1 és 6 közötti szám összegeként a következőképpen bonthatjuk föl:

$6+4+1$ (6-féleképpen állhat elő)
$6+3+1$ (6-féleképpen állhat elő)
$5+5+1$ (3-féleképpen állhat elő)
$5+4+2$ (6-féleképpen állhat elő)
$5+3+3$ (3-féleképpen állhat elő)
$4+4+3$ (3-féleképpen állhat elő)

Tehát 11-et $6+6+3+6+3+3 = 27$-féleképpen dobhatunk.

Hasonlóképpen megkaphatjuk, hogy 12-t 25-féleképpen, 13-at 21-féleképpen, 14-et 15-féleképpen, 15-öt 10-féleképpen, 16-ot 6-féleképpen, 17-et 3-féleképpen és 18-at 1-féleképpen dobhatunk.

Tehát összesen $27+25+21+15+10+6+3+1 = 108$-féleképpen nyerhetünk.

Egy másik módszer a lehetőségek összeszámolására: Először csak két kockával dobjunk, és nézzük meg a kimenetel 36 lehetőségét. Egyszer 2 lesz az összeg. Kétszer 3 lesz az összeg. Háromszor 4 lesz az összeg. Négyszer 5 lesz az összeg. Ötször 6 lesz az összeg. Hatszor 7 lesz az összeg. Ötször 8 lesz az összeg. Négyszer 9 lesz az összeg. Háromszor 10 lesz az összeg. Kétszer 11 lesz az összeg. Egyszer 12 lesz az összeg. Most a fenti két dobás mellé képzeljünk el egy harmadikat is. Nézzük meg, hogy az első két kocka dobásösszegének egyes értékeihez a harmadik kocka hány kimenetelére lesz a teljes összeg több, mint 10. Rendre 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6-t kapunk. A lehetőségek teljes száma

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 108.$$

4. A valószínűség klasszikus modellje

1. $p(A) = \frac{1}{6}$; $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $p(C) = \frac{1}{2}$; $p(D) = 1$

2. $p(0) = \frac{1}{4}$; $p(1) = \frac{1}{2}$; $p(2) = \frac{1}{4}$

3. $p(A) = \frac{1}{2}$; $p(B) = \frac{19}{64}$

4. *A:* két kockával legalább egy 1-es.
B: négy kockával legalább két 2-es.

$$p(A)=\frac{11}{36};\quad p(B)=\frac{\binom{4}{2}\cdot 5^2+\binom{4}{3}\cdot 5+\binom{4}{4}}{6^4}=\frac{19}{144}.$$

A-nak nagyobb a valószínűsége.

5. $p(A\cdot B)=\frac{1}{32};\quad p(A+B)=\frac{11}{32};\quad p(A\cdot C)=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$

$p(A\cdot D)=0;\quad p(C\cdot D)=\frac{6}{32}=\frac{3}{16};\quad p(C+D)=\frac{26}{32}=\frac{13}{16}$

$p(A+C)=\frac{14}{32}=\frac{7}{16};\quad p(\bar{B}\cdot C)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4};\quad p(B\cdot\bar{C})=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

6. $p=\frac{5}{\binom{8}{4}}=\frac{5}{70}$ A parkolás valószínűsége: $\frac{1}{14}$.

7. $p=\frac{14\cdot 13\cdot\ldots\cdot 6\cdot 5}{14\cdot 13^9}=\frac{12\cdot 11\cdot\ldots\cdot 6\cdot 5}{13^8}\sim 0{,}024$

A valószínűség 0,024.

8. $p(1)=\frac{1}{6};\quad p(2)=\frac{5}{36}$

Egy kockával dobjunk.

9. $p=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

10. Annak a valószínűségével dolgozunk, hogy legfeljebb 3 dobásból az összeg 7. Ez 3-féleképpen lehet, hogy elsőre, másodikra vagy harmadikra lesz 7.

$$p=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{125}{216}$$

11. A 9 a legvalószínűbb összeg, 8-féleképpen valósulhat meg.

12. $p=\frac{4!\cdot 3!}{7!}=\frac{1}{35}$

13. Ha Jancsi páros számot húz, akkor Juliska bármit húzhat a megmaradt 9 szám közül. Ha Jancsi páratlant húz, akkor Juliskának párost kell húznia. Tehát

$$p=\frac{5\cdot 9+5\cdot 5}{10\cdot 9}=\frac{7}{9}.$$

14. Mindketten 3-féle számot kapnak. Tomié 4 esetben nagyobb. $p = \frac{4}{9}$

15. A *C)* kockát érdemes választani.

16. Nem világos a feladat. Hogyan rendezik a tornát? Gyakran a csapatokban lesz egy első táblás, egy második táblás és egy harmadik táblás játékos, és csak az azonos táblás játékosok játszanak egymással. Máskor a csapatok találkozásánál mindenki játszik mindenkivel. A különböző lehetőségeket tekintetbe véve a csapatok mindig körbeverik egymást. A tornán megnyert mérkőzések száma is ugyanaz lesz az egyes csapatok esetén.

17. Az *A* játékos szerepét, hisz az $6 \cdot 5 \cdot 4$-féleképpen valósulhat meg, míg *B*-nek 6 kedvező esete van.

18. Csabának előnyösebb, a nyerési esélyem: $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.